

Kalkulus

Járai Antal

Második, elektronikus kiadás

ELTE Informatikai Kar, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1 Halmazok	7
1.1 Halmazelméleti alapfogalmak	7
1.2 Relációk	10
1.3 Függvények	15
2 Számok	20
2.1 Valós számok	20
2.2 Megszámlálható halmazok	32
2.3 Komplex számok	36
2.4 Polinomok	45
3 Határérték	49
3.1 Folytonosság és határérték	49
3.2 Sorozatok és sorok	58
3.3 Elemi függvények	68
4 Differenciálszámítás	77
4.1 Derivált	77
4.2 Szélsőértékek	82
5 Integrálszámítás	91
5.1 Primitív függvények	91
5.2 Határozott integrál	99
5.3 Alkalmazások	110
6 Lineáris algebra	122
6.1 Mátrixok és vektorok	122
6.2 Lineáris leképezések	141
6.3 Belső szorzat	172
7 Többváltozós függvények	187
7.1 Folytonosság és határérték	187
7.2 Differenciálszámítás	203
7.3 Integrálszámítás	236
8 Függvénysorozatok és függvénytörések	252
8.1 Pontonkénti és egyenletes konvergencia	252
8.2 Fourier-sorok	265

9	Vektoranalízis	278
9.1	Görbe menti integrál	278
9.2	Felületi integrál	296
10	Komplex függvénytan	313
10.1	Holomorf függvények	313
10.2	Meromorf függvények	327
11	Differenciálegyenletek	336
11.1	Alapfogalmak	336
11.2	Elemi megoldási módszerek	342
11.3	Általános eredmények	349
11.4	Lineáris differenciálegyenletek	353
11.5	Laplace-transzformáció	360
12	Valószínűesszámítás és statisztika	365
12.1	Valószínűesszámítás	365
12.2	Matematikai statisztika	385
	Irodalom	391
	Mutató	394

Bevezetés

Végül az olvasó valószínűleg meglepődik, hogy a Riemann-integrált, az analízis-előadások ezen tiszteletre méltó tárgyát egyáltalán nem vezetjük be. Könnyen elképzelhető, hogy ha ez a fogalom nem ilyen jól csengő névhez kapcsolódna, már régen túlhaladottá vált volna. Bernhard Riemann zsenije iránti minden tisztelet mellett minden gyakorló matematikus tisztában van vele, hogy ez az „elmélet” manapság az általános mérték- és integrálelmélet keretében legfeljebb egy érdekesebb feladat jelentőségével bír. Csak az akadémiai tradíció begyepesedett konzervativizmusa tudta a Riemann-integrált az analízisoktatás teljes értékű részeként megtartani jóval azután, hogy történeti jelentőségét túlélte.

Jean Dieudonné

Oktatásunk az utóbbi időben egyre inkább az USA oktatásához kezd hasonlítani. Az informatikusok és a mérnökök oktatásában ez azt jelenti, hogy a hangsúly az alapos megértésről átkerült az alapfogalmak és eljárások gyors elsajátítására. Ellentmondásban ezzel, a villamosmérnökök oktatásában is elkerülhetetlenné vált a kvantummechanikához nélkülözhetetlen matematikai alapfogalmak – például az $\mathbb{L}^2$ -tér – legalább vázlatos ismertetése. Ugyanezek az alapfogalmak szükségesek a numerikus analízis haladottabb fejezeteinek megértéséhez. További szempont, hogy a számítógépes rendszerek fejlődése feleslegessé tette egyes eljárások, például integrálási módszerek begyakorlását, viszont kiváló lehetőséget nyújt az oktatás során a szemléltetésre.

Az ellentmondó követelmények kielégítésére ma már megvan a lehetőség: az integrál tárgyalását a Kurzweil-integrálra kell alapozni. Ez az integrál általánosabb, mint a Lebesgue-integrál, így jó alapot ad az $\mathbb{L}^2$ -tér és ha kell, a Szoboljev-terek tárgyalásához, mégis, definíciója nagyon hasonló a Riemann-integrál definíciójához, és meglepő módon a legtöbb állítás bizonyítása sem nehezebb, sőt, a legalapvetőbb állítások megfogalmazása még egyszerűbb lesz. Ez az első magyar nyelvű tankönyv, amely ezt a felépítést alkalmazza.

Az anyag felépítése sok tapasztalat felhasználásával nyerte el jelenlegi formáját. Felhasználtam az 1980-as évek elején a KLTE-n a programozó matematikusok, valamint a fizikusok analízisoktatásában szerzett tapasztalatokat, az 1990-es évek végén az ELTE-n programtervező matematikusok és alkalmazott matematikusok analízisoktatásában szerzett tapasztalatokat, de legfőképpen a BME-n a villamosmérnökök BSc és MSc analízisoktatásában szerzett tapasztalatokat. Az anyag jelenlegi változatát a villamosmérnök BSc oktatásban próbáltam ki, és a felsőbb analízis oktatásánál az MSc hallgatónak ez volt az a hivatkozási alap, amelyre egy számos témakör (numerikus analízis, Fourier-transzformáció, waveletek, Hardy-terek, variációszámítás, Pontrjagin-féle maximumelv, differenciálható sokaságok) alapjait tartalmazó előadást alapozhattam.

Az anyag megfelel a BME villamosmérnök-hallgatói számára tartott „Matematika A1”, „Matematika A2” és „Matematika A3” előadások három feléve anyagának. Itt a magyarázatokat szinte teljesen mellőztem, így ez a könyv semmiképpen sem helyettesíti

az előadást. Úgy gondolom azonban, közreadása mégis hasznos, mert segítséget nyújt az előadáson a jegyzeteléshez, lehetővé teszi mindenki számára, hogy az előadáson készült jegyzeteit kiegészítse, hibáit javítsa, és világosan rögzíti, miben tértem el egyéb jegyzetektől, mi a tananyag. Jól használható arra is, hogy utánanézzünk valaminek. Ez utóbbit részletes index könnyíti meg. A törzsanyagon kívüli részeket *-gal jelöltem. A °-rel megjelölt részek olyan fogalmakat is felhasználnak, amelyeket még nem definiáltunk, és csak magyarázatként szolgálnak. A definícióban a definiált fogalmakat és az állításokat *dőlt* betűvel szedtem. A bizonyítások végét $\square$ jelzi.

Az első bekezdésben említett szempontok alapján az anyag minél egyszerűbb felépítésére törekedtem. A középiskolás ismeretek kissé magasabb szintről történő áttekintése és a komplex számok bevezetése után, az alapvető halmazelméleti fogalmak birtokában a függvények folytonosságának és a határértékének tárgyalása következik. A sorozatok tárgyalása ezen az alapon történik. Az elemi függvények tárgyalása összekapcsolódik hatványsoruk tárgyalásával. Az egyváltozós függvények differenciálszámításának tárgyalása lényegében a szokásos. A valós változós függvények integráljának tárgyalása azonban a Kurzweil-integrálon alapul. Végül néhány alkalmazás zárja az első félév anyagát. A második félév a lineáris algebra (és a tenzorok) tárgyalásával kezdődik, és röviden összefoglalja a lineáris algebra numerikus módszereit és a simplex módszert is. Ezután a többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása következik. Természetesen itt is a Kurzweil-integrált használom; melléktermékként a Lebesgue-mértéket is megkapjuk. A függvény-sorozatok és függvény-sorok tárgyalása tartalmazza a Lebesgue-integrálra vonatkozó konvergenciátételek általánosításait is; természetesen a bizonyítások elhagyhatók. A Fourier-sorokat a matematikusoktatásban szokásos általánosságban tárgyaljuk, bár kisebb terjedelemben. A harmadik félév vektoranalízissel kezdődik; természetesen a görbe menti integrált is Kurzweil felépítésében tárgyaljuk. Itt a teljesség kedvéért részletezzük a Lebesgue-integrállal való kapcsolatot is; természetesen ez kihagyható. A Gauss-, Green- és Stokes-tétel az általános integrálfogalom miatt kellő általánosságban fogalmazható meg. A komplex függvénytan – a kellően általános görbe menti integrál miatt – egyszerűen tárgyalható. A differenciálegyenletek tárgyalása a szokásos, de egy rövid pont – kihasználva, hogy kellően általános integrálfogalom áll rendelkezésre – a Laplace-transzformációra is kitér. Végül a valószínűségszámítás és matematikai statisztika – ami a mérnökoktatásban hagyományosan ide tartozik – rövid tárgyalása zárja a harmadik félévet. Mindenütt az egyszerűség elsődleges szempontjának a matematikai pontossággal és kellő általánossággal való ötvözésére törekedtem.

A könyvhöz egy szemléltető példákat tartalmazó számítógépes anyag is tartozik, amely a honlapomon,

<http://moon.inf.elte.hu/~ajarai>

érhető el.

Köszönettel tartozom Rácz Andrásnak, aki igen gondosan átnézte a jegyzet első változatát, és rendkívül sok értékes megjegyzéssel, észrevétellel járult hozzá a javításához. Köszönöm az Eötvös Kiadó munkatársainak a könyv megjelenéséhez nyújtott segítségét.

Ez a 2., elektronikus változat a papír alapú kiadáshoz képest kisebb hibák javításán kívül mintegy 15 oldal kiegészítést tartalmaz, elsősorban a feltételes szélsőértékszámítás témaköréből, de alapvető változtatásokat nem. Elérhető az ELTE Infomatikai Kar Digitális Könyvtárában vagy a honlapomon.

Budapest, 2025. október 23.

Járai Antal

Halmazok

Ebben a fejezetben a halmazokat, relációkat és függvényeket tárgyaljuk, kiegészítve a középiskolában tanultakat.

1.1 Halmazelméleti alapfogalmak

1.1.1. Halmazelmélet. A halmazokról szemléletes elképzelésünk, hogy a halmaz, vagy rendszer, osztály, összesség (egyeseknél család, sokaság, gyűjtemény) elemeinek gondolati burka („zsák”). A halmazelméletben (az egyenlőségen kívül) a „halmaznak lenni” (nincs jele) és az „elem” alapfogalom szerepel. Az $x \in A$ (vagy $A \ni x$) jelentése, hogy az x (elem, dolog) eleme az A halmaznak, vagy másként x hozzátartozik A -hoz. Ennek tagadását $x \notin A$ jelöli. Hasonlóan más esetekben is áthúzással jelöljük a tagadást, például $A \neq B$ jelentése, hogy A nem egyenlő B -vel. Egy halmaz elemei között lehetnek halmazok is. A jelölések tetszőlegesek, de általában a „bonyolultabb dolog, bonyolultabb betű” elvet követjük.

1.1.2. Meghatározottság. Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha az elemeik ugyanazok. Egy halmazt tehát elemei határoznak meg. Nincs olyasmi, hogy valami „többször eleme” egy halmaznak. A meghatározottság az „ $\in$ ” egy lényeges tulajdonságát fejezi ki, például a „gyermek” kapcsolat az emberek között nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

1.1.3. Részhalmazok. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részalmaz*a a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$ vagy $B \supset A$. Ha A részhalmaz B -nek, de nem egyenlő vele, akkor azt mondjuk, hogy A *valódi részhalmaz*a B -nek. Jele: $A \subsetneq B$ vagy $B \supsetneq A$. (Más, logikusabb, de kevésbé elterjedt jelölések: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ a részhalmazra és $A \subset B$ vagy $B \supset A$ a valódi részhalmazra.) Minden halmaz részhalmaz *saját* magának (*reflexivitás*), és ha $A \subset B$, $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (*transzitivitás*). Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor a meghatározottság szerint $A = B$. Erre azt mondjuk, hogy $\subset$ *antiszimmetrikus*. (Az egyenlőségre még az is teljesül, hogy ha $A = B$, akkor $B = A$ is, az egyenlőség *szimmetrikus*.) A meghatározottság úgy is fogalmazható, hogy az A és B halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha $A \subset B$ és $B \subset A$. Rendszerint ennek alapján bizonyítjuk halmazok egyenlőségét.

Ha A halmaz, akkor $\{x \in A : \dots\}$ vagy $\{x \in A \mid \dots\}$ jelöli azt a halmazt, amelyhez A -nak pontosan azok az x elemei tartoznak, amelyekre a kipontozott részre írt feltétel igaz. Néha, ha világos, hogy milyen A halmaz részhalmazára gondolunk, az „ $\in A$ ” részt a jelölésből elhagyjuk.

Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, *üres halmaz*nak nevezzük, és $\emptyset$ jelöli. (A meghatározottság miatt csak egy üres halmaz van.) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaz *a*, és persze minden nem üres halmaznak valódi részhalmaz *a*.

Egy halmazt úgy is megadhatunk, hogy kapcsos zárójelek között felsoroljuk az elemeit, például $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ stb. (Ennek megfelelően programozási nyelvekben az üres halmazra szokásos a $\{\}$ jelölés is.)

1.1.4. Unió. Ha A és B halmazok, akkor azt a halmazt, amelynek pontosan azok az elemei, melyek elemei A -nak vagy B -nek (vagy mindkettőnek), $A \cup B$ -vel jelöljük, és a két halmaz *uniójának* nevezzük. Régebbi könyvek néha $\cup$ helyett $+$ -t írnak. (Unió helyett egyesítést is szokás mondani.)

Jóval általánosabban, ha $\mathcal{A}$ egy halmaz, melynek elemei mind halmazok, akkor azt a halmazt, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek $\mathcal{A}$ valamely elemének az elemei, az $\mathcal{A}$ *uniójának* nevezzük. Ennek a jelölése: $\cup \mathcal{A}$ vagy $\cup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ vagy $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$.

Nyilván $\cup \emptyset = \emptyset$ és ha A egy halmaz, akkor $\cup \{A\} = A$, ha pedig A és B halmazok, akkor $A \cup B = \cup \{A, B\}$.

*** 1.1.5. Axiomatikus halmazelmélet.** Ha valaki figyelmesen megnézi, a fenti tárgyalás nem pontos. Néhány dolgot, például hogy két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, vagy hogy van üres halmaz stb., egyszerűen elfogadtunk, a szemlélet alapján. Pontos tárgyalásnál ezeket axiómaként kellene felsorolni. Pontosabb tárgyalás található a [33] könyvben.

1.1.6. Állítás: az unió tulajdonságai. Ha A, B, C halmazok, akkor

- (1) $A \cup \emptyset = A$;
- (2) $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás);
- (3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás);
- (4) $A \cup A = A$ (idempotencia);
- (5) $A \subset B$ akkor és csak akkor, ha $A \cup B = B$. $\square$

1.1.7. Metszet. Ha A és B halmazok, legyen $A \cap B := \{x \in A : x \in B\}$. ($A :=$ azt jelenti, hogy a bal oldalán szereplő jelölést a jobb oldalán szereplő kifejezéssel definiáljuk.) Régebbi könyvekben néha $\cap$ helyett $\cdot$ áll (vagy semmi sem). Jóval általánosabban, ha $\mathcal{A}$ halmazok egy nem üres rendszere, akkor a halmazrendszer *metszetét* a

$$\cap \mathcal{A} := \{x : x \in A \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Más jelölések: $\cap \{A : A \in \mathcal{A}\}$ és $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$. Ha teljesen pontosak akarnánk lenni, akkor

$$\cap \mathcal{A} := \{x \in \cup \mathcal{A} : x \in A \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}\}.$$

Ha A és B halmazok, akkor nyilván $A \cap B = \cap \{A, B\}$.

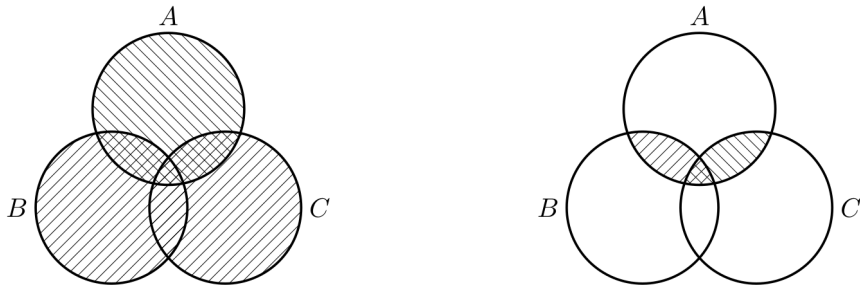
Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B *diszjunktak* (vagy *idegenek*). Általánosabban, ha egy nem üres $\mathcal{A}$ halmazrendszer metszete az üres halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a halmazrendszer *diszjunkt*. Ha már a halmazrendszer bármely két halmazának a metszete üres, akkor azt mondjuk, hogy elemei *páronként diszjunktak*. (Más szóhasználatban a páronként diszjunkt halmazokból álló halmazrendszert nevezik *diszjunkt*nak.)

1.1.8. Állítás: a metszet tulajdonságai. Ha A, B, C halmazok, akkor

- (1) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- (2) $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás);
- (3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás);
- (4) $A \cap A = A$ (idempotencia);
- (5) $A \subset B$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = A$. $\square$

1.1.9. Állítás: disztributivitási szabályok. Ha A, B, C halmazok, akkor

- (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (a metszet disztributivitása az unióra nézve);
- (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (az unió disztributivitása a metszetre nézve). $\square$



1.1.1 ábra: $A \cap (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ Venn-diagramja.

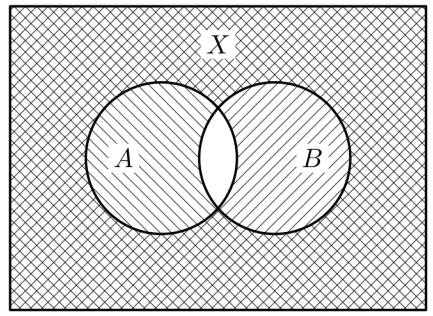
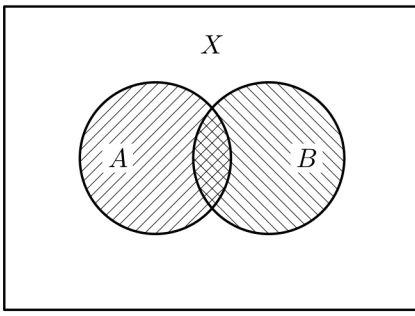
1.1.10. Különbség és komplementer. Az A és B halmazok *különbségét* (vagy *differenciáját*) az $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$ összefüggéssel definiáljuk. (Az $A - B$ jelölés is használatos.) A két halmaz *szimmetrikus differenciáját* (vagy *Boole-algebrai összegüket*) az $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ összefüggéssel definiáljuk. (Az $A + B$ és $A \circ B$ jelölések is használatosak.) Ha $A \subset X$, akkor az $X \setminus A$ halmazt néha A' -vel (vagy $\overline{A}$ -sal) jelöljük, és az A halmaz X -re vonatkozó *komplementerének* nevezzük. Ez természetesen nem csak A -tól, hanem az X „alaphalmaztól” is függ, ami az A' jelölésben nem jut kifejezésre. Emiatt, bár az A' jelölés rövidebb, általában mégis inkább kiírjuk helyette, hogy $X \setminus A$. A következő állításban meghagytuk a $'$ jelölést.

1.1.11. Állítás. Ha $A, B \subset X$, akkor az előző definíció jelöléseivel

- (1) $(A')' = A$;
- (2) $\emptyset' = X$;
- (3) $X' = \emptyset$;
- (4) $A \cap A' = \emptyset$;
- (5) $A \cup A' = X$;
- (6) $A \subset B$ akkor és csak akkor, ha $B' \subset A'$;
- (7) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
- (8) $(A \cap B)' = A' \cup B'$. $\square$

Az utolsó két állítást *De Morgan-szabályoknak* nevezzük; általánosabb változatukat később tanuljuk.

1.1.12. Hatványhalmaz. Egy A halmazhoz azt a halmazrendszert, amelynek elemei pontosan A részhalmazai, az A halmaz *hatványhalmazának* nevezzük. Jele $\wp(A)$, a $\wp$ betű a „Potenz” szóra utal.



1.1.2 ábra: $A \cap B$ és $A' \cup B'$ Venn-diagramja.

1.2 Relációk

A relációk a függvényfogalom általánosításai és a függvénykapcsolatnál általánosabb kapcsolatok leírására is alkalmasak.

° **1.2.1. Descartes-szorzat és reláció.** Az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett n -es fogalmát alapfogalomnak fogjuk tekinteni. Az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ rendezett n -eseket pontosan akkor tekintjük egyenlőnek, ha $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $x_i = y_i$. Azt mondjuk, hogy x_i az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett n -es i -edik koordinátája. Az $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ Descartes-szorzatot vagy direkt szorzatot mint az összes olyan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rendezett n -esek halmazát definiáljuk, amelyeknek az i -edik koordinátája X_i -ben van, ha $i = 1, 2, \dots, n$. Ilyen szorzathalmazok részhalmazait relációknak nevezzük. Tetszőleges kapcsolatokat relációkkal írhatunk le, ezért a relációk fontos szerepet játszanak az adatbázis-kezelő rendszerekben. Ha $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, akkor $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ helyett X^n -et szokás írni. Ennek a halmaznak a részhalmazait X -beli relációknak nevezzük.

1.2.2. Megjegyzés. Az előző definícióban felhasználtuk a természetes számokat. Nincs szükségünk a természetes számokra, ha először csak a legfontosabb speciális esetet, két halmaz Descartes-szorzatát definiáljuk, majd általánosítjuk a halmazok Descartes-szorzatának fogalmát tetszőleges halmazrendszerekre. A pontos tárgyalás megtalálható Halmos–Sigler [31] könyvében.

1.2.3. Binér relációk. Ha $n = 2$, akkor a rendezett n -eseket rendezett pároknak nevezzük. Egy halmazt binér relációnak (vagy kétváltozós relációnak) nevezünk, ha minden eleme rendezett pár. Ha R egy binér reláció, akkor $(x, y) \in R$ helyett gyakran azt írjuk, hogy xRy , és azt mondjuk, hogy x és y között fennáll az R reláció. (Vannak, akik egy binér reláció grafikonjáról vagy gráfjáról beszélnek, amikor párok halmazára gondolnak; vannak, akik a binér relációkat megfeleltetésnek nevezik.)

Egyszerű példák binér relációkra a két „szélsőséges eset”: az üres halmaz és két halmaz Descartes-szorzata. Bármely X halmazra az

$$\mathbb{I}_X := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

halmaz reláció (ez az egyenlőség X -en); ezt a relációt $X \times X$ diagonálisának is szokás nevezni. Bármely $\mathcal{F}$ halmazrendszerre az

$$\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subset Y\}$$

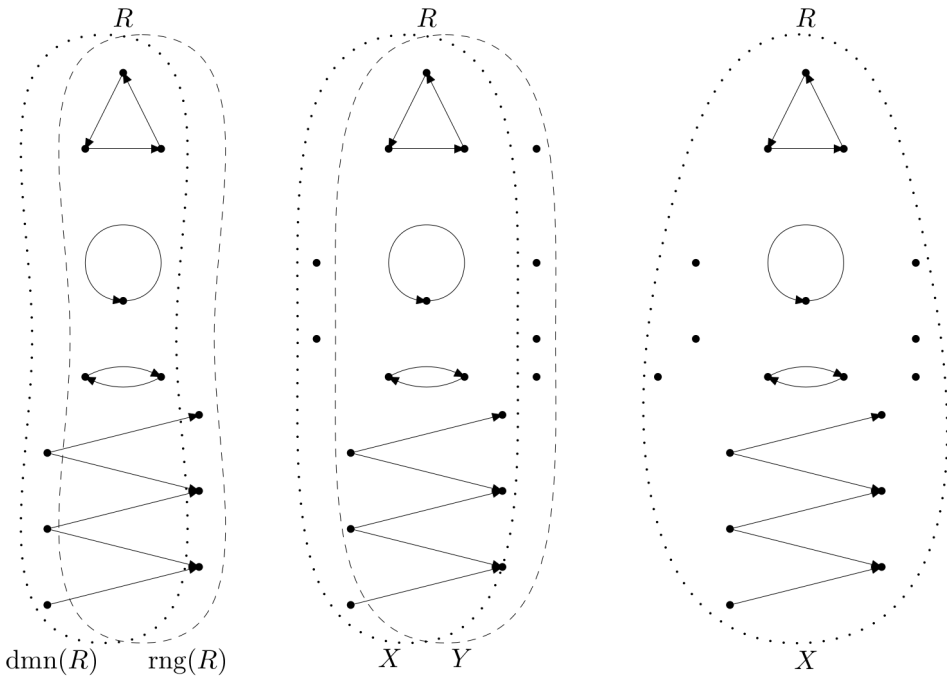
halmaz binér reláció (ez a tartalmazás $\mathcal{F}$ halmazai között). Bármely $\mathcal{F}$ halmazrendszerre az

$$\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subseteq Y\}$$

halmaz binér reláció (ez a valódi tartalmazás $\mathcal{F}$ halmazai között).

Ha valamely X és Y halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R *reláció* X és Y között. [Minden relációhoz léteznek ilyen halmazok, például $X = \text{dmn}(R)$ és $Y = \text{rng}(R)$ választható, lásd később.] Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R *egy X -beli binér reláció*. Nyilván minden X és Y közötti binér reláció tekinthető $X \cup Y$ -beli binér relációnak.

° **1.2.4. Relációk gráfja.** Gyakran érdemes binér relációkat úgynevezett „nyíldiagram-mal” szemléltetni: egy $R \subset X \times Y$ binér reláció szemléltetésére ábrázoljuk pontokkal X és Y elemeit, és vezessen irányított él x -ből y -ba (azaz rajzoljunk egy x -ből y -ba vezető nyilat), ha $(x, y) \in R$. Lásd az 1.2.1 ábrát.



1.2.1 ábra: dmn és rng , reláció X és Y között, X -beli reláció.

1.2.5. Értelmezési tartomány, értékészlet. Az R binér reláció *értelmezési tartományát* a

$$\text{dmn}(R) := \{x: \text{van olyan } y, \text{ hogy } (x, y) \in R\},$$

értékészletét pedig a

$$\text{rng}(R) := \{y: \text{van olyan } x, \text{ hogy } (x, y) \in R\}$$

összefüggéssel értelmezzük. A jelölések a „domain” illetve „range” szóra utalnak; dom vagy $\mathcal{D}$, illetve ran, $\mathcal{R}$ vagy im (az „image” szóból) is szokásosak, de a mássalhangzók több információt hordoznak.

1.2.6. Kiterjesztés, leszűkítés. Az R binér relációt az S binér reláció *kiterjesztésének* illetve S -et az R *leszűkítésének* (vagy *megszorításának*) nevezzük, ha $S \subset R$. Ha X egy halmaz, az R reláció X -re való *leszűkítésén* (vagy *megszorításán*) az

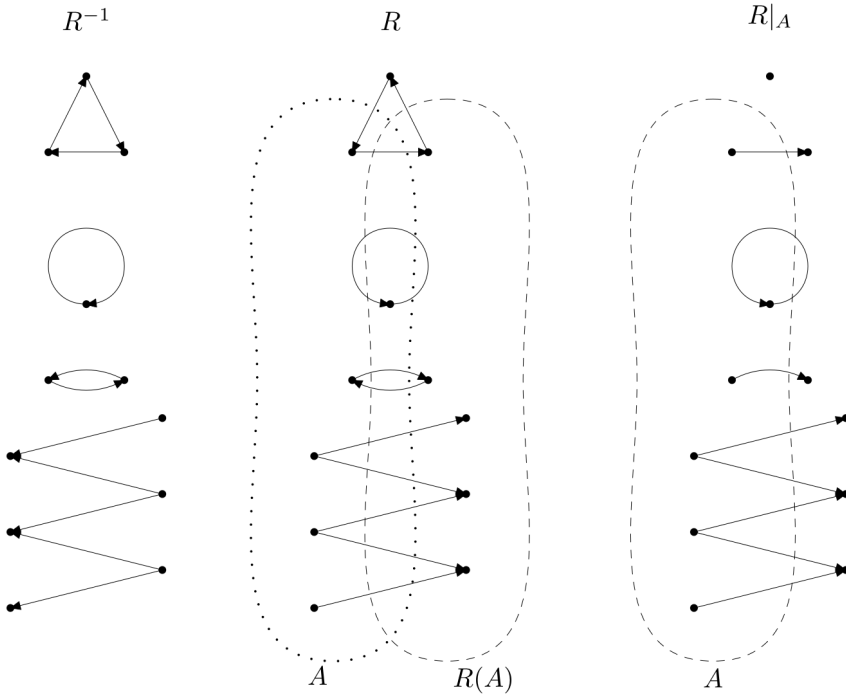
$$R|_X := \{(x, y) \in R: x \in X\}$$

relációt értjük. Lásd az 1.2.2 ábrát.

1.2.7. Inverz. Egy R binér reláció *inverzén* az

$$R^{-1} := \{(b, a): (a, b) \in R\}$$

binér relációt értjük. Nyilván $(R^{-1})^{-1} = R$; ha R reláció X és Y között, akkor R^{-1} reláció Y és X között, és $\text{dmn}(R^{-1}) = \text{rng}(R)$ valamint $\text{rng}(R^{-1}) = \text{dmn}(R)$.



1.2.2 ábra: Reláció inverze, halmaz képe, reláció megszorítása.

1.2.8. Halmaz képe és inverz képe. Legyen R egy binér reláció és A egy halmaz. Az A halmaz *képe* az R relációnál az

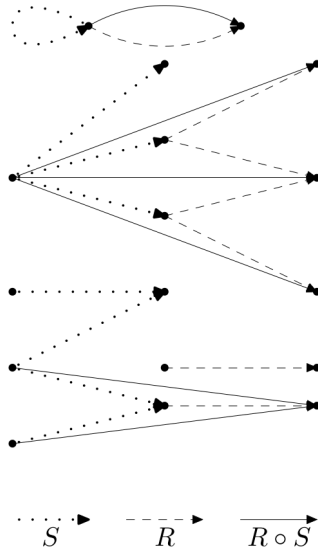
$$R(A) := \{y: \text{van olyan } x \in A, \text{ hogy } (x, y) \in R\}$$

halmaz. Vegyük észre, hogy $R(A)$ pontosan akkor üres, ha A és $\text{dmn}(R)$ diszjunktak. Az A halmaz *inverz képe* az R relációnál $R^{-1}(A)$. Ha $A = \{a\}$, akkor $R(\{a\})$ helyett $R(a)$ -t írunk. Ez kényelmes, de néha félreértésekre vezethet, ha például a és $\{a\}$ is eleme $\text{dmn}(R)$ -nek; ilyen kétes esetekben megmondjuk, hogy hagytunk-e el zárójelet.

1.2.9. Kompozíció. Az R és S binér relációk *összetételén* (*kompozícióján*, *szorzatán*) az

$$R \circ S := \{(x, y) : \text{van olyan } z, \text{ hogy } (x, z) \in S \text{ és } (z, y) \in R\}$$

relációt értjük. [Egyesek fordítva $S \circ R$ -et írnak; a fenti jelölés előnye, hogy ezzel bármely A halmazra $R(S(A)) = (R \circ S)(A)$.]



1.2.3 ábra: két reláció kompozíciója.

Két reláció kompozíciója lehet üres: ez a helyzet, ha $\text{rng}(S)$ és $\text{dmn}(R)$ diszjunktak.

1.2.10. Állítás. Legyen R, S és T binér reláció. Ekkor

- (1) ha $\text{rng}(S) \supset \text{dmn}(R)$, akkor $\text{rng}(R \circ S) = \text{rng}(R)$;
- (2) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ (a kompozíció asszociativitása);
- (3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

1.2.11. Állítás. Ha R reláció X és Y között, akkor $\mathbb{I}_Y \circ R = R$ és $R \circ \mathbb{I}_X = R$. $\square$

1.2.12. Rendezés. Egy X halmazbeli *rendezés* (teljes rendezés, lineáris rendezés) egy X -beli $<$ reláció, amelyre

- (1) ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ (a reláció *tranzitív*);
- (2) minden $x, y \in X$ esetén $x < y$, $x = y$ és $x > y$ közül pontosan egy teljesül (a reláció *trichotóm*).

Vegyük észre, hogy az (1) tulajdonság nem függ X -től, csak a relációtól, míg (2) a relációtól és X -től is függ, így ez az $(X, <)$ pár tulajdonsága. Egy X rendezett halmaz tulajdonképpen az $(X, <)$ pár. Egy X rendezett halmaz minden Y részhalmaza is rendezett, ha a $<$ relációt csak ennek az elemei között tekintjük, azaz a $< \cap (Y \times Y)$ relációval. Gyakran $x < y$ helyett azt írjuk, hogy $y > x$, így a $>$ reláció a $<$ reláció inverze. Az

$x \leq y$ (vagy $y \geq x$) jelölés azt jelenti, hogy $x < y$ vagy $x = y$. $A \geq$ reláció a $\leq$ inverze. Ha $x < y$, akkor azt mondjuk, hogy x *kisebb* mint y vagy y *nagyobb* mint x , illetve hogy x *megelőzi* y -t vagy y *követi* x -et. $A \leq$ illetve $\geq$ reláció esetén hozzátesszük, hogy „vagy egyenlő”.

° **1.2.13. Példa.** A valós számok halmaza és így a természetes, egész és racionális számok halmaza is rendezett a szokásos rendezéssel. A természetes számok körében az „ n valódi osztója m -nek” reláció nem rendezés, mert nem trichotom.

1.2.14. Intervallumok. Legyen X rendezett halmaz. Ha $x \leq z$ és $z \leq y$, akkor azt mondjuk, hogy z az x és y közé esik, ha pedig $x < z$ és $z < y$, akkor azt mondjuk, hogy z szigorúan x és y közé esik. Az összes ilyen elemek halmazát $[x, y]$, illetve $]x, y[$ jelöli. Az utóbbi halmaz jelölésére (x, y) is szokásos; hátránya, hogy megegyezik a rendezett pár jelölésével. A $]x, y]$ és $[x, y[$ halmazok definíciója analóg; itt is használatos a kerek zárójeles változat. Ha $x < y$, de ugyanakkor nem létezik szigorúan x és y közé eső elem, akkor azt mondjuk, hogy x közvetlenül megelőzi y -t, vagy y közvetlenül követi x -et. Egy x elemhez tartozó kezdőszületnek a $\{y \in X : y < x\}$ részhalmazt nevezzük. A kezdőszület jelölésére logikus, de nem elterjedt jelölés $]\leftarrow, x[$. Az analóg $]\leftarrow, x]$, $]x, \rightarrow[$, $[x, \rightarrow[$ jelölések analóg módon vannak definiálva.

1.2.15. Legkisebb és legnagyobb elem. Az X rendezett halmaz *legkisebb* vagy *első* elemén egy olyan $x \in X$ elemet értünk, amelyre $x \leq y$ minden $y \in X$ -re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű. Hasonlóan, X *legnagyobb* vagy *utolsó* elemén egy olyan x elemet értünk, amelyre $y \leq x$ minden $y \in X$ -re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű.

Ha X -nek létezik legkisebb eleme, akkor azt $\min(X)$ -szel jelöljük, ha pedig létezik legnagyobb eleme, akkor azt $\max(X)$ -szel jelöljük.

1.2.16. Korlátok. Egy X rendezett halmaz egy x elemét az Y részhalmaz *alsó korlátjának* nevezzük, ha minden $y \in Y$ -ra $x \leq y$. Ha minden $y \in Y$ -ra $y \leq x$, akkor x az Y *felső korlátja*. Lehet, hogy egy részhalmaznak nincs alsó vagy felső korlátja, de az is lehet, hogy több van. Ha egy Y részhalmaznak van egy vagy több alsó korlátja, akkor is előfordulhat, hogy egyik sem eleme Y -nak. Ha mégis van az alsó korlátok között eleme Y -nak, akkor csak egy van és ez Y legkisebb eleme; hasonló állítás érvényes természetesen a felső korlátokra. Ha az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor azt Y *legnagyobb alsó korlátjának* vagy *pontos alsó korlátjának* vagy *alsó határának*, idegen szóval *infimumának* nevezzük, és $\inf(Y)$ -nal jelöljük. Hasonlóan, ha Y felső korlátjai halmazában van legkisebb elem, akkor azt Y *legkisebb felső korlátjának* vagy *pontos felső korlátjának* vagy *felső határának*, idegen szóval *szuprimumának* nevezzük, és $\sup(Y)$ -nal jelöljük. Egy X rendezett halmazt *felső határ tulajdonságúnak* nevezünk, ha minden nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja, és *alsó határ tulajdonságúnak* nevezünk, ha minden nem üres alulról korlátos részhalmazának létezik legnagyobb alsó korlátja.

1.2.17. Jórendezés. Egy X rendezett halmazt *jórendezettnek*, rendezését pedig *jórendezésnek* nevezzük, ha X bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

° **1.2.18. Példa.** A természetes számok halmaza jórendezett, de az egész, racionális és valós számok halmaza nem jórendezett a szokásos rendezéssel. A valós számok halmaza felső határ tulajdonságú, míg a racionális számok halmaza nem.

1.2.19. Ekvivalenciareláció, osztályozás. Az X halmazbeli $\sim$ reláció *ekvivalencia-reláció*, ha

- (1) minden $x \in X$ esetén $x \sim x$ (*reflexív*);
- (2) minden x, y -ra $x \sim y$ esetén $y \sim x$ (*szimmetrikus*);
- (3) minden x, y, z -re $x \sim y$ és $y \sim z$ esetén $x \sim z$ (*transzitiv*).

Könnyű látni, hogy a $\tilde{x} = \{y \in X : y \sim x\}$, $x \in X$ ekvivalenciaosztályok X -nek egy páronként diszjunkt nem üres halmazokra való felosztását, úgynevezett *osztályozását* adják.

1.3 Függvények

1.3.1. Függvény. Egy *függvény* (*leképezés, transzformáció, hozzárendelés, operáció* vagy *operátor*) egy olyan f binér reláció, amelyre ha $(x, y) \in f$ és $(x, y') \in f$, akkor $y = y'$, más szóval minden x -hez legfeljebb egy olyan y létezik, amelyre $(x, y) \in f$. Így tehát minden $x \in \text{dmn}(f)$ -re $f(x) = \{y\}$ valamely y -ra. Az általános szokás itt is elhagyni a kapcsos zárójelet, azaz $f(x) = y$ -t írni. Az y elemet az f függvény x helyen (*argumentumban*) felvett értékének nevezzük és gyakran f_x -szel jelöljük. (Vannak, akik a függvény *grafikonjáról* beszélnek, amikor párok halmazára gondolnak.) Legegyszerűbb példa függvényre $\mathbb{I}_X$, amelyet X *identikus* *leképezésének* nevezünk.

Annak kifejezésére, hogy az f függvénynek az x helyen y az értéke, azt is szokás írni, hogy $f: x \mapsto y$. (Régebbi könyvekben $f: x \rightarrow y$ szerepel.) Ennél a jelölésnél néha nem is jelöljük semmivel a függvényt. Például az $X \times Y$ Descartes-szorzat elemeihez első illetve második koordinátájukat rendelő függvények $(x, y) \mapsto x$ illetve $(x, y) \mapsto y$.

Az összes olyan függvények halmazát, amelyek értelmezési tartománya része az X halmaznak, értékészlete pedig az Y halmaznak, $X \rightarrow Y$ fogja jelölni (a jelölés nem túl elterjedt). Annak kifejezésére, hogy az f függvény értelmezési tartománya az X halmaz, értékészlete pedig az Y halmaznak részhalmaza, az $f: X \rightarrow Y$ jelölés szolgál, amit úgy olvasunk ki, hogy f az X -et Y -ba képező függvény. (Ez nem ugyanaz, mint $f \in X \rightarrow Y$, mert ez utóbbi esetben $\text{dmn}(f) \subseteq X$ is lehetséges. Szokás az $f \in X \rightarrow Y$ függvényeket, némileg logikátlanul, az X -et Y -ba képező *parciális függvényeknek* is nevezni. Inkább az $f \in X \rightarrow Y$ jelölést fogjuk használni, vagy azt mondjuk, hogy f az X valamely részhalmazát Y -ba képező függvény.) Az összes, X -et Y -ba képező függvények halmazát Y^X fogja jelölni. Ha azt mondjuk, hogy f az X -et Y -ra képező függvény, akkor ez alatt azt értjük, hogy f olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya X , értékészlete pedig Y .

Az f függvényt *kölcsönösen egyértelműnek* nevezzük, ha $f(x) = y$ és $f(x') = y$ esetén $x = x'$. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy az f^{-1} reláció függvény. Szokás a kölcsönösen egyértelmű függvényeket *injektívnek* is nevezni. Ha egy $f: X \rightarrow Y$ függvény Y -ra képez le, akkor szokás *szürjektívnek* vagy *szuperjektívnek* is nevezni, ha pedig injektív és szürjektív, akkor *bijektívnek*. Ennek a szóhasználatnak a veszélye, hogy az, hogy egy függvény szürjektív illetve bijektív, nem csak a függvénytől, hanem az Y halmaz választásától is függ.

1.3.2. Állítás. Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is. Ha f és g kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor $g \circ f$ is az. Ha az f függvény X -et Y -ra, a g függvény pedig Y -t Z -re képezi le, akkor $g \circ f$ az X -et Z -re képezi le. $\square$

1.3.3. Monoton függvények. Legyen X és Y rendezett halmaz. Az $f: X \rightarrow Y$ függvény *monoton növekedő*, ha $x, y \in X$, $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$; *szigorúan monoton növekedő*, ha $x, y \in X$, $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$; az f *monoton csökkenő*, ha $x, y \in X$, $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$ és *szigorúan monoton csökkenő*, ha $x, y \in X$, $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$. Szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván monoton növekedő (illetve csökkenő) is.

Szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű is. Megfordítva egy $f: X \rightarrow Y$ kölcsönösen egyértelmű monoton növekedő (illetve csökkenő) leképezés szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) is, és az inverze is monoton növekedő (illetve csökkenő) $f(X)$ -en. Valóban, ha $x < y$, akkor $f(x) \leq f(y)$, de $f(x) = f(y)$ nem lehetséges, és ha $u, v \in f(X)$, $u \leq v$, $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$, akkor $x > y$ nem lehetséges, mert ebből $x \geq y$ és $x \neq y$ miatt $f(x) \geq f(y)$, de $f(x) \neq f(y)$, azaz $u = f(x) > f(y) = v$ következne. A másik eset hasonlóan bizonyítható.

1.3.4. Indexelt családok. Mint említettük, egy x függvény i helyen felvett értékét néha x_i -vel jelöljük. Ilyenkor gyakran a függvény I értelmezési tartományát *indexhalmaznak*, elemeit *indexeknek*, értékészletét *indexelt halmaznak*, az x függvényt magát pedig *indexelt családnak* nevezzük.

Ha az értékészlet elemei halmazok, akkor *indexelt halmazcsalád*ról beszélünk. Egy X_i , $i \in I$ indexelt halmazcsalád *unióját* a

$$\cup_{i \in I} X_i := \cup \{X_i : i \in I\}$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha nem okozhat félreértést, akkor a rövidebb $\cup_i X_i$ jelölést is használjuk. Ha $I \neq \emptyset$, akkor az indexelt halmazcsalád *metszetét* is definiáljuk a

$$\cap_{i \in I} X_i := \cap \{X_i : i \in I\}$$

összefüggéssel, és erre is használjuk a rövidebb $\cap_i X_i$ jelölést. Halmazcsaládokra is igaz marad számos halmazelméleti azonosság, például kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Csak eggyel foglalkozunk részletesen.

1.3.5. De Morgan-szabályok. Ha X_i , $i \in I$ az X halmaz részhalmazainak egy nem üres indexelt családja (azaz $I \neq \emptyset$), akkor az X -re vonatkozó komplementert vesszővel jelölve

$$(1) \quad (\cup_{i \in I} X_i)' = \cap_{i \in I} X_i';$$

$$(2) \quad (\cap_{i \in I} X_i)' = \cup_{i \in I} X_i'. \quad \square$$

1.3.6. Megjegyzés. A De Morgan-szabályok üres család esetén (azaz ha $I = \emptyset$) is érvényben maradnak, ha az X „alaphalmaz” részhalmazai egy X_i , $i \in I$ családjának a metszetét a $\cap_{i \in I} X_i := \{x \in X : \text{minden } i \in I\text{-re } x \in X_i\}$ összefüggéssel értelmezzük, mert a jobb oldal megegyezik a $\{X_i : i \in I\} \cup \{X\}$ nem üres halmazrendszer metszetével, azaz $\cap_{i \in \emptyset} X_i = X$.

Számos olyan összefüggés érvényes, amely egy adott függvény (vagy akár egy adott binér reláció) esetén az értelmezési tartomány, illetve az értékészlet részhalmazainak indexelt családjai, valamint az indexelt család halmazainak képei, illetve inverz képei között teremt kapcsolatot. Mivel ezek az összefüggések általában könnyen kitalálhatók és bizonyíthatók, csak annyit emelünk ki, hogy ebből a szempontból legjobban egy függvény inverze viselkedik:

1.3.7. Tétel. Legyen $f: X \rightarrow Y$ egy függvény, $B, B_i \subset Y$, ha $i \in I \neq \emptyset$. Ekkor

- (1) $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$;
- (2) $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$;
- (3) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. $\square$

° **1.3.8. Többváltozós függvények.** Egy $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ Descartes-szorzat valamely részhalmazán értelmezett függvényt szokás *többváltozós függvénynek* is nevezni. Megjegyezzük, hogy egy f többváltozós függvénynek $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -hez rendelt értékét mindenki $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -nel jelöli $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$ helyett. Többváltozós függvények esetén is előfordul, hogy a változókat alsó indexként írjuk. Például a *Kronecker-féle δ -függvény* a $\delta_{x,y} = 1$, ha $x = y$ és $\delta_{x,y} = 0$, ha $x \neq y$ összefüggésekkel definiáljuk $x, y \in X$ esetén.

1.3.9. Műveletek. Legyen X egy halmaz. Egy X -beli *binér* (vagy *kétváltozós műveleten*) egy $*$: $X \times X \rightarrow X$ leképezést értünk. Ha $x, y \in X$, akkor $*(x, y)$ a művelet *eredménye*, x és y pedig az *operandusai*. Rendszerint a binér művelet jelét az operandusok közé írjuk: $x * y$. Ha $A, B \subset X$, akkor $*(A \times B)$ helyett $A * B$ -t, az $A = \{a\}$ illetve $B = \{b\}$ esetben pedig $a * B$ -t illetve $A * b$ -t írunk. A legszokásosabb műveleti jelek $+$ és $\cdot$, az utóbbit gyakran ki sem írjuk.

Egy X -beli *unér művelet* egy $*$: $X \rightarrow X$ leképezés. Mivel $X^\emptyset = \{\emptyset\}$, egy *nullér művelet* egy $*$: $\{\emptyset\} \rightarrow X$ leképezés, ami tulajdonképpen X egy elemének a kijelölését jelenti, operandusa nincs, csak eredménye. (Ternér stb., műveleteket is tekinthetünk, de erre nem nagyon lesz szükségünk.)

Ha műveletek eredményeire újabb műveleteket alkalmazunk, akkor zárójelekkel kell jelezniük, hogy milyen sorrendben kell elvégezniük a műveleteket. Szokás megállapodni a műveletek *precedenciájában*, például a nullér műveletek után az unér műveleteket, majd a binér műveletek közül előbb a „hatványozásszerű”, majd a „szorzásszerű”, végül az „összeadásszerű” műveleteket végezzük el stb. Ilyen megállapodással a zárójelek egy része megtakarítható. Megjegyezzük azonban, hogy a zárójelek teljesen elhagyhatók, ha a műveleti jeleket mindig az operandusok elé írjuk. Ezt a jelölésmódot Jan Lukaszewicz vezette be és *lengyel jelölésnek* szokás nevezni. Az informatikában még elterjedtebb a *fordított lengyel jelölés*, amelynél a műveleti jelek az operandusok után következnek. Néhány zseb-számológép mellett a FORTH nyelv és a belőle kifejlesztett PostScript^R nyomtatóvezérlő nyelv és szinte minden fordítóprogram ezt használja.

1.3.10. Példák. (1) Ha X egy halmaz, akkor $\cup, \cap, \setminus$ és Δ binér műveletek, a $'$ komplementerképzés pedig unér művelet $\wp(X)$ -en.

(2) Ha X egy halmaz, a $\circ$ összetétel művelet az X -beli binér relációk között.

° **1.3.11. Példák: művelet megadása táblázattal.** Egy véges halmazon egy binér műveletet (vagy általánosabban, bármely két véges halmaz Descartes-szorzatán értelmezett függvényt) „szorzótáblával” is megadhatunk: az első oszlopba a bal oldali operandus, az első sorba pedig a jobb oldali operandus kerül. Például az alábbi táblázatok az *igaz* (jele: $\uparrow$) illetve *hamis* (jele: $\downarrow$) a logikai értékek $\{\uparrow, \downarrow\}$ kételemű halmazán az $\wedge$ („és”, *konjunkció*), $\vee$ (megengedő „vagy”, idegen szóval *diszjunkció*), $\Rightarrow$ („ha ... akkor ...”, *implikáció*) és $\Leftrightarrow$ („akkor és csak akkor” vagy „pontosan akkor”, *ekvivalencia*), $\oplus$ (kizáró „vagy”, gyakrabban „vagy ... vagy ...”: pontosan az egyik), $|$ („sem ... sem ...”),

|| (összeférhetetlen „vagy”, gyakrabban „vagy ... vagy ...”: legfeljebb az egyik, de lehet, hogy egyik se) *logikai jeleknek megfelelő binér logikai műveleteket definiálják:*

$\wedge$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

$\vee$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

$\Rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

$\Leftrightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

$\oplus$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

$ $	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

$\parallel$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Hasonlóan, egy véges halmazon egy unér műveletet (vagy általánosabban, bármely véges halmazon értelmezett függvényt) is megadhatunk táblázattal. Például az alábbi táblázat a $\neg$ („nem”, idegen szóval *negáció*) logikai jelnek megfelelő függvényt adja meg:

	$\uparrow$	$\downarrow$
$\neg$	$\downarrow$	$\uparrow$

Általánosabban, az informatikában néha véges halmazok Descartes-szorzatán értelmezett függvényt egy tömbbel adunk meg.

1.3.12. Műveletek függvényekkel. Legyen X tetszőleges halmaz, Y pedig egy halmaz a $*$ binér művelettel. Ekkor az X -et Y -ba képező függvények között is értelmezhetünk „pontonként” egy binér műveletet (amelyet ugyanazzal a jellel szokás jelölni) az

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \text{ minden } x \in X\text{-re, ha } f, g: X \rightarrow Y$$

összefüggéssel. Hasonlóan definiálhatók függvényekre unér, illetve nullér műveletek. Sőt, ha csak egy $*$ $Y \times Y \rightarrow Y$ *parciális művelet* adott és $f, g \in X \rightarrow Y$, akkor is tekinthetjük az $x \mapsto *(f(x), g(x))$ leképezést, de ez már nem biztos, hogy mindenütt értelmezve lesz X -en, még akkor sem, ha f és g mindenütt értelmezve vannak X -en (például valós értékű függvények hányadosa).

° **1.3.13. Példák.** Egy n -bités gépen rendszerint rendelkezésre állnak az előző példában szereplő logikai műveletek és még egyéb logikai műveletek is az n -bités szavakon, azaz a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazt a $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazba képező függvények halmazán.

◦ **1.3.14. Példák.** Egy X halmazon értelmezett valós értékű függvények összege, szorzata és különbsége mindenütt értelmezve van, hányadosa azonban csak ott, ahol az osztó nem nulla.

1.3.15. Művelettartó leképezések. Legyen $*$ binér művelet az X és legyen $*$ ' binér művelet az X' halmazon. Egy $\varphi: X \rightarrow X'$ leképezést *művelettartónak* nevezünk, ha $\varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$ minden $x, y \in X$ -re. Hasonlóan értelmezzük a művelettartást unér és nullér műveletre is.

A művelettartás jelentősége, hogy ha φ kölcsönösen egyértelmű, akkor X és $\varphi(X)$ között nem tudunk különbséget tenni a művelet alapján, „algebrailag megkülönböztethetetlenek”.

◦ **1.3.16. Példa.** Ha $a > 1$, az $x \mapsto a^x$ leképezés művelettartó és kölcsönösen egyértelmű leképezése az összeadással tekintett valós számoknak a szorzással tekintett pozitív valós számokra.

2

Számok

Ebben a fejezetben bevezetjük a valós számokat és a komplex számokat. A természetes számokat, az egész számokat és a racionális számokat a valós számok részhalmazainak tekintjük.

2.1 Valós számok

2.1.1. Test. Egy K halmazt két művelettel, az összeadással és a szorzással [pontosabban a $(K, +, \cdot)$ hármast] testnek nevezünk, ha

- (A1) minden $x, y, z \in K$ -ra $x + (y + z) = (x + y) + z$ (az összeadás *asszociatív*);
- (A2) minden $x, y \in K$ -ra $x + y = y + x$ (az összeadás *kommutatív*);
- (A3) K -nak van *nulleleme* (elem *semleges elem*nek is szokás nevezni), azaz van olyan $0 \in K$, amelyre $0 + x = x = x + 0$ minden $x \in K$ esetén;
- (A4) minden $x \in K$ -ra létezik olyan $y \in K$, amelyre $x + y = 0 = y + x$ (az összeadásra nézve minden elemnek van *inverze*);
- (M1) minden $x, y, z \in K$ -ra $x(yz) = (xy)z$ (a szorzás *asszociatív*);
- (M2) minden $x, y \in K$ -ra $xy = yx$ (a szorzás *kommutatív*);
- (M3) K -nak van *egységeleme*, azaz van olyan $1 \in K$, amelyre $1x = x = x1$ minden $x \in K$ esetén;
- (M4) minden $0 \neq x \in K$ -ra létezik olyan $y \in K$, amelyre $xy = 1 = yx$ (a szorzásra nézve minden nem nulla elemnek van *inverze*);
- (D1) minden $x, y, z \in K$ -ra $(x+y)z = xz+yz$ (a szorzás jobbról *disztributív* az összeadásra nézve);
- (D2) minden $x, y, z \in K$ -ra $z(x+y) = zx+zy$ (a szorzás balról *disztributív* az összeadásra nézve).

Itt (A1)–(A4) az *összeadás axiómái*, (M1)–(M4) a *szorzás axiómái*, (D1)–(D2) pedig az összeadást és a szorzás összekapcsoló *disztributivitás axiómái*.

Az (A3) axiómából következik, hogy egyetlen nullelem van, mert ha 0 és 0^* is nullelem, akkor $0 = 0 + 0^* = 0^*$. Most (A1) és (A4) felhasználásával kapjuk, hogy minden elemnek csak egy additív inverze van, mert ha y és z az x additív inverzei, akkor $y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z$. Az x additív inverzét $-x$ fogja jelölni. Az additív inverz képzését unér műveletnek is tekinthetjük. Bármely $x, y \in K$ esetén $x + (-y)$ -t $x - y$ fogja jelölni. Nyilván $x + y$ additív inverze $-y - x$. Bármely $x \in K$ -ra $-(-x) = x$; ez az $y - y = 0$ összefüggésben y helyére $-x$ -et írva következik. Ha $x + z = y + z$, akkor ebből

$$x = x + 0 = x + (z - z) = (x + z) - z = (y + z) - z = y + (z - z) = y + 0 = y;$$

ez az *egyszerűsítési szabály* az összeadásra. Speciálisan, ha $x + z = z$, akkor $x = 0$.

Hasonlóan következik, hogy csak egy egységelem van, és bármely nem nulla x elem multiplikatív inverze egyértelmű; ezt x^{-1} vagy $1/x$ fogja jelölni. Mivel $xy(1/y)(1/x) = 1$, az xy inverze $1/(xy) = (1/y)(1/x)$.

Bármely $x \in K$ esetén $x0 = 0$, mert (D1) szerint $x0 + x0 = x(0 + 0) = x0$; hasonlóan (D2) szerint $0x = 0$. Innen $0 \neq x \in K$ esetén $1/x \neq 0$, mert egyébként $1 = x(1/x) = x0 = 0$ lenne, ami ellentmondás.

Bármely $0 \neq x \in K$ -ra $1/(1/x) = x$; ez az $y(1/y) = 1$ összefüggésben y helyére $1/x$ -et írva következik. Ha $z \neq 0$ és $xz = yz$, akkor ebből

$$x = x1 = xz(1/z) = (xz)(1/z) = (yz)(1/z) = y(z(1/z)) = y1 = y;$$

ez az *egyszerűsítési szabály* a szorzásra. Speciálisan, ha $xz = z$, akkor $x = 1$. Hasonlóan, ha $z \neq 0$ és $zx = zy$, akkor $x = y$, és speciálisan ha $zx = z$, akkor $x = 1$.

Bármely $0 \neq x \in K$ és $0 \neq y \in K$ esetén $xy \neq 0$, mert egyébként $0 = xy(1/y) = x$, ami ellentmondás.

Teljesül az úgynevezett *előjelszabály*: bármely $xy \in K$ esetén

$$x(-y) = -(xy) = (-x)y \quad \text{és} \quad (-x)(-y) = xy;$$

valóban (D1) szerint $xy + x(-y) = x(y - y) = x0 = 0$, ahonnan $x(-y) = -(xy)$; hasonlóan adódik, hogy $(-x)y = -(xy)$; végül $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy$.

A figyelmes olvasó észreveheti, hogy eddig (M2)-t, a szorzás kommutativitását nem használtuk fel. Ha ennek kivételével minden más feltétel teljesül, akkor a $(K, +, \cdot)$ hármast *ferdetest*nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy (M2) miatt (D1) és (D2) ekvivalensek, azaz elég az egyiket megkövetelni, a másik már következik. Hasonló apró egyszerűsítések más axiómákban is lehetségesek (A2) illetve (M2) felhasználásával. Testben bármely $x \in K$ és $0 \neq y \in K$ esetén $x(1/y)$ -t x/y fogja jelölni. Ha a szorzás nem kommutatív, akkor ezt a jelölést nem célszerű használni, mert $x(1/y)$ és $(1/y)x$ nem feltétlenül egyenlőek.

2.1.2. Példa. A legegyszerűbb példa testre a *kételemű test*: $\{0, 1\}$. Ebben (szükségképpen) $1 + 1 = 0$, azaz $-1 = 1$. Kételemű test $\{\uparrow, \downarrow\}$ is a $\oplus$ és $\wedge$ műveletekkel.

2.1.3. Példák. További példák testre a racionális, valós, illetve a komplex számok, a modulo p maradékosztályok, ha p prímszám.

2.1.4. Algebrai struktúrák. Ha a $(K, +)$ párra teljesül (A1), akkor *félcsoport*nak nevezzük. Ha (A3) is teljesül, azaz van semleges elem, akkor $(K, +)$ *monoid*. Ha még (A4) is teljesül, akkor $(K, +)$ *csoport*. Ha egy félcsoport, monoid, illetve csoport még (A2)-t is teljesíti, akkor azt mondjuk, hogy *kommutatív félcsoport*, *kommutatív monoid*, illetve *kommutatív csoport*. A kommutatív csoportokat *Abel-csoport*nak szokás nevezni, mert Abel norvég matematikus vizsgálta őket először. Nem kommutatív esetben egyébként szokásosabb a műveletet szorzással jelölni; ilyenkor ha van semleges elem, akkor azt 1-gyel jelöljük, egységelemnek nevezzük, és *egységelemes félcsoport*ról beszélünk.

A $(K, +, \cdot)$ hármast *gyűrű*nek nevezzük, ha az összeadással Abel-csoport (a nullelemet 0 fogja jelölni), a szorzással félcsoport, és teljesül mindkét oldali disztributivitás, azaz ha (A1)–(A4), (M1), (D1) és (D2) teljesülnek. Ha a szorzás kommutatív, azaz (M2) is teljesül, akkor a gyűrűt *kommutatív gyűrű*nek nevezzük. Ha a szorzásnak van egységeleme, azaz (M3) is teljesül, akkor a gyűrűt *egységelemes gyűrű*nek nevezzük.

2.1.5. Példa. Ha $X = \{\uparrow, \downarrow\}$, akkor $(X, \wedge)$ és $(X, \vee)$ kommutatív egységelemes fél-csoportok, $(X, \iff)$ Abel-csoport, míg $(X, \Rightarrow)$ -ben nincs egységelem, a művelet nem asszociatív és nem is kommutatív.

° **2.1.6. Példa.** Az $(\mathbb{N}, +)$ pár kommutatív félcsoport a 0 nullelemmel (belátható, hogy csak a 0-nak van additív inverze, a 0), és $(\mathbb{N}, \cdot)$ is kommutatív félcsoport az 1 egységelemmel (belátható, hogy csak az 1-nek van multiplikatív inverze, az 1).

* **2.1.7. Példák.** (1) Ha X tetszőleges halmaz, akkor $(\wp(X), \cap)$ és $(\wp(X), \cup)$ kommutatív egységelemes félcsoportok, $(\wp(X), \Delta)$ Abel-csoport, míg $(\wp(X), \setminus)$ -ben általában nincs egységelem, a művelet nem asszociatív és nem is kommutatív.

(2) Ha X egy halmaz, akkor az X -beli binér relációk a $\circ$ összetétellel egységelemes félcsoportot alkotnak, amely általában nem kommutatív és nem is csoport, bár vannak invertálható elemei.

(3) Ha X egy halmaz, akkor az X -et önmagába képező függvények a $\circ$ összetétellel egységelemes félcsoportot alkotnak. Ha csak az összes injektív, illetve az összes szürjektív leképezéseket tekintjük, akkor is egységelemes félcsoportot kapunk. Az összes bijektív leképezések (permutációk) csoportot alkotnak. Ha az összes nem injektív leképezéseket, illetve az összes nem szürjektív leképezéseket tekintjük, akkor is félcsoportot kapunk, de ez már nem lesz egységelemes. Ezekben az esetekben a művelet általában nem kommutatív.

* **2.1.8. Példák.** A legegyszerűbb példa gyűrűre a *nullgyűrű*, amely csak egy elemet tartalmaz, ez nyilván a 0 kell legyen. Másik triviális példa egy (additív) Abel-csoport, amelyben bármely két elem szorzatát nullának értelmezzük; ezeket a gyűrűket *zérógyűrű*-nek nevezzük. Mindkét esetben a gyűrű kommutatív.

* **2.1.9. Példák.** Bármely X halmazra $\wp(X)$ a $(\Delta, \cap)$ műveletekkel kommutatív egységelemes gyűrű.

°* **2.1.10. Példák.** További példák gyűrűkre az egész számok, a páros egész számok, a racionális együtthatós polinomok, a valós együtthatós polinomok, tetszőleges halmazon értelmezett valós értékű függvények és az $n \times n$ -es mátrixok (egész, racionális vagy valós elemekkel). Ezek a gyűrűk mind egységelemesek, és kivéve a mátrixgyűrűket, ha $n > 1$, kommutatívak is. Ferdetestre példa a kvaterniók, mint azt később látni fogjuk.

2.1.11. Rendezett test. A K -t *rendezett test*nek nevezzük, ha rendezett halmaz, test, és

- (1) ha $x, y, z \in K$ és $x < y$, akkor $x + z < y + z$ (az *összeadás monoton*);
- (2) ha $x, y \in R$ és $x, y > 0$, akkor $x \cdot y > 0$ (a *szorzás monoton*).

Rendezett testben ha $x > 0$, akkor x -et *pozitív*nak, ha $x < 0$, akkor x -et *negatív*nak nevezzük. A K rendezett test összes pozitív elemének halmazát K^+ fogja jelölni. Legyen $|x| = x$, ha $x \geq 0$ és legyen $|x| = -x$, ha $x < 0$. Legyen $\text{sgn}(x) = 0$, ha $x = 0$ és $\text{sgn}(x) = x/|x|$ egyébként; sgn az *előjel függvény*.

2.1.12. Tétel. Legyen K rendezett test, $x, y, z \in K$. Ekkor

- (1) ha $x > 0$, akkor $-x < 0$, és ha $x < 0$, akkor $-x > 0$;
- (2) ha $x < y$ és $z > 0$, akkor $xz < yz$;
- (3) ha $x < y$ és $z < 0$, akkor $xz > yz$;

(4) ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$; speciálisan, $1 > 0$;

(5) ha $0 < x < y$, akkor $0 < 1/y < 1/x$.

Bizonyítás. Ha $x > 0$, akkor $0 = -x + x > -x + 0 = -x$, ha pedig $x < 0$, akkor $0 = -x + x < -x + 0 = -x$. Ezzel beláttuk (1)-et. (2) abból következik, hogy $y - x > y - y = 0$, így $(y - x)z > 0$, amiből $yz = (y - x)z + xz > 0 + xz = xz$. (3)-at megkapjuk (1)-ből és (2)-ből, mert $-((y - x)z) = (y - x)(-z) > 0$, így $(y - x)z < 0$, tehát $yz < xz$. Ha $x > 0$, akkor $x^2 > 0$, ha viszont $x < 0$, akkor $-x > 0$, így $x^2 = (-x)^2 > 0$. Speciálisan, $1^2 = 1 > 0$. Végül (5)-höz, ha $y > 0$ és $v \leq 0$, akkor $yv \leq 0$. Azonban $y(1/y) = 1 > 0$. Ezért $1/y > 0$, és hasonlóan $1/x > 0$. Ha az $x < y$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív $(1/x)(1/y)$ mennyiséggel, akkor azt kapjuk, hogy $1/y < 1/x$. $\square$

° **2.1.13. Példák.** A racionális számok, illetve a valós számok rendezett testet alkotnak. A kételemű testen nincs olyan rendezés, amellyel rendezett test, mert rendezett testben $1 > 0$ és $-1 < 0$, de a kételemű testben $-1 = 1$.

2.1.14. Tétel. Létezik felső határ tulajdonságú rendezett test. Legyen $\mathbb{R}'$ és $\mathbb{R}''$ két felső határ tulajdonságú rendezett test. Ekkor létezik egy φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{R}'$ -nek $\mathbb{R}''$ -re, amely monoton növekedő, összeadás- és szorzástartó.

* **Bizonyítás.** A bizonyítás hosszú és bonyolult. Alapgondolata, hogy először a természetes számokat, majd az egész számokat, ezután a racionális számokat definiáljuk, és végül a valós számokat mint a racionális számok bizonyos részhalmazait, úgynevezett Dedekind-szeleteit definiáljuk. A teljes bizonyítás megtalálható például a Landau [41] könyvben vagy magyarul a Járai [33] jegyzetben.

2.1.15. Valós számok. Egy felső határ tulajdonságú testet a *valós számok* testének nevezzük. Az előző tétel szerint létezik ilyen test és lényegében csak egy ilyen van. A valós számok testét $\mathbb{R}$ -rel fogjuk jelölni. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{R}$ alsó határ tulajdonságú is: ha $A \subset \mathbb{R}$ nem üres és alulról korlátos, akkor $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Történetileg először a természetes számok, majd a nemnegatív racionális számok fogalma alakult ki. Püthagorasz iskolájának matematikusai észrevették, hogy egy egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza nem racionális szám. Fokozatosan kidolgozták az új számokkal való számolás szabályait, racionális számokkal való közelítéseik felhasználásával. Módszerük az volt, hogy egy valós számot az összes nála kisebb racionális számok halmazával azonosítottak. Ezt az alapgondolatot szokás felhasználni a valós számok bevezetésére. A görögök geometriai megfontolásokat használtak. A valós számok tisztán halmazelméleti bevezetése Dedekindtől, illetve Cantortól származik 1872-ből.

Mi a valós számok részhalmazaként definiáljuk a természetes, az egész és a racionális számokat.

2.1.16. Természetes számok. Jelölje $\mathbb{N}$ az $\mathbb{R}$ mindazon N részhalmazainak a metosztét, amelyek rendelkeznek az alábbi két tulajdonsággal:

(1) $0 \in N$;

(2) ha $n \in N$, akkor $n + 1 \in N$.

Az $\mathbb{N}$ halmaz elemeit *természetes számoknak* nevezzük. (Vannak, akik a természetes számokat 1-gyel kezdik.)

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{N}$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal, amelyeket történeti okokból *Peano-axiómáknak* nevezünk:

(P1) $0 \in \mathbb{N}$;

(P2) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$;

(P3) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \neq 0$;

(P4) ha $n, m \in \mathbb{N}$ és $n + 1 = m + 1$, akkor $n = m$;

(P5) ha $S \subset \mathbb{N}$, $0 \in S$ és $n \in S$ esetén $n + 1 \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.

Mivel $\mathbb{N}$ olyan halmazok metszete, amelyek rendelkeznek az (1) és (2) tulajdonságokkal, $\mathbb{N}$ is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, így (P1) és (P2) teljesül. (P5) a *teljes indukció elve*; abból következik, hogy az S halmaz rendelkezik az (1) és (2) tulajdonságokkal, így $\mathbb{N} \subset S$. (P4) következik az egyszerűsítési szabályból. Végül (P3) fennállását (P5) segítségével bizonyítjuk. (Az ilyen bizonyításokat *teljes indukcióval* való bizonyításoknak szokás nevezni, és nagyon gyakran szerepelnek természetes számokra vonatkozó állítások bizonyításánál.) Legyen $S = \{n \in \mathbb{N} : n + 1 > 0\}$. Nyilván $0 \in S$, és ha $n \in S$, akkor $(n + 1) + 1 > 0 + 1 > 0$, így $n + 1 \in S$. Innen (P5) miatt $S = \mathbb{N}$, azaz teljesül (P3).

Minden $0 \neq n \in \mathbb{N}$ -hez van egy ((P4) szerint egyértelmű) $m \in \mathbb{N}$, amelyre $m + 1 = n$. Valóban, az

$$S = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \text{van olyan } m \in \mathbb{N}, \text{ amelyre } m + 1 = n\}$$

halmazra $0 \in S$ és ha $n \in S$, akkor $n + 1 = (m + 1) + 1 \in S$, így (P5) szerint $S = \mathbb{N}$. (Ezt az előző bizonyítással összevetve látjuk, hogy $\mathbb{N}$ minden nem nulla eleme pozitív.)

Azt az apró trükköt, amit az előző bekezdésben használtunk, mindig alkalmazhatjuk, ha a teljes indukciót nem 0-tól akarjuk kezdeni.

Megjegyezzük, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor (n szerinti teljes indukcióval) $m + n \in \mathbb{N}$. Hasonlóan, mivel $m(n + 1) = mn + m$, az n szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy $mn \in \mathbb{N}$, ha $m, n \in \mathbb{N}$. Ugyancsak n szerinti teljes indukcióval, ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $n - m \in \mathbb{N}$.

Legyen $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, $5 := 4 + 1$, $6 := 5 + 1$, $7 := 6 + 1$, $8 := 7 + 1$, $9 := 8 + 1$. (Ha további számjegyekre van szükségünk, például hexadecimális (tizenhatos) számrendszerben, akkor így folytatjuk: $A := 9 + 1$, $B := A + 1$ stb.)

Legelőször $\mathbb{N}$ -en értelmezett függvények rekurzióval való definíciójának módszerét tárgyaljuk. Ezeket a függvényeket *végtelen sorozatoknak* nevezzük. (Az $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett függvényeket is szokás végtelen sorozatnak nevezni.) Érezzük, hogy egy sorozatot megadhatunk úgy, hogy megadjuk a 0 helyen felvett értékét, és megadunk egy képzési szabályt, amelynek alapján megkapjuk a sorozat n helyen felvett értékéből az $n + 1$ helyen felvett értékét. Erről szól a következő tétel.

2.1.17. Rekurziótétel. Legyen X egy halmaz, $a \in X$, és $f: X \rightarrow X$ egy függvény. Ekkor egy és csak egy olyan $\mathbb{N}$ -et X -be képező g függvény létezik, amelyre $g(0) = a$ és $g(n + 1) = f(g(n))$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

* **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy ha g és g^* is a tétel feltételeit kielégítő függvény, akkor teljes indukcióval adódik, hogy $g = g^*$.

Csak g létezését kell tehát belátnunk. Tekintsük $\mathbb{N} \times X$ mindazon A részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerét, amelyekre $(0, a) \in A$, és ha $(n, x) \in A$, akkor $(n + 1, f(x)) \in A$. Mivel $\mathbb{N} \times X$

rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, a $\mathcal{A}$ halmazrendszer nem üres. Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ reláció értelmezési tartománya $\mathbb{N}$.

Tekintsük a $\mathcal{A}$ -beli halmazok metszetét, jelölje ezt g . Mivel nyilván $g \in \mathcal{A}$, csak azt kell bizonyítanunk, hogy g függvény. Más szóval, azt kell igazolnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re ha $(n, x) \in g$ és $(n, y) \in g$, akkor $x = y$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen S azoknak az $n \in \mathbb{N}$ -eknek a halmaza, amelyekre $(n, x) \in g$ és $(n, y) \in g$ esetén $x = y$.

Ha $0 \notin S$, akkor valamilyen $a \neq b \in X$ -re $(0, b) \in g$. De ekkor $g \setminus \{(0, b)\}$ még mindig $\mathcal{A}$ -beli, mert tartalmazza $(0, a)$ -t, és ha tartalmazza (n, x) -et, akkor $(n+1, f(x))$ -et is, hiszen $n+1 \neq 0$. Ez ellentmond annak, hogy $g = \cap \mathcal{A}$.

Most tegyük fel, hogy $n \in S$. Ez azt jelenti, hogy pontosan egy olyan $x \in X$ létezik, hogy $(n, x) \in g$. Mivel $(n, x) \in g$, teljesül, hogy $(n+1, f(x)) \in g$. Ha $n+1$ nem tartozik S -hez, akkor $(n+1, y) \in g$ valamely $f(x)$ -től különböző y -ra. A $g \setminus \{(n+1, y)\}$ reláció még mindig $\mathcal{A}$ -beli, mert nyilván tartalmazza $(0, a)$ -t, hiszen $0 \neq n+1$, és ha tartalmazza például (m, z) -t, akkor tartalmazza $(m+1, f(z))$ -t is; valóban, ha $m = n$, akkor ez fennáll, ha pedig $m \neq n$, akkor $m+1 \neq n+1$. Ez megint ellentmond annak, hogy $g = \cap \mathcal{A}$. Ebből az ellentmondásból következik, hogy $n+1 \in S$. A teljes indukció elve szerint $S = \mathbb{N}$, és a bizonyítás kész. $\square$

2.1.18. Tétel. *A természetes számok halmazában $n+1$ közvetlenül követi n -et. A természetes számok halmaza jólrendezett.*

* **Bizonyítás.** Ha $n < m$, akkor $m = n + (m - n)$. Mivel $m - n \neq 0$, van olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $m - n = k + 1$. De ekkor $m = n + k + 1 = (n + 1) + k$, azaz $n \leq m$.

A jólrendezettség bizonyításához legyen $A \subset \mathbb{N}$ nem üres halmaz. Legyen

$$B = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ minden } n \in A\text{-ra}\}$$

Nyilván $0 \in B$. Ha $n \in A$, akkor $n+1 \notin B$. Tehát van olyan $m \in B$, amelyre $m+1 \notin B$, mert egyébként teljes indukcióval azt kapnánk, hogy $B = \mathbb{N}$. Megmutatjuk, hogy m az A legkisebb eleme. Az világos, hogy alsó korlát, csak azt kell belátnunk, hogy $m \in A$. Ha $m \notin A$ teljesülne, akkor minden $n \in A$ -ra $m < n$ lenne, amiből $m+1 \leq n$ következne, mert $m+1$ közvetlenül követi m -et, ez azonban ellentmondás. $\square$

2.1.19. Sorozatok. Mint már említettük, az $\mathbb{N}$ -en vagy $\mathbb{N}^+$ -on értelmezett függvényeket *végtelen sorozatnak* nevezzük. Az x végtelen sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, x_2, \dots$ vagy $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$, illetve $x_1, x_2, x_3, \dots$ vagy $x_i, i = 1, 2, 3, \dots$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{N}$ illetve az $\mathbb{N}^+$ halmaz n -nél kisebb illetve nem nagyobb elemein értelmezett függvényeket *véges sorozatnak* nevezzük. Az x véges sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ vagy $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, illetve $x_1, x_2, \dots, x_n$ vagy $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Ha a szövegösszefüggésből kiderül, hogy véges vagy végtelen sorozatról van szó, akkor egyszerűen csak *sorozatról* beszélünk.

Végtelen halmazsorozat uniójára a

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{vagy} \quad A_0 \cup A_1 \cup \dots,$$

metszetére pedig a

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{vagy} \quad A_0 \cap A_1 \cap \dots$$

jelölést használjuk. Véges sorozatok esetén a megfelelő jelölések

$$\bigcup_{i=0}^n A_i \quad \text{vagy} \quad A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=0}^n A_i \quad \text{vagy} \quad A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

Persze, mindegyiknél kezdhetünk 1-gyel is.

* **2.1.20. Példa.** Legyen X egy tetszőleges halmaz, amelyet *ábécének* fogunk nevezni. Az összes, X elemeiből képzett véges sorozatok (ezeket *szónak* fogjuk nevezni) egységelemes félcsoporthat alkotnak az egymás után írásra nézve: ha $f = f_1 f_2 \dots f_n$ egy szó, $g = g_1 g_2 \dots g_m$ pedig egy másik szó, akkor legyen $fg = f_1 f_2 \dots f_n g_1 g_2 \dots g_m$. (Szavaknál nem szokás kiírni a sorozat tagjait elválasztó vesszőket.) Az egységelem az üres sorozat. Ez a félcsoporthat általában nem kommutatív.

2.1.21. Motiváció: további rekurzív definíciók. A Fibonacci-sorozatot a következőképpen „defináljuk”: Legyen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, és legyen $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Úgy érezzük, hogy ez a feltétel egyértelműen definiálja a sortozatot, de ennek bizonyítására a rekurziótétel nem használható, mert a sorozat egy tagja nem csak az előzőtől függ. A rekurziótétel alábbi általánosabb változata lehetővé teszi, hogy egy sorozat egy tagját az összes előző tag függvényeként adjuk meg.

2.1.22. Általános rekurziótétel. Legyen adott egy X halmaz és egy X -be képező f függvény, amelynek értelmezési tartománya az X -beli (nullától indexelt) véges sorozatok halmaza. (Az f adja a rekurziót.) Ekkor egyértelműen létezik egy $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ függvény, amely „ f -zárt”, azaz $g(n) = g_n = f(g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

A tétel szemléletesen fogalmazva azt mondja, hogy ha adott egy függvényünk, amely egy egydimenziós tömb esetén kiszámítja a tömb már feltöltött kezdetéből, hogy a következő helyre mit kell tennünk, akkor ennek segítségével a tömböt akármeddig feltölthetjük.

A tétel és a bizonyítás érvényes marad akkor is, ha $\mathbb{N}$ helyett tetszőleges N jólrendezett halmaz szerepel. Ezt az általánosabb változatot szokás *transzfinit rekurziótételnek* nevezni. Ekkor f értelmezési tartománya az összes, N valamely kezdőszeletéből X -be képező függvény halmaza, és azt állítjuk, hogy egyértelműen létezik egy $g: N \rightarrow X$ függvény, amely „ f -zárt”, azaz $g(n) = f(g|_{\leftarrow, n[})$ minden $n \in N$ -re. (Itt $\leftarrow, n[$ az $n \in N$ -hez tartozó kezdőszelet.)

* **Bizonyítás.** Az egyértelműség bizonyítása $\mathbb{N}$ jólrendezettségén múlik. (Az ilyen bizonyításokat *transzfinit indukcióval* történő bizonyításnak nevezzük.) Tegyük fel, hogy g és g^* is eleget tesz a tétel feltételeinek. Legyen $S = \{k \in \mathbb{N} : g(k) \neq g^*(k)\}$. Ha S nem üres, akkor létezik legkisebb eleme, legyen ez n . Mivel g és g^* megegyeznek az $\leftarrow, n[$ intervallumon, azt kapjuk, hogy

$$g(n) = f(g|_{\leftarrow, n[}) = f(g^*|_{\leftarrow, n[}) = g^*(n),$$

ami ellentmond annak, hogy $n \in S$.

A g létezésének bizonyítása hasonló a rekurziótétel megfelelő részének bizonyítására. Nevezzük $\mathbb{N} \times X$ egy A részhalmazát f -zártnak, ha minden $n \in \mathbb{N}$ -re és minden

$$h:]\leftarrow, n[\rightarrow X$$

függvényre, amelyre $h \subset A$, az is teljesül, hogy $(n, f(h)) \in A$. Maga $\mathbb{N} \times X$ egy f -zárt halmaz, ilyen halmaz tehát létezik. Legyen g az összes f -zárt halmaz metszete. Mivel nyilván g is f -zárt, csak azt kell megmutatnunk, hogy g az egész $\mathbb{N}$ -en értelmezett függvény. Más szóval, azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $x \in X$, hogy $(k, x) \in g$, továbbá ha $(k, y) \in g$, akkor $x = y$. A bizonyítás megint indirekt, transzfinit indukcióval történik. Legyen S azon $\mathbb{N}$ -beli k elemek halmaza, amelyekre ez nem igaz. Legyen n az S legkisebb eleme. Ekkor $g|_{]\leftarrow, n[}$ egy $]\leftarrow, n[$ -en értelmezett függvény, és mivel a g halmaz f -zárt, ha $x = f(g|_{]\leftarrow, n[})$, akkor $(n, x) \in g$. Mivel $n \in S$, ez csak úgy lehet, hogy van olyan $y \in X$, hogy $(n, y) \in g$ és $y \neq x$. Megmutatjuk, hogy $g \setminus \{(n, y)\}$ is f -zárt. Ez azt jelenti, hogy $m \in \mathbb{N}$ és $h:]\leftarrow, m[\rightarrow X$, $h \subset g \setminus \{(n, y)\}$ esetén $(m, f(h)) \in g \setminus \{(n, y)\}$. Ez nyilvánvaló akkor is, ha $m = n$, és akkor is, ha $m \neq n$. Viszont ez ellentmond annak, hogy g a legszűkebb f -zárt halmaz. $\square$

2.1.23. Példa: Fibonacci-számok. Példaként megmutatjuk, hogyan definiálhatók a Fibonacci-számok az előző tétel segítségével pontosan. Legyen $X = \mathbb{N}$. Először az $f(\emptyset) = 0$, $f(\{(0, k)\}) = 1$ bármely $k \in \mathbb{N}$ -re definíciókkal előírjuk, hogy az előző tétel szerint adódó g -re $g(0) = 0$ és $g(1) = 1$ legyen. Most ha $n > 1$, $(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ egy véges sorozat, akkor legyen $f(h) = h_{n-1} + h_{n-2}$. (Megjegyezzük, hogy $n = \min(\mathbb{N} \setminus \text{dmn}(h))$.)

2.1.24. Szorzatok és összegek. Legyen K egy test, $x: \mathbb{N} \rightarrow K$ egy sorozat. Az általános rekurziótételt alkalmazva az $\mathbb{N}$ jólrendezett halmazra, definiálhatjuk a $\prod_{k=1}^n x_k$, $n \in \mathbb{N}$ szorzatokat úgy, hogy $\prod_{k=1}^0 x_k = 1$ és $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = (\prod_{k=1}^n x_k) \cdot x_{n+1}$. Ha minden k -ra $x_k = x$, akkor $\prod_{k=1}^n x_k$ helyett x^n -et írunk, és az x elem n -edik *hatványáról* beszélünk, x az *alap*, n pedig a *kitevő*; $x^0 = 1$. A szorzatok tulajdonságait indukcióval bizonyíthatjuk, ezt nem részletezzük. A szorzatok tulajdonságaiból következik, vagy indukcióval közvetlenül is bizonyítható, hogy $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ és $(x^m)^n = x^{mn}$ minden $m, n \in \mathbb{N}$ -re. Gyakran $\prod_{k=1}^n x_k$ helyett azt írjuk, hogy $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$; ez a felírás már felhasználja azt az állítást, hogy az asszociativitás miatt a szorzat bármely zárójelezése esetén az eredmény ugyanaz. (Ez az *általános asszociativitás tétele*; teljes indukcióval könnyen belátható.) Ha $x, y \in K$, akkor indukcióval $(xy)^n = x^n y^n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

Ha a szorzás helyett az összeadást tekintjük, akkor szorzat helyett $\sum_{k=1}^n x_k$ összeget írunk, $\sum_{k=1}^0 x_k = 0$. Ha minden k -ra $x_k = x$, akkor $\sum_{k=1}^n x_k$ helyett nx -et írunk, n az *együttható*. (Ha $K = \mathbb{R}$, akkor nx -nek két értelme is van; szerencsére teljes indukcióval azonnal adódik, hogy a kettő megegyezik.) Gyakran $\sum_{k=1}^n x_k$ helyett azt írjuk, hogy $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Ha $x: A \rightarrow K$ egy tetszőleges függvény és van olyan

$$\varphi: \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} \rightarrow A$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely A -ra képez, akkor a kommutativitást és asszociativitást felhasználva indukcióval belátható, hogy minden ilyen leképezésre $\sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$ ugyanaz. (Ez az *általános kommutativitás tétele*.) Ezt a közös értéket $\sum_{a \in A} x_a$ -val is jelöljük.

2.1.25. Az általános disztributivitás tétele. Egy K testben

(1) ha $m, n \in \mathbb{N}$, valamint $a_1, a_2, \dots, a_m$ és $b_1, b_2, \dots, b_n$ a test tetszőleges elemei, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j;$$

(2) ha $m \in \mathbb{N}^+$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, valamint $a_{i,j_i} \in K$, ha $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j_i \leq n_i$, akkor

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i} \right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^m a_{i,j_i}.$$

* **Bizonyítás.** (1) triviális, ha $m = 0$ vagy $n = 0$. Az $n = 1$ eset m szerinti teljes indukcióval következik a jobb oldali disztributivitásból. Végül az általános esetet n szerinti teljes indukcióval kapjuk:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) + \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) b_n \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} a_i b_j + \sum_{i=1}^m a_i b_n \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j. \end{aligned}$$

(2) triviális, ha $m = 1$ és (1)-gyel ekvivalens, ha $m = 2$. Az általános esetet (1) felhasználásával m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i} \right) &= \prod_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i} \right) \cdot \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m} \right) \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,j_i} \right) \cdot \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^m a_{i,j_i}. \quad \square \end{aligned}$$

2.1.26. Faktoriális, binomiális együttható. A $\prod_{k=1}^n k$ szorzatot $n!$ -sal (n faktoriális) jelöljük. Az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k},$$

ha $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ (n alatt a k) számokat *binomiális együttható*knak nevezzük. (A jobb oldali kifejezéssel ezek akkor is definiálhatók, ha n tetszőleges szám.)

2.1.27. Binomiális tétel. Az előző pontban definiált binomiális együtthatók pozitív természetes számok. Legyenek x, y egy K test elemei, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás. Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Indukcióval, $n = 0$ -ra az állítás nyilvánvaló. A jobb oldalt közös nevezőre hozva

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

ha $0 \leq k < n$, ahonnan indukcióval adódik, hogy a binomiális együtthatók pozitív természetes számok. Ugyancsak indukcióval, a disztributivitást felhasználva,

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n-k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (x^k y^{n+1-k}). \quad \square \end{aligned}$$

* **2.1.28. Következmény.**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

Bizonyítás. A binomiális tételből $x = 1$, $y = 1$, illetve $x = 1$, $y = -1$ helyettesítéssel adódik. $\square$

2.1.29. Egész számok. A természetes számok körében az összeadásra nézve csak a 0-nak van inverze, másként szólva, a kivonás általában nem végezhető el. Ez indokolja az egész számok bevezetését. A $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmaz elemeit egész számoknak nevezzük. A definíció alapján adódik, hogy $\mathbb{Z}$ -ből nem vezet ki az összeadás és az additív inverz képzése, az előjelszabály alapján pedig, hogy a szorzás sem.

2.1.30. Hatványozás egész kitevővel. Ha K egy test, $0 \neq x \in K$, akkor az $n \mapsto x^n$ leképezést az $x^{-n} = (x^{-1})^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval kiterjeszthetjük egy $\mathbb{Z}$ -n értelmezett leképezéssé.

Mint esetszétválasztással nem nehéz belátni, erre a leképezésre $x^{m+n} = x^m x^n$ és $(x^m)^n = x^{mn}$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$ -re, továbbá $(xy)^n = x^n y^n$ minden $n \in \mathbb{Z}$ -re, ha $x, y \in K$ nem nulla elemek.

Ha szorzás helyett az összeadást tekintjük, $x \in K$ tetszőleges, akkor nx -et írunk. Figyelem, $(n, x) \mapsto nx$, $x \in K$, $n \in \mathbb{Z}$ nem művelet, hanem ismételt összeadással van definiálva! (Ha $K = \mathbb{R}$, akkor nx -nek két értelme is van; szerencsére a kettő megegyezik.) A fenti összefüggések ezzel a jelöléssel $(m+n)x = mx + nx$, $m(nx) = (mn)x$ és $n(x+y) = nx + ny$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, y \in K$ esetén.

2.1.31. Racionális számok. Az egész számok körében a nem nulla elemek közül csak 1-nek és -1 -nek van multiplikatív inverze, másként szólva, az osztás általában nem végezhető el. Ez indokolja a racionális számok bevezetését. A

$$\mathbb{Q} = \{m/n \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

halmaz elemeit *racionális számoknak* nevezzük; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ elemeit *irracionális számoknak* szokás nevezni. A racionális számok rendezett testet alkotnak: $0 = 0/1 \in \mathbb{Q}$, ha $m/n \in \mathbb{Q}$ és $m'/n' \in \mathbb{Q}$, akkor $(-m)/n = -m/n \in \mathbb{Q}$, $m/n + m'/n' = (mn' + m'n)/(nn') \in \mathbb{Q}$ és $(m/n)(m'/n') = (mm')/(nn') \in \mathbb{Q}$, $1 = 1/1 \in \mathbb{Q}$, valamint ha $0 \neq m/n$, akkor $m \neq 0$, így $1/(m/n) = n/m \in \mathbb{Q}$.

2.1.32. Arkhimédészi tulajdonság. Egy F rendezett testet *arkhimédészi tulajdonságúnak* nevezzük, ha $x, y \in F$, $x > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx \geq y$.

2.1.33. Állítás. Egy felső határ tulajdonságú test arkhimédészi tulajdonságú is.

Bizonyítás. Ellenkező esetben ugyanis valamely F felső határ tulajdonságú testre és $x, y \in F$, $x > 0$ -ra az $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak az y felső korlátja lenne. Legyen $z = \sup A$. Mivel $z - x < z$, a $z - x$ már nem felső korlát, így van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx > z - x$. De ebből $(n+1)x > z$. Ez ellentmondás. $\square$

2.1.34. Egész rész, maradék. Ha $x \in \mathbb{R}$, legyen $[x]$, az x alsó egész része az a legnagyobb eleme $\mathbb{Z}$ -nek, amely nem nagyobb, mint x (szokásos az $[x]$ jelölés is), és legyen $\{x\}$, az x felső egész része az a legkisebb eleme $\mathbb{Z}$ -nek, amely nem kisebb, mint x : Hogy ezek léteznek, az nyilvánvaló, ha $x = 0$ (ekkor mindkettő nulla). Ha $x > 0$, az arkhimédészi rendezettségéből és $\mathbb{N}$ jólrendezettségéből következik, hogy van az x -nél nagyobb vagy egyenlő természetes számok között egy legkisebb n természetes szám, ez $[x]$. Nyilván $n > 0$. Ha $n = x$, akkor $[x] = n$, egyébként $[x] = n - 1$. Végül ha $x < 0$, akkor $[x] = -[-x]$ és $\{x\} = -[-x]$.

Ha x valós szám, akkor legyen $x \bmod 0 = x$ és $x \bmod y = x - [x/y] \cdot y$, ha $0 \neq y \in \mathbb{R}$. Nyilván ha $y > 0$, akkor $0 \leq x \bmod y < y$, ha pedig $y < 0$, akkor $y < x \bmod y \leq 0$. Megjegyezzük, hogy ha $y \neq 0$, akkor $x = [x/y] \cdot y + x \bmod y$ az egyetlen $x = qy + r$ alakú előállítás x -nek, amelyben $q \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq r < y$, ha $y > 0$ és $y < r \leq 0$, ha $y < 0$. A q számot *hányadosnak*, r számot pedig *maradéknak* nevezzük az x szám y -nal való maradékos osztásánál. Ha az x egész szám 2-vel való maradékos osztásánál a maradék 0, akkor x -et *párosnak*, egyébként *páratlannak* nevezzük. A páros és páratlan számok összegére és szorzatára vonatkozó szabályok azonnal következnek a maradékos osztás egyértelműségéből.

2.1.35. Tétel. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ akkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $a < r < b$.

Bizonyítás. Mivel $b - a > 0$, van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $n(b - a) > 1$. Legyen $m = [na] + 1$. Így m olyan egész, amelyre $m - 1 \leq na < m$. Innen $na < m \leq 1 + na < nb$, és mivel $n > 0$, azt kapjuk, hogy $a < m/n < b$. $\square$

2.1.36. Tétel: gyökvonás. Minden $x \geq 0$ valós számhoz és $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számhoz pontosan egy olyan $y \geq 0$ valós szám található, amelyre $y^n = x$.

Az y számot az x szám n -edik gyökének nevezzük és $\sqrt[n]{x}$ -szel ($n = 2$ esetén $\sqrt{x}$ -szel is) vagy $x^{1/n}$ -nel jelöljük.

* **Bizonyítás.** Világos, hogy legfeljebb egy ilyen y létezik, hiszen $y_1 < y_2$ esetén $y_1^n < y_2^n$. Ha $x = 0$, akkor $y = 0$. Legyen E azoknak a t pozitív valós számoknak a halmaza, amelyekre $t^n < x$. Ha $t = x/(1+x)$, akkor $0 < t < 1$, így $t^n \leq t < x$, így E nem üres. Ha $t > 1+x$, akkor $t^n \geq t > 1+x$, így $1+x$ az E felső korlátja. Legyen $y = \sup(E)$. Meg fogjuk mutatni, hogy $y^n = x$. A bizonyítás indirekt: megmutatjuk, hogy az $y^n < x$ és $y^n > x$ egyenlőtlenségek mindegyike ellentmondásra vezet.

A

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

azonosság alapján $b^n - a^n \leq (b-a)nb^{n-1}$, ha $0 < a < b$.

Tegyük fel, hogy $y^n < x$. Válasszunk olyan h számot, amelyre $0 < h < 1$ és

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Legyen $a = y$, $b = y + h$. Ekkor

$$(y+h)^n - y^n \leq hn(y+h)^{n-1} \leq hn(y+1)^{n-1} < x - y^n,$$

így $(y+h)^n < x$, és ezért $y+h \in E$. Ez ellentmond y felső határ voltának.

Tegyük fel, hogy $y^n > x$. Legyen

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Ekkor $0 < k < y$. Ha $t \geq y - k$, akkor

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x,$$

így $t^n \geq x$, és $t \notin E$. Így $y-k$ az E egy felső korlátja. Ez ellentmond y felső határ voltának.

2.1.37. Következmény. Ha a és b nemnegatív valós számok és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \sqrt[n]{a}$ és $\beta = \sqrt[n]{b}$. Ekkor $(\alpha\beta)^n = ab$, így az egyértelműségéből következik az állítás. $\square$

* **2.1.38. Állítás.** Nincs olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2.

Bizonyítás. Ha lenne, akkor felírható lenne m/n alakban, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Válasszuk azt a felírást, amelyre a számláló minimális. Mivel $m^2 = 2n^2$, m páros kell legyen. Legyen $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $4k^2 = 2n^2$, ahonnan $2k^2 = n^2$. Innen n is páros. Ez ellentmond annak, hogy a számláló minimális. $\square$

* **2.1.39. Állítás.** A racionális számok rendezett teste arkhimédészi tulajdonságú, de nem felső határ tulajdonságú.

Bizonyítás. Legyen $x = i/j > 0$, $i, j \in \mathbb{N}^+$. Ha $y \leq 0$, akkor $n = 0$ választással, ha pedig $y = k/m$, $k, m \in \mathbb{N}^+$, akkor $n \geq kj$ választással $nx \geq y$, így kapjuk, hogy $\mathbb{Q}$ arkhimédészi tulajdonságú.

Legyen A az összes olyan $r > 0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2 < 2$, és legyen B az összes olyan $r > 0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2 > 2$. Legyen

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2}.$$

Ekkor

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2}.$$

Ha $r \in A$, akkor $s > r$, de $s^2 < 2$, így A -nak nincs legnagyobb eleme. Ha $r \in B$, akkor $s < r$, de $s^2 > 2$, így B -nek nincs legkisebb eleme. Innen következik, hogy A -nak nincs legkisebb felső korlátja: ha lenne, nem lehetne A -ban, mert akkor A legnagyobb eleme lenne, így B -ben kellene lennie, de B -nek nincs legkisebb eleme. $\square$

2.1.40. Bővített valós számok. Legyen a *bővített valós számok* halmaza

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

és legyen $-\infty < x < +\infty$, ha $x \in \mathbb{R}$. Így kiterjesztve $\mathbb{R}$ rendezését, $\overline{\mathbb{R}}$ rendezett halmaz, és benne minden részhalmaznak létezik felső határa és alsó határa, például ha $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ az $\mathbb{R}$ -ben felülről nem korlátos, akkor $\sup(A) = +\infty$. Megjegyezzük, hogy $\sup(\emptyset) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = +\infty$, de ha $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$, akkor $\inf(A) \leq \sup(A)$. Néha (pontatlanul) $+\infty$ helyett ∞ -t írunk.

2.2 Megszámlálható halmazok

2.2.1. Halmazok ekvivalenciája. Az X és Y halmazokat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha létezik X -et Y -ra leképező kölcsönösen egyértelmű leképezés. Jelölése: $X \sim Y$.

2.2.2. Állítás. Legyenek X , Y és Z halmazok. Ekkor

- (1) $X \sim X$ (reflexivitás);
- (2) ha $X \sim Y$, akkor $Y \sim X$ (szimmetria);
- (3) ha $X \sim Y$ és $Y \sim Z$, akkor $X \sim Z$ (transzitivitás). $\square$

2.2.3. Megjegyzés. Ha f az X -et X' -re képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, g pedig Y -t Y' -re leképező kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor az

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés $X \times Y$ -t $X' \times Y'$ -re képezi le, így ezek ekvivalensek. Egy $h \subset X \times Y$ reláció képe ennél a leképezésnél a $h' = g \circ h \circ f^{-1} \subset X' \times Y'$ reláció. A $h \mapsto h'$ leképezés függvényt függvénybe, kölcsönösen egyértelmű leképezést kölcsönösen egyértelmű leképezésbe, Y -ra való leképezést Y' -re való leképezésbe visz, speciálisan Y^X és $Y'^{X'}$ ekvivalensek.

2.2.4. Tétel. Bármely n természetes számra $\{1, 2, \dots, n\}$ bármely valódi részhalmaza ekvivalens $\{1, 2, \dots, m\}$ -mel valamely $m < n$ természetes számra.

* **Bizonyítás.** Teljes indukcióval: 0-ra nyilván igaz, mert az üres halmaznak nincs valódi részhalmaza. Ha n -re teljesül az állítás, és $A \subsetneq \{1, 2, \dots, n+1\}$, akkor az A része $\{1, 2, \dots, n\}$ esetben az állítás nyilván teljesül. Ha $n+1 \in A$, akkor van olyan $k < n+1$ természetes szám, amelyre $k \notin A$. Defináljuk az f függvényt úgy, hogy $f(i)$ legyen i , ha $i \in A$, $i \neq n+1$, és legyen $f(n+1) = k$. Az f függvény kölcsönösen egyértelmű leképezése A -nak $\{1, 2, \dots, n\}$ valamely részhalmazára. Ha f értékkészlete $\{1, 2, \dots, n\}$, akkor $m = n$ választható. Ha f értékkészlete valódi részhalmaza $\{1, 2, \dots, n\}$ -nek, akkor az indukciós feltevés használható. $\square$

2.2.5. Tétel. Ha n természetes szám, akkor nem létezik ekvivalencia $\{1, 2, \dots, n\}$ és egy valódi részhalmaza között.

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{N}$ -re ez nem igaz: $n \mapsto n^+$ ekvivalencia $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}^+$ között.

* **Bizonyítás.** Teljes indukcióval bizonyítunk: 0-ra az állítás világos. Tegyük fel, hogy n -re teljesül, de létezik egy f kölcsönösen egyértelmű leképezése $\{1, 2, \dots, n+1\}$ -nek egy A valódi részhalmazára. Ha $n+1 \notin A$, akkor f megszorítása $\{1, 2, \dots, n\}$ -re kölcsönösen egyértelmű leképezése $\{1, 2, \dots, n\}$ -nek egy valódi részhalmazára, mivel $f(n+1)$ nem lesz az értékkészletben, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. Ha $n+1 \in A$, akkor viszont úgy kapjuk $\{1, 2, \dots, n\}$ és $A \setminus \{n+1\}$ egy ekvivalenciáját, hogy a $(k, n+1)$ és az $(n+1, l)$ párokat kihagyjuk a leképezésből, és helyettük a (k, l) párt vesszük be, hacsak nem $k = l = n+1$. Ez megint ellentmond az indukciós feltevésnek. $\square$

2.2.6. Véges és végtelen halmazok. Egy X halmazt *végesnek* nevezünk, ha valamely n természetes számra ekvivalens a $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal, egyébként *végtelennek* nevezzük.

Egy halmaz legfeljebb egy n -re lehet ekvivalens az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal, mert ha $\{1, 2, \dots, m\}$ -mel is ekvivalens lenne, akkor $m < n$ vagy $n < m$ miatt $\mathbb{N}^+$ egy kezdőszelete ekvivalens lenne egy valódi részhalmazával, ami az előző tétel szerint lehetetlen.

Azt az egyértelműen meghatározott természetes számot, amelyre egy adott X véges halmaz ekvivalens $\{1, 2, \dots, n\}$ -nel, az X halmaz *elemei számának*, vagy *számostságának* nevezzük, és $\natural(A)$ -val vagy (a „cardinal number” rövidítéseként) $\text{card}(A)$ -val jelöljük. Az $|A|$ és $\overline{A}$ jelölés is szokásos.

Például $\natural(\emptyset) = 0$, bármely a -ra $\natural\{a\} = 1$, bármely a, b -re, ha $a \neq b$ akkor $\natural\{a, b\} = 2$. Azt, hogy a természetes számokat nullával kezdtük, az indokolja, hogy így a természetes számok a véges halmazok számostságai.

Az előző tételből az is következik, hogy véges halmaz sohasem ekvivalens egy valódi részhalmazával. Mivel ez $\mathbb{N}$ -re nem teljesül, $\mathbb{N}$ végtelen halmaz.

2.2.7. Karakterisztikus függvények. Legyen X egy halmaz, és ha $Y \subset X$, legyen $\chi_Y(x) = 1$, ha $x \in Y$ és $\chi_Y(x) = 0$, ha $x \in X \setminus Y$. A χ_Y függvényt az Y halmaz (X -en értelmezett) *karakterisztikus függvényének* nevezzük. Az $Y \mapsto \chi_Y$ leképezés nyilván kölcsönösen egyértelmű leképezése $\wp(X)$ -nek az X -en értelmezett karakterisztikus függvények $\{0, 1\}^X$ halmazára. Megjegyezzük, hogy a Kronecker-delta nem más mint $\mathbb{I}_X$ karakterisztikus függvénye.

2.2.8. Tétel. Legyenek X és Y halmazok. Ekkor

- (1) ha X véges és $Y \subset X$, akkor Y is véges és $\natural(Y) \leq \natural(X)$;
- (2) ha X véges és $Y \subsetneq X$, akkor $\natural(Y) < \natural(X)$;
- (3) ha X és Y végesek és diszjunktak, akkor $X \cup Y$ is véges és $\natural(X \cup Y) = \natural(X) + \natural(Y)$;
- (4) ha X és Y végesek, akkor $\natural(X \cup Y) + \natural(X \cap Y) = \natural(X) + \natural(Y)$;
- (5) ha X és Y végesek, akkor $X \times Y$ is véges, és $\natural(X \times Y) = \natural(X) \cdot \natural(Y)$;
- (6) ha X és Y végesek, akkor X^Y is véges, és $\natural(X^Y) = \natural(X)^{\natural(Y)}$;
- (7) ha X véges halmaz, akkor $\varnothing(X)$ is véges, és $\natural(\varnothing(X)) = 2^{\natural(X)}$;
- (8) ha X véges és az f függvény X -et Y -ra képezi, akkor Y is véges, $\natural(Y) \leq \natural(X)$, és ha f nem kölcsönösen egyértelmű, akkor $\natural(Y) < \natural(X)$.

* **Bizonyítás.** (1) nyilvánvaló, ha $Y = X$, ha viszont $Y \subsetneq X$, akkor ekvivalens $\{1, 2, \dots, \natural(X)\}$ egy valódi részhalmazával, amiről tudjuk, hogy ekvivalens $\{1, 2, \dots, m\}$ -mel valamely $m < n$ -re. Ezzel (2)-t is beláttuk. (3) azon múlik, hogy

$$\{m+1, m+2, \dots, m+n\}$$

ekvivalens az

$$\{1, 2, \dots, n\}$$

halmazzal. (3) szerint $\natural(X \cup Y) = \natural(X \setminus Y) + \natural(X \cap Y) + \natural(Y \setminus X)$; mindkét oldalhoz hozzáadva $\natural(X \cap Y)$ -t és újra felhasználva (3)-at kapjuk (4)-et. (5) és (6) az Y elemeinek száma szerinti teljes indukcióval következnek. (7) következik (6)-ból és $\varnothing(X)$ -nek a karakterisztikus függvények halmazával való ekvivalenciájából. (8) bizonyításához feltehetjük, hogy

$$X = \{1, 2, \dots, \natural(X)\}.$$

Minden $y \in Y$ -ra legyen $g(y)$ az $f^{-1}(y)$ halmaz legkisebb eleme. Ekkor g az Y -t kölcsönösen egyértelműen képezi le X egy részhalmazára és ha f nem volt kölcsönösen egyértelmű, akkor ez a részhalmaz valódi. $\square$

2.2.9. Skatulya elv. Ha X és Y véges halmazok, és $\natural(X) > \natural(Y)$, akkor egy $f: X \rightarrow Y$ leképezés nem lehet kölcsönösen egyértelmű.

Bizonyítás. Egyébként $\{1, 2, \dots, \natural(Y)\}$ egy részhalmaz, azaz $\natural(Y) < \natural(X)$ miatt $\{1, 2, \dots, \natural(X)\}$ egy valódi részhalmaz, ekvivalens lenne $\{1, 2, \dots, \natural(Y)\}$ -nel. $\square$

2.2.10. Tétel. Rendezett halmaz bármely nem üres véges részhalmazának van maximális és minimális eleme.

* **Bizonyítás.** A részhalmaz elemeinek száma szerinti teljes indukcióval. Ha A egyelemű, akkor nyilvánvaló. Ha $\natural(A) = n + 1$, legyen $a \in A$ és $A' = A \setminus \{a\}$. Ha a nem nagyobb, mint az A' halmaz a' maximális eleme, akkor az a' maximális elem, egyébként a maximális elem. Minimális elemre a bizonyítás hasonló. $\square$

2.2.11. Megszámlálható halmazok. Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha ekvivalens $\mathbb{N}$ -nel. Ha egy halmaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor megszámlálhatónak nevezzük. (Vannak, akik megszámlálható alatt megszámlálhatóan végtelent értenek.)

2.2.12. Tétel. Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.

Bizonyítás. Ha egy halmaznak van végtelen részhalmaza, akkor nem lehet véges, mert véges halmaz minden részhalmaza is véges. A másik irány bizonyításához az általános rekurziótétel felhasználásával az X végtelen halmazból válasszunk ki egy különböző elemekből álló $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatot. Ennek értékkészlete X egy megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. $\square$

2.2.13. Tétel. Egy megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható.

Bizonyítás. Elég $\mathbb{N}$ részhalmazaira bizonyítani az állítást. Ha $X \subset \mathbb{N}$ felülről korlátos, akkor véges. Ha nem felülről korlátos, akkor az általános rekurziótételt felhasználva, legyen x_n az $X \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ halmaz legkisebb eleme. Az így kapott sorozat szigorúan monoton növekedő és értékkészlete X . $\square$

2.2.14. Tétel. Egy X nem üres halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik $\mathbb{N}$ -et X -re képező leképezés.

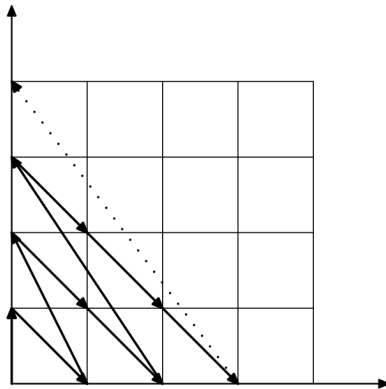
Bizonyítás. Ha f az $\mathbb{N}$ -et X -re képezi, akkor legyen $g(x)$ az $f^{-1}(x)$ legkisebb eleme. Mivel g kölcsönösen egyértelmű, X ekvivalens $\mathbb{N}$ egy részhalmazával, így az előző tétel szerint megszámlálható. A megfordítás nyilvánvaló, ha X megszámlálható végtelen, ha pedig X véges, $X = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor legyen $f_k = f_0$, ha $k > n$. $\square$

2.2.15. Tétel. Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz megszámlálható végtelen.

Bizonyítás. Ha $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $k = m + n$, akkor legyen

$$f(m, n) = \frac{k(k+1)}{2} + m.$$

Az f kölcsönösen egyértelmű és $\mathbb{N}$ -re képez. $\square$



2.2.1 ábra: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sorozatbarendezeése.

2.2.16. Tétel. *Megszámlálható halmazok megszámlálható családjának az egyesítése megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyen I megszámlálható, és X_i megszámlálható minden $i \in I$ -re. Nyilván feltehetjük, hogy I és minden X_i nem üres. Válasszunk olyan f_i , $i \in I$ és g függvényeket, amelyek $\mathbb{N}$ -et X_i -re, illetve I -re képezik le. Legyen $h(m, n) = f_{g(m)}(n)$. Ekkor h az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -et $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ -re képezi le, így az előző tételből következik az állítás. $\square$

2.2.17. Következmény. *A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ halmazok megszámlálhatóak.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$, $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{m/n : m \in \mathbb{Z}\}$, az előző tételből kapjuk az első két állítást. A harmadik állítás is az előző tételből következik indukcióval. A negyedik állítás a harmadik következménye. $\square$

2.2.18. Tétel. *Ha X megszámlálható, Y pedig végtelen halmaz, akkor $X \cup Y \sim Y$.*

Bizonyítás. Az X -et helyettesítve $X \setminus Y$ -nal, feltehetjük, hogy X és Y diszjunktak. Legyen Z megszámlálható végtelen részhalmaza Y -nak. Legyen f egy Z -t $X \cup Z$ -re képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, és legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in Z$ és $g(x) = x$, ha $x \in Y \setminus Z$. Ekkor g az Y -t $X \cup Y$ -ra képező kölcsönösen egyértelmű leképezés. $\square$

2.2.19. Következmény. *Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával.*

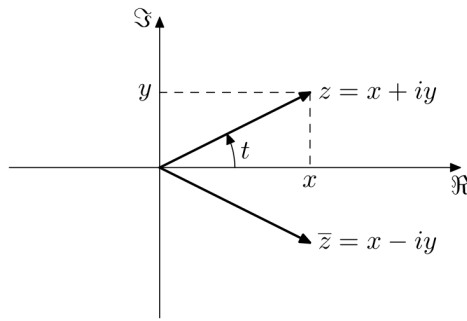
Bizonyítás. Már láttuk, hogy véges halmaz nem lehet ekvivalens valódi részhalmazával. Ha X végtelen, és $x \in X$, akkor $Y = X \setminus \{x\}$ sem lehet véges, és az előző tétel szerint ekvivalens X -szel. $\square$

2.2.20. Cantor tétele. *A $\wp(\mathbb{N})$ halmaz nem megszámlálható.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\wp(\mathbb{N})$ végtelen, hiszen az egyelemű részhalmazok egy megszámlálható végtelen részhalmazát adják. Nyilván $\wp(\mathbb{N})$ ekvivalens a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ halmazzal, azaz az összes 0–1 sorozatok halmazával, hiszen $\mathbb{N}$ minden részhalmazához hozzárendelhetjük annak $\mathbb{N}$ -en értelmezett karakterisztikus függvényét. Tegyük fel, hogy $n \mapsto s_n$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{N}$ -nek $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ -be. Megmutatjuk, hogy nem képezhet $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ -re. Egy olyan $S \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatot, amely nem lép fel képként, a Cantor-féle átlós eljárással kaphatunk: legyen $S(n) = 1 - s_n(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. $\square$

2.3 Komplex számok

A görög matematikán, amelynek szabatossága a tudományok mintájául szolgált (Eukleidész műve 2000 évig volt tankönyv!), először a reneszánsz számolóművészeinek sikerült túllépnie, amikor Scipione del Ferro és Nicolo Fontana „Tartaglia” harmadfokú egyenleteket oldottak meg. Felfedezéseiket Gerolamo Cardano és tanítványa, Lodovico Ferro fejlesztették tovább, megtalálva az általános harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásának módját. Éppen olyan esetekben azonban, amikor három különböző valós gyöke van egy harmadfokú egyenletnek, a Cardano-képletben a négyzetgyökjel alatt negatív szám szerepelt, és így nem adta meg a megoldást: ez a „casus irreducibilis”. Észrevették azonban, hogy negatív számok négyzetgyökeire is bevezethetők megfelelő számolási szabályok. Fokozatosan tisztázódtak a „képzetes” számokkal való számolás szabályai, és a



2.3.1 ábra: komplex szám, valós és képzetes rész, konjugált, argumentum.

trigonometrikus függvényekkel való kapcsolat. A komplex számok fogalmát Carl Friedrich Gauss tisztázza véglegesen, és bebizonyítja az algebra alaptételét.

2.3.1. Komplex számok. A *komplex számok* halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, azaz a valós számpárok halmaza, az

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \text{illetve} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - y'y, y'x + yy')$$

összeadással, illetve szorzással mint műveletekkel. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{C}$ test a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0, 0)$ pár, az (x, y) pár additív inverze a $(-x, -y)$ pár, egységelem az $(1, 0)$ pár, és a nullelemtől különböző (x, y) pár multiplikatív inverze az $(x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$ pár. Vegyük észre, hogy ha $x, x' \in \mathbb{R}$, akkor $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$, $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$, így az $x \mapsto (x, 0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{R}$ -nek $\mathbb{C}$ -be, így az összes $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ alakú komplex számok halmazát azonosítjuk $\mathbb{R}$ -rel.

Jelölje i a $(0, 1)$ komplex számot. (A villamosmérnökök ezt a számot j -vel szokták jelölni.) Vegyük észre, hogy $i^2 = -1$, az i segítségével az (x, y) komplex számot $x + iy$ alakban írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ha $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, akkor x -et a z *valós részének*, az y -t pedig a z *képzetes részének* nevezzük. Jelölésük: $\Re(z)$ illetve $\Im(z)$ (vagy $\text{Re}(z)$ illetve $\text{Im}(z)$). A z *konjugáltja* a $\bar{z} = x - iy$ komplex szám. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ha egy komplex szám valós része nulla, akkor *képzetesnek* nevezzük.

A definíció alapján azonnal következnek a $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$, $1/z = 1/\bar{z}$ összefüggések.

Megjegyezzük, hogy nincs olyan rendezés, amellyel a komplex számok teste rendezett test lenne, mert rendezett testben $1 > 0$ és $-1 < 0$, és $\mathbb{C}$ -ben $i^2 = -1$, ami ellentmond annak, hogy rendezett testben minden nem nulla elem négyzete pozitív.

2.3.2. Példa. A $z = 64/(\sqrt{3} + i)$ komplex szám algebrai alakja a nevező konjugáltjával való bővítéssel kapható:

$$z = \frac{64}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \frac{64 \cdot (\sqrt{3} - i)}{3 + 1} = 16\sqrt{3} - 16i.$$

A z valós része $\Re(z) = 16\sqrt{3}$, képzetes része $\Im(z) = -16$, konjugáltja $16\sqrt{3} + 16i$.

2.3.3. Komplex számok abszolút értéke. A komplex számok a sík pontjainak, vagyis az origóból kiinduló vektoroknak is tekinthetők. A komplex számok összeadása megfelel a vektorok szokásos összeadásának. Egy komplex szám abszolút értéke ennek a vektornak a hossza: az $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ komplex szám *abszolút értéke* $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ezzel a jelöléssel $1/z = \bar{z}/|z|^2$, ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$. A valós számokra a szokásos abszolút értéket kapjuk vissza: $|(x, 0)| = |x|$. Nyilván ha $z, w \in \mathbb{C}$, akkor $z\bar{z} = |z|^2$, $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z||w|$ (mert mindkét oldal négyzete $z\bar{z}w\bar{w}$), $|\Re(z)| \leq |z|$, $|\Im(z)| \leq |z|$ és $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$. Teljesül a $|z + w| \leq |z| + |w|$ *háromszög-egyenlőtlenség*; valóban,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

ahonnan négyzetgyökvonással következik az egyenlőtlenség. A háromszög-egyenlőtlenség-ből $||z| - |w|| \leq |z - w|$ minden $z, w \in \mathbb{C}$ -re; valóban egyrészt $|z| \leq |z - w| + |w|$, ahonnan $|z| - |w| \leq |z - w|$, másrészt z és w szerepét felcserélve $|w| - |z| \leq |z - w|$.

Legyen $\operatorname{sgn}(0) = 0$ és legyen $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$, ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Nyilván $\operatorname{sgn}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sgn}(z)}$ és $|\operatorname{sgn}(z)| = 1$, ha $z \neq 0$. A valós számokra visszakapjuk az ott definiált sgn függvényt.

2.3.4. Komplex számok argumentuma és trigonometrikus alakja. A komplex számokat origóból kiinduló vektoroknak tekintve, a vektor koordinátái felírhatók a vektor hossza és a vektornak az „ x tengely pozitív felével” bezárt szöge, annak szinusza és koszinusza segítségével. A trigonometrikus alaknak (a geometriára való hivatkozás nélkül történő) bevezetéséhez fel fogjuk használni a $\cos$, $\sin$ függvények és a π szám definícióját, és számos ezekre vonatkozó (a középiskolából ismert) összefüggést, amelyet később fogunk bizonyítani.

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor van olyan t valós szám, amelyre $\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t$. Ha ez az összefüggés fennáll t -re, akkor a $t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ számokra is, és csak ezekre. Nyilván $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, ez a komplex szám *trigonometrikus alakja*. (Ha $z = 0$, akkor akármilyen $t \in \mathbb{R}$ választható.) Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\arg(z)$ az az egyetlen t valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t$; ez az egyetlen t valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $z = |z|(\cos t + i \sin t)$. Nyilván ha $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, akkor $\bar{z} = |z|(\cos t - i \sin t) = |z|(\cos(-t) + i \sin(-t))$, összhangban azzal a geometriai képpel, hogy $\bar{z}$ a z vektor „ x tengelyre” történő tükrözésével kapható.

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos t + i \sin t)$ és $w = |w|(\cos s + i \sin s)$, ahol $t, s \in \mathbb{R}$. Ekkor zw trigonometrikus alakja

$$\begin{aligned} zw &= |z| \cdot (\cos t + i \sin t) \cdot |w| \cdot (\cos s + i \sin s) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos t + i \sin t) \cdot (\cos s + i \sin s) \\ &= |zw|(\cos t \cos s - \sin t \sin s + i(\cos t \sin s + \cos s \sin t)) \\ &= |zw|(\cos(t + s) + i \sin(t + s)). \end{aligned}$$

Ezt az összefüggést *Moivre-azonosságnak* nevezzük. Figyelembe véve, hogy ha $w \neq 0$, akkor $1/w = \bar{w}/|w|^2$, ebből

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(t - s) + i \sin(t - s)).$$

Ha tehát z, w nem nulla komplex számok, akkor zw argumentuma $\arg(z) + \arg(w)$, ha ez nagyobb, mint $-\pi$, de nem nagyobb, mint π . Ha $\arg(z) + \arg(w) \leq -\pi$, akkor

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2\pi,$$

ha pedig $\arg(z) + \arg(w) > \pi$, akkor

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi.$$

Tehát a komplex számok szorzásának geometriai jelentése, hogy a hosszak összeszorzódnak, az „ x tengely pozitív felével” bezárt szögek pedig összeadódnak. (A komplex számok osztásánál az eredmény hossza a hosszak hányadosa, az „ x tengely pozitív felével” bezárt szögek pedig kivonódnak.)

Indukcióval azt kapjuk, hogy $z^n = |z|^n(\cos(nt) + i\sin(nt))$, ha $n \in \mathbb{N}$; ha $z \neq 0$, akkor ez az összefüggés minden $n \in \mathbb{Z}$ -re teljesül.

2.3.5. Példa. A $z = 16\sqrt{3} - 16i$ komplex szám trigonometrikus alakja, mivel $|z| = \sqrt{16^2 \cdot 3 + 16^2} = 32$,

$$z = 16\sqrt{3} - 16i = 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 32(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)).$$

° **2.3.6. Gyökvonás komplex számból.** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és vizsgáljuk a $z \mapsto z^n$, $z \in \mathbb{C}$ hatványozás inverzét. Ha $n = 1$, akkor a $z \mapsto z$ leképezés $\mathbb{C}$, az identikus leképezés, és inverze saját maga. Ha $n > 1$, $z, w \in \mathbb{C}$ és $z^n = w$, akkor nyilván (indukcióval) $|w| = |z|^n$. Ebből $w = 0$ esetén $z = 0$. Egyébként, ha $t = \arg(w)$, akkor a

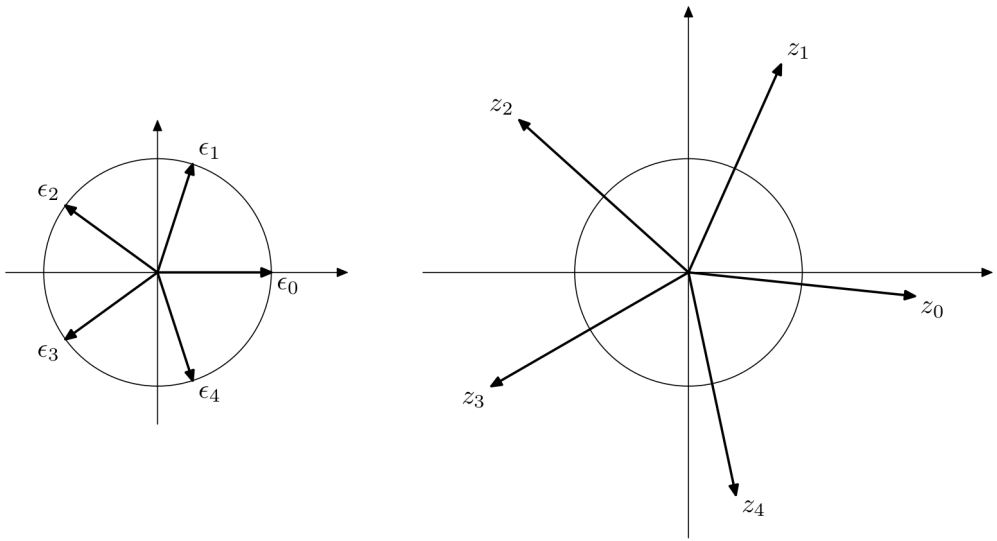
$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

különböző komplex számok, és csak ezek azok, amelyeknek n -edik hatványa w . Vegyük észre, hogy ha $n = 2$, akkor $z_1 = -z_0$. Így tehát $n > 1$ esetén $z \mapsto z^n$ inverze nem függvény, de persze $\mathbb{C}$ -beli reláció. Néha mégis szokás az inverzet $\sqrt[n]{}$ -kel jelölni. Ezzel a jelöléssel $\sqrt[n]{0} = \{0\}$ és $\sqrt[n]{w} = \{z_k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$; ha $n = 2$, akkor $\sqrt{w} = \{z_0, -z_0\}$. Mivel nagy a veszélye az (egyértelművé tett) valós gyökvonással való összetévesztésnek, ezt a jelölést a továbbiakban általában nem használjuk.

Speciálisan, ha $w = 1$, akkor az $\varepsilon^n = 1$ feltételnek az

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

komplex számok tesznek eleget. Ezeket n -edik *komplex egységgyökök*nek nevezzük. Bizonyos n -edik egységgyökök hatványaiként az összes többi előáll (például $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$), ezeket n -edik *primitív egységgyökök*nek nevezzük. Az $\varepsilon_0 = 1$ nyilván nem n -edik primitív egységgyök, ha $n \neq 1$.



2.3.2 ábra: ötödik egységgyökök és $16\sqrt{3} - 16i$ ötödik gyökei.

Ha $z^n = w$, akkor z és az n -edik komplex egységgyökök segítségével megkaphatjuk az összes komplex számot, amelyek n -edik hatványa w , ezek $z\varepsilon_0, z\varepsilon_1, \dots, z\varepsilon_{n-1}$. Innen következik, hogy ha $n > 1$, akkor az összes olyan komplex számok összege, amelyek n -edik hatványa w , nulla. Valóban,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z\varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1} z\varepsilon_1^k = z \frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = z \frac{1 - 1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

(Geometriailag, $2\pi/n$ -nel elforgatva a gyököket, az összegük is elfordul $2\pi/n$ -nel. Mivel a gyökök halmaza nem változik, $n > 1$ esetén ez csak úgy lehetséges, hogy az összeg nulla.)

Ugyanúgy, mint a valós esetben, beláthatjuk hogy ha $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, akkor $az^2 + bz + c = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

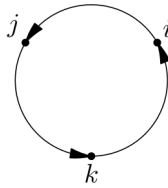
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ahol $d \neq 0$ esetén $t = \arg(d)$ jelöléssel $\sqrt{d} = \sqrt{|d|}(\cos(t/2) + i \sin(t/2))$.

2.3.7. Példa. A $w = 16\sqrt{3} - 16i$ komplex szám ötödik gyökei, mivel a trigonometrikus alakja $w = 32(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6))$, a

$$z_k = 2(\cos(-\pi/30 + 2k\pi/5) + i \sin(-\pi/30 + 2k\pi/5)), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

komplex számok.



2.3.3 ábra: kvaterniók szorzása.

2.3.8. Bővített komplex számok. A bővített komplex számok halmaza

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

2.3.9. Kvaterniók. Ha a komplex számok bevezetésénél használt *duplázási eljárást* megismétljük, a William Rowan Hamilton ír matematikus, fizikus és csillagász által bevezetett *kvaterniókhoz* vagy *Hamilton-féle számokhoz* jutunk: ezek halmaza $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, a komplex számpárok halmaza, a $(z, w) + (z', w') = (z + z', w + w')$ összeadással és a $(z, w) \cdot (z', w') = (zz' - \overline{w'}w, w'z + wz')$ szorzással mint műveletekkel. (Figyeljük meg, hogy a szorzás hasonló a komplex számoknál bevezetett szorzáshoz, de itt konjugálások is szerepelnek.) Egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{H}$ ferdetest a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0, 0)$ pár, a (z, w) pár additív inverze a $(-z, -w)$ pár, egységelem az $(1, 0)$ pár, és a nullelemtől különböző (z, w) pár multiplikatív inverze a $(\overline{z}/(z\overline{z} + w\overline{w}), -w/(z\overline{z} + w\overline{w}))$ pár. Vegyük észre, hogy ha $z, z' \in \mathbb{C}$, akkor $(z, 0) + (z', 0) = (z + z', 0)$, $(z, 0) \cdot (z', 0) = (zz', 0)$, azaz a $z \mapsto (z, 0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{C}$ -nek $\mathbb{H}$ -ba, így az összes $(z, 0)$, $z \in \mathbb{C}$ alakú kvaterniók halmazát azonosítjuk $\mathbb{C}$ -vel, azaz úgy tekinthetjük, hogy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Jelölje j a $(0, 1)$ kvaterniót. Vegyük észre, hogy $j^2 = -1$, a j segítségével a (z, w) kvaterniót $z + wj$ alakba írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ha k a $(0, i)$ kvaterniót jelöli, akkor a (z, w) kvaterniót felírhatjuk $a + bi + cj + dk$ alakban, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, és ez a felírás egyértelmű, mert $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$, $c = \Re(w)$ és $d = \Im(w)$. A definíció alapján $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Míg egy valós szám bármely kvaternióval felcserélhető, a komplex számokra ez már nem igaz; például ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $jz = \overline{z}j$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$. A számolási szabályok legegyszerűbben a 2.3.3 ábra alapján jegyezhetők meg: a nyilak mentén haladva ciklikusan körbe, a két kvaternió szorzata a harmadik, míg ellenkező irányba haladva az ellentettje. Ezek alapján legegyszerűbb a kvaterniókat

$$a + bi + cj + dk$$

alakba írni, és a disztributivitást, az asszociativitást, a fenti szorzási szabályokat, valamint a valós számok i, j, k -val való felcserélhetőségét felhasználva számolni velük.

Ha $p = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor az a valós számot a p valós részének, *időszerű részének* vagy *skalár részének*, a $bi + cj + dk$ kvaterniót pedig a p *képzetes részének*, *térszerű részének* vagy *vektor részének* nevezzük. Jelölésük: $\Re(p)$ illetve $\Im(p)$. (A jelölés eltér a komplex számoknál szokásostól!) A p *konjugáltja* a $\overline{p} = a - bi - cj - dk$ kvaternió. A komplex számokra a szokásos konjugálást kapjuk vissza. Egy kvaternió pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával, azaz $b = c = d = 0$. Ha egy

kvaternió valós része nulla, akkor *tisztán képzetesnek*, *térszerűnek* vagy egyszerűen csak *vektornak* nevezzük. A definíció alapján azonnal következnek a $\bar{\bar{p}} = p$, $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$, $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ (sic!), $p + \bar{p} = 2\Re(p)$, $p - \bar{p} = 2\Im(p)$, ha $p, q \in \mathbb{H}$ összefüggések.

2.3.10. Kvaterniók abszolút értéke. Egy kvaternió abszolút értéke a hossza (mint vektornak): ha $p = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor legyen a p kvaternió *abszolút értéke* $|p| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. (Ezzel a jelöléssel most is $1/p = (1/|p|^2)\bar{p}$, ha $0 \neq p \in \mathbb{H}$.) A komplex számokra a szokásos abszolút értéket kapjuk vissza. Nyilván $p\bar{p} = |p|^2$, $|0| = 0$ és $p \neq 0$ esetén $|p| > 0$, $|\bar{p}| = |p|$, $|\Re(p)| \leq |p|$, $|\Im(p)| \leq |p|$, és $|pq| = |p||q|$ (mert mindkét oldal négyzete $p\bar{p}q\bar{q}$). Teljesül a $|p+q| \leq |p| + |q|$ *háromszög-egyenlőtlenség* és a belőle kapható $||p| - |q|| \leq |p - q|$ egyenlőtlenség; mindkettő ugyanúgy kapható, mint a komplex számoknál.

2.3.11. Vektoriális szorzás. A kvaterniószorzás eltérését a kommutativitástól a $p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$ mennyiséggel mérhetjük. Ez egy új szorzás a kvaterniók között, amelyet *vektoriális szorzásnak* nevezünk, mert a könnyen ellenőrizhető $\Re(pq) = \Re(qp)$ egyenlőség miatt a valós része mindig nulla. A vektoriális szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve és valós szám bármelyik tényezőjéből kiemelhető. Nyilván $p \times p = 0$ bármely $p \in \mathbb{H}$ -ra, ahonnan

$$\begin{aligned} 0 &= (p+q) \times (p+q) = p \times p + p \times q + q \times p + q \times q \\ &= p \times q + q \times p, \end{aligned}$$

tehát tetszőleges $p, q \in \mathbb{H}$ -ra $p \times q = -q \times p$, azaz a vektoriális szorzás nem kommutatív, hanem *antikommutatív*. A definícióból könnyen adódik, hogy $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, és teljesül a *Jacobi-identitás*: tetszőleges $p, q, r \in \mathbb{H}$ -ra

$$(p \times q) \times r + (q \times r) \times p + (r \times p) \times q = 0.$$

A vektoriális szorzás nem asszociatív, például $i \times (i \times j) = i \times k = -j$, míg $(i \times i) \times j = 0$.

2.3.12. Kvaterniók és a háromdimenziós euklidészi tér. A kvaterniók a fentiek alapján $\mathbb{R}^4$ (azaz a négydimenziós *tér*) pontjainak is tekinthetők. A kvaterniók összeadása megfelel az $\mathbb{R}^4$ -beli összeadásnak. A tisztán képzetes kvaterniók $\mathbb{R}^3$ -mal, és így a háromdimenziós tér pontjaival azonosíthatók: egy derékszögű koordináta-rendszerben $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koordinátákkal rendelkező pontnak az $xi + yj + zk$ tisztán képzetes kvaternió felel meg. Ily módon i, j és k rendre a koordináta-rendszer három tengelyén vett egységvektoroknak felelnek meg. Ha mást nem mondunk, akkor a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy *jobbodrású* legyen, azaz egy jobbmenetes csavart az i vektor irányából a j vektor irányába forgatva, a k vektor irányába haladjon. A tisztán képzetes kvaterniók összeadása megfelel a térbeli vektorok szokásos (paralelogramma-szabály) összeadásának. A $v = xi + yj + zk$ és $v' = x'i + y'j + z'k$ tisztán képzetes kvaterniók szorzatának valós része $-\langle v, v' \rangle$, ahol $\langle v, v' \rangle = xx' + yy' + zz'$, képzetes része pedig

$$\begin{aligned} \Im(vv') &= \frac{1}{2}(vv' - \overline{vv'}) = \frac{1}{2}(vv' - \bar{v}'\bar{v}) = \frac{1}{2}(vv' - (-v')(-v)) = \frac{1}{2}(vv' - v'v) \\ &= v \times v' = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k. \end{aligned}$$

A $(v, v') \mapsto \langle v, v' \rangle$ leképezést *belső szorzásnak* vagy *skaláris szorzásnak* nevezzük (bár nem művelet, de „kommutatív” és „mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve”). Nyilván $\langle v, v \rangle = |v|^2$. Egy kvaternió pontosan akkor vektor, ha a négyzete valós és kisebb vagy egyenlő nulla: ha s skalár, v vektor, akkor

$$(s + v)^2 = s^2 + v^2 + 2sv = s^2 - \langle v, v \rangle + v \times v + 2sv = s^2 - \langle v, v \rangle + 2sv;$$

ez az $s = 0$ esetben valós és kisebb vagy egyenlő nulla, és ha valós, akkor $v = 0$ vagy $s = 0$, de a $v = 0$, $s \neq 0$ esetben nagyobb, mint nulla. Ha v'' is egy vektor, akkor, mint könnyen kiszámolható, $v \times (v' \times v'') = \langle v, v'' \rangle v' - \langle v, v' \rangle v''$. Végül a $(v, v', v'') \mapsto \langle v, v' \times v'' \rangle$ leképezést *vegyes szorzásnak* szokás nevezni.

2.3.13. A szorzások geometriai jelentése. Ha egy vektort valós számmal (skalárral) szorzunk, az a vektor nyújtásának, illetve összehúzásának felel meg, negatív valós szám esetén pedig az irányítás is változik. Az előző pont szerint ha v és v' tisztán képzetes kvaterniók, azaz vektorok, akkor

$$(1) \quad \langle v, v' \rangle^2 + |v \times v'|^2 = |v|^2 |v'|^2.$$

Innen $|\langle v, v' \rangle| \leq |v| |v'|$ és $|v \times v'| \leq |v| |v'|$.

A koszinusztételből, ha a v és v' vektorok által bezárt szög φ , akkor

$$\begin{aligned} 2|v| |v'| \cos \varphi &= |v|^2 + |v'|^2 - |v - v'|^2 \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v', v' \rangle - (\langle v, v \rangle + \langle v', v' \rangle - \langle v, v' \rangle - \langle v', v \rangle) \\ &= 2\langle v, v' \rangle, \end{aligned}$$

tehát $\langle v, v' \rangle = |v| |v'| \cos \varphi$. Ha v egységvektor és $v' \neq 0$, akkor $\langle v, v' \rangle$ abszolút értéke a v' vektor v irányú vetületének hossza, előjele pedig pozitív, ha a két vektor hegyesszöget zár be, negatív, ha a két vektor tompaszöget zár be, és nulla, ha merőlegesek.

Ebből az eredményből (1) felhasználásával $|v \times v'| = |v| |v'| |\sin \varphi|$, a v és v' által kifeszített paralelogramma területe. Tehát ha v és v' párhuzamosak, akkor vektori szorzatuk nulla lesz. Egyszerű számolással adódik, hogy $\langle v, v \times v' \rangle = 0$ és $\langle v', v \times v' \rangle = 0$, azaz $v \times v'$ merőleges a v és v' vektorokra. Az irányítás meghatározásához vegyük észre, hogy ha a v vektort az i irányba, a v' vektort pedig az i és j által adott síkba forgatjuk, de úgy, hogy második koordinátája ne legyen negatív, akkor vektori szorzatuk k irányú. Ez azt jelenti, hogy v , v' és $v \times v'$ ugyanolyan irányítású vektorrendszert alkotnak, mint i , j és k .

Végül a vegyes szorzat geometriai jelentése a v , v' és v'' vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, hiszen ennek alapterülete $|v' \times v''|$, magassága pedig $|v| \cos \varphi$, ahol φ a v és $v' \times v''$ által bezárt szög.

2.3.14. Forgatások. A kvaterniókat a háromdimenziós forgatásokkal való szoros kapcsolatuk miatt felhasználgják robotok vezérlésénél. Legyen p egy *egységvektor*, azaz egységnyi abszolút értékű vektor, v pedig egy tetszőleges p -re merőleges vektor. Megmutatjuk, hogy a $v \mapsto qv$ leképezés, ahol q az egységnyi abszolút értékű $q = \cos \varphi + p \sin \varphi$ kvaternió, a v vektornak a φ szöggel való elforgatása a p tengely körül, éspedig a p vektor

vége felől nézve olyan irányba, mint a k vektor vége felől i -nek j -be való forgatása. Mivel $\langle v, p \rangle = 0$,

$$qv = (\cos \varphi + p \sin \varphi)v = v \cos \varphi + pv \sin \varphi = v \cos \varphi + p \times v \sin \varphi,$$

amiből adódik az állítás.

Most tekintsük a $v \mapsto qvq^{-1}$ leképezést. Megmutatjuk, hogy ez tetszőleges v vektorra a p tengely körüli 2φ szöggel való elforgatás. Először tegyük fel, hogy v merőleges p -re. Mivel $q^{-1} = \cos \varphi - p \sin \varphi$, a $\tilde{v} = qv$ jelöléssel, mivel $\tilde{v}$ merőleges p -re,

$$\tilde{v}q^{-1} = \tilde{v}(\cos \varphi - p \sin \varphi) = \tilde{v} \cos \varphi - \tilde{v} \times p \sin \varphi = \tilde{v} \cos \varphi + p \times \tilde{v} \sin \varphi,$$

azaz $\tilde{v}q^{-1}$ a $\tilde{v}$ vektor φ szöggel történő továbbforgatásával kapható. Most legyen v tetszőleges, és írjuk fel $v = v' + v''$ alakban, ahol $v' = \alpha p$, $\alpha = \langle v, p \rangle$ és $v'' = v - v'$. Mivel v'' merőleges p -re, $qv''q^{-1}$ a v'' -nek 2φ szöggel való elforgatásával adódik. Másrészt

$$qv'q^{-1} = (\cos \varphi + p \sin \varphi)\alpha p(\cos \varphi - p \sin \varphi) = \alpha p(\cos^2 \varphi + \langle p, p \rangle \sin^2 \varphi) = \alpha p = v',$$

azaz v' a transzformációnál nem változik. Ezzel az állítást beláttuk.

Az állításból azonnal adódik, hogy két forgatás egymásutánja is forgatás, és ennek tengelye és szöge is meghatározható, mert a $v \mapsto q'vq'^{-1}$ és $v \mapsto q''vq''^{-1}$ leképezések összetétele a $v \mapsto qvq^{-1}$ leképezés, ahol $q = q''q'$ egységnyi abszolút értékű kvaternió. Vegyük figyelembe, hogy φ és $\varphi + \pi$ ugyanazt a forgatást adják, de a $\cos \varphi + p \sin \varphi$ és a $\cos(\varphi + \pi) + p \sin(\varphi + \pi) = -\cos \varphi - p \sin \varphi$ kvaterniók egymás ellentettjei. Általánosabban, bármely $q \neq 0$ kvaternióra és $\alpha \neq 0$ valós számra a $v \mapsto qvq^{-1}$ és a $v \mapsto q'vq'^{-1}$ leképezések megegyeznek, ha $q' = \alpha q$.

2.3.15. Egyéb geometriai alkalmazások. A háromdimenziós térben p_0 és p_1 által megadott pontok *távolsága* $|p_1 - p_0|$. Ha $p_0 \neq p_1$, akkor a két ponton átmenő egyenesnek a $v = p_1 - p_0$ vektor egy *irányvektora*; az egyenes bármely p pontjára a $p - p_0$ vektor a v vektor egy skalárszorosa, azaz valamely $t \in \mathbb{R}$ -re $p = p_0 + tv$. Ez az *egyenes paraméteres egyenlete*. Ha p_0, p_1 és p_2 három pont, amelyek nem esnek egy egyenesbe, akkor a három ponton átmenő sík tetszőleges p pontjához léteznek olyan t_1 és t_2 valós számok, amelyekkel a $p - p_0 = v$ irányvektorra $v = t_1 v_1 + t_2 v_2$, ahol v_1 illetve v_2 a $p_1 - p_0$ illetve $p_2 - p_0$ irányvektorok. Innen $p = p_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$, ez a *sík paraméteres egyenlete*. A koordinátákat kiírva, ez három összefüggést jelent. Kettőből kifejezve a t_1 és t_2 paramétereket, és beírva a harmadikba, egy egyenletet kapunk, ez a *sík egyenlete*. Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy választunk egy, a v_1 -re és a v_2 -re is merőleges n *normálvektort*, például $v_1 \times v_2$ -t, és észrevesszük, hogy a v vektorokat az jellemzi, hogy merőlegesek n -re, azaz $\langle p, n \rangle = \langle p_0, n \rangle$. Hasonló módon, a sík paraméteres egyenletéből két sík egyenletét kaphatjuk (az egyenes ezek metszete), ez az *egyenes egyenletrendszer*.

A p pont és a p_0 ponton átmenő, n normálvektorú sík távolságát különösen egyszerű számolni, ha n -et egységvektornak választjuk, mivel ez a $p - p_0$ vektor n irányú vetületének hossza, azaz $\langle p - p_0, n \rangle$ abszolút értéke. Egy p pont távolságát a p_0 ponton átmenő, v irányvektorú egyenestől ugyancsak akkor a legegyszerűbb számolni, ha v egységvektor: ez $(p - p_0) \times v$ hossza. A p_1 illetve p_2 pontokon átmenő, v_1 illetve v_2 irányvektorú egyenesek távolsága, ha n egységvektor, amely merőleges v_1 -re és v_2 -re is, $\langle p_2 - p_1, n \rangle$ abszolút értéke. Ezen két egyenes hajlásszöge a v_1 és v_2 vektorok által bezárt szög, amelynek koszinusza $\langle v_1, v_2 \rangle$ abszolút értéke, ha v_1 és v_2 egységvektorok. Végül a v irányvektorú egyenes és az n normálvektorú sík hajlásszögének szinusza, ha n és v is egységvektor, $\langle v, n \rangle$ abszolút értéke.

2.4 Polinomok

2.4.1. Jelölés: $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{K}}$. A továbbiakban gyakran egyszerre kívánjuk tárgyalni a valós, illetve a komplex esetet. Ilyenkor hasznos az a jelölés, hogy $\mathbb{K}$ vagy $\mathbb{R}$ -et vagy $\mathbb{C}$ -t jelenti, $\overline{\mathbb{K}}$ pedig vagy $\overline{\mathbb{R}}$ -t vagy $\overline{\mathbb{C}}$ -t jelenti.

2.4.2. Polinomok és racionális törtfüggvények. A $\mathbb{K}$ feletti konstans függvényekből és az identikus függvényből véges sok szorzás és összeadás segítségével kapható függvényeket *polinomfüggvényeknek* vagy röviden csak *polinomoknak*, pontosabban $\mathbb{K}$ feletti polinomoknak nevezzük. Nyilván a polinomok $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k$, $x \in \mathbb{K}$ alakú függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}$. Az üres szorzatot egynek, az üres összeget nullának tekintjük, így $x^0 = 1$, az azonosan nulla polinom pedig üres összegként is írható. A binomiális tétel szerint, akármilyen $c \in \mathbb{K}$ -ra, $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k (x - c)^k$ is polinom. Ha valamely $c \in \mathbb{K}$ -ra $f(c) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy c az f polinom *gyöke*. Azokat a függvényeket, amelyek előállnak $x \mapsto f(x)/g(x)$ alakban, ahol f, g polinomok, *racionális törtfüggvényeknek* nevezzük; ez a függvény a g gyökeiben nincs értelmezve.

2.4.3. A maradékos osztás tétele polinomokra. Legyenek

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_m x^m \quad \text{és} \quad g(x) = g_0 + g_1 x + \dots + g_n x^n$$

polinomok $\mathbb{K}$ felett, $n \geq 0$ és $g_n \neq 0$. Ekkor léteznek olyan q és r polinomok, hogy $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ minden $x \in \mathbb{K}$ -ra, továbbá ha $m < n$, akkor q az üres összeg, egyébként $q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_{m-n} x^{m-n}$, $q_{m-n} = f_m/g_n$ és $r(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{n-1} x^{n-1}$.

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás algoritmust ad a maradékos osztás elvégzésére.

Bizonyítás. Az m szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $m < n$, akkor legyen q az üres összeg és $r_j = f_j$, ha $0 \leq j \leq m$ és $r_j = 0$, ha $m < j < n$. Indukcióval, tegyük fel, hogy $m-1$ -re igaz az állítás. Legyen $q_{m-n} = f_m/g_n$, és legyen $f_j^* = f_j - q_{m-n}g_{j-m+n}$, ha $j = m-n, m-n+1, \dots, m$ és legyen $f_j^* = f_j$, ha $j = 0, 1, \dots, m-n-1$. Ekkor $f^*(x) = f_0^* + f_1^* x + \dots + f_{m-1}^* x^{m-1}$, így az indukciós feltevés szerint léteznek olyan $q_0, q_1, \dots, q_{m-n-1}$ és $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ számok, hogy

$$f^*(x) = g(x) \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} q_j x^j \right) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j x^j.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $g(x)q_{m-n}x^{m-n}$ -et, kapjuk az állítást. $\square$

2.4.4. Következmény: Horner-elrendezés. A maradékos osztás tételét alkalmazva az f és a $g(x) = x - c$ polinomra azt kapjuk, hogy $f(x) = (x - c)q(x) + r$, ahol r konstans. Az $x = c$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $r = f(c)$. Így $m-1$ szorzással és ugyanannyi összeadással megkaphatjuk $f(c)$ -t. $\square$

2.4.5. Következmény: gyöktényező leválasztása. Ha c az f gyöke, akkor valamely q polinomra $f(x) = (x - c)q(x)$.

Bizonyítás. Az előző következményben $r = f(c)$ nulla kell legyen. $\square$

2.4.6. Következmény. Ha $m \geq 0$ és $f_m \neq 0$, akkor f -nek legfeljebb m gyöke van.

Bizonyítás. Az m szerinti indukcióval dolgozunk. Ha $m = 0$, igaz az állítás. Ha $m > 0$, és c egy gyök, akkor $f(x) = (x - c)q(x)$, ahol $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{m-1}x^{m-1}$. Ha d az f egy gyöke, akkor vagy $d - c = 0$, azaz $d = c$, vagy d gyöke q -nak, ahonnan következik az állítás. $\square$

2.4.7. Következmény. Ha $m \geq 0$ és az $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_mx^m$ és $f^*(x) = f_0^* + f_1^*x + \dots + f_m^*x^m$ polinomok $m + 1$ különböző helyen ugyanazt az értéket veszik fel, akkor $f_j = f_j^*$, ha $j = 0, 1, \dots, m$.

Bizonyítás. Egyébként a különbségpolinom olyan $h(x) = h_0 + h_1x + \dots + h_mx^m$ polinom lenne, amelynek nem minden együtthatója nulla, de $m + 1$ gyöke van. $\square$

2.4.8. Polinomok egyértelmű felírása. Az előző következmény szerint egy $\mathbb{K}$ feletti $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k$ polinom egyértelműen meghatározza az f_k számokat, bár a felírás nem egyértelmű, mert nulla együtthatójú tagokat elhagyhatunk, illetve a felírásához további nulla együtthatójú tagok adhatók hozzá. Egyértelművé válik azonban a felírás, ha kikötjük, hogy $f_n \neq 0$ legyen és minden n -nél alacsonyabb fokú tag is szerepeljen. Ekkor f_n a polinom *főegyütthatója*, n pedig a polinom *foka*, jelölése $\deg(f)$. Ha egy polinom főegyütthatója 1, akkor *főpolinomnak* nevezzük. (Egy másik lehetőség a felírás egyértelművé tételére, hogy minden nulla együtthatójú tagot elhagyunk.) Az azonosan nulla polinom egyértelmű felírása az üres összeg, nincs főegyütthatója és foka definíció szerint $\deg(f) = -\infty$. (Vannak, akik a nulla polinom fokát nem definiálják vagy -1 -nek definiálják.) Két nem nulla polinom szorzatának a főegyütthatója a főegyütthatók szorzata, foka pedig a fokok összege. Az f_k neve a k -adfokú *tag együtthatója*. A nulladfokú tag együtthatója a polinom *konstans tagja*. Két polinom szorzatának a konstans tagja a konstans tagok szorzata. A konstans polinomok a legfeljebb nulladfokú polinomok. A legfeljebb elsőfokú polinomok a *lineáris polinomok*. Azokat a polinomokat, amelyek $a_k x^k$ alakba írhatók, *monomoknak* nevezzük.

2.4.9. A maradékos osztás egyértelműsége. Legyenek f, g polinomok $\mathbb{K}$ felett, $\deg(g) \geq 0$. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$ feletti q, r polinomok, amelyekre $f = gq + r$, ahol $\deg r < \deg g$.

Bizonyítás. Csak az egyértelműséget kell bizonyítanunk. Ez onnan következik, hogy $gq + r = gq^* + r^*$ esetén $g(q - q^*) = r^* - r$; innen, ha valamelyik oldal nem nulla, akkor a másik sem, de a bal oldal fokszáma legalább $\deg(g)$, a jobb oldal fokszáma pedig ennél kisebb. $\square$

2.4.10. Többszörös gyökök. Azt mondjuk, hogy $c \in \mathbb{K}$ a $\mathbb{K}$ feletti f polinom egy n -szeres gyöke, ha $f(x) = (x - c)^n g(x)$, ahol g -nek c nem gyöke.

A komplex számok körében a következő tétel biztosítja a gyökök létezését.

2.4.11. Az algebra alaptétele. Minden legalább elsőfokú polinomnak van komplex gyöke.

A tétel később, a komplex függvénytanban bizonyítjuk. $\square$

2.4.12. Gyöktényező előállítás. A komplex számtest felett az algebra alaptétele szerint minden nem konstans polinomnak van gyöke, így a gyöktényező leválasztására

vonatkozó állítás szerint indukcióval bármely n -edfokú $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinomot felírhatunk

$$a_n(x - c_1)^{\alpha_1}(x - c_2)^{\alpha_2} \dots (x - c_k)^{\alpha_k}$$

alak *gyöktényezős alakban*, ahol a különböző $c_1, c_2, \dots, c_k$ komplex számok a gyökök, az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ pozitív egész számok pedig az egyes gyökök multiplicitásai,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n.$$

A gyöktényezős előállítás tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű; ha ez nem lenne igaz, egy minimális fokszámú polinomot választva amelyre nem igaz, ha egy másik előállításban egy $(x - c_j)$ tényező nem szerepelne, akkor az egyik előállításnak gyöke lenne c_j , a másiknak nem, ha pedig magasabb hatványon szerepelne, akkor $(x - c_j)^{\alpha_j}$ -vel végigosztva, lenne alacsonyabb fokú polinom nem egyértelmű előállítással.

Egy a valós számtest feletti, azaz valós együtthatós $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinom tekinthető komplex együtthatósak is, így az algebra alaptétele szerint $n \geq 1$ esetén van olyan $c \in \mathbb{C}$, hogy $a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = 0$. Ha c valós, akkor egy $x - c$ gyöktényező leválasztható. Ha $c \notin \mathbb{R}$, akkor konjugálással $a_0 + a_1\bar{c} + \dots + a_n\bar{c}^n = 0$, tehát c konjugáltja is gyök. A $g_c = (x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - 2\Re c + |c|^2$ valós együtthatós polinommal $\mathbb{R}$ felett maradékosan osztva, $f = g_cq + r$. Az r csak nulla lehet, mert egyébként legfeljebb elsőfokú lenne és nem lehetne nem valós komplex gyöke. Tehát a valós számtest felett minden $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinom legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szorzatára bontható. Az, hogy az előállítás lényegében egyértelmű, a komplex előállítás lényegében egyértelmű voltából következik.

2.4.13. Lagrange-interpoláció. A polinomok osztására vonatkozó tétel egyik következményéből, ha $c_0, c_1, \dots, c_n$ különböző, $d_0, d_1, \dots, d_n$ pedig tetszőleges elemei $\mathbb{K}$ -nak, akkor legfeljebb egy olyan legfeljebb n -edfokú f polinom létezik, amelyre

$$f(c_j) = d_j, \quad \text{ha } j = 0, 1, \dots, n,$$

mert egyébként két ilyen polinom különbségének $n+1$ gyöke lenne. Mindig létezik is ilyen polinom, és az alábbi *Lagrange-féle interpolációs eljárással* megkapható. Legyen

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - c_i)}{\prod_{i \neq j} (c_j - c_i)}$$

a j -edik *Lagrange-interpolációs alappolinom* [erre $l_j(x_j) = 1$ és $l_j(x_i) = 0$, ha $i \neq j$] és legyen $f = \sum_{j=0}^n d_j l_j$.

2.4.14. Többváltozós polinomok és racionális törtfüggvények. Legyen n pozitív természetes szám. Az $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_k$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ függvényt k -adik *koordinátafüggvénynek* nevezzük ($k = 1, 2, \dots, n$). A $\mathbb{K}^n$ feletti konstans függvényekből és koordinátafüggvényekből véges sok szorzás és összeadás segítségével kapható függvényeket n -változós *polinomfüggvényeknek* vagy röviden csak n -változós *polinomoknak*, pontosabban $\mathbb{K}^n$ feletti polinomoknak nevezzük. Nyilván a $\mathbb{K}^n$ feletti polinomok

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}} f_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

alakú függvények, ahol az összeg véges, és $f_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in \mathbb{K}$. Az egyváltozós polinomok éppen az eddig vizsgált polinomok. Itt is az üres szorzatot egynek, az üres összeget nullának tekintjük, így $x_k^0 = 1$, az azonosan nulla polinom pedig üres összegként is írható.

Mivel egy többváltozós polinom felírásából is nulla tagokat elhagyhatunk, vagy további nulla tagokat adhatunk a felíráshoz, a többváltozós polinomok felírása nem egyértelmű. Megmutatjuk azonban, hogy ettől eltekintve egyértelmű, vagyis egy

$$x \mapsto \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}} f_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

függvény (ahol az összeg véges) egyértelműen meghatározza az $f_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in \mathbb{K}$ számokat. Az n szerint teljes indukcióval dolgozunk. Az $n = 1$ esetben már beláttuk az állítást. Elég azt belátni, hogy ha az összeg azonosan nulla, akkor minden $f_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ nulla. Írjuk az összeget

$$\sum_{k=0}^m f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) x_n^k$$

alakban, ahol az f_k függvények $n - 1$ -változós polinomok. Ha bárhogy rögzítve az $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ változókat, a kapott polinomja x_n -nek azonosan nulla, akkor minden f_k -nak nullának kell lennie, mert az egyváltozós esetben igaz az állítás. Tehát az f_k polinomok azonosan nullák, és az indukciós feltevésből kapjuk az állítást.

Az $f_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ tagokat *monomok*nak, az $f_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ számot a monom *együtthatójának*, a

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$$

n -est a monom *multifokának*, a $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ természetes számot pedig a monom *fokának* nevezzük. A polinom egyetlen nulladfokú tagjának az $f_{0,0,\dots,0}$ együtthatója a polinom *konstans tagja*. Két polinom szorzatának a konstans tagja a konstans tagok szorzata. Azt a legkisebb m -et, amelyre a polinom minden (nem nulla) tagjának a foka legfeljebb m , a polinom *fokának* nevezzük; az azonosan nulla polinom foka megállapodás szerint $-\infty$. (Vannak, akik a nulla polinom fokát nem definiálják vagy -1 -nek definiálják.) Az f polinom fokát $\deg(f)$ -fel jelöljük. Két polinom szorzatának foka a fokok összege. A konstans és elsőfokú polinomok együtt a *lineáris polinomok*. Ha egy polinom minden (nem nulla) tagjának ugyanaz a k a foka, akkor k -adfokú *homogén polinomnak* nevezzük.

Azokat a függvényeket, amelyek előállnak $x \mapsto f(x)/g(x)$, alakban, ahol f, g polinomok $\mathbb{K}^n$ felett, $\mathbb{K}^n$ feletti *racionalis törtfüggvényeknek* nevezzük; ez a függvény nincs értelmezve ott, ahol g nulla. A két lineáris függvény hányadosaként előálló függvényeket *lineáris törtfüggvényeknek* nevezzük.

Határérték

Ez a fejezet az analízis legfontosabb fogalmaival, a folytonossággal és a határértékkel foglalkozik a számokon értelmezett számértékű (skalár–skalár) függvények körében. Sorok összegét is itt tárgyaljuk.

3.1 Folytonosság és határérték

3.1.1. Távolság, környezetek, korlátosság. Az $x, y \in \mathbb{K}$ távolsága $|x - y|$. Az $x \in \mathbb{K}$ szám $r > 0$ sugarú $\mathbb{U}_r(x)$ környezetén a $\{y \in \mathbb{K}: |y - x| < r\}$ halmazt értjük. Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen x egy környezetéről beszélünk. Az $A \subset \mathbb{K}$ halmaz *korlátos*, ha van a nullának olyan környezete, amelyben benne van, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy $|x| < K$ minden $x \in A$ -ra.

3.1.2. Belső, izolált és torlódási pontok. Legyen $A \subset \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Az x pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, ha van olyan U környezete x -nek, amelyre $U \subset A$. Az x *izolált pontja* A -nak, ha van olyan U környezete, hogy U -ban x az egyetlen A -beli pont. Ha x minden környezete tartalmaz x -től különböző pontot A -ból, akkor azt mondjuk, hogy x *torlódási pontja* A -nak. A belső pont és az izolált pont eleme A -nak, a torlódási pont nem feltétlenül.

3.1.3. Nyílt és zárt halmazok. Ha az $A \subset \mathbb{K}$ halmaz minden pontja belső pontja A -nak, akkor A -t *nyílt*nek nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}$ nyílt halmazok. Ha az A halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, akkor *zárt*nak nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}$ zártak.

3.1.4. Állítás. Egy $A \subset \mathbb{K}$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementere zárt.

Bizonyítás. Ha A nyílt, x pedig a komplementer egy torlódási pontja, akkor x nem lehet A -ban, mert annak minden pontja belső pont, így van olyan környezete, amelyben csak A -beli pontok vannak. Ha A komplementere zárt, x pedig A egy pontja, akkor x nem lehet torlódási pontja A komplementérének, mert az minden torlódási pontját tartalmazza. Mivel x maga A -ban van, van olyan környezete, amelyben nincs pontja a komplementernek, tehát x belső pontja A -nak. $\square$

3.1.5. Állítás. Ha $x \in \mathbb{K}$ és $r \geq 0$ (sic!), akkor $\{y \in \mathbb{K}: |y - x| < r\}$ nyílt, $\{y \in \mathbb{K}: |y - x| \leq r\}$ pedig zárt halmaz.

Ezeket a halmazokat r sugarú *nyílt gömb*nek, illetve *zárt gömb*nek nevezzük.

Bizonyítás. Ha $|y - x| < r$, azaz y az első halmaz eleme, akkor $\varepsilon = r - |y - x| > 0$ választással $|z - y| < \varepsilon$ esetén $|z - x| \leq |y - x| + |z - y| < r$, azaz y belső pontja az első halmaznak. Ha $|y - x| > r$, azaz y nem eleme a második halmaznak, akkor $\varepsilon = |y - x| - r > 0$ választással $|z - y| < \varepsilon$ esetén $|z - x| \geq |y - x| - |z - y| > r$, így a második halmaz komplementere nyílt. $\square$

3.1.6. Példák. Mint $\mathbb{R}$ részhalmaza, $\{1, 2, \dots, n\}$ nem nyílt, zárt, korlátos; $\mathbb{N}$ nem nyílt, zárt, nem korlátos; $\{1/n: n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ nem nyílt, nem zárt, korlátos; ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor $]a, b[$ nyílt, nem zárt, korlátos; ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor $[a, b]$ nem nyílt, zárt, korlátos; $\mathbb{R}$ nyílt, zárt, nem korlátos. Ha $\mathbb{C}$ részhalmazának tekintjük ezeket a halmazokat, akkor $]a, b[$ és $\mathbb{R}$ nem nyílt. Mint $\mathbb{C}$ részhalmaza az $\{z: z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ halmaz nyílt, nem zárt, korlátos; az $\{z: z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ halmaz nem nyílt, zárt, korlátos; ha $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, akkor

$$\{z \in \mathbb{C}: a_1 < \Re(z) < a_2 \text{ és } b_1 < \Im(z) < b_2\}$$

nyílt, nem zárt és korlátos; ha $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, akkor

$$\{z \in \mathbb{C}: a_1 \leq \Re(z) \leq a_2 \text{ és } b_1 \leq \Im(z) \leq b_2\}$$

nem nyílt, zárt és korlátos; $\mathbb{C}$ nyílt, zárt, nem korlátos.

3.1.7. Folytonosság. Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos* az $a \in A$ pontban, ha $f(a)$ bármely V környezetéhez van olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \in U \cap A$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Nyilván ha egy függvény folytonos egy a pontban, akkor bármely megszorítása, amely értelmezve van a -ban, szintén folytonos a -ban. Figyeljük meg, hogy a folytonosság csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha f -et megváltoztatjuk a valamely környezetén kívül. Ha a izolált pontja A -nak, akkor f biztos, hogy folytonos a -ban.

Ha f az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy *folytonos*.

Azokat az $f \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket, amelyekre az

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}, \quad x \neq y, \quad x, y \in \text{dmn}(f)$$

számhalmaz felülről korlátos, Lipschitz-függvényeknek nevezzük. Ezek mind folytonosak, mert ha B a fenti halmaz egy pozitív felső korlátja, akkor $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon/B$ választható.

A folytonosságot valós változós, illetve valós értékű függvényekre is definiálhatjuk. Ez azonban semmi újdonságot nem ad, ugyanazt kapjuk, mint ha a függvényt $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -beli függvénynek tekintjük.

3.1.8. Példák. A konstans függvény, az identikus leképezés és az abszolút érték függvény Lipschitz-függvények, így folytonosak.

3.1.9. A Dirichlet-függvény. A $\mathbb{Q}$ halmaz $\mathbb{R}$ -en értelmezett karakterisztikus függvényét *Dirichlet-függvénynek* szokás nevezni.

Ez a függvény egyetlen pontban sem folytonos: ez a definíció alapján, $\varepsilon = 1$ választással adódik.

3.1.10. Példa. A sgn függvény $\mathbb{R}$ -en minden nem nulla pontban folytonos, a nullában azonban nem.

3.1.11. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Az f pontosan akkor folytonos a -ban, ha $\Re(f)$ és $\Im(f)$ folytonosak a -ban.

* **Bizonyítás.** Mivel

$$\left| \Re(f(x)) - \Re(f(a)) \right| = \left| \Re(f(x) - f(a)) \right| \leq |f(x) - f(a)|$$

és

$$\left| \Im(f(x)) - \Im(f(a)) \right| = \left| \Im(f(x) - f(a)) \right| \leq |f(x) - f(a)|,$$

az f folytonosságából következik $\Re(f)$ és $\Im(f)$ folytonossága.

Megfordítva, adott $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_1 illetve δ_2 -t, hogy ha $|x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor

$$\left| \Re(f(x)) - \Re(f(a)) \right| < \varepsilon/2,$$

ha pedig $|x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor

$$\left| \Im(f(x)) - \Im(f(a)) \right| < \varepsilon/2$$

teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $|x - a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \left| \Re(f(x) - f(a)) \right| + \left| \Im(f(x) - f(a)) \right| \\ &= \left| \Re(f(x)) - \Re(f(a)) \right| + \left| \Im(f(x)) - \Im(f(a)) \right| < \varepsilon. \square \end{aligned}$$

3.1.12. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ függvények. Ha $f(a) = 0$, f folytonos a -ban, g pedig lokálisan korlátos a -ban, azaz van olyan U környezete a -nak és K valós szám, hogy $x \in U \cap A$ esetén $|g(x)| < K$, akkor fg folytonos a -ban.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ -ra ε/K -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - a| < \delta$, $x \in A$ esetén $|f(x)| < \varepsilon/K$. Nyilván δ választható úgy is, hogy ne legyen nagyobb, mint U sugara. Ekkor $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x)| < \varepsilon$. $\square$

3.1.13. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ az a -ban folytonos függvények. Ekkor

- (1) $f + g$ és $f - g$ folytonosak a -ban;
- (2) fg folytonos a -ban;
- (3) ha $f(a) \neq 0$, akkor a valamely U környezetére $1/f$ értelmezve van $A \cap U$ -ban és folytonos a -ban.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_1 illetve δ_2 -t, hogy ha $|x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$, ha pedig $|x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $|x - a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$\left| (f + g)(x) - (f + g)(a) \right| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

és

$$\left| (f - g)(x) - (f - g)(a) \right| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (1)-et.

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(a) &= f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a) \\ &= f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)),\end{aligned}$$

valamint (1) szerint $g(x) - g(a)$ és $f(x) - f(a)$ folytonosak a -ban és értékük nulla, (2) következik az előző tételből, mert a valamely U környezetében $|f(x) - f(a)| < 1$, ahonnan $|f(x)| < |f(a)| + 1$, azaz f lokálisan korlátos.

Mivel $f(a) \neq 0$, választhatunk olyan U környezetét a -nak, amelyben

$$|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}.$$

Ebben a környezetben nyilván $f(x) \neq 0$, sőt, $|f(x)| > |f(a)|/2$. Mivel

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)},$$

és a nevező abszolút értéke legalább $|f(a)|^2/2$, ha $x \in U \cap A$, a reciproka lokálisan korlátos, így (3) következik az előző tételből. $\square$

3.1.14. Következmény. Az egyváltozós polinomok folytonosak. Az egyváltozós racionális törtfüggvények folytonosak minden olyan pontban, ahol értelmezve vannak. $\square$

3.1.15. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, és legyenek $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ függvények. Ha $a \in A$ és $b = f(a) \in B$, továbbá f folytonos a -ban, g pedig folytonos b -ben, akkor $g \circ f$ folytonos a -ban.

Bizonyítás. Legyen W egy tetszőleges környezete $g(b) = g(f(a))$ -nak. Ehhez van olyan V környezete $b = f(a)$ -nak, hogy ha $y \in B \cap V$, akkor $g(y) \in W$. Másrészt V -hez létezik olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azt jelenti, hogy ha $x \in U$, és $(g \circ f)(x)$ értelmezve van, akkor $(g \circ f)(x) \in W$. $\square$

3.1.16. Weierstrass tétele. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Van olyan $c, d \in [a, b]$, hogy $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, ha $x \in [a, b]$.

Bizonyítás. Csak c létezését bizonyítjuk, d létezésének bizonyítása teljesen hasonló. Legyen $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ és legyen S azon $x \in [a, b]$ számok halmaza, amelyekre $\inf f([x, b]) = m$. Legyen $c = \sup S$. Ha $f(c) > m$, akkor a folytonosság miatt c nem felső korlátja S -nek. Nyilván $f(c) < m$ nem lehetséges. $\square$

3.1.17. Példák. Az $x \mapsto 1/x$ függvény $]0, 1[$ -en nem korlátos felülről és nem veszi fel infimumát, $[1, +\infty[$ -en pedig nem veszi fel infimumát. Az $x \mapsto x$ függvény $] - \infty, +\infty[$ intervallumon sem alulról, sem felülről nem korlátos.

3.1.18. Bolzano tétele. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $f(a) < c < f(b)$ vagy $f(b) < c < f(a)$, akkor van olyan $x \in]a, b[$, amelyre $f(x) = c$.

A tétel algoritmust ad $f(x) = c$ típusú egyenletek megoldásának közelítésére: elfelezve az intervallumot, valamelyik felében van megoldás stb.

Bizonyítás. Elég az első esetet bizonyítani. Legyen $S = \{y \in [a, b]: f(y) \leq c\}$ és $x = \sup S$. Ha $f(x) > c$ lenne, akkor a folytonosság miatt lenne olyan U környezete x -nek, hogy az abból vett y pontokra $f(y) > c$, ami ellentmond annak, hogy x a legkisebb felső korlát. Az $f(x) < c$ eset ellentmond annak, hogy x felső korlát. $\square$

3.1.19. Következmény. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény értékkészlete is intervallum.

Bizonyítás. Az intervallumokat az jellemzi, hogy bármely két elemükre az összes közbeeső elemet is tartalmazzák. A tétel szerint f értékkészlete is ilyen. $\square$

3.1.20. Következmény. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha szigorúan monoton.

Bizonyítás. Az egyik irányt már láttuk. Megmutatjuk, hogy ha f kölcsönösen egyértelmű, akkor szigorúan monoton. Azt kell megmutatni, hogy nem létezhetnek olyan $x, y, u, v \in I$ számok, hogy $x < y$, $u < v$, $f(x) < f(y)$ de $f(u) > f(v)$, mert egyenlőség nyilván nem állhat. Ha léteznének ilyen számok, akkor közülük kiválaszthatnánk hármat, mondjuk a, b, c -t úgy, hogy $a < b < c$ és

$$\text{vagy } f(a) < f(c) > f(b) \quad \text{vagy } f(a) > f(c) < f(b).$$

Mindkét esetben létezne olyan $a < p < b < q < c$, amelyre $f(p) = f(q)$, ami ellentmondás.

$\square$

3.1.21. Jobb és bal oldali folytonosság. Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ és $f: A \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény, akkor ha az f függvény $\{x \in A: x \geq a\}$ illetve $\{x \in A: x \leq a\}$ halmazra való megszorítása folytonos a -ban, akkor az mondjuk, hogy f *jobbrol folytonos*, illetve *balrol folytonos* a -ban. Ha f folytonos a -ban, akkor nyilván jobbrol és balrol is folytonos a -ban. Megfordítva, ha f jobbrol és balrol is folytonos a -ban, akkor folytonos a -ban.

3.1.22. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény inverze folytonos.

* **Bizonyítás.** Csak a szigorúan monoton növekedő esettel foglalkozunk, a másik eset teljesen hasonlóan kezelhető. Legyen $c \in f(I)$, $a = f^{-1}(c)$ és $\varepsilon > 0$. Ha a nem az I jobb oldali végpontja, akkor válasszunk olyan $b \in I$ -t, amelyre $a < b < a + \varepsilon$. Ekkor $c = f(a) < f(b)$, tehát egy alkalmas $\delta > 0$ -ra $c + \delta < f(b)$. Ha $x \in f(I)$ és $c \leq x < c + \delta$, akkor $a \leq f^{-1}(x) < f^{-1}(c + \delta) < f^{-1}(f(b)) = b < a + \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy f^{-1} jobbrol folytonos c -ben. Ha a az I jobb oldali végpontja, akkor c az $f(I)$ jobb oldali végpontja, így f^{-1} triviálisan jobbrol folytonos c -ben. A bal oldali folytonosság bizonyítása teljesen hasonló. $\square$

3.1.23. Következmény: a gyökvonás folytonossága. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, az $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ leképezés folytonos $[0, +\infty[$ -en.

Bizonyítás. Ez a függvény a $[0, +\infty[$ -en tekintett $x \mapsto x^n$ függvény inverze. $\square$

3.1.24. Határérték. Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, a pedig torlódási pontja A -nak. Azt írjuk, hogy $f(x) \rightarrow b$, ha $x \rightarrow a$, vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha $b \in \mathbb{C}$ és a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \setminus \{a\}, \\ b, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos a -ban. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy b bármely V környezetéhez van olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \neq a$, $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - b| < \varepsilon$. A határérték és a folytonosság definíciójának összevetéséből azt kapjuk, hogy ha a torlódási pontja A -nak, akkor f pontosan akkor folytonos a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Nyilván ha egy függvény határértéke a -ban b , akkor bármely megszorításának, ha az értelmezési tartománynak torlódási pontja a , szintén határértéke b . Figyeljük meg, hogy a határérték létezése és értéke csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha f -et megváltoztatjuk a valamely környezetén kívül.

A határértéket valós változós, illetve valós értékű függvényekre is definiálhatjuk. Ez azonban semmi újdonságot nem ad, ugyanazt kapjuk, mint ha a függvényt $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -beli függvénynek tekintjük.

3.1.25. Tétel. *Függvény határértéke, ha létezik, egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$. Bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_1 illetve δ_2 -t, hogy ha $0 < |x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_1| < \varepsilon$, ha pedig $0 < |x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_2| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (ilyen x létezik, mivel a torlódási pontja A -nak), akkor

$$|b_2 - b_1| \leq |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| < 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, csak $b_1 = b_2$ lehetséges. $\square$

3.1.26. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, a torlódási pontja A -nak és $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ függvények.*

(1) *Pontosan akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \Re(f)(x) = b' \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a} \Im(f)(x) = b''$$

határértékek léteznek, továbbá ekkor $b = b' + ib''$.

(2) *Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, a g pedig lokálisan korlátos, azaz van olyan U környezete a -nak és K valós szám, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén $|g(x)| < K$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$.*

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, akkor

(3) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$;

(4) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = bc$;

(5) *ha $b \neq 0$, akkor a valamely U környezetére $1/f(x)$ értelmezve van, ha $a \neq x \in A \cap U$ és $\lim_{x \rightarrow a} (1/f)(x) = 1/b$.*

Bizonyítás. A tétel a folytonosság és a határérték kapcsolatából következik. $\square$

3.1.27. Példa. Határártmenetek általában nem cserélhetők fel. Például

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = 1,$$

de

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = -1.$$

3.1.28. Jobb és bal oldali határérték. Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $f: A \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény, akkor az f függvény $\{x \in A: x \geq a\}$ illetve $\{x \in A: x \leq a\}$ halmazra való megszorítása határértékeit a -ban (ha léteznek) az f *jobb oldali határértékének*, illetve *bal oldali határértékének* nevezzük. Jelölésük: $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ illetve $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ vagy $f(a+)$ illetve $f(a-)$. A folytonosság és a határérték kapcsolata alapján világos, hogy ha mindkét oldali határérték létezik a -ban, akkor a határérték pontosan akkor létezik, hogyha a jobb és a bal oldali határérték megegyeznek, és ekkor ugyanaz a szám a határérték is.

3.1.29. Szakadások. Ha f nem folytonos a -ban, akkor azt mondjuk, hogy *szakadása* van a -ban. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ létezik, de nem egyenlő $f(a)$ -val, akkor azt mondjuk, hogy f -nek *megszüntethető szakadása* van, egyébként a szakadás *nem megszüntethető szakadás*.

Ha f valós változós, $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ és $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ léteznek, de nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy f -nek *elsőfajú szakadása* vagy *ugrása* van a -ban, minden más nem megszüntethető szakadást *másodfajú szakadásnak* nevezzünk.

3.1.30. Példák. A sgn függvény $\mathbb{R}$ -en minden nem nulla pontban folytonos, a nullában nem megszüntethető elsőfajú szakadása van. Az $|\operatorname{sgn}|$ függvénynek $\mathbb{R}$ -en a nullában megszüntethető szakadása van. A Dirichlet-függvénynek minden pontban nem megszüntethető másodfajú szakadása van, mert nem létezik határértéke, ugyanis a racionális számokra vett megszorításának a határértéke 1, míg az irracionális számokra vett megszorításának határértéke 0. Legyen $f(x) = x$, ha $x \in \mathbb{Q}$, és $f(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Az f a nullában folytonos, minden más pontban nem megszüntethető másodfajú szakadása van.

* **3.1.31. Példa.** A *Riemann-függvény* nulla, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $1/q$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és q a legkisebb pozitív természetes szám, amivel x felírható p/q , $p \in \mathbb{Z}$ alakban. Ez a függvény az irracionális pontokban folytonos, a racionális pontokban megszüntethető elsőfajú szakadása van.

3.1.32. A bővített valós és bővített komplex számok topológiája. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazban $+\infty$ környezetein $]a, +\infty[$, $a \in [-\infty, +\infty[$ alakú halmazokat, $-\infty$ környezetein pedig $]-\infty, a[$, $a \in [-\infty, +\infty]$ alakú halmazokat fogunk érteni. Az $\overline{\mathbb{C}}$ halmazban ∞ környezetein az $\{\infty\} \cup \{z: |z| > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ alakú halmazokat értjük.

Mindazokat a fogalmakat, amelyeket környezetek segítségével értelmeztünk (belső pont, izolált pont, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, lokális tulajdonság, folytonosság, jobb és bal oldali folytonosság, határérték, jobb és bal oldali határérték, szakadás, megszüntethető szakadás, nem megszüntethető szakadás, elsőfajú szakadás, másodfajú szakadás), átvihetjük erre az esetre is. Számos tétel is érvényben marad, például a 3.1.12, 3.1.15 és 3.1.25 tételek.

3.1.33. Példa. Nyilván $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$, $\lim_{x \downarrow 0} 1/x = +\infty$ és $\lim_{x \uparrow 0} 1/x = -\infty$. Komplexben $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.

Általánosabban, ha f bővített valós értékű pozitív függvény, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = +\infty$; valóban, ha $K > 0$ tetszőleges, akkor $\varepsilon = 1/K$ -hoz választva olyan U környezetét a -nak, amelyre $a \neq x \in U \cap \operatorname{dom}(f)$ esetén $|f(x) - 0| < \varepsilon$, ezekre az x -ekre $f(x) > K = 1/\varepsilon$. Hasonlóan, ha $f(x) < 0$ minden x -re az a egy környezetéből, akkor $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = -\infty$; végül komplexben, ha $f(x) \neq 0$ minden x -re az a egy környezetéből, akkor $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = \infty$.

3.1.34. Műveletek bővített valós és bővített komplex számokkal. Legyen $\overline{\mathbb{R}}$ -ben

$$\begin{aligned} +\infty + x &= +\infty = x + (+\infty), & \text{ha } x \in]-\infty, +\infty]; \\ -\infty + x &= -\infty = x + (-\infty), & \text{ha } x \in [-\infty, +\infty[; \\ +\infty \cdot x &= +\infty = x \cdot (+\infty), & \text{ha } x \in]0, +\infty]; \\ +\infty \cdot x &= -\infty = x \cdot (+\infty), & \text{ha } x \in [-\infty, 0]; \\ -\infty \cdot x &= -\infty = x \cdot (-\infty), & \text{ha } x \in]0, +\infty]; \\ -\infty \cdot x &= +\infty = x \cdot (-\infty), & \text{ha } x \in [-\infty, 0]; \\ x / +\infty &= 0 = x / -\infty, & \text{ha } x \in]-\infty, +\infty[. \end{aligned}$$

Más esetekben az összeadást és a szorzást nem definiáljuk.

Legyen $\overline{\mathbb{C}}$ -ban

$$\begin{aligned} \infty + x &= \infty = x + (\infty), & \text{ha } x \in \overline{\mathbb{C}}; \\ \infty \cdot x &= \infty = x \cdot \infty, & \text{ha } 0 \neq x \in \overline{\mathbb{C}}; \\ x / \infty &= 0, & \text{ha } x \in \mathbb{C}, \quad x / 0 = \infty, & \text{ha } 0 \neq x \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

A $0 \cdot \infty$ és $\infty \cdot 0$ szorzatokat nem definiáljuk.

3.1.35. Tétel. Tegyük fel, hogy $A \subset \overline{\mathbb{K}}_1$, a torlódási pontja A -nak, $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_2$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = bc$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = b/c$.

Megjegyezzük, hogy van olyan U környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén a bal oldalon álló függvény értelmezve van.

Bizonyítás. Az $a \in \mathbb{K}_1$, $b, c \in \mathbb{K}_2$ eseteket már láttuk. A többi eset hasonlóan bizonyítható. Például ha $\overline{\mathbb{K}}_2 = \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ és $c = +\infty$, akkor van olyan U_1 környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U_1 \cap A$ esetén $|f(x) - b| < 1$, valamint tetszőleges $B \in \mathbb{R}$ -hez van olyan U_2 környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U_2 \cap A$ esetén $g(x) > B - b + 1$. Innen $U = U_1 \cap U_2$ jelöléssel $a \neq x \in U \cap A$ esetén $(f + g)(x)$ értelmezve van, és nagyobb, mint B . Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$. $\square$

3.1.36. Megjegyzés. Éppen ez a tétel motiválja, hogy mikor értelmezzük a műveleteket: $A + B$, AB és A/B pontosan akkor és úgy van definiálva, hogy a fenti tétel igaz legyen. Például $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^2 = 0$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, szorzatuk határértéke pedig 0, míg $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, szorzatuk határértéke pedig $+\infty$, ezért $0 \cdot (+\infty)$ -t nem definiáltuk.

3.1.37. Feladat [6]. Adjunk hasonló példát a többi nem definiált esethez is.

3.1.38. Tétel. Tegyük fel, hogy $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, a torlódási pontja A -nak és az $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényeknek létezik határértéke a -ban.

(1) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, akkor van olyan U környezete a -nak, hogy

$$f(x) < g(x), \quad \text{ha } a \neq x \in U \cap A;$$

(2) ha a valamely U környezetére $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Bizonyítás. Legyen $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) < d < c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, és válasszuk V illetve W környezeteit b -nek illetve c -nek úgy, hogy $V \subset [-\infty, d[$, $W \subset]d, +\infty]$ teljesüljön. Legyen U az a megfelelő környezeteinek metszete. Ekkor $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) < d < g(x)$, amivel beláttuk (1)-et. (2) indirekt következik (1)-ből. $\square$

3.1.39. Tétel: rendőrelv. Ha $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, a torlódási pontja A -nak és az a valamely U környezetére az $f, g, h: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x),$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Bizonyítás. Legyen V környezete az f és h közös határértékének, U pedig az a megfelelő környezeteinek metszete. $\square$

3.1.40. Tétel. Legyen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a = \inf A$ és $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy monoton függvény. Tegyük fel, hogy a torlódási pontja A -nak.

(1) ha f monoton növekedő, akkor $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \inf_{a < x \in A} f(x)$;

(2) ha f monoton csökkenő, akkor $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \sup_{a < x \in A} f(x)$.

Hasonló állítás igaz a bal oldali határértékre, ha $a = \sup A$, de akkor az $\inf$ és $\sup$ szerepe felcserélődik.

Bizonyítás. Csak a monoton növekedő függvény esetével foglalkozunk, a másik eset hasonlóan kezelhető. Legyen az $\{f(x): a < x \in A\}$ számok halmazának alsó határa b . Meg kell mutatnunk, hogy $b = f(a+)$. Ha $b = +\infty$, akkor f mindenütt $+\infty$. Egyébként legyen $c > b$. Mivel b pontos alsó korlát, van olyan $a < d \in A$, hogy $b \leq f(d) < c$. Innen $a < x \in A$, $x < d$ esetén $b \leq f(x) < c$. $\square$

3.1.41. Következmény. Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ és $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton függvény, $a < c < b$. Ha f monoton növekedő, akkor

$$\sup_{a < x < c} f(x) = f(c-) \leq f(c) \leq f(c+) = \inf_{c < x < b} f(x),$$

ha pedig f monoton csökkenő, akkor

$$\inf_{a < x < c} f(x) = f(c-) \geq f(c) \geq f(c+) = \sup_{c < x < b} f(x),$$

tehát csak elsőfajú szakadási helye lehet c -ben, továbbá mindkét esetben csak megszámlálható sok olyan c van, amelyre $f(c-) \neq f(c+)$.

Bizonyítás. Csak az utolsó állítást kell még belátnunk. Az összes $]f(c-), f(c+)[$ nyílt intervallumok halmaza, ahol c az $]a, b[$ azon pontjait futja be, ahol a jobb és bal oldali határérték nem egyenlő, diszjunkt nem üres intervallumokból áll. Mivel minden intervallum tartalmaz racionális számot, az intervallumok halmaza megszámlálható. $\square$

3.1.42. Példa. Legyen x_n egy olyan sorozat, amelynek minden tagja különböző és értékkészlete $\mathbb{Q}$. Legyen $f(x) = \sum_{x_n < x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor f szigorúan monoton növekedő, az irracionális számokban a jobb és bal oldali határértéke megegyezik, x_n -ben pedig a két határérték különbsége $1/2^n$.

3.2 Sorozatok és sorok

3.2.1. Sorozatok. A sorozatok $\mathbb{N}^+$ -on értelmezett függvények, így beszélhetünk $\overline{\mathbb{K}}$ -beli sorozatok $+\infty$ -ben vett határértékéről. Az, hogy A az a_n sorozat határértéke, azt jelenti, hogy A bármely környezetére véges sok n kivételével minden n -re a_n benne van az adott környezetben. Jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$. Tudjuk, hogy a határérték egyértelmű. Világos, hogy a határérték nem változik, ha a sorozatnak véges sok tagját megváltoztatjuk. Ha $A \in \mathbb{K}$, akkor az a_n sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergens* vagy *A-hoz konvergál*. Az a_n akkor és csak akkor konvergál A -hoz, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ (itt $n > N$ illetve $|a_n - A| \leq \varepsilon$ is írható). Konvergens sorozatnak véges sok tag kivételével minden tagja $\mathbb{K}$ -ban van. Egy sorozatot *korlátosnak* nevezünk, ha értékkészlete korlátos. Konvergens $\mathbb{K}$ -beli sorozat nyilván korlátos. Ha egy sorozat nullához konvergál, akkor *nullsorozatnak* nevezzük. Az, hogy a_n konvergál A -hoz, azzal ekvivalens, hogy $a_n - A$ nullsorozat. Az, hogy a_n nullsorozat, azzal ekvivalens, hogy $|a_n|$ nullsorozat $\mathbb{R}$ -ben. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük. Természetesen indexelhetjük a sorozatokat nullától is.

Nyilvánvaló, hogy egy *konstans sorozat*, azaz egy olyan sorozat, amelynek minden tagja ugyanaz a c szám, konvergens, és határértéke az adott c konstans.

A következő négy tétel azonnal következik a függvények határértékére tanultakból.

3.2.2. Tétel. Egy a_n komplex számsorozat pontosan akkor konvergál $\mathbb{C}$ -ben, ha $\Re(a_n)$ és $\Im(a_n)$ konvergálnak $\mathbb{R}$ -ben, és ha $a_n \rightarrow A$, $\Re(a_n) \rightarrow A'$, $\Im(a_n) \rightarrow A''$, akkor $A = A' + iA''$. Speciálisan, valós számsorozatokra az $\mathbb{R}$ -beli és a $\mathbb{C}$ -beli konvergencia és határérték egybeesik. $\square$

3.2.3. Tétel. Ha a_n nullsorozat, b_n pedig korlátos sorozat $\mathbb{C}$ -ben, akkor $a_n b_n$ nullsorozat. $\square$

3.2.4. Tétel. Tegyük fel, hogy $\overline{\mathbb{K}}$ -ban $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor

- (1) $(a_n + b_n) \rightarrow (A + B)$;
- (2) $(a_n b_n) \rightarrow (AB)$;
- (3) $(a_n/b_n) \rightarrow (A/B)$. $\square$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon álló sorozatok esetleg véges sok helyen nincsenek értelmezve.

3.2.5. Tétel. Egy $\overline{\mathbb{R}}$ -beli monoton sorozatnak létezik határértéke. Monoton növekedő sorozat határértéke az értékkészletének felső határa, monoton csökkenő sorozat határértéke az értékkészletének alsó határa. $\square$

3.2.6. Példák. (1) Az $a_n = a_0 + nd$ sorozat *számtani sorozat* $d = 0$ esetén konstans, konvergens, határértéke a_0 , korlátos, értékkészlete egyelemű; $d \neq 0$ esetén nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{C}}$ -ben ∞ . Ha a_0 és d valósak, akkor $\overline{\mathbb{R}}$ -ban határértéke $d > 0$ esetén $+\infty$, ha pedig $d < 0$, akkor $-\infty$.

(2) Az $a_n = n^2$ sorozat nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{R}}$ -ban $+\infty$.

(3) Az $a_n = 1/n$ sorozat nullsorozat (legyen $N\varepsilon > 1$), korlátos, értékkészlete végtelen.

(4) Az $a_n = 1 + (-1)^n/n$ sorozat konvergens, határértéke 1, korlátos, értékkészlete végtelen.

(5) Az $a_n = i^n$ sorozat divergens, korlátos, értékkészlete négyelemű, határértéke nincs.

3.2.7. Átviteli elv. Tegyük fel, hogy $A \subset \overline{\mathbb{K}}_1$, $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{K}}_2$, és a torlódási pontja A -nak. Pontosan akkor teljesül, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha minden olyan $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, teljesül hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Bizonyítás. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, akkor minden V környezetéhez b -nek van olyan U környezete a -nak, hogy $x \in U \cap A$, $x \neq a$ esetén $f(x) \in V$. Egy adott $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, legyen N olyan index, hogy $n \geq N$ esetén $x_n \in U$; ekkor $f(x_n) \in V$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ nem teljesül. Ekkor van olyan V környezete b -nek, hogy a egyetlen U környezetére sem teljesül, hogy $f(U \setminus \{a\}) \subset V$. Ha $a \in \mathbb{K}_1$, akkor $U = \bigcup_{1/n}(a)$ választással van olyan $x_n \in \bigcup_{1/n}(a) \cap A$, $x_n \neq a$, amelyre $f(x_n) \notin V$. Az így kiválasztott x_n sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ nem teljesül. Ha $\overline{\mathbb{K}}_1 = \overline{\mathbb{R}}$, $a = +\infty$, akkor $U =]n, +\infty]$ választással hasonlóan járunk el. Az $a = -\infty$ és $a = \infty$ esetek is hasonlóan kezelhetők.

3.2.8. Felső és alsó határérték. Legyen a_n egy $\overline{\mathbb{R}}$ -beli sorozat, és $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$. A b_n sorozat monoton csökkenő, így létezik határértéke. Ezt az a_n sorozat *felső határértékének* nevezzük, és $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ -nel jelöljük. Tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Hasonlóan, a $c_n = \inf_{k \geq n} a_k$ sorozat monoton növekvő, így létezik határértéke; ezt az a_n sorozat *alsó határértékének* nevezzük, és $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ -el jelöljük. Tehát

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Mivel nyilván $c_n \leq b_n$, kapjuk, hogy $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

3.2.9. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel,

- (1) ha $x > \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor csak véges sok olyan index van, amelyre $a_n \geq x$;
- (2) ha $x < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor végtelen sok olyan index van, amelyre $a_n \geq x$;

- (3) az előző tulajdonságok jellemzik a $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;
- (4) ha $x < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor csak véges sok olyan index van, amelyre $a_n \leq x$;
- (5) ha $x > \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor végtelen sok olyan index van, amelyre $a_n \leq x$;
- (6) az előző tulajdonságok jellemzik a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pontosan akkor létezik, ha $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, és ekkor $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Bizonyítás. Az előző definíció jelöléseit fogjuk használni. Ha (1) nem teljesülne, akkor $b_n \geq x$ lenne minden n -re. Ha (2) nem teljesülne, akkor egy indextől kezdve $b_n \leq x$ teljesülne. (3) abból következik, hogy ha $A < B$, és A is, B is rendelkezne az (1) és (2) tulajdonságokkal, akkor választva egy $A < x < B$ számot ellentmondást kapnánk. (4)–(6) bizonyítása teljesen hasonló (1)–(3) bizonyításához.

Végül ha $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik, akkor $x > A$ esetén (1), $x < A$ esetén pedig (2) teljesül, így $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Teljesen hasonlóan adódik, hogy $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Megfordítva, ha $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor bármely $x > A$ -ra véges sok index kivételével $a_n < x$, és bármely $y < A$ -ra véges sok index kivételével $a_n > y$, így A bármely környezetében a sorozatnak véges sok kivételével minden tagja benne van. $\square$

3.2.10. Állítás. Ha a_n és b_n két $\bar{\mathbb{R}}$ -beli sorozat, és véges sok tag kivételével $a_n \leq b_n$, akkor $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ és $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$. $\square$

3.2.11. Cauchy-sorozatok. Egy $\mathbb{K}$ -beli sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n, m \geq N$, akkor $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

A fogalom jelentőségét az adja, hogy anélkül dönthetünk segítségével a konvergenciáról, hogy ismernénk a határértéket.

3.2.12. Cauchy-féle konvergenciakritérium. Egy $\mathbb{K}$ -beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens.

* **Bizonyítás.** Az egyik irány egyszerű: ha $a_n \rightarrow A$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon/2$, így $n, m \geq N$ esetén $|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon$.

A megfordítást elég valós sorozatokra bizonyítani, mert ha a_n Cauchy-sorozat, akkor a valós és a képzetes része is. Először is vegyük észre, hogy egy Cauchy-sorozat korlátos, mert ha $n, m \geq N$ esetén $|a_n - a_m| < 1$, akkor az értékkészlete $\mathbb{U}_1(a_N)$ és véges sok egyelemű halmaz egyesítése. Legyen $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. A korlátosság miatt $A \in \mathbb{R}$. Ha $x < A$, választva $\varepsilon = (A - x)/2$ -höz N -et, $\sup_{k \geq N} a_k \geq A$ miatt van olyan $m \geq N$, hogy $a_m > A - \varepsilon$. Innen $n \geq N$ esetén $a_n > A - 2\varepsilon = x$. Ez azt jelenti, hogy $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, amiből $a_n \rightarrow A$. $\square$

* **3.2.13. Megjegyzés.** A racionális számok körében nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Ha veszünk egy olyan racionális számokból álló monoton növekedő sorozatot, amelynek $\mathbb{R}$ -ben a határértéke $\sqrt{2}$, akkor ez Cauchy-sorozat, de $\mathbb{Q}$ -ban nem konvergens.

3.2.14. Nevezetes sorozatok határértéke.

- (1) ha $p \in \mathbb{N}^+$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^{1/p} = 0$;
- (2) ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
 (4) ha $a \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k / (1+a)^n = 0$;
 (5) ha $a \in \mathbb{C}$, akkor $|a| < 1$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, $a = 1$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ esetén a^n korlátos, de nem konvergens, $|a| > 1$ esetén a^n nem korlátos, így nem konvergens;
 (6) ha $a \in \mathbb{C}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n / n! = 0$.

Bizonyítás. (1) bizonyításához legyen $N > (1/\varepsilon)^p$.

Ha (2)-ben $a > 1$, akkor legyen $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Ekkor $x_n > 0$, és a binomiális tétel alapján $1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = a$, így $0 < x_n \leq (a-1)/n$, ezért $x_n \rightarrow 0$. Az $a = 1$ eset triviális. Ha $0 < a < 1$, vegyük a reciprokát, és arra alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat.

(3) bizonyításához legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Ekkor $x_n \geq 0$, és a binomiális tétel alapján $n = (1 + x_n)^n \geq n(n-1)x_n^2/2$. Ezért $0 \leq x_n \leq \sqrt{2/(n-1)}$, ha $n \geq 2$. Így (1)-ből következik az állítás.

(4) bizonyításához legyen $K = k + 1$. Ha $n > 2K$, akkor

$$(1+a)^n > \binom{n}{K} a^K = \frac{n(n-1) \cdots (n-K+1)}{K!} a^K > \frac{n^K a^K}{2^K K!}.$$

Ezért

$$0 < \frac{n^k}{(1+a)^n} < \frac{2^K K!}{a^K} n^{k-K}, \quad \text{ha } n > 2K.$$

Mivel $k - K = -1$, (1) alapján $n^{k-K} \rightarrow 0$.

(5)-ben az $a = 0$ és $a = 1$ esetek triviálisak. A $0 < |a| < 1$ esetben $|a| = 1/(1+b)$ valamely $b > 0$ -ra, így (4)-ből $k = 0$ választással következik, hogy $|a|^n$ és így a^n is nullsorozat. Ha $|a| > 1$, akkor a^n nem lehet korlátos, mert akkor $1/|a|^n \geq \varepsilon$ lenne valamely $\varepsilon > 0$ -ra. Végül ha $|a| = 1$, $a \neq 1$, akkor $|a^n| = 1$ de

$$|a^{n+1} - a^n| = |a^{n+1} - a^n|/|a|^n = |a - 1|,$$

így a^n nem Cauchy-sorozat.

(6) bizonyításához legyen $N = \lfloor |a| \rfloor + 1$. Ekkor $|a|/n < 1$, ha $n \geq N$, és így

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \prod_{k=1}^n \frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|}{n} \prod_{k=1}^N \frac{|a|}{k} = \frac{|a|^{N+1}}{N!} \frac{1}{n},$$

ha $n > N$, ahonnan következik, hogy a sorozat nullsorozat. $\square$

3.2.15. Sorok. Ha $a_0, a_1, \dots$ egy $\mathbb{K}$ -beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\sum a_n$ végtelen sort vagy röviden *sor* az $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ($n = 0, 1, \dots$) részletösszegek sorozatával azonosítjuk. Az a_n számot a sor n -edik tagjának nevezzük. A sor tagjait rendszerint nullától indexeljük, mert a sorok szorzásánál ez a célszerű. A részletösszegekből visszahozhatjuk a sor tagjait, hiszen $a_0 = s_0$ és $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és összege A , ha az s_n részletösszegek sorozata A -hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha $\mathbb{R}$ -ban $s_n \rightarrow +\infty$ illetve

$s_n \rightarrow -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\mathbb{C}$ -ban $s_n \rightarrow \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Konvergens, de nem abszolút konvergens sort *feltételesen konvergensnek* nevezünk.

A sorozatokra vonatkozó legtöbb tétel egyszerűen átfogalmazható sorokra. Például a sorozatok összegére és konstansszorosára vonatkozó tétel, illetve a Cauchy-féle konvergenciakritérium az alábbi alakba írható át:

3.2.16. Tétel. Legyen $c \in \mathbb{K}$, a $\mathbb{K}$ -beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorokra $\sum a_n = A \in \overline{\mathbb{K}}$ és $\sum b_n = B \in \overline{\mathbb{K}}$. Ha $A + B$ definiálva van, akkor $\sum (a_n + b_n) = A + B$, és ha cA definiálva van, akkor $\sum (ca_n) = cA$.

Bizonyítás. A részletösszegek felhasználásával azonnal következik. $\square$

3.2.17. Cauchy-féle konvergenciakritérium. A $\mathbb{K}$ -beli $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergál, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $m \geq n \geq N$ esetén $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon$. $\square$

3.2.18. Következmény. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen $m = n$. $\square$

3.2.19. Állítás. Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergál, ha részletösszegei korlátos sorozatot alkotnak.

Bizonyítás. A monoton sorozatokra vonatkozó tételből kapjuk. $\square$

3.2.20. Összehasonlító kritérium. Ha véges sok n kivételével $|a_n| \leq b_n$, és $\sum b_n$ konvergál, akkor $\sum a_n$ is.

Bizonyítás. A Cauchy-kritériumból minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $m \geq n \geq N$, akkor

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{és} \quad \sum_{k=n}^m b_k < \varepsilon.$$

Innen $|\sum_{k=n}^m a_k| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| \leq \sum_{k=n}^m b_k < \varepsilon$, és így az állítás következik a Cauchy-kritériumból. $\square$

3.2.21. Következmény. Ha véges sok n kivételével $b_n \geq a_n \geq 0$, és $\sum a_n$ divergál, akkor $\sum b_n$ is.

Bizonyítás. Ha $\sum b_n$ konvergálna, akkor $\sum a_n$ is. $\square$

3.2.22. Következmény. Abszolút konvergens sor konvergens is.

Bizonyítás. Legyen $b_n = |a_n|$. $\square$

3.2.23. Következmény. Tegyük fel, hogy $a_n, b_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ -ra. Ekkor

- (1) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = c > 0$, akkor $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum b_n$ konvergens;
- (2) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is.

Bizonyítás. Az első esetben véges sok n kivételével $cb_n/2 \leq a_n \leq 2cb_n$. A második esetben akármilyen $c > 0$ -ra véges sok n kivételével $a_n \leq cb_n$. $\square$

3.2.24. Leibniz-kritérium. Ha a pozitív tagú a_n sorozat monoton csökkenően nullához tart, akkor $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergens, és ha s_n a sor n -edik részletösszege, s pedig az összege, akkor $s_n \leq s \leq s_n + a_{n+1}$, ha n páratlan és $s_n - a_{n+1} \leq s \leq s_n$, ha n páros.

Bizonyítás. Ha n páratlan, akkor minden $m > 0$ esetén

$$0 \leq s_{n+m} - s_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \leq a_{n+1},$$

ha pedig n páros, akkor

$$0 \leq s_n - s_{n+m} = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \leq a_{n+1},$$

így $|s_{n+m} - s_n| \leq a_{n+1}$; ennek a becslésnek az alapján a Cauchy-kritériumból következik a konvergencia. Az $m \rightarrow \infty$ határátmenettel következnek az egyenlőtlenségek. $\square$

3.2.25. Néhány nevezetes sor.

- (1) $A \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ végtelen mértani sor $|a| < 1$ esetén konvergens, összege $1/(1-a)$, míg $|a| \geq 1$ esetén divergens;
- (2) $A \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ harmónikus sor divergens;
- (3) $A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens;
- (4) $A \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ sor (abszolút) konvergens.

Bizonyítás. Ha $|a| \geq 1$, akkor a^n nem tart nullához. Indukcióval

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

ha $n \in \mathbb{N}$, ahonnan következik (1) másik része.

(2) abból következik, hogy az $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ részletösszegekre

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1/2.$$

Innen m szerinti teljes indukcióval $s_{2m} \geq (m+1)/2$, azaz a részletösszegek sorozata nem korlátos.

Az, hogy a (3)-ban szereplő sor konvergens, következik a Leibniz-kritériumból, az pedig, hogy nem abszolút konvergens, következik (2)-ből.

Végül vegyük észre, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

ha $n > 1$, így a (4)-ben szereplő sor részletösszegei korlátos monoton sorozatot alkotnak.

$\square$

3.2.26. Cauchy-féle gyökkritérium. Egy $\mathbb{K}$ -beli $\sum a_n$ sor, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $\alpha < 1$, akkor $\alpha < \beta < 1$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$, azaz $|a_n| \leq \beta^n$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\alpha > 1$, akkor $\alpha > \beta > 1$ esetén végtelen sok n -re $|a_n| \geq \beta^n > 1$, így a_n nem tart nullához. $\square$

3.2.27. d'Alembert-féle hányadoskritérium. Egy $\mathbb{K}$ -beli, nem nulla tagokból álló $\sum a_n$ sorra, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

vagy ha véges sok n kivételével $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, akkor van olyan $\beta < 1$ szám és $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \beta$. Innen indukcióval $|a_n| \leq |a_N| \beta^{n-N}$, ha $n \geq N$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$. Innen indukcióval $|a_n| \geq |a_N|$, ha $n \geq N$, így a_n nem tart nullához. $\square$

3.2.28. Sorok szorzata. A $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Cauchy-szorzatán vagy röviden szorzatán a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor értjük, ahol $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, ha $n = 0, 1, \dots$

Hogy miért így célszerű sorok szorzatát definiálni, az a hatványsoroknál válik világossá.

3.2.29. Kettős sor tétel. Legyen $a_{j,k} \in \mathbb{K}$, ha $j, k \in \mathbb{N}$. Ha van olyan K valós szám, hogy $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{j,k}| \leq K$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ -re, akkor az alábbi sorok abszolút konvergensék és

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

Vegyük észre, hogy a feltétel teljesülése következik, ha feltesszük, hogy (1)-ben vagy a jobb, vagy a bal oldalon minden tagot az abszolút értékével helyettesítve a kapott sorok konvergensék.

* **Bizonyítás.** Rögzített m -re $n \rightarrow \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, ahonnan $m \rightarrow \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, és hasonlóan kapjuk, hogy a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy K a pontos felső korlát, $\varepsilon > 0$, elég nagy m -re és n -re $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{j,k}| \geq K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n'} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon,$$

amiből $n' \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$\left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ha most $n \rightarrow \infty$, majd $m \rightarrow \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását. $\square$

3.2.30. Következmény: sorok átrendezése. Ha $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), és a $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, összege A , akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege A .

A következmény alapján ha M megszámlálható végtelen halmaz, $m \in M$ esetén $a_m \in \mathbb{K}$, és van olyan K valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$ -re $\sum_{m \in M'} |a_m| \leq K$, akkor bármely $p: \mathbb{N} \rightarrow M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m \in M} a_m$.

Bizonyítás. Legyen $a_{j,k} = a_j$, ha $k = p_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. $\square$

3.2.31. Következmény: sorok átzárójelezése. Ha a K megszámlálható halmaz a K_j , $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, $a_k \in \mathbb{K}$, ha $k \in K$, és $\sum_{k \in K_j} |a_k| < \infty$, akkor

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} a_k.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $K, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $a_{j,k} = a_k$, ha $k \in K_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. $\square$

* **3.2.32. Riemann átrendezési tétele.** Ha a $\sum a_n$ valós számsor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ esetén van a sornak olyan $\sum b_n$ átrendezése, amelynek $s_n = \sum_{k=0}^n b_k$ részletösszegeire $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = \beta$.

Bizonyítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, 0\}$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, 0\}$ sorok mindketten divergenssek: ha csak az egyik lenne konvergens, akkor összegük, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens lenne, ha pedig mindkettő konvergens lenne, akkor különbségük, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor is konvergens lenne. Válasszunk olyan, monoton csökkenő α_n illetve monoton növekedő β_n valós számsorozatot, amelyekre $\alpha_n \leq \beta_n$ minden n -re, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$. Első lépésként tekintsük a negatív a_n -ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_0, b_1, \dots, b_{n_1}$ — addig, amíg $m_1 = n_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_1} b_j$ kisebb nem lesz, mint α_1 . Második lépésként tekintsük a nemnegatív a_n -ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_1+1}, b_{m_1+2}, \dots, b_{m_1+p_1}$ — addig, amíg $m_2 = m_1 + p_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_2} b_j$ nagyobb nem lesz, mint β_1 . Így folytatjuk, felváltva választva negatív, majd nemnegatív tagokat: ha $b_0, b_1, \dots, b_{m_{2k}}$ már ki van választva, és eddig a_{n_k} az utolsó felhasznált negatív tag, akkor tekintsük az n_k -nál nagyobb indexű negatív a_n -ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k}+1}, b_{m_{2k}+2}, \dots, b_{m_{2k}+n_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+1} = m_{2k} + n_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+1}} b_j$ kisebb nem lesz, mint α_{k+1} , majd tekintsük a p_k -nál nagyobb indexű nemnegatív a_n -ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k+1}+1}, b_{m_{2k+1}+2}, \dots, b_{m_{2k+1}+p_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+2} = m_{2k+1} + p_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+2}} b_j$ nagyobb nem lesz, mint β_{k+1} . Mivel $n_1 < n_2 < \dots$ és $p_1 < p_2 < \dots$, minden a_n -et felhasználtunk, tehát b_n az a_n átrendezése. Mivel $s_{m_{2k}} > \beta_k$, de $m_{2k} \leq j < m_{2k+2}$ esetén $s_j \leq \beta_{k+1} + a_{m_{2k}}$, azt kapjuk, hogy

$$\beta = \limsup_{k \rightarrow \infty} \beta_k \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} s_j \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1} + \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{m_{2k}} = \beta.$$

Hasonlóan adódik, hogy $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$. $\square$

3.2.33. Tétel. Ha a $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergenssek, összegük A , illetve B , akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ szorzatuk is abszolút konvergens, és összege AB .

* **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a kettős sor tételt $a_{j,k} = a_j b_{k-j}$, ha $j \leq k$ és $a_{j,k} = 0$ egyébként választással. $\square$

3.2.34. Abel folytonossági tétele. Ha a $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege A , akkor $\lim_{t \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A$.

* **Bizonyítás.** Mivel a_0 helyettesíthető $a_0 - A$ -val, feltehetjük, hogy $A = 0$. Mivel $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ nullához tart, korlátos is valamely K korláttal. Tetszőleges $0 < t < 1$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k,$$

mert a szereplő sorok abszolút konvergenssek, így beszorzás után a jobb oldali sor átrendezhető és átzárójelezhető, és a bal oldalit adja. Legyen $\varepsilon > 0$, és legyen N -re $|s_n| < \varepsilon/2$, ha $n \geq N$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right| &\leq (1-t) \left(\sum_{k=0}^{N-1} |s_k t^k| + \sum_{k=N}^{\infty} |s_k t^k| \right) \\ &< (1-t)KN + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Innen következik az állítás, sőt látjuk, hogy ha $0 < \tau < 1$, akkor minden $t \geq \tau$ -ra ugyanaz az N megfelel. $\square$

3.2.35. Következmény: Abel tétele. Ha a $\mathbb{K}$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok, valamint a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzatuk is konvergens, az összegek rendre A , B , illetve C , akkor $C = \overline{AB}$.

* **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy a binomiális tétel szerint minden $0 < t < 1$ -re

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

majd alkalmazzuk Abel folytonossági tételét. $\square$

3.2.36. Számrendszerek. Legyen $q > 1$ természetes szám, és legyen $A \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{Z}$ és olyan $a_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $k = n, n+1, n+2, \dots$ sorozat, amelyre $a_n \neq 0$ és

$$(1) \quad A = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{q^k}.$$

Ha az előállítás választható végesnek is, azaz

$$(2) \quad A = \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{q^k}$$

alakúnak, ahol $a_m \neq 0$, akkor nem egyértelmű, de csak egy másik előállítás létezik, ez

$$(3) \quad A = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m - 1}{q^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k},$$

egyébként n és az $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ jegyek egyértelműek.

Nyilván 0 is előállítható (1) alakban, lényegében egyértelműen: n tetszőleges és $a_k = 0$ minden $k \geq n$ -re.

* **Bizonyítás.** Legyen n az a legkisebb egész szám, amelyre $1/q^n \leq A$. Mivel n a legkisebb, $1/q^n \leq A < 1/q^{n-1} = q/q^n$, azaz $1 \leq q^n A < q$. Legyen $a_n = \lfloor q^n A \rfloor$. Ekkor $a_n \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, $0 \leq q^n A - a_n < 1$, azaz $A_n = A - a_n/q^n$ jelöléssel $A = a_n/q^n + A_n$ és $0 \leq A_n < 1/q^n$. Tegyük fel, hogy indukcióval $a_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ és $0 \leq A_k < 1/q^k$, $k = n, n+1, \dots, m$ már definiálva van úgy, hogy $A = A_m + \sum_{k=n}^m a_k/q^k$. Ekkor $0 \leq q^{m+1} A_m < q$, és ha $a_{m+1} = \lfloor q^{m+1} A_m \rfloor$, $A_{m+1} = A_m - a_{m+1}/q^{m+1}$, akkor $0 \leq A_{m+1} < q^{m+1}$ és $A = A_{m+1} + \sum_{k=n}^{m+1} a_k/q^k$. Mivel $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 0$, azt kapjuk, hogy $A = \sum_{k=n}^{\infty} a_k/q^k$.

Az egyértelműség bizonyításához először is vegyük észre, hogy ha (2) fennáll, akkor (3) is. Legyen $A \in \mathbb{R}^+$, és tegyük fel, hogy $A = \sum_{k=n}^{\infty} a_k/q^k = \sum_{k=n'}^{\infty} a'_k/q^k$, ahol $a_n \neq 0$, $a_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, ha $k = n, n+1, \dots$ és $a'_{n'} \neq 0$, $a'_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, ha $k = n', n'+1, \dots$. Feltehetjük, hogy $n \leq n'$. Legyen $a'_k = 0$, ha $n \leq k < n'$, és írjuk a második előállítást $A = \sum_{k=n}^{\infty} a'_k/q^k$ alakba. Legyen m a legkisebb olyan index, amelyre $a_m \neq a'_m$. Feltehetjük, hogy $a_m > a'_m$. A két előállítást kivonva egymásból,

$$\frac{a_m - a'_m}{q^m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a'_k - a_k}{q^k} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k} = \frac{q-1}{q^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^m}.$$

Innen $a'_m = a_m - 1$ és az egyenlőtlenség egyenlőség, amiből $a'_k = q-1$ és $a_k = 0$ minden $k > m$ -re. $\square$

3.2.37. Következmény. A $\wp(\mathbb{N})$ halmaz és $]0, 1]$ ekvivalensek.

* **Bizonyítás.** Minden $n \in \mathbb{N}$ -re $\wp(\mathbb{N})$ -nak megszámlálható sok olyan A eleme van, amelyre $\mathfrak{h}(A) \leq n$. Így $\mathbb{N}$ összes véges részhalmazainak $\mathcal{F}$ halmaza megszámlálható. Ha $A \subset \mathbb{N}$, jelölje χ_A az A halmaz $\mathbb{N}$ -en értelmezett karakterisztikus függvényét. Az

$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_A(k)}{2^{k+1}}$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ halmazt, azaz $\mathbb{N}$ összes végtelen részhalmazait $]0, 1]$ -re. Így $]0, 1] \sim \wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F} \sim \wp(\mathbb{N})$. $\square$

3.2.38. Következmény. Ha $\mathbb{R}$ egy részhalmazának van belső pontja, akkor nem lehet megszámlálható.

* **Bizonyítás.** Ha az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van belső pontja, akkor tartalmaz egy $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ intervallumot, ez viszont ekvivalens $]0, 1]$ -gyel. Így az előző tétel szerint $]a, b]$ nem megszámlálható. Innen A sem lehet megszámlálható, mert megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható. $\square$

* **3.2.39. Végtelen szorzatok.** Ha $a_0, a_1, \dots$ egy $\mathbb{K}$ -beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$ -beli $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\prod a_n$ végtelen szorzatot a $p_n = \prod_{k=0}^n a_k$ ($n = 0, 1, \dots$) részletszorzatok sorozatával azonosítjuk. Az a_n számot a szorzat n -edik tényezőjének nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ szorzat konvergens, és értéke A , ha a p_n részletszorzatok sorozata A -hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a szorzat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy divergens. Ha $\overline{\mathbb{R}}$ -ban $p_n \rightarrow +\infty$ illetve $p_n \rightarrow -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ illetve $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\overline{\mathbb{C}}$ -ban $p_n \rightarrow \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek.

3.3 Elemi függvények

Az exponenciális függvény a legfontosabb függvény a matematikában.

Walter Rudin

3.3.1. Hatványsorok. A polinomok általánosításai „végtelen fokszámra” a hatványsorok. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

alakú függvénysorokat $(x, c, a_0, a_1, \dots \in \mathbb{K})$ hatványsornak nevezzük ($0^0 = 1$); $a_0, a_1, \dots$ a hatványsor együtthatói, c a hatványsor konvergencia-középpontja. Az utóbbi elnevezés értelmére a következő tétel világít rá.

3.3.2. Cauchy–Hadamard-tétel. Az előző pont jelöléseivel, legyen

$$R = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(itt $1/0 = +\infty$). Ekkor $|x - c| < R$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ abszolút konvergens, $|x - c| > R$ esetén pedig divergens.

Az $|x - c| = R$ esetben semmit sem mondhatunk a konvergenciáról. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^2$ sorok mindegyikére $R = 1$, de az első sor $|x| = 1$ esetén divergens, a második $x = 1$ -re divergens, míg $x = -1$ -re konvergens (de nem abszolút konvergens), a harmadik $x = 1$ -re konvergens (de nem abszolút konvergens), míg $x = -1$ -re divergens, a negyedik pedig $|x| = 1$ esetén abszolút konvergens.

* **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - c)^n|} = |x - c| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - c|}{R}. \square$$

3.3.3. Konvergenciasugár, konvergenciatartomány. Az előző pont jelöléseivel, R a hatványsor *konvergenciasugara*, $\{x \in \mathbb{K} : |x - c| < R\}$ pedig a *konvergenciatartománya*.

3.3.4. Hatványsorok átrendezése. Az előző tétel jelöléseivel, ha $|x - c| < R$ esetén $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$, továbbá $d \in \mathbb{K}$, és $|d - c| < R$, akkor $r = R - |d - c|$ jelöléssel (azaz a középpont áthelyezésével) $|x - d| < r$ esetén $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - d)^m$, ahol

$$b_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d - c)^{n-m}.$$

Valamennyi sor abszolút konvergens.

A b_m -re adott formulát könnyű kitalálni: úgy adódik, hogy f sorába $(x - c)$ helyére mindenütt $((x - d) + (d - c))$ -t írunk, és elvégezzük a hatványozásokat.

* **Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((x - d) + (d - c))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (d - c)^{n-m} (x - d)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d - c)^{n-m} \right) (x - d)^m, \end{aligned}$$

ami a kívánt előállítás; az összegzés sorrendje a kettős sor tétel miatt cserélhető fel: Ez megengedhető, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left| a_n \binom{n}{m} (d - c)^{n-m} (x - d)^m \right|$$

konvergens. De ez ugyanaz, mint

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x - d| + |d - c|)^n,$$

és ez a sor konvergál, ha $|x - d| + |d - c| < R$, mert ha $|y - c| = |x - d| + |d - c|$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y - c)^n$ abszolút konvergens. $\square$

3.3.5. Analitikus függvények. Az $f \in \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt *analitikusnak* nevezzük a c pontban, ha előáll $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ alakban, azaz hatványsor összegfüggvényeként a c pont valamely környezetében. Az f függvényt *analitikusnak* nevezzük a $D \subset \mathbb{K}$ halmazon, ha annak minden pontjában analitikus. Persze, ez csak akkor lehet, ha D nyílt. Az előző tétel szerint hatványsor összegfüggvénye analitikus a konvergenciatartomány minden pontjában. Ha f és g analitikusak a c pontban, akkor (hatványsoruk összeadásával adódik, hogy) $f + g$ is analitikus c -ben, és (hatványsoruk Cauchy-szorzásával

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k b_{n-k}(x-c)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-c)^n, \end{aligned}$$

azaz) fg is analitikus c -ben.

3.3.6. Példa. Az $x \mapsto 1/x$ függvény analitikus minden $0 \neq a \in \mathbb{C}$ pontban. A geometriai sor összegét fogjuk felhasználni.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a - (a-x)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - (x-a)/-a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \right)^n (x-a)^n.$$

3.3.7. Tétel. *Analitikus függvény folytonos.*

* **Bizonyítás.** Legyen a c pont egy $R > 0$ sugarú környezetében

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Legyen $0 < r < R$. Mivel a hatványsor konvergenciasugara legalább R , ha $|y-c| = r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-c)^n$ abszolút konvergens, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergens. De akkor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1}$ is konvergens. Legyen ez utóbbi sor összege A . Ekkor $|x-c| \leq r$ esetén

$$|f(x) - f(c)| = |f(x) - a_0| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x-c|^n \leq A|x-c|,$$

ahonnan következik a folytonosság. $\square$

° **3.3.8. Motiváció.** A hatványozás, azaz az $x \mapsto a^x$ függvény legjellemzőbb tulajdonsága az $a^{x+y} = a^x a^y$ összefüggés teljesülése. Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor alakban keresünk olyan $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt, amely megoldása az $f(x+y) = f(x)f(y)$, vagy akár csak az ebből $y = x$ helyettesítéssel adódó $f(2x) = f^2(x)$ függvényegyenletnek, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + \dots = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + \dots$$

Mint később megmutatjuk, két, egy adott pontban analitikus függvény csak akkor lehet egyenlő az adott pont egy környezetében, ha hatványsoraik együtthatói megegyeznek. (Lásd a Taylor-tételt.) Ezt felhasználva az

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^2, & 2a_1 &= 2a_0a_1, & 4a_2 &= 2a_0a_2 + a_1^2, \\ 8a_3 &= 2a_0a_3 + 2a_1a_2, \dots, & 2^n a_n &= \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}, \dots \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenlet egyik megoldása $a_0 = 0$, ez az érdektelen $f \equiv 0$ megoldáshoz vezet. A másik megoldás $a_0 = 1$, ekkor a_1 szabadon választható. Legtermészetesebb választásnak $a_1 = 1$ tűnik, ekkor teljes indukcióval $a_n = 1/n!$ adódik, és az $\exp$ exponenciális függvény definíciójához jutunk. (Ha $a_1 \neq 1$, akkor $z \mapsto \exp(a_1 z)$ adódik.)

3.3.9. Az exponenciális függvény. Az *exponenciális függvényt* az

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

összefüggéssel definiáljuk, ha $z \in \mathbb{C}$; a hányadoskritérium alapján adódik, hogy a hatványsor minden $z \in \mathbb{C}$ -re konvergens, így konvergenciasugara $+\infty$. Hatványsorok Cauchy-szorzásával

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \exp(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{n-k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \\ &= \exp(z_1 + z_2), \quad \text{ha } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ahogy várjuk, azaz $\exp$ eleget tesz a (felhasználnál általánosabb)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2), \quad \text{ha } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

függvényegyenletnek is. Nyilván $\exp(0) = 1$ és $\exp(-z) \exp(z) = \exp(0) = 1$, így az exponenciális függvény sohasem nulla és $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. Mivel $\exp$ sorának együtthatói valósak, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, így valós z -re $\exp(z)$ valós.

3.3.10. Az e szám. Az $e := \exp(1)$ számra $s_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$ jelöléssel nyilván

$$s_n < e < s_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = s_n + \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)},$$

ahonnan $n = 35$ választással $e = 2,7182818284590452353602874723526624977572 \dots$. Ha $x \geq 0$, akkor $\exp(x) \geq 1$, és mivel $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, minden valós x -re $\exp(x) > 0$. Az $\exp$ függvény addíciós képletéből teljes indukcióval $\exp(qx) = \exp(x)^q$ bármely $x \in \mathbb{R}$ -re, ha $q \in \mathbb{N}$. Speciálisan, ha $q > 0$, akkor $x = 1/q$ választással $e^{1/q} = \exp(1/q)$. Innen ha $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\exp(p/q) = (e^{1/q})^p$, másrészt, mivel

$$\exp(p/q)^q = \exp(q \cdot (p/q)) = \exp(p) = e^p,$$

kapjuk, hogy $\exp(p/q) = (e^p)^{1/q}$. Ezek az összefüggések az $e^x := \exp(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$ definíciót sugallják.

3.3.11. Természetes logaritmus. Az előző pont eredményeit felhasználva, ha $x > 0$, akkor $e^x > 1 + x$, amiből $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Mivel ha $x < y$, akkor $e^y = e^{y-x} e^x > e^x$, az $x \mapsto e^x$ függvény szigorúan monoton növekedő és folytonos leképezése $\mathbb{R}$ -nek $\mathbb{R}^+$ -ra. Ennek inverzét *természetes logaritmus* függvénynek nevezzük, és $\ln$ -nel jelöljük („logaritmus naturalis”).

° **3.3.12. Megjegyzés.** A „természetes” jelző $\ln$ -nél a differenciálással és integrálással való egyszerű kapcsolatra utal: mivel az analitikus függvények folytonosak, így az exponenciális függvényre

$$\frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \frac{\exp(h) - 1}{h} \rightarrow \exp(z),$$

ha $h \rightarrow 0$, azaz az exponenciális függvény deriváltja önmaga, az inverz függvény differenciálására vonatkozó tételből pedig

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x > 0.$$

Ez utóbbi összefüggés miatt szerepel a természetes logaritmus oly gyakran az integrálásnál. Látjuk, hogy mindkét összefüggés (az előző motiváció jelöléseivel) az

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \rightarrow a_1 = 1$$

határértéken, így az $a_1 = 1$ választáson alapul, és mutatják annak célszerűségét. Erre további indok az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolat; lásd a tétel után.

3.3.13. Tétel.

- (1) Az $x \mapsto \ln(x)$ leképezés folytonos és szigorúan monoton növekedő kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{R}^+$ -nak $\mathbb{R}$ -re;
- (2) $\ln(1) = 0$;
- (3) $\ln(e^x) = x$, ha $x \in \mathbb{R}$;
- (4) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, ha $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. (1)–(3) következnek a definícióból és a tanult általános tételekből. (4) az

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{(\ln x + \ln y)}$$

összefüggésből következik. $\square$

° **3.3.14. Motiváció.** Vizsgáljuk a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezést, azaz az exponenciális függvény viselkedését a képzetes tengelyen! Mivel $\exp(it) = \exp(-it)$, így $|\exp(it)|^2 = \exp(it) \exp(-it) = 1$, azaz ennek a függvénynek az értékei az $\{z: |z| = 1\}$ egységkörön vannak. Mivel

$$\frac{\exp(i(t+h)) - \exp(it)}{h} = i \exp(it) \frac{\exp(ih) - 1}{ih} \rightarrow i \exp(it),$$

ha $h \rightarrow 0$, a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezés egy, az egységkörön való mozgásnak felel meg, ami $t = 0$ -ban az 1 pontból felfelé indul, és sebességének abszolút értéke egységnyi. Szemléletünknek megfelelő tehát a $\cos(t)$ és $\sin(t)$ értékeket $\exp(it)$ valós, illetve képzetes részeként definiálni. Mindkettő kifejezhető $\exp(it)$ és $\exp(-it)$ segítségével, így természetes módon jutunk a *koszinusz* és *szinusz* függvény alábbi — tetszőleges komplex számra alkalmazható — definíciójához.

3.3.15. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények. Legyen

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2},$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

ha $z \in \mathbb{C}$. Természetesen a definícióból mindkettő valós, ha z valós, és az egész komplex síkon teljesülnek az alábbi hatványsor-előállítások:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A két definícióból kapjuk a nagyon fontos

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad \text{ha } z \in \mathbb{C}$$

Euler-féle összefüggést. Ugyancsak a definícióból

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \text{ha } z \in \mathbb{C},$$

valamint az exponenciális függvény addíciós képletét felhasználva következnek az *addíciós formulák* minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ -re:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2),$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2).$$

Ezek speciális eseteként adódik, hogy

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = 2 \cos^2(z) - 1,$$

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z).$$

A $\sin$ és $\cos$ függvény segítségével definiálhatjuk a többi trigonometrikus függvényt is: $\operatorname{tg} = \sin / \cos$, $\operatorname{ctg} = \cos / \sin$, $\sec = 1 / \cos$ és $\operatorname{cosec} = 1 / \sin$. A trigonometrikus függvényekhez hasonlóan hasznosak a hiperbolikus függvények:

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Nyilván $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$ minden $z \in \mathbb{C}$ -re. (A „hiperbolikus függvény” elnevezés arra utal, hogy míg a $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ leképezés $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ miatt egy kört paraméterez, a $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ leképezés $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ miatt egy hiperbolát.) A többi hiperbolikus függvényt ezek segítségével definiáljuk: $\operatorname{th} = \operatorname{sh} / \operatorname{ch}$, $\operatorname{cth} = \operatorname{ch} / \operatorname{sh}$, $\operatorname{sech} = 1 / \operatorname{ch}$ és $\operatorname{cosech} = 1 / \operatorname{sh}$. Ezek tulajdonságai hasonlóan bizonyíthatók, mint a trigonometrikus függvények tulajdonságai.

A következő tétel összefoglalja a most belátott összefüggések és a hasonlóan belátható összefüggések közül a legfontosabbakat.

3.3.16. Tétel. Ha $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor

- (1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$;
- (2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$;
- (3) $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$;
- (4) $\cos(-z) = \cos(z), \quad \sin(-z) = -\sin(z)$;
- (5) $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$;
- (6) $\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$;
- (7) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$;
- (8) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)$;
- (9) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2)$;
- (10) $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z), \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin(z)$;
- (11) $\exp(z) = \operatorname{ch}(z) + \operatorname{sh}(z)$;
- (12) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}(z), \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}(z)$;
- (13) $\operatorname{ch}(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$;
- (14) $\operatorname{sh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$;
- (15) $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$;
- (16) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch}(z_1) \operatorname{ch}(z_2) + \operatorname{sh}(z_1) \operatorname{sh}(z_2)$;
- (17) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh}(z_1) \operatorname{ch}(z_2) + \operatorname{ch}(z_1) \operatorname{sh}(z_2)$. $\square$

3.3.17. A π szám. Mint a trigonometrikus függvények bevezetésénél megbeszéltük, a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezés egy, az egységkörön való mozgásnak felel meg, sebességének abszolút értéke egységnyi, és a $t = 0$ -ban az 1 pontból felfelé indul. A π szám szokásos geometriai jelentése a kör kerületének és átmérőjének hányadosa. Szemléletünknek megfelelő tehát, ha π -t mint a legkisebb olyan pozitív számot definiáljuk, amelyre $\exp(2\pi i) = 1$. Természetesen meg kell mutatnunk, hogy ilyen pozitív szám létezik. Először megmutatjuk, hogy a koszinusz függvénynek van pozitív valós zérushelye. A szinusz függvény hatványsorából

$$\frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1, \quad \text{ha } z \rightarrow 0,$$

ebből elég kis pozitív t -kre $\sin(t) > 0$, tehát $\cos(t) < 1$. Ha $t > 0$ esetén $\cos(t)$ mindenütt pozitív lenne, akkor teljes indukcióval $0 < \cos(2^n t) \leq \cos^{2^n}(t) \rightarrow 0$ következne, így valamely t_0 -ra $0 < \cos(t_0) < 1/2$, de ekkor $\cos(2t_0) = 2\cos^2(t_0) - 1 < 0$, ami ellentmondás. Jelölje τ a koszinusz legkisebb pozitív zérushelyét. A $\sin(2z)$ -re vonatkozó összefüggésből $\sin(2\tau) = 0$ és 2τ a legkisebb pozitív szám, amelynek szinusza nulla: ha a legkisebb ilyen szám $0 < 2t < 2\tau$ lenne, akkor $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ miatt $\cos(t) = 0$ következne, ami ellentmondás. Így $\sin(\tau) = 1$, és $\exp(\tau i) = i$, $\exp(2\tau i) = -1$, $\exp(4\tau i) = 1$. Mivel $\cos(t + \tau) = -\sin(t)$, kapjuk, hogy $\tau \leq t \leq 2\tau$ esetén $\cos(t) \leq 0$, és mivel $\cos(t + 2\tau) = -\cos(t)$, kapjuk, hogy $\cos(t) < 1$, ha $0 < t < 4\tau$, azaz $\pi = 2\tau$.

Megmutatjuk, hogy $t \mapsto \exp(it)$ a $[0, 2\pi[$ intervallumot kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\{z: |z| = 1\}$ egységkörre. Ha $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, akkor

$$\frac{\exp(it_2)}{\exp(it_1)} = \exp(i(t_2 - t_1)) \neq 1.$$

Ebből következik, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ahhoz, hogy belássuk, a leképezés az egységkörre történik, rögzítsünk olyan z számot, amelyre $|z| = 1$. Legyen $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$. Mivel $\cos$ folytonos, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, van olyan $t \in [0, \pi]$, hogy $\cos t = x$. Ekkor $\sin t = \pm y$; ha $\sin t = y$, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor $\cos(2\pi - t) = \cos t = x$ és $\sin(2\pi - t) = -\sin t = y$, tehát ekkor a keresett t a $]\pi, 2\pi[$ intervallumban van.

Az exponenciális függvény addíciós képletéből $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$ periódusa $\exp$ -nek. Megfordítva, legyen c periódusa $\exp$ -nek. Ekkor $\exp(z + c) = \exp(z)$, így $\exp(c) = 1$. Mivel $|\exp(x + iy)| = \exp(x)$, és ha $x > 0$, akkor $\exp(x) > 1$, ha pedig $x < 0$, akkor $\exp(x) = 1/\exp(-x) < 1$, a c tiszta képzetes. Az $i\omega = c$ jelöléssel, ha

$$2k\pi < \omega < 2(k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

akkor $0 < t = \omega - 2k\pi < 2\pi$ olyan szám, amelyre $\exp(it) = 1$, ami lehetetlen. Így $\exp$ összes periódusa $2k\pi i$ alakú.

A következő tétel összefoglalja a most belátott összefüggések közül a legfontosabbakat.

3.3.18. Tétel. Az exponenciális függvényre $\exp(\pi i/2) = i$, $\exp(\pi i) = -1$, és a $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$ halmaz adja $\exp$ összes periódusát; $t \mapsto \exp(it)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $[0, 2\pi[$ -nek $\{z: |z| = 1\}$ -re, továbbá ha $z \in \mathbb{C}$, akkor

- (1) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$;
- (2) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$;
- (3) $\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch}(z)$, $\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh}(z)$. $\square$

3.3.19. Hatványozás. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Mivel $a = e^{\ln a}$ és

$$\left(e^{\frac{\ln a}{q}}\right)^q = e^{\ln a} = a,$$

így

$$a^{1/q} = e^{\frac{\ln a}{q}} \quad \text{és} \quad (a^{1/q})^p = e^{\frac{p \ln a}{q}},$$

másrészt

$$a^p = (e^{\ln a})^p = e^{p \ln a} \quad \text{és} \quad \left(e^{\frac{p \ln a}{q}}\right)^q = e^{p \ln a} = a^p,$$

így

$$(a^p)^{1/q} = e^{\frac{p \ln a}{q}}.$$

Ezek az összefüggések az $a^x := e^{x \ln a}$, ha $x \in \mathbb{R}$ definíciót sugallják.

3.3.20. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) Ha $a \neq 1$, akkor az $x \mapsto a^x$ leképezés szigorúan monoton és folytonos leképezése $\mathbb{R}$ -nek $\mathbb{R}^+$ -ra;
- (2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = 1/a^x$;
- (3) $a^0 = 1$, $a^1 = a$ és $1^x = 1$.

Bizonyítás. Következik a definícióból. $\square$

3.3.21. Logaritmus. Ha $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, akkor az $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény inverzét a alapú *logaritmus függvény*nek nevezzük és $\log_a$ -val jelöljük.

3.3.22. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1 \neq b$ és $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) $x \mapsto \log_a x$ szigorúan monoton és folytonos leképezése $\mathbb{R}^+$ -nak $\mathbb{R}$ -re;
- (2) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a (a^x) = x$, és ha $x > 0$, akkor $\log_e x = \ln x$, $a^{\log_a x} = x$.
- (3) ha $x, y > 0$, akkor $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;
- (4) ha $x > 0$, akkor $\log_a x = \log_b x / \log_b a$;
- (5) ha $x > 0$, akkor $\log_a (x^y) = y \log_a x$.

Bizonyítás. Mivel

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln a \frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln x} = x,$$

$\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$. Ebből, és $\ln$ tulajdonságaiból minden összefüggés következik. $\square$

3.3.23. Komplex logaritmus és hatványozás. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, legyen $\arg(z)$ az a t valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\exp(it) = \operatorname{sgn}(z)$. Vegyük észre, hogy $z = |z| \exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t)$ (ha $z = 0$, tetszőleges t választható), ez a *komplex szám trigonometrikus alakja*, amit már tanultunk, de az $\exp$, $\sin$, $\cos$ függvény pontos definíciójával értelmezése csak most lett teljes. Emlékeztetünk rá, hogy a trigonometrikus alakból leolvasható a komplex számok szorzásának geometriai jelentése: az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak, mod 2π , komplex .

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$, azaz az $\exp$ függvény

$$\{z: -\pi < \Im z \leq \pi\}$$

halmazra való megszorításának inverze. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$ és $w \in \mathbb{C}$, akkor legyen

$$z^w := \exp(w \ln(z)).$$

Megjegyezzük, hogy a logaritmus és a hatványozás definíciója összhangban van az eddigi definíciókkal.

Differenciálszámítás

4.1 Derivált

4.1.1. Derivált. Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ és x belső pontja az f értelmezési tartományának. Ha létezik a

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \in \mathbb{K}_2$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy f *differenciálható* az x pontban, és $f'(x)$ az f *differenciáhányadosa* vagy *deriváltja* x -ben. A $\lim$ jel mögött álló hányados f *differenciáhányadosa* x -ben. (A $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ feltevessel azért zártuk ki a $\mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ esetet, mert ebben az esetben a differenciahányadosok komplexek.) A $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ esetet fogjuk a leggyakrabban használni, ekkor a derivált jelentése a függvény grafikonja $(x, f(x))$ -pontbeli érintőjének meredeksége. Az $f': x \mapsto f'(x)$ leképezést, ami persze csak ott van értelmezve, ahol a függvény differenciálható, az f *deriváltfüggvényének* vagy röviden csak f *deriváltjának* nevezzük; a df/dx jelölés is szokásos.

A differenciálhatóság nyilván lokális tulajdonság: ha két függvény megegyezik az x pont valamely környezetében, akkor egyszerre differenciálhatóak és deriváltjuk megegyezik.

Ha $\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}$, és van olyan $\delta > 0$, amelyre $[x, x + \delta]$ részhalmaza f értelmezési tartományának, akkor az

$$f'(x+):= \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{K}_2$$

jobb oldali határértéket az f függvény x -beli *jobb oldali deriváltjának* nevezzük. Teljesen hasonlóan értelmezhető az $f'(x-)$ *bal oldali derivált*. Ha f egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon van értelmezve, akkor az alatt, hogy f *differenciálható* $[a, b]$ -n, azt fogjuk érteni, hogy differenciálható az intervallum belső pontjaiban, valamint a végpontokban léteznek a jobb, illetve bal oldali deriváltak. A deriváltakra vonatkozó állítások általában értelemszerűen átvihetők jobb és bal oldali deriváltakra is; ezzel a kérdéssel részletesen nem foglalkozunk.

4.1.2. Magasabb deriváltak. Az előző pont jelöléseivel, ha az f függvény deriváltfüggvénye, f' differenciálható x -ben (ehhez persze kell, hogy f' értelmezve legyen x egy környezetében), akkor deriváltját x -ben $f''(x)$ -szel jelöljük és az f függvény x -beli *második deriváltjának* nevezzük; az $f'': x \mapsto f''(x)$ leképezés az f *második deriváltfüggvénye*. (A d^2f/dx^2 jelölés is használatos.) Rekurzióval folytatva, az $f, f', f'', f''' = f^{(3)}, \dots, f^{(n)}, \dots$ függvényeket kapjuk.

4.1.3. Állítás. Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ és tegyük fel, hogy f differenciálható x -ben. Ekkor f folytonos x -ben.

A megfordítás nem igaz, például az $x \mapsto |x|$ függvény folytonos, de nem differenciálható 0-ban (bár a jobb és bal oldali deriváltjaként léteznek, de nem egyeznek meg). Olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de mindenütt folytonos.

Bizonyítás. Ha $y \rightarrow x$, akkor

$$f(y) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(y - x) \rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0. \square$$

4.1.4. Tétel. Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f, g \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ és tegyük fel, hogy f és g differenciálhatóak x -ben. Ekkor

- (1) $f + g$ differenciálható x -ben és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- (2) fg differenciálható x -ben és $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;
- (3) ha $g(x) \neq 0$, akkor $1/g$ differenciálható x -ben és $(1/g)'(x) = -g'(x)/g^2(x)$.

Bizonyítás. (1) nyilvánvaló, mert

$$\frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \rightarrow f'(x) + g'(x).$$

Mivel

$$\frac{(fg)(y) - (fg)(x)}{y - x} = g(y) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + f(x) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \rightarrow g(x)f'(x) + f(x)g'(x),$$

adódik (2). Végül (3)-hoz vegyük észre, hogy

$$\frac{(1/g)(y) - (1/g)(x)}{y - x} = -\frac{1}{g(y)g(x)} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \rightarrow -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \square$$

4.1.5. Példák. A definíció alapján egy c konstans függvény deriválható és a deriváltja nulla, valamint $(cf)' = cf'$. Az $f(x) = x - c$, $x \in \mathbb{K}$ függvény a definíció alapján deriválható, és deriváltja 1. Innen az $f(x) = (x - c)^n$, $x \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{Z}$ függvény minden pontban, ahol értelmezve van, differenciálható és a deriváltja $f'(x) = n(x - c)^{n-1}$; ez $n \in \mathbb{N}$ esetén a szorzat differenciálási szabályát felhasználva indukcióval adódik, egyébként pedig a reciprokok differenciálási szabályából kapjuk. Innen az is következik, hogy minden polinom, sőt, minden racionális törtfüggvény (minden olyan pontban, amelyben értelmezve van), differenciálható.

A szorzat differenciálási szabályából az is következik, hogy ha f egy polinom, $n \in \mathbb{N}^+$ és $c \in \mathbb{K}$ az f egy n -szeres gyöke, akkor c az f' -nek $(n - 1)$ -szeres gyöke: Ha

$$f(x) = (x - c)^n g(x),$$

akkor $f'(x) = (x - c)^{n-1}((x - c)g'(x) + ng(x))$. Mivel a zárójelben álló kifejezés értéke a c helyen $ng(c)$, ami nem nulla, c pontosan $(n - 1)$ -szeres gyöke f' -nek.

A következő tétel úgy tekinthető, mint a polinomok differenciálására vonatkozó szabály kiterjesztése.

4.1.6. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye tagonként differenciálható a konvergenciatartomány pontjaiban, azaz ha*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

akkor a konvergenciatartomány bármely x pontjában

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}.$$

A két hatványsor konvergenciasugara megegyezik.

* **Bizonyítás.** Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - c)^n$ hatványsorok konvergenciasugara megegyezik. Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - c)^n = (x - c) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1},$$

bármely x -re a két sor egyszerre konvergens. A hatványsorok átrendezésére vonatkozó tétel szerint a konvergenciatartomány bármely d pontjára $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - d)^m$, ha $|x - d| < r = R - |d - c|$, ahol

$$b_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d - c)^{n-m}.$$

Innen

$$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x - d)^{m-1},$$

ha $0 < |x - d| < r$. Mivel a jobb oldal hatványsor összegfüggvénye, folytonos, ezért $f'(d)$ létezik és

$$f'(d) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (d - c)^{n-1},$$

ami a bizonyítandó állítás. $\square$

4.1.7. Következmény: Taylor-tétel. *Az előző tétel feltételei mellett, f akárhányszor differenciálható a konvergenciatartományban és ha a konvergenciatartomány nem üres, akkor*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

A tétel úgy is fogalmazható, hogy hatványsor összegfüggvénye meghatározza az együtthatóit.

Bizonyítás. Az, hogy $a_0 = f(c)$, triviális, és teljes indukcióval kapjuk, hogy f akárhányszor differenciálható és $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. $\square$

4.1.8. Következmény. A valós és a komplex számok halmazán is $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. A valós és a komplex számok halmazán is, ahol tg , ctg , th illetve cth értelmezve van, ott

$$\operatorname{tg}' = 1/\cos^2 = 1 + \operatorname{tg}^2, \quad \operatorname{ctg}' = -1/\sin^2 = -1 - \operatorname{ctg}^2,$$

$$\operatorname{th}' = 1/\operatorname{ch}^2 = 1 - \operatorname{th}^2, \quad \operatorname{cth}' = 1/\operatorname{sh}^2 = \operatorname{cth}^2 - 1.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló számolás. $\square$

°* **4.1.9. Megjegyzés.** Ha egy függvény akárhányszor differenciálható a c pontban, akkor mindig felírhatjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

hatványsort, a *Taylor-sort* (ha $c = 0$, akkor a sort *MacLaurin-sornak* szokás nevezni). Az előző tétel szerint hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora. Azonban tetszőleges valós változós, akárhányszor differenciálható függvény esetén nem biztos, hogy a Taylor-sor konvergál a függvényhez. Például az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

összefüggéssel definiált függvény tetszőleges sokszor differenciálható és MacLaurin-sorának együtthatói nullák, így a sor nem konvergál a függvényhez: Teljes indukcióval megmutathatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = 0$, ha $x < 0$ és $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}$ valamely p_n polinommal, ha $x > 0$. A differenciahányados bal oldali határértéke nyilván nulla, így csak azt kell megmutatni teljes indukcióval, hogy $f^{(n)}(0) = 0$, azaz hogy

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{p_n(1/x)}{x \exp(1/x)} = 0.$$

Ez könnyen következik, ha $\exp$ helyére beírjuk a hatványsorának egy (elég magas indexű) részletösszegét.

Komplex változós függvényeknél egészen más a helyzet, mint látni fogjuk: ha a függvény egyszer differenciálható, akkor analitikus is; ezzel a kérdéskörrel a komplex függvénytanban foglalkozunk.

4.1.10. Segéd-tétel. Ha $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$, és x belső pontja f értelmezési tartományának, akkor f pontosan akkor differenciálható x -ben, ha van olyan $A \in \mathbb{K}_2$ szám és $\varepsilon \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvény, hogy $\varepsilon(x) = 0$, az ε folytonos x -ben, és

$$f(y) - f(x) = A(y - x) + \varepsilon(y)(y - x) \quad \text{minden } y \in \operatorname{dmn}(f)\text{-re.}$$

Az A szám egyértelműen meghatározott, $A = f'(x)$.

A jobb oldalon szereplő $y \mapsto A(y - x) = f'(x)(y - x)$ lineáris függvényt szokás az f függvény x -beli *differenciáljának* nevezni. A tétel azt mondja, hogy differenciálható függvény egy lineáris leképezés és egy eltolás összetételével, azaz egy affin leképezéssel (legfeljebb elsőfokú polinommal) közelíthető.

Bizonyítás. Ha f differenciálható, akkor legyen $A = f'(x)$,

$$\varepsilon(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - A,$$

ha $y \neq x$, és $\varepsilon(x) = 0$. A megfordításhoz az

$$f(y) - f(x) = A(y - x) + \varepsilon(y)(y - x)$$

összefüggésben $y - x$ -szel osztva, majd határértéket véve, kapjuk, hogy $f'(x)$ létezik, és A . $\square$

4.1.11. Láncszabály. Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$, $f \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$, $g \in \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_3$. Ha f differenciálható az x pontban, g pedig differenciálható az $f(x)$ pontban, akkor $g \circ f$ differenciálható az x pontban és

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Bizonyítás. Az előző segédteétel alapján az f függvény x -beli differenciálhatósága azt jelenti, hogy az $f(t) - f(x)$ megváltozása felírható

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t - x) + \varepsilon(t)(t - x)$$

alakban, ahol $\varepsilon(x) = 0$, és ε folytonos x -ben. Hasonlóan, a g függvény $y = f(x)$ -beli differenciálhatósága azt jelenti, hogy a $g(s) - g(y)$ megváltozása felírható

$$g(s) - g(y) = g'(y)(s - y) + \delta(s)(s - y)$$

alakban, ahol $\delta(y) = 0$ és δ folytonos y -ban. Ha most $s = f(t)$, akkor

$$\begin{aligned} g(f(t)) - g(f(x)) &= (f(t) - f(x))(g'(y) + \delta(s)) \\ &= (t - x)(f'(x) + \varepsilon(t))(g'(y) + \delta(s)) \\ &= (t - x)(f'(x)g'(y) + \eta(t)), \end{aligned}$$

ahol $\eta(t) = f'(x)\delta(s) + g'(y)\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\delta(s)$. Mivel $s = f(t) \rightarrow f(x) = y$, ha $t \rightarrow x$, kapjuk, hogy $\delta(s) \rightarrow 0$, és így $\eta(t) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow x$. $\square$

4.1.12. Az inverz függvény differenciálási szabálya. Ha $[a, b] \subset \mathbb{R}$, az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton és folytonos $[a, b]$ -n, az $x \in [a, b]$ pontban differenciálható és $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható az $y = f(x)$ pontban, és

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Hasonló állítás igaz $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -beli függvényekre is; ezzel a komplex függvénytanban foglalkozunk.

Bizonyítás. Legyen $y = f(x)$ és ε ugyanaz, mint az előző bizonyításban, továbbá tegyük fel, hogy f monoton növekedő (a másik eset hasonlóan kezelhető). Ha $c = f(a)$, $d = f(b)$, akkor Bolzano tétele szerint f az $[a, b]$ -t $[c, d]$ -re képezi le, továbbá f^{-1} folytonos $[c, d]$ -n. Ha most $s \in [c, d]$, akkor pontosan egy olyan $t \in [a, b]$ létezik, amelyre $s = f(t)$, továbbá

$$f(t) - f(x) = (f'(x) + \varepsilon(t))(t - x).$$

Ha $s \neq y$, akkor $t \neq x$ és

$$f^{-1}(s) - f^{-1}(y) = t - x = \frac{f(t) - f(x)}{f'(x) + \varepsilon(t)} = \frac{s - y}{f'(x) + \varepsilon(f^{-1}(s))}.$$

Ebből

$$\frac{f^{-1}(s) - f^{-1}(y)}{s - y} \rightarrow \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{ha } s \rightarrow y. \quad \square$$

4.1.13. Következmény. Ha $x > 0$ és $r \in \mathbb{R}$, akkor $\ln' x = 1/x$ és $x \mapsto x^r$ deriváltja $x \mapsto rx^{r-1}$.

Bizonyítás.

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

és

$$(x^r)' = (\exp(r \ln x))' = \exp(r \ln x) \frac{r}{x} = rx^{r-1}. \quad \square$$

→ 4.1.14. Feladat [5]. Legyen $f, g \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$. Mutassuk meg, hogy ha f és g is n -szer differenciálható x -ben, akkor fg is, és

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

4.2 Szélsőértékek

4.2.1. Tétel. Tegyük fel, hogy egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az értelmezési tartomány valamely x belső pontjában lokális maximuma vagy lokális minimuma van, azaz x -nek van olyan környezete, hogy az ott felvett értékei között $f(x)$ maximális, illetve minimális. Ha f differenciálható x -ben, akkor $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f -nek lokális maximuma van x -ben. Válasszunk olyan $\delta > 0$ -t, amelyre $|y - x| < \delta$ esetén y az értelmezési tartományban van, és $f(y) \leq f(x)$. Ekkor $x - \delta < y < x$ esetén $(f(y) - f(x))/(y - x) \geq 0$, így $f'(x) \geq 0$, ha viszont $x < y < x + \delta$, akkor $(f(y) - f(x))/(y - x) \leq 0$, így $f'(x) \leq 0$. A lokális minimum esetén az egyenlőtlenségek megfordulnak. $\square$

4.2.2. Rolle tétele. Ha $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, $f(a) = f(b)$, és f differenciálható $]a, b[$ -n, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, amelyre $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor bármely $\xi \in]a, b[$ megfelel. Ha van olyan $y \in]a, b[$, amelyre $f(y) > f(a) = f(b)$, akkor f maximumhelyére, egyébként pedig f minimumhelyére alkalmazva az előző tételt, kapjuk az állítást. $\square$

4.2.3. Cauchy középérték-tétele. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az $[a, b]$ -n folytonos függvények, amelyek $]a, b[$ -n differenciálhatóak, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, amelyre

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Bizonyítás. A bizonyítás abban áll, hogy észrevevessük, a

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

függvény az a és b pontokban ugyanazt az értéket veszi fel, és így alkalmazható rá Rolle tétele, azaz van olyan $\xi \in]a, b[$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$. $\square$

4.2.4. Következmény: Lagrange középérték-tétele. Ha $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható $]a, b[$ -n, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt $g(x) = x$ -el. $\square$

4.2.5. Megjegyzés. A középérték-tételek nem maradnak érvényben már valós változós, komplex értékű függvényekre sem, például az $x \mapsto \exp(ix)$ függvényre $[0, 2\pi]$ -n nem teljesül a Rolle-tétel állítása. Általánosabb esetben egy egyenlőtlenség veszi át a középérték-tételek szerepét.

4.2.6. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az I belső pontjaiban és folytonos az esetleges határpontokban, akkor

- (1) f akkor és csak akkor monoton növekedő, ha $f'(x) \geq 0$ az I minden belső pontjában;
- (2) f akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \leq 0$ az I minden belső pontjában;
- (3) f akkor és csak akkor konstans, ha $f'(x) = 0$ az I minden belső pontjában.

Bizonyítás. Ha f monoton növekedő, akkor minden differenciahányados nemnegatív, így $f'(x) \geq 0$. Megfordítva, mivel bármely I -beli $a < b$ párhoz van olyan $a < x < b$, amelyre $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \geq 0$, kapjuk a monoton növekedést. (2) hasonlóan adódik, (3) pedig (1) és (2) következménye. $\square$

4.2.7. Megjegyzés. Ugyanez a bizonyítás mutatja, hogy az előző tételben, ha $f'(x) > 0$ minden $x \in]a, b[$ -re, akkor f szigorúan monoton növekedő, ha pedig $f'(x) < 0$ minden $x \in]a, b[$ -re, akkor f szigorúan monoton csökkenő. Itt azonban nem igaz a megfordítás, mint az $x \mapsto x^3$ függvény példája mutatja. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad, amely erre a függvényre is alkalmazható.

4.2.8. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az intervallum belső pontjaiban és folytonos az esetleges végpontokban, akkor

- (1) f akkor és csak akkor szigorúan monoton növekedő, ha $f'(x) \geq 0$ az I minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma I -nek, amelyen f' azonosan nulla;
- (2) f akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \leq 0$ az I minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma I -nek, amelyen f' azonosan nulla.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy f akkor és csak akkor szigorúan monoton, ha monoton és nincs olyan nem üres, nyílt részintervallum, amelyen konstans, így a tétel következik az előző tételből. $\square$

4.2.9. Példák. Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x \sin(1/x)$ egyébként, akkor f nem differenciálható a nullában, bár folytonos. Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ egyébként, akkor f differenciálható a nullában, de a deriváltja nem folytonos, bár lokálisan korlátos a nullában. Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ egyébként, akkor f differenciálható a nullában, de a deriváltja nem folytonos, és nem is lokálisan korlátos a nullában.

4.2.10. A trigonometrikus és hiperbolikus függvények inverzei. Az eddig tanult tételek alapján

- (1) a $\sin$ függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ -re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az $\arcsin$ függvény;
- (2) a $\cos$ függvény $[0, \pi]$ -re való megszorítása szigorúan monoton csökkenő, inverze az $\arccos$ függvény;
- (3) a tg függvény $]-\pi/2, \pi/2[$ -re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az arctg függvény;
- (4) a ctg függvény $]0, \pi[$ -re való megszorítása szigorúan monoton csökkenő, inverze az arctg függvény;
- (5) a $\sec$ függvény $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$ -re való megszorítása kölcsönösen egyértelmű, inverze az arcsec függvény;
- (6) a cosec függvény $]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$ -re való megszorítása kölcsönösen egyértelmű, inverze az $\operatorname{arccosec}$ függvény;
- (7) a sh függvény $]-\infty, \infty[$ -en szigorúan monoton növekedő, inverze az arsh függvény;
- (8) a ch függvény $[0, \infty[$ -re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az arch függvény;
- (9) a th függvény $]-\infty, \infty[$ -en szigorúan monoton növekedő, inverze az arth függvény;
- (10) a cth függvény $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ -en szigorúan monoton csökkenő, inverze az arth függvény;
- (11) a sech függvény $[0, \infty[$ -en szigorúan monoton csökkenő, inverze az arsech függvény;
- (12) a cosech függvény $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ -en szigorúan monoton csökkenő, inverze az $\operatorname{ar cosech}$ függvény.

A trigonometrikus függvények inverzeinek neve az *arcus* (ív) szóból ered, mivel ezek értékei egy szöveget, azaz ívhosszat adnak meg. A hiperbolikus függvények inverzeinek neve az *area* (terület) szóból ered, mivel megmutatható, hogy az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola (x, y) és $(x, -y)$ pontjai közötti ív, valamint az ezen pontokat az origóval összekötő szakaszok által határolt síkrész területe $\operatorname{arch} x$.

4.2.11. Összefüggések a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények inverzei között.

Ha $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, akkor $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, ahonnan $y = \sin x$ jelöléssel $x = \arcsin y$ és $\pi/2 - x = \arccos y$, így $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$, ha $y \in [-1, 1]$. Hasonlóan $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y = \pi/2$, ha $y \in \mathbb{R}$.

Ha $-\pi/2 < x < \pi/2$, akkor

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} |\cos x| = \operatorname{tg} x \sqrt{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Innen $t = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x$ jelöléssel $y = t/\sqrt{1+t^2}$ és

$$\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = x = \operatorname{arctg} t,$$

ha $t \in \mathbb{R}$, valamint

$$\arcsin y = x = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

ha $-1 < y < 1$.

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, ahonnan $y = \operatorname{sh} x$, $t = e^x$ jelöléssel

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{t - 1/t}{2} = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Az egyenletet megoldva t -re $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$; a pozitív előjelet azért kell választanunk, mert t pozitív kell legyen. Innen $\operatorname{arsh} y = x = \ln t = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, ha $y \in \mathbb{R}$. Hasonlóan adódik, hogy $\operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, ha $y \geq 1$; itt a négyzetgyökvonásnál azért kell a pozitív előjelet választani, mert $y - \sqrt{y^2 - 1} = 1/(y + \sqrt{y^2 - 1}) \leq 1/2$, ha $y \geq 1$, de $t = e^x \geq 1$, ha $x \geq 0$. Végül hasonlóan $t = e^x$, $y = \operatorname{th} x$ jelöléssel

$$y = \operatorname{th} x = \frac{t - 1/t}{t + 1/t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

és az egyenletet megoldva $t = \sqrt{(1+y)/(1-y)}$, ahonnan

$$\operatorname{arth} y = x = \ln t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

ha $-1 < y < 1$.

Természetesen számos további összefüggés is levezethető.

*** 4.2.12. Darboux közbenső érték tétele.** Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, akkor a derivált minden $f'(a)$ és $f'(b)$ közötti értéket felvesz.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f'(a) < f'(b)$, legyen $f'(a) < \lambda < f'(b)$ tetszőleges, és legyen $g(x) = f(x) - \lambda x$. Ekkor $g'(a) < 0$, így valamely $x_1 \in]a, b[$ -re $g(x_1) < g(a)$, és hasonlóan $g(x_2) < 0$ valamely $x_2 \in]a, b[$ -re. Innen g felveszi a minimumát valamely $x \in]a, b[$ pontban. Itt $g'(x) = 0$, tehát $f'(x) = \lambda$. Az $f'(a) > f'(b)$ eset hasonlóan kezelhető. $\square$

4.2.13. L'Hospital-szabály. Tegyük fel, hogy $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, hogy $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$, és hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow a.$$

Ha $x \rightarrow a$ esetén $f(x) \rightarrow 0$ és $g(x) \rightarrow 0$, vagy ha $x \rightarrow a$ esetén $g(x) \rightarrow +\infty$, akkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow a.$$

Természetesen $x \rightarrow a$ helyett $x \rightarrow b$ és $+\infty$ helyett $-\infty$ is szerepelhet.

* **Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $-\infty \leq A < \infty$. Válasszunk egy olyan q valós számot, amelyre $A < q$, és aztán egy olyan r számot, amelyre $A < r < q$. Ekkor (1) szerint van olyan $c \in]a, b[$ pont, hogy $a < x < c$ esetén $f'(x)/g'(x) < r$. Ha most $a < x < y < c$, akkor Cauchy középérték tétele szerint van olyan $t \in]x, y[$ pont, hogy

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r.$$

Ha $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \downarrow a} g(x)$, akkor ezt felhasználva az előző összefüggésből

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q, \quad \text{ha } a < y < c.$$

Ha $\lim_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$, akkor (1)-ben y -t rögzítve, választhatunk olyan $c_1 \in]a, y[$ számot, hogy ha $a < x < c_1$, akkor $g(x) > g(y)$ és $g(x) > 0$. Végigszorozva (1)-et a

$$\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

kifejezéssel, azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < r - r \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)},$$

ha $a < x < c_1$. Ha most $x \rightarrow a$, akkor van olyan $c_2 \in]a, c_1[$ szám, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q, \quad \text{ha } a < x < c_2.$$

Összegezve, mindkét esetben ez az állítás teljesül. Hasonlóan mutatható meg, hogy $-\infty < p < A \leq +\infty$ esetén van olyan c_3 , hogy ha $a < x < c_3$, akkor $p < f(x)/g(x)$. Ezekből az állításokból következik a tétel. $\square$

4.2.14. Példák. (1) A $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x$ határérték $0/0$ alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

(2) A $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x)/x$ határérték ∞/∞ alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0.$$

(3) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$. A $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+a/x)^{bx}$ határérték 1^∞ alakú. $\ln((1+a/x)^{bx}) = bx \ln(1+a/x)$, ha x elég nagy, és a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{bx}}$$

határérték $0/0$ alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{a}{x^2(1+a/x)}}{-\frac{1}{bx^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{1+\frac{a}{x}} = ab.$$

Innen $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+a/x)^{bx} = e^{ab}$.

4.2.15. Konvex és konkáv függvények, inflexiós hely. Ha $I \subset \mathbb{R}$ inrevallum, az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük, ha I -beli $x < y$ és $0 < \lambda < 1$ esetén

$$(1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Ha (1) a $\leq$ helyett $\geq$ -vel teljesül, akkor f -et *konkáv*nak nevezzük, ha pedig (1) a $\leq$ helyett $<$ -bel illetve $>$ -bal, akkor *szigorúan konvexnek* illetve *szigorúan konkáv*nak.

Ha az f függvény az I egy x belső pontjában differenciálható és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $]x - \varepsilon, x[$ intervallumon a függvény konvex, az $]x, x + \varepsilon[$ intervallumon pedig konkáv, vagy fordítva, az $]x - \varepsilon, x[$ intervallumon a függvény konkáv, az $]x, x + \varepsilon[$ intervallumon pedig konvex, akkor azt mondjuk, hogy f -nek *inflexiós helye* az x .

* **4.2.16. Segédteétel.** Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely I -beli $x < t < y$ esetén

$$(1) \quad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

Hasonlóan f pontosan akkor konkáv, szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv, ha (1) teljesül $\leq$ helyett $\geq$, $<$, illetve $>$ -bal.

Bizonyítás. Ha f konvex, akkor a definícióban λ helyére $(y-t)/(y-x)$ -et írva, azt kapjuk, hogy $1-\lambda = (t-x)/(y-x)$, és

$$f(t) \leq \frac{(y-t)f(x) + (t-x)f(y)}{y-x}.$$

Ezt átrendezve, kapjuk (1)-et. Megfordítva, ha (1) teljesül, akkor átrendezéssel

$$(y-x)f(t) \leq (y-t)f(x) + (t-x)f(y).$$

A t helyére $\lambda x + (1-\lambda)y$ -t írva,

$$(y-x)f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(y-x)f(x) + (1-\lambda)(y-x)f(y),$$

amiből kapjuk a definíciót. A többi eset bizonyítása hasonló. $\square$

4.2.17. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, konkáv, szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv, ha f' monoton növekedő, monoton csökkenő, szigorúan monoton növekedő, illetve szigorúan monoton csökkenő.

* **Bizonyítás.** Ha f konvex, és $x < t < r < y$ az I -ben van, akkor kétszer alkalmazva az előző segédtelet,

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(r) - f(t)}{r - t} \leq \frac{f(y) - f(r)}{y - r},$$

ahonnan $t \downarrow x$, $r \uparrow y$ határátmenettel $f'(x) \leq f'(y)$. Megfordítva, ha f' monoton növekedő, akkor Lagrange középérték tétele szerint létezik $x < \xi < t < \eta < y$, hogy

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

A többi eset bizonyítása hasonló, de a szigorú eseteknél háromszor kell alkalmazni az előző lemma-t. $\square$

4.2.18. Következmény. Ha x belső pontja I -nek, az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek pontosan akkor van inflexiós helye x -ben, ha f' -nek lokális szélsőértéke van x -ben. $\square$

4.2.19. Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

* **Bizonyítás.** Ha valamelyik a_j nulla, akkor az állítás triviális. Az $n = 1$ eset is triviális. Teljes indukcióval, ha $n - 1$ -re teljesül az állítás, akkor az $\ln$ függvény szigorúan konkáv voltából $a = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ jelöléssel

$$\frac{n-1}{n} \ln(a) + \frac{1}{n} \ln(a_n) \leq \ln \left(\frac{n-1}{n} a + \frac{1}{n} a_n \right),$$

ahonnan

$$\sqrt[n]{a^{n-1} a_n} \leq \frac{1}{n} a_n + \frac{n-1}{n} a \leq \frac{1}{n} a_n + \frac{n-1}{n} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, ami a bizonyítandó állítás. $\square$

4.2.20. Taylor-polinom. Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x \in [a, b]$ pontban n -szer differenciálható, akkor a

$$h \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k, \quad h \in \mathbb{R}$$

polinomot az f függvény x -beli n -edfokú *Taylor-polinomjának* nevezzük.

4.2.21. Taylor-formula maradéktag nélkül. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x \in [a, b]$ pontban n -szer differenciálható. Jelölje T az f függvény x -beli n -edfokú Taylor-polinomját. Ekkor

$$\lim_{h \rightarrow 0, x+h \in [a, b]} \frac{f(x+h) - T(h)}{h^n} = 0.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval: $n = 1$ -re a derivált definíciójából következik. Ha $n > 1$, akkor vegyük észre, hogy T' az f' -höz tartozó $n - 1$ -edfokú Taylor-polinom, és $T(0) = f(x)$, így a középérték-tétel szerint

$$\frac{f(x+h) - T(h)}{h^n} = \frac{f(x+h) - T(h) - (f(x) - T(0))}{h^n} = \frac{f'(x+\tau h) - T'(\tau h)}{h^{n-1}} \rightarrow 0,$$

ha $h \rightarrow 0$. $\square$

4.2.22. Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal. Legyen $n \in \mathbb{N}$,

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x, x+h \in [a, b],$$

és tegyük fel, hogy f folytonos a $\{x+th: 0 \leq t \leq 1\}$ zárt intervallumon, n -szer folytonosan differenciálható a $\{x+th: 0 \leq t < 1\}$ félig zárt intervallumon, és $(n+1)$ -szer differenciálható a $\{x+th: 0 < t < 1\}$ nyílt intervallumon. Jelölje T az f függvény x -beli n -edfokú Taylor-polinomját. Ekkor van olyan $0 < \tau < 1$, hogy

$$f(x+h) = T(h) + \frac{f^{(n+1)}(x+\tau h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $M = f(x+h) - T(h)$, és legyen

$$g(t) = f(x+th) - T(th) - Mt^{n+1}, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq 1.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $(n+1)!M = f^{(n+1)}(x+\tau h)h^{n+1}$ valamely $0 < \tau < 1$ -re. Ez viszont

$$g^{(n+1)}(t) = h^{n+1} f^{(n+1)}(x+th) - (n+1)!M$$

miatt azzal ekvivalens, hogy $g^{(n+1)}(\tau) = 0$ valamely $0 < \tau < 1$ -re. Mivel $k = 0, 1, \dots, n$ -re $T^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)$, azt kapjuk, hogy $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$. Az M választásából következik, hogy $g(1) = 0$. Rolle tétele szerint $g'(\tau_1) = 0$ valamely $0 < \tau_1 < 1$ -re. Mivel $g'(0) = 0$, hasonlóan következik, hogy $g''(\tau_2) = 0$ valamely $0 < \tau_2 < \tau_1$ -re; $n+1$ lépés után kapjuk a tételt. $\square$

4.2.23. Tétel. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 1$, az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -szer differenciálható x -ben, $f^{(n)}(x) \neq 0$, de $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$. Ekkor

- (1) ha $f^{(n)}(x) > 0$ és n páros, akkor f -nek lokális minimuma van x -ben;
- (2) ha $f^{(n)}(x) < 0$ és n páros, akkor f -nek lokális maximuma van x -ben;
- (3) ha n páratlan, akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke x -ben.

Bizonyítás. A maradéktag nélküli Taylor-formula szerint

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h^n} \rightarrow \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \quad \text{ha } h \rightarrow 0,$$

így ha (1) fennáll, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x+h) > f(x)$, ha $0 < h < \delta$ és $f(x+h) < f(x)$, ha $-\delta < h < 0$. Hasonlóan adódik (2) és (3). $\square$

4.2.24. Aszimptóták. Szemléletesen, ezek olyan $ax + by = c$, $|a| + |b| \neq 0$ egyenletű egyenesek, amelyek a valós változós valós értékű $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjának „végtelen távoli érintői”. Pontosabban, ha $b \neq 0$, akkor az $x \mapsto g(x) = c/b - (a/b)x$ egyenes az f aszimptótája, ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, vagy ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Ha $b = 0$, akkor az $ax = c$ egyenletű egyenes akkor aszimptótája f -nek, ha az f jobb vagy bal oldali határértéke a c/a helyen $+\infty$ vagy $-\infty$.

Integrálszámítás

5.1 Primitív függvények

5.1.1. Primitív függvény. Legyen $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$. Az $f: D \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvény *primitív függvényén* vagy *határozatlan integrálján* egy olyan $F: D \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvényt értünk, amelynek deriváltja az f . A primitív függvény nem egyértelmű, hiszen ha F az f egy primitív függvénye, akkor akármilyen $c \in \mathbb{K}_2$ konstansra $F + c$ is. Az f összes primitív függvényeinek halmazát $\int f$ vagy $\int f(x) dx$ fogja jelölni. Az x *integrációs változó* helyett más betű is állhat.

5.1.2. Tagonkénti integrálás határozatlan integrálokra. Ha $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $c \in \mathbb{K}_2$, és az $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f + cg$ függvénynek is és

$$\int (f + cg) = \int f + c \int g.$$

Bizonyítás. Legyen F az f függvény, G pedig a g függvény primitív függvénye. Ekkor $(F + cG)' = f + cg$, így $F + cG$ az $f + cg$ primitív függvénye. Megfordítva, legyen H az $f + cg$ egy primitív függvénye. Meg kell mutatnunk, hogy előáll $F + cG$ alakban, ahol F az f függvény, G pedig a g függvény primitív függvénye. Legyen G a g tetszőleges primitív függvénye, és legyen $F := H - cG$. Nyilván $F' = f + cg - cg = f$. $\square$

5.1.3. Parciális integrálás határozatlan integrálokra. Legyen $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, és tegyük fel, hogy az $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvények differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Ha az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $g'f$ függvénynek is és

$$\int g'f = fg - \int f'g.$$

Bizonyítás. Legyen H az $f'g$ tetszőleges primitív függvénye. Ekkor

$$(fg - H)' = f'g + g'f - f'g = g'f,$$

így $g'f$ -nek a jobb oldal minden eleme primitív függvénye. Felcserélve f és g szerepét, kapjuk a másik irányú tartalmazást. $\square$

5.1.4. Helyettesítéssel integrálás határozatlan integrálokra. Tegyük fel, hogy $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$, a $g \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvény differenciálható értelmezési tartományán, az $f \in \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_3$ függvénynek pedig létezik primitív függvénye, $\text{rng}(g) \subset \text{dmn}(f)$, továbbá g kölcsönösen egyértelmű és g^{-1} is differenciálható az értelmezési tartományán. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

A tétel állítása érvényben marad akkor is, ha nem tesszük fel, hogy g kölcsönösen egyértelmű és g^{-1} is differenciálható az értelmezési tartományán, de ekkor a bizonyítás bonyolultabb. Ennek az általánosabb változatnak az a speciális esete, amikor $\text{dmn}(g) \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, megkapható a következő tételből.

Bizonyítás. Legyen F az f egy primitív függvénye. A g értelmezési tartományán mindenütt $(F \circ g) = (f \circ g) \cdot g'$, így $(f \circ g) \cdot g'$ -nek van primitív függvénye, és a jobb oldal minden eleme eleme a bal oldalnak is. Vegyük észre, hogy eddig még nem használtuk ki, hogy g kölcsönösen egyértelmű és g^{-1} is differenciálható az értelmezési tartományán.

Most legyen H egy primitív függvénye az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek. Ekkor

$$(H \circ g^{-1})' = (f \circ g \circ g^{-1}) \cdot (g' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})'.$$

Mivel $g \circ g^{-1}$ az identikus leképezés, differenciálással $(g' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})' \equiv 1$, így $H \circ g^{-1}$ deriváltja f , azaz $H \circ g^{-1}$ az f primitív függvénye. Innen következik az állítás. $\square$

5.1.5. Megjegyzés. Az F függvény valamely x_0 helyen vett $F(x_0)$ helyettesítési értékét szokás az $F(x)|_{x=x_0}$ szimbólummal is jelölni. Ezt a jelölést felhasználva az előbb igazolt tétel állítása

$$\int f(x) dx|_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t) dt, \quad \text{ha } t \in \text{dmn}(g)$$

alakba írható. Ez a képlet úgy jegyezhető meg, hogy az $x = g(t)$ helyettesítést alkalmazva x helyébe $g(t)$ -t, a dx helyébe pedig a $dx/dt = g'(t)$ összefüggésből „átrendezéssel” adódó $dx = g'(t) dt$ kifejezést kell írni. A fenti összefüggés $t = g^{-1}(x)$ helyettesítéssel

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt|_{t=g^{-1}(x)}, \quad \text{ha } x \in \text{rng}(g)$$

alakba írható.

5.1.6. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, és F, F_1 az $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ függvény két primitív függvénye, akkor $F_1 - F$ konstans I -n. Intervallumon tehát $\int f = F + c$, $c \in \mathbb{K}$.

A határozott integrál felhasználásával meg fogjuk mutatni, hogy intervallumon minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

Bizonyítás. Az $F_1 - F$ deriváltja nulla I -n, így ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $F_1 - F$ konstans. A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben ugyanezt kapjuk $F_1 - F$ valós és képzetes részére. $\square$

5.1.7. Következmény: alapintegrálok. A számegyenesen az alábbi valós értékű függvényekre

$$(1) \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}, \text{ akkor } \int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + c,$$

$$(2) \quad \int 1/(1+x^2) dx = \arctg(x) + c,$$

$$(3) \quad \int e^x dx = e^x + c,$$

$$(4) \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c,$$

$$(5) \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + c,$$

$$(6) \quad \int \text{sh}(x) dx = \text{ch}(x) + c,$$

$$(7) \quad \int \operatorname{ch}(x) dx = \operatorname{sh}(x) + c,$$

$$(8) \quad \int 1/\operatorname{ch}^2(x) dx = \operatorname{th}(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. A $]-\infty, 0[$ vagy $]0, +\infty[$ intervallumokon

$$(9) \quad \text{ha } n = -2, -3, \dots \text{ akkor } \int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + c,$$

$$(10) \quad \int 1/x dx = \ln(|x|) + c,$$

$$(11) \quad \int 1/\operatorname{sh}^2(x) dx = \operatorname{cth}(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. A $]0, +\infty[$ intervallumon

$$(12) \quad \text{ha } -1 \neq \mu \in \mathbb{R} \text{ akkor } \int x^\mu dx = x^{\mu+1}/(\mu+1) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. A $]-1, +1[$ intervallumon

$$(13) \quad \int 1/\sqrt{1-x^2} dx = \arcsin(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. A $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumok bármelyikén

$$(14) \quad \int 1/\sin^2(x) dx = -\operatorname{ctg}(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. A $](k-1/2)\pi, (k+1/2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumok bármelyikén

$$(15) \quad \int 1/\cos^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. $\square$

5.1.8. Megjegyzés. Nem intervallumon értelmezett függvényre az előző tétel nem marad igaz. Például az $x \mapsto 1/x$ függvénynek minden $a, b \in \mathbb{R}$ -re az $f_{a,b}(x) = a + \ln|x|$, ha $x > 0$, $f_{a,b}(x) = b + \ln|x|$, ha $x < 0$ összefüggéssel értelmezett függvény primitív függvénye.

5.1.9. Példák. (1) Helyettesítéses integrálással kaphatjuk, vagy közvetlenül észrevesszük, hogy $x \mapsto g'(x)g(x)^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ egy primitív függvénye $x \mapsto g(x)^{\mu+1}/(\mu+1)$, ha $\mu \neq -1$ és $x \mapsto \ln|g(x)|$, ha $\mu = -1$.

(2) Hasonlóan $x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$ egy primitív függvénye $x \mapsto e^{g(x)}$.

(3) Az $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$, $\alpha \neq 0$ függvényt $x \mapsto (1/\alpha)f(\alpha x + \beta)\alpha$ alakba írva látjuk, hogy $x \mapsto F(\alpha x + \beta)/\alpha$ egy primitív függvénye, ahol F az f primitív függvénye.

(4) Az $\int x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^+$ integrálban $f(x) = x^n$, $g'(x) = e^x$ választással, parciális integrálással n -et csökkenthetjük.

(5) Az $\int x^m \ln^n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^+$ integrálban, $f'(x) = x^m$, $g(x) = \ln^n(x)$ választással, parciális integrálással n -et csökkenthetjük.

(6) Az $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$ integrálok kiszámolhatók az $f'(x) = e^{\alpha x}$ választással végzett parciális integrálások után kapott egyenletrendszert megoldva az ismeretlen integrálokra. Még egyszerűbb az $\int e^{(\alpha+i\beta)x} dx$ integrál valós és képzetes részét kiszámítani.

(7) Az $\int \operatorname{arctg}(x) dx$ integrált $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $g'(x) \equiv 1$ választással, parciális integrálással számíthatjuk ki. Ugyanígy kezelhető az $\int \arcsin(x) dx$ integrál.

5.1.10. Tétel. Hatványsor összefüggvényének a konvergenciatartományon létezik primitív függvénye.

A következmény felhasználható integrálok közelítésére.

Bizonyítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x, c, a_n \in \mathbb{K}$ hatványsor összegfüggvényének tetszőleges $a_{-1} \in \mathbb{K}$ -ra

$$a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

egy primitív függvénye a konvergenciatartományon: Mivel a tagonkénti differenciálás nem változtatja a konvergenciasugarat, a tagonkénti integrálás sem változtathatja. $\square$

5.1.11. A logaritmus függvény hatványsorai. A végtelen mértani sor integrálásával és az $x = 0$ helyen vett függvényértékeket összehasonlítva az előző tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

ha $x \in]-1, 1[$. Szorozva -1 -gyel és x helyére $-x$ -et írva,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k},$$

ha $x \in]-1, 1[$. Számolásra alkalmasabb a fenti két összefüggés számtani közepeként kapott

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

ha $x \in]-1, 1[$ összefüggés. Például $x = 1/3$ választással, 42-ig összegezve, és az elhagyott tagok összegét mértani sorral becsülve,

$$\ln 2 = 0,6931471805599453094172321214581765680755 \dots$$

Egyébként $\ln(1+x)$ hatványsorából Abel tételét felhasználva $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \dots = \ln(2)$.

5.1.12. Az arctg függvény hatványsora. Tudjuk, hogy az arctg függvény differenciálható és deriváltja

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

A végtelen mértani sorban $-x^2$ -et helyettesítve, majd a kapott sort tagonként integrálva, végül az $x = 0$ helyen vett helyettesítési értékeket összehasonlítva,

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in]-1, 1[$.

5.1.13. A π kiszámítása. Ha $\operatorname{tg} z_1, \operatorname{tg} z_2, \operatorname{tg}(z_1 + z_2)$ értelmezve vannak, akkor

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2)}{\cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)} = \frac{\operatorname{tg}(z_1) + \operatorname{tg}(z_2)}{1 - \operatorname{tg}(z_1) \operatorname{tg}(z_2)},$$

ez a tg függvény *addíciós képlete*. Innen $\operatorname{tg}(2 \arctg(1/5)) = (2/5)/(1 - 1/25) = 5/12$ és $\operatorname{tg}(4 \arctg(1/5)) = (10/12)/(1 - 25/144) = 120/119$. Ugyanígy

$$\operatorname{tg}(4 \arctg(1/5) - \arctg(1)) = (120/119 - 1)/(1 + 120/119) = 1/239,$$

vagyis $\pi/4 = \arctg 1 = 4 \arctg(1/5) - \arctg(1/239)$. Az $x = 1/5$ esetben $\arctg$ sorát $n = 27$ -ig, az $x = 1/239$ esetben $n = 7$ -ig összeadva, mindkét esetben a hibát az első elhagyott taggal becsülve, azt kapjuk, hogy

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971 \dots$$

5.1.14. Newton binomiális sora. Ha $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ rögzített, akkor

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

ha $x \in]-1, 1[$, ahol

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

* **Bizonyítás.** A jobb oldali sor $n+1$ -edik és n -edik tagja abszolút értékének hányadosa $|n-\alpha||x|/(n+1) \rightarrow |x|$, tehát $|x| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens, azaz a konvergenciasugár 1. Legyen a sor összege $f(x)$. Mivel $f(x)/(1+x)^\alpha$ deriváltja

$$\frac{(1+x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}{(1+x)^{2\alpha}},$$

és a számláló $(1+x)^{\alpha-1}$ -szer

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n (1+x) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= -\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (n-\alpha) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\ &= -\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (n-\alpha) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha}{n} (n-\alpha) + \binom{\alpha}{n+1} (n+1) \right) x^n = 0, \end{aligned}$$

mert a nagy zárójelben álló kifejezés nulla. Így a két oldal hányadosa konstans, és mivel az $x = 0$ helyen mindkettő 1, a két oldal megegyezik, ha $|x| < 1$. $\square$

5.1.15. Az arcsin függvény hatványsora. Tudjuk, hogy az arcsin függvény differenciálható $] -1, 1[$ -en és deriváltja

$$\arcsin'(x) = 1/\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Az $(1 + y)^{-1/2}$ függvény sorában y helyére $-x^2$ -et helyettesítve, majd a kapott sort tagonként integrálva, végül az $x = 0$ helyen vett helyettesítési értékeket összehasonlítva,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in] -1, 1[$.

5.1.16. Elemien integrálható függvények. A (valós változós, valós értékű) konstans függvények, az identikus leképezés, valamint az $\exp$, $\ln$, $\sin$ és $\arcsin$ függvényekből véges sok összeadás, kivonás, szorzás, osztás, függvényösszetétel és nyílt halmazra való leszűkítés alkalmazásával kapható függvényeket szokás *elemi függvényeknek* nevezni. Például a $\cos$, tg , ctg , $\sec$, cosec , sh , ch , th , cth , sech , ch , arccos , arctg , arctg , arcsec , $\operatorname{arccosec}$, arsh , arch , arth , arsech , $\operatorname{arcosech}$ függvények és ha $\mu \in \mathbb{R}$, akkor az $x \mapsto x^\mu$, $x \in]0, +\infty[$ leképezés elemi függvények.

Míg a differenciálási szabályok szerint elemi függvények deriváltja is elemi függvény, vannak olyan elemi függvények, amelyeknek primitív függvényei nem elemi függvények. Megmutatható például, hogy az $\mathbb{R}$ -en értelmezett $x \mapsto \exp(x^2)$, $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \sin(x^2)$, a $]0, +\infty[$ -en értelmezett $x \mapsto \sin(x)/x$, $x \mapsto \cos(x)/x$, $x \mapsto \exp(x)/x$, $x \mapsto \sqrt{x^3 + 1}$, és az $]1, +\infty[$ -en értelmezett $x \mapsto 1/\ln(x)$ függvények primitív függvényei nem elemi függvények. (Bár primitív függvényeik analitikusak, és a hatványsoruk is könnyen felírható!) Azokat a függvényeket, amelyeknek van olyan primitív függvénye, amely elemi függvény, *elemien integrálható* függvényeknek nevezzük. Be fogjuk látni, hogy a racionális törtfüggvények elemien integrálhatóak.

*** 5.1.17. Segédétel.** Ha f , g és r is $\mathbb{K}$ feletti nem nulla polinomok, az f -nek és g -nek nincs közös gyöke, akkor egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$ feletti u és v polinomok, amelyekre $fu + gv \equiv r$ és $\deg(u) < \deg(g)$. Ha még $\deg(r) < \deg(f) + \deg(g)$ is teljesül, akkor $\deg(v) < \deg(f)$.

Bizonyítás. Először a fokszámkorlát nélkül az $r \equiv 1$ esetben mutatjuk meg u és v létezését. Tekintsük az összes $fu + gv$ alakú polinomok halmazát, és legyen d ennek nem nulla polinomjai közül egy minimális fokszámú, $d = fu + gv$. Feltehetjük, hogy d főegyütthatója 1, mert egyébként végigszorunk a reciprokával. Osszuk el maradékosan az f polinomot d -vel: $f = qd + c$, ahol $\deg(c) < \deg(d)$. Ha $c \not\equiv 0$, akkor visszahelyettesítve $f = q(fu + gv) + c$, ahonnan kifejezve c -t, $c = f(1 - qu) + g(qv)$, ami ellentmond d választásának. Így $c \equiv 0$. Mivel $f = qd$, a d minden gyöke f -nek is. Hasonlóan kapjuk, hogy d minden gyöke g -nek is. Mivel f -nek és g -nek nincs közös gyöke, $d \equiv 1$.

Az általános esetben mindkét oldalt szorozva r -rel, adódik tetszőleges r -re valamilyen u és v létezése, amellyel $r = fu + gv$. Osszuk el u -t maradékosan g -vel: $u = gq + u_0$.

Legyen $v_0 = v + qf$. Nyilván $\deg(u_0) < \deg(g)$ és $f u_0 + g v_0 = f(u - gq) + g(v + qf) = r$. Ha $r = f u_1 + g v_1$ egy másik előállítás, amelyre $\deg(u_1) < \deg(g)$, akkor a két előállítást kivonva egymásból, $f(u_1 - u_0) = g(v_0 - v_1)$. Mivel g minden gyöke (multiplicitással) gyöke $u_1 - u_0$ -nak, de annak foka kisebb mint g foka, $u_1 - u_0 \equiv 0$, ahonnan a bal oldal nulla, és így $v_0 - v_1 \equiv 0$, amivel beláttuk az egyértelműséget. Végül $r = f u + g v$, $\deg(u) < \deg(g)$ esetén $\deg(f u) < \deg(f) + \deg(g)$, így $\deg(v) \geq \deg(f)$ esetén a jobb oldal foka, tehát r foka is legalább $\deg(f) + \deg(g)$. $\square$

5.1.18. Parciális törtekre bontás tétele. Legyen $h = f/g$ racionális törtfüggvény, ahol f és g is $\mathbb{K}$ -beli együtthatós polinomok, g nem nulla. Legyen

$$g = v_1^{n_1} \cdots v_m^{n_m}$$

a g polinom páronként közös komplex gyök nélküli $v_1, \dots, v_m$ tényezőkre való felbontása. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $u_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n_j$ polinomok és olyan q polinom, amelyekre

$$h = \frac{f}{g} = q + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{j,k}}{v_j^k}$$

és $\deg(u_{j,k}) < \deg(v_j)$.

A q és $u_{j,k}$ polinomokat úgy számíthatjuk ki, hogy közös nevezőre hozás után összehasonlítjuk az együtthatókat.

* **Bizonyítás.** Legyen $g_j = v_j^{n_j}$, ha $j = 1, 2, \dots, m$. Először megmutatjuk, hogy egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$ -beli együtthatós q és $f_1, f_2, \dots, f_m$ polinomok, amelyekkel

$$(1) \quad h = \frac{f}{g} = q + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_m}{g_m}$$

és $\deg(f_i) < \deg(g_i)$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m = 1$, az állítás maradékos osztással nyilvánvaló, $f_1 = r$, a g -vel való osztás maradéka. Az általános eset úgy következik, hogy a $g_1, g_2, \dots, g_{m-2}, g_{m-1} g_m$ polinomokra alkalmazva az indukciós feltevést, kapunk egy

$$h = \frac{f}{g} = q + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_{m-2}}{g_{m-2}} + \frac{f^*}{g_{m-1} g_m}$$

előállítást, majd az előző lemmát alkalmazva, kapunk olyan f_{m-1}, f_m polinomokat, amelyekre $f_{m-1} g_m + f_m g_{m-1} \equiv f^*$, amit $g_{m-1} g_m$ -mel osztva kapjuk az indukciós lépést.

Végül vegyük észre, hogy a jobb oldalon szereplő törték u/v^n alakúak, továbbá $\deg(u) < \deg(v^n)$. Ezek a törték egyértelműen felírhatók

$$\frac{u}{v^n} = \frac{u_n}{v^n} + \frac{u_{n-1}}{v^{n-1}} + \cdots + \frac{u_1}{v}$$

alakban, ahol minden u_i fokszáma kisebb, mint v fokszáma. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvaló, egyébként pedig indukcióval következik, ha u -t maradékosan osztjuk v^{n-1} -nel. $\square$

5.1.19. Racionális törtfüggvények integrálása. A valós racionális törtfüggvények elemien integrálhatók.

A bizonyítás konstruktív, módszert ad az integrálásra.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján, mivel az abban szereplő q polinom nyilván elemien integrálható, csak azt kell megmutatni, hogy az u/v^n alakú törtek elemien integrálhatók, ahol v elsőfokú főpolinom vagy valós gyök nélküli másodfokú főpolinom és $\deg(u) < \deg(v)$.

Ha v elsőfokú, akkor u konstans, így $n = 1$ esetén u/v egy primitív függvénye $u \ln |v|$, az $n > 1$ esetben pedig u/v^n egy primitív függvénye $uv^{1-n}/(1-n)$.

Ha v másodfokú, akkor u legfeljebb elsőfokú, így az $n = 1$ esetben alkalmas $b, c \in \mathbb{R}$ valós számokkal $u = bv' + c$, azaz $u/v = bv'/v + c/v$. A v'/v egy primitív függvénye $\ln v$. Az $1/v(x) = 1/(x^2 + \alpha x + \beta)$ függvény primitív függvényét úgy kapjuk, hogy teljes négyzetté alakítunk, $v(x) = (x + \alpha/2)^2 + \gamma^2$, ahol $\gamma^2 = \beta - \alpha^2/4 > 0$, majd $t = (x + \alpha/2)/\gamma$ helyettesítést alkalmazunk. Így azt kapjuk, hogy $1/v$ egy primitív függvénye $x \mapsto \arctg((x + \alpha/2)/\gamma)/\gamma$.

Ha v másodfokú és $n > 1$, akkor észrevesszük, hogy

$$\frac{\gamma x + \delta}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n} = \frac{d}{dx} \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{\varepsilon_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}},$$

ahol

$$\gamma_1 = \frac{1}{n-1} \frac{\alpha\gamma - 2\delta}{\alpha^2 - 4\beta}, \quad \delta_1 = \frac{1}{n-1} \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2 - 4\beta}, \quad \varepsilon_1 = (2n-3)\gamma_1.$$

Ennek az észrevételnek az alapján n eggyel csökkenthető. $\square$

5.1.20. Racionális törtfüggvény integrálására visszavezethető integrálok.

Az $\int r(e^x) dx$ integrál kiszámítása, ahol r valós racionális törtfüggvény, $x = \ln t$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza.

Az $\int r(\sin x, \cos x) dx$ integrál kiszámítása, ahol r két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $t = \operatorname{tg}(x/2)$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza, mert

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x &= 2 \arctg t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Bebizonyítható, hogy ha $r(-u, -v) = r(u, v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$ -re, akkor a $t = \operatorname{tg} x$, ha $r(u, -v) = -r(u, v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$ -re, akkor a $t = \sin x$, ha pedig $r(-u, v) = -r(u, v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$ -re, akkor a $t = \cos x$ helyettesítés is célhoz vezet.

Az $\int r(x, \sqrt[n]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)}) dx$ integrál kiszámítása, ahol r két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, a

$$t = \sqrt[n]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)}$$

helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza, mert

$$\begin{aligned} t^n &= \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \\ x &= \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, \\ \frac{dx}{dt} &= nt^{n-1} \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma t^n)^2}. \end{aligned}$$

Az $\int r(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) dx$ integrál kiszámítása, ahol r két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza. Az egyik megoldás az ilyen integrálok kezelésére lineáris helyettesítéssel elérni, hogy a négyzetgyök alatt $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, illetve $1 - x^2$ legyen, majd az $x = \operatorname{sh} t$, $x = \operatorname{ch} t$, illetve $x = \sin t$ helyettesítést alkalmazni. Egy másik megoldás, amely közvetlenül célhoz vezet, az úgynevezett *Euler-féle helyettesítések* alkalmazása. Ha $\alpha > 0$, akkor a $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \sqrt{\alpha}x$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ugyanis

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (\sqrt{\alpha}x + t)^2 = \alpha x^2 + 2\sqrt{\alpha}tx + t^2,$$

ahonnan $x = (t^2 - \gamma)/(\beta - 2\sqrt{\alpha}t)$. Ha $\gamma > 0$, akkor a $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt + \sqrt{\gamma}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 t^2 + 2\sqrt{\gamma}xt + \gamma,$$

ahonnan $x = (2t\sqrt{\gamma} - \beta)/(\alpha - t^2)$. Végül, ha $\alpha < 0$, és $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ egynél több pontban értelmezve van, akkor az $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ polinomnak két különböző valós gyöke van, mondjuk x_1 és x_2 . Nyilván $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$. Alkalmazzuk a $\sqrt{\alpha(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$ helyettesítést. Ekkor $\alpha(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2$, ahonnan $x = (\alpha x_2 - t^2 x_1)/(\alpha - t^2)$.

5.2 Határozott integrál

5.2.1. Definíció. Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztásán* egy olyan véges $x_0, x_1, \dots, x_n$ sorozatot értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Az $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontok a felosztás *osztópontjai*, az $[x_{j-1}, x_j]$ intervallumok pedig az $[a, b]$ -nek P -hez tartozó *részintervallumai*. Egy P *pontozott felosztás* alatt egy felosztást értünk, amelynek minden $[x_{j-1}, x_j]$ részintervallumához meg van adva egy $x_{j-1} \leq t_j \leq x_j$ pont. Legyen $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy a $([x_{j-1}, x_j], t_j)$ pontozott részintervallum δ -*finom*, ha $[x_{j-1}, x_j] \subset \mathcal{U}_{\delta(t_j)}(t_j)$; a P pontozott felosztás δ -*finom*, ha minden pontozott részintervalluma δ -finom. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény. Az $[a, b]$ intervallum P pontozott felosztásához hozzárendeljük az

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

Riemann-összeget. Azt mondjuk, hogy az f függvény *integrálható* $[a, b]$ -n, és *integrálja* S , ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy minden δ -finom P pontozott felosztásra $|S - s(f, P)| < \varepsilon$.

Az így kapott integrálfogalom jóval általánosabb, mint a szokásos Riemann-integrál, amit akkor kapunk, ha δ nem függvény, hanem konstans.

5.2.2. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Minden $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényhez van olyan P pontozott beosztása $[a, b]$ -nek, amely δ -finom.

Bizonyítás. Tekintsük azon $a \leq x \leq b$ számok X halmazát, amelyekhez $[a, x]$ -nek van olyan pontozott beosztása, amely δ -finom. Mivel $\delta(a) > 0$, X tartalmazza a egy környezetét, így nem üres. Legyen $c = \sup X$. Ha $c < b$ lenne, akkor $\delta(c) > 0$ miatt ellentmondást kapnánk. $\square$

5.2.3. Tétel: az integrál egyértelműsége. Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Ha S' és S'' is az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény integrálja, akkor $S' = S''$.

A továbbiakban az integrált $\int_a^b f$ jelöli.

Bizonyítás. Az $\varepsilon = |S' - S''|/2$ -höz léteznek megfelelő $\delta', \delta'': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvények. Legyen $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Választva egy δ -finom pontozott beosztást, ellentmondást kapunk. $\square$

5.2.4. Tétel: komplex értékű függvények integrálja. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha $\Re(f)$ és $\Im(f)$ integrálhatóak, és ekkor

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f).$$

Bizonyítás. Ha f integrálható és integrálja S , akkor $|S - s(f, P)| < \varepsilon$ esetén $|\Re(S) - s(\Re(f), P)| < \varepsilon$ és $|\Im(S) - s(\Im(f), P)| < \varepsilon$, így $\Re(f)$ és $\Im(f)$ is integrálhatóak és integráljuk $\Re(S)$ illetve $\Im(S)$. Megfordítva, ha $\Re(f)$ és $\Im(f)$ integrálhatóak, integráljuk S' illetve S'' , akkor az $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó δ' illetve δ'' függvények δ minimumát véve, δ -nál finomabb P -re $|S' - s(\Re(f), P)| < \varepsilon$ és $|S'' - s(\Im(f), P)| < \varepsilon$, ahonnan $S = S' + iS''$ jelöléssel $|S - s(f, P)| < 2\varepsilon$, tehát f integrálható. $\square$

5.2.5. Tétel: az integrál linearitása. Ha $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in \mathbb{K}$ és az $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvények integrálhatók $[a, b]$ -n, akkor az $f + g$ és cf függvények is integrálhatóak $[a, b]$ -n és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Legyen S' illetve S'' az f illetve a g integrálja, $S = S' + S''$, és δ', δ'' az adott $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó függvények. Ha P finomabb a δ' és δ'' minimumánál, akkor $|S - s(f + g, P)| < 2\varepsilon$. A második állítás következik abból, hogy $s(cf, P) = cs(f, P)$. $\square$

5.2.6. Tétel: az integrál nemnegativitása. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvény integrálható, akkor $\int_a^b f \geq 0$.

Bizonyítás. Következik abból, hogy minden Riemann-összeg nemnegatív. $\square$

5.2.7. Következmény: az integrál monotonitása. Ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Bizonyítás. Következik abból, hogy $g - f$ nemnegatív. $\square$

* **5.2.8. Tétel: Cauchy-kritérium.** Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, hogy bármely δ -finom P', P'' pontozott beosztásokra $|s(f, P') - s(f, P'')| < \varepsilon$.

Bizonyítás. Ha f integrálható, akkor ε -hoz a definíció szerint δ függvényt választva, azt kapjuk, hogy $|s(f, P') - s(f, P'')| < 2\varepsilon$. A megfordítást az előző tétel szerint elég valós értékű függvényre bizonyítani. Adott $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényre legyen $M(\delta)$ az összes δ -nál finomabb P pontozott beosztásra vett $s(f, P)$ Riemann-összegek szupréma, és legyen S az összes $M(\delta)$ bővített valós számok infimuma. Választva adott $\varepsilon > 0$ -hoz egy, a feltételnek eleget tévő δ függvényt, és egy δ -nál finomabb P pontozott felosztást, a feltételből $M(\delta) \leq s(f, P) + \varepsilon$, így $S \leq s(f, P) + \varepsilon$. Ha $S < s(f, P) - \varepsilon$ lenne, akkor létezne olyan $\delta': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre $M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$. Ha δ'' a δ és a δ' minimuma, akkor egy δ'' -nél finomabb P'' pontozott beosztásra $s(f, P'') \leq M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$, ami ellentmondás, mert P és P'' is δ -finomak. Így $|S - s(f, P)| \leq \varepsilon$ bármely δ -finom P -re. $\square$

* **5.2.9. Segédteétel.** Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Ha egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -re és $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényre tetszőleges δ -finom P_1, P_2 pontozott beosztásaira $[a, b]$ -nek $|s(f, P_1) - s(f, P_2)| \leq \varepsilon$, akkor $a \leq a' < b' \leq b$ esetén is tetszőleges δ -finom P'_1, P'_2 pontozott beosztásaira $[a', b']$ -nek $|s(f, P'_1) - s(f, P'_2)| \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a < a'$ és $b' < b$. Válasszunk egy δ -nál finomabb P_3 pontozott felosztását $[a, a']$ -nek és egy δ -nál finomabb P_4 pontozott felosztását $[b', b]$ -nek, és legyen P_1 a P_3 , a P'_1 és a P_4 egyesítése, P_2 pedig a P_3 , a P'_2 és a P_4 egyesítése. Nyilván $s(f, P_1) - s(f, P_2) = s(f, P'_1) - s(f, P'_2)$. A többi eset bizonyítása hasonló. $\square$

5.2.10. Tétel: az integrál intervallum-additivitása. Ha $a < c < b$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény integrálható $[a, b]$ -n, akkor integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n is és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

* **Bizonyítás.** Az előző segédteétel szerint, ha adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, hogy bármely két δ -finom P_1 és P_2 felosztásra $|s(f, P_1) - s(f, P_2)| \leq \varepsilon$, akkor ugyanez $[a, c]$ és $[c, b]$ δ -finom pontozott felosztásaira is teljesül. Innen f integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n is. Legyen P' egy δ -finom pontozott felosztása $[a, c]$ -nek, P'' pedig $[c, b]$ -nek. Ekkor $P = P' \cup P''$ egy δ -finom pontozott felosztása $[a, b]$ -nek, és $s(f, P) = s(f, P') + s(f, P'')$, továbbá mivel az integrálközelítő összeg tetszőlegesen közel lehet az integrálhoz, $|s(f, P) - \int_a^b f| \leq \varepsilon$, $|s(f, P') - \int_a^c f| \leq \varepsilon$ és $|s(f, P'') - \int_c^b f| \leq \varepsilon$. Innen

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \leq 3\varepsilon. \square$$

5.2.11. Tétel. Ha $-\infty < a < c < b < +\infty$, és az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n, akkor integrálható $[a, b]$ -n is.

* **Bizonyítás.** Legyen f integrálható, integrálja $[a, c]$ -n illetve $[c, b]$ -n S' illetve S'' ; adott $\varepsilon > 0$ -ra legyenek δ' és δ'' az $\varepsilon/2$ -höz megfelelő függvények $[a, c]$ -n illetve $[c, b]$ -n. Legyen $\delta(t) = \min\{\delta'(t), c - t\}$, ha $a \leq t < c$, $\delta(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}$, ha $t = c$ és $\delta(t) = \min\{\delta''(t), t - c\}$, ha $c < t \leq b$. Ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ egy tetszőleges δ -finom pontozott beosztás osztópontjai, akkor valamilyen k -ra $c \in]x_{k-1}, x_k]$. A δ konstrukciója miatt $t_k = c$ kell legyen, és $x_{k-1} < c < x_k$ esetén kettévágva az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumot a c ponttal, és mindkét részintervallumban c -t választva kijelölt pontnak, a Riemann-összeg nem változik. A kapott Riemann-összeg 2ε -nál kevesebbet tér el $S' + S''$ -től, így f integrálható $[a, b]$ -n és integrálja $S' + S''$. $\square$

5.2.12. Definíció. Ha $-\infty < b < a < +\infty$, legyen $\int_a^a f = 0$ és ha a jobb oldal értelmelve van legyen $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Ha $-\infty < u < v < +\infty$ és az $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény integrálható, akkor esetszétválasztással azonnal adódik, hogy $a, b, c \in [u, v]$ esetén $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. Az is teljesül, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ -re az $\int_a^b f(x) dx$ és $\int_{a+c}^{b+c} f(x+c) dx$, illetve az $\int_a^b cf(cx) dx$ és $\int_{ac}^{bc} f(x) dx$ integrálok egyszerre léteznek és egyenlőek, mert az integrálközelítő összegek egyenlőek.

5.2.13. Nullahalmazok. Jelölje $\mathbb{R}$ egy korlátos I intervallumának a hosszát $|I|$. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan korlátos intervallumokból álló megszámlálható I_j intervallumrendszer, amely lefedi H -t, és amelyre $\sum_j |I_j| < \varepsilon$. Ha valamilyen feltétel egy nullahalmaz kivételével teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* teljesül.

Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz. Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz, hiszen az elsőt lefedve egy $\varepsilon/2$ -nél kisebb összhosszúságú megszámlálható intervallumrendszerrel, a másodikat lefedve egy $\varepsilon/4$ -nél kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel stb., az intervallumrendszerek egyesítése olyan megszámlálható intervallumrendszer, amelynek összhossza kisebb, mint ε . Speciálisan, megszámlálható halmaz nullahalmaz.

5.2.14. Lebesgue-feltétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ egy korlátos függvény. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor integrálható.

* **Bizonyítás.** A Cauchy-kritériumot fogjuk használni. Tegyük fel, hogy $|f| < K$. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f szakadási pontjainak halmaza nullahalmaz, lefedhető egy I_m , $m = 1, 2, \dots$ megszámlálható nyílt intervallumrendszerrel, amelynek összhossza kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$. Legyen $t \in [a, b]$. Ha $t \in \bigcup_{m=1}^\infty I_m$, akkor legyen $\delta(t)$ olyan kicsi, hogy $\bigcup_{\delta(t)}(t)$ teljesen benne legyen valamelyik I_m -ben. Egyébként f folytonos t -ben: válasszuk $\delta(t)$ -t úgy, hogy $|x - t| < 2\delta(t)$, $x \in [a, b]$ esetén $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(2b - 2a)$ teljesüljön.

Legyenek P' és P'' pontozott δ -finom beosztásai $[a, b]$ -nek. Ha P' osztópontjai $a = x'_0 < x'_1 < \dots, x'_{n'} = b$, a P'' osztópontjai pedig $a = x''_0 < x''_1 < \dots, x''_{n''} = b$, vegyük az osztópontok unióját és legyen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ az így kapott új beosztás. Minden k -ra $[x_{k-1}, x_k]$ részhalmaza pontosan egy $[x'_{i-1}, x'_i]$ és pontosan egy $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallumnak; legyen $\tau'_k = t'_i$ és $\tau''_k = t''_j$. Nyilván $s(f, P') = \sum_{k=1}^n f(\tau'_k)(x_k - x_{k-1})$ és $s(f, P'') = \sum_{k=1}^n f(\tau''_k)(x_k - x_{k-1})$, így a két Riemann-összeg különbségének becsléséhez

$$\sum_{k=1}^n (f(\tau'_k) - f(\tau''_k))(x_k - x_{k-1})$$

összeg abszolút értékét kell megbecsülnünk.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre f folytonos a τ'_k és a τ''_k pontban is, tekintsük az $[x'_{i-1}, x'_i]$ intervallumot, ha ez hosszabb, mint az $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallum. Mivel $\tau'_k = t'_i$ és $\tau''_k = t''_j$ távolsága kisebb, mint $2\delta(t'_i)$, egy ilyen tag kisebb, mint $\varepsilon(x_k - x_{k-1})/(2b - 2a)$. Ha az $[x'_{i-1}, x'_i]$ intervallum nem hosszabb, mint az $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallum, akkor az utóbbit tekintve kapjuk ugyanezt. Így az összes ilyen típusú tag összege kisebb, mint $\varepsilon/2$.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre f nem folytonos a τ'_k vagy a τ''_k pontban, vegyük észre, hogy az egész $[x_{k-1}, x_k]$ intervallum benne van valamely I_m -ben. Minden ilyen intervallumhoz válasszunk egy I_m -et. Egy adott I_m -hez tartozó részintervallumok összhossza nyilván legfeljebb I_m hossza, így az összes ilyen intervallumok összhossza kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$, tehát a megfelelő tagok abszolút értékeinek összege legfeljebb $\varepsilon/2$.

□

5.2.15. Következmény. Ha f folytonos, akkor integrálható. Ha f monoton, akkor integrálható. □

5.2.16. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvények. Ha f és g majdnem mindenütt megegyeznek, és f integrálható, akkor g is és $\int_a^b g = \int_a^b f$.

A tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóság és az integrál szempontjából a nullahalmazok „elhanyagolhatóak”. Így olyan függvények integráljáról is beszélhetünk, amelyek csak majdnem mindenütt vannak értelmezve.

* **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, hogy minden δ -nál finomabb pontozott beosztásra az f -hez tartozó Riemann-összeg $\varepsilon/2$ -nél kevesebbet térjen el a S integráltól. Legyen N_k azon pontok halmaza, amelyekben f és g különbségének abszolút értéke nagyobb, mint $k - 1$, de nem nagyobb, mint k , ahol $k = 1, 2, \dots$. Mivel N_k nullahalmaz, választhatunk olyan $I_{k,m}$, $k = 1, 2, \dots$ nyílt intervallumokat, amelyek lefedik N_k -t, és összhosszuk kisebb, mint $\varepsilon/(k2^{k+2})$. Ha $t \in [a, b]$ benne van valamelyik $I_{k,m}$ intervallumban, legyen $0 < \delta'(t) \leq \delta(t)$ olyan kicsi, hogy a t pont $\delta'(t)$ sugarú környezete benne legyen egy $I_{k,m}$ intervallumban, egyébként legyen $\delta'(t) = \delta(t)$. Legyen P egy δ' -nél finomabb pontozott beosztása $[a, b]$ -nek. Azokra a t_i -kre, amelyekre $f(t_i)$ és $g(t_i)$ megegyeznek, a megfelelő tag f és g Riemann-összegében megegyezik. Minden más t_i benne van valamely $I_{k,m}$ -ben. Minden t_i -hez rögzítve egy ilyen k, m indexpárt, az adott indexpárhoz tartozó intervallumok összhossza kisebb, mint $I_{k,m}$ hossza, a függvényértékek különbsége pedig legfeljebb k . Összegezve m -re, majd k -ra, azt kapjuk, hogy f és g integrálközelítő összege kevesebbet tér el S -től, mint ε . □

5.2.17. Megjegyzés. A $[0, 1]$ intervallumon a Dirichlet-függvény sehol sem folytonos, mégis integrálható, mert majdnem mindenütt nulla. (Ez a függvény nem Riemann-integrálható.)

5.2.18. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ integrálható. Legyen

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{ha } a \leq x \leq b.$$

Ekkor F folytonos $[a, b]$ -n, továbbá ha f folytonos az $[a, b]$ egy x pontjában, akkor F differenciálható x -ben és $F'(x) = f(x)$.

* **Bizonyítás.** Legyen $a \leq x < b$ és $x < y < b$. Válasszunk $[a, b]$ -n adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ -et. Az 5.2.9 segédtétel szerint ha P és P' is δ -nál finomabb pontozott beosztásai $[x, y]$ -nak, akkor a megfelelő Riemann-összegek különbsége nem nagyobb, mint ε . Legyen $y - x < \delta(x)$, és P' álljon az $[x, y]$ intervallumból, a $t = x$ közbenső ponttal. A P' -höz tartozó Riemann-összeg $f(x)(y - x)$. Mivel a P -hez tartozó Riemann-összeg tetszőlegesen közel lehet $\int_x^y f$ -hez, azt kapjuk, hogy $|\int_x^y f - f(x)(y - x)| \leq \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, $\lim_{y \downarrow x} \int_x^y f = \lim_{y \downarrow x} (F(y) - F(x)) = 0$, azaz F jobbról folytonos x -ben. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy F balról folytonos x -ben, ha $a < x \leq b$.

Most tegyük fel, hogy f folytonos x -ben. Adott $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk olyan $\delta > 0$ -t, hogy $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ teljesüljön, ha $|t - x| < \delta$ és $a \leq t \leq b$. Ha most

$$x - \delta < s \leq x \leq t < x + \delta$$

és $a \leq s < t \leq b$, akkor

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t (f(u) - f(x)) du \right| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy $F'(x) = f(x)$. $\square$

5.2.19. Következmény. Az $\mathbb{R}$ valamely I intervallumán értelmezett $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvénynek létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $c \in I$ tetszőleges és $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, ha $x \in I$. $\square$

5.2.20. Newton–Leibniz-formula. Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ differenciálható, akkor

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

A tételre mint az *integrálszámítás alaptételére* is szokás hivatkozni.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Rögzített $t \in [a, b]$ -hez van olyan $\delta(t) > 0$, hogy $t \neq x \in [a, b]$ esetén

$$\left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} - f'(t) \right| < \varepsilon.$$

Vegyük észre, hogy ha $t - \delta(t) < x \leq t \leq y < t + \delta(t)$, akkor

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - (y - x)f'(t)| &\leq |f(y) - f(t) - (y - t)f'(t)| + |f(t) - f(x) - (t - x)f'(t)| \\ &\leq \varepsilon(y - t) + \varepsilon(t - x) = \varepsilon(y - x). \end{aligned}$$

Legyen $a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b$ egy δ -nál finomabb pontozott beosztása $[a, b]$ -nek. Ekkor a fenti becslés szerint $f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$ legfeljebb $\varepsilon(x_k - x_{k-1})$ távolságra van $f(x_k) - f(x_{k-1})$ -től, így a Riemann-összeg meg legfeljebb $\varepsilon(b - a)$ távolságra van $f(b) - f(a)$ -tól. $\square$

5.2.21. Parciális integrálás határozott integrálokra. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ differenciálható függvények. Ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát $f g$ -re. $\square$

5.2.22. Helyettesítéses integrálás határozott integrálokra. Legyen $a < b$, $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$, és tegyük fel, hogy g differenciálható $[a, b]$ -n. Ha az $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

Bizonyítás. Legyen F az f egy primitív függvénye. Az $F \circ g$ függvény differenciálható $[a, b]$ -n és a deriváltja $(f \circ g) \cdot g'$, így a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy. \square$$

5.2.23. Tétel: improprius integrálás. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény.

- (1) Ha f minden $[c, b]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és $S = \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f$, akkor f integrálható $[a, b]$ -n és $\int_a^b f = S$.
- (2) Ha f minden $[a, c]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és $S = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f$, akkor f integrálható $[a, b]$ -n és $\int_a^b f = S$.

A tétel gyakran hasznos, amikor nem tudjuk közvetlenül az $[a, b]$ intervallumra alkalmazni a Newton–Leibniz-formulát.

* **Bizonyítás.** Csak (1)-et bizonyítjuk, (2) bizonyítása teljesen hasonló. Válasszunk adott $\varepsilon > 0$ -hoz olyan $\eta > 0$ számot, hogy $a < x < b$, $x - a < \eta$ esetén

$$\left| \int_x^b f - f(a)(x - a) - S \right| < \varepsilon/2$$

teljesüljön. Legyen $c_j = a + (b - a)/2^j$, ha $j = 0, 1, \dots$. Ha $j = 1, 2, \dots$, akkor van olyan $\delta_j: [c_{j+1}, c_{j-1}] \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy bármely két δ_j -nél finomabb Riemann-összeg különbsége legfeljebb $\varepsilon/2^{j+2}$. Legyen $0 < \delta(t) \leq \delta_j(t)$ és $\delta(t) < (b - a)/2^{j+1}$, ha $t \in [c_{j+1}, c_{j-1}]$ és legyen $\delta(a) = \eta$. Az $[a, b]$ egy tetszőleges δ -nál finomabb

$$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b$$

pontozott felosztására gyűjtsük össze egy I_j halmazba azokat a i -ket, amelyekre

$$c_j < t_i \leq c_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Mivel minden ilyen i -re $\delta(t_i) < (b-a)/2^{j+1}$, azt kapjuk, hogy $[x_{i-1}, x_i] \subset [c_{j+1}, c_{j-1}]$. Így ha $I_j \neq \emptyset$ akkor az $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in I_j$ intervallumok $[a_j, b_j]$ egyesítésére két tetszőleges Riemann-összeg eltérése legfeljebb $\varepsilon/2^{j+2}$. Innen

$$\left| \int_{a_j}^{b_j} f - \sum_{i \in I_j} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}.$$

Vegyük észre, hogy minden $i > 1$ benne van valamelyik I_j -ben, viszont $i = 1$ egyikben sem. Innen $t_1 = a$, $x_1 < a + \eta$, és $c = x_1$ választással

$$\left| \int_c^b f - \sum_{i=2}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon. \square$$

5.2.24. Példák. (1) A Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha}, & \text{ha } -1 < \alpha < 0; \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Így x^α pontosan akkor integrálható $[0, 1]$ -en, ha $\alpha > -1$, és ekkor

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

(2) Bár

$$\lim_{a \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_a^1 \frac{dx}{x} \right) = 0,$$

az $x \mapsto 1/x$ függvény nem integrálható $[-1, 1]$ -en, és például

$$\begin{aligned} \lim_{a \uparrow 0} \lim_{b \downarrow 0} \left(\int_{-1}^a \frac{dx}{x} + \int_b^1 \frac{dx}{x} \right) &= +\infty, \\ \lim_{b \downarrow 0} \lim_{a \uparrow 0} \left(\int_{-1}^a \frac{dx}{x} + \int_b^1 \frac{dx}{x} \right) &= -\infty. \end{aligned}$$

5.2.25. Tétel: összehasonlító teszt. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és

$$f, g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$$

függvények, amelyekre $f \leq g$.

- (1) Ha f és g minden $[c, b]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, akkor

$$\lim_{c \downarrow a} \int_c^b f \leq \lim_{c \downarrow a} \int_c^b g,$$

így ha g integrálható $[a, b]$ -n, akkor f is, és ha f nem integrálható $[a, b]$ -n, akkor g sem.

- (2) Ha f és g minden $[a, c]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, akkor

$$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f \leq \lim_{c \uparrow b} \int_a^c g,$$

így ha g integrálható $[a, b]$ -n, akkor f is, és ha f nem integrálható $[a, b]$ -n, akkor g sem.

Bizonyítás. Mivel a $c \mapsto \int_c^b f$ illetve $c \mapsto \int_a^c f$ leképezések monotonak, a nemnegatív bővített valós határértékek léteznek, így a határértékek összehasonlítására vonatkozó tételből következik az állítás. $\square$

5.2.26. Következmény: határérték teszt. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ függvények.

- (1) Ha f és g minden $[c, b]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és

$$C = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

akkor $C > 0$ esetén f és g egyszerre integrálhatóak $[a, b]$ -n, $C = 0$ esetén pedig ha g integrálható $[a, b]$ -n, akkor f is.

- (2) Ha f és g minden $[a, c]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és

$$C = \lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

akkor $C > 0$ esetén f és g egyszerre integrálhatóak $[a, b]$ -n, $C = 0$ esetén pedig ha g integrálható $[a, b]$ -n, akkor f is.

Bizonyítás. Csak (1)-et bizonyítjuk, (2) bizonyítása hasonló. Ha $C > 0$, akkor van olyan $a < c < b$, hogy $a < x \leq c$ esetén $C/2 \leq f(x)/g(x) \leq 2C$, így az $[a, c]$ intervallumon alkalmazható az összehasonlító kritérium. Ha $C = 0$, akkor van olyan $a < c < b$, hogy $a < x \leq c$ esetén $0 \leq f(x)/g(x) \leq 1$, így az $[a, c]$ intervallumon alkalmazható az összehasonlító kritérium. $\square$

5.2.27. Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha egy integrálható függvényt szorzunk egy Lipschitz-függvénnyel, a szorzat is integrálható lesz.

5.2.28. Abszolút integrálható függvények. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, amelyre $|f|$ is integrálható, akkor azt mondjuk, hogy f *abszolút integrálható* $[a, b]$ -n. Ez azzal ekvivalens, hogy az

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{és} \quad f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$$

összefüggésekkel definiált függvények, az f pozitív része és negatív része integrálhatóak. (Az f^+ és f^- függvények tetszőleges halmazon értelmezett valós értékű függvényre is ugyanígy definiálhatóak.) Komplex értékű függvényt akkor nevezünk *abszolút integrálhatónak*, ha a valós és a képzetes része is abszolút integrálható. Megmutatható – később meg is mutatjuk – hogy az abszolút integrálható függvények az úgynevezett *Lebesgue-integrálható* függvényekkel egyeznek meg. Ennek segítségével könnyen következik, hogy ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút integrálhatóak, akkor $|f|$ is integrálható, és ha g korlátos, akkor fg is abszolút integrálható, ha pedig valamely $c > 0$ -ra $|g| \geq c$ az $[a, b]$ -n, akkor f/g is abszolút integrálható. A következő tétel is bizonyítható a Lebesgue-integrál elméletében, lásd például a [35] könyvből.

5.2.29. Tétel. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ abszolút integrálható, F az f integrálfüggvénye. Ekkor F majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt megegyezik f -fel. $\square$

5.2.30. Tétel: parciális integrálás integrálfüggvényekre. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ abszolút integrálhatóak, F és G az integrálfüggvényük. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és

$$\int_a^b fG + \int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Bizonyítás. Az abszolút integrálható függvényekről eddig mondottak alapján el tudjuk végezni a bizonyítást. Mivel fG és Fg is abszolút integrálhatóak, az integrálfüggvényük differenciálható majdnem mindenütt. De FG is majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt $fG + Fg$, így FG az fG és a Fg integrálfüggvényének összege. Így az előző tételből következik az állítás. $\square$

5.2.31. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ egy abszolút integrálható függvény. Ekkor

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Legyen $c = \int_a^b f$. Ekkor

$$|c|^2 = \bar{c}c = \bar{c} \int_a^b f = \int_a^b \bar{c}f.$$

Mivel a bal oldal nemnegatív valós szám, a jobb oldal képzetes része nulla kell legyen. Mivel $\Re(\bar{c}f(x)) \leq |c||f(x)|$ minden $x \in [a, b]$ -re, $|c|^2 \leq |c| \int_a^b |f|$, ahonnan következik az állítás. $\square$

5.2.32. Impropius integrál. Legyen $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény ($a \in \mathbb{R}$), és tegyük fel, hogy a függvény minden $[a, b]$, $a < b < +\infty$ intervallumon integrálható. Ha létezik a $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f \in \overline{\mathbb{K}}$ határérték, akkor azt az f függvény $[a, +\infty[$ -en vett *impropius integráljának* nevezzük és $\int_a^{+\infty} f$ vagy $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ -szel jelöljük. Ha a határérték $\mathbb{K}$ -beli, akkor az impropius integrált *konvergensnek* nevezzük; ha az f függvény minden $[a, b]$, $a < b < +\infty$ intervallumon abszolút integrálható és a $\int_a^{+\infty} |f|$ impropius integrál konvergens, akkor *abszolút konvergens impropius integrálról* beszélünk. Hasonlóan, egy $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{K}$ függvény $] -\infty, b]$ -n vett *impropius integrálját* a $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$ határértékként értelmezzük. Az impropius integrálra vonatkozó tételekben az első változatra szorítkozunk, bár azok nyilván értelemszerűen átvihetők a második változatra is. Megjegyezzük, hogy akkor is szokás impropius integrálról beszélni, ha véges intervallumon az integrálandó függvény nem korlátos, és az 5.2.23 tételt alkalmazzuk az integrál kiszámítására.

5.2.33. Példák. A Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x^\alpha dx &= \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1}, & \text{ha } \alpha < -1; \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \geq -1; \end{cases} \\ \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx &= \begin{cases} -\frac{1}{\alpha}, & \text{ha } \alpha < 0; \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.34. További impropius integrálok. Szokás például $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ típusú és más impropius integrálokat is használni. Ha azonban például $f(x) = 1/x$, ha $|x| > 1$ és $f(x) = 0$ egyébként, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f &= +\infty, \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f &= -\infty, \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f &= 0. \end{aligned}$$

Legegyszerűbb ilyen esetekben kiírni, hogy milyen határértéket tekintünk.

5.2.35. Tétel. Legyen $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény ($a \in \mathbb{R}$). Ha f impropius integrálja abszolút konvergens, akkor az impropius integrál is konvergens.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f valós értékű. Legyen $A = \int_a^{+\infty} |f|$ és $\varepsilon > 0$. Van olyan K_1 , hogy ha $b > K_1$, akkor $\int_a^b |f| > A - \varepsilon$. Innen ha $b, c > K_1$, $b < c$, akkor $|\int_b^c f| < \varepsilon$; ez abból következik, hogy $|\int_b^c f| \leq \int_b^c |f| = \int_a^c |f| - \int_a^b |f|$, és a jobb oldalon álló számok nagyobbak, mint $A - \varepsilon$, de nem nagyobbak, mint A .

Mivel $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq A$, az $\int_a^b f$ számok halmaza korlátos. Legyen

$$I = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sup_{c > d} \int_a^c f.$$

A határérték létezik, mivel a $d \mapsto \sup_{c>d} \int_a^c f$ függvény monoton csökkenő és korlátos. Van olyan K_2 , hogy ha $d > K_2$, akkor $I + \varepsilon > \sup_{c>d} \int_a^c f \geq I$. Legyen $K = \max\{K_1, K_2\}$, és $b > K$. Válasszunk olyan $c > b$ számot, amelyre $I + \varepsilon > \int_a^c f > I - \varepsilon$. Mivel $\int_a^c f - \int_a^b f = \int_b^c f$, kapjuk, hogy $I + 2\varepsilon > \int_a^b f > I - 2\varepsilon$, ha $b > K$.

A komplex esetben ugyanígy adódik, hogy $\Re(f)$ és $\Im(f)$ improprius integrálja konvergens. $\square$

5.2.36. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény.

- (1) Ha f minden $[c, b]$, $a < c < b$ intervallumon abszolút integrálható, és $\lim_{c \downarrow a} \int_c^b |f|$ véges, akkor f abszolút integrálható $[a, b]$ -n.
- (2) Ha f minden $[a, c]$, $a < c < b$ intervallumon abszolút integrálható, és $\lim_{c \uparrow b} \int_a^c |f|$ véges, akkor f abszolút integrálható $[a, b]$ -n.

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan bizonyítható. $\square$

5.3 Alkalmazások

5.3.1. Végtelen kicsinyek. Az analízis hőskorában a differenciálhányadost a következőképpen vezették be: Tekintsük az $x \mapsto y(x)$ függvényt, és változtassuk meg x értékét a végtelen kis dx értékkel (differenciális változás). Ekkor – ha a függvény folytonos – a függvényérték is végtelen kicsit, $y(x + dx)$ -re változik. Legyen a függvényérték változása a végtelen kicsiny (differenciális) $dy = y(x + dx) - y(x)$ érték. A differenciálhányados dy/dx .

Hasonló gondolatmenetet alkalmaztak az integrál bevezetésére: az $x \mapsto y(x)$ görbe alatti terület x és $x + dx$ között $y(x)dx$, így a teljes terület $\sum_a^b y(x)dx$, ahol az összegzés az $[a, b]$ intervallum végtelen kicsinyekre való felosztására értendő. Az integrál jelölése is innen ered: az összegzést S -sel jelölték, az integrál jele egy elnyújtott S betű.

Ezzel a gondolatmenettel könnyen adódik a Newton–Leibniz-formula: Jelölje $Y(x)$ az $x \mapsto y(x)$ görbe alatti, a és x közötti szakaszon vett területet. Az x -et dx -szel megváltoztatva, a terület $y(x)dx$ -szel változik, ahonnan a $dY = Y(x + dx) - Y(x)$ differenciális változás $y(x)dx$, tehát $dY/dx = y(x)$.

A végtelen kicsinyek használata nagyon sok buktatót tartalmaz. Például egyszerű gondolatmenetünkökből nem világos, hogy miért nem differenciálható minden folytonos függvény. Még fontosabb ellenvetés, hogy a valós számok között nincsenek végtelen kicsinyek: az arkhimédészi tulajdonság szerint bármely nem nulla valós számhoz van olyan n , hogy a számot n -szer összeadva saját magával, az összeg abszolút értéke nagyobb lesz 1-nél, így a szám abszolút értéke nagyobb, mint $1/n$. Bár a gondolatmenetek finomíthatók, és a valós számok halmazának bővítésével a végtelen kicsinyek is „megmenthetők”, ma véges dx , dy , stb., változásokkal dolgozunk, majd határátmenetet veszünk. Semmi sem gátolja azonban, hogy heurisztikus gondolatmenetben végtelen kicsinyeket használjunk, csak az így megsejtett összefüggéseket be is kell bizonyítani.

Az alábbiakban néhány ilyen heurisztikus gondolatmenettel kapható eredményt is bemutatunk.

5.3.2. Görbe hossza, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $t \mapsto z(t)$ egy, az $[a, b]$ intervallumot $\mathbb{C}$ -be képező folytonosan differenciálható függvény. Ezen függvény tekinthető egy pont mozgásának. A dt időre eső elmozdulás dz , ennek hossza $|dz|$, így a teljes hossz

$$\int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

A görbe hosszát később pontosan definiáljuk, és az összefüggést (nem csak síkgörbékre) bebizonyítjuk.

Legyen $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ egy sima (azaz folytonosan differenciálható) síkgörbe. Ha deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |z'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye t -nek. A $w(s) = z(\varphi^{-1}(s))$ összefüggéssel definiált függvény egy, a z -vel ekvivalens síkgörbe. Erre

$$\left| \frac{dw}{ds} \right| = \left| \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| z'(\varphi^{-1}(s)) \right| \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Ilyen paraméterezéseket a síkgörbe *természetes paraméterezésének* fogunk nevezni. (Például a $t \mapsto \exp(it) = \cos t + i \sin t$ görbe természetes paraméterezésben van adva.) A természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűíti a számolásokat.

Legyen $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ egy síkgörbe természetes paraméterezéssel. Ha z folytonosan differenciálható, akkor bármely $s \in [a, b]$ pontra az $e(s) = z'(s)$ vektort a z görbe s pontbeli *érintő egységvektorának* nevezzük. (Tetszőleges paraméterezésben adott síkgörbe deriváltját is érintővektornak nevezzük, ez nem feltétlenül egységvektor.) Ha z kétszer folytonosan differenciálható, akkor $e(s)\overline{e(s)} = 1$ differenciálásával kapjuk, hogy $\Re(e'(s)\overline{e(s)}) = 0$, tehát $e'(s)/e(s)$ tiszta képzetes, azaz $e'(s)$ merőleges $e(s)$ -re. A $\kappa(s) = |e'(s)|$ számot az s -beli *görbületnek* nevezzük. Ha $\kappa \equiv 0$, akkor e konstans, és r egyenes, $r(s) = r(s_0) + (s - s_0)e$. Ha $\kappa(s) \neq 0$, akkor az $n(s) = e'(s)/\kappa(s)$ vektort az s -beli *főnormálisnak* nevezzük.

Legyenek most az s_0 és $\kappa_0 > 0$ valós számok, a $\mathbb{C}$ -beli e_0 és n_0 egymásra merőleges egységvektorok, valamint az $z_0 \in \mathbb{C}$ vektor adottak. Legyen $R = 1/\kappa_0$. Tekintsük az

$$z(s) = (z_0 + Rn_0) - R \cos((s - s_0)/R)n_0 + R \sin((s - s_0)/R)e_0, \\ s_0 - \pi R \leq s \leq s_0 + \pi R$$

kört. Mivel $|z'(s)| = |-\sin((s - s_0)/R)n_0 + \cos((s - s_0)/R)e_0| = 1$, a paraméter természetes paraméter. Továbbá $z(s_0) = r_0$, $e(s_0) = e_0$, $\kappa(s_0) = \kappa_0$ és $n(s_0) = n_0$, így

$$z(s) = z_0 + (s - s_0)e_0 + \frac{\kappa_0}{2}(s - s_0)^2 n_0 + \omega(s - s_0),$$

ahol $\omega(s - s_0)$ még $(s - s_0)^2$ -tel osztva is nullához tart. Ha most $\tilde{z}$ tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható görbe természetes paraméterezéssel, amelynek az s_0 pontban az értéke z_0 , érintője e_0 , görbülete κ_0 és főnormálisa n_0 , akkor $\tilde{z}(s) - z(s)$ tart nullához még $(s - s_0)^2$ -tel osztva is. Ezért szokás a fenti kört a görbe s_0 ponthoz tartozó *simulókörének* nevezni. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett a simulókör lényegében egyértelmű.

5.3.3. Polárkoordinátákkal adott szektor területe, heurisztikusan. Legyen $-\pi < \alpha < \beta \leq +\pi$ és $\varphi \mapsto r(\varphi)$ egy $[\alpha, \beta]$ -t $\mathbb{R}^+$ -ba képező folytonos függvény. A

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq r(\varphi) \text{ és } \alpha \leq \varphi \leq \beta, \text{ ahol } \varphi = \arg(z)\}$$

szektorszerű síkidomra, a φ és $\varphi + d\varphi$ között szögekhez tartozó rész közelítőleg háromszög, amelynek területe

$$\frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi,$$

így a teljes terület

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

A területet később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.4. Forgástest térfogata, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

forgástest azon része, amelynek első koordinátája x és $x + dx$ közé esik, közelítőleg henger, amelynek magassága dx , alapterülete pedig $\pi f(x)^2$, tehát térfogata

$$\pi f(x)^2 dx,$$

így a teljes térfogat

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

A térfogatot később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.5. Példa. Kiszámítjuk az $R > 0$ sugarú gömb térfogatát. Mivel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, a térfogat

$$\pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

5.3.6. Forgásfelület felszíne, heurisztikusan. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 = f(x)^2\}$$

forgásfelület azon része, amelynek első koordinátája x és $x + dx$ közé esik, közelítőleg csonkakúp-palást, amelynek kerülete $2\pi f(x)$, magassága dx , így alkotójának hossza

$$\sqrt{dx^2 + df^2} = \sqrt{dx^2 + f'(x)^2 dx^2} = dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

tehát felszíne közelítőleg

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

így a teljes felület

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

A felszínt később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

5.3.7. Példa. Kiszámítjuk az $R > 0$ sugarú gömb felszínét. Mivel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ deriváltja $-x/\sqrt{R^2 - x^2}$, a felszín

$$2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + x^2/(R^2 - x^2)} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4R^2\pi.$$

5.3.8. Tömeg, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték. Tekintsünk egy T testet, amelynek sűrűsége az x, y, z koordinátákkal megadott pontban $\varrho(x, y, z)$. A testen kívül a sűrűséget tekintsük nullának. Tegyük fel, hogy a test minden pontjának első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x_0 és x_1 , y_0 és y_1 , illetve z_0 és z_1 közé esik. Mivel a test azon részének tömege, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x + dx$, y és $y + dy$, illetve z és $z + dz$ közé esik, $\varrho(x, y, z) dx dy dz$, a test tömege

$$M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Ha a gravitációs gyorsulás g , a test súlya Mg . Feltéve, hogy a gravitációs gyorsulás párhuzamos a z tengellyel, számítsuk ki az y tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot. Mivel a test azon részétől származó forgatónyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x + dx$, y és $y + dy$, illetve z és $z + dz$ közé esik, $x\varrho(x, y, z) dx dy dz$, a teljes forgatónyomaték

$$\int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Ez meg kell egyezzen azzal a forgatónyomatékkal, amelyet akkor kapnánk, ha a test teljes M tömege az $S = (x_S, y_S, z_S)$ súlypontban (tömegközéppontban) lenne. Innen

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$y_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} y\varrho(x, y, z) dx dy dz$$

és

$$z_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} z\varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Végül határozzuk meg z tengelyre vonatkozó Θ_{zz} tehetetlenségi nyomatékot. Mivel a test azon részétől származó tehetetlenségi nyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre x és $x + dx$, y és $y + dy$, illetve z és $z + dz$ közé esik, $(x^2 + y^2)\varrho(x, y, z) dx dy dz$, a teljes tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{zz} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2)\varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

5.3.9. Közelítő számítások. Az alapgondolat egy függvény értékét, integrálját, deriváltját, zérushelyét stb. úgy közelíteni, hogy vesszük a függvény egy közelítését (például egy Lagrange-interpolációval kapható polinomközelítést), és ennek vesszük az értékét, integrálját, deriváltját, zérushelyét stb. Itt egy $[a, b]$ korlátos valós intervallumon értelmezett, valós értékű függvény *közelítő integrálását* fogjuk vizsgálni. Az így adódó legegyszerűbb formulák az

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

érintőformula, az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

trapézformula, és az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Simpson-formula. Az érintőformula neve onnan ered, hogy ha a függvényt az intervallum középpontjában vett érintővel közelítjük, akkor ezt a formulát kapjuk. A Simpson-formula parabolikus interpolációnak felel meg. Könnyen megmutatható, hogy ha egy test térfogatát a Simpson-formulával úgy közelítjük, hogy

$$V \approx \frac{m}{6}(T_a + 4T_k + T_f),$$

ahol T_a, T_k, T_f rendre az alaplapp, a középmetszet, illetve a fedőlap területei, és m a magasság, akkor henger, hasáb, kúp, gúla, gömb, csonka kúp és csonka gúla esetén pontos értéket kapunk.

Gyakran ezekkel az egyszerű formulákkal nem érünk célt. Ekkor az értelmezési tartományt kisebb részekre osztjuk, minden kis részen egy közelítést választunk, ennek az integrálját számítjuk ki, és a kis részekeken vett integrálokat összeadjuk. Például ha egy $[a, b]$ intervallumon egy függvény integrálját akarjuk közelíteni, az intervallumot $h = (b-a)/n$ hosszúságú egyenlő részekre osztva az $x_k = a + kh$ beosztást kapjuk, és az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

összetett trapézformula, illetve az

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} & \left(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \right. \\ & \left. + 2f(x_2) + \cdots + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n) \right). \end{aligned}$$

összetett Simpson-formula adódik. A pontosság az osztópontok számának növelésével növelhető.

5.3.10. A Newton-módszer. Egy $f(x) = 0$ egyenlet gyökének meghatározására természetes módon adódik egy közelítő módszer, ha egy adott x_n érték közelében f -et a lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

így a következő közelítésre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens, ekkor viszont igen gyorsan konvergál: az értékes jegyek száma általában minden lépésben megduplázódik. A konvergencia biztosabbá tehető, ha kezdetben *relaxációt* alkalmazunk:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban keressük a következő közelítést, ahol az $0 < \alpha_n \leq 1$ *relaxációs paramétert* úgy választjuk, hogy $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha $f(x_n) \neq 0$ és $f'(x_n) \neq 0$: Nézzük meg, milyen irányú h -t kell választanunk, hogy az abszolút érték a lehető legjobban csökkenjen. A h adott (kis) hossza mellett $f(x) + f'(x)h$ abszolút értéke akkor lesz a legkisebb, ha egyenesen a nulla felé mozdulunk el, tehát ha $f'(x)h$ az $f(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa, vagyis ha h az $f(x)/f'(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa. Mivel $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$, azt kapjuk, hogy elég kis $|h|$ esetén

$$|f(x+h)| - |f(x)| \leq -|hf'(x)| + |r(h)|.$$

Az $x = x_n$, $\Delta x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, $h = \alpha \Delta x_n$ jelöléssel

$$\frac{|f(x_n + \alpha \Delta x_n)| - |f(x_n)|}{\alpha |f(x_n)|} \leq -1 + \frac{|r(\alpha \Delta x_n)|}{\alpha |f(x_n)|} \rightarrow -1,$$

ha $\alpha \rightarrow 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1 - \sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \leq \sigma \leq 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n -et, rendszerint szorozzuk ϱ -val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0,3 \leq \varrho \leq 0,8$.

5.3.11. Differenciálegyenletek. A természettudományokban az ismeretlen gyakran egy $x \mapsto y(x)$ függvény, amelyet egy rá vonatkozó

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

alakú egyenletből, úgynevezett *differenciálegyenletből* kell meghatároznunk, amelyben f és g adott függvények. A differenciálegyenletekkel részletesen később foglalkozunk, itt csak két nagyon speciális esetet tekintünk.

5.3.12. Elsőrendű szeparábilis differenciálegyenletek megoldása. Legyenek I és J az $\mathbb{R}$ nyílt intervallumai, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, amelyeknek F , illetve G primitív függvényei. Egy $I_0 \subset I$ -n értelmezett, J -be képező $x \mapsto y(x)$ függvény akkor és csak akkor megoldása a

$$(1) \quad g(y)y' = f(x)$$

differenciálegyenletnek, ha valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal

$$(2) \quad G(y) = F(x) + c.$$

A szeparábilis elnevezés onnan ered, hogy az egyenlet formálisan $g(y) dy = f(x) dx$ alakban írható, azaz az y és x változókat a két oldalra szétválaszthatjuk.

Bizonyítás. Ha (2) fennáll, akkor mindkét oldalt differenciálva x szerint,

$$g(y)y' = f(x).$$

Ha (1) teljesül, akkor

$$(G(y) - F(x))' = g(y)y' - f(x) = 0,$$

így $G(y) - F(x)$ konstans I_0 -on. $\square$

5.3.13. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. Legyen I az $\mathbb{R}$ nyílt intervalluma, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ és F az f egy rögzített primitív függvénye. Egy I -n értelmezett $x \mapsto y(x)$ függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$(1) \quad y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletnek, ha

$$(2) \quad y \in e^F \int g(x)e^{-F(x)} dx.$$

Bizonyítás. Ha (1) fennáll, akkor

$$(ye^{-F})' = (fy + g)e^{-F} + ye^{-F}(-f) = ge^{-F},$$

tehát

$$ye^{-F} \in \int g(x)e^{-F(x)} dx,$$

ahonnan következik (2). Másrészt ha $y = e^F H$, ahol $H \in \int g(x)e^{-F(x)} dx$, akkor

$$y' = (e^F H)' = fe^F H + e^F ge^{-F} = fy + g. \square$$

5.3.14. Hatványsorok alkalmazása differenciálegyenletek megoldására. Az $f(2x) = f^2(x)$ függvényegyenlet megoldását hatványsor alakban kerestük. Ehhez hasonlóan más függvényegyenletek, például differenciálegyenletek megoldását is kereshetjük hatványsor alakban. Példaként keressük az

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Bessel-féle differenciálegyenlet megoldását $n \in \mathbb{Z}$ esetén $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban. Az egyenletből

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^k \\ &= a_1 x - n^2 a_0 - n^2 a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k^2 - n^2)a_k + a_{k-2})x^k, \end{aligned}$$

így azt kapjuk, hogy $(k^2 - n^2)a_k + a_{k-2} = 0$, ha $k = 0, 1, \dots$, ahol $a_{-1} = a_{-2} = 0$. Innen $m = |n|$ jelöléssel $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0 = a_{m+1} = a_{m+3} = \dots$, és $c = a_m$ jelöléssel

$$a_{m+2j} = \frac{(-1)^j c}{2^{2j} \cdot j! \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+j)}.$$

Így a hatványsor alakú megoldások a $c = 1$ választással kapott úgynevezett *elsőfajú Bessel-függvények*, illetve konstansszoroztaik:

$$J_m(x) = x^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+j)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}.$$

A $j+1$ -edik és a j -edik tag abszolút értékének hányadosa $|x|^2 / (4(j+1)(m+j+1)) \rightarrow 0$, ha $j \rightarrow \infty$, így a hatványsor mindenütt konvergens.

Az $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ eset hasonlóan kezelhető, ha a megoldást $y(x) = x^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban keressük (ϱ behelyettesítés után n függvényében meghatározható); az így kapott függvényeket is *elsőfajú Bessel-függvényeknek* hívjuk.

*** 5.3.15. Generátorfüggvények.** Sokszor célszerű egy számsorozatot egy analitikus függvénybe, úgynevezett *generátorfüggvénybe* összefogni. A $g_0, g_1, g_2, \dots$ komplex számsorozat *generátorfüggvényén* a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük, ha a hatványsor konvergens a nulla egy környezetében. Ha az $f_0, f_1, f_2, \dots$ sorozat generátorfüggvénye F , akkor a hatványsorok ismert

tulajdonságaiból adódnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
 \alpha F(z) + \beta G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n; \\
 z^m G(z) &= \sum_{n \geq m} g_{n-m} z^n; \\
 \frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \dots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} &= \sum_{n=0}^{\infty} g_{n+m} z^n; \\
 G(cz) &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n g_n z^n; \\
 G'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} z^n; \\
 F(z)G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right) z^n.
 \end{aligned}$$

A fenti összefüggések kombinálásával könnyen kaphatunk újabb összefüggéseket, például

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^n, \quad z^2 G''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) g_n z^n,$$

és így

$$z^2 G''(z) + zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 g_n z^n,$$

vagy hogy ha F a G azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$, akkor

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{n-1}}{n} z^n.$$

A fenti összefüggések generátorfüggvények lineáris kombinálására, szorzására, differenciálására és integrálására, új változó bevezetésére és a sorozat eltolására vonatkoznak. Ha ismert hatványsorokat is felhasználunk (Newton binomiális sora, az exponenciális függvény sora, $1/(1-z)$ sora, stb.) újabb összefüggéseket kaphatunk, például

$$\frac{G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} g_k \right) z^n.$$

Mindezek nagyon hasznosak például a valószínűségszámításban, mi is fel fogjuk használni őket.

Néhány trükk az alkalmazásokhoz: Ha g_n legfeljebb d -ed fokú polinomja n -nek, akkor $G(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nevezője $(1-z)^{d+1}$. Ha ez az $n \bmod m$ maradéktól függően más-más polinommal teljesül, akkor véges sok $(1-z^j)^{d_j}$ alakú tényező szorzata a nevező. Ha g_n rekurzív, $g_n = c_1 g_{n-1} + c_2 g_{n-2} + \dots + c_d g_{n-d}$, ha $n \geq d$, akkor G racionális törtfüggvény, amelynek nevezője d -ed fokú polinom. Ha a c_j együtthatók nem konstansok,

hanem polinomjai n -nek, akkor G egy polinomegyütthatós lineáris differenciálegyenletnek tesz eleget. Például az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n > 1$ Fibonacci-számokra

$$\begin{aligned} F(z) &= f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + f_4 z^4 + \dots, \\ zF(z) &= f_0 z + f_1 z^2 + f_2 z^3 + f_3 z^4 + \dots, \\ z^2 F(z) &= f_0 z^2 + f_1 z^3 + f_2 z^4 + \dots, \end{aligned}$$

amiből kivonással $(1 - z - z^2)F(z) = z$. Ebből parciális törtekre bontással

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi_1 z} - \frac{1}{1 - \phi_2 z} \right),$$

ahol $\phi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\phi_2 = 1 - \phi_1 = (1 - \sqrt{5})/2$. Innen

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_1^n - \phi_2^n) z^n,$$

azaz $f_n = (\phi_1^n - \phi_2^n)/\sqrt{5}$. A levezetés nem precíz, mert a hatványsorok konvergenciáját nem vizsgáltuk, de pontossá tehető.

Néha más módon rendelünk egy sorozathoz egy függvényt. Például ha g_n valamely permutációk száma, vagy egyszerűen csak a generátorfüggvényt definiáló hatványsor nem konvergál a nulla egy környezetében, akkor használhatjuk a $g_n/n!$ sorozat generátorfüggvényét, ez a g_n sorozat *exponenciális generátorfüggvénye*. A számelméletben gyakran használják a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^z}$$

Dirichlet-féle generátorfüggvényt; az $1, 1, 1, \dots$ sorozathoz tartozó Dirichlet-féle generátorfüggvény a nevezetes ζ függvény.

* **5.3.16. Variációszámítás.** A fizikában valamely probléma megoldását, vagy az azt leíró differenciálegyenletet gyakran egy minimumfeladatból kapjuk az úgynevezett *variációszámítás* segítségével. Erre mutatunk egy matematikai jellegű példát.

Határozzuk meg egy minimális felszínű forgásfelület alakját, amelyet az $x \mapsto y(x)$ függvény x tengely körüli forgatásával kapunk. Feltesszük, hogy y átmegy az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontokon. A forgásfelület felszíne

$$S(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

A minimumot adó $x \mapsto y(x)$ függvényt „variáljuk” $\varepsilon v(x)$ hozzáadásával, ahol v egyszer folytonosan differenciálható függvény, amelyről feltesszük, hogy x_0 illetve x_1 egy környezetében nulla, egyébként egyelőre tetszőleges, ε pedig valós szám. Az

$$\varepsilon \mapsto f(\varepsilon) = S(y + \varepsilon v) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} (y(x) + \varepsilon v(x)) \sqrt{1 + (y'(x) + \varepsilon v'(x))^2} dx$$

függvénynek minimuma van a 0 pontban, így ott ε szerinti deriváltja nulla. Mint később megmutatjuk, a differenciálás felcserélhető az integrálással, így azt kapjuk, hogy

$$f'(\varepsilon) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x) \sqrt{1 + (y'(x) + \varepsilon v'(x))^2} + (y(x) + \varepsilon v(x)) \frac{(y'(x) + \varepsilon v'(x))v'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x) + \varepsilon v'(x))^2}} dx,$$

tehát

$$0 = f'(0) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} + \frac{y(x)y'(x)v'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} dx.$$

Tegyük fel, hogy y kétszer folytonosan differenciálható. (Ez a feltétel kiküszöbölhető, csak az egyszerűbb levezetés kedvéért élünk vele.) Ekkor a fenti integrált parciális integrálással átalakítva azt kapjuk, hogy

$$0 = f'(0) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x) \left(\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) dx.$$

Megmutatjuk, hogy az integrál csak úgy lehet minden v függvényre nulla, ha a zárójelben álló kifejezés nulla az $]x_0, x_1[$ intervallum minden pontjában. Valóban, ha ez nem állna fenn, akkor választhatnánk olyan x pontot, amelynek valamely $\delta > 0$ sugarú környezete része $]x_0, x_1[$ -nek, és a környezetben a zárójelben álló kifejezés nem vált előjelet. De akkor egy alkalmas v függvény választva, amely mindenütt pozitív ebben a környezetben, azon kívül azonban nulla (például a

$$v(t) = \begin{cases} (1-t)^2(1+t)^2, & \text{ha } |t| < 1, \\ 0, & \text{ha } |t| \geq 1 \end{cases}$$

függvény egy alkalmas lineáris transzformáltját), ellentmondást kapnánk.

Így azt kaptuk, hogy a megoldás eleget tesz a

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

differenciálegyenletnek. Szorozzuk végig az egyenletet y' -vel, és vegyük észre, hogy az így kapott jobb oldal megegyezik

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

deriváltjával. Innen valamely α valós konstanssal $y = \alpha\sqrt{1 + y'^2}$. Ez a differenciálegyenlet szeparábilis, általános megoldása

$$y(x) = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{\alpha}.$$

Az α , β konstansok meghatározhatók abból, hogy az $x \mapsto y(x)$ függvény átmegy az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontokon.

5.3.17. Integrálkritérium. Nemnegatív tagú sorok konvergenciájának vizsgálatánál gyakran hasznos a sor összegét egy olyan függvény integráljának felfogni, amely két szomszédos természetes szám között konstans, és az integrált összehasonlítani egy másik, sima függvény integráljával.

Például vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ sor konvergenciáját. Ha $\alpha \geq 0$, az általános tag nem tart nullához, így a sor divergens. Most tegyük fel, hogy $0 > \alpha \geq -1$. Az $f(x) = n^{\alpha}$, ha $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényre $f(x) \geq x^{\alpha}$, ha $x \geq 1$. Innen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n^{\alpha} &= \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \int_1^{N+1} x^{\alpha} dx \\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

így a sor divergens. Végül tegyük fel, hogy $\alpha < -1$. Az $f(x) = (n+1)^{\alpha}$, ha $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényre $f(x) \leq x^{\alpha}$, ha $x \geq 1$. Innen

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N+1} n^{\alpha} &= \sum_{n=1}^N (n+1)^{\alpha} = \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \int_1^{N+1} x^{\alpha} dx \\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \rightarrow \frac{-1}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

így a sor konvergens, sőt, ha α komplex, $\Re(\alpha) > 1$, akkor is abszolút konvergens.

A módszer felhasználható többek között a

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{\alpha} / n$$

és

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\ln \ln n)^{\alpha} / (n \ln n),$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ sorok konvergenciájának eldöntésére is.

Lineáris algebra

Ebben a részben mátrixokkal, vektorokkal és lineáris operátorokkal fogunk foglalkozni. Felhasználjuk az algebrai struktúrákról, elsősorban a testekről és a gyűrűkről tanultakat.

6.1 Mátrixok és vektorok

6.1.1. Jelölés. Bár a kódoláselméletben véges testek is szerepet játszanak, és a lineáris algebraát akár ferdetestek felett is lehetne tárgyalni, számunkra a legfontosabb az $\mathbb{R}$ valós és a $\mathbb{C}$ komplex számtest lesz; szokás szerint jelölje $\mathbb{K}$ ezen testek valamelyikét. Például az első két részben csak a $\mathbb{K}$ testre megfogalmazott definíciók és tételek mind átvihető tetszőleges K testre is.

6.1.2. Mátrixok. Ha X egy halmaz, egy $x: (i, j) \mapsto x_{i,j} \in X$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ leképezést $m \times n$ -es X -beli elemű (vagy X feletti) $(x_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$ mátrixnak nevezzük; az $x_{i,j}$ -k a mátrix *elemei*. A mátrixokat

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \cdots & x_{i,j} & \cdots & x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,j} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

téglalap alakú táblázatként ábrázoljuk; $x_{i,j}$ az i -edik sor j -edik eleme, tehát az első index a *sorindex*, a második az *oszlopindex*, m a sorok száma és n az oszlopok száma. Szinte mindig skalárelemű mátrixokkal lesz dolgunk. A fenti mátrix x' *transzponáltján* azt az $n \times m$ -es $(x'_{j,i})_{j=1,i=1}^{n,m}$ mátrixot értjük, amelyre $x'_{j,i} = x_{i,j}$, ha $i = 1, 2, \dots, m$ és $j = 1, 2, \dots, n$; ennek sorai tehát az előző mátrix oszlopai. Nyilván $(x')' = x$. Ha $n = m$, akkor *négyzetes* (vagy *kvadrátikus*) mátrixról beszélünk. Ha $x' = x$, akkor az x mátrixot *szimmetrikusnak* nevezzük. Természetesen csak négyzetes mátrix lehet szimmetrikus. Egy x mátrix *főátlóját* vagy röviden *átlóját*, idegen szóval *diagonálisát* az $x_{i,i}$ elemek alkotják. Néha a *mellékátló* fogalma is hasznos lesz: ezt az $x_{i,n+1-i}$ elemek alkotják, ahol n az oszlopok száma. Ha egy mátrixnak csak egy sora van, azaz $m = 1$, akkor *sormátrixról*, ha pedig csak egy oszlopa van, azaz $n = 1$, akkor *oszlopmátrixról* beszélünk. Sormátrix transzponáltja nyilván oszlopmátrix, oszlopmátrix transzponáltja pedig sormátrix.

6.1.3. Műveletek mátrixokkal. Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$ és

$$a = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}, \quad b = (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$$

$\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrixok. Legyen

$$\bar{a} = (\overline{a_{i,j}})_{i=1,j=1}^m \quad \gamma a = (\gamma a_{i,j})_{i=1,j=1}^m \quad \text{és} \quad a + b = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1,j=1}^m.$$

Vegyük észre, hogy a konjugálás, a $\mathbb{K}$ -beli elemekkel való szorzás és az összeadás megfelel a függvények szokásos konjugálásának, konstanssal való szorzásának és összeadásának. Nyilván $(\bar{a})' = \overline{a'}$, $(\gamma a)' = \gamma a'$ és $(a + b)' = a' + b'$.

A $\mathbb{K}^m$ két elemének, azaz egy $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ és egy $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ skalár m -esnek a *kompozíciójában* az azonos helyen álló elemek szorzatának összegét, azaz a

$$\sum_{j=1}^m x_j y_j$$

összeget értjük. Legyen most $b = (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{\ell \times m}$ egy $\ell \times m$ -es $\mathbb{K}$ -beli elemű mátrix. A b és a mátrixok szorzatát sor-oszlop kompozícióval definiáljuk: a b és az a mátrix $c = ba$ szorzatán az $\ell \times n$ -es $c = (c_{i,k})_{i=1,k=1}^{\ell \times n}$ mátrixot értjük, ahol

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} a_{j,k}, \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, \ell, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

azaz a szorzatmátrix i -edik sorának k -adik elemét úgy kapjuk, hogy vesszük a b mátrix i -edik sorának és az a mátrix k -adik oszlopának a kompozícióját.

Természetesen a mátrixműveleteket nem véletlenül definiáljuk így: a cél az, hogy megfeleljenek a lineáris leképezések közötti műveleteknek. Így a lineáris leképezések közötti műveletekre bizonyítandó tulajdonságok érvényesek mátrixok közötti műveletekre is. A lineáris leképezéseket később tárgyaljuk. Többek között be fogjuk bizonyítani, hogy a szorzás asszociatív, mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve, de általában még a négyzetes mátrixok szorzása sem kommutatív, azaz a tényezők nem *felcserélhetőek*. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

míg

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1.4. Állítás. Ha c a $\mathbb{K}$ -beli elemű $a = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^m \times n$ és $b = (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{\ell \times m}$ mátrixok ba szorzata, akkor $c' = a'b'$, ahol a' , b' c' az a , b , illetve c transzponáltja.

Bizonyítás. Mivel $c_{i,k} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} a_{j,k}$, kapjuk, hogy

$$c'_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} a_{j,k} = \sum_{j=1}^m a'_{k,j} b'_{j,i}. \quad \square$$

6.1.5. Nullmátrix, egységmátrix, inverz mátrix. Az $a = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^m \times n$ mátrixot $\mathbb{K}$ -beli elemekkel *nullmátrix*-nak nevezzük, ha minden eleme nulla. Ha adott $k \in \mathbb{N}$ -re $i - j > k$ esetén $a_{i,j} = 0$, akkor *alsó k -sávmátrix*ról vagy *bal k -sávmátrix*ról beszélünk. Hasonlóan, ha adott $k \in \mathbb{N}$ -re $j - i > k$ esetén $a_{i,j} = 0$, akkor *felső k -sávmátrix*ról vagy

jobb k -sávmátrixról beszélünk. A $k = 1$ esetben *alsó Hessenberg-mátrix*ról, illetve *felső Hessenberg-mátrix*ról, a $k = 0$ esetben pedig, ha a főátló feletti elemek mind nullák, *alsó trapéz mátrix*ról ($m \leq n$ esetén *alsó háromszög mátrix*ról), illetve ha a főátló alatti elemek mind nullák, akkor *felső trapéz mátrix*ról ($m \geq n$ esetén *felső háromszög mátrix*ról) beszélünk. Ha még az is teljesül, hogy a főátlóban csupa egyes van, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *alsó trapéz egységmátrix*, *alsó háromszög egységmátrix*, *felső trapéz egységmátrix*, illetve *felső háromszög egységmátrix*. Ha a főátlón kívüli elemek mind nullák, akkor a mátrixot *átlós mátrix*nak vagy *diagonális mátrix*nak nevezzük. Ha a mátrix egyszerre 1-felső és 1-alsó sávmátrix, azaz csak a főátlóban, valamint közvetlenül felette és alatta lehetnek nem nulla elemek, akkor *tridiagonális mátrix*ról beszélünk. Ha csak a főátlóban és közvetlenül alatta lehetnek nem nulla elemek, azaz 0-felső 1-alsó sávmátrix esetén mátrix *alsó bidiagonális mátrix*ról, ha pedig csak a főátlóban és közvetlenül felette lehetnek nem nulla elemek, azaz 1-felső 0-alsó sávmátrix esetén mátrix *felső bidiagonális mátrix*ról beszélünk. Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^m_{j=1}^n$ mátrix *felső lépcsős mátrix*, ha léteznek olyan $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ indexek, hogy $a_{i,j_i} \neq 0$, de $1 \leq j \leq n$, $j_i \geq j < j_{i+1}$, $j_i < \ell \leq m$ esetén $a_{\ell,j} = 0$ (itt $j_0 = 0$ és $j_{k+1} = n + 1$ értendő).

A $\mathbb{K}$ -beli elemű $\delta: (i, j) \mapsto \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ négyzetes mátrixot, ahol $\delta_{i,j} = 1$, ha $i = j$, és nulla egyébként, $n \times n$ -es *egységmátrix*nak nevezzük. (Ez azt jelenti, hogy diagonális mátrix, és a főátlóban egységek állnak). Az egységmátrix elnevezést az indokolja, hogy akár balról, akár jobbról szorozva egy mátrixot a megfelelő méretű egységmátrixszal, visszakapjuk az adott mátrixot. A $\mathbb{K}$ -beli elemű $n \times n$ -es $a = (a_{i,j})_{i=1}^n_{j=1}^n$ mátrix *inverzén* egy olyan $\mathbb{K}$ -beli elemű $n \times n$ -es $b = (b_{i,j})_{i=1}^n_{j=1}^n$ mátrixot értünk, amelyre ab az egységmátrix. Később megmutatjuk, hogy ilyenkor ba is az egységmátrix és az inverz egyértelmű.

6.1.6. Elemi sor- és oszlopműveletek. Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$, és $a = (a_{i,j})_{i=1}^m_{j=1}^n$ egy $\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrix. *Elemi sorműveletek* alatt két sor felcserélését, illetve egy sor tagonként vett γ -szorosának tagonkénti hozzáadását értjük egy másik sorhoz. *Elemi oszlopműveletek* alatt két oszlop felcserélését, illetve egy oszlop tagonként vett γ -szorosának tagonkénti hozzáadását értjük egy másik oszlophoz.

6.1.7. Gauss-féle kiküszöbölés. Az m egyenletből álló, n ismeretlenes

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,j}x_j + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

($a_{i,j}, b_j, x_i \in \mathbb{K}$, ha $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$) egyenletrendszer mátrixa a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mátrix. Az egyenletrendszer megoldása elemi sorműveletek sorozatával történik, amelyekkel a mátrixot felső lépcsős alakra hozzuk. Az eljárás neve *Gauss-féle kiküszöbölés* vagy *elimináció*. Az első fázis a következő: A nulladik lépésben a mátrixot bővítjük a jobb oldalon álló b -k oszlopmátrixával:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Legyen $j_0 = 0$. A k -adik lépésben megkeressük az első j_{k-1} -nél nagyobb, de n -nél nem nagyobb indexű oszlopot, amelynek k -nál nem kisebb sorindexű elemei között van nem nulla elem. Ennek az oszlopnak az indexe lesz j_k . Ha nincs ilyen oszlop (ez a helyzet akkor is, ha $k > m$), akkor az első fázis véget ért, és a második fázisra térünk át.

Ha szükséges, egy nála nagyobb indexű sorral felcserélve a k -adik sort, nem nulla elemet viszünk a j_k -adik oszlop k -adik sorába, ez a nem nulla elem lesz a k -adik lépésben a *füőelem*. Ezután minden k -nál nagyobb indexű sorhoz hozzáadjuk a k -adik sor alkalmas többszörösét úgy, hogy a j_k -adik oszlop minden k -nál nagyobb sorindexű eleme nulla legyen, majd a $k + 1$ -edik lépésre térünk át.

Világos, hogy az első fázis mindegyik lépése során az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, azaz olyan egyenletrendszert, amelynek ugyanazok a megoldásai, mint az eredetinek.

A második fázis során kiszámítjuk a megoldásokat: ha az első fázisból a $k + 1$ -edik lépésben léptünk ki, és az utolsó oszlopban a k -nál nagyobb indexű helyek valamelyikén nem nulla áll, akkor nyilván nincs megoldás. Egyébként van megoldás, a $j_1, j_2, \dots, j_k$ indexű ismeretlenek kivételével a többi értékét tetszőlegesen választhatjuk, és minden ilyen választáshoz pontosan egy megoldás tartozik, amelyet visszafelé a k -adik, $k - 1$ -edik stb. sorok felhasználásával meghatározhatunk.

6.1.8. Példák. (1) Oldjuk meg az

$$1x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{13}{30}$$

egyenletrendszert. A

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. Az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

mátrix, és ez a harmadik lépés és egyben az első fázis eredménye is. Innen $x_3 = 3$, $x_2 = 12(1/12 - 3/12) = -2$, $x_1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

(2) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. Sorcserével a második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

mátrix. Ez a harmadik lépés, és egyben az első fázis eredménye is. Az eredmény $x_3 = 1/2$, $x_2 = 2/3$ és $x_1 = 1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.

(3) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

mátrix, ami egyben az első fázis eredménye is, és nincs megoldás.

(4) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix, ami egyben az első fázis eredménye is, és az általános megoldás az, hogy x_3 tetszőleges, $x_2 = 1 - x_3$, $x_1 = 1 - x_3/3 - 1/2 + x_3/2 = 1/2 - x_3/6$.

6.1.9. Módosított Gauss-féle kiküszöbölés. A k -adik lépésben a főelem meghatározása után úgy is eljárhatunk, hogy a k -adik sort osztjuk a főelemmel (ez nyilván nem változtatja meg a megoldásokat), és ennek az új k -adik sornak a többszöröseit vonjuk le a k -nál nagyobb indexű sorokból. Ekkor a főelem helyére 1 kerül és a második fázisban elmaradnak az osztások.

6.1.10. Mátrixinverzió Gauss-féle kiküszöböléssel. Ha egy lineáris egyenletrendszert több különböző jobb oldallal kívánunk megoldani, akkor az összes jobb oldalt hozzáírhatjuk az eredeti mátrixhoz. Mivel egy $n \times n$ -es mátrix inverzének meghatározása azt jelenti, hogy olyan négyzetes mátrixot keresünk, amelynek j -edik oszlopát mint oszlop mátrixot szorozva az adott mátrixszal, a $(\delta_{i,j})_{i=1}^n_{j=1}^n$ egység mátrixot kapjuk, a mátrixinverzió megoldható Gauss-féle kiküszöböléssel: az eredeti mátrixhoz egy egység mátrixot kell hozzáírunk.

6.1.11. Gauss–Jordan-kiküszöbölés. Célszerűnek tűnhet a Gauss-féle kiküszöbölésnél, illetve a módosított változatánál a k -edik lépésben nemcsak a k -nál nagyobb indexű sorokból, hanem a k -nál kisebb indexű sorokból is kivonni a k -edik sor alkalmas többszörösét. Ez a változat, a Gauss–Jordan-kiküszöbölés, nagyon leegyszerűsíti a második fázist. Például mátrixinverziónál a módosított változat esetén teljesen el is marad a második fázis, mert ha van inverz, akkor az eredmény mátrix első fele egység mátrix lesz, így az inverz mátrix egyszerűen az eredmény mátrix második fele. Hátránya, hogy a műveletigény megnő.

* **6.1.12. A műveletigények összehasonlítása.** A műveletigényt csak a legfontosabb esetben számítjuk ki, amikor a kiindulási mátrix $n \times n$ -es, n lépést teszünk az első fázisban, így $j_k = k$ minden k -ra, sorcserékre pedig nincs szükség. Feltesszük, hogy m különböző jobb oldallal akarjuk megoldani az egyenletrendszert. A számításhoz felhasználjuk a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggést, amely teljes indukcióval könnyen igazolható.

A Gauss-féle kiküszöbölés esetén a k -edik lépésben a k -edik oszlop minden elemének kiküszöböléséhez 1 osztásra és $n - k + m$ szorzásra és kivonásra van szükség, így összesen $n - k$ osztásra és $(n - k + m)(n - k)$ szorzásra és kivonásra van szükség a k -edik lépésben. Minden jobb oldal esetén az x_k meghatározásánál $n - k$ szorzásra és kivonásra és egy osztásra van szükség. Így az m jobb oldal miatt az összes x_k meghatározására összesen m osztás és $m(n - k)$ szorzás és kivonás szükséges. Az osztások teljes száma tehát

$$\sum_{k=1}^n m(n - k) = mn(n - 1)/2.$$

A szorzások és kivonások teljes száma

$$\sum_{k=1}^n (n - k)(n - k + 2m) = n(n - 1)(m + (2n - 1)/6).$$

A módosított változatnál a k -edik lépésben $n - k + m$ osztásra és a k -edik oszlop minden elemének kiküszöböléséhez $n - k + m$ szorzásra és kivonásra van szükség, így összesen $n - k - m$ osztásra és $(n - k + m)(n - k)$ szorzásra és kivonásra van szükség a k -edik lépésben. Minden jobb oldal esetén az x_k meghatározásánál $n - k$ szorzásra és kivonásra van szükség. Így az m jobb oldal miatt az összes x_k meghatározására összesen $m(n - k)$ szorzás és kivonás szükséges. A műveletigény tehát ugyanannyi.

Gauss–Jordan-kiküszöbölés esetén a k -adik lépésben összesen $n - 1$ osztásra és $(n - k + m)(n - 1)$ szorzásra és kivonásra van szükség. Az x_k meghatározásához viszont minden jobb oldal esetén csak egy osztásra van szükség. Kedvezőbb a helyzet a módosított változatnál, ahol a szorzások és kivonások száma ugyanannyi, és ugyan a k -adik lépésben $n - k + m$ osztásra van szükség, az x_k számolásánál viszont nincs szükség osztásra sem. Ez utóbbi esetben ugyanannyi osztásra van szükség, mint a Gauss-féle kiküszöbölésnél, viszont a szorzások és kivonások teljes száma

$$\sum_{k=1}^n (n-1)(n-k+m) = n(n-1)(m+(n-1)/2).$$

Ez egyenletrendszer megoldása, azaz $m = 1$ esetén nagy n -re kb. $3/2$ -szerese, mátrixinverzió, azaz $m = n$ esetén nagy n -re kb. $9/8$ -szorosa a Gauss-féle kiküszöbölés műveletigényének.

*** 6.1.13. A háromszögmátrixok módszere.** A Gauss-féle kiküszöbölés úgy is végezhető, hogy oszlopcserével a főelemet a k -adik oszlopba hozzuk. (Az oszlopcseréket nyilván kell tartani.) Ekkor az eljárás eredménye egy felső háromszög mátrix lesz. Nyilván nem érdemes az eljárás során az információt nem hordozó nullákat visszaírni a mátrixba. (A módosított változatnál a főelem helyére sem írunk 1-et, hanem otthagyjuk a főelemet.) Az otthagyott elemek egy alsó háromszög mátrixot alkotnak. A k -adik lépésben otthagyott elemek teljesen meghatározzák az adott lépésben a b -ken végrehajtandó műveleteket. Így az elimináció két lépésre osztható: először csak az a mátrixszal dolgozunk, előállítva a háromszög mátrixokat, majd egyenként foglalkozunk a jobb oldalakkal. A sorcseréket is nyilván kell tartani, mert a b -k között ugyanilyen cseréket kell végezni.

*** 6.1.14. Numerikus megjegyzések.** A Gauss-féle kiküszöbölés gépi megvalósításánál legtöbbször a háromszögmátrixok módszerével történik. Fizikailag nem cseréljük meg a sorokat, illetve az oszlopokat, csak a rájuk mutató pointereket. A főelemmel való osztások helyett célszerű a főelem reciprokát kiszámítani és ezzel szorozni, mivel a szorzás általában sokkal gyorsabb, mint az osztás. A főelem reciproka tárolható a főelem helyén, mivel a továbbiakban csak a reciprokra van szükség. Valós vagy komplex elemű mátrixszal dolgozva, a k -adik lépés során érdemes az adott oszlopból a legnagyobb abszolút értékű elemet választani főelemnek (*részleges főelem-kiválasztás*), mert általában ez a választás nagyobb numerikus pontosságot ad. Szintén javítja a pontosságot, ha az eljárás megkezdése előtt a sorokat végigszorozzuk egy alkalmas konstanssal úgy, hogy minden sorban a legnagyobb abszolút értékű elem nagyságrendje ugyanannyi legyen (*sorskálázás*). További pontosságnövekedés érhető el, ha a k -adik lépésben a k -nál nem kisebb sorindexű és j_k -nál nem kisebb oszlopindexű elemek közül sor- és oszlopcserével a maximális abszolút értékű elemet választjuk ki főelemnek, azaz sor- és oszlopcserével ezt hozzuk a k -adik sor k -adik oszlopába. Mivel ez a *teljes főelem-kiválasztás* több munkát igényel, általában megelégszünk a sorskálázással és a részleges főelem-kiválasztással.

A háromszögmátrixok módszerével dolgozva egy számolási hibákkal terhelt közelítő megoldás javítható: ha a megoldást és a jobb oldalt egy-egy x , illetve b oszlopmátrix alakjában írjuk fel, akkor az egyenletrendszer $ax = b$ alakba írható. Egy $\tilde{x}$ közelítő megoldás segítségével – célszerűen megnövelt pontossággal – kiszámítjuk a $\tilde{b} = a\tilde{x}$ oszlopmátrixot. A megoldást pontosabbá tehetjük, ha meghatározzuk az $a(x - \tilde{x}) = b - \tilde{b}$ lineáris egyenletrendszer egy $\tilde{\tilde{x}}$ közelítő megoldását, mert $\tilde{x} + \tilde{\tilde{x}}$ jobb közelítése x -nek, mint $\tilde{x}$.

6.1.15. Vektortér. Legyen K egy test. A V halmazt K feletti *vektortérnek* vagy *lineáris térnek* nevezzük, a V elemeit *vektoroknak*, K elemeit pedig *skalároknak*, ha V -n értelmezve van egy összeadás, amellyel Abel-csoport, valamint egy $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ leképezése $K \times V$ -nek V -be, amelyet *skalárral való szorzásnak* nevezünk, úgy, hogy

- (S1) minden $\alpha, \beta \in K$ -ra és $x \in V$ -re $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (a skalárral való szorzás *disztributív* a skalárösszeadásra nézve);
- (S2) minden $\alpha \in K$ -ra és $x, y \in V$ -re $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (a skalárral való szorzás *disztributív* a vektorösszeadásra nézve);
- (S3) minden $\alpha, \beta \in K$ -ra és $x \in V$ -re $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (*asszociativitás*);
- (S4) minden $x \in V$ -re $1x = x$.

Ugyanúgy, mint a testeknél, kapjuk, hogy az összeadásoknál és a szorzásoknál felesleges kitenni a zárójelet és a sorrend sem számít (néha a skalárral való szorzásnál a skalárt a jobb oldalra írjuk), a 0 vektor és az x vektor $-x$ additív inverze (az x *ellentettje*) egyértelműen meghatározott. Innen a 0 vektort bármely α skalárral szorozva a 0 vektort kapjuk, mert $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$. Hasonlóan, bármely x vektort a nulla skalárral szorozva, a nulla vektort kapjuk, mert $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. Az x vektor $-x$ ellentettje $(-1)x$, mert $0 = (1 - 1)x = x + (-1)x$.

Megjegyezzük, hogy a vektorokat szokás jelölésben megkülönböztetni a skalároktól, például x helyett $\mathbf{x}$ -et, $\vec{x}$ -et, $\underline{x}$ -et írni. Mi nem fogjuk használni ezen jelöléseket. Ennek hátránya, hogy a nullvektor és a nulla skalár jelölése is 0, de ez a gyakorlatban nem okoz problémát.

Számunkra legfontosabbak az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti, azaz a $\mathbb{K}$ feletti vektorterek.

6.1.16. Példák. Egyenes, sík és tér kötött és szabad vektorai, erők, elmozdulások, sebességek, gyorsulások stb. vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. A $\mathbb{K}$ test vektortér saját maga felett. A szám n -esek $\mathbb{K}^n$ tere a koordinátáinként történő összeaddással és skalárral történő szorzással vektortér $\mathbb{K}$ felett. A $\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrixok a mátrixok összeaddásával és skalárral történő szorzásával vektorteret alkotnak $\mathbb{K}$ felett. Általánosabban, bármely X halmazra az X -en értelmezett $\mathbb{K}$ -beli értékű függvények vektorteret alkotnak $\mathbb{K}$ felett. Hasonlóan bármely K testre és X halmazra az X -et K -ba képező függvények vektorteret alkotnak K felett.

6.1.17. Altér. Egy $\mathbb{K}$ feletti V vektortér egy U részhalmazát *altérnek* nevezzük, ha maga is vektortér ugyanazzal az összeaddással és skalárral való szorzással. Ehhez nyilván csak az kell, hogy az összeadás és a skalárral való szorzás ne vezessen ki U -ból, vagy másként, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in U$ esetén $\alpha x + \beta y \in U$ teljesüljön. Nyilván V maga egy altér; a V -től különböző altereket *valódi altereknek* nevezzük. Nyilván $\{0\}$ is mindig altér; V és $\{0\}$ a *triviális alterek*.

Alterek bármely családjának a metszete is altér. Egy $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer (speciálisan egy $X \subset V$ részhalmaz) által *generált altéren* (vagy a vektorrendszer *lineáris burkán*) az összes, az x_i , $i \in I$ vektorokat tartalmazó alterek metszetét értjük.

6.1.18. Példák. Alterek: síkban és a térben az origón átmenő egyenesek és síkok; $\mathbb{C}$ -ben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben $\mathbb{R}$ és $i\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -ben a korlátos sorozatok, a konvergens sorozatok, a nullsorozatok, azok a sorozatok, amelyeknek csak véges sok tagja nem nulla; $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ -ben a folytonos függvények, differenciálható függvények, egy adott pontban eltűnő

függvények, a minden kompakt intervallumon integrálható függvények, a polinomok, az adott $k \in \mathbb{N}$ -nél alacsonyabb fokú polinomok; $\mathbb{R}^n$ -ben az n -változós polinomok, az adott $k \in \mathbb{N}$ -nél alacsonyabb fokú n -változós polinomok.

6.1.19. Lineáris kombináció. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x \in V$ vektor az

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in V$$

vektorok *lineáris kombinációja*, ha léteznek olyan

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

skalárok, hogy $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Megjegyezzük, hogy az üres összegben szokás szerint a nullát értjük, így a 0 vektor már az üres elemrendszernek is lineáris kombinációja.

Az n szerinti teljes indukcióval adódik, hogy ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok mind egy U altérben vannak, akkor bármely lineáris kombinációjuk is U -ban van.

Egy vektorrendszerből bármely olyan vektort elhagyva, amely a többiek lineáris kombinációja, a generált altér nem változik, hiszen minden altér, amely tartalmazza a maradék vektorrendszert, tartalmazza az elhagyott vektort is.

6.1.20. Megjegyzés. A $\mathbb{K}^m$ térben Gauss-féle kiküszöböléssel könnyen eldönthető, hogy egy x vektor lineáris kombinációja-e az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektoroknak. Ez ugyanis azt jelenti, hogy annak a lineáris egyenletrendszernek, amely mátrixának j -edik oszlopa x_j , a jobb oldalán pedig x áll, van egy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ megoldása. Így a kombináló együtthatókat is megkapjuk.

6.1.21. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett és $x_i, i \in I$ egy vektorrendszer. Az $x_i, i \in I$ által generált altér az x_i elemek összes lineáris kombinációinak halmaza.

Bizonyítás. Az x_i elemek bármely lineáris kombinációja benne van az x_i -k által generált altérben. Másrészt az x_i -k két lineáris kombinációjának az összege, és az x_i -k egy lineáris kombinációjának a skalárszorosa is az x_i -k egy lineáris kombinációja, így az x_i -k lineáris kombinációi alteret alkotnak. $\square$

* **6.1.22. Tétel.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett és

$$U_1, U_2, \dots, U_m$$

alterei V -nek. Az U_i alterek egyesítése által generált altér az alterek összege:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_m := \{u_1 + u_2 + \dots + u_m : u_i \in U_i, \text{ ha } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel szerint az alterek összege benne van a generált altérben. Másrészt, a generált altér minden u eleme az U_i alterek egyesítéséből vett elemek lineáris kombinációja. Adjuk össze a lineáris kombináció azon tagjait, amelyek vektorai U_1 -beliek, és legyen ezek összege u_1 . (Lehet, hogy nincs ilyen tag, ekkor az összeg nulla.) Most adjuk össze azokat a tagokat, amelyek vektorai U_2 -beliek és eddig még nem használtuk fel őket, és legyen ezek összege u_2 . Hasonlóan folytatva, a kapott $u_i \in U_i$ vektorok összege u . $\square$

6.1.23. Generátorrendszer, dimenzió. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer a V *generátorrendszere*, ha az x_i , $i \in I$ által generált altér V . Ez azzal ekvivalens, hogy az x_i , $i \in I$ vektorok lineáris kombinációjaként V minden vektora előáll. Ha V -nek van véges generátorrendszere, akkor azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre van n elemű generátorrendszere, a V *dimenziójának* nevezzük és $\dim(V)$ -vel jelöljük; ha nincs véges generátorrendszer, akkor azt mondjuk, hogy V *végtelen dimenziós* és azt írjuk, hogy $\dim(V) = \infty$.

Főleg véges dimenziós terekkel fogunk foglalkozni.

6.1.24. Lineáris függetlenség és függőség. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer *lineárisan függő*, ha vannak a vektorrendszernek olyan vektorai, amelyeknek nem csupa nulla együtthatókkal vett lineáris kombinációjaként előáll a nulla vektor. Ha a vektorrendszer nem lineárisan függő, akkor *lineárisan függetlennek* nevezzük.

Ha például a vektorrendszer egy x_1 vektora nulla, akkor a vektorrendszer lineárisan függő, mert $1x_1 = 0$. Ha a vektorrendszer két vektora megegyezik, mondjuk $x_1 = x_2$, akkor is függő a vektorrendszer, mert $1x_1 + (-1)x_2 = 0$. Ha a vektorrendszer valamely vektora más vektorainak lineáris kombinációja, mondjuk $x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1}$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő, mert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + (-1)x_k = 0$. Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor nyilván minden, öt részrendszerként tartalmazó vektorrendszer is lineárisan függő. Másrészt, a definíció szerint, ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor van olyan véges részrendszere, amely lineárisan függő. Ennek megfelelően egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden véges részrendszere lineárisan független. Elég tehát véges vektorrendszerek lineáris függettségével foglalkozni.

6.1.25. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha valamely x_k , $1 \leq k \leq n$ vektor az $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

Emlékeztetünk rá, hogy a nulla vektor már az üres rendszernek is lineáris kombinációja; a $k = 1$ esetben ezen múlik az állítás.

Bizonyítás. Az egyik irányt már láttuk. Ha valamely x_j vektorokból nem csupa nulla együtthatókkal előáll a nulla vektor, akkor a többi vektorok együtthatóit nullának választva, vannak olyan nem csupa nulla együtthatók, hogy $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre ez teljesül. Biztos, hogy $\alpha_k \neq 0$, ellenkező esetben k nem lenne minimális. Így

$$x_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} x_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_k} x_2 + \dots + \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1}. \quad \square$$

6.1.26. Bázis. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer a V *bázisa*, vagy *koordináta-rendszere*, ha lineárisan független generátorrendszere V -nek. A koordináta-rendszer elnevezést 6.1.40 magyarázza.

Például legyen a $\mathbb{K}^n$ térben az j -edik *egységvektor* az a szám n -es, amelyben a j -edik szám 1, az összes többi 0, azaz legyen $e_j = (\delta_{i,j})_{i=1}^n$. Az e_j , $j = 1, 2, \dots, n$ vektorok bázis alkotnak: A $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ lineáris kombináció $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Innen egyrészt látjuk,

hogy $\mathbb{K}^n$ minden eleme előáll lineáris kombinációként, tehát az e_j vektorok generátorrendszeret alkotnak. Másrészt ez a lineáris kombináció csak akkor lehet nulla, ha minden α_j nulla, így az e_j vektorok lineárisan függetlenek. Az e_j , $j = 1, 2, \dots, n$ bázis $\mathbb{K}^n$ szokásos bázisa.

6.1.27. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ egy lineárisan független vektorrendszer, $y_1, y_2, \dots, y_n \in V$ pedig egy generátorrendszer. Ekkor $m \leq n$ és léteznek olyan $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ indexek, hogy $x_1, x_2, \dots, x_m, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$ bázis.

Bizonyítás. Tegyük az x_m -et az y_j vektorok elé:

$$x_m, y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Mivel $y_1, y_2, \dots, y_n$ generátorrendszer, az x_m az $y_1, y_2, \dots, y_n$ vektorok lineáris kombinációja, ezért ez a rendszer nem lineárisan független. Így valamely vektora az előtte állók lineáris kombinációja. Ez nem lehet az x_m , mert az ellentmondana az x -ek lineáris függetlenségének. Hagyjuk el ezt az y vektort. A kapott rendszer generátorrendszer marad. Most a kapott rendszer elé írva x_{m-1} -et, a kapott rendszer újra lineárisan függő, de az első olyan vektor, amely lineárisan kombinálható az előtte állókból, az y -ok közül kell kikerülni; ezt hagyjuk el. Indukcióval végül egy olyan generátorrendszert kapunk, amely az $x_1, x_2, \dots, x_m$ vektorokkal kezdődik, és esetleg még néhány y -ból áll. Mivel minden lépésben egy x vektort vettünk a rendszerhez, és egy y -t hagytunk el, következik, hogy $m \leq n$.

Ha a kapott vektorrendszer lineárisan függő, folytassuk az eljárást az első olyan vektor elhagyásával, amely lineárisan kombinálható az előzőekből. Ez továbbra is csak az y -ok közül kerülhet ki. Végül, amikor már egyik vektor sem kombinálható az előzőekből, olyan generátorrendszert kapunk, amely lineárisan független, tehát bázis. $\square$

6.1.28. Következmény. Véges dimenziós vektortérnek van bázisa.

Bizonyítás. Legyen $m = 0$ és $y_1, \dots, y_n$ egy generátorrendszer, és alkalmazzuk a tételt. $\square$

6.1.29. Következmény. Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa vektorainak száma megegyezik.

Bizonyítás. Ha $x_1, \dots, x_m$ és $y_1, \dots, y_n$ is bázisok, akkor $n \leq m$ és $m \leq n$ és így $n = m$. $\square$

6.1.30. Következmény. Véges dimenziós vektortérben bármely minimális elemszámú generátorrendszer bázis.

Bizonyítás. Egy minimális elemszámú generátorrendszer nem lehet lineárisan függő, mert akkor valamelyik vektora kombinálható lenne az előtte állókból, és azt elhagyva, egy kisebb elemszámú generátorrendszert kapnánk. $\square$

6.1.31. Következmény. Véges dimenziós vektortér bázisa annyi vektort tartalmaz, amennyi a tér dimenziója.

Bizonyítás. Az előző következményből adódik. $\square$

6.1.32. Következmény. Egy n dimenziós térben bármely $n + 1$ vektor lineárisan függő.

Bizonyítás. Egyébként egy generátorrendszer tagjaival kiegészíthetnénk egy legalább $n + 1$ tagú bázissá. $\square$

6.1.33. Következmény. Egy n dimenziós térben egy n vektorból álló rendszer pontosan akkor bázis, ha lineárisan független.

Bizonyítás. Utána írva bármely vektort az előző következmény szerint az kombinálható az előtte állókból. $\square$

6.1.34. Következmény. Egy n dimenziós térben egy n vektorból álló rendszer pontosan akkor bázis, ha generátorrendszer.

Bizonyítás. Ha generátorrendszer, de nem lenne lineárisan független, akkor valamelyik kombinálható lenne az előtte állókból. Ezt elhagyva, n -nél kevesebb vektorból álló generátorrendszert kapnánk, de akkor a tér dimenziója nem lehetne n . $\square$

6.1.35. Rang. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_i \in V, i \in I$ vektorrendszer *rangja* a vektorrendszer által generált altér dimenziója. Egy véges vektorrendszer rangja nyilván véges. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrix *oszloprangja* a mátrix oszlopai, mint $\mathbb{K}^m$ vektorai által alkotott vektorrendszer rangja; a mátrix *sorrangja* a vektor sorai, mint $\mathbb{K}^n$ vektorai által alkotott vektorrendszer rangja. A mátrix *sorrangja* nyilván a transzponált mátrix *oszloprangja*, *oszloprangja* pedig a transzponált mátrix *sorrangja*. Később, az 6.2.62 tételben meg fogjuk mutatni, hogy a *sorrang* és az *oszloprang* megegyezik.

6.1.36. Megjegyzés. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű mátrix *oszloprangját* könnyen meghatározhatjuk Gauss-féle kiküszöböléssel. A 6.1.20 megjegyzés szerint, ha az eljárást a mátrixra alkalmazva a k -edik lépésben a j_k -edik oszlopot választjuk, akkor az eredeti mátrix $j_{k-1} < j < j_k$ indexű oszlopai a $j_1, \dots, j_{k-1}$ indexű oszlopok lineáris kombinációi, a j_k indexű oszlop viszont nem. Így ha az eljárás első fázisa a $k + 1$ -edik lépésben fejeződik be, akkor az eredeti mátrix minden oszlopa a $j_1, \dots, j_k$ indexű oszlopok lineáris kombinációja, ezek viszont lineárisan függetlenek.

6.1.37. Tétel. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, U egy altere V -nek, és tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \dots, x_k$ lineárisan független vektorrendszer U -ban. Ekkor létezik olyan $x_{k+1}, \dots, x_n$ vektorok és $k \leq m \leq n$, hogy $x_1, x_2, \dots, x_m$ bázisa U -nak, míg $x_1, x_2, \dots, x_n$ bázisa V -nek.

Bizonyítás. Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorrendszer által generált altér része U -nak. Indukcióval, $j = k$ -val kezdve, ha az $x_1, x_2, \dots, x_j$ vektorrendszer által generált altér része U -nak, de nem egyenlő U -val, válasszuk x_{j+1} -et tetszőleges olyan vektornak, amely nincs benne a generált altérben, de eleme U -nak. Valamely $j \leq n$ -re a generált altér meg kell egyezzen U -val, mert egyébként n -nél több lineárisan független vektort találnánk V -ben. Ez a j lesz m . Innen kezdve, ha a generált altér nem egyezik meg V -vel, válasszuk x_{j+1} -et tetszőleges olyan V -beli vektornak, amely nincs benne a generált altérben. Ha $j = n$, akkor a generált altér meg kell egyezzen V -vel, mert egyébként n -nél több lineárisan független vektort találnánk V -ben. $\square$

6.1.38. Következmény. Az U is véges dimenziós, és dimenziója legfeljebb n . $\square$

6.1.39. Tétel. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ egy vektorrendszer. A vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha minden $x \in V$ vektor egyértelműen állítható elő $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$ alakban.

Bizonyítás. Ha minden $x \in V$ előáll ilyen alakban, akkor $x_1, x_2, \dots, x_n$ generátorrendszer. Ha nem lenne lineárisan független, akkor nem csupa nulla együtthatókkal $\eta_1 x_1 + \dots + \eta_n x_n = 0$ teljesülne, ahonnan azt kapnánk, hogy

$$(\xi_1 + \eta_1)x_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)x_n = x,$$

azaz az előállítás nem lenne egyértelmű.

Megfordítva, ha $x_1, \dots, x_n$ bázis, akkor minden $x \in V$ előáll $x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ alakban. Ha az előállítás nem lenne egyértelmű, mondjuk $x = \eta_1 x_1 + \dots + \eta_n x_n$ is teljesülne, akkor a két előállítást kivonva egymásból, azt kapnánk, hogy

$$(\xi_1 - \eta_1)x_1 + \dots + (\xi_n - \eta_n)x_n = 0,$$

ahol nem minden együttható nulla, így $x_1, \dots, x_n$ nem lenne lineárisan független. $\square$

6.1.40. Koordináták. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett,

$$e_1, e_2, \dots, e_n \in V$$

pedig egy bázis. Az előző tétel szerint bármely $x \in V$ -hez egyértelműen létező

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

számokat, amelyekkel $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, az x vektor $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

6.1.41. Izomorfia. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Egy kölcsönösen egyértelmű $\varphi: U \rightarrow V$ leképezését U -nak V -re *izomorfizmusnak* nevezzük, ha φ megőrzi a műveleteket, azaz bármely $x, y \in U$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ és $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$. A két tulajdonság nyilván ekvivalens azzal, hogy bármely $x, y \in U$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$. Egy izomorfizmus inverze is nyilván izomorfizmus. Ha U és V között létezik izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy U és V *izomorfak*. Adott test feletti vektorterek izomorfája nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Egy nyilvánvaló példa izomorfia: a $\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrixok a $\mathbb{K}^{mn}$ térrel izomorf teret alkotnak.

Mivel izomorfizmus nyilván megőrzi a lineáris kombinációkat, azaz egy lineáris kombináció képe a vektorok képeinek ugyanazon együtthatókkal vett lineáris kombinációja, a lineáris kombinációk segítségével definiált fogalmak és tulajdonságok (altér, generátorrendszer, dimenzió, lineáris függetlenség, bázis stb.) izomorfizmusnál megőrződnek, például egy véges dimenziós térrel izomorf tér is véges dimenziós, és ugyanannyi a dimenziója. Megmutatjuk, hogy megfordítva, ha két véges dimenziós tér dimenziója megegyezik, akkor izomorfak. Ehhez elég bebizonyítani, hogy ha V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor izomorf $\mathbb{K}^n$ -nel. Ennek alapján elég lenne véges dimenziós terek helyett csak a $\mathbb{K}^n$ terekkel foglalkozni. Ez azonban sok szempontból nem célszerű.

6.1.42. Tétel. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor V izomorf $\mathbb{K}^n$ -nel. Pontosabban, ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy tetszőleges bázis V -ben, és φ az a leképezés, amely V egy $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ eleméhez $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ -et rendeli, akkor φ izomorfizmus, amely az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázist $\mathbb{K}^n$ szokásos bázisába viszi.

A tétel jelentősége, hogy ha valamely V -beli bázisra nézve ismerjük egy x_i , $i \in I$ vektorrendszer vektorainak koordinátáit, akkor minden, a vektorrendszerre vonatkozó lineáris algebrai problémát $\mathbb{K}^n$ -beli vektorokra vonatkozó problémára vezethetünk vissza.

Bizonyítás. Nyilván φ a V -t $\mathbb{K}^n$ -re képezi, kölcsönösen egyértelmű és művelettartó.

□

* **6.1.43. Vektorterek direkt összege.** Legyenek

$$V_1, V_2, \dots, V_m$$

vektorterek $\mathbb{K}$ felett. A vektorterek *direkt összege* (vagy *külső direkt összege*) a rendezett m -esek

$$V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m := \{(v_1, v_2, \dots, v_m) : v_i \in V_i, \text{ ha } i = 1, 2, \dots, m\}$$

halmaza, amelyen a műveleteket koordinátánként értelmezzük: ha

$$v, v' \in V, \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_m), \quad v' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$$

és $\alpha \in K$, akkor legyen

$$v + v' := (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2, \dots, v_m + v'_m),$$

és

$$\alpha v := (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_m).$$

Könnyű látni, hogy így értelmezve a műveleteket V lineáris tér $\mathbb{K}$ felett.

* **6.1.44. Tétel.** Az előző definíció jelöléseivel, ha adott V_i egy $e_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_i$ bázisa, akkor

$$(0, \dots, 0, e_{i,j}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

a V egy bázisa.

Bizonyítás. Az $e_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_i$ vektorrendszer $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$ lineáris kombinációjaként egyértelműen állítható elő minden $v_i \in V_i$ vektor. Az

$$e'_{i,j} = (0, \dots, 0, e_{i,j}, 0, \dots, 0)$$

jelöléssel

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_{i,j} e'_{i,j},$$

és az előállítás triviálisan egyértelmű, mert koordinátánként az. □

* **6.1.45. Következmény.** Véges dimenziós vektorterek direkt összege is véges dimenziós, és dimenziója a tagok dimenzióinak összege. □

* **6.1.46. Példa.** A $\mathbb{K}^m$ és $\mathbb{K}^n$ terek direkt összege $m + n$ dimenziós. A $\mathbb{K}^n$ tér n darab egydimenziós tér direkt összege. $\square$

6.1.47. Affin sokaságok. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vektorok egy *affin kombinációján* egy olyan $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ lineáris kombinációt értünk, amelyre az együtthatók összege egy, azaz $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. A V egy *affin sokaságán* egy olyan $\emptyset \neq A \subset V$ részhalmazt értünk, amelyből nem vezet ki az affin kombinációk képzése, azaz elemeinek bármely affin kombinációját tartalmazza. Nyilván V egyelemű részhalmazai, azaz pontjai affin sokaságok, és maga V is affin sokaság, ezek a *triviális affin sokaságok*. A következő tétel leírja az affin sokaságok szerkezetét.

6.1.48. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett és $A \subset V$ egy affin sokaság. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott U altere V -nek, amellyel $A = U + x$, ahol x az A tetszőleges elemének választható. Megfordítva, ha U egy altere V -nek, akkor bármely $x \in V$ -re $A = U + x$ egy, az x -et tartalmazó affin sokaság.

Bizonyítás. A megfordítás nyilvánvaló: mivel $0 \in U$, az A tartalmazza x -et, és ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, $x_j = u_j + x$, ahol $u_j \in U$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, akkor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + x \in U + x.$$

Az első állításhoz vegyük észre, hogy $U = A - x$ csak akkor lehet altér, ha $x \in A$, mert egyébként nem tartalmazza a nullvektort. Ha $u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor $x \in A$, $u + x, v + x \in A$, így $\alpha(u + x) + \beta(v + x) + (1 - \alpha - \beta)x \in A$, tehát $\alpha u + \beta v \in U$, vagyis U altér. Ha $x, y \in A$ és $u = z - x \in A - x$, akkor $w = 1 \cdot z + (-1) \cdot x + 1 \cdot y \in A$, így $u = w - y \in A - y$, azaz $A - x \subset A - y$. Az x és y szerepét megcserélve kapjuk, hogy $A - x = A - y$. $\square$

6.1.49. Következmény. Egy affin sokaság pontosan akkor altér, ha tartalmazza a 0 vektort. $\square$

6.1.50. Következmény. Ha V véges dimenziós, akkor választva U -ban egy

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

bázist és egy tetszőleges $x \in A$ vektort, az A minden y eleme egyértelműen állítható elő

$$y = x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m$$

alakban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. $\square$

6.1.51. Affin sokaság dimenziója. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ha a V két affin sokaságához az előző tétel szerint tartozó alterek megegyeznek, akkor a két affin sokaságot *párhuzamosnak* nevezzük. A V egy affin sokaságának *dimenzióján* az előző tétel szerint hozzá egyértelműen tartozó altér dimenzióját értjük. A nulldimenziós affin sokaságokat *pontoknak*, az egydimenziósokat *egyeneseknek*, a kétdimenziósokat *síkoknak* nevezzük. Ha V véges dimenziós, $\dim(V) = n$, akkor a V tér $n - 1$ dimenziós affin sokaságait *hipersíkoknak* nevezzük.

* **6.1.52. A lineáris programozás alapfeladata.** Lineáris algebrai ismereteinket felhasználhatjuk optimalizálási feladatok megoldására: lineáris célfüggvény maximumának megkeresésére $\mathbb{R}^n$ véges sok lineáris feltétellel megadott részhalmazon, egy *konvex poliéderen*. Az alapfeladat a következő: maximalizálandó a $d + \sum_{j \in C} c_j x_j$, $x_j \in \mathbb{R}$ célfüggvény, ahol C egy véges indexhalmaz, a

$$\sum_{j \in C} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad (i \in B), \quad x_j \geq 0 \quad (j \in C)$$

feltételek mellett, ahol B is egy véges indexhalmaz, és az $a_{i,j}, b_i, c_j, d$ konstansok mind valóságok. Nyilvánvaló, hogy a maximumok helye nem függ d -től, csak az értéke. Az alapfeladatot tömören az $ax \leq b$, $x \geq 0$, $d + c'x \rightarrow \max$ alakba is írhatjuk, ahol az egyenlőtlenségek koordinátánként értendők; a mátrix, x és c oszlopmátrixok, c' a c transzponáltja. Geometriailag az egyenlőtlenség-rendszer által megadott halmaz egy zárt, konvex poliéder, azaz véges sok zárt féltér metszete.

* **6.1.53. Feladat [7].** Az előző pont jelöléseivel adjunk példát a kétdimenziós esetben (azaz amikor C kételemű) arra, hogy

- (1) az egyenlőtlenség-rendszernek egyáltalán nincs megoldása;
- (2) az origó nem megoldása az egyenlőtlenség-rendszernek, de van megoldása;
- (3) pontosan egy maximumhely van;
- (4) végtelen sok maximumhely van;
- (5) az egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmaza nem korlátos, mégis pontosan egy maximumhely van;
- (6) az egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmaza nem korlátos, mégis végtelen sok maximumhely van;
- (7) a célfüggvény nem korlátos.

* **6.1.54. Lineáris programozási feladatok visszavezetése az alapfeladatra.** Az alapfeladat jelöléseivel, ha minimalizálni kell, vegyük a célfüggvény ellentettjét. Ha valamelyik egyenlőtlenség $\geq$ alakú, vegyük mindkét oldal ellentettjét. Ha egy feltétel egyenlőség, írjunk helyette egy $\leq$ és egy $\geq$ feltételt. Ha az x_j változóra nincs nemnegativitási feltétel, írjuk $x_j = x'_j - x''_j$, $x'_j, x''_j \geq 0$ alakba.

* **6.1.55. Lineáris programozási feladat egyenletrendszer alakja.** A lineáris programozás alapfeladata az ottani jelölésekkel, bevezetve az y segédvektort, a következő ekvivalens alakba is írható:

$$y = b - ax, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad d + c'x \rightarrow \max.$$

Az egyenletrendszer, részletesen kiírva

$$y_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B$$

alakú. Az egyenletrendszer jobb oldalán álló változókat *bázisváltozóknak* nevezzük. Az egyenletrendszer megoldásaira egyszerűen, mint *megoldásokra* fogunk hivatkozni. Vegyük

észre, hogy megoldás mindig van, hiszen minden nem bázis változó, azaz minden x_j helyére nullát helyettesítve, egy megoldást kapunk; ezt *bázismegoldásnak* nevezzük, erre a célfüggvény értéke d . A bázismegoldásra $y_i = b_i$, ha $i \in B$. Ha egy megoldás kielégíti az egyenlőtlenségeket is, akkor *megengedett megoldásnak* nevezzük (ilyen már nem mindig van). A bázismegoldás pontosan akkor megengedett megoldás, ha $b_i \geq 0$ minden $i \in B$ -re. Ha egy megengedett megoldásra a célfüggvény értéke maximális, akkor *optimális megoldásnak* nevezzük (ilyen lehet hogy nincs, de végtelen sok is lehet). Megmutatható, hogy ha van megengedett megoldás, akkor vagy nem korlátos felülről a célfüggvény, vagy van optimális megoldás. A célunk annak eldöntése, hogy van-e megengedett megoldás, ha van, annak eldöntése, hogy korlátos-e a célfüggvény, és ha korlátos, akkor egy optimális megoldás meghatározása.

Az alapgondolat, hogy egy megengedett bázismegoldás változtatásával egy olyan megengedett bázismegoldásra térünk át, amelyre a célfüggvény értéke nagyobb, de legalábbis nem kisebb. Nyilván egy olyan x_j változót kell választanunk, amelyre a megfelelő c_j pozitív, mivel x_j értékét csak növelni tudjuk. A növelésnél az

$$y_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B$$

értékeknek nemnegatívnak kell maradniuk. Ez biztosan teljesül y_i -re, ha $a_{i,j} \leq 0$; ha minden $i \in B$ -re ez a helyzet, akkor az x_j értékét akármeddig növelhetjük, és a célfüggvény értéke tetszőlegesen nagy lehet. Ha viszont $a_{i,j} > 0$, akkor x_j legfeljebb $b_i/a_{i,j}$ -ig növelhető. Nyilván akkor érjük el a célfüggvény maximális növekedését úgy, hogy még megengedett megoldást kapunk, ha x_j -t a $b_i/a_{i,j}$ értékek minimumáig növeljük, ahol a minimum az összes olyan indexre értendő, amelyre $a_{i,j} > 0$. Vegyük észre, hogy ekkor y_i új értéke nullává válik, tehát y_i -t kiléptethetjük a bázisból, és helyette x_j -t kell beléptetnünk. Ezt könnyen meg is tehetjük, ha x_j -t kifejezzük az

$$y_i = b_i - \sum_{j \in A} a_{i,j} x_j$$

egyenletből (az egyenletet ezzel az új alakkal helyettesítjük), majd behelyettesítjük a többi egyenletbe és a célfüggvénybe is. Ez a helyettesítés nyilván egy ekvivalens, új egyenletrendszer alakot eredményez, amelynek a bázismegoldása azonban más, arra a célfüggvény értéke nagyobb – de legalábbis nem kisebb – és a célfüggvényt is csak más alakban írtuk fel. Ezután az y_k , $k \in B$, $k \neq i$ és x_j változók lesznek a bázisváltozók.

Vegyük észre, hogy eddigi jelöléseink csak zavarnak a fent vázolt bázisváltozó-cserénél: sokkal egyszerűbb, ha y_i helyett az x_i jelölést használjuk a bázisváltozókra is; persze, ezt csak akkor tehetjük meg, ha a B és C indexhalmazok diszjunktak. Nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, és a továbbiakban fel is tesszük, hogy $B \cup C = \{1, 2, \dots, m+n\}$, ha B -nek m , a C -nek pedig n eleme van. Így az egyenletrendszer alak végső formája

$$x_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B, \quad x_k \geq 0, \quad \text{ha } k \in B \cup C = \{1, 2, \dots, m+n\}$$

és

$$d + \sum_{j \in C} c_j x_j \rightarrow \max.$$

* **6.1.56. A bázisváltozók cseréje.** Az előző pontban vázolt bázisváltozó-csere az ottani (végső) jelölésekkel részletezve a következőképpen történik: Adott az

$$x_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B$$

egyenletrendszer és a

$$d + \sum_{j \in C} c_j x_j$$

célfüggvény, valamint egy $i \in B$ és egy $j \in C$ index, úgy, hogy $a_{i,j} \neq 0$. Az

$$x_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j$$

egyenletből kifejezzük x_j -t:

$$x_j = \frac{b_i}{a_{i,j}} - \frac{1}{a_{i,j}} x_i - \sum_{\ell \in C, \ell \neq j} \frac{a_{i,\ell}}{a_{i,j}} x_\ell,$$

majd x_j -t behelyettesítjük az összes többi egyenletbe, és a célfüggvénybe. Az egyenletrendszer új alakja

$$x_k = b'_k - \sum_{\ell \in C'} a'_{k,\ell} x_\ell, \quad k \in B',$$

ahol $B' = \{j\} \cup (B \setminus \{i\})$, $C' = \{i\} \cup (C \setminus \{j\})$, $a'_{j,i} = 1/a_{i,j}$, $b'_j = b_i a'_{j,i}$, $a'_{j,\ell} = a_{i,\ell} a'_{j,i}$, ha $\ell \in C'$, $\ell \neq i$, továbbá ha $k \in B'$, $k \neq j$, akkor $b'_k = b_k - a_{k,j} a'_{j,i}$, $a'_{k,i} = -a_{k,j} a'_{j,i}$, valamint $a'_{k,\ell} = a_{k,\ell} - a_{k,i} a'_{j,i}$, ha $\ell \in C'$, $\ell \neq i$. A célfüggvény új alakja

$$d' + \sum_{\ell \in C'} c'_\ell x_\ell,$$

ahol $d' = d + c_j b'_j$, $c'_i = -c_j a'_{j,i}$, és $c'_\ell = c_\ell - c_j a_{j,\ell}$, ha $\ell \in C'$, $\ell \neq i$.

* **6.1.57. A szimplex módszer.** Tegyük fel, hogy az alapproblémával ekvivalens valamelyik egyenletrendszer alak bázismegoldása egy megengedett megoldás. Ekkor az alábbi algoritmusról megmutatható, hogy véges sok lépésben megáll, és vagy megmutatja, hogy a célfüggvény nem korlátos, vagy megtalál egy optimális megoldást:

- (1) Válasszunk egy $j \in C$ indexet, amire $c_j > 0$. Ha nincs ilyen, álljunk meg, a bázismegoldás optimális. Ha több is van, válasszuk a legkisebb indexet.
- (2) Válasszunk egy $i \in B$ indexet, amelyre $a_{i,j} > 0$. Ha nincs ilyen, álljunk meg, a célfüggvény nem korlátos a megengedett megoldások halmazán. Ha több is van, egy olyat válasszunk, amire $b_i/a_{i,j}$ minimális. Ha több indexre is minimális, a legkisebbet válasszuk.
- (3) Hajtsunk végre bázisváltozó-cserét: a j indexű változó bekerül a bázisváltozók közé, az i indexű pedig kikerül közülük; menjünk (1)-re.

* **6.1.58. Megengedett bázismegoldás keresése.** Hátravan még annak eldöntése, hogy az eredeti

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \leq b_i \quad (i = n+1, \dots, n+m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

egyenlőtlenség-rendszernek van-e megengedett megoldása, és ha van, egy megengedett bázismegoldás megkeresése. A célfüggvény nyilván egyik kérdésnél sem játszik szerepet. Ha $b_i \geq 0$, $i = n+1, \dots, n+m$, akkor a bázismegoldás megengedett, és alkalmazhatjuk a szimplex módszert. Egyébként válasszunk ki egy i indexet, amelyre b_i minimális. Helyettesítsük az eredeti egyenlőtlenség-rendszert a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j - x_0 \leq b_i \quad (i = n+1, \dots, n+m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

egyenlőtlenség-rendszerrel és tekintsük a $-x_0 \rightarrow \max$ feladatot. Ez a célfüggvény nyilván felülről korlátos, mert megengedett megoldásra nem lehet pozitív. Az új problémának megengedett megoldása is van, hiszen $x_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$) választással, elég nagy x_0 értéket választva, megengedett megoldást kapunk. Ez majdnem bázismegoldása is az új problémának, hiszen csak x_0 értéke nem nulla. Léptessük ki x_i -t a bázisváltozók közül, és helyette léptessük be x_0 -at a bázisváltozók közé: ezzel a bázisvektor-cserével az új bázismegoldás megengedett lesz, persze, az új problémára. Most alkalmazzuk a szimplex módszert az új problémára. A kapott optimális megoldásra ha az optimum nulla, azaz $x_0 = 0$, akkor a kapott bázismegoldás bázismegoldása az eredeti problémának is, hiszen $x_0 = 0$ helyettesítéssel az új egyenlőtlenség-rendszer a régibe megy át. Megfordítva, ha a régi egyenlőtlenség-rendszer kielégíthető, akkor $x_0 = 0$ választással az új is, így az új problémának az optimális megoldása $x_0 = 0$. Ha tehát ez nem teljesül, akkor az eredeti problémának nincs megengedett megoldása.

6.2 Lineáris leképezések

6.2.1. Lineáris leképezések. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az U egy U' alterének V -be való A leképezését *lineáris leképezésnek* nevezzük, ha

- (1) minden $x, y \in U'$ esetén $A(x+y) = A(x) + A(y)$ (a leképezés *additív*);
- (2) minden $x \in U'$, $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ (a leképezés *homogén*).

A két tulajdonság azt jelenti, hogy A művelettartó az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve. Nyilván $A(0) = A(0x) = 0A(x) = 0$. A lineáris leképezéseknél általában nem szokás kiírni a zárójelet, hanem $A(x)$ helyett gyakran Ax -et írunk.

A fenti két tulajdonság azzal ekvivalens, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in U'$ esetén $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$; valóban ha (1) és (2) teljesül, akkor

$$A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

míg ebből a tulajdonságból $\beta = 0$ helyettesítéssel kapjuk a homogenitást és $\alpha = \beta = 1$ helyettesítéssel az additivitást.

Ha V' egy altere V -nek, akkor $A^{-1}(V')$ altere U -nak: ha

$$x, y \in A^{-1}(V'), \quad Ax = u \in V', \quad Ay = v \in V',$$

és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor $A(\alpha x + \beta y) = \alpha u + \beta v \in V'$, így $\alpha x + \beta y \in A^{-1}(V')$. Speciálisan, $\ker(A) := A^{-1}(0)$, az A *magja* altere U -nak.

Az A lineáris leképezés $V' = \text{rng}(A)$ értékkészlete altere V -nek: ha $u, v \in \text{rng}(A)$, $u = Ax$, $v = Ay$, akkor $\alpha u + \beta v = A(\alpha x + \beta y) \in V'$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén. Az értékkészlet dimenzióját a lineáris leképezés *rangjának* nevezzük és $\text{rg}(A)$ -val jelöljük.

Az A pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha $\ker(A) = \{0\}$; ha ez nem teljesül, akkor van két különböző vektor, amelynek a képe nulla. Ha ez teljesül, akkor $x, y \in U'$, $x \neq y$ esetén $0 \neq A(x - y) = Ax - Ay$.

Ha az A lineáris leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor a (létező) inverze is lineáris leképezés: ha $u, v \in V'$, $u = Ax$, $v = Ay$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$A^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha x + \beta y = \alpha A^{-1}u + \beta A^{-1}v.$$

Már találkoztunk bizonyos lineáris leképezésekkel: egy U és V közötti izomorfizmus olyan lineáris leképezés, amely U -t V -re kölcsönösen egyértelműen képezi le.

Mivel az A lineáris leképezés vizsgálatánál U -nak U' -n kívüli része nem játszik szerepet, a továbbiakban általában feltesszük, hogy egy lineáris leképezés az egész vektortéren van értelmezve. Az összes U -t V -be képező lineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U; V)$ -vel fogjuk jelölni. Azokat a lineáris leképezéseket, amelyek U -t saját magába képezik, *lineáris transzformációknak* nevezzük.

6.2.2. Példák lineáris leképezésekre. Lineáris leképezések: azonosan nulla leképezés, a $\mathbb{K}^n$ elemeihez j -edik koordinátájukat rendelő j -edik projekció, polinomokhoz adott helyen vett helyettesítési értékük hozzárendelése, polinomhoz adott n -nél alacsonyabb fokú tagjai összegének hozzárendelése, konvergens valós sorozatokhoz a határérték hozzárendelése, nyílt intervallumon differenciálható függvények körében a differenciálás, polinomok adott nem nulla polinommal való osztásánál a maradék képzése, adott zárt intervallumon integrálható függvényekre az integrál képzése, valós változós függvények megszorítása $\mathbb{R}$ egy részhalmazára.

Lineáris transzformációk: azonosan nulla transzformáció, az identikus transzformáció, tér vetítése síkra, egyenesre, a tér forgatása, komplex számok körében, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a konjugálás, a valós rész, illetve a képzetes rész képzése, a valós polinomok terén a differenciálás.

6.2.3. Tétel. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett és $A \in \mathcal{L}(U; V)$. Ekkor

(1) ha $e_1, e_2, \dots, e_n \in U$ és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, akkor

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A e_1 + \alpha_2 A e_2 + \dots + \alpha_n A e_n;$$

(2) ha U egy generátorrendszere vektorainak ismerjük az A általi képeit, akkor A egyértelműen adott;

(3) ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ az U egy bázisa, és $f_1, f_2, \dots, f_n \in V$ tetszőleges vektorok, akkor egy és csak egy olyan $A: U \rightarrow V$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A e_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. (1) teljes indukcióval adódik. (2) következik (1)-ből. (3)-ban A egyértelműsége következik (2)-ből. Ha $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, akkor legyen $Ax = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$. Erre a leképezésre $Ae_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, és lineáris, mert ha $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} \alpha Ax + \beta Ay &= \alpha(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n) + \beta(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)f_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)f_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)f_n \\ &= A(\alpha x + \beta y). \quad \square \end{aligned}$$

6.2.4. Lineáris leképezések összege és skalárszorosa. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U; V)$ halmaz elemeire, mint V -beli értékű függvényekre, értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás: ha $\gamma \in \mathbb{K}$ és $A, B \in \mathcal{L}(U; V)$, akkor $(\gamma A)(x) := \gamma A(x)$ és $(A + B)(x) := A(x) + B(x)$ minden $x \in U$ -ra. Mivel $x, y \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén

$$(\gamma A)(\alpha x + \beta y) = \gamma(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha(\gamma A)(x) + \beta(\gamma A)(y)$$

és

$$\begin{aligned} (A + B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) \\ &= (\alpha Ax + \beta Ay) + (\alpha Bx + \beta By) = \alpha(A + B)(x) + \beta(A + B)(y), \end{aligned}$$

tehát lineáris leképezések skalárszorosa és összege is lineáris leképezés.

6.2.5. Tétel. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U; V)$ halmaz lineáris tér $\mathbb{K}$ felett.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy lineáris leképezések összeadása asszociatív és kommutatív, az azonosan nulla leképezés nullelem, és az A lineáris leképezésnek a $(-1)A$ leképezés additív inverze. Az is nyilvánvaló, hogy $1A = A$, valamint a skalárral való szorzás asszociatív és disztributív a skalárok összeadására és a lineáris leképezések összeadására nézve, így $\mathcal{L}(U; V)$ lineáris tér. $\square$

6.2.6. Lineáris leképezések szorzata. Legyenek U, V és W vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ha $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $B \in \mathcal{L}(V; W)$, akkor BA szorzatukat, mint a $B \circ A$ összetett leképezést értelmezzük. Megmutatjuk, hogy $BA \in \mathcal{L}(U; W)$. Ha $x, y \in U$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} (BA)(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) \\ &= \alpha(BA)(x) + \beta(BA)(y). \end{aligned}$$

Lineáris leképezések szorzása (mivel leképezések összetétele) asszociatív, de általában nem kommutatív, például $\mathbb{C}$ -ben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a valós rész képzése és az i -vel való szorzás nem felcserélhető lineáris transzformációk.

6.2.7. Tétel. Legyenek U, V és W vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ha $A, B \in \mathcal{L}(U; V)$, $C, D \in \mathcal{L}(V; W)$, $\gamma \in \mathbb{K}$, akkor

- (1) $C(A + B) = CA + CB$ (bal oldali disztributivitás);
- (2) $(C + D)A = CA + DA$ (jobb oldali disztributivitás);
- (3) $\gamma(CA) = (\gamma C)A = C(\gamma A)$.

Bizonyítás. Minden $x \in U$ -ra

$$(C(A+B))(x) = C(Ax+Bx) = (CA)(x) + (CB)(x) = (CA+CB)(x),$$

$$((C+D)A)(x) = (C+D)(Ax) = (CA)(x) + (DA)(x) = (CA+DA)(x),$$

$$(\gamma(CA))(x) = \gamma(C(Ax)) = (\gamma C)Ax = C(\gamma Ax) = C(\gamma A)(x). \quad \square$$

6.2.8. Következmény. Egy V vektortér lineáris transzformációinak $\mathcal{L}(V; V)$ halmaza gyűrű. $\square$

6.2.9. Tétel. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett, és tegyük fel, hogy U véges dimenziós. Legyen $A: U \rightarrow V$ egy lineáris leképezés. Ekkor

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \ker(A) = \dim \operatorname{rng}(A) + \dim \ker(A) = \dim(U).$$

Bizonyítás. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy olyan bázisa U -nak, amelyre $e_1, e_2, \dots, e_m$ bázisa $\ker(A)$ -nak. Mivel Ae_j , $j = 1, 2, \dots, n$ generátorrendszere $\operatorname{rng}(A)$ -nak, de $Ae_j = 0$, ha $j = 1, 2, \dots, m$, csak azt kell megmutatnunk, hogy $Ae_{m+1}, \dots, Ae_n$ lineárisan függetlenek. Ha $\alpha_{m+1}Ae_{m+1} + \dots + \alpha_nAe_n = 0$, akkor $\alpha_{m+1}e_{m+1} + \dots + \alpha_ne_n \in \ker(A)$, azaz $\alpha_{m+1}e_{m+1} + \dots + \alpha_ne_n = \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_me_m$, és így

$$\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_me_m - \alpha_{m+1}e_{m+1} - \dots - \alpha_ne_n = 0.$$

Ha nem lenne minden α_j , $j = m+1, \dots, n$ nulla, $e_1, \dots, e_n$ nem lenne lineárisan független. $\square$

6.2.10. Következmény. Mindig fennáll $\operatorname{rg}(A) \leq \dim(V)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha A a V -re képez. Mindig fennáll $\operatorname{rg}(A) \leq \dim(U)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha A kölcsönösen egyértelmű. $\square$

6.2.11. Következmény. Ha $U = V$, azaz A egy lineáris transzformáció, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- (1) létezik az A^{-1} lineáris transzformáció és $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_V$;
- (2) A kölcsönösen egyértelmű leképezése V -nek önmagára;
- (3) A kölcsönösen egyértelmű;
- (4) A a V -re képez;
- (5) $\operatorname{rg}(A) = \dim(V)$.

Bizonyítás. (1) és (2) nyilván ekvivalensek. Az előző következmény alapján (2), (3), (4) és (5) ekvivalensek. $\square$

6.2.12. Vektorrendszer és lineáris leképezés mátrixa. Legyen V egy véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ pedig egy vektorrendszer. A vektorrendszernek a V egy adott $f_1, f_2, \dots, f_m$ bázisára vonatkozó $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mátrixán az $m \times n$ -es $(\xi_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$ mátrixot értjük, ahol $x_j = \sum_{i=1}^m \xi_{i,j}f_i$, azaz a j -edik oszlopban x_j -nek az adott bázisra vonatkozó koordinátái állnak. Egy egytagú $x \in V$ vektorrendszer mátrixa az $m \times 1$ -es $[x]$ oszlop mátrix.

Legyen most U is egy véges dimenziós vektortér,

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

pedig az U egy adott bázisa. Egy $A \in \mathcal{L}(U; V)$ lineáris leképezésnek a két adott bázishoz tartozó *mátrixán* az

$$Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$$

vektorrendszernek az $f_1, f_2, \dots, f_m$ bázisra vonatkozó mátrixát fogjuk érteni, amit $[A]$ -val jelölünk. Adott bázisok esetén $A \mapsto [A]$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{L}(U; V)$ -nek az összes $\mathbb{K}$ -beli elemekből képzett $m \times n$ -es mátrixok halmazára. Természetesen ha más bázisokat választunk, akkor a lineáris leképezés mátrixa általában megváltozik. Egy adott mátrix más bázisok választása esetén általában másik lineáris leképezésnek a mátrixa. Szokás a lineáris leképezés mátrixát ugyanazzal a betűvel jelölni, mint a lineáris leképezést; mi ezt általában nem tesszük.

Egy lineáris leképezés mátrixának ismeretében a leképezés rangja meghatározható: megegyezik mátrixának oszloprangjával.

Ha A lineáris transzformáció, azaz $U = V$, akkor $[A]$ négyzetes; ilyenkor, ha mást nem mondunk, feltesszük, hogy a két bázis ugyanaz.

6.2.13. Tétel. *Legyenek U és V véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett*

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad \text{illetve} \quad f_1, f_2, \dots, f_m$$

rögzített bázisokkal. Ekkor az $A \mapsto [A]$ leképezése $\mathcal{L}(U; V)$ -nek az összes $\mathbb{K}$ -beli elemekből képzett $m \times n$ -es mátrixok halmazára additív és homogén, sőt izomorfizmus. Ha $x \in U$ egy vektor, ennek mint egytagú vektorrendszernek az

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

bázisra vonatkozó mátrixa az $n \times 1$ -es $[x]$ oszlopmátrix, és ha $y = Ax$, akkor $[y] = [A][x]$, ahol $[y]$ az $y \in V$ vektor $f_1, f_2, \dots, f_m$ bázisra vonatkozó $m \times 1$ -es oszlopmátrixa.

Bizonyítás. Ha $\gamma \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{L}(U; V)$ és $[A] = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^m n$, $[B] = (b_{i,j})_{i=1,j=1}^m n$, akkor $(\gamma A)(e_j) = \gamma Ae_j = \sum_{i=1}^m \gamma a_{i,j} f_i$ és $(A+B)e_j = Ae_j + Be_j = \sum_{i=1}^m (a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, így $[\gamma A] = \gamma[A]$ és $[A+B] = [A] + [B]$. A másik állítás bizonyítása: ha $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, akkor

$$\begin{aligned} y &= Ax = \xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \dots + \xi_n Ae_n \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \xi_j \right) f_i, \end{aligned}$$

ahonnan $[y] = [A][x]$. $\square$

6.2.14. Következmény. *Az $\mathcal{L}(U; V)$ lineáris tér izomorf $\mathbb{K}^{mn}$ -nel.* $\square$

6.2.15. Tétel. *Legyenek U , V és W véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett $e_1, \dots, e_n$; $f_1, \dots, f_m$, illetve $g_1, \dots, g_\ell$ bázisokkal. Ha $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $B \in \mathcal{L}(V; W)$, akkor $[BA] = [B][A]$. Így $C = BA$ pontosan akkor teljesül, ha valamely bázisokban (és ekkor akármilyen bázisokban is) $[C] = [B][A]$.*

Ez a tétel indokolja a mátrixszorzás definícióját.

Bizonyítás. Mivel

$$\begin{aligned}(BA)e_k &= B\left(\sum_{j=1}^m a_{j,k}f_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{j,k}B(f_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{j,k} \sum_{i=1}^{\ell} b_{i,j}g_i = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^m b_{i,j}a_{j,k}\right)g_i,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy $[BA] = [B][A]$. $\square$

6.2.16. Áttérésmátrix. Az kívánjuk vizsgálni, hogyan változnak vektorok koordinátái, illetve lineáris leképezések mátrixa, ha más bázisra térünk át. Legyen V véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett $e_1, e_2, \dots, e_n$, illetve $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisokkal. Az első bázisról a másodikra való áttérés kísérő transzformációja a $Te_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \dots, n$ összefüggéssel definiált transzformációja V -nek önmagába. Mivel T értékkészlete tartalmazza az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázist, az valójában az egész V , így T reguláris kell legyen. Megfordítva, bármely reguláris transzformációja V -nek valamely báziscsere kísérő transzformációja, hiszen ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ tetszőleges bázis, akkor a Te_j , $j = 1, 2, \dots, n$ vektorok nem lehetnek lineárisan függőek, mert abból $\ker(T) \neq \{0\}$ következne, így bázist alkotnak. A második bázisról az elsőre való áttérés kísérő transzformációja nyilván T^{-1} .

Ha $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, akkor nyilván $y = Tx$ koordinátái a másik bázisban ugyanezek, mert $y = Tx = T(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \dots + \xi_n f_n$.

A kísérő transzformáció mátrixát *áttérésmátrix*nak nevezzük; látszólag meg kellene mondani, hogy az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vagy az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisban értjük a mátrixot, de kiderül, hogy mindegy: ha $f_j = Te_j = \sum_{i=1}^n t_{i,j}e_i$, akkor mindkét oldalra alkalmazva T -t, $Tf_j = \sum_{i=1}^n t_{i,j}f_i$. (Természetesen ugyanez igaz T^{-1} -re is.)

Ha egy $x \in V$ vektor koordinátáit az f_j bázisban az $[x]$ oszlopvektor adja meg, akkor az e_j bázisban a $[T][x]$ oszlopvektor; valóban, ha $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j = \sum_{j=1}^n \eta_j f_j$, akkor

$$x = \sum_{j=1}^n \eta_j f_j = \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n t_{i,j}e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n t_{i,j}\eta_j\right)e_i,$$

így $\xi_i = \sum_{j=1}^n t_{i,j}\eta_j$.

6.2.17. Példák: egyszerű bázistranszformációk. Az előző definíció jelöléseit fogjuk használni.

(1) Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, és legyen $f_k = e_k$, ha $k \neq j$ és $f_j = e_j + \gamma e_i$. Ekkor $f_1, \dots, f_n$ is bázis, hiszen n tagja van, valamint $e_k = f_k$, ha $k \neq j$ és $e_j = f_j - \gamma f_i$, így az f -ek által generált altér tartalmaz minden e -t, így az egész tér. A megfelelő áttérésmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } r = i, s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, annak j -edik oszlopához hozzáadódik az i -edik oszlop γ -szorosa, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, akkor a

j -edik sorhoz adódik hozzá az i -edik sor γ -szorosa, mert $t'a = (a't)'$. Azt is észrevehetjük, hogy az áttérmátrix inverze hasonló, de benne γ helyén $-\gamma$ áll.

(2) Legyen ismét $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, és legyen $f_k = e_k$, ha $k \neq i$, $k \neq j$ és $f_j = e_i$, $f_i = e_j$. A megfelelő áttérmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} 1, & \text{ha } r = i, s = j \text{ vagy } r = j, s = i; \\ 0, & \text{ha } r = s = i \text{ vagy } r = s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, annak i -edik és j -edik oszlopa helyet cserél, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, ami ugyanaz, mint a mátrix, akkor az i -edik és a j -edik sor cserél helyet. Az áttérmátrix inverze saját maga.

(3) Legyen $0 \neq \gamma \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq n$ és legyen $f_i = \gamma e_i$, ha $i \neq j$, és $f_j = \gamma e_j$. A megfelelő áttérmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } r = s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, a j -edik oszlop minden eleme szorzódik γ -val, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, ami ugyanaz, mint a mátrix, akkor a j -edik sor szorzódik γ -val. Az áttérmátrix inverzében γ helyén $1/\gamma$ áll.

6.2.18. Tétel. Legyenek U és V véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \dots, e'_n,$$

illetve

$$f_1, f_2, \dots, f_m \quad \text{és} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_m$$

bázisokkal, $A: U \rightarrow V$ egy lineáris leképezés. Ha S , illetve T a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az U , illetve a V térben, $[A]$ pedig az A mátrixa a vessző nélküli bázispárban, akkor az A mátrixa a vesszős bázispárban $[T^{-1}][A][S]$.

Bizonyítás. Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérmátrixokat. Ha $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j}f_i$ és $Ae'_j = \sum_{i=1}^m b_{i,j}f'_i$, akkor egyrészt

$$Ae'_j = ASe_j = A\left(\sum_{k=1}^n s_{k,j}e_k\right) = \sum_{k=1}^n s_{k,j}Ae_k = \sum_{k=1}^n s_{k,j} \sum_{i=1}^m a_{i,k}f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}s_{k,j}\right)f_i,$$

másrészt

$$Ae'_j = \sum_{k=1}^m b_{k,j}f'_k = \sum_{k=1}^m b_{k,j}Tf_k = \sum_{k=1}^m b_{k,j} \sum_{i=1}^m t_{i,k}f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m t_{i,k}b_{k,j}\right)f_i.$$

Innen azt kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^n a_{i,k}s_{k,j} = \sum_{k=1}^m t_{i,k}b_{k,j}$. Ha b jelöli az A mátrixát a vesszős bázisokban, akkor ez azt jelenti, hogy $[A][S] = [T]b$, ahonnan következik az állítás. $\square$

6.2.19. Következmény. Az az U -t V -be képező lineáris leképezés, amelynek mátrixa $[A]$ a vesszős bázisokban, a $B = TAT^{-1}$ lineáris leképezés.

Bizonyítás. Valóban, a vesszős bázisokban az A mátrixa $[T^{-1}][A][S]$, ezért a jobb oldal mátrixa

$$[T]([T^{-1}][A][S])[S^{-1}] = [A]. \quad \square$$

6.2.20. Következmény. Ha

$$U = V, \text{ emiatt } m = n, \text{ és } e_j = f_j, e'_j = f'_j, \text{ ha } j = 1, 2, \dots, n,$$

$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$ -ben, akkor az A lineáris transzformáció mátrixa $[T^{-1}][A][T]$ a vesszős bázisokban. Az a B transzformáció, amelynek mátrixa $[A]$ a vesszős bázisokban, a $B = TAT^{-1}$ transzformáció. $\square$

6.2.21. Ekvivalens transzformációk, ekvivalens mátrixok. A $\mathbb{K}$ feletti V lineáris tér A és B lineáris transzformációit *ekvivalenseknek* nevezzük, ha van olyan V -t V -re képező T kölcsönösen egyértelmű lineáris transzformáció, amellyel $B = TAT^{-1}$. A $\mathbb{K}$ -beli elemű $n \times n$ -es a és b mátrixokat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha van olyan $n \times n$ -es invertálható t mátrix, amellyel $b = t^{-1}at$.

6.2.22. Lineáris formák. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ teret V' -vel is jelöljük, és V *duális terének* nevezzük; elemei a *lineáris formák* vagy *lineáris funkcionálok*.

Ha V véges dimenziós, $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázisa, akkor az az f_j lineáris leképezés, amely egy $x \in V$ vektorhoz a j -edik koordinátáját rendeli, egy lineáris forma. Ha a $\mathbb{K}$ (egydimenziós) térben az 1-et választjuk bázisnak, akkor f_j mátrixa a $(\delta_{i,j})_{i=1}^n$ sormátrix; innen az $f_j \in V'$, $j = 1, 2, \dots, n$ vektorok a duális térnek azt az egyetlen bázisát alkotják, amelyre $f_j(e_i) = \delta_{i,j}$, ha $i, j = 1, 2, \dots, n$. Ezt a bázist az $e_1, \dots, e_n$ bázishoz tartozó *duális bázisnak* nevezzük. Létezése azt is mutatja, hogy $\dim(V') = \dim(V)$. A V' duális terét *második duális térnek* nevezzük és V'' -vel jelöljük.

*** 6.2.23. Tétel.** Ha V vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $x \in V$ -re a $z_x: y \mapsto y(x)$ leképezés V'' egy eleme. Az $x \mapsto z_x$ úgynevezett természetes leképezés V -t V'' -be képezi le. Ha V véges dimenziós, akkor a természetes leképezés izomorfizmusa V -nek V'' -re.

Bizonyítás. Mivel

$$z_x(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x) = z_x(y_1) + z_x(y_2)$$

és

$$z_x(\alpha y) = (\alpha y)(x) = \alpha y(x) = \alpha z_x(y),$$

a z_x lineáris funkcionál V' -n, azaz V'' eleme. Megmutatjuk, hogy a természetes leképezés lineáris:

$$z_{x_1+x_2}(y) = y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2) = z_{x_1}(y) + z_{x_2}(y)$$

és

$$z_{\alpha x}(y) = y(\alpha x) = \alpha y(x) = \alpha z_x(y) = (\alpha z_x)(y).$$

Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V egy bázisa, és $f_1, f_2, \dots, f_n$ a megfelelő duális bázis. Mivel V'' is n dimenziós, elég belátni, hogy a természetes leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ha z_x azonosan nulla, akkor $z_x(f_j) = 0$ minden j -re, így x minden koordinátája nulla, amiből $x = 0$. $\square$

6.2.24. Bilineáris leképezések. Legyenek U , V , és W lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $B: U \times V \rightarrow W$ leképezést *bilineárisnak* nevezünk, ha mindkét változójában lineáris, feltéve hogy a másik változót rögzítjük. Fontos példák $\mathbb{R}^3$ -ban a skaláris szorzás és a vektoriális szorzás, ezeket később részletesebben megvizsgáljuk. Az összes, $U \times V$ -t W -be képező bilineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U, V; W)$ -vel jelöljük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{L}(U, V; W)$ a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$ elemeit *bilineáris formáknak* nevezzük.

Legyen $B \in \mathcal{L}(U, V; W)$. Teljes indukcióval, ha

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m \quad \text{és} \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n,$$

ahol

$$e_1, \dots, e_m \in U \quad f_1, \dots, f_n \in V$$

és

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K},$$

akkor

$$(1) \quad B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j B(e_i, f_j).$$

Speciálisan, ha az U , illetve a V egy-egy generátorrendszeréből alkotott párokon ismerjük B értékét, akkor B egyértelműen meghatározott. Ugyanúgy, mint a lineáris leképezéseknél belátható, hogy ha $e_1, \dots, e_m$ az U , az $f_1, \dots, f_n$ pedig a V bázisa, akkor tetszőlegesen választva a $g_{i,j} \in W$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ vektorokat, egy és csak egy olyan bilineáris leképezése létezik $U \times V$ -nek W -be, amelyre $B(e_i, f_j) = g_{i,j}$; nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban bilineáris. A $(g_{i,j})_{i=1}^m_{j=1}^n$ mátrixot a bilineáris leképezés *mátrixának* nevezzük. Ennek elemei W -beliek; ha $W = \mathbb{K}$, tehát ha bilineáris formáról van szó, akkor skalárok.

6.2.25. Tétel. Legyenek U és V véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_m \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \dots, e'_m,$$

illetve

$$f_1, f_2, \dots, f_n \quad \text{és} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

bázisokkal, $B: U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ egy bilineáris forma. Ha S , illetve T a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az U , illetve a V térben, $[B]$ pedig a B mátrixa a vessző nélküli bázisokban, akkor a B mátrixa a vesszős bázisokban $[S]'[B][T]$.

Bizonyítás. Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérmátrixokat. Mivel

$$B(e'_r, f'_s) = \sum_{i=1}^m s_{i,r} \sum_{j=1}^n t_{j,s} B(e_i, f_j),$$

kapjuk az állítást. $\square$

6.2.26. Következmény. Ha

$$U = V, \text{ emiatt } m = n \text{ és } e_j = f_j, e'_j = f'_j, \text{ ha } j = 1, 2, \dots, n,$$

$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$ -ben, akkor a B bilineáris forma mátrixa $[T]'[B][T]$ a vesszős bázisokban. $\square$

6.2.27. Kvadratikus leképezések. Az előző definíció jelöléseivel, ha $U = V$, akkor egy $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezésből képezhetünk a $Q(x) := B(x, x)$ definícióval egy $Q: V \rightarrow W$ leképezést, a B bilineáris leképezéshez tartozó úgynevezett *kvadratikus leképezést*. Elsősorban a *kvadratikus formák* érdekelnek bennünket, tehát a $W = \mathbb{K}$ eset, de az általános esetet is használjuk a későbbiekben. Több különböző bilineáris leképezéshez tartozhat ugyanaz a kvadratikus leképezés: ha ugyanis valamely $x, y \in V$ -re $B(x, y) \neq B(y, x)$, akkor az $(x, y) \mapsto B(x, y)$ és az $(x, y) \mapsto B(y, x)$ bilineáris leképezések különböznek, de mindkettőhöz ugyanaz a kvadratikus leképezés tartozik. Azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket, amelyekre $B(x, y) = B(y, x)$ minden $x, y \in V$ -re, *szimmetrikus bilineáris leképezéseknek* (a $W = \mathbb{K}$ esetben *szimmetrikus bilineáris formáknak*) nevezzük. Azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket, amelyekhez tartozó kvadratikus leképezés azonosan nulla, *alternáló bilineáris leképezéseknek* (a $W = \mathbb{K}$ esetben *alternáló bilineáris formáknak*) nevezzük, azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket pedig, amelyekre $B(x, y) = -B(y, x)$ minden $x, y \in V$ -re, *antiszimmetrikus bilineáris leképezéseknek* (a $W = \mathbb{K}$ esetben *antiszimmetrikus bilineáris formáknak*). Egy alternáló bilineáris leképezés antiszimmetrikus is, mert

$$0 = B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = B(x, y) + B(y, x).$$

A következő tétel lényegében tisztázza a három fogalom közötti kapcsolatot.

6.2.28. Tétel. Tegyük fel, hogy V és W vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden kvadratikus leképezés képezhető egy egyértelműen meghatározott szimmetrikus bilineáris leképezésből, minden antiszimmetrikus bilineáris leképezés alternáló és minden $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezés egyértelműen előáll egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés összegeként.

Az állítás tetszőleges K test felett nem marad érvényben, csak ha K -ban $1 + 1 \neq 0$.

Bizonyítás. Ha A antiszimmetrikus, akkor $A(x, x) = -A(x, x)$, ahonnan

$$2A(x, x) = 0,$$

$A(x, x) = 0$ minden $x \in V$ -re. Ha $B \in \mathcal{L}(V, V; K)$, akkor

$$S_2: (x, y) \mapsto B(x, y) + B(y, x)$$

szimmetrikus,

$$A_2: (x, y) \mapsto B(x, y) - B(y, x)$$

pedig alternáló, és $2B = S_2 + A_2$, $B = S + A$, ahol

$$S = \frac{1}{2}S_2, \quad A = \frac{1}{2}A_2,$$

tehát az előállítás létezik. Ha Q a B -hez tartozó kvadratikus leképezés, akkor

$$Q(x) = S(x, x),$$

tehát Q megkapható S -ből. Mivel

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) \\ &= Q(x) + Q(y) + S(x, y) + A(x, y) + S(y, x) + A(y, x) \\ &= 2S(x, y) + Q(x) + Q(y), \end{aligned}$$

Q , és így a B is egyértelműen meghatározza S -et, tehát A is egyértelműen meghatározott. $\square$

6.2.29. Példa: vektoriális szorzat. Jelölje $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisát i, j, k . A vektoriális szorzás az egyetlen bilineáris és antiszimmetrikus $(x, y) \mapsto x \times y$ műveletet $\mathbb{R}^3$ -ban, amelyre $i \times j = k$, $j \times k = i$ és $k \times i = j$.

6.2.30. Tétel: szimmetrikus és alternáló bilineáris leképezések mátrixa. Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

bázissal, W pedig egy másik vektortér $\mathbb{K}$ felett. A $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezés pontosan akkor szimmetrikus, ha $1 \leq i < j \leq n$ esetén $B(e_j, e_i) = B(e_i, e_j)$ [a $B(e_i, e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ vektorok tetszőlegesek], és pontosan akkor alternáló, ha $1 \leq i < j \leq n$ esetén $B(e_j, e_i) = -B(e_i, e_j)$ és $B(e_i, e_i) = 0$, ha $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Másrészt, ha x koordinátái ξ_i , az y koordinátái pedig η_i , akkor az első esetben

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j B(e_j, e_i) = B(y, x),$$

a második esetben pedig

$$B(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i) B(e_i, e_j) = 0. \quad \square$$

6.2.31. Szimmetrikus bilineáris formák átlós alakra hozása. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy véges dimenziós esetben megfelelő bázist választva elérhető, hogy egy adott szimmetrikus bilineáris forma mátrixában minden főátlón kívüli elem nulla legyen. (Az eljárás nem működik bármely test esetén, csak ha $1 + 1 \neq 0$). Tegyük fel, hogy a mátrix $n \times n$ -es. A k -adik lépésben ($k = 1, 2, \dots, n$) azt fogjuk elérni, hogy a k -adik sor és oszlop minden főátlón kívüli eleme nulla legyen. Ha a főátlóban álló elem nulla, de van olyan $k < j \leq n$, amelyre a j -edik sor j -edik eleme nem nulla, akkor cseréljük meg a k -adik oszlopot a j -edik oszloppal és a k -adik sort a j -edik sorral: ezzel elérjük, hogy a főátlóban álló elem nem nulla. Ha $k \leq j \leq n$ -re a j -edik sor j -edik eleme nulla, de van olyan $k < j \leq n$, amelyre a k -adik sor j -edik eleme nem nulla, akkor adjuk hozzá a j -edik sort a k -adik sorhoz és a j -edik oszlopot a k -adik oszlophoz: ezzel

elérjük, hogy a főátlóban álló elem nem nulla. Ezután a k -adik oszlop, illetve sor egy alkalmas többszörösét hozzáadva a j -edik oszlophoz, illetve sorhoz, elérhetjük, hogy a k -adik sor j -edik eleme és a k -adik oszlop j -edik eleme nulla legyen. Ezt mindegyik $k < j \leq n$ -re elvégezve, elérjük, hogy a k -adik sor és oszlop minden főátlón kívüli eleme nulla legyen. Ha szükséges, felírhatjuk az egyszerű bázistranszformációknak megfelelő egyes lépések áttérmátrixát, és ezen mátrixok összeszorzásával megkaphatjuk a báziscsere áttérmátrixát.

Az eljárást szokás kvadratikus forma négyzetösszeggé transzformálásának vagy *főtengely-transzformációjának* is nevezni, mert az átlós alakú szimmetrikus bilineáris formához tartozó kvadratikus forma egy vektorhoz a koordinátái négyzeteinek lineáris kombinációját rendeli.

6.2.32. Megjegyzés. Az előző eljárásban a komplex esetben azt is elérhetjük, hogy a főátlóban csak 0 vagy 1 álljon. Ha ugyanis $\alpha \neq 0$ áll a főátlóban, akkor a megfelelő bázisvektort $1/\sqrt{\alpha}$ -szorosra cserélve, α helyére 1 kerül. A valós esetben csak azt tudjuk elérni, hogy a főátlóban 0 és ± 1 értékek álljanak, a megfelelő bázisvektort $1/\sqrt{|\alpha|}$ -szeresére cserélve.

* **6.2.33. Antiszimmetrikus bilineáris formák átlós alakra hozása.** Hasonlóan eljárva, mint a szimmetrikus bilineáris formák esetén, bármely antiszimmetrikus bilineáris formához találhatunk olyan bázist, amelyben a mellékátlón kívül minden elem nulla. Akár valós, akár komplex esetben, az előző megjegyzés szerint eljárva, elérhető, hogy a nem nulla elemek csak ± 1 -ek legyenek, és az is, hogy a főátló alatt legyenek a $+1$ -ek, alatta pedig a -1 -ek.

6.2.34. Definit és indefinit kvadratikus formák. Egy Q kvadratikus formát az $\mathbb{R}$ feletti V vektortéren *pozitív szemidefinitnek*, illetve *negatív szemidefinitnek* nevezünk ha $Q(x) \geq 0$, illetve $Q(x) \leq 0$ minden $x \in V$ -re, egyébként a kvadratikus formát *indefinitnek* nevezzük. Ha minden $0 \neq x \in V$ -re $Q(x) > 0$, illetve $Q(x) < 0$, akkor a kvadratikus formát *pozitív definitnek*, illetve *negatív definitnek* nevezzük. [Komplex vektortér esetén ezen fogalmaknak nincs értelme, hiszen $Q(ix) = -Q(x)$.]

Az, hogy Q negatív szemidefinit, illetve negatív definit, nyilván azzal ekvivalens, hogy $-Q$ pozitív szemidefinit, illetve pozitív definit, így elég az egyik esettel foglalkozni. Definit kvadratikus forma nyilván szemidefinit is, mert $Q(0) = 0$.

A kvadratikus forma főtengely-transzformációja után könnyen eldönthető, hogy milyen jellegű: ha a diagonálisban csupa pozitív elem van, akkor pozitív definit, ha csupa nemnegatív elem van, akkor pozitív szemidefinit, ha viszont van negatív és pozitív elem is, akkor indefinit.

6.2.35. Sylvester-féle tehetetlenségi tétel. Véges dimenziós vektortér egy S szimmetrikus bilineáris formája esetén a főtengely-transzformáció után a mátrixában a főátlóban álló pozitív, negatív, illetve nulla elemek száma mindig ugyanannyi.

* **Bizonyítás.** Legyen két főtengely-transzformáció után a főátlóban álló pozitív, nulla, illetve negatív elemek száma rendre p , z és n , illetve p' , z' és n' . Legyenek a megfelelő bázisok vektorai $e_1, e_2, \dots, e_m$, illetve $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$, úgy felsorolva, hogy előbb a pozitív, majd a nulla, végül a negatív főátlóbeli elemnek megfelelő bázisvektorok következzenek, és tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{p+z} e_{p+z} + \alpha'_1 e'_{m-n'+1} + \dots + \alpha'_{n'} e'_{m'} = 0,$$

azaz

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{p+z} e_{p+z} = -\alpha'_1 e'_{m-n'+1} - \dots - \alpha'_{n'} e'_{m'}.$$

Mivel a bal oldalon szereplő x lineáris kombinációra $S(x, x) \geq 0$, ugyanez teljesül a jobb oldalon álló lineáris kombinációra is, ami csak úgy lehetséges, hogy a jobb oldalon minden együttható nulla, azaz $x = 0$. Innen az $e_1, \dots, e_m$ vektorok lineáris függetlensége miatt a bal oldalon is minden együttható nulla, tehát $e_1, \dots, e_{p+z}, e'_{m-n'+1}, \dots, e'_{m'}$ lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy $p + z + n' \leq m = p + z + n$, azaz $n' \leq n$. A vesszős és vessző nélküli betűk szerepét felcserélve, $n \leq n'$, ahonnan $n = n'$. Teljesen hasonlóan adódik, hogy $p = p'$. Végül a két egyenlőségből $z = z'$.

*** 6.2.36. Konjugált bilineáris leképezések.** Komplex U, V, W terek esetén a bilineáris leképezéseknél fontosabb szerepet játszanak a *konjugált bilineáris leképezések*. Ezek olyan $B: U \times V \rightarrow W$ leképezések, amelyek az első változóban lineárisak, ha a második változót rögzítjük, ha viszont az első változót rögzítjük, akkor a második változóban *konjugált lineárisak*: additívak és *konjugált homogének*, azaz $B(x, \alpha y) = \bar{\alpha} B(x, y)$ minden $x \in U, y \in V$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén. Ugyanúgy mint a bilineáris leképezéseknél kapjuk, hogy ha

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m \quad \text{és} \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n,$$

ahol

$$e_1, \dots, e_m \in U, \quad f_1, \dots, f_n \in V,$$

és

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C},$$

akkor

$$(1) \quad B(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j B(e_i, f_j).$$

Speciálisan, ha az U , illetve a V egy-egy generátorrendszeréből alkotott párokon ismerjük B értékét, akkor B egyértelműen meghatározott. Ha $e_1, \dots, e_m$ az U , az $f_1, \dots, f_n$ pedig a V egy bázisa, akkor tetszőlegesen választva a $g_{i,j} \in W, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ vektorokat, egy és csak egy olyan konjugált bilineáris leképezése létezik $U \times V$ -nek W -be, amelyre $B(e_i, f_j) = g_{i,j}$; nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban konjugált bilineáris. A $(g_{i,j})_{i=1}^m_{j=1}^n$ mátrixot a konjugált bilineáris leképezés *mátrixának* nevezzük. Ennek elemei W -beliek; ha $W = \mathbb{C}$, tehát ha konjugált bilineáris formáról van szó, akkor komplex számok.

*** 6.2.37. Tétel.** Legyenek U és V véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{C}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_m \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \dots, e'_m,$$

illetve

$$f_1, f_2, \dots, f_n \quad \text{és} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

bázisokkal, $B: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ egy konjugált bilineáris forma. Ha S , illetve T a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az U , illetve a V térben, $[B]$ pedig a B mátrixa a vessző nélküli bázisokban, akkor a B mátrixa a vesszős bázisokban $[S]'[B][T]$.

Bizonyítás. Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérmátrixokat. Mivel

$$B(e'_r, f'_s) = \sum_{i=1}^m s_{i,r} \sum_{j=1}^n \bar{t}_{j,s} B(e_i, f_j),$$

kapjuk az állítást. $\square$

* **6.2.38. Következmény.** Ha

$$U = V, \text{ emiatt } m = n \text{ és } e_j = f_j, e'_j = f'_j, \text{ ha } j = 1, 2, \dots, n,$$

$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$ -ben, akkor a B bilineáris forma mátrixa $[T]'[B][\overline{T}]$ a vesszős bázisokban. $\square$

* **6.2.39. Hermite-formák.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $U = V$, akkor egy $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ konjugált bilineáris leképezésből képezhetünk a $Q(x) := B(x, x)$ definícióval egy $Q: V \rightarrow W$ leképezést. Egy tetszőleges konjugált bilineáris leképezés visszakapható az így képzett Q leképezésből:

$$B(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 i^j Q(x + i^j y).$$

Egy $B: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ konjugált bilineáris formát *Hermite-szimmetrikusnak*, illetve *Hermite-antiszimmetrikusnak* nevezünk, ha $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, illetve $B(x, y) = -\overline{B(y, x)}$ minden $x, y \in V$ -re. Nyilván B pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha iB Hermite-antiszimmetrikus. Tetszőleges B konjugált bilineáris forma egyértelműen írható fel $B = S + A$ alakban, ahol S Hermite-szimmetrikus, A pedig Hermite-antiszimmetrikus, ugyanis

$$S(x, y) = \frac{B(x, y) + \overline{B(y, x)}}{2} \quad \text{és} \quad A(x, y) = \frac{B(x, y) - \overline{B(y, x)}}{2}.$$

Ha B Hermite-szimmetrikus, akkor a $Q(x) = B(x, x)$ függvény valós értékű, és megfordítva, ha $Q(x) = B(x, x)$ valós értékű, akkor

$$\overline{B(y, x)} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (-i)^j Q(y + i^j x) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (-i)^j Q((-i)^j y + x) = B(x, y),$$

azaz B Hermite-szimmetrikus. Ebben az esetben Q -t a B -hez tartozó *Hermite-formának* nevezzük. A Hermite-formák ugyanúgy transzformálhatók főtengelyre, mint a kvadrátikus formák, és a *Sylvester-féle tehetetlenségi tétel* megfelelője is érvényben marad.

Ha V véges dimenziós, akkor B pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha (akármilyen bázisban) a mátrixa megegyezik a konjugált transzponáltjával, és pontosan akkor Hermite-antiszimmetrikus, ha mátrixa a konjugált transzponáltjának az ellentettjével egyezik meg.

* **6.2.40. Multilineáris leképezések.** Legyenek

$$U_1, U_2, \dots, U_m$$

és V lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $M: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \rightarrow V$ leképezést m -lineárisnak vagy *multilineárisnak* nevezünk, ha „minden változójában lineáris”, azaz $i = 1, 2, \dots, m$ -re tetszőlegesen választva az $x_j \in U_j$, $j \neq i$ vektorokat, az

$$x \mapsto M(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m), \quad x \in U_i$$

leképezés lineáris. Az összes, $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$ -et V -be képező multilineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$ -vel jelöljük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$ a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Teljes indukcióval (m szerint), ha $x_i = \alpha_{i,1}e_{i,1} + \alpha_{i,2}e_{i,2} + \dots + \alpha_{i,n_i}e_{i,n_i}$, ahol $e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i} \in U_i$ és $\alpha_{i,j} \in K$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, akkor

$$(1) \quad M(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \alpha_{1,j_1} \dots \alpha_{m,j_m} M(e_{1,j_1}, \dots, e_{m,j_m}).$$

Speciálisan, ha az U_i vektorterek egy-egy generátorrendszeréből alkotott m -eseken ismerjük M értékét, akkor M egyértelműen meghatározott. Ugyanúgy, mint a lineáris leképezéseknél belátható, hogy ha $e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i}$ az U_i bázisa, ha $i = 1, 2, \dots, m$, akkor tetszőlegesen választva a $f_{j_1, j_2, \dots, j_m} \in V$, $i = 1, \dots, m$, $j_i = 1, \dots, n_i$ vektorokat, egy és csak egy olyan m -lineáris leképezése létezik $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$ -nek V -be, amelyre

$$M(e_{1,j_1}, e_{2,j_2}, \dots, e_{m,j_m}) = f_{j_1, j_2, \dots, j_m} \in V, \quad i = 1, \dots, m, j_i = 1, \dots, n_i;$$

nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban m -lineáris.

* **6.2.41. Tétel.** Legyenek $U_1, U_2, \dots, U_m$ és V lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Ekkor a

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m) := S(x_1)(x_2, x_3, \dots, x_m),$$

ha $x_i \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ összefüggés egy $S \mapsto T$ természetes lineáris izomorfizmust definiált $\mathcal{L}(U_1; \mathcal{L}(U_2, U_3, \dots, U_m; V))$ és $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$ között.

Bizonyítás. Egyszerű számolás. $\square$

* **6.2.42. Példa.** Ha U és V véges dimenziós vektorterek, akkor korábbról felhasználva, hogy létezik egy természetes izomorfizmus V és $V'' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ között, egy természetes izomorfizmust kapunk $\mathcal{L}(U; V)$ és $\mathcal{L}(U; \mathcal{L}(V'; \mathbb{K}))$, és így az előző tételből $\mathcal{L}(U; V)$ és $\mathcal{L}(U, V'; \mathbb{K})$ között.

* **6.2.43. Tenzorok, tenzorszorzat.** Az előző tétel és példa alapján, ha V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, számos tér [például $\mathcal{L}(V; V)$, $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V))$ stb.] természetes módon izomorf az $\mathcal{L}(V, V, \dots, V, V', V', \dots, V'; \mathbb{K})$ terek valamelyikével. Ha itt $k \in \mathbb{N}$ számú V és $\ell \in \mathbb{N}$ számú V' szerepel, akkor ezt a teret, amelynek elemei $k + \ell$ -lineáris

formák, $\mathbb{T}_k^\ell(V)$ -vel jelöljük, elemeit k -szor kovariáns, ℓ -szer kontravariáns tenzoroknak nevezzük. Az 1-szer kovariáns, 0-szor kontravariáns tenzorok V' elemei, a 0-szor kovariáns, 1-szer kontravariáns tenzorok pedig V'' elemei, így V elemeivel azonosíthatók. A 0-szor kovariáns és 0-szor kontravariáns tenzorokat $\mathbb{K}$ elemeinek tekinthetjük.

Ha

$$k_1, k_2, \dots, k_m, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m \in \mathbb{N},$$

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_m, \quad \ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m,$$

és $T_j \in \mathbb{T}_{k_j}^{\ell_j}$, ha $j = 1, 2, \dots, m$, akkor a

$$\begin{aligned} T(x_{1,1}, \dots, x_{1,k_1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,k_m}, x'_{1,1}, \dots, x'_{m,\ell_m}) \\ = \prod_{j=1}^m T_j(x_{j,1}, \dots, x_{j,k_j}, x'_{j,1}, \dots, x'_{j,\ell_j}) \end{aligned}$$

($j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, k_j$ esetén $x_{j,i} \in V$ és $j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, \ell_j$ esetén $x'_{j,i} \in V'$) összefüggéssel definiált $T \in \mathbb{T}_k^\ell$ tenzort a T_j tenzorok *tenzorszorzatának* nevezzük. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{T}_k^\ell$ nem minden eleme áll elő ilyen alakban, már akkor sem, ha $m = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Például ha $\dim(V) = 2$ és e_1, e_2 egy bázis V -ben, akkor az a $T \in \mathbb{T}_2^0$ bilineáris forma, amelyre $T(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, nem áll elő $\mathbb{T}_1^0$ -beli T_1, T_2 lineáris formák szorzataként, mert a $0 = T(e_1, e_2) = T_1(e_1)T_2(e_2)$ összefüggésből $T_1(e_1) = 0$ vagy $T_2(e_2) = 0$ következne, de az első eset $1 = T(e_1, e_1) \neq T_1(e_1)T_2(e_1) = 0$, a második pedig $1 = T(e_2, e_2) \neq T_1(e_2)T_2(e_2) = 0$ miatt vezet ellentmondásra.

Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázisa V -nek, $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ pedig a megfelelő duális bázisa V' -nek. Egy $T \in \mathbb{T}_k^\ell$ tenzort egyértelműen jellemezhetünk a

$$t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{i'_1, i'_2, \dots, i'_\ell} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, e'_{i'_1}, e'_{i'_2}, \dots, e'_{i'_\ell})$$

koordinátákkal; a V' -beli változókhoz tartozó, úgynevezett kontravariáns indexeket hagyományosan felső indexként írjuk.

A kovariáns és kontravariáns elnevezésekre a következő tétel ad magyarázatot. Bizonyításához szükségünk lesz egy segédtétele.

*** 6.2.44. Segédétel.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett,

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad \text{illetve} \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

egy-egy bázisa V -nek,

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \quad \text{illetve} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

a megfelelő duális bázisai V' -nek. Ha az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisról az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisra való áttérés kísérő transzformációjának mátrixa $a = (a_{i,j})$, akkor a duális bázisok közötti áttérés kísérő transzformációjának mátrixa $a = (a_{i,j})$ inverzének a transzponáltja, azaz $(a^{-1})'$.

A segédtétel állítását úgy szokás kifejezni, hogy V vektorai *kogrediens*, míg V' vektorai *kontragrediens* módon változnak. Az elnevezés arra utal, hogy báziscserénél V vektorainak új koordinátáit a kísérő transzformáció mátrixa, míg V' vektorainak új koordinátáit az kísérő transzformáció mátrixának inverze segítségével számolhatjuk ki.

Bizonyítás. Jelölje $(b_{i,j})_{i=1}^n{}_{j=1}^n$ a keresett mátrixot, amelyre tehát

$$f'_{j'} = \sum_{j=1}^n b_{j,j'} e'_j, \quad \text{ha } j = 1, 2, \dots, n.$$

Ekkor

$$\delta_{j,j'} = f'_{j'}(f_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f'_{j'}(e_i) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \sum_{j'=1}^n b_{j,j'} e'_j(e_i) = \sum_{i=1}^n b_{i,j'} a_{i,j},$$

ahonnan b transzponáltjának és a -nak a szorzata az egységmátrix, így következik az állítás. $\square$

* **6.2.45. Tenzorok koordinátáinak transzformációja.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett,

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad \text{illetve} \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

egy-egy bázisa V -nek,

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \quad \text{illetve} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

a megfelelő duális bázisai V' -nek. Ha az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisról az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisra való áttérés mátrixa $(a_j^i)_{i=1}^n{}_{j=1}^n$, ennek inverze pedig $(b_j^i)_{i=1}^n{}_{j=1}^n$, ahol az oszlopindexet mindkét esetben felülre írtuk, és a $T \in \mathbb{T}_k^\ell$ tenzor koordinátái az első bázisban a $t_{i_1, \dots, i_k}^{i'_1, \dots, i'_\ell}$ számok, akkor a második bázisban a T koordinátái az

$$(1) \quad s_{j_1, \dots, j_k}^{j'_1, \dots, j'_\ell} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \sum_{i'_1=1}^n \dots \sum_{i'_\ell=1}^n t_{i_1, \dots, i_k}^{i'_1, \dots, i'_\ell} a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_k}^{i_k} b_{i'_1}^{j'_1} \dots b_{i'_k}^{j'_k},$$

$1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k, j'_1, j'_2, \dots, j'_\ell \leq n$ számok.

Látható, hogy a formulában a kovariáns indexekhez az a áttérmátrix tartozik, míg a kontravariáns indexekhez annak b inverze. Ez indokolja a kovariáns és kontravariáns elnevezéseket.

Bizonyítás. Mivel $f_j = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i$ és $f'_j = \sum_{i=1}^n b_j^i e'_i$ (sic!),

$$\begin{aligned} & T(f_{j_1}, \dots, f_{j_k}, f'_{j'_1}, \dots, f'_{j'_\ell}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i'_\ell=1}^n a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_k}^{i_k} b_{i'_1}^{j'_1} \dots b_{i'_k}^{j'_k} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e'_{i'_1}, \dots, e'_{i'_\ell}). \quad \square \end{aligned}$$

* **6.2.46. Einstein-konvenció.** Mint látjuk, tenzorokkal való számolásnál sok szuma jel szerepel. Ezen segít az *Einstein-konvenció*: a szummákat nem írjuk ki, de minden

kétszer előforduló indexre összegezni kell. Például az előző tétel (1) formulája ezzel a konvencióval így néz ki:

$$s_{j_1, \dots, j_k}^{j'_1, \dots, j'_\ell} = t_{i_1, \dots, i_k}^{i'_1, \dots, i'_\ell} a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_k}^{i_k} b_{i'_1}^{j'_1} \dots b_{i'_\ell}^{j'_\ell}.$$

6.2.47. Permutációk. Egy halmaz *permutációján* a halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését értjük. Az X halmaz összes permutációi között tekinthetjük a $\circ$ műveletet, azaz az összetett függvény képzést. Ez a művelet asszociatív, bármely permutációt az $\mathbb{I}_X$ identikus leképezéssel szorozva akár balról, akár jobbról, az adott permutációt kapjuk vissza, és bármely permutációt akár balról, akár jobbról szorozva a függvényként vett inverzével, az identikus leképezést kapjuk. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát ezzel a művelettel S_n -nel fogjuk jelölni és n -edfokú *szimmetrikus csoportnak* nevezzük. Elemei olyan $\{1, 2, \dots, n\}$ -beli $p_1, p_2, \dots, p_n$ sorozatok, amelyeknek minden tagja különböző. Az ilyen sorozatok száma nyilván $n!$.

Egy $p \in S_n$ permutációra, ha k összes olyan $1 \leq i < j \leq n$ párok száma, amelyekre $p_i > p_j$, azaz az inverziók száma, akkor legyen $\text{sgn}(p) = (-1)^k$. A permutációt *párosnak*, illetve *páratlan*nak nevezzük aszerint, hogy k páros vagy páratlan, azaz $\text{sgn}(p) = 1$, illetve $\text{sgn}(p) = -1$. Például az identikus permutáció páros.

Az identikus permutációtól eltekintve a legegyszerűbb permutációk azok, amelyek csak két elemet cserélnek meg, ezeket *transzpozícióknak* nevezzük. Az S_n minden eleme felírható transzpozíciók szorzataként, sőt, olyan transzpozíciók szorzataként is, amelyek két szomszédos elemet cserélnek meg: vigyük a helyére p_1 -et, majd p_2 -t stb. Bár ez az előállítás nem egyértelmű, az alábbi állítás igaz:

6.2.48. Tétel. *Egy $p \in S_n$ permutáció pontosan akkor páros, ha előállítható páros sok transzpozíció szorzataként, és pontosan akkor páratlan, ha páratlan sok transzpozíció szorzataként állítható elő.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy permutációt balról szorzunk egy transzpozícióval, akkor megváltozik a permutáció paritása. Ha egy p permutációt szorzunk az i -edik és j -edik elemeket megcserélő transzpozícióval balról, ahol $1 \leq i < j \leq n$, akkor az eredményben $k < i$ vagy $k > j$ esetén azon inverziók száma, amelyekben p_k részt vesz, nem változik. Ugyanez a helyzet, ha $i < k < j$, de p_k vagy nagyobb, mint $\max\{p_i, p_j\}$ vagy kisebb, mint $\min\{p_i, p_j\}$. Ha $i < k < j$ és $\min\{p_i, p_j\} < p_k < \max\{p_i, p_j\}$, akkor azon inverziók száma, amelyekben p_k részt vesz, kettővel változik. Mivel $p_i > p_j$ esetén egy inverzió megszűnik, $p_i < p_j$ esetén pedig egy új keletkezik, az állítást beláttuk. $\square$

6.2.49. Következmény. *Az S_n csoportban egy páros és egy páratlan permutáció szorzata páratlan. Két páros vagy két páratlan permutáció szorzata páros.* $\square$

6.2.50. Terület, térfogat és determináns. A síkban két vektor által kifeszített paralelogramma területe, illetve térben három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata három alapvető tulajdonsággal rendelkezik. Az első tulajdonság, hogy akkor biztosan nulla, ha a vektorok közül kettő megegyezik. A második tulajdonság, hogy bármelyik vektort egy nemnegatív valós számmal szorozva, a terület, illetve térfogat az adott számmal szorzódik. A harmadik, hogy az egyik vektort két, egymással „nem túl nagy” szöget bezáró vektor összegével helyettesítve, a területek, illetve térfogatok összeadódnak.

A második és harmadik feltételt a könnyebben kezelhető homogenitással, illetve additivitással helyettesíthetjük, ha „előjeles területet”, illetve „előjeles térfogatot” is megengedünk. Meg kell még mondanunk, hogy mely, például egy adott bázis által kifeszített paralelogramma, illetve paralelepipedon területét, illetve térfogatát választjuk egységnek. Ez a három tulajdonság és az egységnyi terület, illetve térfogat kijelölése jellemez is egy „előjeles területet”, illetve „előjeles térfogatot”.

Általánosabban, legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, és tekintsünk egy n -lineáris $D: V^n \rightarrow \mathbb{K}$ formát, amelyről feltesszük, hogy *alternáló*, azaz (definíció szerint) ha két változója megegyezik, akkor nulla. Ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V egy bázisa, és $D(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, akkor D -t az adott bázishoz tartozó *determináns*nak nevezzük, a $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ skalárt pedig az $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vektorrendszer adott bázishoz tartozó *determináns*ának. A determináns geometriai jelentése $\mathbb{R}^n$ -ben az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok által kifeszített „paralelepipedon” előjeles „ n dimenziós térfogata”, ahol az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis által kifeszített „paralelepipedon” előjeles „ n dimenziós térfogatát” választjuk egységnek.

6.2.51. Tétel. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $D: V^n \rightarrow \mathbb{K}$ egy n -lineáris alternáló forma. Ekkor bármely $p \in S_n$ permutációra és $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vektorrendszerre

$$D(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}) = \text{sgn}(p) D(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor $D(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V egy bázisa, x_j koordinátái a $\xi_{i,j}$ számok, akkor

$$(1) \quad D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

és bármely $D(e_1, e_2, \dots, e_n)$ skalárra (1) jobb oldala egy n -lineáris alternáló formát definiál.

* **Bizonyítás.** Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor valamelyik vektora előállítható az előtte lévők lineáris kombinációjaként. A D multilinearitását felhasználva, $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olyan tagok lineáris kombinációjaként állítható elő, amelyekben két változó megegyezik, tehát értéke nulla.

Mivel

$$\begin{aligned} 0 &= D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, \dots, x_n) \\ &= D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + 0 \\ &\quad + 0 + D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy D értéke az ellentettjére változik, ha két változóját felcseréljük. Innen bármely $p \in S_n$ permutációra

$$D(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}) = \text{sgn}(p) D(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ a V egy bázisa, x_j koordinátái a $\xi_{i,j}$ számok ($1 \leq i, j \leq n$), akkor a multilinearitást kihasználva,

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq p_1, p_2, \dots, p_n \leq n} \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n}) \\ &= \sum_{p \in S_n} \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n}), \end{aligned}$$

mert $D(e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_n}) = 0$, ha $p_i = p_j$ valamely $i \neq j$ -re, így a többi tag nulla. Az előbb bizonyított állítást felhasználva kapjuk (1)-et.

Azt, hogy bármely $D(e_1, e_2, \dots, e_n)$ skalárra (1) jobb oldala egy n -lineáris alternáló formát definiál, hasonlóan láthatjuk be, mint a bilineáris alternáló formáknál tettük.

6.2.52. Következmény. Bármely bázishoz létezik az adott bázishoz tartozó determináns. $\square$

* **6.2.53. Következmény.** Bármely alternáló n -lineáris forma egy tetszőleges rögzített bázishoz tartozó determináns konstansszorosa. $\square$

6.2.54. Következmény. Egy $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorrendszernek egy adott bázishoz tartozó determinánsa csak a vektorrendszer adott bázisban vett koordinátáitól függ, és értéke a koordinátákkal kifejezve

$$\sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n}. \quad \square$$

6.2.55. Mátrix determinánsa. Az előző következmény szerint, az ottani jelölésekkel, egy vektorrendszer adott bázisban vett determinánsa csak az adott bázisban vett (négyzetes) mátrixától függ, így beszélhetünk önmagában egy $(\xi_{i,j})_{i=1}^n_{j=1}^n$ négyzetes mátrix

$$\det((\xi_{i,j})_{i=1}^n_{j=1}^n) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n}$$

determinánsáról is. (Szokás a mátrix determinánsát a fenti egyenlőség jobb oldalával is definiálni.) A $|\xi_{i,j}|_{i=1}^n_{j=1}^n$ vagy

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \cdots & \xi_{1,j} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{i,1} & \cdots & \xi_{i,j} & \cdots & \xi_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n,1} & \cdots & \xi_{n,j} & \cdots & \xi_{n,n} \end{vmatrix}$$

jelölés is szokásos.

Az egységmátrix determinánsa nyilván 1, a nulla mátrixé pedig 0.

6.2.56. Tétel. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű 1×1 -es, 2×2 -es, illetve 3×3 -as négyzetes mátrixra

$$|\xi_{1,1}| = \xi_{1,1}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{vmatrix} = \xi_{1,1}\xi_{2,2} - \xi_{1,2}\xi_{2,1},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} \\ \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} \end{vmatrix} = \xi_{1,1}\xi_{2,2}\xi_{3,3} + \xi_{2,1}\xi_{3,2}\xi_{1,3} + \xi_{3,1}\xi_{1,2}\xi_{2,3} \\ - \xi_{1,3}\xi_{2,2}\xi_{3,1} - \xi_{2,3}\xi_{3,2}\xi_{1,1} - \xi_{3,3}\xi_{1,2}\xi_{2,1}.$$

Bizonyítás. Azonnal következik a definícióból. $\square$

6.2.57. Tétel. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű $(\xi_{i,j})_{i=1,j=1}^n$ négyzetes mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának a determinánsával.

* **Bizonyítás.** Ha p és q is S_n -beli permutációk, akkor (mivel $p \circ q$ is permutáció),

a

$$\xi_{p_1,1}\xi_{p_2,2}\cdots\xi_{p_n,n} \quad \text{és} \quad \xi_{p_{q_1},q_1}\xi_{p_{q_2},q_2}\cdots\xi_{p_{q_n},q_n}$$

szorzatok csak tényezőik sorrendjében különböznek. Ha minden $p \in S_n$ -hez tekintjük $q = p^{-1}$ -et, akkor $p_{q_i} = i$ minden i -re, így az előző definíció alapján azt kapjuk, hogy

$$\det((\xi_{i,j})_{i=1,j=1}^n) = \sum_{q^{-1} \in S_n} \text{sgn}(q^{-1})\xi_{1,q_1}\xi_{2,q_2}\cdots\xi_{n,q_n}.$$

Figyelembe véve, hogy $\text{sgn}(q^{-1}) = \text{sgn}(q)$, és hogy ha q^{-1} befutja S_n -et, akkor q befutja S_n -et,

$$\det((\xi_{i,j})_{i=1,j=1}^n) = \sum_{q \in S_n} \text{sgn}(q)\xi_{1,q_1}\xi_{2,q_2}\cdots\xi_{n,q_n}.$$

A jobb oldal viszont nem más, mint a $(\xi_{j,i})_{i=1,j=1}^n$ transzponált mátrix determinánsa. $\square$

6.2.58. Következmény. A mátrix bármely oszlopát, illetve sorát megszorozva egy konstanssal, a determinánsa az adott konstanssal szorzódik. Ha a mátrix bármely oszlopa vagy sora nulla, akkor a determinánsa nulla. A mátrix determinánsa bármely oszlopának, illetve sorának additív függvénye. A mátrix bármely oszlopához hozzáadva egy másik oszlop konstansszorosát, illetve bármely sorához hozzáadva egy másik sor konstansszorosát, a determináns értéke nem változik. A mátrix bármely két oszlopát, illetve bármely két sorát felcserélve, a determinánsa ellenkezőjére változik.

Bizonyítás. Oszlopműveletekre következik a definícióból, a sorműveletek pedig megfelelnek a transzponált mátrixon végzett oszlopműveleteknek. $\square$

6.2.59. Részmatrix, aldetermináns. Egy $m \times n$ -es $x = (x_{i,j})_{i=1,j=1}^m$ mátrix $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ sorindexekhez és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\ell \leq n$ oszlopindexekhez tartozó *részmatrixán* vagy *minormatrixán* az $(x_{i_r,j_s})_{r=1,s=1}^k$ mátrixot értjük, vagyis csak azokat az elemeket tartjuk meg, amelyeknek sorindexe az $i_1, i_2, \dots, i_k$ indexek valamelyike, oszlopindexe pedig a $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ indexek valamelyike.

Ha a mátrix $\mathbb{K}$ -beli elemű mátrix, akkor az $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ sorindexekhez és $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ oszlopindexekhez tartozó *aldeterminánsán* vagy *minorán*

a megfelelő négyzetes részmátrix determinánsát értjük. A mátrix *determinánsrangján* azt a legnagyobb k -t értjük, amelyre van a mátrixnak nem nulla determinánsú $k \times k$ -as részmátrixa. Ha a mátrix determinánsrangja k , akkor a nem nulla determinánsú $k \times k$ -as részmátrixokat (hibás szóhasználattal) *rangmeghatározó alldeterminánsoknak* nevezzük.

Ha $m = n$, akkor az ugyanazon sor- és oszlopindexek által meghatározott alldeterminánsokat *főminoroknak*, az $1, 2, \dots, k$ ($1 \leq k \leq n$) sor- és oszlopindexek által meghatározott főminorokat pedig *sarokminoroknak* nevezzük.

6.2.60. Tétel. Egy $\mathbb{R}$ feletti V véges dimenziós vektortéren egy szimmetrikus bilineáris formából képzett kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha a bilineáris forma (bármilyen bázisban vett) mátrixának sarokminorai mind pozitívak.

A tétel gyakran használatos valós kvadratikus forma pozitív definit voltának eldöntésére, bár a főtengety-transzformáció kevesebb számolással jár.

* **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy ha a B szimmetrikus bilineáris forma mátrixának főtengety-transzformációja során soha nem fordul elő, hogy a főátlóban nulla áll, akkor a sarokminorok nem változnak, így a kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha a kapott átlós alak főátlójában pozitív elemek állnak, azaz ha a sarokminorok mind pozitívak. Ha a főtengety-transzformáció során először a k -adik lépésben fordul elő, hogy a főátlóban nulla áll, akkor az első ilyen esetig a sarokminorok nem változtak, az éppen aktuális sarokminor nulla, és ha e_k az aktuális bázis k -adik eleme, akkor $B(e_k, e_k) = 0$. $\square$

6.2.61. Tétel. Tegyük fel, hogy a $\mathbb{K}$ -beli elemű $x = (x_{j,i})_{i=1}^n_{j=1}^n$ négyzetes mátrix

$$\begin{pmatrix} y & w \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$$

alakú, ahol y egy $m \times m$ -es, z pedig egy $(n-m) \times (n-m)$ -es négyzetes mátrix, $1 \leq m < n$, azaz $x_{i,j} = 0$, ha $i > m$ és $j \leq m$, vagy pedig $x_{i,j} = 0$, ha $i \leq m$ és $j > m$. Ekkor $\det(x) = \det(y) \det(z)$.

* **Bizonyítás.** Elég az első esetet bizonyítani, a másik transzponálással következik. Ha $i > m$ és $j \leq m$ esetén $x_{i,j} = 0$, akkor a

$$\sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) x_{p_1,1} x_{p_2,2} \cdots x_{p_n,n}$$

összegben minden olyan tag nulla, amelyre $p_j > m$ valamely $1 \leq j \leq m$ -re, hiszen ekkor a szorzat egy tényezője nulla. Azokra a $p \in S_n$ permutációkra, amelyekre $1 \leq j \leq m$ esetén $1 \leq p_j \leq m$, az is teljesül, hogy $p_j > m$, ha $j > m$, azaz p az $\{1, 2, \dots, m\}$, illetve $\{m+1, m+2, \dots, n\}$ halmazok elemeit csak egymás között permutálja. Az ilyen p permutációkra legyen $q \in S_m$ az a permutáció, amelyre $q_j = p_j$, ha $1 \leq j \leq m$, és legyen $r \in S_{n-m}$ az a permutáció, amelyre $r_j = p_{j+m} - m$. Az így kapott $p \mapsto (q, r)$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű és $\text{sgn}(p) = \text{sgn}(q) \text{sgn}(r)$, így

$$\begin{aligned} \det(x) &= \sum_{q \in S_m} \sum_{r \in S_{n-m}} \text{sgn}(q) \text{sgn}(r) x_{q_1,1} \cdots x_{q_m,m} x_{m+r_1,m+1} \cdots x_{m+r_{n-m},n} \\ &= \sum_{q \in S_m} \text{sgn}(q) x_{q_1,1} \cdots x_{q_m,m} \sum_{r \in S_{n-m}} \text{sgn}(r) x_{m+r_1,m+1} \cdots x_{m+r_{n-m},n} \\ &= \det(y) \det(z). \quad \square \end{aligned}$$

6.2.62. Tétel. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű $m \times n$ -es mátrix sorrangja, oszloprangja és determinánsrangja megegyezik.

A bizonyítás azt is mutatja, hogyan határozható meg egy négyzetes mátrix determinánsa Gauss-féle kiküszöböléssel.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a Gauss-féle kiküszöbölés első fázisa során végzett elemi sorműveletek nem változtatják meg a determinánsrangot. A sorcseréknél az egyes aldeterminánsok legfeljebb csak egymás közt cserélődnek és előjelet váltanak. Elég megmutatni, hogy az i -edik sor $\lambda \neq 0$ -szorosát hozzáadva a j -edik sorhoz, a determinánsrang nem csökkenhet, mert akkor nem is nőhet, hiszen $-\lambda$ -val megismételve a műveletet, csökkenne. Ha k a determinánsrang, és a művelet után minden $k \times k$ -as rangmeghatározó aldetermináns eltűnne, akkor azok mindegyikében szerepelne a j -edik sor, de nem szerepelne az i -edik sor. Egy ilyen rangmeghatározó aldeterminánsban a j -edik sort az i -edikre cserélve, a kapott aldetermináns nem lehet nulla, hiszen ha nulla lenne, akkor a művelet nem változtatná a rangmeghatározó aldetermináns értékét. Ez viszont ellentmondás, mert így van olyan rangmeghatározó aldetermináns, amelyben nem szerepel a j -edik sor.

Ha az első fázis a $k + 1$ -edik lépésben ér véget, akkor az előző tétel szerint a determinánsrang nyilván k , mert az eredménymátrixnak van olyan $k \times k$ -as aldeterminánsa, amely felső háromszög alakú, és a főátlójában nem nulla elemek állnak, de minden nagyobb aldeterminánsnak valamelyik sora csupa nullát tartalmaz. Mivel az eljárás során az oszloprang sem változik, a determinánsrang és az oszloprang megegyeznek. Az, hogy a determinánsrang és a sorrang is megegyeznek, transzponálással következik.

6.2.63. Kifejtési tétel. Jelölje a $\mathbb{K}$ -beli elemű $x = (x_{i,j})_{i=1,j=1}^n$ négyzetes mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott aldeterminánsának értékét $X_{i,j}$. Ekkor bármely i sorindexre $\det(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_{i,j} X_{i,j}$ és bármely j oszlopindexre $\det(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} x_{i,j} X_{i,j}$.

* **Bizonyítás.** Elég az oszlop szerinti kifejtésre vonatkozó állítást bizonyítani, a másik transzponálással adódik. Ha $x_k = \sum_{j=1}^n x_{i,k} e_j$, ahol $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy tetszőleges bázis, és D pedig az ehhez tartozó determináns, akkor

$$\begin{aligned} \det(x) &= D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_{i,j} D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_j, x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ha felírjuk a $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_j, x_{j+1}, \dots, x_n$ vektorrendszer mátrixát, és $j - 1$ szomszédos oszloppal végzett oszlopcserével a j -edik oszlopot az első oszlop helyére, majd $i - 1$ szomszédos sorral való sorcserével az abban lévő egyetlen nem nulla elemet, ami 1, az első sorba hozzuk, azt kapjuk, hogy

$$D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = (-1)^{j-1+i-1} X_{i,j} = (-1)^{j+i} X_{i,j},$$

ahonnan következik az állítás. $\square$

* **6.2.64. Lineáris transzformáció determinánsa.** Legyen V véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(V; V)$. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\det(A)$ skalár, amit a *lineáris transzformáció determinánsának* hívunk, és amelyre

$$(1) \quad D(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n) = \det(A) D(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

bármely $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorrendszerre és bármely D alternáló n -lineáris formára: A bizonyításhoz legyen D_0 egy adott $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázishoz tartozó determináns. Mivel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto D_0(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n)$$

egy alternáló n -lineáris leképezés, van olyan $\det(A)$ skalár, hogy (1) fennáll $D = D_0$ -ra és minden $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ -re. Az $x_j = e_j$ választással látjuk, hogy a konstans egyértelmű is, és nem más, mint az A adott bázishoz tartozó mátrixának determinánsa. Ha most D tetszőleges alternáló n -lineáris forma, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár, hogy $D = \lambda D_0$, így D -re szintén teljesül (1) ugyanazon $\det(A)$ szorzóval. Tehát ezt a számot az A lineáris transzformáció már önmagában meghatározza, és nem más, mint a bázisvektorok képei által alkotott vektorrendszer determinánsa. Mivel az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis tetszőleges volt, azt is megkaptuk, hogy bármely bázisban vesszük A mátrixát, ugyanaz a determinánsa.

*** 6.2.65. Determinánsok szorzástétele.** Legyen V véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A, B \in \mathcal{L}(V; V)$. Ekkor $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Bizonyítás. Az előző definíció jelöléseivel, (1)-ből

$$\begin{aligned} \det(AB)D_0(x_1, x_2, \dots, x_n) &= D_0((AB)x_1, (AB)x_2, \dots, (AB)x_n) \\ &= D_0(A(Bx_1), A(Bx_2), \dots, A(Bx_n)) \\ &= \det(A)D_0(Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_n) \\ &= \det(A) \det(B)D_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ahonnan következik az állítás, mert D_0 nem azonosan nulla. $\square$

6.2.66. Determinánsok szorzástétele mátrixokra. Két $\mathbb{K}$ -beli elemű egyforma méretű négyzetes mátrix szorzatának a determinánsa a determinánsaik szorzata.

Bizonyítás. Az állítás következik az előző tételből, de közvetlen bizonyítás is adható: lásd Kuros [38] könyvét, 99. o.

6.2.67. Megjegyzés: lineáris transzformáció determinánsa. Legyen V véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \dots, e'_n,$$

bázisokkal, $A \in \mathcal{L}(V; V)$. Legyen T vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja a V térben. Az előző tétel szerint, mivel $[T^{-1}][T]$ az egységmátrix, $\det([T^{-1}]) \det([T]) = 1$. Innen, ismét felhasználva az előző tételt,

$$\begin{aligned} \det([T^{-1}][A][T]) &= \det([T^{-1}]) \det([A]) \det([T]) \\ &= \det([A]) \det([T^{-1}]) = \det([A]), \end{aligned}$$

azaz A bármelyik bázisban vett mátrixának ugyanaz a determinánsa. Ennek alapján az A lineáris transzformáció determinánsa úgy is definiálható, mint a – tetszőleges bázisban vett – mátrixának a determinánsa.

6.2.68. Tétel. Legyen V véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $A \in \mathcal{L}(V; V)$ lineáris transzformáció pontosan akkor invertálható, ha $\det(A) \neq 0$.

Bizonyítás. Ha A invertálható, akkor $AA^{-1} = \mathbb{I}$, így $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, azaz $\det(A)$ nem lehet nulla. Ha A nem kölcsönösen egyértelmű, akkor van olyan $e_1 \neq 0$ vektor, amelyre $A(e_1) = 0$. Kiegészítve e_1 -et egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázissá, ha D az ehhez a bázishoz tartozó determináns, akkor $D(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = 0$, azaz $\det(A) = 0$. $\square$

6.2.69. Tétel. Legyen $x = (x_{i,j})_{i=1,j=1}^n$ egy $\mathbb{K}$ -beli elemű négyzetes mátrix, és jelölje az i -edik sor és j -edik oszlop elhagyásával kapott aldetermináns értékét $X_{i,j}$. Ekkor az x mátrix akár balról, akár jobbról szorozva a $((-1)^{i+j}X_{i,j})_{i=1,j=1}^n$ mátrix transzponáltjával, azaz az $y = ((-1)^{i+j}X_{j,i})_{i=1,j=1}^n$ mátrixszal, $\det(x)$ -szer az egységmátrix.

Bár a tétel felhasználható az inverz mátrix kiszámítására, alkalmazása csak kis, illetve „ritka” (sok nullát tartalmazó) mátrixok esetén célszerű.

Bizonyítás. A $z = xy$ szorzatmátrix

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} x_{i,k} X_{j,k}$$

eleme a kifejtési tétel szerint $i = j$ esetén $\det(x)$, egyébként egy olyan mátrix determinánsa, amelynek egyik sora megegyezik egy másik sorral, tehát nulla. $\square$

6.2.70. Lineáris egyenletek. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $b \in V$. Az $Ax = b$ alakú *lineáris egyenlet* megoldhatóságával, megoldáshalmazának szerkezetével kívánunk foglalkozni. Szükségünk lesz a megfelelő $Ax = 0$ *homogén lineáris egyenlet* vizsgálatára is. Vegyük észre, hogy ha a terek véges dimenziósak, $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázis U -ban, $f_1, f_2, \dots, f_m$ pedig egy bázis V -ben, A mátrixa $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^m$, a b koordinátái pedig $b_1, b_2, \dots, b_m$, akkor $x \in U$ pontosan akkor megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinátái kielégítik a

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,j}x_j + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

egyenletrendszer, így egy lineáris egyenlet megoldásai Gauss-eliminációval meghatározhatóak.

6.2.71. Állítás. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $b \in V$. Az $Ax = b$ lineáris egyenlet pontosan akkor megoldható, ha $b \in \text{rng}(A)$. $\square$

6.2.72. A szuperpozíció elve. Legyenek U és V vektorterek $\mathbb{K}$ felett, legyen $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $b_1, b_2, \dots, b_k \in V$. Tegyük fel, hogy $Ax_i = b_i$, ha $i = 1, 2, \dots, k$, legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ skalárok, és legyen $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k$. Ekkor

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$$

megoldása az $Ax = b$ egyenletnek.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} Ax &= A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 Ax_1 + \cdots + \alpha_k Ax_k \\ &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k = b. \quad \square \end{aligned}$$

6.2.73. Következmény. Ha az $Ax = b$ egyenletnek van megoldása, akkor a megoldások affin sokaságot alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = b$. $\square$

6.2.74. Következmény. Az $Ax = 0$ homogén egyenlet megoldásai alteret alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$. $\square$

6.2.75. Következmény. Ha x_1 az $Ax = b$ egyenlet egy megoldása, akkor x_2 pontosan akkor megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, ha $x_2 - x_1$ megoldása az $Ax = 0$ homogén egyenletnek.

Bizonyítás. A $b_1 = b_2 = b$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ választással kapjuk, hogy $x_2 - x_1$ megoldása a homogén egyenletnek. A $b_1 = b$, $b_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ választással kapjuk, hogy ha x_0 a homogén egyenlet egy megoldása, akkor $x_2 = x_1 + x_0$ megoldása az $Ax = b$ egyenletnek. $\square$

6.2.76. Következmény. Ha $\ker(A) = \{0\}$, akkor az $Ax = b$ egyenletnek minden $b \in V$ -re legfeljebb egy megoldása van. $\square$

6.2.77. Következmény. Ha az $Ax = b$ egyenlet megoldható, akkor megoldásai egy $\dim \ker(A)$ dimenziós affin sokaságot alkotnak. $\square$

6.2.78. Invariáns alterek. Legyen X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A: X \rightarrow X$ lineáris transzformáció. Egy Y alterét X -nek az A invariáns alterének nevezzük, ha $A(Y) \subset Y$.

Példák invariáns alterekre $\text{rng}(A)$ és minden azt tartalmazó altér, $\ker(A)$ és minden általa tartalmazott altér. Speciálisan, az egész tér és $\{0\}$ mindig invariáns altér, ezek a *triviális invariáns alterek*.

6.2.79. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Legyen $A: V \rightarrow V$ a $\mathbb{K}$ feletti V vektortér lineáris transzformációja. Az mondjuk, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ *sajátértéke*, az $x \neq 0$ vektor pedig *sajátvektora* A -nak, ha $Ax = \lambda x$. Pontosabban, az összes nem nulla vektort, amelyre $Ax = \lambda x$, a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük. Az A sajátértékeinek halmazát $\sigma(A)$ -val jelöljük és A *spektrumának* nevezzük. A $\varrho(A)$ *spektrálsugár* a sajátértékek abszolút értékeinek maximuma.

Vegyük észre, hogy ha x a λ -hoz tartozó sajátvektor, akkor $A^2x = \lambda^2x$. Általánosabban, ha $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_n\lambda^n$ akkor a $p(A) = \alpha_0\mathbb{I} + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \cdots + \alpha_nA^n$ definícióval $p(A)x = p(\lambda)x$, tehát ha A -nak x a λ -hoz tartozó sajátvektora, akkor $p(A)$ -nak x a $p(\lambda)$ -hoz tartozó sajátvektora.

Adott λ skalárra az összes olyan x vektorok, amelyekre $Ax = \lambda x$ (beleértve a 0 vektort is), egy alteret alkotnak, amely nem más, mint $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár pontosan akkor sajátérték, ha ez az altér nem a $\{0\}$, vagy ami ezzel ekvivalens, ha $A - \lambda\mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű; ekkor a $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$ altér a λ -hoz tartozó *sajátaltér*, dimenziója a λ *geometriai multiplicitása*. A sajátaltér nyilván invariáns altere A -nak.

6.2.80. Karakterisztikus polinom. Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(V; V)$. A $\lambda \mapsto \det(A - \lambda \mathbb{I})$ leképezést az A transzformáció *karakterisztikus polinomjának* nevezzük; mivel bármilyen bázisban felírva A mátrixát, a $\lambda \mapsto \det[A - \lambda \mathbb{I}]$ leképezésről van szó, látjuk, hogy n -edfokú polinom, főegyütthatója $(-1)^n$, konstans tagja $\det(A)$, és a definíció szerint nem függ a bázis megválasztásától. Szokás az A transzformáció helyett az $[A]$ mátrix *karakterisztikus polinomjáról* is beszélni. Nyilván ekvivalens mátrixok karakterisztikus polinomja ugyanaz, hiszen azok felfoghatók ugyanazon lineáris transzformáció más-más bázisban vett mátrixának. Hasonlóan ekvivalens transzformációk karakterisztikus polinomja is ugyanaz, mert alkalmas bázisokat választva, ugyanaz a mátrixuk. Az $[A]'$ karakterisztikus polinomja megegyezik $[A]$ karakterisztikus polinomjával, hiszen $[A]' - \lambda \mathbb{I} = [A - \lambda \mathbb{I}]'$, és az utóbbi determinánsa megegyezik $[A - \lambda \mathbb{I}]$ determinánsával.

A karakterisztikus polinom $n - 1$ -edfokú tagjának a $(-1)^{n-1}$ -szerese az $[A]$ főátlójában lévő elemek összege; ezt $[A]$, illetve A *nyomának* nevezzük, és $\text{Tr}(A)$ -val, illetve $\text{Tr}([A])$ -val (vagy $\text{Sp}(A)$ -val, illetve $\text{Sp}([A])$ -val) jelöljük. Ha felírjuk a karakterisztikus polinomot $\lambda \mapsto (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ gyöktényezőző alakban, akkor látjuk, hogy (a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben is) az A nyoma a karakterisztikus polinomja (multiplicitással vett komplex, tehát összes) zérushelyeinek összege.

A karakterisztikus polinom jelentőségét a sajátértékekkel való kapcsolata adja: ismeretében a következő tétel szerint meghatározhatók a sajátértékek, azok ismeretében pedig a hozzájuk tartozó sajátalterek. A karakterisztikus polinom kiszámítására, ugyanúgy, mint a determináns kiszámítására, „ritka” (sok nullát tartalmazó) mátrix vagy kis n esetén a kifejtési tétel használható; egyébként érdemesebb $n + 1$ helyen Gauss-féle kiküszöböléssel kiszámítani $\det[A - \lambda \mathbb{I}]$ értékét és Lagrange-interpolációval felírni a karakterisztikus polinomot. (Sokkal hatékonyabb eljárások is vannak.)

6.2.81. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ pontosan akkor sajátértéke A -nak, ha $\mathbb{K}$ -beli zérushelye a karakterisztikus polinomnak.

Bizonyítás. Ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ egy zérushelye a karakterisztikus polinomnak, akkor $\det(A - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$, így $A - \lambda_0 \mathbb{I}$ magja nem $\{0\}$. Megfordítva, ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ sajátérték, akkor $A - \lambda_0 \mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű, így $\det(A - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$. $\square$

6.2.82. Algebrai multiplicitás. Az előző definíció jelöléseivel, ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ a karakterisztikus polinomnak k -szoros zérushelye [azaz a karakterisztikus polinom osztható $(\lambda - \lambda_0)^k$ -val, de nem osztható $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$ -gyel], akkor azt mondjuk, hogy a λ_0 sajátérték *algebrai multiplicitása* k .

A geometriai és az algebrai multiplicitás nem mindig egyeznek meg: például ha D a differenciálás operátora az n -nél alacsonyabb fokú $\mathbb{K}$ -beli együtthatós polinomok terén, akkor D -nek nem nulla sajátértéke nem lehet, mert bármely polinom deriváltja alacsonyabb fokú, mint a polinom. A 0 viszont sajátérték, a megfelelő sajátalter a konstans polinomok egydimenziós altere. Az $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ hatványfüggvényekből álló bázisban felírva D mátrixát adódik, hogy a karakterisztikus polinomja $\lambda \mapsto (-1)^n \lambda^n$, így a 0 algebrai multiplicitása n . A geometriai multiplicitás nem nagyobb, mint az algebrai: ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ a λ_0 -hoz tartozó sajátalter egy bázisa, és ezt kiegészítjük V egy bázisává,

akkor ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

ahonnan látszik, hogy $(\lambda - \lambda_0)^k$ osztója a karakterisztikus polinomnak.

* **6.2.83. Cayley–Hamilton-tétel.** Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek, és p az A karakterisztikus polinomja. Ekkor $p(A) = 0$.

Bizonyítás. Legyen n a tér dimenziója, $p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n$, rögzítsünk egy bázist, legyen A mátrixa a , az egységmátrix e , és jelölje $b_{i,j}(\lambda)$ az $a - \lambda e$ mátrix i -edik oszlopának (sic!) és j -edik sorának elhagyásával kapott aldetermináns értékének $(-1)^{i+j}$ -szeresét. A $b(\lambda) = (b_{i,j}(\lambda))_{i=1,j=1}^n$ mátrix és az $a - \lambda e$ mátrix szorzata a 6.2.69 tétel szerint $\det(a - \lambda e)e$. A $b(\lambda)$ mátrix minden eleme legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinomja λ -nak. Írjuk fel a $b(\lambda)$ mátrixot $b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \cdots + \lambda^{n-1} b_{n-1}$ alakban. Az előző állítás szerint

$$b_0 a + \lambda(b_1 a - b_0) + \cdots + \lambda^{n-1}(b_{n-1} a - b_{n-2}) - \lambda^n b_{n-1} = (p_0 + p_1 \lambda + \cdots + p_n \lambda^n) e.$$

A két oldalon szereplő mátrixoknak elemenként meg kell egyezniük minden λ -ra. Innen $b_0 a = p_0 e$, $b_j a - b_{j-1} = p_j e$, ha $j = 1, 2, \dots, n-1$, és $-b_{n-1} = p_n$. Ezeket az egyenlőségeket balról beszorozva rendre $a^0 = e$ -vel, a -val, a^2 -tel, stb, a^n -nel, majd összeadva, azt kapjuk, hogy $0 = p_0 e + p_1 a + p_2 a^2 + \cdots + p_n a^n$. $\square$

6.2.84. Felső háromszög alak. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek. Akkor és csak akkor van olyan bázis, amelyben A mátrixa felső háromszög alakú, ha a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$ -beli együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként írható.

A bizonyítás konstruktív.

* **Bizonyítás.** Ha A mátrixa valamely bázisban felső háromszög alakú, akkor gyöktényezős alakban (elsőfokú polinomok szorzataként) olvasható le a karakterisztikus polinom: gyökei a főátlóban álló elemek. A megfordítást a V dimenziója szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy dimenzióban igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n - 1$ dimenzióra igaz. Legyen λ_1 egy sajátértéke A -nak, és legyen f_1 egy hozzá tartozó sajátvektor. Egészítsük ki az f_1 vektort $e_2, e_3, \dots, e_n$ vektorokkal V egy bázisává. Ebben a bázisban A mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

alakú. Tekintsük a $P: V \rightarrow U$ projekciót, ahol $P(x) = x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$, ha

$$x = x_1f_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Mivel P lineáris, a $B = PA$, $B: U \rightarrow U$ leképezés is lineáris, és az $e_2, \dots, e_n$ bázisban mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Innen A karakterisztikus polinomja a $\lambda \mapsto \lambda_1 - \lambda$ polinomnak és B karakterisztikus polinomjának a szorzata, tehát B karakterisztikus polinomja is felírható elsőfokú tényezők szorzataként. Az indukciós feltevés szerint van olyan $f_2, \dots, f_n$ bázis U -ban, amelyben B mátrixa felső háromszög alakú. Az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisban A mátrixa felső háromszög alakú. $\square$

6.2.85. Következmény. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor van olyan bázis, amelyben A mátrixa felső háromszög alakú. $\square$

* **6.2.86. Segédétel.** Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek. Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ páronként különböző sajátértékek, $x_1, \dots, x_m$ pedig hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor $x_1 + \cdots + x_m \neq 0$.

Bizonyítás. Indukcióval: $m = 1$ -re nyilvánvaló. Ha m -re nem lenne igaz, azaz $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m = 0$ teljesülne, akkor alkalmazva A -t mindkét oldalra, azt kapnánk, hogy

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m x_m = 0.$$

Ebből az összefüggésből kivonva az előző összefüggés λ_m -szeresét, az adódna, hogy

$$(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)x_2 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0,$$

ami ellentmond az indukciós feltevésnek, mert $(\lambda_j - \lambda_m)x_j$ is a λ_j -hez tartozó sajátvektor, ha $j = 1, 2, \dots, m-1$. $\square$

6.2.87. Átlós alak. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek. Akkor és csak akkor van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális, ha a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$ -beli együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként írható, és minden sajátérték geometriai dimenziója megegyezik az algebrai dimenziójával.

A bizonyítás konstruktív.

* **Bizonyítás.** Ha A mátrixa valamely bázisban diagonális, akkor gyöktényezős alakban (elsőfokú polinomok szorzataként) olvasható le a karakterisztikus polinom: gyökei a főátlóban álló elemek, a megfelelő bázisvektorok pedig az adott sajátértékhez tartozó, annak algebrai multiplicitásával megegyező dimenziós alteret feszítenek ki, így az algebrai és geometriai multiplicitások megegyeznek. A megfordításhoz legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ a karakterisztikus polinom páronként különböző gyökei, és

$$\lambda \mapsto (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{k_m}$$

a karakterisztikus polinom. Minden sajátértékhez választva a sajátaltérből egy bázist, egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorrendszert kapunk, ahol $\dim(V) = n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Ez a vektorrendszer lineárisan független, mert ha $\sum_{t=1}^n \alpha_t e_t = 0$, és $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_{k_j}}$ a λ_j sajátértékhez tartozó sajátaltérben vannak, akkor $x_j = \alpha_{s_1} e_{s_1} + \alpha_{s_2} e_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{k_j}} e_{s_{k_j}}$ is. Ezen vektorok között viszont nem lehetnek nullától különbözőek, mert azok páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lennének, így az előző segédétel szerint összegük nem lehet nulla. Tehát azt kapjuk, hogy az összes α_t együttható nulla, azaz $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis. Ebben a bázisban A mátrixa diagonális mátrix. $\square$

*** 6.2.88. Általánosított sajátvektor.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Az mondjuk, hogy az x vektor a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátvektora* A -nak, ha valamely $p \in \mathbb{N}$ -re $(A - \lambda \mathbb{I})^p x = 0$. Másként az x vektor pontosan akkor λ -hoz tartozó általánosított sajátvektor, ha benne van $\cup_{p \in \mathbb{N}} \ker((A - \lambda \mathbb{I})^p)$ -ben. Mivel $\ker((A - \lambda \mathbb{I})^p) \subset \ker((A - \lambda \mathbb{I})^{p+1})$ minden $p \in \mathbb{N}$ -re, az A -nak a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorai egy alteret alkotnak; ez a λ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátaltér*, amelynek nyilván része a λ -hoz tartozó sajátaltér. Ez az alter nyilván invariáns altere A -nak, hiszen ha tartalmazza x -et, akkor $(A - \lambda \mathbb{I})x$ -et is, így $Ax = (A - \lambda \mathbb{I})x + \lambda x$ -et is.

Legyen x a λ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektor. Az x -hez tartozó *vektorsorozaton* a

$$(A - \lambda \mathbb{I})^{p-1} x, (A - \lambda \mathbb{I})^{p-2} x, \dots, (A - \lambda \mathbb{I})x, x$$

sorozatot érjük, ahol p a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $(A - \lambda \mathbb{I})^p x = 0$. Vegyük észre, hogy a vektorsorozat tagjai mind különbözőek és az első tagja λ -hoz tartozó sajátvektora A -nak.

*** 6.2.89. Segédétel.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek, λ pedig sajátértéke A -nak. Ha S_i , $i = 1, 2, \dots, k$ a λ -hoz tartozó általánosított sajátvektorokból álló (nem üres) vektorsorozatok, első vektoraik, az y_i , $i = 1, 2, \dots, k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, akkor a vektorsorozatok egyesítése is lineárisan független rendszer.

Bizonyítás. Legyen p_i az S_i vektorsorozat hossza. Feltehetjük, hogy

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k.$$

A bizonyítás p_1 szerinti indukcióval történik. Ha $p_1 = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert az y_i -k függetlenségét mondja ki. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $1 \leq p_1 < m$ -re, és tegyük fel, hogy $m = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$. Legyen r a legnagyobb olyan index, amelyre $p_r > 1$. Legyen S'_i az a vektorsorozat, amelyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az utolsó x_i vektort S_i -ből, ha $1 \leq i \leq r$. A kezdővektorok nem változtak, így az S'_i , $i = 1, 2, \dots, r$ vektorsorozatok együtt lineárisan független rendszert alkotnak. Meg kell mutatnunk, hogy visszarakva az elhagyott (az S'_i -k egyesítésében nyilván nem szereplő) x_i vektorokat, a kapott S rendszer lineárisan független. Tegyük fel, hogy $\sum_{x \in S} \alpha_x x = 0$. Jelölje S'' az S azon részhalmazát, amelyet úgy kapunk, hogy az y_i , $1 \leq i \leq k$ vektorokat hagyjuk el S -ből. Alkalmazva az $A - \lambda \mathbb{I}$ operátort, azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{x \in S} \alpha_x (A - \lambda \mathbb{I})x = \sum_{x \in S''} \alpha_x (A - \lambda \mathbb{I})x = \sum_{x \in S'} \alpha_x x.$$

Mivel az S' -beli vektorok lineárisan függetlenek, az ezekhez tartozó együtthatók mind nullák. A többi együtthatók a $\sum_{x \in S} \alpha_x x = 0$ összegben viszont az y_i -khez tartoznak, így azok függetlensége miatt ezek is mind nullák. $\square$

* **6.2.90. Segédétel.** Legyen V vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ pedig különböző sajátértékei A -nak. Bármely $1 \leq i \leq m$ -re választva egy lineárisan független vektorrendszert a λ_i -hez tartozó általánosított sajátaltérben, a kapott vektorrendszerek egyesítése lineárisan független.

Bizonyítás. Ha nem lenne az, akkor lineárisan kombinálhatnánk belőle a nulla vektort nem csupa nulla együtthatóval. Jelölje x_i a λ_i -hez tartozó vektorok adott lineáris kombinációját; x_i a λ_i -hez tartozó általánosított sajátvektor. Ha megmutatjuk, hogy mindegyik x_i nulla, akkor ellentmondást kapunk. Tegyük fel indirekt, hogy valamelyik x_i nem nulla, mondjuk $x_1 \neq 0$. Legyen p_i az a legkisebb természetes szám, amelyre $(A - \lambda_i \mathbb{I})^{p_i} x_i = 0$. Alkalmazzuk az $0 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$ egyenlőség mindkét oldalára az $(A - \lambda_1 \mathbb{I})^{p_1-1} \prod_{i=2}^m (A - \lambda_i \mathbb{I})^{p_i}$ operátort. Felhasználva, hogy a szorzat tényezői felcserélhetőek, kapjuk, $(A - \lambda_1 \mathbb{I})^{p_1-1} \prod_{i=2}^m (A - \lambda_i \mathbb{I})^{p_i} x_j = 0$, ha $j = 2, \dots, m$. Mivel az $(A - \lambda_1 \mathbb{I})^{p_1-1} x_1$ vektor a λ_1 -hez tartozó sajátvektora A -nak,

$$\left(\prod_{i=2}^m (A - \lambda_i \mathbb{I})^{p_i} \right) (A - \lambda_1 \mathbb{I})^{p_1-1} x_1 = \left(\prod_{i=2}^m (\lambda_1 - \lambda_i \mathbb{I})^{p_i} \right) (A - \lambda_1 \mathbb{I})^{p_1-1} x_1 \neq 0.$$

Ez ellentmondás. $\square$

* **6.2.91. Jordan normálalak.** Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű négyzetes mátrixot *Jordan-blokk*nak nevezünk, ha 1×1 -es vagy pedig 1 felső sávmátrix a főátlóban mindenütt ugyanazzal a λ skalárral, felette pedig mindenütt 1-gyel. Egy $\mathbb{K}$ -beli elemű négyzetes mátrixot *Jordan-normálalakúnak* nevezünk, ha 1×1 -es vagy pedig 1 felső sávmátrix, amely a főátlóra felfűzött Jordan-blokkokból áll. Egy véges dimenziós vektortér egy adott lineáris transzformációja esetén egy bázist a transzformációhoz tartozó *Jordan-bázis*nak nevezünk, ha ebben a bázisban a transzformáció mátrixa Jordan-normálalakú.

* **6.2.92. Jordan-bázis létezése és a Jordan-normálalak egyértelmősége.** Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, A lineáris transzformációja V -nek. Pontos akkor létezik Jordan-bázis A -hoz, ha a karakterisztikus polinomja elsőfokú tényezők szorzataként írható $\mathbb{K}$ felett. A Jordan-normálalak (ha létezik) egyértelmű a következő értelemben: az egyes sajátértékekhez tartozó Jordan-blokkok száma a sajátérték geometriai multipllicitása, méreteinek összege a sajátérték algebrai multipllicitása, ami az adott sajátértékhez tartozó általánosított sajátaltér dimenziója, és az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok száma egyértelműen meghatározott.

A bizonyítás konstruktív, lehetőséget ad a Jordan-bázis megkeresésére.

Bizonyítás. A létezés bizonyításával kezdjük. A feltétel szükségességet már láttuk, hiszen a Jordan-normálalak felső háromszög alak. Az elégségeséget az n dimenziószám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és minden n -nél kisebb dimenzióban igaz az állítás.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor A képtere n -nél kisebb dimenziós. Mivel $\text{rng}(A)$ invariáns altere A -nak, az indukciós feltevést alkalmazhatjuk $A|_{\text{rng}(A)}$ -ra. Az egy

adott Jordan-blokkhoz tartozó bázisvektorok nyilván a megfelelő λ sajátértékhez tartozó vektorsorozatot alkotnak. Jelölje $S_1, S_2, \dots, S_k$ a 0 sajátértékhez tartozó ilyen vektorsorozatokat, és legyen ezek első, illetve utolsó vektora $y_1, y_2, \dots, y_k$, illetve $w_1, w_2, \dots, w_k$. Mivel w_i a képtérben van, létezik hozzá olyan x_i vektor, amelyre $Ax_i = w_i$. Mivel az $y_1, y_2, \dots, y_k$ vektorok a 0-hoz tartozó, tehát $\ker(A)$ -beli sajátvektorok, és nyilván lineárisan függetlenek, hiszen egy bázis tagjai, sorozatuk kiegészíthető $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_r$ vektorokkal $\ker(A)$ egy bázisává. Ha $1 \leq i \leq k$, akkor legyen S'_i az a vektorsorozat, amelyet úgy kapunk, hogy S_i végére odaírjuk x_i -t, ha pedig $k < i \leq r$, akkor legyen S'_i az egyetlen z_i vektorból álló vektorsorozat; a többi sajátértékhez tartozó vektorsorozatokat nem változtatjuk. Az így kapott összes vektorsorozat vektorai pontosan n vektort tartalmaznak, mivel $n = \dim(\ker(A)) + \dim(\text{rng}(A))$, és az előző két segédétel felhasználásával adódik, hogy lineárisan független vektorrendszert – tehát bázist – alkotnak. Ebben a bázisban A mátrixa nyilván Jordan-normálalakú.

Végül az általános esetben legyen λ egy sajátértéke A -nak, és alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat az $A - \lambda I$ leképezésre, amelynek van 0-hoz tartozó sajátvektora, tehát amelyre $\dim(\text{rng}(A)) < n$.

Az egyértelműség bizonyításához vegyük észre, hogy egy adott Jordan-normálalak esetén egy adott λ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkhoz tartozó bázisvektorok egy, az adott sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektor-sorozatot alkotnak. Mivel ezek nyilván lineárisan függetlenek – hiszen egy bázis vektorai – és számuk a λ algebrai multiplicitása – hiszen a Jordan-normálalakból a karakterisztikus polinomot gyöktényezőzős alakban kapjuk – csak azt kell megmutatnunk, hogy a λ -hoz tartozó általánosított sajátaltér egy bázisát alkotják. Ha ez nem lenne igaz, akkor választhatnánk még az általánosított sajátaltérből egy tőlük lineárisan független vektort. Mivel a Jordan-bázis többi vektora a többi általánosított sajátaltérben van, ez ellentmond az előző segédtételeknek, hiszen több lineárisan független vektort kaptunk, mint a tér dimenziója.

Jelölje $J_1, \dots, J_k$ a λ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkokat, J_i legyen $p_i \times p_i$ méretű, és legyen $e_{i,p_i-1}, e_{i,p_i-2}, \dots, e_{i,0}$ az adott blokkhoz tartozó vektorsorozat a Jordan-bázisból. Az egyértelműséggel kapcsolatos összes többi állítás következik, ha megmutatjuk, hogy az $e_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$, $\max\{0, p_i - r\} \leq j < p_i$ bázisvektorok $\ker((A - \lambda I)^r)$ egy bázisát adják. Az nyilvánvaló, hogy mindannyian ebben az altérben vannak, mert $(A - \lambda I)e_{i,p_i-1} = 0$ és $(A - \lambda I)e_{i,j} = e_{i,j+1}$, ha $j < p_i - 1$, így csak azt kell megmutatnunk, hogy generátorrendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy $(A - \lambda I)^r x = 0$. Ekkor x a λ -hoz tartozó általánosított sajátvektor, így az eddig bizonyítottak szerint felírható $x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{p_i-1} \alpha_{i,j} e_{i,j}$ alakban. Mindkét oldalra alkalmazva $(A - \lambda I)^r$ -et azt kapjuk, hogy $(A - \lambda I)^r x = 0 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{p_i-r-1} \alpha_{i,j} e_{i,j+r}$. Az itt szereplő $\alpha_{i,j}$ együtthatóknak a lineáris függetlenség miatt nullának kell lenni, ami igazolja az állítást. $\square$

* **6.2.93. Következmény.** Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor van Jordan-bázis, amelyben A mátrixa Jordan-normálalakú. $\square$

6.3 Belső szorzat

6.3.1. Norma. Legyen X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését X -nek $\mathbb{R}$ -be normának, az $(X, \|\cdot\|)$ párt pedig *normált térnek* nevezzük $\mathbb{K}$ felett, ha

(1) $\|x\| \geq 0$ minden $x \in X$ -re és $\|x\| = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ minden $x \in X$ -re és $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra (*abszolútérték-homogenitás*);

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$ -re (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Megjegyezzük, hogy $\|\cdot\|$ helyett az $|\cdot|$ jelölés is szokásos. Normált tér bármely lineáris altere is normált tér. Egy $x \in X$ elemet *normáltnak* nevezünk, ha $\|x\| = 1$. A normált terek *izomorfizmusai* definíció szerint a lineáris és normatartó bijekciók. Bármely X véges dimenziós normált tér izomorf valamely alkalmas normával ellátott $\mathbb{K}^n$ térrel: Ha az X tér n dimenziós, akkor tudjuk, hogy létezik egy $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}^n$ lineáris izomorfizmus. Legyen $\|\varphi(x)\| := \|x\|$, ha $x \in X$. Ezzel a normával $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ normált tér, az előbbi φ pedig normatartó lineáris bijekció.

A normált terek normált térbe való leképezéseit általában *operátornak*, skalár értékű leképezéseit pedig *funkcionálnak* nevezzük.

6.3.2. Példák. A $\mathbb{K}^n$ tér normált tér a

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \text{illetve} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

ha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ normákkal.

A jelölés onnan ered, hogy akármilyen $1 \leq p < \infty$ valós számra az

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

leképezés norma $\mathbb{K}^n$ -en (ez az úgynevezett p -norma): a $t \mapsto t^p$ leképezés konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}z + \frac{v}{u+v}w \right)^p \leq \frac{u}{u+v}z^p + \frac{v}{u+v}w^p,$$

ha $u, v, z, w \geq 0, u+v > 0$; az $u = \|x\|_p, v = \|y\|_p, z = |x_j|/\|x\|_p, w = |y_j|/\|y\|_p$ helyettesítés után j -re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|)^p \leq 1,$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség, a többi feltétel teljesülése pedig triviális. A $\|\cdot\|_1$ a $p = 1$ speciális eset, $\|\cdot\|_\infty$ -t pedig a $p \rightarrow \infty$ határérték adja.

6.3.3. Belső szorzat. Ha X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezése $X \times X$ -nek $\mathbb{K}$ -ba úgy, hogy minden $x, y, z \in X$ -re és $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra

(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (*additivitás*);

(2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (*homogenitás*);

(3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (*Hermite-szimmetria*);

(4) $\langle x, x \rangle > 0$, ha $x \neq 0$ (*pozitív definitiség*);

akkor X -et *belső szorzat térnek* nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Az x és y elemek $\langle x, y \rangle$ *belső szorzatának* vagy *skaláris szorzatának* jelölésére az (x, y) , $(x|y)$, $x \cdot y$, xy és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak. A *belső szorzat terek izomorfizmusai* definíció szerint a lineáris és *belső szorzat tartó bijekciók*.

(3)-ból bármely $x \in X$ -re $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}$, tehát $\langle x, x \rangle$ valós. (1)-ből és (3)-ból

$$\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

így a *belső szorzás* *additív* a második változóban is, és

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle,$$

így a második változóból $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén nem a skalár, hanem a skalár konjugáltja emelhető ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában a $\langle y|x \rangle = \langle x, y \rangle$ *belső szorzatot* használják, ez a második változóban lineáris és az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja. (2)-ből $\langle 0, x \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle$ minden $x \in X$ -re. Természetesen a konjugálásnak csak a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben van jelentősége; a valós esetben (3) egyszerűen a szimmetriát jelenti, és a *belső szorzás* szimmetrikus bilineáris forma, amelyhez tartozó kvadratikus forma (4) szerint pozitív definit.

6.3.4. Tétel. *Ha X *belső szorzat tér* $\mathbb{K}$ felett, akkor az x elem normáját a $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ összefüggéssel definiálva*

$$(1) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{minden } x, y \in X\text{-re}$$

és X *normált tér*. Az egyenlőtlenséget *Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek* fogjuk hívni, mivel *számsorozatokra Cauchy, integrálokra Bunyakovszkij használta először*, bár szokás a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség* elnevezés is, vagy a nevek más kombinációja.

Bizonyítás. Az $x = 0 = y$ eset triviális. Ha például $y \neq 0$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2,$$

amiből $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$ választással

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

amiből adódik a *háromszög-egyenlőtlenség*. A többi normatulajdonság triviális. $\square$

6.3.5. Példa. Legyen $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$, ha $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Könnyű látni, hogy így egy *belső szorzatot* kapunk, amelyet $\mathbb{K}^n$ *szokásos* *belső szorzatának* nevezzünk. A belőle adódó norma az előző példában a $p = 2$ esetnek felel meg.

6.3.6. Megjegyzés. Egyszerű számolással adódik, hogy egy X belső szorzat térben teljesül az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{ha } x, y \in X$$

paralelogramma-azonosság. Mivel $n > 1$ és $p \neq 2$ esetén ez az azonosság nem teljesül $\mathbb{K}^n$ -en a $\|\cdot\|_p$ normára, az nem származhat belső szorzatból. Megmutatható, hogy egy norma pontosan akkor származik belső szorzatból, ha teljesül rá a paralelogramma-azonosság.

6.3.7. Szögek, euklideszi tér, unitér tér. Valós belső szorzat térben két nem nulla vektor által bezár *szög* alatt azt az egyetlen $0 \leq \alpha \leq \pi$ szöget értjük, amelyre $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos \alpha$. A véges dimenziós valós belső szorzat tereket *euklideszi tereknek*, a véges dimenziós komplex belső szorzat tereket pedig *unitér tereknek* is szokás nevezni. (Vannak, akik az unitér tereket, sőt, a végtelen dimenziós belső szorzat tereket is euklideszi térnek nevezik.)

6.3.8. Definíció. Legyen X belső szorzat tér. Ha $x, y \in X$, és $\langle x, y \rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *merőlegesek* vagy *ortogonálisak*. Jelölése: $x \perp y$. Az $M, N \subset X$ halmazokat *ortogonálisaknak* nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M, y \in N$ -re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset X$ halmaz *ortogonális komplementerén* az X összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: $M^\perp$. Vegyük észre, hogy bármely halmaz ortogonális komplementere altér. Egy $x_i, i \in I$ rendszert *ortogonális rendszernek* nevezünk, ha bármely két különböző eleme egymásra ortogonális, azaz ha $i, j \in I, i \neq j$, akkor $x_i \perp x_j$. Ha egy ortogonális rendszer minden eleme normált, akkor *ortonormált rendszerről* beszélünk. Az $x \in X$ elemnek az $x_i, i \in I$ ortonormált rendszerre vonatkozó *Fourier-együtthatóin* az $\langle x, x_i \rangle, i \in I$ számokat értjük.

6.3.9. Vegyes szorzat. Jelölje $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisát i, j, k . Könnyű kiszámolni, hogy az $x_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ és $x_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$ vektorok vektoriális szorzata a

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & i \\ c_1 & c_2 & j \\ d_1 & d_2 & k \end{vmatrix}$$

determináns utolsó oszlop szerint formális kifejtésével is megkapható, és hogy merőleges az x_1 és az x_2 vektorra is. Ha $x_3 = b_3 i + c_3 j + d_3 k$, akkor az $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle$ vegyes szorzatra egyszerű számolással

$$\langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

azaz a vegyes szorzat nem más, mint a három vektornak az i, j, k bázishoz tartozó determinánsa. Ha x_3 helyére olyan normált vektort helyettesítünk, amelynek $x_1 \times x_2$ nemnegatív konstansszorosa, akkor (újra) látjuk, hogy a vektoriális szorzat hossza az x_1 és x_2 által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe.

6.3.10. Általánosított Pitagorasz-tétel. Ha az X belső szorzat tér

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

vektorai páronként merőlegesek és $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, akkor

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Bizonyítás.

$$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{\ell=1}^n \|x_\ell\|^2. \quad \square$$

6.3.11. Következmény. Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ ortonormáltak, akkor lineárisan függetlenek.

Bizonyítás. Ha $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ nulla, akkor

$$0 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n \|\alpha_j x_j\|^2 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2. \quad \square$$

6.3.12. Gram–Schmidt-ortogonalizálás. Legyen X egy belső szorzat tér, és $y_1, y_2, \dots$ egy véges vagy végtelen lineárisan független sorozat X -ben, azaz olyan sorozat, amelynek minden tagja lineárisan független az előtte állóktól. Egy olyan x_k ortonormált sorozatot fogunk megkonstruálni, amelyre

$$\{y_k: k \leq n\} \quad \text{és} \quad \{x_k: k \leq n\}$$

ugyanazt az alteret feszítik ki minden n -re.

Legyen $u_1 = y_1$ és $x_1 = u_1/\|u_1\|$. Legyen $u_2 = y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle x_1$ és $x_2 = u_2/\|u_2\|$. Folytassuk teljes indukcióval ezt az eljárást. Legyen

$$u_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, x_k \rangle x_k \quad \text{és} \quad x_n = u_n/\|u_n\|.$$

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$\langle u_n, x_k \rangle = \left\langle \left(y_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle y_n, x_j \rangle x_j \right), x_k \right\rangle = 0,$$

így $\langle x_n, x_k \rangle = 0$. Mivel u_n benne van az $u_1, \dots, u_{n-1}, y_n$ rendszer által kifeszített alterben, mindkét rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki.

6.3.13. Következmény. Bármely véges dimenziós belső szorzat térben létezik ortonormált bázis. $\square$

6.3.14. Következmény. Bármely n dimenziós belső szorzat térnek létezik izomorfizmus a szokásos belső szorzattal ellátott $\mathbb{K}^n$ térre.

Bizonyítás. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy ortonormált bázis a térben, és ha

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

akkor legyen x képe $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\square$

6.3.15. Tétel. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy ortonormált bázis az X belső szorzat térben. Ekkor egy $x \in X$ elem koordinátái ebben a bázisban az $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ Fourier-együtthatók.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Ekkor

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j. \quad \square$$

6.3.16. Az approximáció alapfeladata normált térben. Legyen X egy normált tér, Y egy lineáris altere X -nek, és $x \in X$. Az *approximáció alapfeladata* abban áll, hogy döntsük el, van-e az x -et az Y -ből *legjobbban approximáló elem*, azaz olyan $y \in Y$, amelyre $\|x - y\|$ minimális, ha van, egyértelmű-e, és határozzuk meg.

6.3.17. Legjobb lineáris approximáció belső szorzat térben. Legyen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

egy ortonormált rendszer az X belső szorzat térben, $x \in X$. Ekkor

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2,$$

bármilyen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skalárookra, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ fennáll $k = 1, 2, \dots, n$ -re, azaz ha az α_k -k a Fourier-együtthatók.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \overline{\alpha_k} - \overline{\alpha_k} \langle x, x_k \rangle - \alpha_k \langle x_k, x \rangle) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - \langle x, x_k \rangle|^2. \quad \square \end{aligned}$$

6.3.18. Következmény: Bessel-egyenlőtlenség.

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x az x_k -k lineáris kombinációja.

Bizonyítás. Az előző tételben $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ helyettesítéssel egyenlőség teljesül, így

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2. \quad \square$$

6.3.19. Ortogonális felbontási tétel/felbontási tétel. Legyen X egy véges dimenziós belső szorzat tér, és Y egy altere X -nek. Ekkor minden $x \in X$ egyértelműen felírható $x = y + z$ alakban, ahol $y \in Y$ és $z \in Y^\perp$, továbbá $\dim(Y) + \dim(Y^\perp) = \dim(X)$.

A tételt *projekció tételnek* is szokás nevezni, mivel $z = x - y$ merőleges y -ra, így $x \mapsto y$ merőleges vetítése, idegen szóval *ortogonális projekciója* X -nek Y -ra. A bizonyítás mutatja, hogy y az x -et Y -ból legjobban approximáló elem, és $Y^\perp$ egy ortonormált bázisát is megadja.

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan bázist X -ben, amelynek első m tagja bázis Y -ban, és ortonormáljuk. A kapott $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisból az első m ortonormált bázis Y -ban. Legyen $y = \sum_{j=1}^m \langle x, e_j \rangle e_j \in Y$, ami az x -et az Y -ból legjobban approximáló elem. Ekkor $j = 1, 2, \dots, m$ -re $\langle x - y, e_j \rangle = 0$, így $z = x - y$ merőleges Y -ra, azaz a kívánt felbontás létezik.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x = y + z = y' + z'$, $(y, y' \in Y, z, z' \in Y^\perp)$, akkor $Y \ni y - y' = z' - z \in Y^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle y - y', z' - z \rangle = \langle y - y', y - y' \rangle = \|y - y'\|^2,$$

amiből $y = y', z = z'$.

Nyilván $z = \sum_{j=m+1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$, és így a konstrukció miatt $e_{m+1}, \dots, e_n$ bázisa $Y^\perp$ -nek.

□

6.3.20. Következmény. $(Y^\perp)^\perp = Y$.

Bizonyítás. Mivel Y minden eleme merőleges $Y^\perp$ minden elemére, $Y \subset (Y^\perp)^\perp$. A másik irányú tartalmazáshoz vegyük észre, hogy ha $x = y + z$ az x ortogonális felbontása, akkor $\langle x, z \rangle = \|z\|^2$. Így ha $x \in (Y^\perp)^\perp$, akkor $0 = \langle x, z \rangle = \|z\|^2$, ahonnan $z = 0$, így $x = y \in Y$. □

6.3.21. Következmény. Ha $z_1, z_2, \dots, z_k$ egy generátorrendszere az $Y^\perp$ altérnek, akkor

$$Y = \{y \in X: \langle y, z_j \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, k\},$$

azaz Y egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza, és ha $v \in X$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned} Y + v &= \{y + v \in X: \langle y, z_j \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, k\} \\ &= \{u \in X: \langle u - v, z_j \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, k\} \\ &= \{u \in X: \langle u, z_j \rangle = \langle v, z_j \rangle, j = 1, 2, \dots, k\}, \end{aligned}$$

azaz az $Y + v$ affin sokaság egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza. □

6.3.22. Előállítási tétel. Legyen f lineáris funkcionál az X véges dimenziós belső szorzat téren. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $y \in X$, amelyre

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{minden } x \in X\text{-re.}$$

* **Bizonyítás.** Tudjuk, hogy $Y = \ker(f)$ lineáris altere X -nak. Ha $Y = X$, akkor $y = 0$ választható. Ha $Y \neq X$, akkor $Y^\perp \neq \{0\}$. Legyen u egy nem nulla eleme $Y^\perp$ -nek. Ekkor bármely $x \in X$ esetén $f(x)u - f(u)x \in Y$, mert

$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0.$$

Így

$$0 = \langle f(x)u - f(u)x, u \rangle = f(x)\|u\|^2 - f(u)\langle x, u \rangle,$$

ahonnan $f(x)$ -et kifejezve, $y = \overline{f(u)u/\|u\|^2}$ jelöléssel kapjuk az állítást.

Az egyértelműséghez: ha $f(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, akkor $\langle x, y - z \rangle = 0$ minden x -re, amiből $x = y - z$ helyettesítéssel $y = z$. $\square$

6.3.23. Adjungált leképezés. Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett, $A: X \rightarrow Y$ lineáris leképezés. Bármely rögzített $y \in Y$ -ra az $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ leképezés lineáris funkcionál X -en, így van olyan (A -tól és y -tól függő) $A^*y \in X$, amelyre

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \text{ha } x \in X.$$

Az $A^*: y \mapsto A^*y$ leképezését Y -nak X -be az A adjungáltjának nevezzük. Ha $A^*A = \mathbb{I}_X$ és $AA^* = \mathbb{I}_Y$, azaz A és A^* egymás inverzei, akkor A -t *unitérnek* nevezzük.

6.3.24. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel A^* lineáris leképezése Y -nak X -be. Bármely A -ra $(A^*)^* = A$. Ha $B: X \rightarrow Y$ egy másik lineáris leképezés és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$. Ha Z egy harmadik belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, és $C: Y \rightarrow Z$ egy lineáris leképezés, akkor $(CA)^* = A^*C^*$.

Bizonyítás. Mivel $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $y, z \in Y$ esetén

$$\langle Ax, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha}\langle Ax, y \rangle + \bar{\beta}\langle Ax, z \rangle = \bar{\alpha}\langle x, A^*y \rangle + \bar{\beta}\langle x, A^*z \rangle = \langle x, \alpha A^*y + \beta A^*z \rangle,$$

kapjuk, hogy $A^*(\alpha y + \beta z) = \alpha A^*y + \beta A^*z$, azaz A^* lineáris.

Mivel bármely $x \in X$, $y \in Y$ esetén

$$\langle y, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, y \rangle} = \overline{\langle x, A^*y \rangle} = \langle A^*y, x \rangle = \langle y, (A^*)^*x \rangle,$$

azt kapjuk, hogy $(A^*)^* = A$.

Mivel

$$\begin{aligned} \langle (A + B)x, y \rangle &= \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle + \langle x, B^*y \rangle = \langle x, A^*y + B^*y \rangle \\ &= \langle x, (A^* + B^*)y \rangle, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy $A^* + B^* = (A + B)^*$. Hasonlóan

$$\langle \lambda Ax, y \rangle = \lambda \langle Ax, y \rangle = \lambda \langle x, A^*y \rangle = \langle x, \bar{\lambda}A^*y \rangle = \langle x, (\bar{\lambda}A^*)y \rangle,$$

ahonnan $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$.

Végül bármely $x \in X$, $z \in Z$ -re

$$\langle (CA)x, z \rangle = \langle C(Ax), z \rangle = \langle Ax, C^*z \rangle = \langle x, A^*(C^*z) \rangle = \langle x, (A^*C^*)z \rangle,$$

ahonnan $(CA)^* = A^*C^*$. $\square$

6.3.25. Adjungált operátor mátrixa. Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett $e_1, \dots, e_n$, illetve $f_1, \dots, f_m$ ortonormált bázisokkal, $A: X \rightarrow Y$ lineáris leképezés. Ekkor $[A^*] = [\overline{A}]'$.

Bizonyítás. Az A mátrixának $a_{i,j}$ elemei $\langle Ae_j, f_i \rangle$, míg A^* mátrixának $a_{j,i}^*$ elemei

$$\langle A^* f_i, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, A^* f_i \rangle} = \overline{\langle Ae_j, f_i \rangle} = \overline{a_{i,j}}. \quad \square$$

6.3.26. Önadjungált és normális transzformációk. Legyen X véges dimenziós belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, $A: X \rightarrow X$ lineáris transzformáció. Ha $A^* = A$, akkor A -t *önadjungált*nak, ha pedig $A^* = -A$, akkor *ferdén önadjungált*nak nevezzük. Komplex belső szorzat térben szokásos a *Hermite-szimmetrikus*, illetve *ferdén Hermite-szimmetrikus*, valós belső szorzat térben pedig a *szimmetrikus*, illetve *ferdén szimmetrikus* elnevezés is. Az utóbbi elnevezések világossá válnak, ha meggondoljuk, hogy ortonormált bázisban mit is jelentenek ezek a feltételek a transzformáció mátrixára.

Komplex térben az, hogy A ferdén önadjungált, azzal ekvivalens, hogy iA önadjungált; valóban, ha A ferdén önadjungált, akkor $(iA)^* = \bar{i}A^* = -i(-A) = iA$, és ha $(iA)^* = iA$, akkor $-iA^* = -i(-A) = iA$, ahonnan i -vel szorozva $A^* = -A$.

Az A önadjungált transzformáció *pozitív szemidefinit*, illetve *negatív szemidefinit*, ha $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, illetve $\langle Ax, x \rangle \leq 0$ minden $x \in X$ -re, egyébként *indefinit*; ha $\langle Ax, x \rangle > 0$, illetve $\langle Ax, x \rangle < 0$ minden $0 \neq x \in X$ -re, akkor A *pozitív definit*, illetve *negatív definit*.

Az $A: X \rightarrow X$ lineáris transzformáció *normális*, ha felcserélhető az adjungáltjával, azaz $AA^* = A^*A$. A normális transzformációk osztálya elég széles: az önadjungált, ferdén önadjungált és unitér transzformációk nyilván normálisak. Több tételt normális transzformációkra fogunk bebizonyítani.

6.3.27. Példa. Ha X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett, $A: X \rightarrow Y$ lineáris leképezés, akkor A^*A és AA^* önadjungáltak, mert $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ és $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$.

6.3.28. Polarizációs formula. Legyen X unitér tér, $A: X \rightarrow X$ lineáris transzformáció. Ha $x, y \in X$, akkor

$$\begin{aligned} 4\langle Ax, y \rangle &= \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle \\ &\quad + i\langle A(x+iy), x+iy \rangle - i\langle A(x-iy), x-iy \rangle. \end{aligned}$$

Ha X euklideszi tér és A önadjungált, akkor

$$4\langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle.$$

Bizonyítás. Kiszámoljuk. $\square$

6.3.29. Következmény. A belső szorzat kifejezhető a normával, így adott normához legfeljebb egy belső szorzat van, amelyből származik.

Bizonyítás. Legyen $A = \mathbb{I}$. $\square$

6.3.30. Következmény. Ha $\langle Ax, x \rangle = 0$ minden $x \in X$ -re és X komplex vagy A önadjungált, akkor $A = 0$.

Bizonyítás. Minden $x, y \in X$ -re $\langle Ax, y \rangle = 0$, ahonnan $y = Ax$ helyettesítéssel bármely $x \in X$ -re $Ax = 0$. $\square$

6.3.31. Tétel. Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $U: X \mapsto Y$ lineáris leképezésre az alábbiak ekvivalensek:

- (1) $U^*U = \mathbb{I}_X$;
- (2) $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ bármely $x, y \in X$ -re;
- (3) $\|Ux\| = \|x\|$ bármely $x \in X$ -re;
- (4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ bármely $x, y \in X$ -re.

A tétel úgy is fogalmazható, hogy az $U^*U = \mathbb{I}_X$ feltétel az izometrikus (távolságtartó) lineáris transzformációkat jellemzi.

* **Bizonyítás.** Mivel

$$\langle x, y \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle,$$

(1)-ből következik (2). (2)-ből nyilván következik (3). Nyilván (3) és (4) ekvivalensek, mert U lineáris. Tegyük fel, hogy (3) teljesül. Ekkor

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

bármely $x \in X$ -re, így $\langle (U^*U - \mathbb{I}_X)x, x \rangle = 0$, ahonnan felhasználva, hogy $U^*U - \mathbb{I}_X$ önadjungált, kapjuk, hogy $U^*U = \mathbb{I}_X$. $\square$

6.3.32. Következmény. Az alábbiak ekvivalensek:

- (1) U unitér;
- (2) $\text{rng}(U) = Y$ és $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ bármely $x, y \in X$ -re;
- (3) $\text{rng}(U) = Y$ és $\|Ux\| = \|x\|$ bármely $x \in X$ -re;
- (4) $\text{rng}(U) = Y$ és $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ bármely $x \in X$ -re.

A tétel úgy is fogalmazható, hogy az unitér transzformációk pontosan a belső szorzat terek, illetve a belső szorzatból származó normával ellátott normált terek izomorfizmusai.

* **Bizonyítás.** Ha U unitér, akkor $UU^* = \mathbb{I}_Y$ miatt Y -ra képez, így teljesül (2). Nyilván (2), (3) és (4) ekvivalensek, és következik belőlük, hogy $U^*U = \mathbb{I}_X$. Mivel U lineáris, Y -ra képez, és $\|Ux\| = \|x\|$ miatt $\ker(U) = \{0\}$, ezért létezik inverze, tehát $U^* = U^{-1}$. $\square$

6.3.33. Megjegyzés. Az $m = \dim(X)$, $n = \dim(Y)$ jelölésekkel, felírva U^* és U mátrixát azt kapjuk, hogy az $U^*U = \mathbb{I}_X$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy ortonormált bázisokban $[U]$ oszlopai ortonormált vektorrendszert alkotnak $\mathbb{K}^m$ -ben. Azokat a mátrixokat, amelyekre ez teljesül, *ortogonális mátrixoknak* fogjuk nevezni. Néha a lineáris izometriákat is szokás *ortogonális lineáris transzformációnak* nevezni. Az $UU^* = \mathbb{I}_Y$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy ortonormált bázisokban $[U]$ sorai ortonormált vektorrendszert alkotnak $\mathbb{K}^n$ -ben. Ha U unitér, akkor $m = n$ és ortonormált bázisokban $[U]$ oszlopai és a sorai is ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{K}^n$ -ben, az $[U]$ és a transzponáltja is ortogonális mátrix.

6.3.34. Tétel. Legyen X véges dimenziós belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, $A: X \rightarrow X$ lineáris transzformáció. Az A -nak az Y akkor és csak akkor invariáns altere, ha $Y^\perp$ invariáns altere A^* -nak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Y invariáns altere A -nak. Ha $z \in Y^\perp$, akkor $\langle y, A^*z \rangle = \langle Ay, z \rangle = 0$ bármely $y \in Y$ -ra (mert $Ay \in Y$), így $A^*z \in Y^\perp$. A megfordítás $A = (A^*)^*$, $Y = (Y^\perp)^\perp$ felhasználásával adódik. $\square$

6.3.35. Segédteétel. Ha A egy unitér tér egy normális transzformációja és x a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora A -nak, akkor x a $\bar{\lambda}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora A^* -nak.

Bizonyítás. Mivel A normális,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle = \|A^*x\|^2.$$

Mivel ha A normális, akkor $A - \lambda I$ is, és $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$, a fentiek alapján

$$\|Ax - \lambda x\| = \|A^*x - \bar{\lambda}x\|,$$

ahonnan következik az állítás. $\square$

6.3.36. Normális transzformáció átlós alakja. Egy unitér tér egy A lineáris transzformációjához pontosan akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelyben A mátrixa átlós alakú, ha A normális.

A bizonyítás konstruktív.

* **Bizonyítás.** Ha egy unitér tér valamely A lineáris transzformációja ortogonális bázis választásával átlós alakra hozható, akkor ebben a bázisban adjungáltjának mátrixa is átlós alakú, így A és A^* felcserélhetőek. Megmutatjuk, hogy A normális volta nem csak szükséges, hanem elégséges is. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Ha $n = 1$, az állítás nyilvánvaló. Az algebra alaptétele szerint A -nak van sajátértéke. Legyen e_n egy ehhez tartozó normált sajátvektor. Ez sajátvektora A^* -nak is, így az $n - 1$ dimenziós $U = \{e_n\}^\perp$ altér invariáns altere A -nak és A^* -nak is. Vegyük észre, hogy $A|_U$ adjungáltja $A^*|_U$, mert

$$\langle (A|_U)x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle x, (A^*|_U)y \rangle,$$

ha $x, y \in U$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $A|_U$ normális, mert

$$(A|_U)(A|_U)^*x = (A|_U)(A^*|_U)x = AA^*x = A^*Ax = (A^*|_U)(A|_U)x = (A|_U)^*(A|_U)x,$$

ha $x \in U$. Az indukciós feltevés szerint U -nak van olyan $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ ortonormált bázisa, amelyben $A|_U$ mátrixa átlós mátrix. Innen következik az állítás. $\square$

6.3.37. Következmény. Unitér tér normális transzformációja pontosan akkor önadjungált, pozitív szemidefinit, pozitív definit, ferdén Hermite-szimmetrikus, unitér, illetve invertálható, ha sajátértékei valósak, nemnegatívak, pozitívak, tiszta képzetesek, egységnyi abszolút értékűek, illetve nullától különbözőek.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az átlós alakot. $\square$

6.3.38. Valós önadjungált transzformáció átlós alakja. Ha A egy euklideszi tér egy önadjungált transzformációja, akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelyben A mátrixa átlós alakú.

Bizonyítás. Az alapgondolat az úgynevezett *komplexifikálás*. Írjuk fel egy ortonormált bázisban A mátrixát. Ez a valós elemű szimmetrikus mátrix tekinthető egy unitér tér egy önadjungált transzformációja mátrixának is valamely ortonormált bázisban. Innen az előző következmény szerint karakterisztikus polinomjának zérushelyei mind valósak. Ezt felhasználva, alkalmazhatjuk a normális transzformációk esetén használt gondolatmenetet. $\square$

6.3.39. Poláris felbontás. Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett és $A: X \rightarrow Y$ egy lineáris leképezés. Ha $\dim(X) \leq \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q: X \rightarrow Y$ lineáris izometria és $P: X \rightarrow X$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = QP$, ha pedig $\dim(X) \geq \dim(Y)$, akkor létezik olyan $Q: Y \rightarrow X$ lineáris izometria és $P: Y \rightarrow Y$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = PQ^*$.

A bizonyítás konstruktív.

* **Bizonyítás.** Először legyen $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Válasszunk olyan $e_1, e_2, \dots, e_m$ ortonormált bázist X -ben, amelyben az A^*A önadjungált transzformáció mátrixa diagonális. Erre $\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle A^*Ae_i, e_j \rangle = 0$. Legyen $Pe_i = \|Ae_i\|e_i$ ($1 \leq i \leq m$) és legyen $Qe_i = Ae_i/\|Ae_i\|$, ha $Ae_i \neq 0$, az A nullterét pedig képezze le Q izometrikusan $\text{rng}(A)$ ortogonális komplementerébe. A másik esetben $A^* = QP$, és így $A = P^*Q^* = PQ^*$. $\square$

* **6.3.40. Szinguláris érték felbontás.** Egy $\mathbb{K}$ feletti $m \times n$ -es a mátrix felírható $a = \tilde{q}s\tilde{q}'$ alakban, ahol s egy $m \times n$ -es diagonális mátrix a főátlójában álló

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 0, \quad k = \min\{m, n\}$$

értékekkel, $\tilde{q}$ és q pedig $m \times m$ -es, illetve $n \times n$ -es ortogonális mátrixok.

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást az a *maximális szinguláris érték felbontásának* nevezzük, az $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ értékek a *szinguláris értékek*. Megjegyezzük, hogy ha $n < m$, akkor $\tilde{q}$ utolsó $m - n$ oszlopa el is hagyható, hiszen s utolsó $m - n$ sora úgyis nulla. Ezt az alakot nevezzük *szinguláris érték felbontásnak*, ezt fogjuk bizonyítani. Sőt, ha a rangja r , akkor s rangja is r kell legyen, így

$$s_{r+1} = s_{r+2} = \dots = s_k = 0,$$

így $\tilde{q}$ utolsó $m - r$ oszlopa, valamint q utolsó $n - r$ oszlopa (azaz $\tilde{q}'$ utolsó $n - r$ sora) is elhagyható; ezt az alakot *minimális szinguláris érték felbontásnak* nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a szokásos bázisban a . Tekintsük A poláris felbontását: $A = QP$. Van olyan ortonormált bázis, amelyben P mátrixa diagonális és a bázisvektorok cserélgetésével az is elérhető, hogy ebben a bázisban P diagonálisának elemei monoton csökkenő sorozatot alkossanak. Legyen s ez a mátrix. Legyen T az erről a bázisról a szokásos bázisra való áttérés kísérő transzformációja. Ekkor P mátrixa a szokásos bázisban $[T]^{-1}s[T]$, így

$$a = [A] = [Q][T]^{-1}s[T] = [QT^{-1}]s[T].$$

Mivel T , és így T^{-1} is unitér, QT^{-1} lineáris izometria, így $\tilde{q} = [QT^{-1}]$, $q = [T]^{-1}$ jelöléssel kapjuk az állítást. Az $m \geq n$ esetben a bizonyítás hasonló. $\square$

* **6.3.41. Általánosított inverz.** Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor. Az $Ax = b$ lineáris egyenlet helyett tekinthetjük az általánosabb $\|Ax - b\|^2 \rightarrow \min$ problémát, amelyről megmutatjuk, hogy mindig megoldható. Ennek a megoldásait a *legkisebb négyzetek módszere* értelmében vett megoldásoknak nevezzük. A megoldás nem mindig egyértelmű, ezért $\min_{x \in X} \|Ax - b\|^2 = \alpha$ jelöléssel tekintünk az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$, $\|x\|^2 \rightarrow \min$ problémát. Megmutatjuk, hogy ennek egyetlen x_b megoldása van. Valóban, az $\|y - b\| \rightarrow \min$, $y \in \text{rng}(A)$ problémának egyetlen megoldása van, amelyet meg is kaphatunk: tekintünk egy ortonormált bázist az $\text{rng}(A)$ altérben, és kombináljuk a vektorait b -nek a Fourier-együtthatóival. Most $A^{-1}(y)$ minden eleme az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$ megoldása. Legyen $x_0 \in A^{-1}(y)$. Ezzel $A^{-1}(y) = \ker(A) + x_0$. Írjuk fel x_0 -at $x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in \ker(A)^\perp$. Megmutatjuk, hogy x_2 a keresett x_b elem. Mivel $y = A(x_0) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_2)$, kapjuk, hogy $x_2 \in A^{-1}(y)$. Minden $x \in A^{-1}(y)$ egyértelműen felírható $x = x_2 + x'$ alakban, ahol $x' \in \ker(A)$. Mivel $x_2 \in \ker(A)^\perp$, azt kapjuk, hogy $\|x\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x'\|^2$, az $\|x\|^2$ (és így $\|x\|$ is) akkor minimális, ha $x' = 0$, azaz valóban $x_b = x_2$.

Az $A^\dagger: b \mapsto x_b$ leképezését Y -nak X -be az A általánosított inverzének nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy az $\text{rng}(A) = Y$, $\ker(A) = \{0\}$ esetben megegyezik az inverzzel.

* **6.3.42. Feladat [7].** Ha a szokásos bázisban

$$[A_c] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

ahol c valós paraméter, számítsuk ki $A_c^\dagger$ mátrixát. Vizsgáljuk a $\lim_{c \rightarrow 0} A_c^\dagger$ határértéket.

* **6.3.43. Tétel.** Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $e_1, \dots, e_n$, illetve $f_1, \dots, f_m$ ortonormált bázisokkal, $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor, rangja r . Legyen A mátrixának maximális szinguláris érték felbontása $a = \tilde{q}s\tilde{q}'$. Ekkor $A^\dagger$ lineáris operátor, és mátrixa ugyanezekben a bázisokban $a^\dagger = qs^\dagger\tilde{q}'$, ahol $s^\dagger$ egy $n \times m$ -es diagonális mátrix, átlójában az $1/s_1, 1/s_2, \dots, 1/s_r, 0, \dots, 0$ értékekkel.

Bizonyítás. Legyen $b \in Y$, $\alpha = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$, és x az $\alpha = \|Ax - b\|^2$ minimális normájú megoldása, azaz $x = A^\dagger(b)$. Ekkor

$$\alpha = \|a[x] - [b]\|^2 = \|\tilde{q}s\tilde{q}'[x] - [b]\|^2 = \|\tilde{q}\tilde{q}'[x] - \tilde{q}'[b]\|^2 = \|s[y] - [c]\|^2,$$

ahol $[c] = \tilde{q}'[b]$ és $[y] = \tilde{q}'[x]$, mivel $\tilde{q}$ és $\tilde{q}'$ ortogonális mátrixok. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|s[y] - [c]\|^2 = \sum_{j=1}^r |s_j y_j - c_j|^2 + \sum_{j=r+1}^m |c_j|^2.$$

Innen $y_j = c_j/s_j$, ha $1 \leq j \leq r$, és y_j tetszőleges, ha $r < j \leq m$ esetben lesz a bal oldal minimális. Ezen vektorok közül y normája akkor lesz minimális, ha $r < j \leq m$ esetén $y_j = 0$. Innen $[x] = q[y] = qs^\dagger[c] = qs^\dagger\tilde{q}'[b]$, azaz $A^\dagger$ lineáris és $[A^\dagger] = qs^\dagger\tilde{q}'$. $\square$

* **6.3.44. Tétel: QR-felbontás.** Legyen a egy $m \times n$ -es $\mathbb{K}$ -beli elemű mátrix, és legyen k a rangja. Ekkor létezik olyan $m \times k$ -as q ortogonális mátrix és $k \times n$ -es felső trapéz mátrix, hogy $a = qr$.

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást *minimális QR-felbontás*nak szokás nevezni. További nulla sorokkal kiegészítve r -et és megfelelő oszlopokkal kiegészítve q -t elérhető, hogy a méretekben szereplő k -ra $k = \min\{m, n\}$ legyen, ezt fogjuk *QR-felbontás* alatt érteni. Ha $m > n$, akkor tovább folytatva a kiegészítést, azt is elérhetjük, hogy a méretekben szereplő k -ra $k = m$ legyen; ezt a felbontást *maximális QR-felbontás*nak nevezzük.

Bizonyítás. Legyenek a oszlopai $a_1, a_2, \dots, a_n$. Hagyjunk el minden olyan vektort ezek közül, amely az előzőek lineáris kombinációja, majd a maradék $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$ vektorokat ortonormáljuk. A kapott $q_1, q_2, \dots, q_k$ vektorok legyenek q oszlopai. Ha $1 \leq j \leq n$ és $j_\ell \leq j < j_{\ell+1}$ (ahol $j_0 = 0$ és $j_{k+1} = n+1$), akkor a_j lineárisan kombinálható a $q_1, \dots, q_\ell$ vektorokból: $a_j = \sum_{i=1}^{\ell} r_{i,j} q_i$. Legyen $r_{i,j} = 0$, ha $\ell < i \leq k$. A kapott $r = (r_{i,j})$ mátrix felső trapéz mátrix és nyilván $a = qr$. $\square$

* **6.3.45. Megjegyzés.** Abban a speciális esetben, amikor az $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor kölcsönösen egyértelmű, ahol X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, a *QR-felbontás* is felhasználható az $\|Ax - b\|^2 \rightarrow \min$ probléma megoldására. Választva $e_1, \dots, e_n$ és $f_1, \dots, f_m$ ortonormált bázisokat ($m \geq n$), az $a = [A]$ jelöléssel, ha $a = qr$ az a maximális *QR-felbontása*, akkor

$$\|Ax - b\|^2 = \|a[x] - [b]\|^2 = \|qr[x] - [b]\|^2 = \|r[x] - \bar{q}'[b]\|^2 = \|[y] - [c]\|^2,$$

ahol $[y] = r[x]$ és $[c] = \bar{q}'[b]$, mivel q ortogonális. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|[y] - [c]\|^2 = \sum_{j=1}^n |y_j - c_j|^2 + \sum_{j=n+1}^m |c_j|^2.$$

Innen a minimum értéke $\sum_{j=n+1}^m |c_j|^2$ és akkor kapjuk, ha $y_j = c_j$ ($j = 1, \dots, n$). Az $r[x] = [y]$ egyenletrendszer egyértelműen (és könnyen) megoldható, mert r rangja n , és felső háromszög alakú.

* **6.3.46. Feladat [8].** Legyen $h = (h_{i,j})$ a 15×15 -ös Hilbert-mátrix, azaz legyen $h_{i,j} = 1/(i+j)$. Számoljuk ki a csupa 1 koordinátájú x oszlopmátrixra $b = hx$ értékét pontosan, majd oldjuk meg Gauss-eliminációval részleges főelem-kiválasztással lebegőpontosan az egyenletrendszert x -re. Csináljuk meg ugyanezt h szinguláris érték felbontásával, nullázva a 10^{-10} -nél kisebb szinguláris értékeket.

* **6.3.47. Feladat [8].** Legyen a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad [b] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a legkisebb négyzetes értelemben vett megoldások közül a legkisebb normájút. Ismételjük meg ugyanezt, a második sor második elemét 10^{-12} -re cserélve.

°* **6.3.48. Tyihonov-regularizáció.** Legyenek X és Y véges dimenziós belső szorzat terek, $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor. Az

$$\|Ax - b\|^2 = \alpha, \quad \|x\|^2 \rightarrow \min, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$$

probléma helyett adott $C > 0$ konstanssal tekintsük a

$$\|A_\delta x - b_\delta\|^2 + \delta \|Tx\|^2 \rightarrow \min$$

problémát, ahol $\delta > 0$, $\|b - b_\delta\| \leq \delta$, $\|A - A_\delta\| \leq \delta$, $\|Pb - P_\delta b_\delta\| \leq C\delta$ és T a *Tyihonov-operátor*, leggyakrabban $T = \mathbb{I}_X$; itt P a $\text{rng}(A)$ -ra, P_δ pedig $\text{rng}(A_\delta)$ -ra való merőleges vetítés operátora. Ennek a problémának a megoldása sokszor sokkal jobban viselkedik (és megmutatható, hogy ha $T = \mathbb{I}_X$, akkor $\delta \rightarrow 0$ esetén tart az első probléma megoldásához). Az eljárást *Tyihonov-regularizáció*nak nevezzük.

°* **6.3.49. Feladat [7].** Ha a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

ahol a, c valós paraméterek, számítsuk ki a Tyihonov-regularizációval kapott probléma x_δ megoldását, ha $C = 1$, $T = \mathbb{I}_X$, $A_\delta = A$ és $b_\delta = b$. Vizsgáljuk a $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_\delta$ határértéket.

Többszörös függvények

7.1 Folytonosság és határérték

Ebben a fejezetben véges dimenziós belső szorzat terekben tárgyaljuk a határértékekkel és folytonossággal kapcsolatos alapfogalmakat. (Szorítkozhatnánk csak $\mathbb{R}^k$ -ra is, mivel $\mathbb{C}^k$ normatartó módon azonosítható $\mathbb{R}^{2k}$ -val.) A legtöbb tételben csak a normatulajdonságokat használjuk, így az eredmények nagy része tetszőleges normált térben is érvényes marad. (Abban a néhány esetben, amikor nem, ezt a tényt jelezzük.) További általánosítás is lehetséges lenne, mert igen sok esetben csak a következő pontban bevezetendő távolság tulajdonságait használjuk. Bár nagyon sok minden hasonlóan megy, mint a skalár változós, skalár értékű függvények esetén, inkább mindent részletesen tárgyalunk.

7.1.1. Távolság, környezetek, korlátosság. Ha $x, y \in \mathbb{K}^k$, akkor a két pont *távolságad*(x, y) = $|x - y|$. Az $x \in \mathbb{K}^k$ pont és az $A \subset \mathbb{K}^k$ halmaz *távolsága*

$$d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

Legyen $x \in \mathbb{K}^k$ és $r > 0$. Az x vektor r sugarú $\mathbb{U}_r(x)$ *környezetén* a $\{y \in \mathbb{K}^k : |y - x| < r\}$ halmazt értjük, azaz azon pontok halmazát, amelyek távolsága x -től kisebb, mint r . Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen x egy környezetéről beszélünk. Vektorok egy halmazát vagy családját *korlátosnak* nevezzük, ha van a nulla vektornak olyan környezete, amelyikben mindegyik benne van, azaz ha van olyan r valós szám, hogy minden vektor hossza kisebb, mint r . Véges sok korlátos halmaz egyesítése korlátos.

7.1.2. Belső, külső, izolált, torlódási és határpontok. Legyen $A \subset \mathbb{K}^k$ és $x \in \mathbb{K}^k$. Az x pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, ha van olyan U környezete x -nek, amelyre $U \subset A$. Az A belső pontjainak halmazát A *belsejének* nevezzük és A° -rel jelöljük. A komplementer belső pontjait A *külső pontjainak* nevezzük, a többi pontot A *határpontjai*. A határpontok halmaza A *határa*, jelölése ∂A . Ha x nem külső pontja A -nak, azaz ha belső pontja vagy határpontja, akkor azt mondjuk, hogy x *érintkezési pontja* A -nak. Ez azzal ekvivalens, hogy $d(x, A) = 0$. Az A összes érintkezési pontjainak halmazát $\overline{A}$ jelöli, ez az A halmaz *lezártja*. Az $\overline{A}$ pontjait szokás a következőképpen is felosztani: egy $x \in \overline{A}$ pont *izolált pontja* A -nak, ha van olyan környezete, hogy abban ő az egyetlen A -beli pont; egyébként — azaz ha x minden környezete tartalmaz x -től különböző pontot A -ból — azt mondjuk, hogy x *torlódási pontja* A -nak. A belső pont és az izolált pont eleme A -nak, a határpont és a torlódási pont nem feltétlenül, a külső pont pedig nem eleme A -nak.

7.1.3. Nyílt és zárt halmazok. Ha az $A \subset \mathbb{K}^k$ halmaz minden pontja belső pontja A -nak, akkor A -t *nyíltnek* nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}^k$ nyílt halmazok. Ha az A halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, akkor *zártnak* nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}^k$ zártak.

7.1.4. Állítás. Egy $A \subset \mathbb{K}^k$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementere zárt.

Bizonyítás. Ha A nyílt, x pedig a komplementer egy torlódási pontja, akkor x nem lehet A -ban, mert annak minden pontja belső pont, így van olyan környezete, amelyben csak A -beli pontok vannak. Ha A komplementere zárt, x pedig A egy pontja, akkor x nem lehet torlódási pontja A komplementérének, mert az minden torlódási pontját tartalmazza. Mivel ő maga A -ban van, van olyan környezete, amelyben nincs pontja a komplementernek, tehát x belső pontja A -nak. $\square$

7.1.5. Állítás. Ha $x \in \mathbb{K}^k$ és $r \geq 0$ (sic!), akkor $\{y \in \mathbb{K}^k: |y - x| < r\}$ nyílt, $\{y \in \mathbb{K}^k: |y - x| \leq r\}$ pedig zárt halmaz.

Ezeket a halmazokat r sugarú *nyílt gömb*nek, illetve *zárt gömb*nek nevezzük.

Bizonyítás. Ha $|y - x| < r$, azaz y az első halmaz eleme, akkor $\varepsilon = r - |y - x| > 0$ választással $|z - y| < \varepsilon$ esetén $|z - x| \leq |y - x| + |z - y| < r$, azaz y belső pontja az első halmaznak. Ha $|y - x| > r$, azaz y nem eleme a második halmaznak, akkor $\varepsilon = |y - x| - r > 0$ választással $|z - y| < \varepsilon$ esetén $|z - x| \geq |y - x| - |z - y| > r$, így a második halmaz komplementere nyílt. $\square$

7.1.6. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{K}^k$. Az A egy torlódási pontjának bármely környezetében A -nak végtelen sok pontja van.

Bizonyítás. Legyen x torlódási pontja A -nak. Ha az állítás az x valamely U környezetére nem teljesülne, akkor $\varepsilon > 0$ -t úgy választva, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset U$ legyen, és $\mathbb{U}_\varepsilon(x)$ az $U \cap A$ -ból egyetlen x -től különböző pontot se tartalmazzon, ellentmondást kapnánk. $\square$

7.1.7. Tétel. Akárhány nyílt halmaz egyesítése nyílt és véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.

Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, például $\mathbb{R}$ -ben

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}]-1/n, 1/n[.$$

Bizonyítás. Ha G_γ , $\gamma \in \Gamma$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és $x \in G$, ahol $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, akkor valamely $\gamma \in \Gamma$ -ra $x \in G_\gamma$. Ebből következik, hogy valamely $\varepsilon > 0$ -ra $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G_\gamma \subset G$. Ha $G_1, G_2, \dots, G_n$ nyílt halmazok, és $x \in G = \bigcap_{i=1}^n G_i$, akkor minden i -re van olyan $\varepsilon_i > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$. De ekkor $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$ -vel $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G$. $\square$

7.1.8. Következmény. Akárhány zárt halmaz metszete zárt. Véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.

Bizonyítás. Áttérünk komplementerekre. $\square$

7.1.9. Következmény. Halmaz belseje nyílt.

Bizonyítás. Válasszunk az A halmaz minden x belső pontjához egy U_x környezetet, amely benne van A -ban. Mivel U_x nyílt, minden pontja belső pontja A -nak, így $A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} U_x$ nyílt. $\square$

7.1.10. Következmény. Halmaz határa és lezártja zárt.

Bizonyítás. A lezárt a komplementer belsejének komplementere. A határ a halmaz lezártjának és a komplementere lezártjának metszete. $\square$

7.1.11. Tartomány. A $D \subset \mathbb{K}^k$ részhalmazt *tartomány*nak nevezzük, ha nyílt és nem állítható elő két nem üres diszjunkt nyílt halmaz egyesítéseként. Az utóbbi tulajdonság azt fejezi ki, hogy D „összefüggő”.

7.1.12. Konvex halmaz, konvex és konkáv függvény. Egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér egy K részhalmazát *konvex halmaz*nak nevezzük, ha $x, y \in K$ esetén az x és y pontot összekötő szakasz $\alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 < \alpha < 1$ pontjai is benne vannak a halmazban. Egy valós értékű függvényt *konvex függvény*nek nevezünk, ha egy K konvex halmazon van értelmezve és $x, y \in K$, $0 < \alpha < 1$ esetén

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

ha az egyenlőtlenség mindig szigorú, akkor *szigorúan konvex függvény*ről beszélünk, ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén pedig *konkáv függvény*ről illetve *szigorúan konkáv függvény*ről. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben *konvex kombináció*n olyan affin kombinációt értünk, amelyben az együtthatók nemnegatívak. A tagszám szerinti indukcióval adódik, hogy egy K konvex halmazra, illetve egy rajta értelmezett konvex függvényre ha $x_1, \dots, x_n \in K$, akkor $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in K$ és

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

minden konvex kombinációra. Az $n = 2$ esetben visszakapjuk a konvexség definícióját.

Például a gömbök konvex halmazok: ha a a gömb középpontja, akkor

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y - a| \leq |\lambda(x - a)| + |(1 - \lambda)(y - a)| \leq \max\{|x - a|, |y - a|\}.$$

7.1.13. Sűrű halmazok. Legyen $A, B \subset \mathbb{K}^k$. Az mondjuk, hogy A *sűrű* B -ben, ha $B \subset \overline{A}$. Egy, az egész $\mathbb{K}^k$ -ban sűrű halmazt *mindenütt sűrű*nek, vagy röviden *sűrű*nek nevezünk. Például $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$ -ben.

7.1.14. Kompakt halmazok. Egy $K \subset \mathbb{K}^k$ halmaz egy *nyílt lefedés*én egy olyan nyílt halmazokból álló halmazrendszer értünk, amelynek az egyesítése tartalmazza K -t. A K halmazt *kompakt*nak nevezzük, ha K bármely nyílt halmazokkal való lefedéséből kiválasztható véges lefedés. Véges sok kompakt halmaz egyesítése nyilván kompakt. A véges halmazok kompaktak. A kompaktság a végesség egyfajta kiterjesztése; egy kompakt halmaz „közelítőleg véges”. Egy K kompakt halmaz és egy F zárt halmaz $K \cap F$ metszete kompakt; valóban, $K \cap F$ egy nyílt lefedéséhez hozzávéve F komplementerét, K nyílt lefedését kapjuk; ebből kiválasztva K egy véges lefedését, és elhagyva belőle F komplementerét, $K \cap F$ egy véges lefedését kapjuk.

7.1.15. Tétel. Egy $K \subset \mathbb{K}^k$ halmazra az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:

- (1) K kompakt;
- (2) K minden végtelen részhalmazának létezik torlódási pontja K -ban;
- (3) K korlátos és zárt.

Az (1) és (3) pont ekvivalenciáját *Heine–Borel-tételnek* szokás nevezni. Végtelen dimenzióban a tétel nem marad érvényben: (1) és (2) ugyan ekvivalensek, és következik belőlük (3), de (3)-ból nem következik (1) és (2): például mint a Fourier-soroknál látni fogjuk, egy végtelen ortonormált sorozat pontjai korlátos zárt halmazt alkotnak, amely nem kompakt.

* **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy (1) teljesül. Ha lenne olyan A végtelen részhalmaza K -nak, amelynek K egyetlen pontja sem lenne torlódási pontja, akkor K minden x pontjának lenne olyan U_x környezete, amely A -nak legfeljebb egy pontját tartalmazza. Az U_x halmazok K egy nyílt lefedését adnák. Másrészt a skatulyaelv miatt véges sok ilyen U_x halmaz nem fedheti le az A halmazt, így K -t sem, ami ellentmond K kompaktságának.

Megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3). Ha K nem lenne korlátos, akkor tartalmazna olyan pontokat, amelyekre $|x_n| > n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Az $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz végtelen (másképpen $|x|$ végtelen sok n -re ugyanaz a konstans érték lenne), és nyilván nem lehet torlódási pontja $\mathbb{K}^k$ -ban, így K -ban sem. Így (2)-ből következik, hogy K korlátos. Ha K nem lenne zárt, akkor lenne olyan $x \in \mathbb{K}^k$ pont, amely K torlódási pontja, de nem pontja K -nak. Ekkor vannak olyan $y_n \in K$, $n = 1, 2, \dots$ pontok, amelyekre $|y_n - x| < 1/n$. Legyen A ezen pontok halmaza. Ekkor A végtelen (másképpen $|y_n - x|$ végtelen sok n -re ugyanaz a pozitív konstans érték lenne); A -nak x torlódási pontja, és A -nak nincs más torlódási pontja $\mathbb{K}^k$ -ban. Ennek belátásához gondoljuk meg, hogy ha $z \neq x$, $z \in \mathbb{K}^k$, akkor

$$|y_n - z| \geq |x - z| - |y_n - x| \geq |x - z| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|x - z|$$

véges sok n kivételével; ez mutatja, hogy z nem torlódási pontja A -nak. Így A -nak nincs torlódási pontja K -ban, ezért ha (2) teljesül, akkor K -nak zártnak kell lennie.

Végül megmutatjuk, hogy (3)-ból következik (1). Mivel K zárt, elég belátnunk, hogy része valamely kompakt halmaznak. Mivel a később bizonyítandó 7.3.4 következmény szerint zárt téglák kompaktak, kapjuk az állítást. $\square$

7.1.16. Következmény: Weierstrass tétele. Minden $A \subset \mathbb{K}^k$ korlátos végtelen halmaznak van torlódási pontja $\mathbb{K}^k$ -ban.

Végtelen dimenzióban az állítás nem marad érvényben.

Bizonyítás. Az A halmaz része egy zárt gömbnek, és ebben van torlódási pontja A -nak. $\square$

7.1.17. Vektor-skalár, skalár-vektor és vektor-vektor függvények. A továbbiakban $\mathbb{K}_1^m \rightarrow \mathbb{K}_2^n$ -beli függvényekkel kívánunk foglalkozni. Mivel $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{C}^k$, szorítkozhatnánk $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ típusú függvényekre. Mivel $\mathbb{C}^k$ úgyis azonosítható $\mathbb{R}^{2k}$ -val, az sem jelenti az általánosság megszorítását, ha $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ -beli függvényekre szorítkozunk. Az $m = 1$, $n = 1$ esetet már ismerjük. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ -beli függvényeket *vektor-skalár* függvényeknek nevezzük. Az $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ -beli függvényeket *skalár-vektor* függvényeknek vagy *skalármező*nek nevezzük. Végül az $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ -beli függvényeket *vektor-vektor* függvényeknek, az $m = n$ esetben *vektormező*nek nevezzük.

7.1.18. Folytonosság. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ és $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos* az $a \in A$ pontban, ha $f(a)$ bármely V környezetéhez van olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \in U \cap A$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden

$\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Nyilván ha egy függvény folytonos egy a pontban, akkor bármely megszorítása, amely értelmezve van a -ban, szintén folytonos a -ban. Figyeljük meg, hogy a folytonosság csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha f -et megváltoztatjuk a valamely környezetén kívül. Ha a izolált pontja A -nak, akkor f biztos, hogy folytonos a -ban.

Ha f az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy *folytonos*.

Azokat az $f \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényeket, amelyekre

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x,y \in \text{dmn}(f), x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

véges, *Lipschitz-függvényeknek* nevezzük. Ezek mind folytonosak, mert $\delta = \varepsilon / \text{Lip}(f)$ választható $\varepsilon > 0$ -hoz.

7.1.19. Példák. A konstans függvény, az identikus leképezés és az egy vektorhoz a hosszát rendelő függvény Lipschitz-függvények, így folytonosak. Ha $A \subset \mathbb{K}^m$ nem üres, akkor az $x \mapsto d(x, A)$ leképezés Lipschitz-függvény, mert tetszőleges $x, y \in \mathbb{K}^k$ -ra $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) = |x - y|$; valóban, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ minden $z \in \mathbb{K}^k$ -ra, tehát $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z)$, ha $z \in A$, ahonnan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$; és hasonlóan $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$.

7.1.20. Tétel. Legyen $X \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény, $a \in X$. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha az f_j koordinátafüggvények folytonosak a -ban $j = 1, 2, \dots, n$ -re.

Bizonyítás. Mivel

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

ha $1 \leq j \leq n$, az f folytonosságából következik a koordinátafüggvények folytonossága.

Megfordítva, adott $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_j -t, hogy ha $|x-a| < \delta_j$, $x \in A$, akkor $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon/n$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_j, 1 \leq j \leq n\}$ választással, ha $|x-a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon. \quad \square$$

7.1.21. Segéd-tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, $a \in A$ és $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Ha $f(a) = 0$, f folytonos a -ban, g pedig lokálisan korlátos a -ban, azaz van olyan U környezete a -nak és K valós szám, hogy $x \in U \cap A$ esetén $|g(x)| < K$, akkor fg folytonos a -ban.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ -ra ε/K -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x-a| < \delta$, $x \in A$ esetén $|f(x)| < \varepsilon/K$. Nyilván δ választható úgy is, hogy ne legyen nagyobb, mint U sugara. Ekkor $|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)g(x)| < \varepsilon. \quad \square$

7.1.22. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, $a \in A$ és $f, g: A \rightarrow \mathbb{K}^n$, $h: A \rightarrow \mathbb{K}$ az a -ban folytonos függvények. Ekkor

(1) $f + g$ és $f - g$ folytonosak a -ban;

- (2) hf folytonos a -ban;
 (3) $\langle f, g \rangle$ folytonos a -ban;
 (4) ha $h(a) \neq 0$, akkor a valamely U környezetére $1/h$ értelmezve van $A \cap U$ -ban és folytonos a -ban.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_1 , illetve δ_2 -t, hogy ha $|x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$, ha pedig $|x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $|x - a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

és

$$|(f - g)(x) - (f - g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (1)-et.

Mivel áttérhetünk koordinátafüggvényekre, (2) bizonyítását elég a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 1$ esetre elvégezni. Mivel

$$\begin{aligned} (hf)(x) - (hf)(a) &= h(x)f(x) - h(x)f(a) + h(x)f(a) - h(a)f(a) \\ &= h(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(h(x) - h(a)), \end{aligned}$$

valamint (1) szerint $f(x) - f(a)$ és $h(x) - h(a)$ folytonosak a -ban és értékük nulla, (2) következik az előző segédteletből, mert a valamely U környezetében $|h(x) - h(a)| < 1$, ahonnan $|h(x)| < |h(a)| + 1$, azaz h lokálisan korlátos.

Koordinátafüggvényekre áttérve, (3) következik (2)-ből.

Mivel $h(a) \neq 0$, választhatunk olyan U környezetét a -nak, amelyben

$$|h(x) - h(a)| < \frac{|h(a)|}{2}.$$

Ebben a környezetben nyilván $h(x) \neq 0$, sőt, $|h(x)| > |h(a)|/2$. Mivel

$$\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(a)} = \frac{h(a) - h(x)}{h(x)h(a)},$$

és a nevező abszolút értéke legalább $|h(a)|^2/2$, ha $x \in U \cap A$, a reciproka lokálisan korlátos, így (4) következik az előző tételből. $\square$

7.1.23. Tétel. Legyen $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$, és legyenek $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények. Ha $a \in A$ és $b = f(a) \in B$, továbbá f folytonos a -ban, g pedig folytonos b -ben, akkor $g \circ f$ folytonos a -ban.

Bizonyítás. Legyen W egy tetszőleges környezete $g(b) = g(f(a))$ -nak. Ehhez van olyan V környezete $b = f(a)$ -nak, hogy ha $y \in B \cap V$, akkor $g(y) \in W$. Másrészt V -hez létezik olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azt jelenti, hogy ha $x \in U$, és $(g \circ f)(x)$ értelmezve van, akkor $(g \circ f)(x) \in W$. $\square$

7.1.24. Példák. A $p_j: (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto x_j$ leképezése $\mathbb{K}^k$ -nak $\mathbb{K}$ -ba, az úgynevezett j -edik *projekció* folytonos, mivel $|p_j(x) - p_j(y)| \leq |x - y|$ bármely $x, y \in \mathbb{K}^k$ -ra. Innen és a korábbiakból következik, hogy a (többváltozós) polinomok mindenütt folytonosak $\mathbb{K}^k$ -n. Ezt felhasználva kapjuk, hogy egy racionális törtfüggvény $\mathbb{K}^k$ egy nyílt részhalmazán van értelmezve, és ott folytonos. Egy $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineáris leképezés folytonos, mert koordinátafüggvényei elsőfokú polinomok. A $\mathbb{K}$ -beli elemű $k \times k$ -as mátrixhoz a determinánsát rendelő $a \mapsto \det(a)$ leképezés, mint $\mathbb{K}^{k^2}$ leképezése $\mathbb{K}$ -ba, folytonos, mivel a determináns a mátrixelemek polinomfüggvénye. Az $a \mapsto a^{-1}$ leképezés, mint $\mathbb{K}^{k^2} \rightarrow \mathbb{K}^{k^2}$ eleme, nyílt halmazon van értelmezve és ott folytonos, mert az inverz mátrix pontosan akkor van értelmezve, ha $\det(a) \neq 0$, és elemei az eredeti mátrix elemeinek racionális törtfüggvényei.

7.1.25. Görbék. Legyen $X \subset \mathbb{K}^n$. Egy X -beli *görbe* alatt egy γ folytonos leképezését értjük egy nem csak egy pontból álló $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumnak X -be. (Szokás bármilyen intervallumon értelmezett folytonos leképezést is görbének nevezni.) Az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ -beli görbékét *síkgörbék*nek, az $\mathbb{R}^3$ -beli görbékét pedig *térgörbék*nek nevezzük. A $\gamma(a)$, illetve $\gamma(b)$ pontokat a görbe *kezdő*-, illetve *végpontjainak* nevezzük. Ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, akkor azt mondjuk, hogy γ *zárt görbe*. A görbét *egyszerű görbének* nevezzük, ha kölcsönösen egyértelmű, kivéve hogy zárt görbe esetén a kezdő- és végpont megegyezik. A

$$\check{\gamma}(t) = \gamma(-t), \quad \text{ha } t \in [-b, -a]$$

görbét a γ *megfordításának* nevezzük. Ha γ_1 az $[a, b]$ -n, γ_2 a $[b, c]$ -n definiált görbék, és $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, akkor definiálhatjuk a γ_1 és γ_2 *egymás utáni bejárását*, a $\gamma_1 \vee \gamma_2 = \gamma$ görbét,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{ha } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & \text{ha } b \leq t \leq c \end{cases}$$

összefüggéssel. Legegyszerűbb görbék a $t \mapsto c + td$ alakban előállítható *lineáris görbék* valamely rögzített $c, d \in \mathbb{R}^m$ vektorokkal. A $d = 0$ speciális esetnek megfelelő *konstans görbék* értékkészlete egyetlen pont. A véges sok lineáris görbe egymás utáni bejárásával kapható görbék a *szakaszonként lineáris görbék*.

Az I_1 intervallumon értelmezett γ_1 és az I_2 intervallumon értelmezett γ_2 *görbékét ekvivalenseknek* nevezzük, ha van olyan φ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, amely I_1 -et I_2 -re képezi le, és amelyre $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Könnyű látni, hogy görbék ekvivalenciája ekvivalencia-reláció.

7.1.26. Tétel. Egy $X \subset \mathbb{K}^n$ nyílt halmazra az alábbiak ekvivalensek:

- (1) X tartomány;
- (2) az X bármely két u és v pontjához van olyan X -beli szakaszonként lineáris görbe, amelynek u a kezdő-, v a végpontja;
- (3) bármely két X -beli ponthoz van olyan X -beli görbe, amelynek az egyik pont a kezdő-, a másik a végpontja;

* **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy (1) teljesül, és legyen $u \in X$. Azon $v \in X$ pontok halmaza, amelyekhez létezik olyan szakaszonként lineáris görbe, amelynek kezdőpontja u , végpontja pedig v , nyílt és nem üres. De hasonlóan azon $v \in X$ pontok halmaza, amelyekhez nem létezik olyan szakaszonként lineáris görbe, amelynek kezdőpontja u , végpontja pedig v , szintén nyílt, így ennek üresnek kell lennie, azaz kapjuk (2)-t.

Az nyilvánvaló, hogy (2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy (3) teljesül, de X nem tartomány. Ekkor előállna U, V nem üres, diszjunkt, nyílt halmazok egyesítéseként. Legyen g olyan görbe, amelynek kezdőpontja U -ban, végpontja V -ben van, és legyen $t = \sup g^{-1}(U)$. Ha $g(t) \in U$, akkor a folytonosság miatt t nem lehet felső korlát, ha pedig $g(t) \in V$, akkor a folytonosság miatt nem lehet a legkisebb felső korlát. Így (3)-ból következik (1). $\square$

7.1.27. Következmény. *A számegyenesen a tartományok az $]a, b[,]-\infty, b[,]a, +\infty[$ alakú nyílt intervallumok.*

* **Bizonyítás.** Ha egy $X \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz nem intervallum, akkor léteznek olyan $x < z < y$ pontok, amelyekre $x, y \in X$ de $z \notin X$, így X az $X \cap]-\infty, z[$ és $X \cap]z, +\infty[$ nem üres diszjunkt nyílt halmazok egyesítése. A megfordítás következik (2)-ből.

7.1.28. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^m$ és $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy folytonos függvény. Ha K kompakt, akkor $f(K)$ is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen G_γ , $\gamma \in \Gamma$ egy nyílt lefedése $f(K)$ -nak. Legyen $x \in K$. Ekkor $f(x) \in G_{\gamma_x}$ valamely $\gamma_x \in \Gamma$ -ra. Mivel G_{γ_x} nyílt, van olyan V_x környezete $f(x)$ -nek, amelyre $V_x \subset G_{\gamma_x}$. Mivel f folytonos, van olyan U_x környezete x -nek, amelyre $y \in U_x \cap K$ esetén $f(y) \in V_x \subset G_{\gamma_x}$. Az U_x , $x \in K$ halmazok egy nyílt lefedését alkotják K -nak, így ebből kiválasztható K egy $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ véges lefedése. Ha $y \in f(K)$, akkor $y = f(x)$ valamely $x \in K$ -ra. Innen $x \in U_{x_i}$ valamely i -re, tehát $y = f(x) \in f(U_{x_i}) \subset V_{x_i} \subset G_{\gamma_{x_i}}$. Ez azt jelenti, hogy $G_{\gamma_{x_1}}, \dots, G_{\gamma_{x_k}}$ egy véges lefedése $f(K)$ -nak. $\square$

7.1.29. Következmény: Weierstrass tétele. *Ha $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt és az $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $f(K)$ korlátos, és van olyan $a, b \in X$, hogy $f(a) = \inf f(K)$, $f(b) = \sup f(K)$, tehát f felveszi maximumát és minimumát.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $f(K)$ kompakt, így korlátos és zárt. Mivel $\inf f(K)$ és $\sup f(K)$ érintkezési pontjai $f(K)$ -nak, benne vannak $f(K)$ -ban. $\square$

7.1.30. Hausdorff tétele. *Ha $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor f^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $b \in f(K)$ és $a = f^{-1}(b)$, továbbá U egy környezete a -nak. Mivel $K \setminus U$ kompakt, $f(K \setminus U) = f(K) \setminus f(U)$ is kompakt, tehát zárt. Nyilván $f(K) \setminus f(U)$ nem tartalmazza b -t. Mivel $f(K) \setminus f(U)$ komplementere nyílt, ez azt jelenti, hogy b -nek van olyan V környezete, hogy $y \in f(K) \cap V$ esetén $x = f^{-1}(y) \in U$, azaz, hogy f^{-1} folytonos b -ben. $\square$

° **7.1.31. Példa.** A kompaktság nem hagyható el: a $t \mapsto \cos t + i \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ leképezés folytonos és kölcsönösen egyértelmű, de az inverze nem folytonos.

* **7.1.32. Lebesgue-szám.** Egy $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz egy lefedésének a *Lebesgue-számán* egy olyan $\delta > 0$ számot értünk, amelyre minden $x \in A$ esetén $\mathbb{U}_\delta(x)$ benne van a lefedés valamelyik halmazában.

* **7.1.33. Tétel.** *Bármely $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz nyílt lefedésének van pozitív Lebesgue-száma.*

Bizonyítás. Legyen G_γ , $\gamma \in \Gamma$ a K kompakt halmaz egy nyílt lefedése. Minden $x \in K$ -hoz van olyan $\varepsilon_x > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset G_\gamma$ valamely $\gamma \in \Gamma$ -ra. Az $\mathbb{U}_{\varepsilon_x/2}(x)$ környezetek nyílt lefedését alkotják K -nak. Kiválasztva ebből a nyílt lefedésből egy véges részlefedést, az ehhez tartozó $\varepsilon_{x_i}/2$ számok δ minimuma Lebesgue-száma a nyílt lefedésnek, mert ha $y \in K$, akkor $y \in \mathbb{U}_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$ valamely x_i -re, így

$$\mathbb{U}_\delta(y) \subset \mathbb{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset G_\gamma$$

valamely $\gamma \in \Gamma$ -ra. $\square$

* **7.1.34. Egyenletes folytonosság.** Egy $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt $\mathbb{R}^m$ -be képező f leképezést *egyenletesen folytonosnak* nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in A$ és $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Lipschitz-függvény nyilván egyenletesen folytonos. Egyenletesen folytonos leképezés folytonos is, de a megfordítás nem igaz általában, például ha $A \subset \mathbb{R}$ nem tartalmazza egy x_0 torlódási pontját, akkor $x \mapsto 1/(x - x_0)$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos A -n.

Ha $g \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is egyenletesen folytonos, akkor $g \circ f$ is egyenletesen folytonos.

* **7.1.35. Heine tétele.** Egy $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt halmazon folytonos $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $x \in K$ -nak van olyan U_x környezete, hogy $y \in U_x$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Legyen $\delta > 0$ az U_x , $x \in K$ nyílt lefedés Lebesgue-száma. Ekkor $y, z \in X$, $|y - z| < \delta$ esetén $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. $\square$

7.1.36. Jobb és bal oldali folytonosság. Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ és $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény, akkor ha az f függvény $\{x \in A: x \geq a\}$, illetve $\{x \in A: x \leq a\}$ halmazra való megszorítása folytonos a -ban, akkor az mondjuk, hogy f *jobbrol folytonos*, illetve *balrol folytonos* a -ban. Ha f folytonos a -ban, akkor nyilván jobbrol és balrol is folytonos a -ban. Megfordítva, ha f jobbrol és balrol is folytonos a -ban, akkor folytonos a -ban.

7.1.37. Felülről és alulról folytonosság. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ és $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan U környezete a -nak, hogy $x \in U \cap A$ esetén $f(x) < f(a) + \varepsilon$, illetve $f(x) > f(a) - \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f *felülről folytonos* (felülről félig folytonos), illetve *alulról folytonos* (alulról félig folytonos) a -ban. Ha f minden $a \in A$ pontban felülről, illetve alulról folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *felülről folytonos*, illetve *alulról folytonos* A -n. Nyilvánvaló, hogy ha f és g felülről, illetve alulról folytonosak a -ban, $c \geq 0$, akkor $f + g$ és cf is felülről, illetve alulról folytonosak a -ban.

7.1.38. Határérték. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ és $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény, a pedig torlódási pontja A -nak. Azt írjuk, hogy $f(x) \rightarrow b$, ha $x \rightarrow a$, vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha $b \in \mathbb{R}^n$ és a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \setminus \{a\}, \\ b, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos a -ban. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy b bármely V környezetéhez van olyan U környezete a -nak, hogy ha $x \neq a$, $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $0 < |x - a| < \delta$,

akkor $|f(x) - b| < \varepsilon$. A határérték és a folytonosság definíciójának összevetéséből azt kapjuk, hogy ha a torlódási pontja A -nak, akkor f pontosan akkor folytonos a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Nyilván ha egy függvény határértéke a -ban b , akkor bármely megszorításának, ha az értelmezési tartománynak torlódási pontja a , szintén határértéke b . Figyeljük meg, hogy a határérték létezése és értéke csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha f -et megváltoztatjuk a valamely környezetén kívül.

7.1.39. Tétel. *Függvény határértéke, ha létezik, egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$. Bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választva olyan δ_1 , illetve δ_2 -t, hogy ha $0 < |x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_1| < \varepsilon$, ha pedig $0 < |x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_2| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (ilyen x létezik, mivel a torlódási pontja A -nak), akkor

$$|b_2 - b_1| \leq |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| < 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, csak $b_1 = b_2$ lehetséges. $\square$

7.1.40. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$, a torlódási pontja A -nak és $f, g: A \rightarrow \mathbb{K}^n$, $h: A \rightarrow \mathbb{K}$ függvények.*

(1) *Pontosan akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha az $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ koordinátafüggvényekre a*

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j$$

határértékek léteznek, továbbá ekkor $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

(2) *Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, a pedig lokálisan korlátos, azaz van olyan U környezete a -nak és K valós szám, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén $|h(x)| < K$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} (hf)(x) = 0$.*

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, akkor

(3) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$;

(4) $\lim_{x \rightarrow a} \langle f, g \rangle(x) = \langle b, c \rangle$.

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ és $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = d$, akkor

(5) $\lim_{x \rightarrow a} (hf)(x) = db$;

(6) *ha $d \neq 0$, akkor a valamely U környezetére $1/h(x)$ értelmezve van, ha $a \neq x \in A \cap U$ és $\lim_{x \rightarrow a} (1/h)(x) = 1/d$.*

Bizonyítás. A tétel a folytonosság és a határérték kapcsolatából következik. $\square$

7.1.41. Jobb és bal oldali határérték. Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $f: A \rightarrow \mathbb{K}$ egy függvény, akkor az f függvény $\{x \in A: x \geq a\}$, illetve $\{x \in A: x \leq a\}$ halmazra való megszorítása határértékeit a -ban (ha léteznek) az f *jobb oldali határértékének*, illetve *bal oldali határértékének* nevezzük. Jelölésük: $\lim_{x \downarrow a} f(x)$, illetve $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ vagy $f(a+)$, illetve $f(a-)$. A folytonosság és a határérték kapcsolata alapján világos, hogy ha mindkét oldali határérték létezik a -ban, akkor a határérték pontosan akkor létezik, hogyha a jobb és a bal oldali határérték megegyeznek, és ekkor ugyanaz a szám a határérték is.

7.1.42. Szakadások. Ha f nem folytonos a -ban, akkor azt mondjuk, hogy *szakadása* van a -ban. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ létezik, de nem egyenlő $f(a)$ -val, akkor azt mondjuk, hogy f -nek *megszüntethető szakadása* van, egyébként a szakadás *nem megszüntethető szakadás*.

Ha f valós változós, $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ és $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ léteznek, de nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy f -nek *elsőfajú szakadása* vagy *ugrása* van a -ban, minden más nem megszüntethető szakadást *másodfajú szakadásnak* nevezzünk.

7.1.43. A végtelen mint határérték, határérték a végtelenben. Mivel $\overline{\mathbb{R}}$ -ban $-\infty$ és $+\infty$ környezetei, $\overline{\mathbb{C}}$ -ban pedig ∞ környezetei definiálva vannak, mindazokat a fogalmakat, amelyeket környezetek segítségével értelmeztünk (folytonosság, jobb és bal oldali folytonosság, határérték, jobb és bal oldali határérték, szakadás, megszüntethető szakadás, nem megszüntethető szakadás, elsőfajú szakadás, másodfajú szakadás), átvihetjük erre az esetre is. Számos tétel is érvényben marad, például a 7.1.21, 7.1.23 és 7.1.39 tételek.

7.1.44. Tétel. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$, a torlódási pontja A -nak, $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = bc$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} (1/f)(x) = 1/b$.

Megjegyezzük, hogy van olyan U környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén a bal oldalon álló függvény értelmezve van.

Bizonyítás. A $b, c \in \mathbb{K}$ eseteket már láttuk. A többi eset hasonlóan bizonyítható. Például ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ és $c = +\infty$, akkor van olyan U_1 környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U_1 \cap A$ esetén $|f(x) - b| < 1$, valamint tetszőleges $B \in \mathbb{R}$ -hez van olyan U_2 környezete a -nak, hogy $a \neq x \in U_2 \cap A$ esetén $g(x) > B - b - 1$. Innen $U = U_1 \cap U_2$ jelöléssel $a \neq x \in U \cap A$ esetén $(f + g)(x)$ értelmezve van, és nagyobb, mint B . Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$. $\square$

7.1.45. Tétel. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$, a torlódási pontja A -nak és a -ban létezik határértéke az $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényeknek.

- (1) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, akkor van olyan U környezete a -nak, hogy

$$f(x) < g(x), \quad \text{ha } a \neq x \in U \cap A;$$

- (2) ha a valamely U környezetére $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Bizonyítás. Legyen $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) < d < c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, és válasszuk V , illetve W környezeteit b -nek, illetve c -nek úgy, hogy $V \subset [-\infty, d]$, $W \subset]d, +\infty]$ teljesüljön. Legyen U az a megfelelő környezeteinek metszete. Ekkor $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) < d < g(x)$, amivel beláttuk (1)-et. (2) indirekt következik (1)-ből. $\square$

7.1.46. Tétel: rendőr-elv. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, a torlódási pontja A -nak és az a valamely U környezetére az $f, g, h: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x),$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Bizonyítás. Legyen V környezete az f és h közös határértékének, U pedig az a megfelelő környezeteinek metszete. $\square$

7.1.47. Sorozatok. A sorozatok $\mathbb{N}^+$ -on értelmezett függvények, így beszélhetünk $\mathbb{K}^k$ -beli sorozatok ∞ -ben vett határértékéről. Az, hogy $A \in \mathbb{K}^k$ az a_n sorozat határértéke, azt jelenti, hogy A bármely környezetére véges sok n kivételével minden n -re a_n benne van az adott környezetben. Jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$. Ilyenkor az a_n sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergens* vagy A -hoz *konvergál*. Tudjuk, hogy a határérték egyértelmű. Világos, hogy a határérték nem változik, ha a sorozatnak véges sok tagját megváltoztatjuk. Az a_n akkor és csak akkor konvergál A -hoz, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ (itt $n > N$, illetve $|a_n - A| \leq \varepsilon$ is írható). Konvergens sorozat nyilván korlátos. Ha egy sorozat nullához konvergál, akkor *nullsorozatnak* nevezzük. Az, hogy a_n konvergál A -hoz, azzal ekvivalens, hogy $a_n - A$ nullsorozat. Az, hogy a_n nullsorozat, azzal ekvivalens, hogy $|a_n|$ nullsorozat $\mathbb{R}$ -ben. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük. Természetesen indexelhetjük a sorozatokat nullától is.

Ha $n_1 < n_2 < \dots$ pozitív egész számok egy sorozata, akkor az a_{n_j} , $j = 1, 2, \dots$ sorozatot az a_n sorozat *részsorozatának* nevezzük. A definícióból azonnal következik, hogy ha egy sorozatnak van határértéke, akkor bármely részsorozatának is ugyanaz a határértéke.

Nilvánvaló, hogy egy *konstans sorozat*, azaz egy olyan sorozat, amelynek minden tagja ugyanaz a c vektor, konvergens, és határértéke az adott c konstans.

A következő két állítás azonnal következik a függvények határértékére tanultakból.

7.1.48. Tétel. Egy

$$a_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{K}^k$$

vektorsorozat pontosan akkor konvergál az

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_k) \in \mathbb{K}^k$$

vektorhoz, ha koordinátánként is, azaz ha $a_{j,n} \rightarrow A_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$). $\square$

7.1.49. Tétel. Ha $a_n, b_n \in \mathbb{K}^k$ és $c_n \in \mathbb{K}$ sorozatok, $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$ és $c_n \rightarrow C$, akkor $(a_n + b_n) \rightarrow (A + B)$, $\langle a_n, b_n \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$ és $(c_n a_n) \rightarrow CA$. $\square$

7.1.50. Átviteli elv. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$, és a torlódási pontja A -nak. Pontosán akkor teljesül, hogy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ha minden olyan $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Bizonyítás. Ugyanúgy bizonyítható, mint az egyváltozós esetben. $\square$

7.1.51. Tétel. Egy $K \subset \mathbb{K}^k$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha minden K -beli a_n sorozatnak van K -ban konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen K kompakt és E az a_n értékkészlete. Ha E véges, akkor van olyan $A \in E$ és olyan $n_1 < n_2 < \dots$ indexsorozat, hogy $a_{n_j} = A$ minden j -re. Világos, hogy $a_{n_j} \rightarrow A$. Ha E végtelen, akkor tudjuk, hogy E -nek van egy A torlódási pontja K -ban. Válasszunk olyan $n_1 < n_2 < \dots$ indexsorozatot, amelyre $|a_{n_j} - A| < 1/j$. Legyen $J > 1/\varepsilon$, ekkor $j \geq J$ esetén $|a_{n_j} - A| < \varepsilon$.

A másik irány egyszerűbb. Legyen E egy végtelen részhalmaza K -nak, és válasszunk ki egy különböző E -beli elemekből álló részsorozatot. Ennek van egy K -ban konvergens részsorozata. A részsorozat határértéke torlódási pontja E -nek, így E -nek van K -beli torlódási pontja. $\square$

7.1.52. Következmény: Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Minden $\mathbb{K}^k$ -beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

A tétel végtelen dimenzióban nem marad érvényes.

Bizonyítás. A sorozat értékkészlete része valamely origó középpontú zárt gömbnek, és ebben a sorozatnak van konvergens részsorozata. $\square$

7.1.53. Cauchy-sorozatok. Egy $\mathbb{K}^k$ -beli sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n, m \geq N$, akkor $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

A fogalom jelentőségét itt is adja, hogy anélkül dönthetünk segítségével a konvergenciáról, hogy ismernénk a határértéket.

7.1.54. Cauchy-féle konvergenciakritérium. Egy $\mathbb{K}^k$ -beli sorozat pontosan akkor *Cauchy-sorozat*, ha konvergens.

Bizonyítás. Áttérünk koordinátasorozatokra. $\square$

7.1.55. Banach-terek és Hilbert-terek. Azokat a normált tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, *Banach-térnek*, azokat a belső szorzat tereket pedig, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, *Hilbert-térnek* nevezzük. A Hilbert-terek nyilván Banach-terek is. Megmutatható, hogy minden belső szorzat térhez, illetve normált térhez — lényegében egyértelműen — létezik egy Hilbert-tér, illetve Banach-tér, amely őt sűrű részhalmazként tartalmazza.

7.1.56. Sorok. Ha $a_0, a_1, \dots$ egy $\mathbb{K}^k$ -beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\sum a_n$ *végtelen sort* vagy röviden *sort* az $s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ ($n = 0, 1, \dots$) *részletösszegek* sorozatával azonosítjuk. Az a_n vektort a sor n -edik *tagjának* nevezzük. A sor tagjait rendszerint nullától indexezzük. A részletösszegekből visszakaphatjuk a sor tagjait, hiszen $a_0 = s_0$ és $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és *összege* A , ha az s_n részletösszegek sorozata A -hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Ha a sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor *feltételelesen konvergensnek* nevezzük.

A sorozatokra vonatkozó legtöbb tétel egyszerűen átfogalmazható sorokra.

7.1.57. Tétel. Ha a $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergens, összegük A , illetve B , és $c \in \mathbb{K}$, akkor $\sum (a_n + b_n) = A + B$ és $\sum (ca_n) = cA$.

A tétel normált terekre is érvényes marad.

Bizonyítás. A részletösszegek felhasználásával azonnal következik. $\square$

7.1.58. Cauchy-féle konvergenciakritérium. A $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergál, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $m \geq n \geq N$ esetén $|\sum_{j=n}^m a_j| < \varepsilon$. $\square$

A kritérium Banach-terekre is érvényes marad.

7.1.59. Következmény. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen $m = n$. $\square$

7.1.60. Összehasonlító kritérium. Ha $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum a_n$ sorra véges sok n kivételével $|a_n| \leq b_n$, és $\sum b_n$ konvergál, akkor $\sum a_n$ is.

A kritérium Banach-terekre is érvényes marad.

Bizonyítás. A Cauchy-kritériumból minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $m \geq n \geq N$, akkor $|a_n| \leq b_n$ és $\sum_{j=n}^m b_j < \varepsilon$. Innen

$$|\sum_{j=n}^m a_j| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| \leq \sum_{j=n}^m b_j < \varepsilon,$$

és így a konvergencia következik a Cauchy-kritériumból. $\square$

7.1.61. Következmény. Abszolút konvergens sor konvergens is.

Megmutatható, hogy egy normált tér pontosan akkor Banach-tér, ha benne minden abszolút konvergens sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $b_n = |a_n|$. $\square$

7.1.62. Cauchy-féle gyökkritérium. Egy $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum a_n$ sor, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $\alpha < 1$, akkor $\alpha < \beta < 1$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$, azaz $|a_n| \leq \beta^n$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\alpha > 1$, akkor $\alpha > \beta > 1$ esetén végtelen sok n -re $|a_n| \geq \beta^n > 1$, így a_n nem tart nullához. $\square$

7.1.63. d'Alembert-féle hányadoskritérium. Egy $\mathbb{K}^k$ -beli, nem nulla tagokból álló $\sum a_n$ sorra, ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

akkor konvergens, ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

vagy ha véges sok n kivételével $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, akkor divergens.

Bizonyítás. Ha $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, akkor van olyan $\beta < 1$ szám és $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \beta$. Innen indukcióval $|a_n| \leq |a_N|\beta^{n-N}$, ha $n \geq N$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$. Innen indukcióval $|a_n| \geq |a_N|$, ha $n \geq N$, így a_n nem tart nullához. $\square$

7.1.64. Kettős sor tétel. Legyen $a_{i,j} \in \mathbb{K}^k$, ha $i, j \in \mathbb{N}$. Ha van olyan K valós szám, hogy $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{j,k}| \leq K$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ -re, akkor az alábbi sorok abszolút konvergensek és

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

A tétel Banach-terekben is érvényes.

Vegyük észre, hogy a feltétel teljesülése következik, ha feltesszük, hogy (1)-ben vagy a jobb, vagy a bal oldalon minden tagot az abszolút értékével helyettesítve a kapott sorok konvergensek.

* **Bizonyítás.** Rögzített m -re $n \rightarrow \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, ahonnan $m \rightarrow \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, és hasonlóan kapjuk, hogy a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy K a pontos felső korlát, $\varepsilon > 0$, elég nagy m -re és n -re $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{j,k}| \geq K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n'} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon,$$

amiből $n' \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$\left| \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{j,k} \right| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ha most $n \rightarrow \infty$, majd $m \rightarrow \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását. $\square$

7.1.65. Következmény: sorok átrendezése. Ha $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), és a $\mathbb{K}^k$ -beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, összege A , akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege A .

A következmény alapján ha M megszámlálható végtelen halmaz, $a_m \in \mathbb{K}^k$, ha $m \in M$, és van olyan K valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$ -re $\sum_{m \in M'} |a_m| \leq K$, akkor bármely $p: \mathbb{N} \rightarrow M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m \in M} a_m$.

Bizonyítás. Legyen $a_{i,j} = a_i$, ha $j = p_i$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

7.1.66. Következmény. Ha az I megszámlálható halmaz a I_j , $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, $a_i \in \mathbb{K}^k$, ha $i \in I$, és $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$, akkor

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $I, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $a_{i,j} = a_i$, ha $i \in I_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

7.1.67. Ekvivalens normák. Az X lineáris téren a $|\cdot|$ és $\|\cdot\|$ normákat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha léteznek olyan $c, C > 0$ valós számok, hogy

$$c|x| \leq \|x\| \leq C|x|$$

minden $x \in X$ esetén. Például $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_{\infty}$ bármely $1 \leq p < \infty$ esetén minden $x \in \mathbb{K}^n$ -re. Normák ekvivalenciája nyilván ekvivalencia-reláció. Ekvivalens normákra ugyanaz a határérték, a nyílt és zárt halmazok és ugyanazok a Cauchy-sorozatok is.

7.1.68. Tétel. Véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens.

* **Bizonyítás.** Elég az állítást $\mathbb{R}^n$ normáira bizonyítani. Mivel a normák ekvivalenciája ekvivalencia-reláció, elég belátni, hogy $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges $\|\cdot\|$ normája a szokásos belső szorzatból származó $|\cdot|$ normával ekvivalens. Legyen

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

a szokásos ortonormált bázisa $\mathbb{R}^n$ -nek. Ekkor $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ esetén $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ és

$$\|x\| \leq \max\{|x_i|: 1 \leq i \leq n\} \sum_{i=1}^n \|e_i\| \leq |x| \sum_{i=1}^n \|e_i\|,$$

tehát teljesül az $\|x\| \leq C|x|$ egyenlőtlenség. Innen az $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ tér $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ térre való identikus leképezése folytonos, és mivel az $|\cdot|$ normában vett egységömb határa (azaz határpontjainak halmaza) kompakt, rajta a $\|\cdot\|$ függvény felveszi c pontos alsó határát, ami nem lehet nulla. Így $\|x\|/|x| \geq c$, ha $x \neq 0$, azaz $\|x\| \geq c|x|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re. $\square$

* **7.1.69. Fixpont és kontrakció.** Ha T az X halmazt önmagába leképező függvény, akkor T *fixpontjának* azokat a pontokat nevezzük, amelyekre $T(x) = x$.

Egy $T \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést *kontrakciónak* nevezzük, ha $\text{Lip}(T) < 1$.

* **7.1.70. Banach-féle fixponttétel.** Ha X egy zárt részhalmaza $\mathbb{R}^k$ -nak és $T: X \rightarrow X$ egy kontrakció, akkor T -nek pontosan egy x fixpontja van. Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, akkor az $x_{n+1} = T(x_n)$ iterációval adódó sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

A tétel Banach-terekre is érvényes marad.

Bizonyítás. Legyen $D = d(x_0, x_1)$. Teljes indukcióval

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n D, \quad \text{ha } n = 0, 1, \dots$$

Ebből $m > n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n D + \alpha^{n+1} D + \dots + \alpha^{m-1} D \leq \alpha^n D(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) = \frac{\alpha^n D}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Mivel $\alpha^n D/(1 - \alpha) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, x_n Cauchy-sorozat, amely konvergál X egy x eleméhez. Megmutatjuk, hogy x fixpontja T -nek.

$$0 \leq d(x, T(x)) \leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \leq d(x, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x),$$

amiből $n \rightarrow \infty$ esetén $d(x, T(x)) = 0$ következik. A fixpont egyértelmősége abból következik, hogy ha x és y fixpontok, akkor

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y). \quad \square$$

*** 7.1.71. Metrikus terek.** Megvizsgálva az analízis alapfogalmainak (környezet, nyílt, zárt és kompakt halmazok, határérték, Cauchy-sorozat, stb.) definícióit és a tételek bizonyításait, mindenütt látható, hogy — közvetve vagy közvetlenül — a $\mathbb{K}^k$ pontjai közötti távolság bizonyos egyszerű tulajdonságait használtuk fel. Ezt figyelembe véve, az egész tárgyalást jóval általánosabban végezhetjük, ha bevezetjük a következő fogalmat: Az X halmazt *metrikus térnek* nevezzük, ha bármely két x, y eleméhez hozzá van rendelve egy nemnegatív valós szám, az x és y *távolsága* úgy, hogy minden $x, y, z \in X$ esetén

- (1) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*szimmetria*);
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha egy metrikus térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor *teljesnek* nevezzük. Metrikus terek izomorfizmusai az *izometriák*, magyarul *távolságtartó leképezések* (*egybevágóságok*). Segíthet a metrikus terek elképzelésében, ha tudjuk, hogy minden metrikus tér egybevágó valamely Banach-tér egy részhalmazával.

7.2 Differenciálszámítás

A differenciálás linearizálás.

Népköltemény

Figyelemre méltó, hogy a jelölés megkönnyíti a felfedezést: a legcsodálatosabban csökkenti az értelem munkáját.

Gottfried Wilhelm Leibniz

7.2.1. Lineáris operátorok normája. Tekintsünk egy-egy (ugyanúgy jelölt) normát a $\mathbb{K}^n$, illetve $\mathbb{K}^m$ tereken. Egy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ lineáris leképezésre legyen

$$(1) \quad \|L\| = \sup_{|x| \leq 1} |Lx|$$

A szuprémum véges, mert L folytonos (mivel koordinátái elsőfokú polinomok) és így korlátos az egységgömbön. Mivel $Lx = |x|L(x/|x|)$, ahonnan $|Lx| \leq \|L\||x|$ minden $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$ -re, $\|L\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre $|Lx| \leq \|L\||x|$ minden $x \in \mathbb{K}^n$ -re, azaz $\|L\| = \text{Lip}(L)$. Nyilván $\|L\| \geq 0$ és $\|L\| = 0$ pontosan akkor, ha $L = 0$. Az is világos, hogy $\|\lambda L\| = |\lambda|\|L\|$. Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$, $|x| \leq 1$, akkor

$$|(L_1 + L_2)x| \leq |L_1x| + |L_2x| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

amiből a bal oldalon szuprémumot véve, azt kapjuk, hogy

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

így $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ normált tér. Az (1) összefüggéssel definiált normát a $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken adott vektornormákhoz tartozó *operátornormának* (vagy ha a lineáris operátor mátrixáról van szó, *mátrixnormának*) nevezzük. Ha mást nem mondunk, akkor a belső szorzatból származó normákhoz tartozó operátornormát fogjuk használni. Ha kifejezésre akarjuk juttatni, hogy mindkét téren a p -normát ($1 \leq p \leq \infty$) használjuk, akkor a kapott operátornormát $\| \cdot \|_p$ -vel jelöljük.

Nyilván $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ esetén $|\lambda| \leq \|L\|$ bármely λ sajátérték és bármely operátornorma esetén. A numerikus analízishez fontos tudni, hogy minden $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ -hez és minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\| \cdot \|$ norma $\mathbb{K}^n$ -en, amelyre $\|L\| < \varrho(L) + \varepsilon$.

7.2.2. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy ha $[L]$ jelöli az $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ mátrixát a szokásos bázisban, akkor

$$\|[L]\|_\infty \leq \|L\|_2 \leq \|[L]\|_2.$$

Megoldás. A bal oldali egyenlőtlenség következik, ha x -et a $\| \cdot \|$ definíciójában olyan bázisvektornak választjuk, amely képének koordinátái között van $[L]$ maximális abszolút értékű eleme. A jobb oldali egyenlőtlenség a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből következik, mert ebből $\|Lx\|^2 \leq \|[L]\|_2^2 \|x\|^2$, amiből gyököt vonva és $\|x\| \leq 1$ -re szuprémumot véve $\|L\| \leq \|[L]\|_2$.

→ **7.2.3. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy az operátornorma *szubmultiplikatív*, azaz ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ és $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^n)$, akkor

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

→ **7.2.4. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $A_k \rightarrow A$ a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ térben, és $x_k \rightarrow x$ a $\mathbb{K}^n$ térben, akkor $\mathbb{K}^m$ -ben $A_k x_k \rightarrow Ax$.

→ **7.2.5. Feladat [10].** Határozzuk meg a kétdimenziós euklideszi tér azon lineáris transzformációjának normáját, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

* **7.2.6. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén, ha L mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |\ell_{i,j}|$.

* **7.2.7. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén, ha L mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |\ell_{i,j}|$.

* **7.2.8. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén $\|L\|_2 = \varrho(A^*A)$.

7.2.9. Definíció. Ha $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, akkor az f függvényt az x pontban akkor neveztük differenciálhatónak, ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

határérték. Tudjuk (4.1.10 segédtétel), hogy ez átfogalmazható úgy, hogy

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h),$$

ahol r olyan függvény, amelyre $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $f(x+h) - f(x)$ különbség előállítható egy h -ban lineáris „főtag” és egy kicsiny „maradéktag” összegeként. A derivált fogalmának ezt az alakját általánosíthatjuk többváltozós függvényekre.

Legyen $G \subset \mathbb{K}^n$ és $f: G \rightarrow \mathbb{K}^m$. Ha x belső pontja G -nek, és van olyan

$$L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$$

lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Lh|}{|h|} = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható vagy totálisan differenciálható az x pontban. A differenciálhatóság nyilván lokális tulajdonság: ha két függvény megegyezik az x pont valamely környezetében, akkor egyszerre differenciálhatóak és deriváltjuk megegyezik.

Geometriailag a differenciálhatóság az x pontban azt jelenti, hogy az f függvényhez, azaz az

$$\{(y, f(y)): y \in G\}$$

párok halmazához létezik egy

$$\{(y, f(x) + L(y-x)): y \in \mathbb{K}^n\}$$

affin sokaság, az érintőtér, amely az $(x, f(x))$ pontban érinti azt.

Világos, hogy ha f differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is, mert ekkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x) - Lh| = 0,$$

amiből $\lim_{h \rightarrow 0} Lh = 0$ miatt f folytonos x -ben.

Ha $h \in \mathbb{K}^n$, akkor f -et az x pontban a h irány mentén differenciálhatónak nevezzük, ha $t \mapsto f(x + th)$ értelmezve van a 0 egy környezetében, és létezik a

$$\partial_h f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

határérték, az f függvény x pontbeli h irány menti deriváltja vagy variációja. A $\delta f(x; h)$ jelölés is használatos. Nyilván $\partial_{-h} f(x) = -\partial_h f(x)$.

A definícióból közvetlenül következik, hogy ha f differenciálható x -ben, akkor minden $h \in \mathbb{K}^n$ -re létezik a $\partial_h f(x)$ irány menti derivált is és

$$\partial_h f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Lh,$$

mert $h \neq 0$ esetén

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x + th) - f(x) - L(th)|}{|th|} = \frac{1}{|h|} \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - Lh \right|,$$

így a fenti L egyértelműen meghatározott. Az L -et az f függvény x pontbeli differenciáljának vagy totális differenciáljának nevezzük és $f'(x)$ -szel jelöljük.

Ha $n = 1$, akkor az f függvény x -beli differenciálhatósága ekvivalens a

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

határérték, az f függvény x pontbeli deriváltjának létezésével, és

$$f'(x)h = hc \quad \text{minden } h \in \mathbb{K}\text{-ra.}$$

A deriváltat is $f'(x)$ -szel szokás jelölni, bár fogalmilag a differenciál és a derivált különbözik: a derivált a c vektor, a differenciál pedig a $h \mapsto hc$ leképezés, aminek a mátrixa a c egyelemű vektorrendszer mátrixa. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, és van olyan $\delta > 0$, amelyre $[x, x + \delta]$ részhalmaza f értelmezési tartományának, akkor az

$$f'(x+) := \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

jobb oldali határértéket a f függvény x -beli jobb oldali deriváltjának nevezzük. Teljesen hasonlóan értelmezhető az $f'(x-)$ bal oldali derivált. Ha f egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon van értelmezve, akkor az alatt, hogy f differenciálható $[a, b]$ -n, azt fogjuk érteni, hogy differenciálható az intervallum belső pontjaiban, valamint a végpontokban léteznek a jobb, illetve bal oldali deriváltak. A deriváltakra vonatkozó állítások általában értelemszerűen átvihetők jobb és bal oldali deriváltakra is; ezzel a kérdéssel részletesen nem foglalkozunk.

Ha $m = 1$, akkor egyértelműen létezik olyan

$$\nabla f(x) \in \mathbb{K}^n,$$

az f gradiense, amelyre

$$f'(x)h = \langle h, \nabla f(x) \rangle \quad \text{minden } h \in \mathbb{K}^n\text{-re.}$$

Fogalmilag a gradiens és a differenciál különböznek: a gradiens egy vektor, a differenciál pedig egy lineáris forma.

Az irány menti deriváltak általában könnyen számíthatók.

Az itt definiált fogalmak és értékek nem változnak, ha a normákat ekvivalens normákkal helyettesítjük, így $\mathbb{K}^n$ -en és $\mathbb{K}^m$ -en is bármilyen normát tekinthetünk.

A legegyszerűbb példa differenciálható függvényre egy konstans függvény, amelynek differenciálja nulla, vagy egy $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineáris függvény, amelynek differenciálfüggvénye konstans: $f'(x) = f$ minden $x \in \mathbb{K}^n$ -re.

Ha $f' = g$, akkor azt is mondjuk, hogy f a g primitív függvénye.

7.2.10. Példa. Az $x \mapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ függvény folytonos, sőt Lipschitz-függvény, de az origóban nem differenciálható: $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén még a h irány menti deriváltja sem létezik.

7.2.11. Példa. Legyen f az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \neq 0, 0 < |y| < x^2\}$ halmaz karakterisztikus függvénye. A függvény nyilván nem folytonos az origóban, bár ott minden irány menti deriváltja létezik és nulla: ha $h = (h_1, h_2)$ és $h_1 h_2 \neq 0$, akkor $0 < |t| \leq |h_2|/h_1^2$ esetén $f(th_1, th_2) = 0$, mert $|th_2| \geq t^2 h_1^2$, ha pedig $h_1 h_2 = 0$, akkor ez minden t -re teljesül.

7.2.12. Sima görbék. Egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény egy $\mathbb{R}^m$ -beli mozgásnak felel meg. Ha a függvény differenciálható az x pontban, akkor $f'(x)$ az érintővektora x -ben. Ha $f'(x) \neq 0$, akkor az x -beli érintőegyenesén vagy röviden érintőjén az

$$\{(t, f(x) + tf'(x)): t \in \mathbb{R}\}$$

egyenest értjük.

Egy $\mathbb{R}^m$ -beli görbét *sima görbének* nevezzük, ha értelmezési tartományán folytonosan differenciálható (a végpontokban féloldali deriváltakat tekintünk). Ha egy görbe véges sok sima görbe egymás utáni bejárása, akkor *szakaszonként simának* nevezzük.

7.2.13. Összegszabály. Ha az $f, g \in \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ függvények differenciálhatóak x -ben, α és β skalárok, akkor $\alpha f + \beta g$ is differenciálható x -ben, és

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Bizonyítás. Következik a definícióból. $\square$

7.2.14. Lánkszabály. Ha $f \in \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \in \text{dmn } f$, $y = f(x)$, $g \in \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^\ell$, f differenciálható x -ben és g differenciálható y -ban, akkor

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

* **Bizonyítás.** Feltevésünk szerint

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + |k|s(k),$$

ahol $s(0) = 0$, és s folytonos a nullában. Legyen

$$k = f(x + h) - f(x) = f'(x)h + |h|r(h),$$

ahol $r(0) = 0$ és r folytonos a nullában. Ekkor behelyettesítve $y = f(x)$ -et és k -t,

$$\begin{aligned} g(y + k) - g(y) &= g(f(x + h)) - g(f(x)) = g'(y)f'(x)h + g'(y)|h|r(h) + |k|s(k) \\ &= g'(y)f'(x)h + |h|t(h), \end{aligned}$$

ahol $t(0) = 0$ és

$$t(h) = g'(y)r(h) + \frac{|k|}{|h|}s(k)$$

egyébként. Mivel $h \rightarrow 0$ esetén $k \rightarrow 0$, valamint

$$\frac{|k|}{|h|} \leq \|f'(x)\| + |r(h)|,$$

kapjuk, hogy $t(h) \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. $\square$

7.2.15. Koordinátafüggvények differenciálhatósága. Ha $f = (f_1, \dots, f_m)$ a $\mathbb{K}^n$ tér x pontjának egy környezetét $\mathbb{K}^m$ -be képező függvény, akkor f pontosan akkor differenciálható az x pontban, ha az f_j , $j = 1, 2, \dots, m$ koordinátafüggvények differenciálhatóak x -ben, és $h \in \mathbb{K}^n$ -re $f'(x)h = (f'_1(x)h, \dots, f'_m(x)h)$.

Bizonyítás. A $p_j: (y_1, \dots, y_m) \mapsto y_j$ projekció linearitásából és a láncszabályból következik, hogy ha f differenciálható, akkor $f_j = p_j \circ f$ is. Az állítás többi része a definícióból következik: az $|f_j(x + h) - f_j(x) - f'_j(x)h|/|h|$ koordináták mindegyike nullához tart. $\square$

7.2.16. Parciális deriváltak. Legyen $G \subset \mathbb{K}^{k_1} \times \mathbb{K}^{k_2} \times \dots \times \mathbb{K}^{k_n}$. Az $f: G \rightarrow \mathbb{K}^m$ leképezés $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontbeli x_j szerint *parciális differenciálját*, illetve *parciális deriváltját* a

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

parciális leképezés x_j pontban vett differenciáljaként, illetve $k_j = 1$ esetén deriváltjaként definiáljuk. Ha ez létezik, akkor f *parciálisan differenciálható* x -ben a j -edik változó szerint. A parciális differenciált $f_{x_j}(x)$ -szel, $\partial_{x_j}f(x)$ -szel, vagy $\partial_j f(x)$ -szel jelöljük.

Világos, hogy ha f differenciálható az x pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható, és $\partial_j f(x)h_j = f'(x)h$, ahol $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{k_1} \times \mathbb{K}^{k_2} \times \dots \times \mathbb{K}^{k_n}$ (itt h_j a j -edik helyen áll). Nyilván a parciális differenciál, illetve derivált is differenciál, illetve derivált, tehát az eddig tanultak alkalmazhatók.

Leggyakrabban azt az esetet használjuk, amikor $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$. Ekkor a parciális deriváltak a szokásos bázis vektorai szerinti irány menti deriváltak, így felhasználhatók a differenciál mátrixának felírására a szokásos bázisban: az e_j vektornak $f'(x)$ differenciál szerinti képe a $\partial_j f(x)$ vektor. Ha f koordinátái $f_1, f_2, \dots, f_m$, akkor ennek a vektornak a koordinátái a $\partial_j f_i(x)$ számok, így $f'(x)$ mátrixa $(\partial_j f_i(x))_{i=1, j=1}^m n$. Ha $m = 1$, akkor ez egy sormátrix, és $\nabla f(x)$ mátrixa ennek a transzponáltja.

Fontos kérdés, hogyan következtethetünk a parciális deriváltak segítségével a függvény differenciálhatóságára. Mint egy példával megmutattuk, még az összes irány menti deriváltak létezése sem elég még a folytonossághoz sem. Még egyszerűbb példa — a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy \neq 0\}$ halmaz karakterisztikus függvénye — mutatja, hogy a parciális deriváltak létezése nem elég még a folytonossághoz sem. A kérdés vizsgálatához szükségünk lesz egy önmagában is fontos egyenlőtlenségre. Ez az egyenlőtlenség helyettesíti a Lagrange-féle középérték-tételt, amely vektor értékű függvényekre nem marad igaz.

*** 7.2.17. Középérték-egyenlőtlenség.** Ha f a $\mathbb{K}^n$ tér egy, az x és $x + h$ pontokat összekötő $\{x + th: 0 \leq t \leq 1\}$ zárt szakaszt tartalmazó részhalmazának a leképezése $\mathbb{K}^m$ -be, amelynek megszorítása a zárt szakaszra folytonos, az $\{x + th: 0 < t < 1\}$ nyílt szakasz minden pontjában létezik a h irány menti derivált, $c \in \mathbb{K}^m$ tetszőleges, akkor

$$|f(x + h) - f(x) - c| \leq \sup_{0 < t < 1} |\partial_h f(x + th) - c|.$$

A tételt gyakran $c = 0$ vagy $c = \partial_h f(x)$ választással és a $|\partial_h f(y)| \leq \|f'(y)\| |h|$, illetve $|\partial_h f(y) - \partial_h f(x)| \leq \|f'(y) - f'(x)\| |h|$ becslésekkel használjuk, ekkor azt kapjuk, hogy

$$|f(x + h) - f(x)| \leq \sup_{0 < t < 1} |\partial_h f(x + th)| \leq |h| \sup_{0 < t < 1} \|f'(x + th)\|,$$

illetve

$$\begin{aligned} |f(x + h) - f(x) - \partial_h f(x)| &\leq \sup_{0 < t < 1} |\partial_h f(x + th) - \partial_h f(x)| \\ &\leq |h| \sup_{0 < t < 1} \|f'(x + th) - f'(x)\| \end{aligned}$$

Bizonyítás. A $g(t) = f(x + th) - tc$ jelöléssel definíció szerint

$$g'(t) = \partial_h f(x + th) - c,$$

így a jobb oldali szuprémum $k = \sup_{0 < t < 1} |g'(t)|$, és azt kell megmutatnunk, hogy

$$|g(1) - g(0)| \leq k, \quad \text{ha } k < \infty.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $K > k$. Ha τ az

$$S = \left\{ 0 \leq t \leq 1: |g(t) - g(0)| \leq \varepsilon + Kt \right\}$$

halmaz szuprémuma, akkor g -nek a 0-beli folytonossága miatt $\tau > 0$ és S zártságából $\tau \in S$. Ha $\tau < 1$ lenne, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{g(t) - g(\tau)}{t - \tau} = g'(\tau)$$

miatt a τ egy elég kis környezetéből vett bármely $t > \tau$ -ra $|g(t) - g(\tau)| < K(t - \tau)$, ami ellentmond τ definíciójának. Így $\tau = 1$, tehát $|g(1) - g(0)| \leq \varepsilon + K$. Végül $\varepsilon \downarrow 0$, $K \downarrow k$ határátmenettel kapjuk az állítást. $\square$

* **7.2.18. Következmény.** Ha f' létezik és korlátos, $\|f'\| \leq B$ egy K konvex halmazon, akkor f Lipschitz-függvény K -n és $\text{Lip}(f) \leq B$.

Bizonyítás. Ha $\|f'\| \leq B$ a K -n, akkor $x, y \in K$ esetén

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{0 < t < 1} \|f'(x + t(y - x))\| \leq B|y - x|. \quad \square$$

7.2.19. Következmény. Ha egy tartományon F_1 és F_2 az f primitív függvényei, akkor $F_1 - F_2$ állandó.

* **Bizonyítás.** $F = F_1 - F_2$ deriváltja nulla, így a középérték-egyenlőtlenség szerint lokálisan állandó. Legyen egy adott pontban felvett érték c . Így azon pontok halmaza, ahol F értéke c , nyílt és nem üres. Hasonlóan, azon pontok halmaza, ahol az F értéke nem c , szintén nyílt, így ez utóbbi üres kell legyen. $\square$

7.2.20. Tétel. Legyen $G \subset \mathbb{K}^{k_1} \times \mathbb{K}^{k_2} \times \dots \times \mathbb{K}^{k_n}$, $f: G \rightarrow \mathbb{K}^k$. Ha az $\partial_j f$, $j = 1, 2, \dots, n$ parciális deriváltak léteznek az $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ pont egy környezetében, és folytonosak x -ben, akkor f differenciálható x -ben, és $h = (h_1, \dots, h_n)$ jelöléssel

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i.$$

* **Bizonyítás.** Legyen

$$r(h) = f(x + h) - f(x) - \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) h_j.$$

Minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|h| \leq \delta$, akkor

$$|\partial_j r(h)| = |\partial_j f(x + h) - \partial_j f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ebből $|h| \leq \delta$ esetén a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} |r(h)| &\leq \sum_{j=1}^n |r(h_1, \dots, h_j, 0, \dots, 0) - r(h_1, \dots, h_{j-1}, 0, \dots, 0)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |h_j| \sup_{0 < t < 1} |\partial_j r(h_1, \dots, h_{j-1}, th_j, 0, \dots, 0)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon |h_j|}{n} \leq \varepsilon |h|. \quad \square \end{aligned}$$

7.2.21. Megjegyzés. Természetesen a parciális deriváltak folytonossága nem szükséges a derivált létezéséhez: például az $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$ függvény differenciálható 0-ban, de a deriváltja nem folytonos. Hasonlóan, az $f(0) = 0$, $f(x) = |x|^2 \cos(1/|x|)$, ha $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható az origóban, de ott a parciális deriváltjai nem folytonosak.

7.2.22. Példák. Az előző tétel alkalmazásával adódik, hogy a szorzás és az osztás, mint kétváltozós függvények, differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Innen következik, hogy a (többváltozós) polinomok és racionális törtfüggvények is differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Az előző tételből az is következik, hogy a bilineáris és multilineáris függvények is differenciálhatóak.

7.2.23. Magasabbrendű deriváltak. Az f'' , f''' , ... magasabbrendű deriváltakat,

$$\partial_y \partial_x f = \partial_y (\partial_x f), \dots \quad \text{vagy} \quad f_{xy} = (f_x)_y, \dots$$

magasabbrendű parciális differenciálokat, valamint a magasabbrendű deriváltakat indukcióval értelmezzük. Például $\mathbb{K}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{K}^k$ -ba képező f függvényt m -szer differenciálhatónak nevezünk az x pontban, ha az f függvény $m-1$ -szer differenciálható az x egy környezetében, és az $f^{(m-1)}$ függvény differenciálható x -ben. Vegyük észre, hogy míg $f'(x)$ az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ tér egy eleme, $f''(x)$ már az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k))$ tér eleme, stb.

Az m -edrendű irány menti deriváltakat is rekurzióval, a

$$\partial_{h_m} \partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

határértékként értelmezzük, ha a

$$g(t) = \partial_{h_m} \dots \partial_{h_1} f(x + th_m)$$

függvény értelmezve van a nulla egy környezetében.

Megjegyezzük, hogy ha $f^{(m)}(x)$ létezik, akkor minden m -edrendű

$$\partial_{h_m} \partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x)$$

irány menti derivált is és értéke

$$f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \dots h_1 = \left(\dots (f^{(m)}(x) h_m) \dots h_1 \right),$$

mert — indukcióval és felhasználva a határértékképzés linearitását —

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \dots h_1 &= (f^{(m)}(x) h_m) h_{m-1} \dots h_1 = (\partial_{h_m} f^{(m-1)}(x)) h_{m-1} \dots h_1 \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(m-1)}(x + th_m) - f^{(m-1)}(x)}{t} \right) h_{m-1} \dots h_1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(m-1)}(x + th_m) h_{m-1} \dots h_1 - f^{(m-1)}(x) h_{m-1} \dots h_1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x + th_m) - \partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x)}{t} \\ &= \partial_{h_m} \partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x). \end{aligned}$$

Használni fogjuk az

$$f^{(m)}(x) h^m = f^{(m)}(x) \overbrace{h \dots h}^{m\text{-szer}}$$

és

$$\partial_h^m f(x) = \overbrace{\partial_h \dots \partial_h}^{m\text{-szer}} f(x)$$

rövidítéseket.

7.2.24. Magasabbrendű deriváltak és parciális deriváltak kapcsolata. Az előző definíció jelöléseivel f kétszeri differenciálhatósága az x pontban azzal ekvivalens, hogy az első derivált koordinátái, a $\partial_j f_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$ skalár értékű függvények mind differenciálhatóak az x pontban. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy a $\partial_j f$, $j = 1, 2, \dots, n$ vektor értékű függvények mind differenciálhatóak az x pontban, mivel ezek koordinátafüggvényei a $\partial_j f_i$ függvények. Az m szerinti indukcióval azt kapjuk, hogy f pontosan akkor m -szer differenciálható, ha a

$$\partial_{j_{m-1}} \partial_{j_{m-2}} \cdots \partial_{j_1} f_i, \quad 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \leq n, \quad 1 \leq i \leq k$$

skalár értékű, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$\partial_{j_{m-1}} \partial_{j_{m-2}} \cdots \partial_{j_1} f, \quad 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \leq n$$

vektor értékű függvények mind differenciálhatóak az x pontban. Az m -edrendű $f^{(m)}(x)$ differenciált a

$$\partial_{j_m} \partial_{j_{m-1}} \cdots \partial_{j_1} f_i(x), \quad 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_m \leq n, \quad 1 \leq i \leq k$$

skalárokkal, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$\partial_{j_m} \partial_{j_{m-1}} \cdots \partial_{j_1} f(x) \in \mathbb{K}^k, \quad 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_m \leq n$$

vektorokkal adhatjuk meg. Ha $f^{(m)}(x)$ létezik és

$$h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{K}^n, \quad h_\ell = (h_{\ell,1}, h_{\ell,2}, \dots, h_{\ell,n}), \quad \text{ha } 1 \leq \ell \leq m,$$

akkor

$$\begin{aligned} \partial_{h_m} \partial_{h_{m-1}} \cdots \partial_{h_1} f(x) &= f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \cdots h_1 \\ &= \sum_{j_m=1}^n \cdots \sum_{j_1=1}^n h_{m,j_m} \cdots h_{1,j_1} \partial_{j_m} \cdots \partial_{j_1} f(x). \end{aligned}$$

7.2.25. A második derivált, mint bilineáris leképezés. Definíció szerint egy $f \in \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ függvény második deriváltja egy x pontban $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m))$ egy L eleme. A $B: (h, k) \mapsto L(h)(k) = Lhk$ leképezése $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ -nek $\mathbb{K}^m$ -be mindkét változójában lineáris, így L a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ bilineáris leképezéssel azonosítható. Általában egy B bilineáris leképezés *normáját* a lineáris leképezések normájához hasonlóan a

$$\|B\| = \sup_{|x| \leq 1, |y| \leq 1} |B(x, y)|$$

összefüggéssel értelmezzük; $\|B\|$ nyilván az a legkisebb szám, amelyre

$$|B(x, y)| \leq \|B\| |x| |y|, \quad \text{ha } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Vegyük észre, hogy az $L \mapsto B$, $B(x, y) = L(x)(y)$ összefüggéssel értelmezett leképezés kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezése

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m))$$

térnek a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ térre, továbbá

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{|x| \leq 1, |y| \leq 1} |B(x, y)| = \sup_{|x| \leq 1} \sup_{|y| \leq 1} |L(x)y| \\ &= \sup_{|x| \leq 1} \|L(x)\| = \|L\|, \end{aligned}$$

így $B \mapsto \|B\|$ tényleg norma, továbbá $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m))$ és $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ azonosítható.

* **7.2.26. A magasabbrendű deriváltak, mint multilineáris leképezések.** Egy $M: \mathbb{K}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{K}^{k_m} \rightarrow \mathbb{K}^k$ multilineáris leképezésnél $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ helyett gyakran csak $Mx_1x_2\dots x_m$ -et írunk. Az M normáját a

$$\|M\| = \sup_{|x_1| \leq 1, \dots, |x_m| \leq 1} |Mx_1 \dots x_m|$$

összefüggéssel értelmezzük. Az $\|M\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre

$$|Mx_1 \dots x_m| \leq \|M\| |x_1| \dots |x_m|, \quad \text{ha } x_1 \in \mathbb{K}^{k_1}, \dots, x_m \in \mathbb{K}^{k_m}.$$

Az

$$M \mapsto L, \quad M(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1)(x_2, \dots, x_m)$$

összefüggéssel definiált leképezés kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezése az

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^{k_1}, \mathbb{K}^{k_2}, \dots, \mathbb{K}^{k_m}; \mathbb{K}^k)$$

térnek az

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^{k_1}; \mathcal{L}(\mathbb{K}^{k_2}, \dots, \mathbb{K}^{k_m}; \mathbb{K}^k))$$

térre, továbbá

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sup_{|x_1| \leq 1, \dots, |x_m| \leq 1} |Mx_1 \dots x_m| \\ &= \sup_{|x_1| \leq 1} \sup_{|x_2| \leq 1, \dots, |x_m| \leq 1} |L(x_1)x_2 \dots x_m| \\ &= \sup_{|x_1| \leq 1} \|L(x_1)\| = \|L\|. \end{aligned}$$

Ebből m szerinti teljes indukcióval következik, hogy $M \mapsto \|M\|$ norma.

Ennek alapján az f függvény m -edik differenciálja az x pontban azzal az m -lineáris $f^{(m)}(x): (\mathbb{K}^n)^m \rightarrow \mathbb{K}^k$ leképezéssel azonosítható, amelyre

$$f^{(m)}(x)h_m h_{m-1} \dots h_1 = (f^{(m-1)})'(x)h_m(h_{m-1}, \dots, h_1).$$

Ez a korábbi rekurzív definíció egy másik alakja.

7.2.27. Schwarz tétele. Ha az $f \in \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ függvény kétszer differenciálható az x pontban, akkor $f''(x)$ szimmetrikus, azaz $f''(x)hk = f''(x)kh$ minden $h, k \in \mathbb{K}^n$ -re.

Az állítás azzal ekvivalens, hogy $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$, ha $1 \leq i, j \leq n$.

* **Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy $h, k \rightarrow 0$ esetén

$$(1) \quad \frac{|f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - f''(x)hk|}{(|h| + |k|)^2}$$

tart nullához. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $f''(0)$ létezése miatt van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f'(y) - f'(0) - f''(0)y| \leq \varepsilon|y|, \quad \text{ha } |y| < 2\delta.$$

Ha $|h|, |k| \leq \delta$, legyen

$$g_k(h) = f(h+k) - f(h) - f(k) + f(0) - f''(0)kh,$$

és vegyük észre, hogy h szerint differenciálva

$$\begin{aligned} g'_k(h) &= f'(h+k) - f'(h) - f''(0)k \\ &= (f'(h+k) - f'(0) - f''(0)(h+k)) - (f'(h) - f'(0) - f''(0)h), \end{aligned}$$

amiből

$$|g'_k(h)| \leq \varepsilon|h+k| + \varepsilon|h| \leq 2\varepsilon(|h| + |k|).$$

Mivel $g_k(0) = 0$, a középérték-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$|g_k(h)| \leq 2\varepsilon(|h| + |k|)|h| \leq 2\varepsilon(|h| + |k|)^2,$$

tehát (1) határértéke nulla. Felcserélve h és k szerepét és a két számlálót kivonva egymásból

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|f''(x)kh - f''(x)hk|}{(|h| + |k|)^2} = 0.$$

Ha most valamely $h, k \in \mathbb{K}^n$ -re $f''(x)hk \neq f''(x)kh$, akkor $t \rightarrow 0$ esetén $th \rightarrow 0$ -ra és $tk \rightarrow 0$ -ra alkalmazva az előző összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f''(x)(tk, th) - f''(x)(th, tk)|}{(|th| + |tk|)^2} = \frac{|f''(x)(k, h) - f''(x)(h, k)|}{(|h| + |k|)^2} \neq 0,$$

ami ellentmondás. $\square$

7.2.28. Taylor-formula valós értékű függvényekre. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, és tegyük fel, hogy f értelmezve van és folytonos a $\{x + th: 0 \leq t \leq 1\}$ zárt szakaszon, $\partial_h^k f$ értelmezve van és folytonos az $\{x + th: 0 \leq t < 1\}$ félig zárt szakaszon $0 < k < m$ -re, valamint $\partial_h^m f$ értelmezve van a $\{x + th: 0 < t < 1\}$ nyílt szakaszon. Ekkor van olyan $0 < \tau < 1$, hogy

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \partial_h^k f(x) + \frac{1}{m!} \partial_h^m f(x + \tau h).$$

Ez az m -edrendű Taylor-formula.

Bizonyítás. Legyen $g(t) = f(x + th)$, ekkor $g^{(k)}(t) = \partial_h^k f(x + th)$, így formulánk a g -re felírt szokásos Taylor-formula megfelelője. Bizonyításához legyen

$$M = g(1) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

és

$$h(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g^{(k)}(0)t^k}{k!} - Mt^m.$$

Legyen $\tau_0 = 1$. Mivel $0 = h(0) = h'(0) = \dots = h^{(m-1)}(0)$ és $h(1) = 0$, a Rolle-tételt felhasználva a $[0, \tau_{k-1}]$ intervallumon, teljes indukcióval kapjuk, hogy $1 \leq k \leq m$ -re létezik olyan $0 < \tau_k < \tau_{k-1} \leq 1$, hogy $h^{(k)}(\tau_k) = 0$. Legyen $\tau = \tau_m$. $\square$

7.2.29. Megjegyzés. A formula vektor értékű függvényekre nem marad igaz még az $n = 1$, $m = 1$ esetben sem, de a koordinátafüggvényekre alkalmazható (persze más és más τ -val).

7.2.30. Implicit függvény tétel. Legyen $(a, b) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$, és $(x, y) \mapsto F(x, y)$ az (a, b) egy környezetét $\mathbb{K}^m$ -be képező folytonos függvény, amelyre $F(a, b) = 0$. Ha F_y létezik és folytonos az (a, b) egy környezetében, továbbá az $F_y(a, b)$ lineáris operátor invertálható, akkor

- (1) léteznek olyan ε és δ pozitív számok, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ -re, amelyre $|x - a| \leq \varepsilon$, pontosan egy $y(x) \in \mathbb{K}^m$ létezik, amelyre $|y(x) - b| \leq \delta$ és $F(x, y(x)) = 0$;
- (2) $x \mapsto y(x)$ folytonos;
- (3) ha F az (a, b) egy környezetében folytonosan differenciálható, akkor az a egy környezetében $x \mapsto y(x)$ is folytonosan differenciálható, az $F_y(x, y(x))$ lineáris operátor invertálható, és

$$y'(x) = -F_y(x, y(x))^{-1} F_x(x, y(x)).$$

* **Bizonyítás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$, $b = 0$, és helyettesíthetjük F -et $F_y(0, 0)^{-1} F(x, y)$ -nal, azaz feltehetjük, hogy $F_y(0, 0) = \mathbb{I}$. Legyen $G(x, y) = y - F(x, y)$, és definiáljuk az $(x$ -től függő) T_x leképezést a $T_x(y) = G(x, y)$ összefüggéssel. Ekkor az $F(x, y) = 0$ egyenlet az $y = T_x(y)$ egyenlettel ekvivalens. Vizsgáljuk G -t. Mivel $G_y = \mathbb{I} - F_y$, a középérték-egyenlőtlenség szerint elég kicsiny ε és δ esetén, ha $|x| \leq \varepsilon$, $M = \mathbb{B}_\delta(0) = \{y: |y| \leq \delta\}$ és $y, z \in M$, akkor (mivel az y és z pontokat összekötő szakasz is az M gömbben van)

$$|G(x, y) - G(x, z)| \leq r(\varepsilon, \delta) |y - z|,$$

ahol

$$r(\varepsilon, \delta) = \sup_{|x| \leq \varepsilon, u \in M} \|G_y(x, u)\|,$$

és így

$$|G(x, y)| \leq |G(x, y) - G(x, 0)| + |G(x, 0)| \leq r(\varepsilon, \delta) |y| + |G(x, 0)|.$$

Mivel F és F_y , és így G és G_y is folytonosak, továbbá $G(0, 0) = 0$ és $G_y(0, 0) = 0$, az ε és δ csökkentésével elérhető, hogy $r(\varepsilon, \delta) \leq 1/2$ teljesüljön, valamint — ha kell, tovább csökkentve ε -t — hogy $|x| \leq \varepsilon$ esetén $|G(x, 0)| \leq \delta/2$ is fennálljon. Így ha $|x| \leq \varepsilon$ és $y, z \in M$, akkor

$$|T_x(y) - T_x(z)| \leq \frac{|y - z|}{2} \quad \text{és} \quad |T_x(y)| \leq \delta,$$

tehát $|x| \leq \varepsilon$ esetén T_x egy M -et önmagába képező kontrakció. A Banach-féle fixponttételből következik (1).

Ha $|x|, |x_0| \leq \varepsilon$, akkor $y_0 = y(x_0)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &= |T_x(y(x)) - T_{x_0}(y_0)| \leq |T_x(y(x)) - T_x(y_0)| + |T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)| \\ &\leq \frac{|y(x) - y_0|}{2} + |T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)|, \end{aligned}$$

amiből

$$|y(x) - y_0| \leq 2|T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)| = 2|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)| \rightarrow 0,$$

ha $x \rightarrow x_0$, azaz beláttuk (2)-t.

A $k = y(x + h) - y(x)$ jelöléssel a

$$0 = F(x + h, y(x) + k) - F(x, y(x))$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$0 = F_x(x, y(x))h + F_y(x, y(x))k + s(h, k),$$

ahol $|s(h, k)|/(|h| + |k|) \rightarrow 0$, amint $|h| + |k| \rightarrow 0$. Innen

$$k = -F_y(x, y(x))^{-1}F_x(x, y(x))h + q(h, k),$$

ahol $|q(h, k)|/(|h| + |k|) \rightarrow 0$, amint $|h| + |k| \rightarrow 0$. [Az $F_y(x, y(x))$ inverzének létezése az F_y , az y és a mátrixok inverzképzésének folytonosságából következik.] Mivel $h \rightarrow 0$ esetén $k \rightarrow 0$, ebből következik, hogy valamely c konstanssal $|k| \leq c|h| + |k|/2$, ha $|h|$ elég kicsi. Így $|k| \leq 2c|h|$, amiből y deriválható, és

$$y'(x) = -F_y(x, y(x))^{-1}F_x(x, y(x)).$$

Mivel F' , y és az inverzképzés folytonosak, a derivált folytonos. $\square$

7.2.31. Inverz függvény tétel. Legyen f a $\mathbb{K}^n$ egy a pontjának egy környezetét $\mathbb{K}^n$ -be képező leképezés. Ha f mindenütt folytonosan differenciálható és $f'(a)$ kölcsönösen egyértelmű, akkor f az a egy környezetében kölcsönösen egyértelmű, az inverze folytonosan differenciálható az $f(a)$ egy környezetében, és ott

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1},$$

vagy az $y = f(x)$ jelöléssel

$$(f^{-1})'(y) = \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1},$$

Bizonyítás. Legyen $b = f(a)$, $F(x, y) = y - f(x)$, és alkalmazzuk az implicit függvény tételt, x és y szerepét felcserélve. Azt kapjuk, hogy x lokálisan kifejezhető az y -nal, és mint y függvénye differenciálható, azaz f lokálisan invertálható, az inverze deriválható és deriváltja a megadott alakú. $\square$

*** 7.2.32. Megjegyzés.** Mátrix inverzének a képzése, azaz az $a \mapsto a^{-1}$, $\mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{K}^{n^2}$ leképezés, mivel az inverzmátrix koordinátái az eredeti mátrix koordinátáinak racionális törtfüggvényei, akárhányszor differenciálható. Ezt felhasználva könnyen kapjuk, hogy ha az implicit függvény tételben azt tesszük fel, hogy az F függvény k -szor folytonosan differenciálható, akkor y is k -szor folytonosan differenciálható ($1 \leq k \leq \infty$). Ezt felhasználva adódik, hogy ha az inverz függvény tételben azt tesszük fel, hogy az f függvény k -szor folytonosan differenciálható, akkor f^{-1} is k -szor folytonosan differenciálható ($1 \leq k \leq \infty$).

7.2.33. Szélsőérték szükséges feltétele. Legyen f az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$ -be képező leképezés. Ha f -nek minimuma van az x pontban, és $\partial_h f(x)$ létezik, akkor $\partial_h f(x) = 0$. Ha még $\partial_h^2 f(x)$ is létezik, akkor $\partial_h^2 f(x) \geq 0$.

A tételt gyakran lokálisan alkalmazzuk: ha f -nek lokális minimuma van az x pontban, azaz ha f -et megszorítva az x valamely környezetére, a kapott függvénynek minimuma van az x pontban, akkor erre a megszorításra alkalmazhatjuk a tételt. Maximum esetén $-f$ -re alkalmazandó.

Bizonyítás. A $g(t) = f(x + th)$ függvényre kell megmutatnunk, hogy $g'(0) = 0$ és $g''(0) \geq 0$. Ha $g'(0) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g(t) - g(0) < 0$, ami ellentmondás. A $g'(0) > 0$ eset negatív t -re ad ellentmondást. Ha $g''(0) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g'(t)/t < 0$. Ebből a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $0 < s < \varepsilon$ esetén $g(s) - g(0) < 0$, ami ellentmondás. $\square$

7.2.34. Lokális szélsőérték másodrendű elégséges feltétele. Legyen f az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$ -be képező leképezés. Ha f'' létezik és folytonos az x egy környezetében, továbbá $f'(x) = 0$, azaz $\nabla f(x) = 0$ és a $h \mapsto f''(x)hh$ kvadratikus forma pozitív definit, illetve negatív definit, akkor f -nek lokális minimuma, illetve maximuma van x -ben. Ha a kvadratikus forma indefinit, akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke x -ben.

* **Bizonyítás.** Ha a kvadratikus forma pozitív definit, akkor a folytonos

$$h \mapsto f''(x)hh$$

leképezés pozitív a $\{h: |h| = 1\}$ kompakt halmazon, így valamely $\varepsilon > 0$ alsó korlátja. Válasszunk olyan $\delta > 0$ -t, hogy $|y - x| \leq \delta$ esetén $\|f''(y) - f''(x)\| \leq \varepsilon/2$ teljesüljön. A Taylor-formula szerint $|h| = 1$, $0 < t \leq \delta$ esetén

$$\begin{aligned} f(x + th) - f(x) &= \frac{1}{2}t^2 f''(x + \theta h)hh \\ &= \frac{1}{2}t^2 f''(x)hh + \frac{1}{2}t^2 (f''(x + \theta h) - f''(x))hh, \end{aligned}$$

ahol $0 < \theta < t$. Mivel $f''(x)hh \geq \varepsilon$, az első tag legalább $\varepsilon t^2/2$. A második tag abszolút értéke viszont legfeljebb $\varepsilon t^2/4$, amiből $f(x + th) - f(x) > 0$. A negatív definit eset hasonlóan adódik. Az indefinit esetben van olyan $\varepsilon > 0$ és vannak olyan h_1, h_2 normált (1 hosszú) vektorok, hogy $f''(x)h_1h_1 \geq \varepsilon$, $f''(x)h_2h_2 \leq -\varepsilon$. A fenti számolással azt kapjuk, hogy $0 < t \leq \delta$ esetén $f(x + th_1) > f(x) > f(x + th_2)$. $\square$

* **7.2.35. Lokális szélsőérték magasabbrendű elégséges feltétele.** Legyen f az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$ -be képező leképezés. Tegyük fel, hogy $m > 1$ -re $f^{(m)}$ létezik és folytonos az x egy környezetében, $f^{(k)}(x) = 0$, ha $1 \leq k < m$ és $f^{(m)}(x) \neq 0$. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezés minden $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén pozitív, akkor f -nek lokális minimuma van x -ben. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezés minden $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén negatív, akkor f -nek lokális maximuma van x -ben. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezéshez van olyan $0 \neq h_1 \in \mathbb{R}^n$ is, amelyre pozitív, és van olyan $0 \neq h_2 \in \mathbb{R}^n$ is, amelyre negatív (mindig ez a helyzet, ha m páratlan), akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke x -ben.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló az előző tétel bizonyításához. $\square$

7.2.36. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése. Legyen G nyílt részhalma-za $\mathbb{R}^n$ -nek, $m < n$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálhatóak. Ha f -nek az c pontban szélsőértéke (azaz minimuma vagy maximuma) van a $g^{-1}(0)$ halmazon, és $g'(c)$ rangja m , akkor létezik $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ hogy

$$f'(c) - \lambda g'(c) = 0.$$

Az $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ jelöléssel a feltétel $F_x(c, \lambda) = 0$ alakban írható.

Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

* **Bizonyítás.** A koordinátákat alkalmasan csoportosítva, elérhetjük, hogy az

$$(u_1, \dots, u_{n-m}, v_1, \dots, v_m) = (u, v) \mapsto g(u, v), \quad c = (a, b)$$

jelöléssel $g_v(a, b)$ invertálható. Alkalmazva az implicit függvény tételt g -re egy olyan U környezetét kapjuk a -nak és egy azon értelmezett $u \mapsto v(u)$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre $g(u, v(u)) = 0$, ha $u \in U$. Ezzel kiküszöböltük g -t. Az $u \mapsto f(u, v(u))$ függvénynek szélsőértéke van a -ban és $b = v(a)$, így

$$0 = f_u(a, b) + f_v(a, b)v'(a).$$

Innen felhasználva az

$$v'(u) = -g_v(u, v(u))^{-1} g_u(u, v(u))$$

előállítás, $\lambda = f_u(a, b)g_v(a, b)^{-1}$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$0 = f_u(a, b) - f_v(a, b)g_v(a, b)^{-1}g_u(a, b) = f_u(a, b) - \lambda g_u(a, b).$$

A λ definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$f_v(a, b) - \lambda g_v(a, b) = 0.$$

A két utolsó összefüggés ekvivalens az állítással. $\square$

Az alábbi állítás azt mutatja, hogy a szélsőérték létezésének második deriváltakkal megfogalmazott elégséges feltétele érvényben marad feltételes szélsőérték-számításnál is. Az állítást nem bizonyítjuk, bizonyítása, valamint magasabb deriváltakkal megfogalmazott változata megtalálható Zeidler [63] könyvében, III. kötet, 290. o., 43.D tétel.

* **7.2.37. Feltételes szélsőérték másodrendű elégséges feltétele.** A Lagrange-elvnél használt jelölésekkel, az ottani feltételeken kívül tegyük fel azt is, hogy f és g kétszer folytonosan differenciálhatóak. Ha a $c \in G$ -hez van olyan $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ lineáris funkcionál, hogy $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$ és a $h \mapsto (f''(c) - \lambda g''(c))hh$ kvadratikus funkcionál pozitív definit, illetve negatív definit, akkor f -nek lokális minimuma, illetve lokális maximuma van c -ben. Az $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ jelöléssel a feltételek $F_x(c, \lambda) = 0$, illetve hogy az $F_{xx}(c, \lambda)$ bilineáris formához definit kvadratikus forma tartozik.

7.2.38. Szélsőérték-számítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Egy $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény lehetséges szélsőértékhelyeit 7.2.33 segítségével megkereshetjük, ha A nyílt halmaz. Ha A nem nyílt, akkor $\partial A \cap A$ pontjainak halmazát paraméteresen (egy függvény értékkészleteként) előállítva, vagy a Lagrange-elvet használva kereshetjük meg az ezen a halmazon belül lehetséges szélsőértékhelyet adó pontokat. Használható a Lagrange-elv alábbi, általánosabb változata is.

* **7.2.39. Lagrange-szorzók.** Az

$$(1) \quad \begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min, & x &\in G \\ f_j(x) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ f_j(x) &= 0, & j &= k+1, \dots, m \end{aligned}$$

feltételes minimumproblémát akarjuk tanulmányozni, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f_i: G \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Szükséges és elégséges feltételt is a $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *Lagrange-szorzók* segítségével adhatunk:

$$(2) \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(c) = 0,$$

$$(3) \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \quad \lambda_j f_j(c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$(4) \quad f_j(c) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad f_j(c) = 0, \quad j = k+1, \dots, m.$$

Nilván ha $f_j(c) < 0$, akkor $\lambda_j = 0$ kell legyen, ($j = 1, \dots, k$), ekkor azt mondjuk, hogy a feltétel *nem aktív*. Figyeljük meg, hogy ha egy pozitív konstanssal megszorozzuk a Lagrange-szorzókat, (2) és (3) ekvivalens feltételbe mennek át, így akár azt is feltehetjük, hogy vagy $\lambda_0 = 0$ (*elfajuló eset*), vagy $\lambda_0 = 1$ (*nemelfajuló eset*). Mindkét esetben (2), (3) és (4) összesen $n + m$ skalár egyenletet adnak c és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ meghatározásához.

A (2), (3) és (4) feltételek az L *Lagrange-függvény* segítségével is kifejezhetők, amelyet az

$$L(x, y) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x)$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Például a $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ jelöléssel (2) nyilván ekvivalens az $L_x(c, \lambda) = 0$ feltétellel, és ha $k = 0$, akkor (4) ekvivalens az $L_y(c, \lambda) = 0$ feltétellel.

* **7.2.40. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése, egyenlőtlenségeket is tartalmazó feltételrendszer.** Az előző pont jelöléseivel, tegyük fel, hogy $f_i: G \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$ folytonosan differenciálhatóak G -n.

Szükségesség: Ha $c \in G$ az (1) feltételes minimumprobléma megoldása, akkor létezik olyan nem mind nulla Lagrange-szorzók, hogy (2), (3) és (4) teljesül.

Elégségeség: A (2), (3) és (4) feltételekből következik, hogy c megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:

$$(5) \quad \lambda_0 = 1;$$

$$(6) \quad f_i, i = 0, 1, \dots, k \text{ és } x \mapsto \sum_{i=k+1}^m \lambda_i f_i(x) \text{ konvexek.}$$

A tételt és bizonyítását Páles [47] jegyzetéből vettük át. A bizonyítás nem használja az implicit függvény tételt. Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

Bizonyítás. Az elégségeséget bizonyítása teljesen elemi. Legyen

$$\varphi(t) = L(c + t(x - c), \lambda),$$

ahol $t \in [0, 1]$ és $x \in U$ rögzített. A φ függvény konvex, és (2) szerint $\varphi'(0) \geq 0$, ezért a $[0, 1]$ -en φ -nek minimuma van 0-ban. Innen következik, hogy $L(c, \lambda) \leq L(x, \lambda)$, ha $x \in G$. Mivel $\lambda_0 = 1$, a (3) és (4) feltételekből $f_0(c) = L(c, \lambda)$. Minden x -re, amely teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket, $L(x, \lambda) \leq f_0(x)$, mivel $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, k$). Innen $f_0(c) \leq f_0(x)$.

A szükségeség bizonyításában az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és hogy $f_0(c) = 0$, $f_i(c) = 0$, ha $1 \leq i \leq r$ és $f_i(c) < 0$, ha $r < i \leq k$. Válasszuk úgy az $\varepsilon_0 > 0$ értéket, hogy a $\mathbb{B}_{\varepsilon_0}(0)$ zárt gömb benne legyen G -ben, és hogy az f_i , $r < i \leq k$ függvények mind negatívak legyenek ezen a gömbön.

Első lépésként azt fogjuk megmutatni, hogy bármely $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ -hoz van olyan N , hogy

$$(1) \quad f_0(x) + |x|^2 + N \left(\sum_{i=1}^k (f_i^+(x))^2 + \sum_{i=k+1}^m (f_i(x))^2 \right) > 0,$$

ha $|x| = \varepsilon$. Indirekt módon bizonyítunk. Ha az állítás nem teljesül, akkor létezik olyan monoton növekedő N_j sorozat és olyan x_j sorozat, amelynek elemei ε normájúak, és

$$(2) \quad f_0(x_j) + |x_j|^2 \leq -N_j \left(\sum_{i=1}^k (f_i^+(x_j))^2 + \sum_{i=k+1}^m (f_i(x_j))^2 \right)$$

minden j -re. Az x_j sorozat valamely részsorozata konvergál valamely x^* ponthoz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az egész sorozat. Ekkor $|x^*| = \varepsilon$ és $f_0(x^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_0(x_j)$. Elosztva az előző egyenlőtlenség mindkét oldalát $-N_j$ -vel és határátmenetet véve

$$\sum_{i=1}^k (f_i^+(x^*))^2 + \sum_{i=k+1}^m (f_i(x^*))^2 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy x^* is teljesíti a minimumfeladat feltételeit, így $f_0(x^*) \geq f_0(c)$. Ez azonban ellentmond a (2) egyenlőtlenségből következő $f_0(x^*) \leq -\varepsilon^2$ egyenlőtlenségnek.

Második lépésként azt mutatjuk meg, hogy bármely $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ esetén létezik egy x^* pont és egy $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ egységvektor, amelynek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ koordinátái nemnegatívak úgy, hogy

$$(3) \quad \lambda_0 \nabla f(x^*) + 2\lambda_0 x^* + \sum_{i=0}^m \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0.$$

Értelmezzük az első lépésben szereplő N -nel a

$$\varphi(x) = f_0(x) + |x|^2 + N \left(\sum_{i=1}^k (f_i^+(x))^2 + \sum_{i=k+1}^m (f_i(x))^2 \right)$$

függvényt. Létezik olyan x^* pont a $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ zárt gömbben, amelyre φ értéke minimális. Erre $\varphi(x^*) \leq \varphi(0) = 0$, ezért (1) miatt $|x| = \varepsilon$ nem teljesülhet, tehát x^* a gömb belsejében van, így φ gradiense x^* -ban eltűnik:

$$(4) \quad \nabla f_0(x^*) + 2x^* + 2N \left(\sum_{i=1}^k f_i^+(x^*) \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=k+1}^m f_i(x^*) \nabla f_i(x^*) \right) = 0.$$

Legyen

$$L = 1 + \sum_{i=1}^k (2N f_i^+(x^*))^2 + \sum_{i=k+1}^m (2N f_i(x^*))^2,$$

és legyen $\lambda_0 = 1/L$, $\lambda_i = 2N f_i^+(x^*)/L$, ha $1 \leq i \leq k$ és $\lambda_i = 2N f_i(x^*)/L$, ha $k < i \leq m$. (Vegyük észre, hogy $\lambda_i = 0$, ha $r < i \leq k$, mivel ekkor f_i negatív.) A $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vektor egységvektor, és ha (4) mindkét oldalát osztjuk L -lel, azt kapjuk, hogy (3) fennáll.

Végül válasszunk egy $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ nullához tartó sorozatot. A megfelelő x_m^* pontok és $\lambda^{(m)}$ vektorok egy konvergens részsorozatát véve, határátmenettel a tétel állítását kapjuk. $\square$

7.2.41. Következmény. Ha $f_i(x) = a_i x - b_i$, ahol a_i sormátrix, $i = 1, \dots, m$, akkor a szükségességnél a Lagrange-szorók választhatók úgy, hogy $\lambda_0 = 1$ legyen.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy minden feltétel egyenlőtlenség, mert egy $a_i x - b_i = 0$ alakú feltétel helyett írhatunk egy $a_i x - b_i \leq 0$, $-(a_i x - b_i) \geq 0$ feltétel párt. Feltehetjük, hogy csak az első r feltétel aktív, azaz $f_i(c) < 0$, ha $r < i \leq m$. Így $\lambda_i = 0$, ha $i > r$, és a (2) feltétel $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r = 0$, ahol $a_0 = f'_0(c)$. Tegyük fel, hogy $\lambda_0 = 0$. Ha van olyan $h \in \mathbb{R}^n$, hogy $a_i h \leq 0$, $i = 1, \dots, r$ és $a_0 h < 0$, akkor elég kis pozitív t -re $x = c + th \in G$ még mindig teljesíti a mellékfeltételeket, de $f_0(x) < f_0(c)$, azaz c nem minimum. Tehát nincs ilyen h . Ekkor viszont a Farkas-lemma szerint (lásd kicsit később) léteznek olyan nemnegatív μ_i számok, hogy $a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r = 0$. A $\mu_i = 0$, ha $i > r$ választással, a két egyenletet összeadva

$$a_0 + (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) a_k = 0,$$

valamint (3) és (4) is teljesülnek λ_i helyett $\lambda_i + \mu_i$ -vel.

* **7.2.42. Elválasztási tétel.** Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt, konvex halmaz, $a \in \mathbb{R}^n$. Ekkor létezik K -ban (az $\mathbb{R}^n$ szokásos belső szorzatából származó normára nézve) a -t legjobban approximáló b elem, egyértelmű, és $\langle x - b, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$ -ra.

Ha $a \notin K$, akkor azt mondjuk, hogy az $\langle x - b, a - b \rangle = 0$ hipersík elválasztja K pontjait a -tól: a belső szorzat $x = a$ -ra pozitív, míg $x \in K$ -ra nem pozitív. Szemléletesen, a a hipersík egyik oldalán van, míg K a másikon.

Bizonyítás. Legyen $D = d(a, K)$. A $D = 0$ eset triviális, $b = a$. Egyébként van olyan $b_n \in K$ sorozat, hogy $\|b_n - a\| \rightarrow D$. A paralelogramma-azonosság szerint

$$2\|b_n - a\|^2 + 2\|b_m - a\|^2 = \|b_n - b_m\|^2 + \|b_n + b_m - 2a\|^2 \geq \|b_n - b_m\|^2 + 4D^2,$$

mivel $(b_n + b_m)/2 \in K$. Innen viszont $\|b_n - b_m\|^2 \rightarrow 0$, azaz b_n Cauchy-sorozat. Legyen b a határértéke, erre a norma folytonossága miatt $\|b - a\| = D$. Ha $x \in K$ tetszőleges, $x \neq b$, akkor $x - b$ és $a - b$ nem zárhatnak be hegyes szöget, mert akkor b -ből x felé haladva az összekötő szakaszon, differenciálással adódik, hogy kezdetben a távolság csökkenne. Ha viszont nem hegyesszöget zárnak be, akkor a távolság nő, amiből következik az egyértelműség. $\square$

* **7.2.43. Farkas-lemma.** Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $a_0, a_1, \dots, a_m$ az X' duális tér elemei. A következő két feltétel ekvivalens:

- (1) minden $h \in X$ -re, amire $a_i h \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, az is teljesül, hogy $a_0 h \geq 0$;
- (2) léteznek olyan $\mu_1, \dots, \mu_m$ nemnegatív valós számok, hogy $a_0 = \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.

Bizonyítás. Nyilván (2)-ből következik (1). Tegyük fel, hogy (2) nem teljesül. Jelölje K az $a_1, \dots, a_m$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációinak halmazát. Nyilván K konvex. Megmutatjuk, hogy K zárt. Tartalmazhat alteret: legyen L egy maximális dimenziós altere. Az L egyértelmű, mert ha lenne másik ugyanilyen dimenziós altér is K -ban, akkor azok összege nagyobb dimenziós altere lenne K -nak. Tekintsük azon a_i -ket, amelyek nincsenek L -ben. Feltehetjük, hogy ezek $a_1, \dots, a_k$. Jelölje K_1 ezen vektorok konvex kombinációinak halmazát (ha $k = 0$, akkor K_1 üres). Ha y a K_1 egy torlódási pontja, akkor van olyan $y_n \in K$ sorozat, amelyre $y_n \rightarrow y$. A kombináló együtthatók korlátos sorozatot alkotnak $\mathbb{R}^k$ -ban, aminek a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint van konvergens részsorozata. Az y_n megfelelő részsorozata együtthatóinak összege 1, így adódik, hogy $y \in K_1$. Megmutatjuk, hogy K_1 diszjunkt L -től, amiből távolságuk pozitív, mert L zárt, K_1 pedig kompakt. Ha nem így lenne, akkor $a_1, \dots, a_k$ valamely konvex kombinációja L -ben lenne. Feltehetjük, hogy a konvex kombinációban $a_1, \dots, a_r$ együtthatói a pozitívak. Ha $r = 1$, akkor $a_1 \in L$, ellentmondás. Legyen $z \in L$, $z = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$ ez a kombináció. Legyen $z(t) = t a_1 + (1-t)y$, ahol $y = (\alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r) / (1 - \alpha_1) \in K_1$. Ha valamely $t \neq \alpha_1$ -re $z(t) \in L$, akkor minden $0 \leq t \leq 1$ -re is, így $\alpha_1 \in L$, ami ellentmondás. Ha viszont nem ez a helyzet, akkor a $z(t) - z$, $0 \leq t \leq 1$ szakasznak $t = \alpha_1$ -re pontja az origó, és más pontja nincs L -ben. Mivel a szakasz pontjainak nemnegatív konstansszorosai is K -ban vannak, ez ellentmond annak, hogy L dimenziója maximális. Legyen most x egy érintkezési pontja K -nak, és $x_n \in K$ egy sorozat, amelyre $x_n \rightarrow x$. Legyen $x_n = \lambda_n y_n + z_n$, ahol $\lambda_n y_n$ az $a_1, \dots, a_k$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja, λ_n a kombináló együtthatók összege, $y_n \in K_1$ (tetszőleges, ha $\lambda_n = 0$) és $z_n \in L$; a felírás nem egyértelmű. Ha λ_n nem lenne korlátos, akkor valamely részsorozata $+\infty$ -hez tartana; feltehetjük, hogy ez az eredeti sorozat. Mivel y_n egy korlátos és zárt halmazban van, lenne olyan részsorozata, amely konvergens; ismét feltehetjük, hogy ez az egész sorozat. De ekkor $z_n / \lambda_n - y_n = x_n / \lambda_n \rightarrow 0$, ami ellentmond annak, hogy L és K_1 távolsága pozitív. Most hasonló gondolatmenettel, ha kell, részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $\lambda_n \rightarrow \lambda$ és $y_n \rightarrow y \in K_1$. Ekkor z_n is konvergens, $z_n \rightarrow z \in L$. Ez azt jelenti, hogy $x = \lambda y + z \in K$.

Tehát K zárt konvex halmaz X' -ben, $a \notin K$. Az előző tétel szerint van olyan $b \in K$, hogy $\langle x - b, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$ -ra. Az $x = 0$ helyettesítéssel $-\langle b, a - b \rangle \leq 0$, az $x = 2b$ helyettesítéssel pedig $\langle b, a - b \rangle \leq 0$, azaz $\langle b, a - b \rangle = 0$, így $\langle x, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$ -ra. Mivel a bal oldalon egy lineáris funkcionál áll, és X'' azonosítható X -szel, van olyan $h \in X$, hogy $xh \leq 0$ minden $x \in K$ -ra, speciálisan $a_1, \dots, a_m$ -re is, de $(a - b)h < 0$. Mivel $b \in K$, $bh \leq 0$, így $ah > 0$. Áttérve $-h$ -ra kapjuk, hogy (1) nem teljesül. $\square$

* **7.2.44. Következmény.** A következő két feltétel ekvivalens:

- (1) minden $h \in X$ -re, amire $h \geq 0$ és $a_i h = 0$, $i = 1, \dots, n$, az is teljesül, hogy $a_0 h \geq 0$;
- (2) léteznek olyan $\mu_1, \dots, \mu_m$ valós számok, hogy $a_0 \leq \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.

Bizonyítás. Legyen a az a mátrix, amelynek sorai $a_1, \dots, a_m$, b pedig az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az a , a $-a$ és az m -szer m -es δ egységmátrixot egymás alá

helyezzük. Ekkor (2) azzal ekvivalens, hogy $y'b = a_0$ -nak van $y \geq 0$ megoldása, ami a lemmát alkalmazva b soraira, ekvivalens (1)-gyel. $\square$

* **7.2.45. Primál-duál feladatpár.** A lineáris programozás alapfeladatát a megfogalmazásakor is használt jelölésekkel tömören

$$d + c'x \rightarrow \max, \quad x \geq 0, \quad ax \leq b$$

alakban írhatjuk, ahol $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopmátrixok és a egy $m \times n$ -es mátrix. Tekintsük ehhez a *primál feladathoz* a

$$d + b'y \rightarrow \min, \quad y \geq 0, \quad a'y \geq c$$

duál feladatot, ahol $y \in \mathbb{R}^m$. Ez nyilván

$$-d - b'y \rightarrow \max, \quad y \geq 0, \quad -a'y \leq -c$$

alakban írható, aminek a duálisa

$$-d - c'x \rightarrow \min, \quad x \geq 0, \quad -a''x \geq -b,$$

ekvivalens az eredeti feladattal. A két feladat kapcsolatának vizsgálatához szükségünk lesz egy tételre.

* **7.2.46. Feladat [6].** Az előző pont jelöléseivel, adjunk példát, amiben $n, m \leq 2$ és

- (1) mindkét feladatnak van megengedett megoldása;
- (2) csak a primál feladatnak van megengedett megoldása;
- (3) csak a duál feladatnak van megengedett megoldása;
- (4) egyik feladatnak sincs megengedett megoldása.

* **7.2.47. Nyeregpont tétel.** Legyenek X és Y nem üres halmazok és $L: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $F(x) = \inf_{y \in Y} L(x, y)$ és $G(y) = \sup_{x \in X} L(x, y)$, továbbá $\alpha = \sup_{x \in X} F(x)$ és $\beta = \inf_{y \in Y} G(y)$ bővített valós értékek. Ekkor $\alpha \leq \beta$ és az alábbi két állítás ekvivalens:

- (1) van olyan $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, hogy $L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$ minden $x \in X$, $y \in Y$ -ra (nyeregpont);
 - (2) $F(x_0) = \alpha$, $G(y_0) = \beta$, $\alpha = \beta$.
- Ha (1) vagy (2) fennáll, akkor
- (3) $\alpha = F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) = \beta$.

Bizonyítás. Mivel $G(y) \geq L(x, y)$ minden $x \in X$ és $y \in Y$ -ra,

$$\beta = \inf_{y \in Y} G(y) \geq \inf_{y \in Y} L(x, y) = F(x)$$

minden $x \in X$ -re, ahonnan $\alpha \leq \beta$ következik.

Ha (2) fennáll, akkor

$$\beta = G(y_0) = \sup_{x \in X} L(x, y_0) \geq L(x_0, y_0) \geq \inf_{y \in Y} L(x_0, y) = F(x_0) = \alpha,$$

így mindenütt egyenlőség áll, amiből (1) következik.

Ha (1) fennáll, akkor

$$F(x_0) = \inf_{y \in Y} L(x_0, y) = L(x_0, y_0) = \sup_{x \in X} L(x, y_0) = G(y_0),$$

így

$$\alpha \geq F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) \geq \beta,$$

amivel (2)-t és (3)-at is beláttuk.

*** 7.2.48. A lineáris programozás főtétele.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, ax \leq b\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0, a'y \geq c\}$, $\alpha = \sup_{x \in X} c'x + d$, és $\beta = \inf_{y \in Y} b'y + d$, akkor $\alpha \leq \beta$ és az alábbiak ekvivalensek:

- (1) a primál feladatnak van x_0 optimális megoldása;
- (2) a duál feladatnak van y_0 optimális megoldása;
- (3) mindkét feladatnak van megengedett megoldása.

Továbbá ha (1), (2) teljesülnek, akkor x_0, y_0 az $L(x, y) = d + c'x + b'y - y'ax$, $x \in X$, $y \in Y$ függvénynek nyeregpontja, $\alpha = \beta = y_0'ax_0$.

Tehát egy lineáris programozási problémának, ha van megengedett megoldása, akkor vagy van optimális megoldása vagy a célfüggvény nem korlátos. A szimplex módszer eldönti, melyik eset áll fenn. Persze az is lehetséges, hogy sem a primál, sem a duál feladatnak nincs megengedett megoldása.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül: a célfüggvény $-d - c'x$ ellentettjének van minimuma az $ax - b \leq 0$, $-e_j x \leq 0$, $j = 1, \dots, n$ feltételek mellett, ahol e_i a sorvektorok terének szokásos bázisa, és $'$ a transzponálás. Ha a_i az a mátrix i -edik sora, akkor az $ax \leq b$ feltétel az $a_i x - b_i$, $i = 1, \dots, m$ feltételekkel ekvivalens. Jelöljön x_0 egy optimális megoldást, és alkalmazzuk a Lagrange-elv egyenlőtlenséges alakjának következményét. Kicsit más jelölésekkel azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, m+n$ Lagrange-szorozók, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{m+j} e_j = 0,$$

továbbá $\lambda_i(a_i x_0 - b_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$ és $\lambda_{m+j} = 0$, ha az x_0 vektor j -edik koordinátája nem nulla. Ez azt jelenti, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$$

minden koordinátája nemnegatív, és nulla, ha az x_0 vektor j -edik koordinátája nem nulla, azaz tömören

$$-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \geq 0 \quad \text{és} \quad \left(-c' + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i\right) x_0 = 0.$$

Tehát bevezetve az y_0 oszlop mátrixot $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ koordinátákkal, $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, és

$$(4) \quad -c' + y_0' a \geq 0, \quad (-c' + y_0' a) x_0 = 0, \quad ax_0 - b \leq 0, \quad y_0'(ax_0 - b) = 0.$$

Tekintsük az $L(x, y) = d + c'x - y'(ax - b)$ Lagrange-függvényt, ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, és alkalmazzuk a nyeregpont-tételt. Most

$$F(x) = \inf_{y \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} d + c'x, & \text{ha } ax \leq b, \\ -\infty & \text{egyébként;} \end{cases}$$

valóban, ha $ax - b \leq 0$, akkor $-y'(ax - b)$ minimális értéke 0, ha viszont $ax - b$ valamelyik koordinátája pozitív, akkor y megfelelő koordinátáját elég nagynak, a többit nullának választva, $-y'(ax - b)$ bármilyen számnál kisebb lehet. Így $\alpha = \sup_{x \geq 0} F(x)$. Mivel $L(x, y) = d + b'y + x'(c - a'y)$, hasonlóan

$$G(y) = \sup_{x \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} d + b'y, & \text{ha } a'y \geq c, \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így $\beta = \inf_{y \geq 0} G(y) \geq \sup_{x \geq 0} F(x) = \alpha$. A (4) összefüggésekből egyrészt $c'x - y'_0 ax \leq 0 = c'x_0 - y'_0 ax_0$, ahonnan $L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0)$, másrészt $y'b - y'ax_0 \geq 0 = y'_0(b - ax_0)$, ahonnan $L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$. Ez azt jelenti, hogy x_0, y_0 nyeregpont, azaz x_0 az F -nek maximumhelye, y_0 a G -nek minimumhelye és $\alpha = \beta$. Tehát (1)-ből következik (2), és a szélsőértékek egyenlősége. A dualitás miatt (2)-ből is következik (1). Ha csak a megengedett megoldások kisebb X, Y halmazain tekintjük L -et, x_0, y_0 ott is nyeregpont. Az világos, hogy (1)-ből és (2)-ből következik (3). Azt kell megmutatnunk, hogy (3)-ból következik (1), vagyis ha a $d + c'x$ célfüggvény felülről korlátos, akkor felveszi az α szuprémumát. Tegyük fel indirekt, hogy nem. Feltehetjük, hogy $d = 0$ és az $x \geq 0$ feltételrendszert belefoglalhatjuk az $ax \leq b$ feltételekbe, ha a alá írjuk egy n -szer n -es δ egységmátrix elmentettjét, b -t pedig nullákkal egészítjük ki. Az indirekt feltevés szerint nincs olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $ax \leq b$ és $c'x \geq \alpha$. Ekkor viszont a Farkas-lemma következménye szerint (azt $a_0 = (b', \alpha)$ -ra, az a mátrix soraira és $-c'$ -re alkalmazva) van olyan $y \geq 0$ és $\lambda \geq 0$, hogy $y'a - \lambda c' = 0$, de $y'b - \lambda \alpha < 0$. Innen

$$\lambda \alpha = \lambda \sup\{c'x : ax \leq b\} = \sup\{\lambda c'x : ax \leq b\} = \sup\{y'ax : ax \leq b\} \\ \leq y'b < \lambda \alpha. \quad \square$$

→ **7.2.49. Feladat** [7]. Határozzuk meg az $x \mapsto \|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ leképezés differenciálját és gradiensét.

→ **7.2.50. Feladat** [6]. Mutassuk meg, hogy a

$$f(t) = (\cos t, \sin t),$$

$t \in \mathbb{R}$ körvonal esetén nincs olyan $t \in \mathbb{R}$, amelyre $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(t)$, azaz a Lagrange-féle középértéktétel nem teljesül vektor értékű függvényekre.

→ **7.2.51. Feladat** [8]. Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy f irány menti deriváltjai mindenütt léteznek, de a $h \mapsto \partial_h f(0)$ leképezés nem lineáris.

→ **7.2.52. Feladat** [8]. Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = x^3y/(x^4 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy az irány menti deriváltak léteznek az origóban, a $h \mapsto \partial_h f(0)$ leképezés lineáris, de f nem differenciálható az origóban.

→ **7.2.53. Feladat** [9]. Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy az összes második parciális deriváltak léteznek, de a vegyes parciális deriváltak nem egyeznek meg az origóban.

7.2.54. Felületek. Egy $\mathbb{R}^m$ -beli n dimenziós *felület* alatt $\mathbb{R}^n$ valamely D nyílt halmazának egy $g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos leképezését értjük. Ha g Lipschitz-függvény, akkor *Lipschitz-felületről* beszélünk. Ha g folytonosan differenciálható és minden $x \in D$ -re a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_n g(x)$$

vektorok lineárisan függetlenek (ez csak akkor lehetséges, ha $m \geq n$), akkor *sima felületről* beszélünk.

Ha $G \subset \mathbb{R}^n$ egy másik nyílt halmaz, és $\varphi: G \rightarrow D$ egy kölcsönösen egyértelmű, inverzével együtt folytonosan differenciálható leképezése G -nek D -re, akkor a $g \circ \varphi$ függvényt a g sima felület egy *ekvivalens előállításának* nevezzük.

7.2.55. Felületek előállítási módjai. Először kétdimenziós $\mathbb{R}^3$ -beli felületekre szorítkozunk. Ha $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy sima felület, $u \in D$, akkor ez az úgynevezett *Gauss-féle előállítás* koordinátáinként kiírva

$$r_1 = g_1(u_1, u_2)$$

$$r_2 = g_2(u_1, u_2)$$

$$r_3 = g_3(u_1, u_2)$$

alakú. Az a feltétel, hogy $\partial_1 g(u)$ és $\partial_2 g(u)$ lineárisan függetlenek, úgy is kifejezhető, hogy a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial g_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2 minden u -ra. Ez azt jelenti, hogy lokálisan u_1 és u_2 kiküszöbölhető a fenti egyenletrendszerből (valamelyik két egyenletből kifejezve u_1 -et és u_2 -t, és beírva a harmadikba), és így $r = (r_1, r_2, r_3)$ valamelyik koordinátája kifejezhető a másik kettővel (*Euler–Monge-féle* vagy *explicit előállítás*). Ha például r_3 kifejezhető r_1, r_2 -vel, akkor lokálisan egy $r_3 = f(r_1, r_2)$ alakú explicit előállításra térhetünk át. Természetesen egy explicit előállításról mindig könnyen visszatérhetünk a Gauss-féle előállításra.

Ha valamelyik parciális derivált nullától különböző, egy $F(r_1, r_2, r_3) = 0$ alakú egyenlet, ahol $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ és F valós értékű, folytonosan differenciálható függvény, lokálisan egy sima felületet ad meg, mert az implicit függvény tétel szerint lokálisan áttérhetünk explicit előállításra.

Hasonló állítás igaz más dimenziókra is. Például egy $\mathbb{R}^3$ -beli egydimenziós sima „felület”, azaz egy sima görbe esetén a Gauss-féle $r = g(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}^3$ előállítás részletesen kiírva

$$r_1 = g_1(t)$$

$$r_2 = g_2(t)$$

$$r_3 = g_3(t)$$

alakú. Ha $t \in D$, és így az érintővektor nem nulla, akkor lokálisan t kiküszöbölhető, és r_1, r_2, r_3 közül az egyikkel kifejezhető a másik kettő, azaz explicit előállításra térhetünk át. Megint az implicit függvény tétel szerint egy $F_1(r_1, r_2, r_3) = 0$, $F_2(r_1, r_2, r_3) = 0$ alakú egyenletrendszer, ahol $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ és F_1, F_2 valós értékű, folytonosan differenciálható függvények, valamint a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} & \frac{\partial F_1}{\partial r_2} & \frac{\partial F_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r_1} & \frac{\partial F_2}{\partial r_2} & \frac{\partial F_2}{\partial r_3} \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2, lokálisan egy sima egydimenziós felületet, azaz sima görbét ad meg, mert lokálisan áttérhetünk explicit előállításra.

7.2.56. Felületi normális, érintősík, felületi görbék. Ha $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy kétdimenziós sima felület, $u \in D$, akkor a $\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)$ vektort *felületi normálisnak*, az

$$n(u) = \frac{\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)}{|\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)|}$$

vektort pedig *felületi normális egységvektornak* fogjuk nevezni. Legtöbbször nem írjuk ki a változótól való függést. Világos, hogy $\partial_1 r$, $\partial_2 r$ és n egy (pozitív irányítású) bázist alkotnak. Az $r(u)$ ponton átmenő, $\langle p - r(u), n(u) \rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}^3$ egyenletű síkot $r(u)$ -beli [vagy $r(u)$ -n átmenő] *érintősíknak* nevezzük. Ez az $r(u)$ pont körül elsőrendben közelíti a felületdarabot.

Egy $r \circ u$ alakban előállítható görbét, ahol $u: [a, b] \rightarrow D$ egy görbe, *felületi görbének* fogunk nevezni. Ha $u = (u_1, u_2)$ folytonosan differenciálható, akkor a felületi görbe is, és érintővektora

$$(r \circ u)' = u'_1 \partial_1 r + u'_2 \partial_2 r,$$

azaz egy, az $r(u(t))$ pontból kiinduló, az érintősíkban haladó vektor. Felületi görbék például az úgynevezett paramétervonalak, amelyeknek egyenlete $u_1(t) = t$, u_2 konstans, illetve u_1 konstans, $u_2(t) = t$.

*** 7.2.57. Approximáció.** Az approximáció feladata a következő. Legyen adott egy H halmazon értelmezett valós f függvény. Ismerjük $f(x)$ értékeit a H halmazon, vagy annak adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontjaiban. Keresendő egy m paraméteres $g(x, a_1, \dots, a_m)$ függvény-seregéből az a függvény, amely f -et a „legjobban közelíti”. Általában olyan függvények közül választjuk a közelítő függvényt, amelyek értékei könnyen számíthatók. Mivel számítógépen közvetlenül csak a négy alapművelet végezhető el, előnyben részesítjük a polinom és racionális törtfüggvény közelítéseket. Lehetséges az is, hogy érdemes H -t kisebb részekre osztani, és a részeken külön-külön keresni a közelítéseket. Egy adott halmazon való közelítést helyettesítéssel egy másik halmazon való közelítésre vezethetünk vissza, például bármilyen korlátos zárt intervallumon való közelítés lineáris helyettesítéssel visszavezethető a $[0, 1]$ vagy a $[-1, 1]$ intervallumon való közelítésre. A lineáris helyettesítés előnye, hogy a polinomok polinomba, racionális törtfüggvények racionális törtfüggvénybe mennek át, és a foksámok sem változnak.

Attól függően, hogy f és a közelítő függvény eltérését hogyan mérjük, különböző eseteket kapunk. Ha azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban megegyezzen f -fel, kapjuk az *interpoláció* esetét. Ha azt követeljük meg, hogy az

$x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban mért eltérések négyzetösszege minimális legyen, akkor a *legkisebb négyzetes közelítést* kapjuk. Végül, ha az egész H -n vett eltérés szuprémumát minimalizáljuk, akkor az *egyenletesen legjobb közelítést* kapjuk.

Ha az f függvény értékeit csak az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban ismerjük, akkor az interpoláció a legkézenfekvőbb lehetőség. A legáltalánosabb esetben az

$$f(x_j) = g(x_j, a_1, \dots, a_m), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az $a_1, \dots, a_m$ paraméterekre megoldva kapunk egy interpoláló függvényt. Például, ha $g_1, \dots, g_m$ adott és

$$g(x, a_1, \dots, a_m) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_m g_m(x),$$

akkor lineáris egyenletrendszert kapunk. A legfontosabb az az eset, amikor f egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvény, $x_1, x_2, \dots, x_n$ az $[a, b]$ pontjai, interpoláló függvényként pedig n -nél alacsonyabb fokú polinomot keresünk: ez a Lagrange-interpoláció, amit már tanultunk.

Sokszor a közelítendő függvény mért értékei elég nagy hibát tartalmaznak. Ilyenkor nem célszerű azt kívánni, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban megegyezzen a mért értékekkel, mert akkor a hibát is tartalmazza. Elég azt megkövetelni, hogy a mért értékek közelében legyen. A *legkisebb négyzetek módszere* értelmében tehát az $a_1, \dots, a_m$ paramétereket úgy kell megválasztani, hogy ha $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ a mért értékek, akkor a

$$\Phi(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n w_i (f(x_i) - g(x_i, a_1, \dots, a_m))^2$$

eltérés minimális legyen. Itt a w_i -k pozitív súlyok, amelyeket az $f(x_i)$ értékek szórás-négyzete reciprokának célszerű választani, mert minél pontatlanabb a mért érték, annál kisebb súllyal kívánjuk figyelembe venni. Ezt a minimumot a $\nabla \Phi(a_1, \dots, a_m) = 0$ egyenletrendszer megoldásával kereshetjük.

*** 7.2.58. A Newton-módszer.** Ha $f \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ és az $f(x) = 0$ egyenletet kívánjuk megoldani, természetes módon adódik a Newton-módszer: az egyenletet egy adott x_n érték birtokában az f függvényt lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből a következő közelítésre az

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

egyenlet adódik, így x_{n+1} meghatározásához egy lineáris egyenletet kell megoldani, például Gauss-eliminációval. Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens.

Gyakran használatos a módosított Newton-módszer is, ennél a derivált kiszámítására és invertálására csak egyszer van szükség, de a konvergencia lelassul:

$$\Delta x_n = -(f'(x_0))^{-1} f(x_n).$$

Néhány lépés után újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A fékezett Newton-módszernél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletből meghatározzuk Δx_n -et, de $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \Delta x_n$, ahol az $0 < \alpha_n \leq 1$ relaxációs paramétert úgy választjuk, hogy $\|f(x_{n+1})\|^2 < \|f(x_n)\|^2$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha az egyenlet megoldható: Az $\|f\|^2$ -nek a Δx_n irány menti deriváltja az x_n helyen

$$2\langle f(x_n), f'(x_n)\Delta x_n \rangle = -2\|f(x_n)\|^2,$$

így

$$\frac{\|f(x_n + \alpha \Delta x_n)\|^2 - \|f(x_n)\|^2}{\alpha \|f(x_n)\|^2} \rightarrow -2,$$

ha $\alpha \rightarrow 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1 - \sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \leq \sigma \leq 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n -et, rendszerint szorozzuk ϱ -val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0,3 \leq \varrho \leq 0,8$.

A módosított Newton-módszerből is képezhető fékezett változat, de itt már nem biztos, hogy a feltétel teljesíthető, esetleg újra kell számolni a deriváltat.

* **7.2.59. Kvázi Newton-módszer.** A Newton-módszernél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletet kell megoldanunk minden lépésben. A kvázi Newton-módszernél x_{n+1} értékét az $A_n \Delta x_n = -f(x_n)$ egyenlet megoldásával nyerjük, ahol A_n az $f'(x_n)$ egy közelítése (itt is lehetséges fékezett változat). A közelítést nyerhetjük például differenciákkal közelítve a parciális deriváltakat. Ha minden irányban a differencia lépésköze konstansszor $|x_n - x|$ alatt marad, ahol x a gyök, akkor a konvergencia elméletileg kvadrátikus, de a kerekítési hibák veszélyesek lehetnek. A Broyden-módszernél $A_0 = f'(x_0)$, és A_{n+1} -et úgy próbáljuk meghatározni, hogy $A_{n+1}\Delta x_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = \Delta f(x_n)$ teljesüljön. Mivel ez az egyenlet alulhatározott, úgy választunk, hogy $A_{n+1} - A_n = \Delta A_n$ mátrixának normája (a szokásos bázisban) minimális legyen. Ez akkor teljesül, ha ΔA_n mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n][\Delta x_n]'}{|\Delta x_n|^2}.$$

A konvergencia lineárisnál jobb, bár nem biztos, hogy $A_n \rightarrow f'(x)$. Lehetőség van mindjárt A_{n+1}^{-1} számítására: a szokásos bázisban $A_{n+1}^{-1} - A_n^{-1} = \Delta A_n^{-1}$ mátrixa

$$\frac{[\Delta x_n - A_n^{-1} \Delta f(x_n)][\Delta x_n]'}{\langle \Delta x_n, A_n^{-1} \Delta f(x_n) \rangle}.$$

* **7.2.60. Feladat [10].** Alkalmazzuk a Newton-módszert és változatait az

$$e^{x_1^2 + x_2^2} - 1 = 0, \quad e^{x_1^2 - x_2^2} - 1 = 0$$

egyenletrendszer megoldására $x_1, x_2 = 0, 1, 10, 20$ kezdőértékekkel.

* **7.2.61. Feladat [10].** Alkalmazzuk a Newton-módszert és változatait az

$$x_1 + x_2 - 3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$$

egyenletrendszer megoldására $x_1 = 2, x_2 = 4$ kezdőértékekkel. Hova konvergál a Broyden-módszernél Q_n ?

* **7.2.62. Kapcsolat minimumfeladatokkal.** Ismeretes, hogy egy valós értékű $\Phi \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumának megkeresését visszavezethetjük a $\Phi'(x) = 0$ egyenlet megoldására. Megfordítva, egy $f(x) = 0$, $f \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ operátoregyenlet megoldásait meghatározhatjuk úgy is, hogy megkeressük a $\Phi(x) = \|f(x)\|_2^2$ függvény minimumait. A $\|\cdot\|_2^2$ választás azért előnyös például $\|\cdot\|_2$ helyett, mert a $\|\cdot\|_2^2$ függvény differenciálható. Néha előnyösebb egy másik normát használni, például a $\Phi(x) = \sum_{i=1}^k w_i (f_i(x))^2$ függvény minimumait keresni, ahol az f_i függvények az f függvény koordinátái. A pozitív w_i súlyok tetszés szerint választhatók, de alkalmas megválasztásuk a minimumfeladat megoldását megkönnyítheti. Ahol Φ nincs értelmezve, ott az értékét $+\infty$ -nek tekintjük.

* **7.2.63. Nelder–Mead-módszer minimumfeladatokra.** Ez egy valós értékű $\Phi \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumának megkeresésére alkalmas heurisztikus módszer. Minden lépésben az $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k$ pontokat módosítja, amelyek nincsenek egy hipersíkban, így egy úgynevezett szimplexet (kétdimenzióban háromszöget, három dimenzióban tetraédert, stb.) adnak meg, és amelyeket úgy indexelünk, hogy

$$\Phi(x_0) \leq \Phi(x_1) \leq \dots \leq \Phi(x_k)$$

teljesüljön. Ha adott $\varepsilon > 0$ tűrésre

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^k (\Phi(x_j) - \bar{\Phi})^2 < \varepsilon^2,$$

[ahol $\bar{\Phi}$ a $\Phi(x_j)$ értékek számtani közepe], akkor megállunk, az eredmény az x_j -k számtani közepe. Egyébként x_k -t túlkrözzük a többi pont $\bar{x}_k$ számtani közepére, pontosabban legyen $y = \bar{x}_k + \alpha(\bar{x}_k - x_k)$; az α *túlkrözési paraméter* rendszerint 1. Ha

$$\Phi(x_0) \leq \Phi(y) \leq \Phi(x_{k-1}),$$

akkor x_k -t kicseréljük y -nal. Ha még $\Phi(y) < \Phi(x_0)$ is teljesül, akkor kiszámítjuk $\Phi(z)$ értékét, ahol $z = \bar{x}_k + \beta(\bar{x}_k - x_k)$; β a *kiterjesztési paraméter*, rendszerint 2. Az x_k pontot $\Phi(z) < \Phi(y)$ esetén z -re, egyébként y -ra cseréljük.

Ha $\Phi(y) > \Phi(x_{k-1})$, akkor a szimplexet összehúzzuk: legyen

$$w = x_k + \gamma(\bar{x}_k - x_k),$$

ahol a γ *összehúzási paraméter* rendszerint 1/2. Ha $\Phi(w) < \Phi(x_k)$, az x_k pontot kicseréljük w -vel; egyébként az x_0 kivételével az összes x_j pontot az $x_0 + \delta(x_j - x_0)$ ponttal helyettesítjük, ahol a δ *redukciós paraméter* rendszerint 1/2.

* **7.2.64. Az irány menti csökkentés módszere.** Lényege, hogy a $\Phi \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumhelyét úgy keressük, hogy minden x_n közelítéshez meghatározunk egy e_n irányt, amerre a függvény értéke tovább csökken, és a közelítést ebbe az irányba mozdítjuk el: $\Delta x_n = \alpha_n e_n$. Ha egy bázis vektorait ($\pm$ előjellel) választjuk e_n -nek úgy, hogy az utolsó bázisvektor után újrakezdjük az elsővel, akkor a *ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszerét* kapjuk. Ha a deriválható Φ egy nyílt részhalmazon van értelmezve, és minden lépésben $e_n = -\nabla \Phi(x_n)$, a legmeredekebb csökkenés iránya, akkor a *gradiens*

módszert kapjuk. Ha $e_n = -\nabla\Phi(x_n) + \beta_{n-1}e_{n-1}$ alkalmas β_{n-1} konstanssal, akkor a konjugált gradiens módszert kapjuk: az egyik változatnál $\beta_{-1} = \beta_0 = 0$, $e_{-1} = 0$ és

$$\beta_n = \frac{|\nabla\Phi(x_n)|^2}{|\nabla\Phi(x_{n-1})|^2}, \quad \text{ha } n > 0,$$

míg a másik változatnál $\beta_{-1} = \beta_0 = 0$, $e_{-1} = 0$ és

$$\beta_n = \frac{\langle \nabla\Phi(x_n), \nabla\Phi(x_n) - \nabla\Phi(x_{n-1}) \rangle}{|\nabla\Phi(x_{n-1})|^2}, \quad \text{ha } n > 0.$$

Az e_n kijelölése után az elmozdulás mértékének meghatározásához az egyváltozós $g(t) = \Phi(x_n + te_n)$ függvényt kell minimalizálnunk. (Ha sikerül, a kapott pontban a gradiens merőleges lesz e_n -re. Ez az észrevétel adja a konjugált gradiens módszerek alapját: a $-\nabla\Phi(x_n)$ irányba minimalizálva, utána tudnánk még tovább csökkenteni az e_{n-1} irányba; a konjugált gradiens módszernél ezt próbáljuk „megelőlegezni”.) A $t \mapsto g(t)$ függvényt csak közelítőleg fogjuk minimalizálni. Ez történhet a következőképpen. A $t_0 = 0$, t_1 és t_2 pontokban meghatározzuk a g függvény értékét, majd Lagrange-interpolációval meghatározzuk azt a $p(t)$ másodfokú polinomot, amely ezekben a pontokban megegyezik $g(t)$ -vel. A t_1 értékének jó megválasztásához az előző lépések adhatnak útmutatást, úgy választjuk, hogy $g(t_1) < g(t_0)$ teljesüljön; t_2 választása függhet $g(t_1)$ -től is. A gradiens és a konjugált gradiens módszereknél a másodfokú polinomot inkább úgy választjuk, hogy a $t_0 = 0$ helyen értéke $\Phi(x_n)$, deriváltja $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ legyen, így t_2 -re nincs szükség. A t^* közelítést úgy kapjuk, hogy vesszük p minimumhelyét. (Arra is gondolnunk kell, hogy a másodfokú polinomban a másodfokú tag együtthatója nem pozitív is lehet.) Bár valamilyen pontot elhagyva, helyette a t^* pontot tekintve, ez a lépés megismételhető, általában nem érdemes g minimumhelyét túl pontosan meghatározni, hanem t^* meghatározása után $\alpha_n = t^*$ választással áttérhetünk az $x_{n+1} = x_n + \alpha_n e_n$ pontra. Az alulrelaxálás, azaz az adott lépésben optimális t^* -nál kisebb α_n választása általában növeli a módszer hatékonyságát, mert a cikcakpálya kisimul. Az alulrelaxálást például α_n olyan választásával biztosíthatjuk, amelyre az

$$\frac{\Phi(x_n + \alpha_n e_n) - \Phi(x_n)}{\alpha_n}$$

differenciahányados és a $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ irány menti derivált hányadosa σ és $1 - \sigma$ közé esik valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \leq \sigma \leq 10^{-1}$.) Az alsó korlát kiküszöbölő a túl hosszú, a felső pedig a túl rövid lépést. A túl rövid lépés kiküszöbölésére azt is megkövetelhetjük, hogy a $\partial_{e_n}\Phi(x_n + \alpha_n e_n)$ és $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ irány menti deriváltak hányadosának abszolút értéke, vagy legalább a hányados kisebb legyen, mint valamely γ érték, ahol $\sigma < \gamma < 1$. (Rendszerint $0,1 \leq \gamma \leq 0,5$.) Az alkalmas α_n értéket a $t^* \varrho^k$, $k \in \mathbb{Z}$ értékek között keressük, $k = 0$ -val kezdve, ahol $0 < \varrho < 1$.

A konvergencia általában elég lassú, és semmilyen garancia nincs arra, hogy bármelyik módszer egy abszolút minimumhoz konvergál, bár konvergenciahalmaza általában bővebb, mint a Newton-módszeré. Ezért szokás a közelítés kezdetén az iránymenti csökkentések módszerét alkalmazni, majd áttérni a gyorsabb Newton-módszerre.

* **7.2.65. Példa.** Az előző pont jelöléseivel, tekintsük azt a tipikus esetet, amikor egy x^* lokális minimumhelyen a második deriváltra, amely szimmetrikus bilineáris forma, a vele képzett kvadratikussal pozitív definit. Ekkor a Taylor-formula szerint

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} \Phi''(x^*)(x - x^*, x - x^*) + \Phi(x^*).$$

Vizsgáljuk a különböző módszereket a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \Phi''(x^*)(x - x^*, x - x^*) + \Phi(x^*)$$

függvényre. Mivel bármely B szimmetrikus bilineáris formára rögzített y -ra $x \mapsto B(x, y)$ lineáris funkcionál, előáll $\langle x, Ay \rangle$ alakban. Mivel valós térben B a másik változójában is lineáris, A lineáris operátor. Mivel B szimmetrikus,

$$\langle x, Ay \rangle = \langle y, Ax \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

amiből A önadjungált. Jelölje A a $\Phi''(x^*)$ -hoz tartozó önadjungált operátort, amely nyilván pozitív definit is. Ezzel

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x - x^*), x - x^* \rangle + \Phi(x^*) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle Ax^*, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax^*, x^* \rangle + \Phi(x^*) \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c, \end{aligned}$$

ahol $b = Ax^*$ és $c = \frac{1}{2} \langle Ax^*, x^* \rangle + \Phi(x^*)$. A minimalizálással az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Bevezetve az $r = Ax - b$ jelölést, $A(x - x^*) = r$, és a $g(t) = \varphi(x + te)$ függvényre bármely e irányra

$$g(t) - g(0) = t \langle Ax, e \rangle - t \langle b, e \rangle = t \langle Ax - b, e \rangle = t \langle r, e \rangle.$$

Innen átosztva, $\partial_e \varphi(x) = \langle Ax - b, e \rangle = \langle r, e \rangle$ és így $\nabla \varphi(x) = Ax - b = r$. Hasonlóan kiszámolható, hogy $g'(t) = 0$ akkor teljesül, ha $t = -\langle r, e \rangle / \langle Ae, e \rangle$. Legyen $x = x_n$, $e = e_n$, $r_n = Ax_n - b$ választással α_n ez a t , azaz $\alpha_n = -\langle r_n, e_n \rangle / \langle Ae_n, e_n \rangle$. A hiba méréséhez tekintsük az új $(x, y) \mapsto \langle Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle_A$ belső szorzatot és a belőle származó $\|x\|_A$ normát. Ezzel

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_A^2 &= \|x_n - x^* + \alpha_n e_n\|_A^2 = \|x_n - x^*\|_A^2 + 2\alpha_n \langle x_n - x^*, e_n \rangle + \alpha_n^2 \|e_n\|_A^2 \\ &= \left(1 - \frac{\langle r_n, e_n \rangle^2}{\langle Ae_n, e_n \rangle \langle A^{-1}r_n, r_n \rangle} \right) \|x_n - x^*\|_A^2, \end{aligned}$$

mivel $r_n = Ax_n - b$ jelöléssel $\|x_n - x^*\|_A^2 = \langle A^{-1}r_n, r_n \rangle$. A gradiens-módszernél

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_A^2 &= \|x_n - x^* + \alpha_n e_n\|_A^2 \\ &= \left(1 - \frac{\|r_n\|_A^4}{\langle Ar_n, r_n \rangle \langle A^{-1}r_n, r_n \rangle} \right) \|x_n - x^*\|_A^2, \end{aligned}$$

azaz lineáris konvergenciát várhatunk.

Megmutatjuk, hogy a konjugált gradiens módszer két változata ebben a példában egybeesik. Az jellemzi őket, hogy $\langle e_n, e_{n-1} \rangle_A = \langle -r_{n-1} + \beta_{n-1}e_{n-1}, e_{n-1} \rangle_A = 0$. Ehhez az kell, hogy $\beta_{n-1} = \langle Ar_n, e_{n-1} \rangle / \langle Ae_{n-1}, e_{n-1} \rangle$ teljesüljön. Indukcióval megmutatjuk, hogy a fenti α_n és β_{n-1} választással, ha $r_0, r_1, \dots, r_n$ nem nullák, akkor $e_0, e_1, \dots, e_n$ sem nullák és ugyanazt az alteret feszítik ki, továbbá $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ és $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ értelmezve vannak, az utóbbiak nem nullák,

$$\alpha_n = -\frac{\|r_n\|^2}{\|e_n\|_A^2} \quad \text{és} \quad \beta_{n-1} = \frac{\langle r_n, r_n - r_{n-1} \rangle}{\|r_{n-1}\|^2} = \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2},$$

valamint $\langle e_j, e_n \rangle_A = 0$ és $\langle e_j, r_n \rangle = 0$, ha $j < n$. Az $n = 0$ esetben az állítás teljesül ($\beta_{-1} = \beta_0 = 0, e_{-1} = 0$ miatt $e_0 = -r_0$). Tegyük fel, hogy $r_{n+1} \neq 0$. Mivel az e_n irányban minimalizáltunk, $e_n \perp r_{n+1}$, azaz $\langle e_n, r_{n+1} \rangle = 0$. A β_n definíciója szerint $\langle e_{n+1}, e_n \rangle_A = 0$. (Nyilván β_n értelmezve van.) Mivel $e_{n+1} = -r_{n+1} + \beta_n e_n$, az r_{n+1} kombinálható e_{n+1} -ből és e_n -ből, és e_{n+1} kombinálható r_{n+1} -ből és e_n -ből. Felhasználva az $x_{j+1} = x_j + \alpha_j e_j$ összefüggést $r_{j+1} = r_j + \alpha_j Ae_j$, amiből $j < n$ esetén egyrészt

$$\langle e_j, r_{n+1} \rangle = \langle e_j, r_n \rangle + \alpha_n \langle e_j, Ae_n \rangle = 0,$$

másrészt

$$\langle Ae_j, e_{n+1} \rangle = \langle Ae_j, r_{n+1} \rangle + \beta_n \langle Ae_j, e_n \rangle = \langle Ae_j, r_{n+1} \rangle = 0,$$

mivel $\alpha_j \neq 0$, így Ae_j benne van az $r_0, \dots, r_n$, vagyis az $e_0, \dots, e_n$ által kifeszített altérben. Ha $e_{n+1} = 0$ lenne, akkor $r_{n+1} = \beta_n e_n$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy r_{n+1} nem nulla, és merőleges e_n -re. Így α_{n+1} értelmezve van és e_{n+1} definíciójából

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\langle e_{n+1}, r_{n+1} \rangle}{\|e_{n+1}\|_A^2} = \frac{\langle r_{n+1} - \beta_n e_n, r_{n+1} \rangle}{\|e_{n+1}\|_A^2} = \frac{\|r_{n+1}\|^2}{\|e_{n+1}\|_A^2} \neq 0.$$

Mivel $x_{n+1} = x_n + \alpha_n e_n$ -ből $r_{n+1} = r_n + \alpha_n Ae_n$, azt is kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\langle e_{n+1}, r_{n+1} \rangle}{\langle Ae_n, e_n \rangle} = \frac{\langle r_{n+1} - r_n, r_{n+1} \rangle}{\alpha_n \langle Ae_n, e_n \rangle} \\ &= \frac{\langle r_{n+1} - r_n, r_{n+1} \rangle}{\langle r_{n+1} - r_n, e_n \rangle} = -\frac{\langle r_{n+1} - r_n, r_{n+1} \rangle}{\langle r_n, e_n \rangle} \\ &= -\frac{\langle r_{n+1} - r_n, r_{n+1} \rangle}{\langle r_n, -r_n + \beta_{n-1} e_{n-1} \rangle} = \frac{\langle r_{n+1} - r_n, r_{n+1} \rangle}{\|r_n\|^2} = \frac{\|r_{n+1}\|^2}{\|r_n\|^2}; \end{aligned}$$

az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert r_n benne van az $e_0, \dots, e_n$ által generált altérben.

Vegyük észre hogy a konjugált gradiens módszer véges sok lépésben konvergál, mert $e_0, \dots, e_n$ ortogonálisak az $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_A$ belső szorzatra, így $r_j = 0$ kell legyen valamely $j \leq k$ -ra, hiszen $\mathbb{R}^k$ -ban vagyunk.

*** 7.2.66. Kvázi Newton-módszerek minimalizálásra.** Mint már említettük, minimalizáláskor a lokális minimumhely közelében érdemes áttérni egy Newton-típusú módszerre. Ez azt jelenti, hogy Φ minimuma helyett $f = \nabla \Phi$ zérushelyét keressük. Bármelyik

módszer használható, de javítások is lehetségesek. A gyakran használt Broyden-módszert például úgy szokás megváltoztatni, hogy az iteráció során A_n szimmetrikus legyen, mert $\Phi''(x_n)$ szimmetrikus bilineáris forma. Az egyik szokásos választásnál $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n][\Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n]'}{\langle \Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n, \Delta x_n \rangle}.$$

Nem tanácsos tovább folytatni az iterációt, ha a $\Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n$ és Δx_n által bezárt szög koszinusza túl kicsi lesz, mondjuk 10^{-8} alá megy. Egyébként erre a formulára $A_{n+1}^{-1} - A_n^{-1} = \Delta A_n^{-1}$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta x_n - A_n^{-1} \Delta f(x_n)][\Delta x_n - A_n^{-1} \Delta f(x_n)]'}{\langle \Delta x_n - A_n^{-1} \Delta f(x_n), \Delta f(x_n) \rangle}.$$

Még elterjedtebb az a változat, amelyben ΔA_n mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n)][\Delta f(x_n)]'}{\langle \Delta f(x_n), \Delta x_n \rangle} - \frac{[A_n \Delta x_n][A_n \Delta x_n]'}{\langle \Delta x_n, A_n \Delta x_n \rangle}.$$

Erre a formulára ΔA_n^{-1} mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \Delta x_n, \Delta f(x_n) \rangle + \langle \Delta f(x_n), A_n^{-1} \Delta f(x_n) \rangle}{\langle \Delta x_n, \Delta f(x_n) \rangle^2} [\Delta x_n][\Delta x_n]' \\ & - \frac{[A_n^{-1} \Delta f(x_n)][\Delta x_n]' + [\Delta x_n][\Delta f(x_n)]' [A_n^{-1}]}{\langle \Delta x_n, \Delta f(x_n) \rangle}. \end{aligned}$$

* **7.2.67. Feladat [10].** A $\Phi(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ függvény minimalizálásán hasonlítsunk össze különböző módszereket.

* **7.2.68. Feladat [10].** A $\Phi(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (y^2 + x - 7)$ függvénynek keressük meg a négy abszolút minimumát és az egyetlen lokális maximumát, összehasonlítva a különböző módszereket.

* **7.2.69. Feladat [11].** A

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} ((1 - x_j)^2 + 100\varepsilon_j(x_{j+1} - x_j^2)^2)$$

függvény — ahol $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in]0, 1]$ szabad paraméterek — minimalizálásán hasonlítsunk össze különböző módszereket. [A függvénynek egy globális minimuma van, de még ha minden ε_j egy, akkor is már $4 \leq n \leq 7$ esetén van egy lokális minimuma a $(-1, 1, 1, \dots, 1)$ pont közelében.]

* **7.2.70. Belső pont módszerek.** A Lagrange-szorzóknál leírt

$$(1) \quad \begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min, & x &\in G \\ f_j(x) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ f_j(x) &= 0, & j &= k+1, \dots, m \end{aligned}$$

feltételes minimumproblémát kívánjuk numerikusan megoldani. Használni fogjuk az ot-tani feltevéseket és jelöléseket. Az egyenlőség típusú feltételeket kiküszöbölhetjük, ha f_0 helyett az $f_0 + \sum_{i=k+1}^m (w_i f_i)^2$ függvényt minimalizáljuk, ahol $w_i \neq 0$ súlyok. Kérdés, hogyan célszerű választani a súlyokat. Az egyenlőtlenség típusú feltételeket úgy vehetjük figyelembe, hogy a célfüggvényhez hozzáadunk egy

$$-\frac{1}{t} \sum_{j=1}^k \ln(-f_j(x))$$

tagot. Ez mint sorompó szerepel, az $X^- = \{x: f_j(x) < 0, j = 1, \dots, k\}$ nyílt halmaz belsejében tart minket, mert a határhoz közeledve $+\infty$ -hez tart. Innen a *belső pont módszerek* elnevezés. Minél nagyobb t , annál gyengébb a sorompó, annál közelebb mehetünk a határhoz. A legegyszerűbb *sorompó módszernél* $X^- \cap \text{dmn}(f_0)$ egy pontjából indulunk. Egy adott pozitív t -re minimalizálva (például a fékezett Newton-módszerrel), ha $c(t)$ -ben van a minimum, akkor megnövelt t -re, például t helyett μt -re a $c(t)$ -t használhatjuk kezdőpontnak, újra minimalizálunk, stb. A tapasztalatok szerint a módszer 3 és 100 közötti μ -t választva jól működik, sebessége alig függ μ -tól. Leggyakrabban μ értékét 10 és 20 között választjuk. Fontos észrevétel, hogy ha nincsenek egyenlőség típusú feltételek és $c(t)$ a minimumhely, akkor $x = c(t)$ -re

$$f'_0(x) + \sum_{j=1}^k \frac{f'_j(x)}{-t f_j(x)} = 0,$$

így — legalábbis a reguláris esetben — a

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{-t f_j(c(t))}$$

mennyiségek a $c(t)$ -hez tartozó Lagrange-szorzók, és $-\sum_{j=1}^k \lambda_j(t) f_j(x)$ az $x = c(t)$ helyen k/t . Ez adhatja az ötletet a sokkal agresszívebb és gyorsabb primál-duál belső pont módszerhez.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} 0 &= f'_0(x) + \sum_{j=1}^m y_j f'_j(x), \\ 0 &= -\frac{1}{t} - y_j f_j(x), & j &= 1, \dots, k; \\ 0 &= f_j(x), & j &= k+1, \dots, m \end{aligned}$$

egyenletrendszer, amely a $t > 0$ paramétertől függ. Ennek az (x, y) megoldását keressük $y_j > 0$, ha $j = 1, \dots, k$ feltételek mellett fékezett Newton-módszerrel. Azt várjuk, hogy

t növekedésével (x, y) tart (c, λ) -hoz. Kiszámítjuk $\eta = -\sum_{j=1}^k y_j f_j(x)$ értékét, és t -t a k/η szám μ -szőrösének választjuk (μ rendszerint 10 körüli). Csak egyetlen iterációs lépést teszünk, majd újraszámoljuk t -t. Az egyenes szakasz menti keresésnél kiszámítjuk azt a legnagyobb α -t, amely nem nagyobb mint 1, és amelyre $y_j + \alpha \Delta y_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$, majd az α kezdőértékének ennek mondjuk 0,99-szeresét vesszük, és ha kell, tovább csökkentjük α -t a fékezett Newton-módszernél leírtak szerint. Az egész program akkor áll meg, ha $\eta < \varepsilon$ és $\sum_{j=k+1}^m f_j(x)^2$ meg az első egyenlet jobb oldala normanégyszetének összege kisebb mint δ^2 . Egy olyan $x \in X^-$ pontból indulunk, amely mindegyik függvény értelmezési tartományában benne van, y_j kezdőértéke $-1/(tf_j(x))$, ha $j = 1, \dots, k$, a többi y_j tetszőleges, például nulla. Nincs garancia a konvergenciára, kivéve, ha az f_i , $i = 0, 1, \dots, k$ függvények szigorúan konvexek, az f_j , $j = k+1, \dots, m$ függvények pedig lineáris plusz konstans alakúak.

Ha nem tudunk pontot X^- -ban, amire minden f_i értelmezve van, de ismerjük az értelmezési tartományok egy közös pontját, akkor az $f_0 \rightarrow \min$, $f_j \leq s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j = 0$, $j = k+1, \dots, m$, $s = 0$ problémát próbáljuk megoldani. Ha csak külön-külön tudunk egy-egy $z_i \in \text{dmn}(f_i)$ pontot, akkor az $f_0(x + z_0) \rightarrow \min$, $f_j(x + z_j) \leq s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j(x + z_j) = 0$, $j = k+1, \dots, m$, $s = 0$, $z_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$ problémát próbáljuk megoldani.

7.3 Integrálszámítás

7.3.1. Többváltozós függvények integrálja. Egy $\mathbb{R}^m$ -beli m dimenziós téglá alatt egydimenziós $T_j = [a_j, b_j]$, $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ korlátos, zárt, pozitív hosszúságú intervallumok

$$T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m$$

Descartes-szorzatát értjük. A T téglá $|T|$ mértéke az oldalhosszak szorzata, $\prod_{j=1}^m (b_j - a_j)$. A T téglá egy felosztásán tégláknak egy olyan $T_1, T_2, \dots, T_k$ véges sorozatát értjük, amelyek egyesítése T , és amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk.

Egy P pontozott felosztás alatt egy felosztást értünk, amelynek minden T_j résztéglájához meg van adva egy $t_j \in T_j$ pont, azaz $P = \{(T_j, t_j) : t_j \in T_j, j = 1, 2, \dots, k\}$. Legyen $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy a T egy (T_j, t_j) pontozott résztéglája δ -finom, ha $T_j \subset \mathbb{U}_{\delta(t_j)}(t_j)$; a P pontozott felosztás δ -finom, ha a (T_j, t_j) résztéglák mind δ -finomak, ha $j = 1, 2, \dots, k$. Legyen $f: T \rightarrow \mathbb{K}^n$ egy függvény. A T téglá P pontozott felosztásához hozzárendeljük az

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^k |T_j| f(t_j)$$

Riemann-összeget. Azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható T -n, és integrálja S , ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy minden δ -finom P pontozott felosztásra $|S - s(f, P)| < \varepsilon$.

Az így kapott integrálfogalom jóval általánosabb, mint a szokásos Riemann-integrál, amit akkor kapunk, ha f korlátos és δ nem függvény, hanem konstans.

7.3.2. Tétel. Ha a $T \subset \mathbb{R}^m$ téglának a $T_1, \dots, T_k$ téglák páronként közös belső pont nélküli résztéglái, akkor $\sum_{j=1}^k |T_j| \leq |T|$. Ha a $T_1, \dots, T_k$ téglák a T egy felosztását alkotják, akkor $\sum_{j=1}^k |T_j| = |T|$.

* **Bizonyítás.** Nyilvánvaló, hogy ha a T téglá valamelyik $[a_i, b_i]$ oldalát kettéosztjuk egy $a_i < c_i < b_i$ számmal, a kapott két résztégla mértékének összege T mértéke. Osszuk ketté a T téglá i -edik oldalát minden olyan c_i számmal, amely valamely T_j téglá i -edik oldalának végpontja, és amelyre $a_i < c_i < b_i$. Tegyük ezt meg minden $1 \leq i \leq m$ -re. A kapott résztéglák összmértéke T mértéke. A kapott résztéglák közül azok összmértéke, amelyeknek van közös belső pontja a T_j téglával, a T_j mértéke. Mivel egy résztéglának legfeljebb egy T_j téglával lehet közös belső pontja, kapjuk az első állítást. Mivel a második esetben résztéglának van közös belső pontja valamely T_j -vel, a második állítás is kiadódik. $\square$

7.3.3. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$. Minden $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényhez van olyan P pontozott beosztása T -nek, amely δ -finom.

* **Bizonyítás.** A bizonyítást m szerinti indukcióval végezzük. Tegyük fel, hogy már tudjuk az állítást $m-1$ -re, $m > 1$. Legyen $T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ és

$$T' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{m-1}, b_{m-1}].$$

Tekintsük azon $a_m < x \leq b_m$ számok X halmazát, amelyekhez $T' \times [a_m, x]$ -nek van olyan pontozott felosztása, amely δ -finom. Mivel T' -nek van $m-1$ -dimenziós δ -finom pontozott felosztása, és ezen felosztásnak bármely T'' résztéglájá csúcsai a T'' -höz tartozó t'' ponttól kisebb, mint $\delta(t'')$ távolságra vannak, valamely $x > a_m$ -re $t'' \times [a_m, x]$ része a t'' középpontú, $\delta(t'')$ sugarú környezetnek. Mivel véges sok résztégla van, és ez mindegyikre igaz, azt kapjuk, hogy X nem üres. Legyen $c = \sup X$. Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy $c \in X$, és a $c < b_m$ esetben ellentmondásra vezet. Végül az $m = 1$ esetben is ugyanez a gondolatmenet működik. $\square$

7.3.4. Következmény. $\mathbb{R}^m$ -ben bármely téglá kompakt.

Bizonyítás. Legyen V_γ , $\gamma \in \Gamma$ a T téglá egy lefedése. Minden $t \in T$ -re van olyan $\delta(t) > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\delta(t)}(t) \subset V_\gamma$ valamely $\gamma \in \Gamma$ -ra. Egy δ -finom pontozott felosztás pontjaihoz tartozó V_γ halmazokat kiválasztva, T egy véges lefedését kapjuk. $\square$

7.3.5. Tétel: az integrál egyértelműsége. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá. Ha S' és S'' is az $f: T \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvény integrálja, akkor $S' = S''$.

Az integrált a továbbiakban $\int_T f$ fogja jelölni.

Bizonyítás. Ha $S' \neq S''$, az $\varepsilon = |S' - S''|/2$ választással, léteznek megfelelő $\delta', \delta'': T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvények. Legyen $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Választva egy δ -finom pontozott beosztást, ellentmondást kapunk. $\square$

7.3.6. Tétel: az integrál linearitása. Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ egy téglá, az $f, g: T \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvények integrálhatók T -n és $c \in \mathbb{K}$, akkor az $f + g$ és cf függvények is integrálhatók T -n és

$$\int_T (f + g) = \int_T f + \int_T g, \quad \int_T (cf) = c \int_T f.$$

Bizonyítás. Legyen S' , illetve S'' az f , illetve a g integrálja, $S = S' + S''$, és δ' , δ'' az adott $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó függvények. Ha P finomabb a δ' és δ'' minimumánál, akkor $|S - s(f + g, P)| < 2\varepsilon$. A második állítás következik abból, hogy $s(cf, P) = cs(f, P)$. $\square$

7.3.7. Tétel: integrál és koordinátafüggvények. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá. Egy $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): T \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvény pontosan akkor integrálható, ha az f_j , $j = 1, 2, \dots, n$ koordinátafüggvények integrálhatóak, és ekkor

$$\int_T f = \left(\int_T f_1, \int_T f_2, \dots, \int_T f_n \right).$$

A tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban valós értékű függvényekre szorítkozzunk.

Bizonyítás. Ha f integrálható és integrálja S , akkor $|S - s(f, P)| < \varepsilon$ esetén $|S_j - s(f_j, P)| < \varepsilon$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, így az f_j koordinátafüggvények integrálhatóak és integráljuk S_j . Megfordítva, ha az f_j koordinátafüggvények integrálhatóak, integráljuk S_j , akkor az $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó δ_j függvények δ minimumát véve, δ -nál finomabb P -re $|S_j - s(f_j, P)| < \varepsilon$, ahonnan $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ jelöléssel $|S - s(f, P)| < n\varepsilon$, tehát f integrálható. $\square$

7.3.8. Tétel: az integrál nemnegativitása. Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá, és az $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvény integrálható, akkor $\int_T f \geq 0$.

Bizonyítás. Következik abból, hogy minden Riemann-összeg nemnegatív. $\square$

7.3.9. Következmény: az integrál monotonitása. Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá, és az $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények integrálhatóak, $f \leq g$, akkor $\int_T f \leq \int_T g$.

Bizonyítás. Következik abból, hogy $g - f \geq 0$. $\square$

7.3.10. Megjegyzés. Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ egy téglá, $a, b \in \mathbb{R}^m$ és $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ koordinátái mind nem nullák, $g(x) = \langle a, x \rangle + b$, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és egyenlők:

$$\int_T f(x) dx \quad \text{és} \quad \int_{g(T)} |a_1 a_2 \cdots a_m| f(\langle a, x \rangle + b) dx.$$

Ez abból következik, hogy az integrálközelítő összegek megegyeznek. $\square$

*** 7.3.11. Tétel: Cauchy-kritérium.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá. Egy $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, hogy bármely δ -finom P', P'' pontozott beosztásokra $|s(f, P') - s(f, P'')| < \varepsilon$.

Bizonyítás. Ha f integrálható, akkor ε -hoz a definíció szerint δ függvényt választva, azt kapjuk, hogy $|s(f, P') - s(f, P'')| < 2\varepsilon$. A megfordításhoz legyen $M(\delta)$ adott $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényre az összes δ -nál finomabb P pontozott beosztásra vett $s(f, P)$ Riemann-összegek szuprénuma, és legyen S az összes $M(\delta)$ bővített valós számok infimuma. Választva adott $\varepsilon > 0$ -hoz egy, a feltételnek eleget tévő δ függvényt, és egy δ -nál finomabb P pontozott felosztást, a feltételből $M(\delta) \leq s(f, P) + \varepsilon$, így $S \leq s(f, P) + \varepsilon$. Ha $S < s(f, P) - \varepsilon$ lenne, akkor létezne olyan $\delta': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre $M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$. Ha δ'' a δ és a δ' minimuma, akkor egy δ'' -nél finomabb P'' pontozott beosztásra $s(f, P'') \leq M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$, ami ellentmondás, mert P és P'' is δ -finomak. Így $|S - s(f, P)| \leq \varepsilon$ bármely δ -finom P -re. $\square$

7.3.12. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ egy téglá, T' egy résztéglája. Ha egy $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható T -n, akkor T' -n is.

* **Bizonyítás.** Azt fogjuk megmutatni, hogy ha egy adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra és $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényre tetszőleges δ -finom P_1, P_2 pontozott beosztásaira T -nek

$$|s(f, P_1) - s(f, P_2)| \leq \varepsilon,$$

akkor bármely $T' \subset T$ téglára is tetszőleges δ -finom P'_1, P'_2 pontozott beosztásaira T' -nek $|s(f, P'_1) - s(f, P'_2)| \leq \varepsilon$, ahonnan a Cauchy-kritérium alapján már következik az állítás.

Először tegyük fel, hogy $T = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$, $a_m < a'_m < b'_m < b_m$, és $T' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \times [a'_m, b'_m]$. Válasszunk egy δ -nál finomabb P_3 pontozott felosztását $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \times [a_m, a'_m]$ -nek és egy δ -nál finomabb P_4 pontozott felosztását $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \times [b'_m, b_m]$ -nek, és legyen P_1 a P_3 , a P'_1 és a P_4 egyesítése, P_2 pedig a P_3 , a P'_2 és a P_4 egyesítése. Nyilván

$$s(f, P_1) - s(f, P_2) = s(f, P'_1) - s(f, P'_2).$$

Az $a_m = a'_m < b'_m < b_m$, illetve $a_m < a'_m < b'_m = b_m$ eset bizonyítása hasonló. Ugyanez igaz bármelyik oldal felosztására. Ebből már adódik az általános eset. $\square$

7.3.13. Az integrál mint téglafüggvény additivitása. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^m$ -beli T' és T'' téglákat a T téglá valamelyik oldalának kettéosztásával kaptuk. Ha az $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható T -n, akkor integrálható T' -n és T'' -n is és

$$\int_T f = \int_{T'} f + \int_{T''} f.$$

* **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre bármely két δ -finom P_1 és P_2 pontozott felosztására T -nek $|s(f, P_1) - s(f, P_2)| \leq \varepsilon$. Legyen P' a T' és P'' a T'' egy-egy δ -finom pontozott felosztása, $P = P' \cup P''$. Az előző tétel bizonyítása szerint $|s(f, P') - \int_{T'} f| \leq \varepsilon$ és $|s(f, P'') - \int_{T''} f| \leq \varepsilon$, valamint nyilván $|s(f, P) - \int_T f| \leq \varepsilon$. Mivel $s(f, P) = s(f, P') + s(f, P'')$, azt kapjuk, hogy

$$\left| \int_T f - \int_{T'} f - \int_{T''} f \right| \leq 3\varepsilon,$$

amiből következik az állítás. $\square$

7.3.14. Következmény. Ha $T_1, \dots, T_k$ a T téglá egy felosztása, és f integrálható T -n, akkor

$$\int_T f = \sum_{j=1}^k \int_{T_j} f.$$

* **Bizonyítás.** Az állítás a tétel felhasználásával ugyanúgy következik, mint a 7.3.2 tétel. $\square$

7.3.15. Tétel. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^m$ -beli T' és T'' téglákat a T téglá valamelyik oldalának kettéosztásával kaptuk. Ha az $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható T' -n és T'' -n, akkor integrálható T -n is.

* **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy f integrálható T' -n és T'' -n, integrálja S' , illetve S'' ; adott $\varepsilon > 0$ -ra legyenek δ' és δ'' az $\varepsilon/2$ -höz megfelelő függvények T' -n, illetve T'' -n. Tegyük fel, hogy T' és T'' a T utolsó oldalának a c ponttal való kettéosztásával keletkezett, ahol $a_m < c < b_m$. Legyen $\delta(t) = \min\{\delta'(t), c - t_m\}$, ha $t = (t_1 m, \dots, t_m)$ és $a_m \leq t_m < c$, $\delta(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}$, ha $t_m = c$ és $\delta(t) = \min\{\delta''(t), t_m - c\}$, ha $c < t_m \leq b_m$. Ha T^* egy tetszőleges δ -finom pontozott beosztás résztglája, és az utolsó koordinátákra $a_m^* < c < b_m^*$, akkor a T^* -hoz tartozó t^* pont utolsó koordinátájára δ definíciója miatt csak $t_m^* = c$ lehetséges. Ilyenkor kettévághatjuk T^* -ot, mindkét résztglában a t^* pontot választva; a Riemann-összeg nem változik. A kettévágások után a résztglák mindegyike vagy T' , vagy T'' részhalmaza, és a kapott pontozott felosztások δ' -, illetve δ'' -finomak. Innen a Riemann-összeg 2ε -nál kevesebbet tér el $S' + S''$ -től, így f integrálható T -n és integrálja $S' + S''$. $\square$

7.3.16. Következmény. Ha $T_1, \dots, T_k$ a T téglá egy felosztása, és $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható minden T_j -n, akkor T -n is.

* **Bizonyítás.** Az állítás a tétel felhasználásával hasonlóan következik, mint a 7.3.2 tétel. $\square$

7.3.17. Nullahalmazok. Egy $H \subset \mathbb{R}^m$ halmaz *nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\mathbb{R}^m$ -beli téglából álló megszámlálható T_j rendszer, amely lefedi H -t, és amelyre $\sum_j |T_j| < \varepsilon$. Ha valamilyen $\mathbb{R}^m$ pontjaira vonatkozó feltétel egy nullahalmaz kivételével teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* teljesül.

Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz. Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz, hiszen az elsőt lefedve egy $\varepsilon/2$ -nél kisebb összmértékű megszámlálható téglarendszerrel, a másodikat lefedve egy $\varepsilon/2^2$ -nél kisebb összmértékű téglarendszerrel stb., a téglarendszerek egyesítése olyan megszámlálható téglarendszer, amelynek összmértéke kisebb, mint ε . Speciálisan, megszámlálható halmaz nullahalmaz.

Nem nehéz megmutatni, hogy bármely hipersík nullahalmaz.

7.3.18. Lebesgue-feltétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá és $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor integrálható.

* **Bizonyítás.** A Cauchy-kritériumot fogjuk használni. Tegyük fel, hogy $|f| \leq K$. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f szakadási pontjainak halmaza nullahalmaz, lefedhető egy T_m^* , $m = 1, 2, \dots$ megszámlálható téglarendszerrel, amelynek összmértéke kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$. Minden T_m^* téglát ugyanolyan arányban középpontosan nagyítva egy kicsit, elérhetjük, hogy minden szakadási pont valamely téglá belső pontja legyen. Legyen $t \in T$. Ha t belső pontja valamely T_m^* téglának, akkor legyen $\delta(t)$ olyan kicsi, hogy $\cup_{\delta(t)}(t)$ teljesen benne legyen valamelyik T_m^* -ben. Egyébként f folytonos t -ben: válasszuk $\delta(t)$ -t úgy, hogy $|x - t| < 2\delta(t)$, $x \in [a, b]$ esetén $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(2|T|)$ teljesüljön.

Legyenek P' és P'' pontozott δ -finom beosztásai T -nek. Tekintsük azokat a $T' \cap T''$ metszeteket, amelyek téglák; itt T' a P' egy résztglája, T'' pedig P'' egy résztglája. Ezek egy felosztását adják T -nek. Ezen új felosztás minden T_j , $j = 1, 2, \dots, k$ résztglája pontosan egy P' -beli T' és pontosan egy P'' -beli T'' téglának részhalmaza; legyen τ_j' a T' -höz tartozó t' pont, τ_j'' pedig a T'' -höz tartozó t'' pont. Nyilván $s(f, P') = \sum_{j=1}^k f(\tau_j')|T_j|$

és $s(f, P'') = \sum_{j=1}^k f(\tau_j'')|T_j|$, így a két Riemann-összeg különbségének becsléséhez a

$$\sum_{j=1}^n (f(\tau_j') - f(\tau_j''))|T_j|$$

összeg abszolút értékét kell megbecsülnünk.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre f folytonos a τ_j' és a τ_j'' pontban is, tekintsük a T' téglát, ha $\delta(t') \geq \delta(t'')$. Mivel $\tau_j' = t'$ és $\tau_j'' = t''$ távolsága kisebb, mint $2\delta(t')$, egy ilyen tag kisebb, mint $\varepsilon|T_j|/(2|T|)$. Ha $\delta(t') < \delta(t'')$, akkor $\tau_j' = t'$ és $\tau_j'' = t''$ távolsága kisebb, mint $2\delta(t'')$, és ugyanezt kapjuk. Így az összes ilyen típusú tag összege kisebb, mint $\varepsilon/2$.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre f nem folytonos a τ_j' vagy a τ_j'' pontban, vegyük észre, hogy az egész T_j téglában benne van valamely T_m^* -ben. Minden ilyen téglához válasszunk egy T_m^* -et. Egy adott T_m^* -hez tartozó résztéglák összmértéke legfeljebb T_m^* mértéke, így az összes ilyen résztéglák összmértéke kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$, tehát a megfelelő tagok abszolút értékeinek összege legfeljebb $\varepsilon/2$. □

7.3.19. Következmény. Ha f folytonos, akkor integrálható. □

7.3.20. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^k$ téglában és $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Ha f és g majdnem mindenütt megegyeznek, és f integrálható, akkor g is és $\int_T g = \int_T f$.

A tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóság és az integrál szempontjából a nullahalmazok „elhanyagolhatóak”. Így olyan függvények integráljáról is beszélhetünk, amelyek csak majdnem mindenütt vannak értelmezve.

* **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, hogy minden δ -nál finomabb pontozott beosztásra az f -hez tartozó Riemann-összeg $\varepsilon/2$ -nél kevesebbet térjen el az S integráltól. Legyen N_m azon pontok halmaza, amelyekre f és g értéke különbségének abszolút értéke nagyobb, mint $m - 1$, de nem nagyobb, mint m , ahol $m = 1, 2, \dots$. Mivel N_m nullahalmaz, választhatunk olyan $T_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots$ téglákat, amelyek lefedik N_m -et, és összmértékük kisebb, mint $\varepsilon/(m2^{m+2})$. Ugyanolyan arányban középpontos nagyítással minden $T_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots$ téglát megnövelve, feltehetjük, hogy N_m minden pontja belső pontja valamely $T_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots$ téglának. Ha $t \in T$ belső pontja valamely $T_{m,j}$ téglának, legyen $\delta'(t) \leq \delta(t)$ olyan kicsi, hogy a t pont $\delta'(t)$ sugarú környezete benne legyen egy $T_{m,j}$ téglában, egyébként legyen $\delta'(t) = \delta(t)$. Legyen P egy δ' -nél finomabb pontozott beosztása T -nek. Azokra a t_i -kre, amelyekre $f(t_i)$ és $g(t_i)$ megegyeznek, a megfelelő tag f és g Riemann-összegében megegyezik. Minden más t_i benne van valamely $T_{m,j}$ -ben. Minden t_i -hez rögzítve egy ilyen m, j indexpárt, az adott indexpárhoz tartozó téglák összmértéke kisebb, mint $T_{m,j}$ mértéke, a függvényértékek különbsége pedig legfeljebb m . Összegezve j -re, majd m -re, azt kapjuk, hogy f és g Riemann-összege kevesebbet tér el egymástól, mint $\varepsilon/2$. Így g Riemann-összege kevesebbet tér el S -től, mint ε . □

7.3.21. Megjegyzés. A $[0, 1]^k$ téglán azon pontok halmazának a karakterisztikus függvénye, amelyeknek minden koordinátája racionális, sehol sem folytonos, mégis integrálható, mert majdnem mindenütt nulla.

7.3.22. Tétel: ismételt integrálás. Legyen I az $\mathbb{R}^i$, a J pedig az $\mathbb{R}^j$ tér egy téglája. Ha $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, akkor majdnem minden $x \in I$ -re létezik az $\int_J f(x, y) dy$ integrál, majdnem minden $y \in J$ -re létezik az $\int_I f(x, y) dx$ integrál, továbbá az alábbi integrálok mind léteznek és

$$\int_{I \times J} f = \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_J \int_I f(x, y) dx dy.$$

Többször alkalmazva a tételt, többváltozós függvények integráljának kiszámítását tetszőleges sorrendben végzett egyváltozós integrálásokra vezethetjük vissza.

* **Bizonyítás.** A bizonyítás nehéz, a hivatkozások megtalálhatóak Kurzweil [38] könyvében, 101. o. $\square$

7.3.23. Abszolút integrálható függvények. Ha $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ egy integrálható függvény egy $T \subset \mathbb{R}^k$ téglán, amelyre $|f|$ is integrálható, akkor azt mondjuk, hogy f *abszolút integrálható* T -n. Mint tudjuk, ez azzal ekvivalens, hogy az

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{és} \quad f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$$

összefüggésekkel definiált függvények, az f pozitív része és negatív része integrálhatóak. Egy komplex értékű f függvényt akkor nevezünk *abszolút integrálhatónak*, ha valós és képzetes része abszolút integrálhatóak; ekkor nyilván $\bar{f}$ is abszolút integrálható. Vektor értékű függvényt akkor nevezünk abszolút integrálhatónak, ha a koordinátafüggvényei abszolút integrálhatóak.

Megmutatható, hogy az abszolút integrálható függvények az úgynevezett Lebesgue-integrálható függvényekkel egyeznek meg; ennek bizonyításához még nincsenek meg az eszközeink, de később visszatérünk rá. Ezt felhasználva könnyen következik, hogy ha $f_i: T \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ abszolút integrálhatóak, és $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor az

$$f(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

összetett függvény abszolút integrálható, ha valamely integrálható függvény majorálja az abszolút értékét, azaz ha $|f| \leq h$ valamely, a T -n integrálható h függvénnyel.

Néhány példa ennek az állításnak az alkalmazására: Ha f_1 és f_2 abszolút integrálhatóak, akkor $g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ választással $f_1 + f_2 = g(f_1, f_2)$ és $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$, így $f_1 + f_2$ is abszolút integrálható. Ha egy f integrálható függvény alulról korlátos, $f \geq c$, ahol $c \leq 0$, akkor az előző g -vel és $f_1 = f - c$, $f_2 = c$ választással $f = g(f_1, f_2)$ és mivel $f - c \geq 0$, $|f| \leq |f - c| + |c| = f - c + |c|$, tehát f abszolút integrálható. Teljesen hasonlóan adódik, hogy ha egy f integrálható függvény felülről korlátos, akkor abszolút integrálható. Ha f komplex értékű abszolút integrálható függvény, akkor $g(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, $f_1 = \Re(f)$, $f_2 = \Im(f)$ választással, az $|f| \leq |f_1| + |f_2|$ becslést felhasználva kapjuk, hogy $|f|$ integrálható. Teljesen hasonlóan adódik, hogy egy $\mathbb{K}^n$ -beli értékű abszolút integrálható függvényre $|f|$ integrálható. Végül, $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$ választással, ha f_1 abszolút integrálható függvény, f_2 pedig korlátos integrálható függvény, akkor az $|f_1 f_2| \leq c |f_1|$ becslést felhasználva, ahol $c \geq |f_2|$, kapjuk, hogy $f_1 f_2$ abszolút integrálható. Általánosabban, abszolút integrálható függvények szorzata, ha abszolút értékét majorálja egy integrálható függvény, akkor abszolút integrálható.

Sokkal általánosabban, tekintsük az összes olyan $\mathbb{R}^n$ -et $\mathbb{R}^m$ -be képező függvényekből álló $\mathcal{A}$ függvényosztályokat, amelyek tartalmazzák az összes folytonos függvényt, és amelyekből nem vezet ki a pontonkénti konvergencia, azaz ha $f_n \in \mathcal{A}$ és minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re létezik a véges $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték, akkor $f \in \mathcal{A}$. Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ az összes ilyen függvényosztályok metszetét. Nyilván $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ is tartalmazza az összes folytonos függvényt, és nem vezet ki belőle a pontonkénti konvergencia; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ elemeit *Baire-függvényeknek* nevezzük; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ azonos az $\mathbb{R}^n$ -et $\mathbb{R}^m$ -be képező úgynevezett *Borel-függvények* halmazával (lásd [17], 2.2.15). Megmutatható, hogy ha $f_i: T \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ abszolút integrálhatóak, és $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, akkor az $f(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ összetett függvény abszolút integrálható, ha valamely integrálható függvény majorálja az abszolút értékét, azaz ha $|f| \leq h$ valamely integrálható h függvényre. Durván szólva ez azt jelenti, hogy az abszolút integrálható függvényekből az analízis eszközeivel előállítható függvénnyel való függvényösszetétellel keletkező összetett függvény abszolút integrálható, ha abszolút értékben egy integrálható függvény alatt marad. Például egy c valós számra és egy f_1 abszolút integrálható függvényre a $\{x \in T: f_1(x) \geq c\}$ halmaz karakterisztikus függvénye (abszolút) integrálható, hiszen $g \circ f_1$ alakú, ahol $g(x) = 1$, ha $x \geq c$ és $g(x) = 0$, ha $x < c$; a g függvény nyilván folytonos függvények pontonkénti határértéke.

7.3.24. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ téglá és $f: T \rightarrow \mathbb{K}^n$ egy abszolút integrálható függvény. Ekkor

$$\left| \int_T f \right| \leq \int_T |f|.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $c = \int_T f$. Ekkor

$$|c|^2 = \sum_{j=1}^n c_j^2 = \sum_{j=1}^n c_j \int_T f_j(x) dx = \int_T \langle c, f(x) \rangle dx.$$

A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\langle c, f(x) \rangle \leq |c| |f(x)|,$$

így $|c|^2 \leq |c| \int_T |f|$, ahonnan következik az állítás. $\square$

7.3.25. Definíció. Legyen H egy korlátos részhalmaza $\mathbb{R}^k$ -nak, és $f: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény. Válasszunk olyan T téglát, amely tartalmazza H -t. Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in H$ és legyen $g(x) = 0$, ha $x \in T \setminus H$. Ha g integrálható T -n, illetve abszolút integrálható T -n, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható H -n, illetve abszolút integrálható H -n, és integrálját az $\int_H f = \int_T g$ összefüggéssel definiáljuk. Megjegyezzük, hogy a $k = 2$ esetben a $\iint_H f$, a $k = 3$ esetben pedig a $\iiint_H f$ jelölés is használatos. Mivel az integrál additív halmazfüggvény, f integrálhatósága, abszolút integrálhatósága és integrálja H -n nem függ az T megválasztásától, hiszen ha T' egy másik zárt téglá, amely tartalmazza T -t, akkor $T \cap T'$ is olyan zárt téglá, amely tartalmazza H -t, és k -szor alkalmazva, hogy az integrál additív halmazfüggvény, kapjuk, hogy a $T \cap T'$ feletti és az T feletti, illetve T' feletti integrál megegyezik.

7.3.26. Impropius integrál. Az egyváltozós esethez hasonlóan, a többváltozós esetben is definiálható az *impropius integrál* fogalma: $H \subset \mathbb{R}^k$ esetén egy $f: H \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre az $\int_H f$ integrált a

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{H \cap [-c, c]^k} f$$

határértékkel értelmezzük, ha ez létezik. (Vegyük észre, hogy az integrál mint halmazfüggvény additivitása miatt, ha valamely $c > 0$ -ra $H \cap [-c, c]^k$ felett f integrálható, akkor minden $0 < b < c$ -re is integrálható f a $H \cap [-b, b]^k$ halmazon felett.) Ha ez a határérték $\mathbb{K}$ -beli, akkor az impropius integrált *konvergensnek* nevezzük. Ha $f: H \rightarrow \mathbb{R}^n$, akkor is hasonlóan értelmezzük az impropius integrált, de itt csak akkor, ha a határérték $\mathbb{R}^n$ -beli. Ha minden $c > 0$ -ra f abszolút integrálható a $H \cap [-c, c]^k$ halmazon, és az $\int_H |f|$ impropius integrál konvergens, akkor *abszolút konvergens impropius integrálról* beszélünk. Az impropius integrál szokásos tulajdonságai itt is az integrálás és a határértékképzés tulajdonságaiból következnek.

7.3.27. Mérték. Egy $H \subset \mathbb{R}^k$ korlátos halmazt *mérhetőnek* nevezzük, ha a konstans 1 függvény integrálható H -n. Ekkor a H halmaz $|H|$ *mértékét* a konstans 1 függvény H felett vett integráljaként, azaz a $|H| = \int_H 1$ összefüggéssel definiáljuk. Ez a jelölés téglákra összhangban van az eddigivel. Egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^k$ halmazt akkor nevezzük *mérhetőnek*, ha a konstans 1 függvény impropius integrálja értelmezve van; ekkor a H halmaz $|H|$ *mértékét* a konstans 1 függvény H felett vett impropius integráljaként, azaz itt is a $|H| = \int_H 1$ összefüggéssel definiáljuk (de most lehet $+\infty$ is). Egy dimenzióban a mérték a *hosszt*, két dimenzióban a *területet*, három dimenzióban a *térfogatot*, $\mathbb{R}^k$ -ban a k *dimenziós térfogatot* adja.

Nyilván ha H nullahalmaz, akkor karakterisztikus függvénye majdnem mindenütt nulla, így H mérhető és $|H| = 0$. A megfordítás a Lebesgue-integrál elméletét felhasználva adódik: ha H mérhető, és $|H| = 0$, akkor H nullahalmaz.

7.3.28. Tétel. Ha $H, K \subset \mathbb{R}^k$ mérhetőek, akkor $H \cap K$, $H \cup K$ és $H \setminus K$ is. Ha H és K diszjunktak, akkor $|H \cup K| = |H| + |K|$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy H és K korlátosak. Az első állítás az abszolút integrálható függvényre tett megjegyzésből következik, mert $\chi_{H \cap K} = \chi_H \chi_K$, $\chi_{H \cup K} = \chi_H + \chi_K - \chi_{H \cap K}$ és $\chi_{H \setminus K} = \chi_H - \chi_{H \cap K}$. A második állítás következik az integrál additivitásából. Az általános eset határátmenettel következik. $\square$

7.3.29. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$. Ha $f: H \rightarrow \mathbb{K}^n$ abszolút impropius integrálható H -n, akkor az impropius integrálja is konvergens.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f valós értékű. Legyen $A = \int_H |f|$ és $\varepsilon > 0$. Van olyan K_1 , hogy ha $b > K_1$, akkor $\int_{H \cap [-b, b]^k} |f| > A - \varepsilon$. Innen ha $b, c > K_1$, $b < c$, akkor $|\int_{H \cap ([-c, c]^k \setminus [-b, b]^k)} f| < \varepsilon$; ez abból következik, hogy

$$\left| \int_{H \cap ([-c, c]^k \setminus [-b, b]^k)} f \right| \leq \int_{H \cap ([-c, c]^k \setminus [-b, b]^k)} |f| = \int_{H \cap [-c, c]^k} |f| - \int_{H \cap [-b, b]^k} |f|,$$

és a jobb oldalon álló számok nagyobbak, mint $A - \varepsilon$, de nem nagyobbak, mint A .

Mivel $|\int_{H \cap [-b, b]^k} f| \leq \int_{H \cap [-b, b]^k} |f| \leq A$, az $\int_{H \cap [-b, b]^k} f$ számok halmaza korlátos. Legyen

$$I = \lim_{d \rightarrow +\infty} \sup_{c > d} \int_{H \cap [-c, c]^k} f.$$

A határérték létezik, mivel a $d \mapsto \sup_{c > d} \int_{H \cap [-c, c]^k} f$ függvény monoton csökkenő és korlátos. Van olyan K_2 , hogy ha $d > K_2$, akkor $I + \varepsilon > \sup_{c > d} \int_{H \cap [-c, c]^k} f \geq I$. Legyen $K = \max\{K_1, K_2\}$, és $b > K$. Válasszunk olyan $c > b$ számot, amelyre

$$I + \varepsilon > \int_{H \cap [-c, c]^k} f > I - \varepsilon.$$

Mivel

$$\int_{H \cap [-c, c]^k} f - \int_{H \cap [-b, b]^k} f = \int_{H \cap ([-c, c]^k \setminus [-b, b]^k)} f,$$

kapjuk, hogy $I + 2\varepsilon > \int_{H \cap [-b, b]^k} f > I - 2\varepsilon$, ha $b > K$.

A komplex esetben ugyanígy adódik, hogy $\Re(f)$ és $\Im(f)$ improprius integrálja konvergens. Végül az általános esetben ugyanez adódik koordinátánként. $\square$

7.3.30. Tétel. Ha $H, K \subset \mathbb{R}^k$, $H \subset K$, H mérhető, és $f: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ abszolút (improprius) integrálható K -n, akkor H -n is. Ha H és K diszjunktak és mérhetőek, akkor egy $f: H \cup K \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény pont akkor abszolút (improprius) integrálható $H \cup K$ -n, ha H -n és K -n abszolút (improprius) integrálható, és ekkor

$$\int_{H \cup K} f = \int_H f + \int_K f.$$

Bizonyítás. Elég a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 1$ esettel foglalkozni. Az első állítás bizonyításához először tegyük fel, hogy K korlátos, valamely T téglára $K \subset T$. Ha $x \in K$ esetén $g(x) = f(x)$ és nulla egyébként, akkor az abszolút integrálható függvényekről mondottak szerint $h(x) = g(x) \cdot \chi_H(x)$ is abszolút integrálható T -n. A nemkorlátos eset innen határátmenettel következik.

A második állítás bizonyításához először ismét tegyük fel, hogy H és K korlátosak, valamely T téglára $H, K \subset T$. Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in H \cup K$ és nulla egyébként. Ha f abszolút integrálható $H \cup K$ -n, akkor az eddig bizonyítottak szerint H -n és K -n is, és mivel $g = g \cdot \chi_H + g \cdot \chi_K$, kapjuk az állítást. Ha f abszolút integrálható H -n és K -n, akkor $g \cdot \chi_H$ és $g \cdot \chi_K$ abszolút integrálhatóak, és így összegük is, tehát f abszolút integrálható $H \cup K$ -n. Az általános eset határátmenettel következik. $\square$

7.3.31. Normál integrációs tartomány. Egy $H \subset \mathbb{R}^{k+1}$ halmazt *normál integrációs tartománynak* vagy rövidebben *normál tartománynak* nevezzük az utolsó koordinátára nézve, ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^k$ téglá és vannak olyan $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f \leq g$ a T -n mindenütt, és

$$\{(x, y): x \in T, f(x) \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$$

Hasonlóan definiálható normál tartomány bármely más koordinátára nézve.

Például egy origó középpontú, $r > 0$ sugarú $\mathbb{R}^{k+1}$ -beli zárt gömb normál tartomány; ez $I = [-r, r]^k$,

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - |x|^2}, & \text{ha } |x| < r, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - |x|^2}, & \text{ha } |x| < r, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

választással adódik.

7.3.32. Tétel. Normál tartomány mérhető.

* **Bizonyítás.** Elég belátni, hogy a

$$\{(x, y) : x \in T, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$$

halmaz, az f grafikonja nullahalmaz, mert $a = \inf_{x \in I} f(x)$, $b = \sup_{x \in I} g(x)$ jelölésekkel ∂H része f és g grafikonja, valamint a $\partial I \times [a, b]$ halmaz egyesítésének, és ez utóbbi nyilván nullahalmaz. Az f folytonossága miatt adott $\varepsilon > 0$ -hoz és minden $t \in T$ -hez van olyan $\delta(t) > 0$, hogy ha $|x - t| < \delta(t)$, akkor $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Legyen $T_1, T_2, \dots, T_n$ egy δ -finom felosztása T -nek. A $T_j \times [f(t_j) - \varepsilon, f(t_j) + \varepsilon]$, $j = 1, 2, \dots, n$ téglák $2\varepsilon|T|$ -nél kisebb összmértékű lefedését alkotják f grafikonjának. $\square$

7.3.33. Példa: forgástest térfogata. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy mindenütt pozitív, folytonos függvény. Határozzuk meg az ezen függvény grafikonjának az x tengely körüli forgatásával kapott

$$H = \{(x, y, z) : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

forgástest térfogatát. A $K = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ jelöléssel, az $y = f(x) \sin t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} |H| &= \iiint_H 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_{-K}^K \int_{-K}^K \chi_H \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} 2\sqrt{f^2(x)-y^2} \, dy \, dx = \int_a^b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{f^2(x)-f^2(x)\sin^2 t} f(x) \cos t \, dt \, dx \\ &= \int_a^b 2f^2(x) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \, dx = \int_a^b f^2(x) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \, dt \, dx \\ &= \int_a^b f^2(x) \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx. \end{aligned}$$

7.3.34. Példa: tehetetlenségi nyomaték. Legyen H egy test, ρ a sűrűség, mint a hely függvénye. A test z tengely körüli megforgatásakor fellépő *tehetetlenségi nyomaték* definíció szerint

$$J_z = \iiint_H (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

A definíciót az indokolja, hogy egy olyan végtelen kicsiny dx szélességű, dy mélységű és dz magasságú téglátömege, amelynek egyik csúcsa az (x, y, z) pont, $\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka pedig $(x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.

7.3.35. Rademacher tétel. Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz és legyen $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-függvény. Ekkor g majdnem mindenütt differenciálható és g' abszolút integrálható.

Bizonyítás. A bizonyítás a Lebesgue-integrál elméletét használja, lásd a [35] könyvet, 9.3.5. tétel. $\square$

7.3.36. Tétel: integráltranszformációs formula. Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz és $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény.

(1) Ha $A \subset V$ mérhető, akkor $g(A)$ is és

$$|g(A)| \leq \int_A |\det g'(y)| dy;$$

(2) ha g kölcsönösen egyértelmű A -n, f pedig abszolút integrálható $g(A)$ -n, akkor a jobb oldali integrál is létezik és

$$\int_{g(A)} f(x) dx = \int_A f(g(y)) \cdot |\det g'(y)| dy.$$

A $\det g'(y)$ mennyiség a

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^k$$

mátrix determinánsa, hagyományos jelölése

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}$$

szokásos elnevezése pedig *Jacobi-determináns*. Szemléletes jelentése a $\partial_1 g, \partial_2 g, \dots, \partial_k g$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogata. A tétel szemléletes jelentése, hogy egy olyan végtelen kicsiny $dy_1, dy_2, \dots, dy_k$ oldalhosszakkal rendelkező téglá, amelynek egyik csúcsa az y pont, az $x = g(y)$ helyettesítéskor egy olyan paralelepipedonba megy át, amelynek élei az $x = g(y)$ pontból induló

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1, \frac{\partial g}{\partial y_2} dy_2, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k} dy_k$$

vektorok.

* **Bizonyítás.** A tételt nem bizonyítjuk, a Lebesgue-elmélet felhasználásával bizonyítható. Lásd a [35] könyvet, 9.3.9 tétel. $\square$

7.3.37. Példák: polár-, henger- és gömbi koordináták. Forgásszimmetrikus síkbeli problémáknál az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$ összefüggésekkel polárkoordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \leq 0$, $y = 0$ félegyenes kivételével az egész síkra, inverzével együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{array} \right| = r.$$

A z tengelyre forgásszimmetrikus térbeli problémáknál az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\infty < z < \infty$ összefüggésekkel hengerkoordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \leq 0$, $y = 0$, $z \in \mathbb{R}$ félsík kivételével az egész térre, az inverzával együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Gömbszimmetrikus térbeli problémáknál a földi koordinátázásnak megfelelő

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta,$$

$$0 < r < +\infty, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

összefüggésekkel gömbi koordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \leq 0$, $y = 0$, $-\infty < z < +\infty$ félsík kivételével az egész térre, az inverzával együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = r^2 \cos \vartheta.$$

(Ha az $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < \vartheta < \pi$ koordinátázást használjuk, akkor $r^2 \sin \vartheta$ adódik.)

7.3.38. Példa. Egy R sugarú, origó középpontú gömb z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka gömbi koordinátákra áttérve:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^4 \cos^3 \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^R r^4 \, dr = \frac{8\pi}{15} R^5. \end{aligned}$$

7.3.39. Tétel: paraméteres integrálok differenciálása. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és $K \subset \mathbb{R}^k$ egy kompakt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f: I \times K \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre minden $t \in I$ -re létezik a

$$\varphi(t) = \int_K f(t, x) \, dx$$

integrál, továbbá — a végpontokban bal, illetve jobb oldali deriváltat értve — minden $(t, x) \in I \times K$ -ra létezik és folytonos az f_t parciális derivált. Ekkor φ differenciálható I -n és minden $t \in I$ -re

$$\varphi'(t) = \int_K f_t(t, x) \, dx.$$

* **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f_t folytonos az $I \times K$ kompakt halmazon, ott egyenletesen is folytonos, így van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in K$, $t, u \in I$ és $|t - u| < \delta$, akkor $|f_t(t, x) - f_t(u, x)| < \varepsilon$. Legyen $s \in I$ úgy, hogy $0 < |t - s| < \delta$ teljesüljön. A Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$$\frac{f(s, x) - f(t, x)}{s - t} = f_t(u, x),$$

ahol u a t és s között van és függ t -n és s -en kívül x -től is. Integrálva x szerint, azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} - \int_K f_t(t, x) dx \right| \leq \varepsilon |K|.$$

Itt f_t azért integrálható K -n, mert folytonos és K mérhető: lásd a 8.1.21 következményt. Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk, hogy φ differenciálható t -ben, és deriváltja $\int_K f_t(t, x) dx$.

7.3.40. Integrálás felületeken és felszín. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és egy $g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ n dimenziós Lipschitz-felület differenciálható az $x \in D$ pontban, vizsgáljuk meg a

$$\det(g'(x)^* \cdot g'(x)) = \begin{vmatrix} \langle \partial_1 g(x), \partial_1 g(x) \rangle & \dots & \langle \partial_1 g(x), \partial_n g(x) \rangle \\ \langle \partial_2 g(x), \partial_1 g(x) \rangle & \dots & \langle \partial_2 g(x), \partial_n g(x) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \partial_n g(x), \partial_1 g(x) \rangle & \dots & \langle \partial_n g(x), \partial_n g(x) \rangle \end{vmatrix}$$

szám geometriai jelentését. Az $\mathbb{R}^m$ -beli

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_n g(x)$$

vektorokból álló vektorrendszert az általuk kifeszített altér ortogonális komplementerének egy ortonormált bázisával kiegészítve $\mathbb{R}^m$ egy bázisává, a kapott vektorrendszernek a determinánsa (a szokásos bázisra vonatkoztatva) nem más, mint a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_n g(x)$$

vektorok által az $\mathbb{R}^m$ térben kifeszített paralelepipedon (előjeles) n dimenziós térfogata. Ha ezen kibővített vektorrendszer szokásos bázisban vett mátrixát balról szorozzuk a transzponáltjával, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amelynek az $n \times n$ -es sarokminora a fenti determináns, a többi főátlóbeli elem 1, minden más elem pedig nulla. Így a fenti determináns nemnegatív, és geometriai jelentése a $\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_n g(x)$ vektorok által az $\mathbb{R}^m$ térben kifeszített paralelepipedon n dimenziós térfogatának a négyzete. Legyen

$$J(g)(x) = \sqrt{\det(g'(x)^* \cdot g'(x))},$$

ha $x \in D$ és g differenciálható x -ben. Ha $G \subset D$ mérhető halmaz és g kölcsönösen egyértelmű G -n, akkor az $F = g(G)$ felületdarabot *mérhető felületdarabnak* nevezzük és n dimenziós *felszínét* az $|F| = \int_G J(g)(x) dx$ összefüggéssel értelmezzük. Ha $f: F \rightarrow \mathbb{K}^k$ egy függvény, akkor az F feletti $\int_F f dF$ vagy $\int_F f(y) dF(y)$ vagy $\int_F f(y) dy$ *felületi integrálját* az

$$\int_F f dF = \int_G f(g(x)) J(g)(x) dx$$

integrálként értelmezzük, ha a jobb oldalon álló függvény abszolút integrálható, és azt mondjuk, hogy f *abszolút integrálható* F -en.

A definíció mögött az a heurisztika áll, hogy egy $\mathbb{R}^n$ -beli „végtelen kicsiny” téglá, amelynek egyik csúcspontja x , oldalai pedig $dx_1, \dots, dx_n$, képe a g leképezésnél egy olyan $\mathbb{R}^m$ -beli n dimenziós paralelepipedon, amelynek oldalai $\partial_1 g(x) dx_1, \dots, \partial_n g(x) dx_n$, és így n dimenziós felszíne $J(g)(x) dx_1 \cdots dx_n$.

A felületi integrál és a felszín fontos tulajdonsága, hogy nem függ F előállításától: ha g és $\tilde{g}$ két n dimenziós Lipschitz-felület, és $g(G) = \tilde{g}(\tilde{G}) = F$ valamely $G, \tilde{G}$ mérhető halmazokra, akkor

$$\int_G J(g)(x) dx = \int_{\tilde{G}} J(\tilde{g})(x) dx,$$

továbbá bármely $f: F \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvényre

$$\int_G f(g(x)) J(g)(x) dx = \int_{\tilde{G}} f(\tilde{g}(x)) J(\tilde{g})(x) dx,$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal abszolút integrálható, akkor a másik is, és megegyeznek. Ez indokolja az $|F|$, illetve $\int_F f dF$ jelölést. A bizonyítás könnyen adódik abból, hogy a felszín a Hausdorff-mérték, a felületi integrál pedig a Hausdorff-mérték szerinti integrál: lásd a [35] könyvben a 9.3.9. felszínképletet.

A felszín és a felületi integrál definíciójának megértéséhez vizsgáljuk meg az $m = 3$ esetet.

Ha $n = 1$, és F egy g egyszerű sima görbe értékkészlete, akkor $J(g)(x) = |g'(x)|$, így azt kapjuk, hogy $|F|$ a görbe hossza.

Ha $n = 2$, akkor

$$\begin{aligned} J(g)(x) &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \partial_1 g(x), \partial_1 g(x) \rangle & \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x) \rangle \\ \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x) \rangle & \langle \partial_2 g(x), \partial_2 g(x) \rangle \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{|\partial_1 g(x)|^2 |\partial_2 g(x)|^2 - \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x) \rangle^2} \\ &= |\partial_1 g(x)| |\partial_2 g(x)| \sqrt{1 - \left(\frac{\langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x) \rangle}{|\partial_1 g(x)| |\partial_2 g(x)|} \right)^2} \\ &= |\partial_1 g(x)| |\partial_2 g(x)| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = |\partial_1 g(x)| |\partial_2 g(x)| \sin \alpha \\ &= |\partial_1 g \times \partial_2 g|, \end{aligned}$$

ahol

$$\cos \alpha = \left\langle \frac{\partial_1 g(x)}{|\partial_1 g(x)|}, \frac{\partial_2 g(x)}{|\partial_2 g(x)|} \right\rangle,$$

azaz α az érintővektorok által bezárt szög. Így $J(g)(x)$ geometriai jelentése a $g(x)$ -beli érintővektorok által kifeszített paralelogramma területe.

Hasonlóan $n = 3$ esetén $J(g)(x)$ geometriai jelentése a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \partial_3 g(x)$$

érintővektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. Egyébként ekkor

$$\begin{aligned} J(g)(x) &= \sqrt{\det(g'(x)^* \cdot g'(x))} = \sqrt{\det(g'(x)^*) \cdot \det(g'(x))} \\ &= \sqrt{\det(g'(x))^2} = |\det(g'(x))|, \end{aligned}$$

azaz az integráltranszformációs formulában szereplő szorzót most eredeti alakjában kapjuk vissza.

* **7.3.41. Példa: forgásfelület felszíne.** Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy mindenütt pozitív, folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg az ezen függvény grafikonjának az x tengely körüli forgatásával kapott F forgásfelület felszínét. A felület egy előállítás: $x = u$, $y = f(u) \cos v$, $z = f(u) \sin v$, $a \leq u \leq b$, $0 \leq v < 2\pi$. Ebből

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(u) \cos v & -f(u) \sin v \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$Jg(u, v) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{vmatrix}} = f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2},$$

és így

$$|F| = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} dv du = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

Függvénysorozatok és függvénysorok

8.1 Pontonkénti és egyenletes konvergencia

8.1.1. Függvényterek, függvénysorozatok. Legyen X tetszőleges halmaz. Az X -et $\mathbb{K}^k$ -ba képező függvények terében két konvergencia játssza a legfontosabb szerepet. Azt mondjuk, hogy az $f_n: X \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvények sorozata az $x \in X$ pontban *konvergál* az $f: X \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvényhez, ha $\mathbb{K}^k$ -ban $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Azon pontok halmazát, ahol a konvergencia fennáll, a függvénysorozat *konvergenciahalmazának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $f_n: X \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvények sorozata *pontonként konvergál* az $f: X \rightarrow \mathbb{K}^k$ függvényhez, ha $f_n(x) \rightarrow f(x)$ minden $x \in X$ -re. Ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n \geq N$, akkor $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f_n *egyenletesen konvergál* f -hez. Az egyenletes konvergenciából nyilván következik a pontonkénti. Mivel láttuk, hogy $\mathbb{K}^k$ normatartóan azonosítható $\mathbb{R}^{2k}$ -val, szorítkozhatunk euklideszi térbeli értékű függvényekre.

*** 8.1.2. Approximációs lemma.** Legyen f az X halmazon értelmezett nemnegatív függvény. Ekkor létezik véges értékkészletű függvényeknek egy s_n sorozata, amely monoton növekedve pontonként konvergál f -hez. A függvények választhatók racionális értékűeknek. Ha f korlátos, a konvergencia egyenletes.

Bizonyítás. Indukcióval, legyen $s_0 \equiv 0$, és legyen $s_n(x) = s_{n-1}(x) + 1/n$, ha $f(x) - s_{n-1}(x) \geq 1/n$, egyébként legyen $s_n(x) = s_{n-1}(x)$. Mivel $f(x) < +\infty$, végtelen sok n -re $s_n(x) = s_{n-1}(x)$, és minden ilyen n -re $k \geq n$ esetén $f(x) - s_k(x) < 1/n$. Ha f korlátos, akkor a legkisebb ilyen n egy x -től független korlát alatt marad.

8.1.3. Cauchy-kritérium függvénysorozatokra. Az előző pont jelöléseivel az f_n függvénysorozat akkor és csak akkor konvergál egyenletesen egy f függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq N$ esetén

$$(1) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

minden $x \in X$ -re.

Bizonyítás. Ha f_n egyenletesen konvergál f -hez, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ minden $x \in X$ -re. Innen $n, m \geq N$ esetén (1) teljesül minden $x \in X$ -re.

Megfordítva, legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n, m \geq N$ esetén (1) fennáll minden $x \in X$ -re. Mivel eszerint bármely $x \in X$ -re $f_n(x)$ Cauchy-sorozat, konvergens is. Jelölje $f(x)$ a határértékét. (1)-ből $m \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $n \geq N$ esetén $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ minden $x \in X$ -re. $\square$

8.1.4. Függvénysorok. Legyen X egy tetszőleges halmaz. Az X -et $\mathbb{R}^k$ -ba képező függvények körében értelmezve van függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciáját a sorokhoz hasonlóan a részösszegek pontonkénti, illetve egyenletes konvergenciájával értelmezzük.

8.1.5. Weierstrass-kritérium. Legyen X egy halmaz, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ egy függvénysorozat, és tegyük fel, hogy $|f_n(x)| \leq M_n$, ha $x \in X$ és $n = 0, 1, \dots$. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergál X -en.

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m \geq n \geq N$, akkor

$$\left| \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^m M_j \leq \varepsilon.$$

Így a Cauchy-kritériumból következik az egyenletes konvergencia. $\square$

8.1.6. Határátmenetek felcserélése. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^\ell$, $f, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}^k$, és a torlódási pontja A -nak. Ha f_n egyenletesen konvergál A -n f -hez, és minden n -re létezik $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$, akkor a b_n sorozat konvergens, és ha határértéke B , akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, más szóval a két határérték felcserélhető, azaz

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor van olyan N , hogy ha $n \geq N$, akkor $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ minden $x \in A$ -ra. Képezzük az $x \rightarrow a$ határértéket: azt kapjuk, hogy $|b_n - b_m| \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy b_n Cauchy-sorozat, így konvergens; jelölje B a határértékét. Nyilván

$$|f(x) - B| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - B|.$$

Válasszunk olyan n -et, amelyre egyrészt $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3$ minden $x \in A$ -ra, másrészt $|b_n - B| \leq \varepsilon/3$. Erre az n -re válasszunk olyan V környezetét a -nak, amelyre $a \neq x \in A \cap V$ esetén $|f_n(x) - b_n| \leq \varepsilon/3$. Ekkor az is teljesül, hogy $|f(x) - B| \leq \varepsilon$. $\square$

8.1.7. Tétel. Ha $A \subset \mathbb{R}^\ell$, és az $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ folytonos függvények egyenletesen konvergálnak az $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvényhez, akkor f folytonos A -n.

Bizonyítás. Következik a határértékekre vonatkozó előző tételből $b_n = f_n(a)$ választással. $\square$

*** 8.1.8. Megjegyzés.** Az előző tételből is levezethető hatványsorok összegfüggvényének a folytonossága: ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R és $0 < r < R$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergens, így az $\{x \in \mathbb{K}: |x-c| \leq r\}$ halmazon egyenletes a konvergencia, így a belsejében az összegfüggvény folytonos. Mivel a konvergenciatartomány minden pontja belső pontja egy ilyen intervallumnak, illetve körlapnak, az összegfüggvény mindenütt folytonos.

8.1.9. Példa. Az előző tételben a pontonkénti konvergencia nem elegendő. Ha $f_n(x) = x^2/(1+x^2)^n$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, de összege 0, ha $x = 0$, és $1+x^2$, ha $x \neq 0$, azaz nem folytonos a nullában, ami mutatja, hogy a konvergencia nem egyenletes.

8.1.10. Példa. A $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(m! \pi x))^{2n}$ határérték létezik, ha $x \in \mathbb{R}$, és a Dirichlet-függvény.

8.1.11. Tétel: határátmenet és integrál felcserélése egyenletes konvergenciánál. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ egy zárt téglá, és $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények egy sorozata, amely egyenletesen konvergál egy $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor f is integrálható és

$$\int_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Van olyan N , hogy $n \geq N$ esetén $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ minden $x \in T$ -re. Nyilván bármely P felosztására T -nek $|s(f, P) - s(f_n, P)| \leq \varepsilon|T|$ ha $n \geq N$. Létezik olyan $\delta_n: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy minden δ_n -finom P felosztására T -nek $|s(f_n, P) - \int_T f_n| \leq \varepsilon$. Innen $\delta = \min\{\delta_n, \delta_m\}$ választással egy δ -finom P felosztást használva $|\int_T f_n - \int_T f_m| \leq 2\varepsilon(|T| + 1)$, ha $n, m \geq N$, azaz az integrálok sorozata Cauchy-sorozat. Legyen a határértéke S . Mivel határátmenettel $|\int_T f_n - S| \leq 2\varepsilon(|T| + 1)$, például egy δ_N -nél finomabb P felosztásra $|s(f, P) - S| \leq 3\varepsilon(|T| + 1)$, azaz f integrálható és integrálja S .

8.1.12. Példa. Legyen $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, ha $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$ Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. De a konvergencia nem lehet egyenletes, mert

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^n dx = \frac{1}{2n + 2},$$

tehát

$$\int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = \frac{n}{2n + 2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ha $0 \leq x \leq 1$ esetén $f_n(x) = n^2x(1 - x^2)^n$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de

$$\int_0^1 n^2x(1 - x^2)^n dx = \frac{n^2}{2n + 2} \rightarrow +\infty \neq 0.$$

Mint a példák mutatják, a pontonkénti konvergencia nem elegendő, valamilyen kiegészítő feltétel még szükséges. Az egyenletes konvergenciánál jóval gyengébb kiegészítő feltételek szerepelnek a következő tételben, a bizonyításhoz azonban új fogalmak bevezetésére és számos segédtételekre lesz szükségünk.

* **8.1.13. Definíció.** Egy $T \subset \mathbb{R}^n$ téglá összes résztégláin értelmezett valós értékű $\mu: T' \mapsto \mu(T')$ függvényre azt mondjuk, hogy *additív*, ha bármely P felosztására T -nek $\mu(T) = \sum_{T' \in P} \mu(T')$; ha a $\leq$ teljesül, akkor *szubadditív*nak, ha pedig a $\geq$, akkor *szuperadditív*nak hívjuk a téglafüggvényt. Például $T' \mapsto |T'|$ additív, így szubadditív és szuperadditív is.

Legyen a $T \subset \mathbb{R}^n$ téglá összes pontozott résztégláin értelmezett U valós értékű függvényre egy adott P pontozott felosztáshoz tartozó *integrálközelítő összeg*

$$s(U, P) = \sum_{(T', t) \in P} U(T', t).$$

Az U -t *integrálhatónak* nevezzük, ha van olyan $S \in \mathbb{R}$, az *integrálja*, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, amelyre minden δ -finom P pontozott felosztásra $|s(U, P) - S| \leq \varepsilon$. Ugyanúgy, mint a függvények integráljánál, belátható, hogy az integrál egyértelmű, és létezéséhez szükséges és elégséges a Cauchy-kritérium teljesülése: minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy bármely δ -finom P', P'' pontozott beosztásokra $|s(U, P') - s(U, P'')| \leq \varepsilon$. Nyilván az integrál valós lineáris és az is igaz, hogy ha U nemnegatív és az integrál létezik, akkor az is nemnegatív, így az integrál monoton. Bizonyításával együtt érvényben marad az az állítás, hogy ha az integrál létezik egy T téglán, akkor annak minden T' résztégláján is létezik; teljesül az is, hogy a $T' \mapsto \int_{T'} U$ függvény additív (a bizonyítás változatlan).

*** 8.1.14. Segédteétel.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ egy téglá, U az T összes pontozott résztégláin értelmezett valós értékű függvény, amely integrálható T -n, $\varepsilon > 0$ és $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, amelyre minden δ -finom pontozott P', P'' felosztásra

$$|s(U, P') - s(U, P'')| \leq \varepsilon$$

teljesül. Ekkor létezik egy, a T téglá összes T' résztégláin értelmezett szuperadditív ω függvény, hogy bármely δ -finom felosztás bármely (T', t) pontozott résztéglájára

$$\left| U(T', t) - \int_{T'} U \right| \leq \omega(T')$$

és $\omega(T) \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Tetszőleges T' résztéglájára T -nek legyen $\alpha(T') = \sup s(U, P')$ és $\beta(T') = \inf s(U, P')$, ahol P' tetszőleges δ -finom pontozott felosztása T' -nek. Nyilván $\beta(T') \leq \int_{T'} U \leq \alpha(T')$, mivel az összeg bármilyen közel kerülhet az integrálhoz, és $\beta(T) \leq \alpha(T) \leq \beta(T) + \varepsilon$. Ha $T_1, T_2, \dots, T_k$ tetszőleges felosztása T -nek, akkor a T_i résztéglákhoz tartozó tetszőleges δ -finom P_i pontozott felosztások egyesítése pontozott felosztása T -nek, így $\alpha(T) \geq \sum_{i=1}^n s(U, P_i)$. A jobb oldalon sorra szuprémumot véve $P_1, P_2, \dots, P_k$ -ra, adódik, hogy α szuperadditív. Hasonlóan adódik, hogy β szubadditív. Mivel bármely δ -finom P felosztás (T', t) pontozott téglájára $\beta(T') \leq U(T', t) \leq \alpha(T')$, azt kapjuk, hogy

$$\left| U(T', t) - \int_{T'} U \right| \leq \alpha(T') - \beta(T'),$$

és $\omega(T') = \alpha(T') - \beta(T')$ választható.

Legyen m a $P \setminus P'$ elemeinek száma, és $\eta > 0$ tetszőleges. Minden $(T', t) \in P \setminus P'$ -höz van olyan $\delta_{T'}: T' \rightarrow \mathbb{R}^+$, amelyre $\delta_{T'} \leq \delta$ a T' -n és minden $\delta_{T'}$ -finom $P_{T'}$ felosztására T' -nek $|s(U, P_{T'}) - \int_{T'} U| \leq \eta/(m+1)$. Legyen $P'' = P' \cup \cup_{T' \in P \setminus P'} P_{T'}$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \left| s(U, P'') - \int_T U \right| \\ &= \left| \sum_{(T', t) \in P'} U(T', t) + \sum_{(T', t) \in P \setminus P'} s(U, P_{T'}) - \sum_{(T', t) \in P'} \int_{T'} U - \sum_{(T', t) \in P \setminus P'} \int_{T'} U \right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Innen

$$\left| \sum_{(T',t) \in P'} U(T',t) - \sum_{(T',t) \in P'} \int_{T'} U \right| < \varepsilon + \eta,$$

ahonnan következik az állítás, mivel $\eta > 0$ tetszőleges volt. $\square$

* **8.1.15. Segédteétel.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ egy téglá, U az T összes pontozott résztégláin értelmezett valós értékű függvény, amely integrálható T -n, $\varepsilon > 0$ és $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, amelyre minden δ -finom pontozott P felosztásra

$$|s(U, P) - \int_T U| \leq \varepsilon$$

teljesül. Ekkor egy adott δ -finom P pontozott felosztás bármely P' részhalmazára

$$\left| \sum_{(T',t) \in P'} \left(U(T',t) - \int_{T'} U \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen m a $P \setminus P'$ elemeinek száma, és $\eta > 0$ tetszőleges. Minden $(T',t) \in P \setminus P'$ -höz van olyan $\delta_{T'}: T' \rightarrow \mathbb{R}^+$, amelyre $\delta_{T'} \leq \delta$ a T' -n és minden $\delta_{T'}$ -finom $P_{T'}$ felosztására T' -nek $|s(U, P_{T'}) - \int_{T'} U| \leq \eta/(m+1)$. Legyen $P'' = P' \cup \bigcup_{T' \in P \setminus P'} P_{T'}$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \left| s(U, P'') - \int_T U \right| \\ &= \left| \sum_{(T',t) \in P'} U(T',t) + \sum_{(T',t) \in P \setminus P'} s(U, P_{T'}) - \sum_{(T',t) \in P'} \int_{T'} U - \sum_{(T',t) \in P \setminus P'} \int_{T'} U \right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Innen

$$\left| \sum_{(T',t) \in P'} U(T',t) - \sum_{(T',t) \in P'} \int_{T'} U \right| < \varepsilon + \eta,$$

ahonnan következik az állítás, mivel $\eta > 0$ tetszőleges volt. $\square$

* **8.1.16. Tétel.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ egy téglá, és U_k , $k = 1, 2, \dots$ a T pontozott résztégláin értelmezett valós értékű integrálható függvények egy sorozata, U pedig a T pontozott résztégláin értelmezett valós értékű függvény. Tegyük fel, hogy

(1) van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(T',t) = U(T',t)$$

minden δ -finom pontozott (T',t) résztéglájára T -nek;

(2) minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy

$$\left| s(U_k, P) - \int_I U_k \right| \leq \varepsilon$$

minden δ -finom pontozott P felosztására T -nek, ha $k = 1, 2, \dots$

Ekkor U is integrálható T -n, és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T U_k = \int_T U.$$

A tétel (2) feltétele nehezen ellenőrizhető, később egyszerűbb feltételekkel helyettesítjük.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk $\delta': T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre (1) teljesül, és olyan $\delta'': T \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre (2) teljesül $\varepsilon/2$ -vel, és legyen $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Egy δ -finom P felosztásra (2) teljesül és van olyan k_0 , hogy $k \geq k_0$ esetén

$$|s(U, P) - s(U_k, P)| \leq \varepsilon/2.$$

Így ha $k \geq k_0$, akkor $|s(U, P) - \int_T U_k| \leq \varepsilon$. Másrészt $k_1, k_2 \geq k_0$ esetén

$$|\int_T U_{k_1} - \int_T U_{k_2}| \leq 2\varepsilon,$$

így az integrálok sorozata Cauchy-sorozat, aminek létezik egy S határértéke. Erre $|s(U, P) - S| \leq \varepsilon$. Mivel ez tetszőleges δ -finom P beosztásra teljesül, a bizonyítás teljes.

□

* **8.1.17. Általános konvergenciatétel.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ téglá, $U_k, k = 1, 2, \dots$ az T -n integrálható, valós értékű pontozott téglafüggvények sorozata, U a T pontozott résztégláin értelmezett valós értékű függvény. Tegyük fel, hogy

- (1) az előző tétel (1) feltétele teljesül;
- (2) minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan, a T résztégláin értelmezett ω nemnegatív szuperaditív függvény, $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $p: T \rightarrow \mathbb{N}^+$, hogy $\omega(T) \leq \varepsilon$ és

$$|U_k(T', t) - U(T', t)| \leq \omega(T')$$

minden (T', t) pontozott résztéglájára T -nek, amelyre $T' \subset \mathbb{U}_{\delta(t)}(t)$ és $k \geq p(t)$;

- (3) létezik olyan M korlát, hogy a T minden $T_i, i = 1, 2, \dots, m$ felosztására és minden $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}^+$ indexsorozatra $|\sum_{i=1}^m \int_{T_i} U_{k_i}| \leq M$.

Ekkor U integrálható T -n és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T U_k = \int_T U.$$

Ennek a tételnek a feltételei könnyebben ellenőrizhetők, mint az előző tételé, de jóval nehezebb a bizonyítás.

Bizonyítás. A tétel következik az előző tételből, ha megmutatjuk, hogy teljesül annak (2) feltétele. Legyen $j \in \mathbb{N}^+$ és jelölje $\mathcal{Z}_j$ az összes olyan, T pontozott résztégláin értelmezett valós értékű $(T', t) \mapsto Z(T', t)$ függvények halmazát, amelyekhez létezik T -nek olyan $T_i, i = 1, 2, \dots, m$ felosztása és $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^+$ indexsorozat, hogy $k_i \geq j$ minden i -re és

$$Z(T', t) = \sum_{t \in T_i} U_{k_i}(T' \cap T_i, t)$$

minden (T', t) pontozott résztéglájára T -nek (például $U_j \in \mathcal{Z}_j$). A $\mathcal{Z}_j$ függvényrendszerre nyilván $j_1 \geq j_2$ esetén $\mathcal{Z}_{j_1} \subset \mathcal{Z}_{j_2}$, és minden $Z \in \mathcal{Z}_1$ integrálható T -n, hiszen ha $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, amelyre

$$T \cap \mathbb{U}_{\delta(t)}(t) \subset \cup_{t \in T_i} T_i$$

minden $t \in T$ -re, akkor minden δ -nál finomabb P felosztására T -nek az $s(Z, P)$ összeg felírható az $\int_{T_i} U_{k_i}$ integrálok közelítő összegeinek összegeként, így elég közel van a

$$\sum_{i=1}^m \int_{T_i} U_{k_i}$$

számhoz, ha a beosztás elég finom.

Legyen $j \in \mathbb{N}^+$ és $\varepsilon > 0$. Első lépésként vegyük észre, hogy a (2) feltételből és az előbb mondottakból következően létezik olyan nemnegatív és szuperadditív ω függvény T résztégláin és olyan $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy $|Z(T', t) - U(T', t)| \leq \omega(T')$, ha $Z \in \mathcal{Z}_k$ és (T', t) olyan δ -finom pontozott résztéglája T -nek, amelyre $k \geq j \geq p(t)$, továbbá $\omega(T) \leq \varepsilon$.

Második lépésként adott $\varepsilon > 0$ -hoz válasszunk minden $j \in \mathbb{N}^+$ -re olyan $V_j, W_j \in \mathcal{Z}_j$ függvényeket, amelyekre

$$\inf \left\{ \int_T Z: Z \in \mathcal{Z}_j \right\} + \frac{\varepsilon}{2^j} > \int_T V_j$$

és

$$\sup \left\{ \int_T Z: Z \in \mathcal{Z}_j \right\} - \frac{\varepsilon}{2^j} < \int_T W_j$$

teljesül; itt felhasználtuk a (3) feltételt. Legyen $Z \in \mathcal{Z}_j$ és $T_1, \dots, T_s$ a T páronként közös belső pont nélküli résztégláinak egy sorozata. Ekkor

$$\sum_{i=1}^s \int_{T_i} V_j - \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \sum_{i=1}^s \int_{T_i} Z \leq \sum_{i=1}^s \int_{T_i} W_j + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Valóban, ha például az első egyenlőtlenség nem állna fenn, akkor létezne olyan $Z \in \mathcal{Z}_j$, amelyre

$$\sum_{i=1}^s \int_{T_i} Z < \sum_{i=1}^s \int_{T_i} V_j - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Egészítsük ki további $T_i, i = s+1, \dots, m$ téglákkal a téglasorozatot a T egy P felosztásával. Legyen

$$Z^*(T', t) = \sum_{t \in T_i, i \leq s} Z(T' \cap T_i, t) + \sum_{t \in T_i, i > s} V_j(T' \cap T_i, t).$$

Ugyanúgy, mint fent, kapjuk, hogy ha $\delta: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, amelyre

$$T \cap \mathbb{U}_{\delta(t)}(t) \subset \cup_{t \in T_i} T_i$$

minden $t \in T$ -re, akkor minden δ -nál finomabb P felosztására T -nek az $s(Z^*, P)$ összeg felírható az $\int_{T_i} Z$, $i \leq s$ és $\int_{T_i} V_j$, $i > s$ integrálok közelítő összegeinek összegeként, így elég közel van ezek összegéhez, ha a beosztás elég finom. Innen

$$\int_T Z^* < \int_T V_j - \frac{\varepsilon}{2^j},$$

ami ellentmond V_j választásának. Hasonlóan adódik a második egyenlőtlenség.

Harmadik lépésként vegyük észre, hogy a V_j , W_j függvényekre az is teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan ω szuperadditív függvény T résztgláin, $\delta^*: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $p: T \rightarrow \mathbb{N}^+$, hogy $\omega(T) \leq \varepsilon$ és

$$|V_{p(t)}(T', t) - U_k(T', t)| \leq \omega(T'), \quad |W_{p(t)}(T', t) - U_k(T', t)| \leq \omega(T'),$$

ha (T', t) pontozott résztglája T -nek, $T' \subset \mathbb{U}_{\delta^*(t)}(t)$ és $k \geq p(t)$.

Most hozzáláthatunk a tulajdonképpeni bizonyításhoz. Legyen $\varepsilon > 0$, és $k \in \mathbb{N}^+$ -ra legyen $\delta_k: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan függvény, amelyre minden δ_k -finom pontozott felosztására T -nek

$$|s(V_k, P) - \int_T V_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad |s(W_k, P) - \int_T W_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad |s(U_k, P) - \int_T U_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Legyen $\delta(t) = \min\{\delta^*(t), \delta_1(t), \dots, \delta_{p(t)}(t)\}$, ha $t \in T$, ahol p és δ^* a harmadik lépésben szereplő függvények. Tegyük fel, hogy P egy δ -finom felosztás, és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. Az $s(U_k, P)$ összeg felírható

$$s(U_k, P) = \sum_{(T', t) \in P} U_k(T', t) = \sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} U_k(T', t) + \sum_{(T', t) \in P, k > p(t)} U_k(T', t)$$

alakban. Ha egy összeadandóban $k > p(t)$, akkor $U_k(T', t) > W_{p(t)}(T', t) - \omega(T')$, és így

$$\begin{aligned} s(U_k, P) &\geq \sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} U_k(T', t) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} W_j(T', t) - \omega(T') \\ &\geq -\varepsilon + \sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} U_k(T', t) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} W_j(T', t). \end{aligned}$$

Az első összegre, illetve a második összeg részösszegeire alkalmazva az előző lemma eredményeit, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} U_k(T', t) \geq -\frac{\varepsilon}{2^k} + \sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} \int_{T'} U_k,$$

illetve

$$\sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} W_j(T', t) \geq -\frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} \int_{T'} W_j.$$

$$s(U_k, P) \geq -\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_{(T', t) \in P, k \leq p(t)} \int_{T'} U_k + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} \int_{T'} W_j.$$

Mivel nyilván $U_k \in \mathcal{Z}_j$, ha $j = 1, 2, \dots, k-1$, a harmadik lépést felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} \int_{T'} W_j \geq \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{(T', t) \in P, p(t)=j} \int_{T'} U_k - \frac{\varepsilon}{2^j} > -\varepsilon + \sum_{(T', t) \in P, k > p(t)} \int_{T'} U_k.$$

Innen $s(U_k, P) > -3\varepsilon + \int_T U_k$. Hasonlóan kapjuk, hogy $s(U_k, P) < 3\varepsilon + \int_T U_k$. Mivel ε tetszőleges volt, és a δ függvény nem függ k -től, beláttuk, hogy az előző tétel (2) feltétele teljesül. $\square$

*** 8.1.18. Konvergenciatétel.** Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ téglá, U_k , $k = 1, 2, \dots$ az T -n integrálható, valós értékű, T pontozott résztégláin értelmezett függvények sorozata, U a T pontozott résztégláin értelmezett valós értékű függvény. Tegyük fel, hogy az előző tétel (1) és (2) feltétele teljesül és

(1) $U_k \leq U_{k+1}$, ha $k = 1, 2, \dots$, és az integrálok sorozata felülről korlátos
vagy

(2) léteznek olyan T integrálható valós értékű V és W , a T pontozott résztégláin értelmezett függvények, amelyekre $V \leq U_k \leq W$, ha $k = 1, 2, \dots$

Ekkor U integrálható T -n és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T U_k = \int_T U.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az (1) feltételből következik az előző tétel (3) feltétele. Legyen T_i , $i = 1, 2, \dots, m$ egy felosztása T -nek, és $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^+$ egy indexsorozat. Legyen k_* az indexsorozat minimuma, k^* pedig a maximuma, és legyen M az integrálok sorozata egy felső korlátjának és az $|\int_T U_1|$ számnak a maximuma. Mivel U_{k_i} integrálható T_i -n és

$$\int_{T_i} U_{k_*} \leq \int_{T_i} U_{k_i} \leq \int_{T_i} U_{k^*},$$

ha $i = 1, 2, \dots, m$, azt kapjuk, hogy

$$-M \leq \int_T U_{k_*} \leq \sum_{i=1}^m \int_{T_i} U_{k_i} \leq \int_T U_{k^*} \leq M.$$

Másodszor belátjuk, hogy a (2) feltételből is következik az előző tétel (3) feltétele. Legyen most M az $|\int_T V|$ és $|\int_T W|$ számok maximuma. Legyen T_i , $i = 1, 2, \dots, m$ egy felosztása T -nek, és $k-1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^+$ egy indexsorozat. Ekkor

$$\int_{T_i} V \leq \int_{T_i} U_{k_i} \leq \int_{T_i} W$$

és innen

$$-M \leq \int_T V \leq \sum_{i=1}^m \int_{T_i} U_{k_i} \leq \int_T W \leq M. \quad \square$$

8.1.19. Monoton konvergenciatétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ egy téglá, és

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

a T -n értelmezett valós értékű integrálható függvények egy monoton növekedő sorozata, amely mindenütt konvergál egy $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Tegyük fel, hogy az $\int_T f_n$ integrálok sorozata felülről korlátos. Ekkor f is integrálható, és

$$\int_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

* **Bizonyítás.** Ha (T', t) a T téglá egy pontozott résztéglája, legyen

$$U_k(T', t) = f_k(t)|T'| \quad \text{és} \quad U(T', t) = f(t)|T'|.$$

Nyilván $U_k(T', t)$ monoton növekedve tart $U(T', t)$ -hez minden (T', t) -re, így az általános konvergenciatétel (1) feltétele teljesül. Mivel $\int_T U_k = \int_T f_k$, teljesül a konvergenciatétel (1) feltétele is, így csak azt kell megmutatnunk, hogy az általános konvergenciatétel (2) feltétele teljesül. Nyilván létezik olyan $p: K \rightarrow \mathbb{N}^+$, hogy $|f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon/(|K| + 1)$, ha $k \geq p(t)$. Legyen $\omega(T') = \varepsilon|T'|/(|T| + 1)$, δ pedig tetszőleges. $\square$

8.1.20. Dominált konvergenciatétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ egy téglá, és legyen $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények sorozata, amely mindenütt konvergál az $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $g, h: T \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények, hogy $g \leq f_n \leq h$ mindenütt. Ekkor f is integrálható és

$$\int_T f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

* **Bizonyítás.** Ha (T', t) a T téglá egy pontozott résztéglája, legyen

$$U_k(T', t) = f_k(t)|T'|, \quad U(T', t) = f(t)|T'|, \quad V(T', t) = g(t)|T'| \quad W(T', t) = h(t)|T'|.$$

Nyilván $U_k(T', t)$ tart $U(T', t)$ -hez minden (T', t) -re, így az általános konvergenciatétel (1) feltétele teljesül. Mivel $\int_T U_k = \int_T f_k$, $\int_T V = \int_T g$, $\int_T W = \int_T h$, teljesül a konvergenciatétel (2) feltétele is, így csak azt kell megmutatnunk, hogy az általános konvergenciatétel (2) feltétele teljesül. Nyilván létezik olyan $p: T \rightarrow \mathbb{N}^+$, hogy $|f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon/(|T| + 1)$, ha $k \geq p(t)$. Legyen itt is $\omega(T') = \varepsilon|T'|/(|T| + 1)$. $\square$

8.1.21. Következmény. Az $\mathbb{R}^m$ kompakt részhalmazai mérhetőek.

* **Bizonyítás.** Legyen $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt halmaz, T pedig egy K -t tartalmazó téglalap. A T -n az $f_n(x) = 1/(1 + n \cdot d(x, K))$ összefüggéssel definiált folytonos függvények pontonként konvergálnak K karakterisztikus függvényéhez, így az eredmény következik a dominált konvergencia tételből. $\square$

8.1.22. Bevezető példa. Legyen $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$, ha $n = 1, 2, \dots$. A függvény-sorozat $\mathbb{R}$ -en egyenletesen konvergál az azonosan nulla f függvényhez, de

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$$

nem konvergál $f' \equiv 0$ -hoz, például $x = 0$ -ra. (Megmutatható, hogy sehol sem.)

8.1.23. Függvénysorozat tagonkénti differenciálása. Legyen $G \subset \mathbb{K}^\ell$ tartomány, $f_n: G \rightarrow \mathbb{K}^k$ differenciálható függvények egy sorozata. Ha legalább egy pontban f_n konvergens, és f'_n lokálisan egyenletesen konvergens (azaz minden pontnak van olyan környezete, amelyen egyenletesen konvergens), akkor az f_n sorozat lokálisan egyenletesen konvergens, és $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ jelöléssel f differenciálható és $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$.

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

* **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a $\mathbb{B}_r(a) \subset G$ gömbön az f'_n sorozat konvergenciája egyenletes. Ekkor a középérték-egyenlőtlenségből

$$(1) \quad \begin{aligned} \left| f_m(x) - f_n(x) - (f_m(a) - f_n(a)) \right| &\leq |x - a| \sup_{y \in \mathbb{B}_r(a)} \|f'_m(y) - f'_n(y)\| \\ &\leq r \sup_{y \in \mathbb{B}_r(a)} \|f'_m(y) - f'_n(y)\|. \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy ha f_n a $\mathbb{B}_r(a)$ gömb valamely pontjában konvergens, akkor a középpontban is, és viszont, ha a középpontban konvergens, akkor egyenletesen konvergens $\mathbb{B}_r(a)$ -n. Így egyrészt azon $x \in G$ pontok halmaza, ahol f_n lokálisan egyenletesen konvergens, nyílt és nem üres, másrészt azon pontok halmaza, ahol f_n nem konvergens, szintén nyílt, így ez utóbbi csak üres lehet. Tehát a konvergencia fennáll, sőt lokálisan egyenletes az egész G -n. Legyen $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. Meg kell mutatnunk, hogy f differenciálható, és $f' = g$. Adott $a \in G$ -hez és $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N , hogy $n, m \geq N$ esetén minden $y \in \mathbb{B}_r(a)$ -ra $\|f'_m(y) - f'_n(y)\| \leq \varepsilon$ és $\|g(a) - f'_n(a)\| \leq \varepsilon$ teljesül, tehát $\left| (g(a) - f'_n(a))(x - a) \right| \leq \varepsilon |x - a|$. Az (1) egyenlőtlenségben $m \rightarrow \infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy $n \geq N$ és $x \in \mathbb{B}_r(a)$ esetén

$$\left| f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a)) \right| \leq \varepsilon |x - a|.$$

Másrészt minden $n \geq N$ -hez van olyan $r' \leq r$, hogy $|x - a| \leq r'$ esetén

$$\left| f_n(x) - f_n(a) - f'_n(a)(x - a) \right| \leq \varepsilon |x - a|$$

teljesül. Így rögzítve egy n -et, azt kapjuk, hogy $|x - a| \leq r'$ esetén

$$\left| f(x) - f(a) - g(a)(x - a) \right| \leq 3\varepsilon |x - a|. \quad \square$$

* **8.1.24. Megjegyzés.** Ebből a tételből is levezethető a hatványsorok tagonkénti differenciálására vonatkozó tétel.

A következő tételben az egyenletes konvergenciát egy érdekes példa konstruálására használjuk.

* **8.1.25. Tétel.** *Létezik olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely sehol sem differenciálható.*

Bizonyítás. Legyen $g(x)$ az x távolsága a legközelebbi páros egésztől, azaz a páros számok halmazától. Nyilván g periodikus 2 szerint. A halmaztól vett távolság ismert tulajdonsága szerint bármely s és t esetén

$$(1) \quad |g(s) - g(t)| \leq |s - t|,$$

speciálisan g folytonos. Legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x).$$

Mivel $0 \leq g \leq 1$, a Weierstrass-kritérium szerint a sor egyenletesen konvergens, így f folytonos.

Rögzítsünk egy x valós és egy m pozitív egész számot. Legyen

$$h_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m},$$

ahol az előjelet úgy választjuk, hogy ne essen egész szám $4^m x$ és $4^m(x + h_m)$ közé; ez megtehető, mert $4^m |h_m| = 1/2$. Legyen

$$k_n = \frac{g(4^n(x + h_m)) - g(4^n x)}{h_m}.$$

Ha $n > m$, akkor $4^n h_m$ páros egész szám, ezért $k_n = 0$; ha $0 \leq n < m$, akkor (1) miatt $|k_n| \leq 4^n$. Mivel $k_m = 4^m$, ezért a következő becslést kapjuk:

$$\left| \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n k_n \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1).$$

Mivel $h_m \rightarrow 0$, következik, hogy f nem differenciálható x -ben. $\square$

* **8.1.26. Weierstrass approximációs tétele.** *Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény, akkor van olyan $\mathbb{K}$ -beli együtthatós p_n polinomsorozat, amely egyenletesen konvergál f -hez.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $[a, b] = [0, 1]$, mert lineáris helyettesítéssel $[a, b]$ -t átvihetjük $[0, 1]$ -be, és lineáris helyettesítésnél polinom polinomba megy át, sőt, a fokszáma sem változik. Legyen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény. Azt fogjuk megmutatni, hogy a

$$B_{f,n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k/n) x^k (1-x)^{n-k},$$

az úgynevezett *Bernstein-polinomok* egyenletesen konvergálnak f -hez, ha $n \rightarrow +\infty$. Kulcslépésként azt bizonyítjuk, hogy $n > 1$, $0 \leq x \leq 1$, $\delta > 0$ esetén

$$(1) \quad \sum_{|x-k/n| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Valóban,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 x^2 - 2nx \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n^2 x^2 - 2n^2 x^2 \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &+ nx \sum_{k=1}^n ((k-1)+1) \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= -n^2 x^2 + nx + (n-1)nx^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &= nx(1-x), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} nx(1-x) &\geq \sum_{|x-k/n| \geq \delta} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\geq \delta^2 n^2 \sum_{|x-k/n| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

amiből következik (1).

Most válasszunk $\varepsilon > 0$ -hoz olyan $\delta > 0$ -t, hogy $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| \leq \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$ teljesüljön, és legyen $|f(x)| \leq K$ minden $x \in [0, 1]$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} |f(x) - B_{f,n}(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{|x-k/n| \geq \delta} 2K \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ \sum_{|x-k/n| < \delta} |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

Ha n elég nagy, a jobb oldal kisebb, mint ε . $\square$

8.2 Fourier-sorok

Isten volt az első, aki Fourier-analízist művelt, amikor a fülünkbe beépített egy Fourier-analizátort.

William R. Wade (1985)

A trigonometrikus sorok elméletének kiindulópontjául egy mechanikai probléma körül kialakult vita tekinthető, amely a XVII. század közepén d'Alembert, Euler és Daniel Bernoulli között folyt le. Ez a probléma a rezgő húr problémája volt: a két végén kifizített, l hosszúságú homogén rezgő húr alakjának meghatározása egy tetzészerinti t időpontban, feltételezve, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez. ... Bernoulli arra a következtetésre jutott, hogy a

$$\sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} (t - \beta_n)$$

összegfüggvények szolgáltatják a rezgésprobléma általános megoldását. Bár az összegfüggvényről csak véges sok tag esetén evidens, hogy az $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ differenciálegyenlet megoldása, az akkori közfelfogás szerint nem kételkedett abban, hogy végtelen sok tag esetén is hasonló a helyzet. Euler kétségbevonta Bernoulli állítását. Ellentmondást látott ugyanis abban, hogy a $t = 0$ kezdeti pillanatban a megoldás szerint a húr alakját a

$$\sum_n \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} \beta_n \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

trigonometrikus sor adja meg, holott a húr kezdeti alakja nem csak „functio continua”, hanem például törtvonal-alak is lehet. Márpedig az Euler előtt lehetetlennek látszott, hogy egy ilyen „tetszőleges”, „mechanikai” görbe, amelynek egyes darabjai között semmi szerves kapcsolat sincs, egész menetében ugyanazzal a trigonometrikus sorral legyen kifejezhető. ...

Új lendületet kapott a probléma Fourier-nak a hővezetés elméletével foglalkozó, 1807-től kezdve közölt dolgozatai révén, amelyeket a szerző 1822-ben megjelent „Théorie analytique de la chaleur” című híres műve foglalt össze. E dolgozatokban újra felmerül tetszőleges függvények trigonometrikus sorokkal való előállításának kérdése; Fourier — hasonlóképpen mint Bernoulli — azt állítja, hogy ilyen előállítás lehetséges. ...

Fourier eredményei, melyeket e feltevés alapján nyert, olyan nagyszámúak, jelentősek, és a tapasztalattal egyezők voltak, hogy — félretéve Euler, d'Alembert és Lagrange ellenvéleményét — a század legkiválóbb matematikusai most már nem a feltevés elvetésére, hanem bizonyítására feszítették meg erejüket.

Szőkefalvi-Nagy Béla (1951)

8.2.1. Általánosított Pitagorasz-tétel. Legyen x_n egy (véges vagy végtelen) ortogonális sorozat egy X belső szorzat térben. Ha $x = \sum_n x_n$, akkor $\langle x, x_n \rangle = \|x_n\|^2$ és $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$, így $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$. Ha $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, akkor a $\sum_n x_n$ sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, így ha X Hilbert-tér, akkor a feltétel elégséges is $\sum_n x_n$ konvergenciájához.

* **Bizonyítás.** Véges rendszerre $\langle x, x \rangle$, illetve $\langle x, x_n \rangle$ kiszámolásával adódik az érdeemi állítás. Egyébként, ha $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ és $n > m$, akkor

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|^2,$$

így $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ részletösszegei egyszerre alkotnak Cauchy-sorozatot. Mivel $\|x\| - \|s_n\| \leq \|x - s_n\|$ és $\|s_n\| \rightarrow \|x\|$,

$$\|x\|^2 - \|s_n\|^2 = (\|x\| + \|s_n\|)\|x\| - \|s_n\| \rightarrow 0,$$

azaz

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Végül, ha $n < m$, akkor

$$\begin{aligned} |\langle x, x_n \rangle - \|x_n\|^2| &= |\langle x, x_n \rangle - \langle s_m, x_n \rangle| = |\langle x - s_m, x_n \rangle| \\ &\leq \|x - s_m\| \|x_n\| \rightarrow 0, \quad \text{ha } m \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

8.2.2. Fourier-sor. Legyen x_n egy ortonormált sorozat egy X belső szorzat térben, és $x \in X$. A $\sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$ sor az x *Fourier-sora*.

8.2.3. Tétel. Legyen x_n egy ortonormált sorozat az X Hilbert-térben. Minden $x \in X$ -re a $\sum_k \langle x, x_k \rangle x_k$ sor konvergál X -ben egy $y \in X$ elemhez, és $x - y$ ortogonális minden x_k -ra.

* **Bizonyítás.** A Bessel-egyenlőtlenségből

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle x_k|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

így a Pitagorasz-tétel második feléből következik a sor konvergenciája. Ha s_n az n -edik részletösszeg, akkor $k \leq n \rightarrow \infty$ esetén

$$\begin{aligned} |\langle x - y, x_k \rangle| &\leq |\langle x - s_n, x_k \rangle| + |\langle s_n - y, x_k \rangle| \\ &\leq |\langle x, x_k \rangle - \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x_k \rangle| + \|s_n - y\| \|x_k\| \\ &= \|s_n - y\| \|x_k\| \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Tetszőleges ortonormált rendszer esetén általában nem minden elem Fourier-sora konvergál az elemhez. Például x_1 -et elhagyva a rendszerből, $x = x_1$ -nek a maradék rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói mind nullák lesznek, így $y = 0$. A következő tétel azzal foglalkozik, hogy mikor konvergál minden elem Fourier-sora az adott elemhez.

8.2.4. Tétel. Legyen X belső szorzat tér. Egy x_n ortonormált sorozatra a következők ekvivalensek:

- (1) minden $x \in X$ -re $x = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$, tehát minden elem Fourier-sora konvergál és az adott elemhez;
- (2) minden $x \in X$ -re $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2$ (ez a Parseval-egyenlőség);
- (3) minden $x, y \in X$ -re

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}$$

(ez az általánosított Parseval-egyenlőség);

- (4) minden $x \in X$ pontosan egyféleképpen írható fel $x = \sum_n \alpha_n x_n$ ($\alpha_n \in \mathbb{K}$) alakban;
- (5) az x_n -ek véges lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak X -ben, mint normált térben.

Ha ezek a tulajdonságok fennállnak, akkor az ortonormált sorozatot *zárt*nak nevezzük, mert (5) szerint lineáris kombinációi halmazának a lezártja az egész X .

* **Bizonyítás.** Ha (1) teljesül, legyen s_n az x , az r_n pedig az y Fourier-sorának n -edik részletösszege. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle \overline{\langle y, x_k \rangle} \right| &= |\langle x, y \rangle - \langle s_n, r_n \rangle| \\ &\leq |\langle x, y \rangle - \langle s_n, y \rangle| + |\langle s_n, y \rangle - \langle s_n, r_n \rangle| \\ &\leq \|x - s_n\| \|y\| + \|s_n\| \|r_n - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

azaz teljesül (3). Ennek speciális esete (2). Másrészt vegyük észre, hogy

$$\langle x, s_n \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\langle x, x_k \rangle} \langle x, x_k \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 = \|s_n\|^2,$$

így (2)-ből

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, s_n \rangle - \overline{\langle x, s_n \rangle} + \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n\|^2 \rightarrow 0,$$

azaz (1) teljesül, tehát (1), (2) és (3) ekvivalensek. (1)-ből nyilván következik, hogy minden x előállítható $\sum_n \alpha_n x_n$ alakban, a Pitagorasz-tételt alkalmazva két előállítás különbségére pedig kapjuk, hogy az előállítás egyértelmű, így teljesül (4). Triviális, hogy (4)-ből következik (5). Ha (5) teljesül, válasszunk egy olyan y -t, amelyre $\|x - y\| < \varepsilon$ és y az $x_1, x_2, \dots, x_m$ lineáris kombinációja. Ha $n \geq m$, a legjobb lineáris approximációról szóló tétel szerint azt kapjuk, hogy $\|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Tehát (1) teljesül. $\square$

8.2.5. Definíció. Egy X belső szorzat tér egy x_n sorozatát *teljesnek* nevezzük, ha nem bővíthető minden x_n -re ortogonális normált elemmel, azaz ha egyedül a 0 elem ortogonális minden x_n -re, vagy másként fogalmazva, az x_n -ek halmazának ortogonális komplementere $\{0\}$. Ha az x_n ortonormált sorozat zárt, akkor az előző tételből (1) miatt teljes is. A megfordítás nem minden belső szorzat térben igaz, de Hilbert-térben igen, mivel ott $x - \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$ egy előző tétel szerint ortogonális minden x_k -ra, tehát csak nulla lehet.

8.2.6. Az $\mathbb{L}^2$ -tér. Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$ egy mérhető halmaz. Ha $f: H \rightarrow \mathbb{K}$ minden $0 < c < +\infty$ -re abszolút integrálható $H \cap [-c, c]^k$ -n és az $\int_H |f|^2$ (improprius) integrál konvergens, akkor f -et H -n *négyzetesen integrálhatónak* fogjuk nevezni. Az ilyen függvények halmazát $\mathbb{L}^2(H)$ fogja jelölni. A négyzetesen integrálható függvények köréből nem vezet ki a $\mathbb{K}$ elemeivel való szorzás, a konjugált képzés és az összeadás sem, mert $|f + g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}$, ahonnan $|f + g|^2 \leq 4 \max\{|f|^2, |g|^2\} \leq 4(|f|^2 + |g|^2)$. Az $f, g \in \mathbb{L}^2(H)$ függvények *belső szorzatán* az

$$\langle f, g \rangle = \int_T f(x) \overline{g(x)} dx$$

integrált értjük; vegyük észre, hogy $4f\bar{g} = (f + \bar{g})^2 + (f - \bar{g})^2$, így $f\bar{g}$ abszolút (improprius) integrálható. Az így definiált belső szorzat annak minden szükséges tulajdonságával rendelkezik, egyet kivéve: az $\|f\| = 0$ összefüggés nem csak akkor teljesül, ha $f = 0$, hanem pontosan akkor, ha f majdnem mindenütt nulla: ha f majdnem mindenütt nulla, akkor nyilván $\|f\| = 0$; megfordítva, ha $\|f\|^2 = 0$, akkor az

$$\{x \in H: |f(x)|^2 \geq 1/n\}$$

mérhető halmaz egyetlen $n \in \mathbb{N}^+$ -ra sem lehet pozitív mértékű, mivel abból $\int_H |f|^2 > 0$ következne, így tehát nullahalmaz, amiből ezen halmazok egyesítése, az

$$\{x \in H: |f(x)|^2 > 0\}$$

halmaz is nullahalmaz. Ezen úgy segíthetünk, hogy az f és g függvényeket azonosaknak tekintjük, ha majdnem mindenütt egyenlőek.

*** 8.2.7. Az $\mathbb{L}^p$ -tér.** Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$ egy mérhető halmaz, és $1 \leq p < +\infty$. Ha $f: H \rightarrow \mathbb{K}$ minden $0 < c < +\infty$ -re abszolút integrálható $H \cap [-c, c]^k$ -n és az $\int_H |f|^p$ (improprius) integrál konvergens, akkor f -et H -n *p hatványon integrálhatónak* fogjuk nevezni. Az ilyen függvények halmazát $\mathbb{L}^p(H)$ fogja jelölni. Az $\mathbb{L}^p(H)$ -ből nem vezet ki a $\mathbb{K}$ elemeivel való szorzás, a konjugált képzés és az összeadás sem, mert

$$|f + g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\},$$

ahonnan

$$|f + g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Egy $f \in \mathbb{L}^p(H)$ függvény *p -normáján* az

$$\|f\|_p = \left(\int_H |f|^p \right)^{1/p}$$

számot értjük.

A $p = \infty$ esetben álljon $\mathbb{L}^\infty(H)$ azon $f: H \rightarrow \mathbb{K}$ függvényekből, amelyek minden $0 < c < +\infty$ -re abszolút integrálhatóak $H \cap [-c, c]^k$ -n és amelyekhez van olyan $r \geq 0$ valós szám, amelyre

$$\{x \in H: |f(x)| \geq r\}$$

nullahalmaz. Egy ilyen függvényre legyen $\|f\|_\infty$ az összes ilyen r valós számok infimuma. Vegyük észre, hogy $|f| \leq \|f\|_\infty$ majdnem mindenütt, ugyanis ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor van olyan $r < \|f\|_\infty + 1/n$, amelyre

$$\{x \in H: |f(x)| \geq r\}$$

nullahalmaz, ahonnan

$$\{x \in H: |f(x)| \geq \|f\|_\infty + 1/n\}$$

is nullahalmaz, de

$$\{x \in H: |f(x)| \geq \|f\|_\infty\}$$

ezen nullahalmazok egyesítése, így maga is nullahalmaz.

Itt is az így definiált norma annak minden szükséges tulajdonságával rendelkezik (a háromszög-egyenlőtlenséget a következő tételben bizonyítjuk), kivéve hogy az $\|f\|_p = 0$ összefüggés nem csak akkor teljesül, ha $f = 0$, hanem pontosan akkor, ha f majdnem mindenütt nulla. Ezen ugyanúgy segíthetünk, mint az $\mathbb{L}^2$ -tér esetén: az f és g függvényeket azonosaknak tekintjük, ha majdnem mindenütt egyenlőek.

* **8.2.8. Minkowski-egyenlőtlenség.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $1 \leq p \leq \infty$ és $f, g \in \mathbb{L}^p(H)$, akkor

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexitása miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}y + \frac{v}{u+v}z \right)^p \leq \frac{u}{u+v}y^p + \frac{v}{u+v}z^p,$$

ha $u, v, y, z \geq 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = |f(x)|/\|f\|_p$, $z = |g(x)|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt (improprius) integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int_H (|f| + |g|)^p \leq 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség.

8.2.9. Riesz–Fischer-tétel. Az előző két definícióban definiált terek teljesek, azaz az $\mathbb{L}^2(H)$ tér Hilbert-tér, és az $\mathbb{L}^p(H)$ terek Banach-terek.

* **Bizonyítás.** A bizonyítás a Lebesgue-integrál elméletét használja, lásd például a [34] könyvet. $\square$

8.2.10. Klasszikus Fourier-sorok. A $[0, 1]$ -en értelmezett komplex értékű négyzetesen integrálható függvények belső szorzat terében az

$$x \mapsto e^{2\pi i k x}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvények ortonormált rendszert alkotnak, az úgynevezett *trigonometrikus rendszert*. Megmutatható, hogy ez a rendszer zárt, tehát teljes; lásd például a [34] könyvet. Egy

$[0, 1]$ -en négyzetesen integrálható függvény *klasszikus Fourier-sora* vagy röviden *Fourier-sora* a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

sor, ahol

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Szokás azt írni, hogy

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x},$$

ahol a $\sim$ jel azt fejezi ki, hogy a jobb oldalon álló sor f Fourier-sora. A részletösszegekre bevezetve az

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$$

jelölést, a zártság miatt 8.2.4(1) alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 |f(x) - s_n(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A Parseval-egyenlőség itteni alakja

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Vegyük észre, hogy a Bessel-egyenlőtlenségből $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, amiből következik, hogy $|c_k|^2 \rightarrow 0$, így $c_k \rightarrow 0$, ha $|k| \rightarrow \infty$. Mivel az $x \mapsto e^{2\pi i k x}$ függvények periodikusak 1 szerint, a $[0, 1]$ helyett bármilyen más, 1 hosszúságú intervallumot is használhatunk. Legcélszerűbb lesz olyan f függvényt tekinteni, amely 1 szerint periodikus, és $[0, 1]$ -en négyzetesen integrálható. A továbbiakban ilyen feltételek mellett fogjuk vizsgálni f klasszikus Fourier-sorát.

Ha az f függvény $2l$ szerint periodikus ($l > 0$), akkor az $x \mapsto e^{\pi i k x/l}$ teljes ortogonális, de nem feltétlenül normált függvényrendszert tekinthetjük, a Fourier-sort

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\pi i k x/l}$$

alakban írhatjuk

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\pi i k x/l} dx$$

együtthatókkal és

$$s_n(f, x) = s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{\pi i k x/l}$$

részletösszegekkel. Szokás a fenti *komplex alakról* az Euler-féle összefüggéssel *valós alakra* vagy más néven *trigonometrikus alakra* áttérni:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

ahol $a_0 = 2c_0$ és $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = ic_k - ic_{-k}$, ha $k > 0$. (Egyébként a valamely n -re

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

($a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$) alakban előállítható függvényeket *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.) A c_k -khöz hasonlóan az a_k, b_k együtthatók is kifejezhetők közvetlenül integrálokkal:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

A Parseval-egyenlőség alakja most:

$$\frac{1}{l} \|f\|^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

A valós alak előnye, hogy világosan mutatja, ha f valós értékű függvény, akkor az a_k , b_k számok, és így az s_n részletösszegek is valósak, ha f páros függvény, akkor a b_k , ha pedig páratlan függvény, akkor az a_k együtthatók mind nullák. Ha csak valós értékű függvényekkel kívánunk foglalkozni, akkor is legtöbbször ezt az alakot célszerű használni. A komplex alak előnye, hogy egyszerűbb, jobban mutatja a Fourier-transzformációval való kapcsolatot és az általánosítási lehetőségeket. Ezért általában a komplex alakot fogjuk használni.

Néha a $]0, l[$ -en értelmezett függvényt akarunk sin-sor vagy cos-sor alakjában felírni. Ezt megtehetjük, ha előbb kiterjesztjük $] -l, l[$ -re páratlan, illetve páros függvénné, majd $2l$ szerint periodikus függvénné.

Végül megjegyezzük, hogy sok könyv csak az $l = \pi$ esetet tárgyalja.

8.2.11. Példák. (1) Azon 2π szerint periodikus függvényre, amelyre $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ha $|x| < \pi$ (négyszögjel),

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

mivel

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

A Parseval-egyenlőségéből

$$2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

ahonnan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Mivel

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8}, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy $s = \pi^2/6$.

(2) Azon 2π szerint periodikus f függvényre, amelyre $f(x) = |x|$, ha $|x| < \pi$ (háromszögjel),

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},$$

mivel

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

és $k > 0$ esetén

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi k^2} [\cos kx]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi k^2}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases} \end{aligned}$$

A Parseval-egyenlőségéből

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{24} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^4}{45}.$$

8.2.12. Tétel. Ha az f , illetve f^* függvények 1 szerint periodikusak, a $[0, 1]$ -en négyzetesen integrálhatóak, Fourier-együtthatói c_k , illetve c_k^* , és $c \in \mathbb{C}$, akkor

- (1) az $f \equiv c$ függvény Fourier-együtthatói $c_0 = c$ és $c_k = 0$, ha $k \neq 0$;
- (2) a cf függvény Fourier-együtthatói cc_k ;
- (3) az $f + f^*$ függvény Fourier-együtthatói $c_k + c_k^*$;
- (4) ha $f^* = \bar{f}$, akkor $c_k^* = \overline{c_{-k}}$;
- (5) ha $f^*(x) = f(x + \alpha)$, akkor $c_k^* = c_k e^{2\pi i k \alpha}$;
- (6) ha az f^* deriválja f és $f^*(0) = 0$, azaz $f^*(x) = \int_0^x f$, akkor $2\pi i k c_k^* = c_k - c_0$.

Bizonyítás. (1)–(5) egyszerű számolás. (6) parciális integrálással adódik az integrálfüggvényekre vonatkozó változatot használva. $\square$

A továbbiakban Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájával fogunk foglalkozni. A bizonyítások $s_n - f$ zárt alakban való előállításán múlnak.

* **8.2.13. Dirichlet-formula.** Legyen f komplex értékű, 1 szerint periodikus, $[0, 1]$ -en négyzetesen integrálható függvény. Ekkor a

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t}$$

jelöléssel

$$s_n(f, x) = s_n(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$$

és

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) D_n(t) dt,$$

továbbá

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}, \quad \text{ha} \quad \sin \pi t \neq 0.$$

Itt D_n az úgynevezett *Dirichlet-féle magfüggvény*, amely mint a definíciójából látható, páros és 1 szerint periodikus.

Bizonyítás. A D_n magfüggvény másik alakja a

$$\begin{aligned} D_n(t) \sin \pi t &= \sin \pi t \left(1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos 2\pi k t \right) \\ &= \sin \pi t + \sum_{k=1}^n (\sin(2k+1)\pi t - \sin(2k-1)\pi t) = \sin(2n+1)\pi t \end{aligned}$$

összefüggésből kapható.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(t) e^{2\pi i k(x-t)} dt = \int_0^1 f(t) D_n(x-t) dt \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+u) D_n(u) du = \int_0^1 f(x+u) D_n(u) du \\ &= \int_0^{1/2} f(x+u) D_n(u) du + \int_{1/2}^1 f(x+u) D_n(u) du \\ &= \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Tagonkénti integrálással

$$\int_0^{1/2} D_n(t) dt = \frac{1}{2},$$

így

$$f(x) = \int_0^{1/2} 2f(x)D_n(t) dt,$$

amiből

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))D_n(t) dt. \quad \square$$

8.2.14. Lipschitz-kritérium. Legyen f komplex értékű, 1 szerint periodikus, $[0, 1]$ -en négyzetesen integrálható függvény. Ha van adott x -hez olyan $c \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, hogy $t \in]-\delta, \delta[$ esetén

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq c|t|,$$

akkor $s_n(x) \rightarrow f(x)$.

* **Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $\delta < 1/2$. A $g(0) = 0$ és

$$g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin(\pi t)},$$

ha $0 < t \leq 1/2$ összefüggéssel definiált függvény négyzetesen integrálható minden $[\varepsilon, 1/2]$, $\varepsilon > 0$ intervallumon. Ha $0 \leq t \leq \delta$, akkor $|g(t)| \leq ct/\sin(\pi t)$. Felhasználva, hogy $\lim_{t \rightarrow 0} t/\sin(\pi t) = 1/\pi$, azt kapjuk, hogy a jobb oldal korlátos a $[0, \delta]$ intervallumon, így g is. Innen $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel adódik, hogy a g függvény négyzetesen integrálható $[0, 1/2]$ -en. Legyen $g(t) = 0$, ha $-1/2 \leq t \leq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \int_0^{1/2} g(t) \sin(2n+1)\pi t dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(t) \cos \pi t \sin 2n\pi t dt + \int_{-1/2}^{1/2} g(t) \sin \pi t \cos 2n\pi t dt. \end{aligned}$$

Mivel $t \mapsto g(t) \cos \pi t$ és $t \mapsto g(t) \sin \pi t$ is négyzetesen integrálhatóak $[-1/2, 1/2]$ -en, a Bessel-egyenlőtlenség szerint a két utolsó integrál nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$. $\square$

8.2.15. Következmény. Ha léteznek és végesek az $f(x+)$ és $f(x-)$ jobb és bal oldali határértékek és a

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \quad \lim_{t \uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-)}{t}$$

határértékek, azaz a jobb és bal oldali félérintők, akkor

$$s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálisan, ha létezik $f'(x)$, akkor $s_n(x) \rightarrow f(x)$.

Bizonyítás. Ha kell, x -ben megváltoztatva f -et, feltehetjük, hogy

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Ekkor $t = 0$ egy környezetében

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq c|t|. \quad \square$$

8.2.16. Példa. Azon 2π szerint periodikus f függvényre, amelyre $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ha $|x| < \pi$ (négyszögjel),

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

és a Fourier-sor mindenütt konvergens. Az $x = \pi/2$ helyettesítéssel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

8.2.17. Következmény: Riemann-féle lokalizációs tétel. Ha az f és f^* függvények 1 szerint periodikusak, $[0, 1]$ -en négyzetesen integrálhatóak, és az x pont egy környezetében megegyeznek, s_n , illetve s_n^* pedig Fourier-soraik részletösszegei, akkor $s_n(x) - s_n^*(x) \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Az x egy környezetében $f - f^* = 0$. $\square$

* **8.2.18. Klasszikus ortogonális polinomok.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy (nem feltétlenül korlátos) intervallum és $\varrho: I \rightarrow \mathbb{R}$ egy pozitív integrálható függvény; a ϱ függvényt a továbbiakban *súlyfüggvénynek* fogjuk nevezni. Jelölje $\mathbb{L}^2(\varrho)$ azon függvények halmazát, amelyekre $f\sqrt{\varrho} \in \mathbb{L}^2(I)$. Az $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$ függvények (ϱ -val képzett) *belső szorzatán* az

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \varrho(x) dx$$

integrált értjük; ez megfelel az $f\sqrt{\varrho}$ és $g\sqrt{\varrho}$ függvények $\mathbb{L}^2(I)$ -beli belső szorzatának. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást különböző intervallumokon különböző súlyfüggvények mellett a hatványfüggvények $1, x, x^2, \dots$ sorozatára alkalmazva, ortonormált polinomrendszereket kaphatunk. Az alábbiakban néhány ilyen polinomrendszert sorolunk fel. A felsorolt polinomrendszerek mind zártak a ϱ -ra nézve *négyzetesen integrálható* függvények $\mathbb{L}^2(\varrho)$ terében.

Megjegyezzük, hogy az ortogonális polinomok legtöbbször nem normált, csak ortogonális rendszer alakjában használatosak.

Név	Paraméterek	Jelölés	Intervallum	$\varrho(x)$
Jacobi	$\alpha, \beta > -1$	$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$] -1, 1[$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
Ultraszférikus	$\alpha = \beta > -1$	${}^{(\alpha)}P_n$	$] -1, 1[$	$(1-x^2)^\alpha$
Elsőfajú Csebisev	$\alpha = \beta = -1/2$	T_n	$] -1, 1[$	$1/\sqrt{1-x^2}$
Másodfajú Csebisev	$\alpha = \beta = 1/2$	U_n	$] -1, 1[$	$\sqrt{1-x^2}$
Legendre	$\alpha = \beta = 0$	P_n	$] -1, 1[$	1
Általános Laguerre	$\alpha > -1$	${}^{(\alpha)}L_n$	$] 0, +\infty[$	$x^\alpha e^{-x}$
Laguerre	$\alpha = 0$	L_n	$] 0, +\infty[$	e^{-x}
Hermite		H_n	$] -\infty, +\infty[$	e^{-x^2}

→ **8.2.19. Feladat** [6]. Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[-1, 1]$ -ben a páros függvények halmazának ortogonális komplementerét.

→ **8.2.20. Feladat** [5]. Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0, 1]$ -ben a $t \mapsto e^t$ függvényt legjobban approximáló elsőfokú polinomot.

→ **8.2.21. Feladat** [7]. Ortogonalizáljuk $\mathbb{L}^2[0, 1]$ -ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

8.2.22. Feladat [8]. Ortonormáljuk $\mathbb{L}^2[-1, 1]$ -ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

8.2.23. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi távolságokat:

- (1) x távolsága x^2, x^3 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$ -ben;
- (2) 1 távolsága $\sin x, \cos x$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[-\pi, \pi]$ -ben;
- (3) x^3 távolsága $1, x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$ -ben;
- (4) x^3 távolsága x, x^2 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0, 1]$ -ben.

→ **8.2.24. Feladat** [10]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát:

- (1) $|\sin x|$;
- (2) $\sin^4 x$;
- (3) $\operatorname{sgn}(\cos x)$;
- (4) $(1 - a^2)/(1 - 2a \cos x + a^2)$, $|a| < 1$;
- (5) $(1 - a \cos x)/(1 - 2a \cos x + a^2)$, $|a| < 1$;
- (6) $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$;
- (7) $\lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor$;
- (8) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \, dx$;
- (9) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 4x \rfloor - 3\lfloor 2x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor \, dx$;

(10) $\ln|\sin(x/2)|$.

Mely pontokban konvergense a Fourier-sor és mi az összege?

8.2.25. Feladat [8]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát $]-\pi, \pi[$ -n:

- (1) xe^{x^2} ;
- (2) $\operatorname{sgn}(x)(\pi - |x|)$;
- (3) $x(\pi - |x|)$;
- (4) x^2 ;
- (5) $(\pi - \operatorname{sgn}(x))$;
- (6) $\operatorname{sgn}(x) \cos x$;
- (7) $(1 + \operatorname{sgn}(x)) \sin x$;
- (8) $\cos ax$;
- (9) $\sin ax$.

8.2.26. Feladat [8]. Az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sora $]-\pi, \pi[$ -n mely pontokban konvergense és mi az összege:

- (1) $x \sin(1/x)$;
- (2) $\sin(x)/x$.

→ **8.2.27. Feladat [7].** Határozzuk meg az egyenáramú komponens és a harmadik felharmonikus amplitúdójának arányát egyutas egyenirányításnál.

→ **8.2.28. Feladat [7].** Szimmetrikus fűrészfog-feszültség integrálásával szinuszos jelalakot közelítünk. Határozzuk meg, hogy az alapharmonikus a teljes teljesítmény hányadrészét képviseli.

→ **8.2.29. Feladat [9].** Hogyan változik egy gitárhang felharmonikus tartalma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

8.2.30. Feladat [9]. Ortonormáljuk a megadott függvényrendszert a megadott súlyfüggvényre a megadott intervallumon:

- (1) $1, x, x^2, \varrho(x) = e^{-x}, x \in [0, \infty[$;
- (2) $1, x, x^2, \varrho(x) = x^2, x \in [0, 1]$;
- (3) $1, x, x^2, \varrho(x) = \sin \pi x, x \in [0, 1]$.

Vektoranalízis

Ez a fejezet két paragrafusból áll. Az első a görbe menti integrálást tárgyalja, és egyúttal alapokat szolgáltat a komplex függvénytan tárgyalásához is. A második a vektoranalízis klasszikus eredményeinek, a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tételnek, Green és Stokes tételének bizonyítása után differenciálformák integrálásával foglalkozik, és a Poincaré–Stokes-tételre jut el.

9.1 Görbe menti integrál

Mindenki tudja, mi egy görbe, amíg elég matematikát nem tanul, hogy zavarba hozza a számtalan kivétel.

Felix Klein

Ez a paragrafus függvények primitív függvénye meghatározásának problémájával foglalkozik, pontosabban azzal, mikor létezik primitív függvény, és ha létezik, hogyan határozhatjuk meg. Az általános eset lényegesen bonyolultabb, mint a valós változós függvények esete. Eszközünk a görbe menti integrál lesz, ezt viszont Stieltjes-típusú integrál segítségével definiáljuk.

9.1.1. Definíció. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvény *változásán* a

$$\mathbb{V}_a^b f = \mathbb{V}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = b \right\}$$

bővített valós számot értjük. Ha $\mathbb{V}(f) < +\infty$, akkor f -et *korlátos változásúnak* nevezzük. Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor használni fogjuk az $\mathbb{V}_c^d(f)$ jelölést $f|_{[c,d]}$ változásának jelölésére. Legyen $\mathbb{V}_a^c f = -\mathbb{V}_c^a f$.

9.1.2. Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ egy függvény, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor

- (1) ha $a \leq c \leq b$, akkor $\mathbb{V}_a^b f = \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$, így a $c \mapsto \mathbb{V}_a^c f$ változásfüggvénye f -nek monoton növekedő;
- (2) ha $f = (f_1, \dots, f_n)$, akkor $\mathbb{V}(f_j) \leq \mathbb{V}(f) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(f_i)$, ha $j = 1, \dots, n$;
- (3) $\mathbb{V}(f + g) \leq \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$;
- (4) $\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha| \mathbb{V}(f)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$).
- (5) az f függvény pontosan akkor folytonos balról, illetve jobbról egy $x \in [a, b]$ pontban, ha a változásfüggvénye balról, illetve jobbról folytonos x -ben.

* **Bizonyítás.** (1) bizonyításához, ha

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = b$$

és $x_j \leq c \leq x_{j+1}$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^j |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_j)| \\ &+ |f(x_{j+1}) - f(c)| + \sum_{i=j+2}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f, \end{aligned}$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \leq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$. Megfordítva,

$$\mathbb{V}_a^b f \geq \sum_{i=1}^j |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=j+1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \geq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$.

(2)-t úgy kapjuk, hogy a megfelelő egyenlőtlenséget felírjuk egy felosztásra, majd előbb a jobb, aztán a bal oldalon veszünk szuprémumot. (3) ugyanígy adódik. (4) mindkét oldala ugyanazon számhalmaz szuprémuma.

(5) bizonyításához tegyük fel, hogy f balról folytonos az $a < x \leq b$ pontban, és jelölje s a változásfüggvényét. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $\delta > 0$ -t, amelyre $x - \delta \leq t < x$ esetén $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$, továbbá olyan

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = x$$

beosztást, amelyre $s(x) - \varepsilon/2 < \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ és $x_{k-1} > x - \delta$. Mivel a jobb oldali összeg utolsó tagja kisebb, mint $\varepsilon/2$,

$$s(x) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq s(x_{k-1}).$$

Ebből $t \geq x_{k-1}$ esetén $s(x) - s(t) < \varepsilon$, azaz s balról folytonos x -ben. A jobb oldali folytonosság hasonlóan látható be. A másik irány nyilvánvaló, mivel $x \leq y$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathbb{V}_x^y f. \quad \square$$

9.1.3. Jordan felbontási tétele. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású, és s a változásfüggvénye. Ekkor az

$$f_+(x) = \frac{s(x) + f(x)}{2} \quad \text{és} \quad f_-(x) = \frac{s(x) - f(x)}{2}, \quad \text{ha} \quad x \in [a, b]$$

függvények monoton növekedőek és $f = f_+ - f_-$

A tételben szereplő előállítás f -nek két monoton növekedő függvény különbségeként az f Jordan-felbontása. Ilyen felbontás több is van, a tételben szereplő felbontás minimális abban az értelemben, hogy $\mathbb{V}(f_+) + \mathbb{V}(f_-)$ megegyezik $\mathbb{V}(f)$ -fel, és nem több. Nem nehéz belátni, hogy egy minimális felbontás konstanstól eltekintve már egyértelmű.

Bizonyítás. Mivel $a \leq x \leq y \leq b$ esetén $|f(x) - f(y)| \leq \mathbb{V}_x^y f$, így egyrészt $f(x) - f(y) \leq \mathbb{V}_x^y f$, tehát

$$f_+(y) - f_+(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}_x^y f - f(x) + f(y)) \geq 0,$$

másrészt $f(y) - f(x) \leq \mathbb{V}_x^y f$, tehát

$$f_-(y) - f_-(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}_x^y f + f(x) - f(y)) \geq 0.$$

9.1.4. Megjegyzés. Az előző tétel mutatja, hogy a monoton függvényekre vonatkozó tételek nagy része teljesül korlátos változású függvényekre is: bal és jobb oldali határértékek létezése, megszámlálható sok szakadási hely stb.

9.1.5. Pályák. A γ görbe *hosszán* a görbe $\mathbb{V}(\gamma)$ változását értjük. Ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, akkor γ -t *rektifikálható görbének* vagy *pályának* nevezzük. Ha egy zárt görbe pálya, akkor *zárt pályának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ekvivalens görbéknek, illetve egy görbének és a megfordításának ugyanaz a hossza.

9.1.6. Tétel. Egy $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$ differenciálható görbe pontosan akkor pálya, ha a deriváltja abszolút integrálható és ekkor

$$\mathbb{V}_a^b g = \int_a^b |g'|.$$

* **Bizonyítás.** Ha g' abszolút integrálható és

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = b,$$

akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k |g(x_j) - g(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^k \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} g'(x) dx \right| \leq \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} |g'(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |g'(x)| dx, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy g pálya.

Tegyük fel, hogy g pálya. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Van olyan $a = y_0 < y_1 < \dots < y_k = b$, amelyre $\mathbb{V}(g) < \sum_{j=1}^k |g(y_j) - g(y_{j-1})| + \varepsilon$. Mivel g differenciálható, folytonos is és így egyenletesen folytonos. Van tehát olyan $\delta > 0$, amelyre $|g(t) - g(s)| < \varepsilon/(2k)$, ha $|s - t| < \delta$. Mivel g differenciálható, minden $t \in [a, b]$ -hez van olyan $\delta'(t) > 0$, hogy ha $t \neq y$, $|y - t| < \delta'(t)$, akkor

$$\left| \frac{g(y) - g(t)}{y - t} - g'(t) \right| \leq \varepsilon,$$

ahonnan $|g(y) - g(t) - g'(t)(y - t)| \leq \varepsilon|y - t|$, ha $|y - t| < \delta(t)$. A $\delta'(t)$ számokat választhatjuk úgy, hogy értékük legfeljebb δ legyen. Innen bármely δ' -finom $a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b$ pontozott felosztásra

$$|g(x_j) - g(t_j)| - |g'(t_j)|(x_j - t_j)| \leq \varepsilon(x_j - t_j)$$

és

$$\left| |g(t_j) - g(x_{j-1})| - |g'(t_j)|(t_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon(t_j - x_{j-1}),$$

$j = 1, 2, \dots, n$. Így

$$\left| \sum_{j=1}^n (|g(x_j) - g(t_j)| + |g(t_j) - g(x_{j-1})|) - \sum_{j=1}^n |g'(t_j)|(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

A zárójelben álló összeg osztópontjaihoz egyenként adjuk hozzá az $y_1, \dots, y_{k-1}$ pontokat. Minden pont hozzáadásakor az összeg legfeljebb ε/k -val nő, viszont az eredmény legalább $\mathbb{V}(g) - \varepsilon$ lesz. Így azt kapjuk, hogy

$$\left| \mathbb{V}(g) - \sum_{j=1}^n |g'(t_j)|(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, $|g'|$ integrálható és $\mathbb{V}(g) = \int_a^b |g'|$. Megkaptuk az egyenlőséget, de azt, hogy g' abszolút integrálható, csak a valós értékű esetben. Viszont ha g vektor értékű, akkor a (valós) koordináta függvényei is korlátos változásúak, így az eddig bizonyítottak szerint mindegyiknek a deriváltja abszolút integrálható. $\square$

9.1.7. Példák. A legegyszerűbb sima pálya a *lineáris pálya*. Gyakran fogunk szakaszonként lineáris pályákat használni. Legegyszerűbb zárt pályák a három lineáris szakaszból álló *háromszögpálya* és a komplex síkban a

$$\gamma(t) = c + re^{2\pi i n t}, \quad t \in [0, 1], \quad c \in \mathbb{C}, \quad r > 0, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}$$

körpályák. Ha $n > 0$, akkor ez a körpálya a c középpontú, r sugarú kör kerületét „pozitív körüljárási irányban”, ha pedig $n < 0$, akkor „negatív körüljárási irányban” $|n|$ -szer futja be.

*** 9.1.8. Sima pályák természetes paraméterezése.** Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy sima görbe. Ha deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |f'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye t -nek. A $g(s) = f(\varphi^{-1}(s))$ összefüggéssel definiált függvény egy, az f -fel ekvivalens görbe. Erre

$$\left| \frac{dg}{ds} \right| = \left| \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = |f'(\varphi^{-1}(s))| \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Megfordítva, ha egy paraméterezésben az $s \mapsto g(s) \in \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható görbe deriváltja minden pontban létezik és egységvektor, akkor

$$\int_{s_0}^s |g'| = s - s_0,$$

azaz ez a paraméterezés csak konstansban különbözik az ívhossztól. Ilyen paraméterezéseket a görbe *természetes paraméterezésének* fogunk nevezni. Természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűsíti a számolásokat.

9.1.9. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy az $f(0) = 0$, $f(x) = x^{-2} \cos(x^{-2})$, ha $0 < x \leq 1$ függvény differenciálható, de nem korlátos változású $[0, 1]$ -en, így a $g(0) = 0$, $g(x) = x^{-2} \sin(x^{-2})$, ha $0 < x \leq 1$ függvény integrálható, de nem abszolút integrálható $[0, 1]$ -en.

9.1.10. Feladat [7]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén lesz a $\gamma(0) = 0$, $\gamma(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $-1 \leq x \leq 1$ összefüggéssel definiált függvény pálya?

9.1.11. Integrál. Legyen $(x, y) \mapsto x \cdot y$ egy mindkét változójában lineáris leképezése $X \times Y$ -nak Z -be, ahol X, Y és Z véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ felett. Egy ilyen leképezést gyakran (pontatlanul) *szorzásnak* fogunk nevezni, és $x \cdot y$ helyett csak xy -t írunk. Tudjuk, hogy van olyan minimális konstans, a $\cdot$ bilineáris leképezés $\|\cdot\|$ normája, amelyre $|x \cdot y| \leq \|\cdot\| \|x\| \|y\|$ minden $x \in X, y \in Y$ -ra. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \rightarrow X, g: [a, b] \rightarrow Y$ függvények. Ha $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < t_n = b$ egy felosztás és $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, azaz adott egy P pontozott felosztásunk, akkor jelölje

$$s(f, g, P) = \sum_{j=1}^n f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

az f -nek g -re vonatkozó, a P pontozott felosztáshoz tartozó összeg *Riemann–Stieltjes integrálközelítő* összegét. Ha létezik olyan $S \in Z$, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, amelyre bármely δ -nál finomabb pontozott felosztásra $|s(f, g, P) - S| \leq \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy S az f függvénynek a g -re vonatkozó *integrálja* $[a, b]$ -n. Ugyanúgy, mint a közönséges integrálnál, adódik, hogy S egyértelmű. Jelölése:

$$\int_a^b f dg \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(t) dg(t).$$

Legyen $\int_a^a f dg = 0$ és $\int_b^a f dg = -\int_a^b f dg$.

9.1.12. Megjegyzés. Különböző szorzásokkal különböző integrálokat kaphatunk. Például lehet a szorzás a valós, a komplex, vagy a mátrixszorzás, lehet a valós vagy a komplex belső szorzás, lehet a vektoriális szorzás. Fontos speciális eset, amikor a szorzás az x lineáris operátor alkalmazása y -ra. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektoriális szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$ -ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_a^b f \times dg$. Az egyik legfontosabb speciális eset az, amikor a szorzás a szokásos skalárral való szorzás, $Y = \mathbb{R}$, és $g(t) = t$, ha $t \in [a, b]$, akkor a már tanult integrált kapjuk.

*** 9.1.13. Tétel: Cauchy-kritérium.** Az előző definíció jelöléseivel egy f függvény pontosan akkor integrálható g -re nézve, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, hogy bármely δ -finom P', P'' pontozott beosztásokra

$$|s(f, g, P') - s(f, g, P'')| \leq \varepsilon.$$

Bizonyítás. A $Z = \mathbb{R}$ eset pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint a szokásos integrálra, az általános eset pedig következik az alábbi tétel (6) pontját felhasználva.

* **9.1.14. Segédttétel.** Az előző definíció jelöléseivel, ha adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -re és adott $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényre tetszőleges δ -finom P_1, P_2 pontozott beosztásaira $[a, b]$ -nek

$$|s(f, g, P_1) - s(f, g, P_2)| \leq \varepsilon,$$

akkor $a \leq a' < b' \leq b$ esetén is tetszőleges δ -finom P'_1, P'_2 pontozott beosztásaira $[a', b']$ -nek $|s(f, P'_1) - s(f, P'_2)| \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Ugyanúgy adódik, mint az 5.2.9 segédttétel. $\square$

9.1.15. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel, legyenek

$$f, f_j: [a, b] \rightarrow X \quad \text{és} \quad g, g_j: [a, b] \rightarrow Y$$

függvények. Ekkor

- (1) ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f dg = c(g(b) - g(a))$;
- (2) ha $g \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f dg = 0$;
- (3) ha $\int_a^b f dg$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_a^b (cf) dg = c \int_a^b f dg$ és $\int_a^b f d(cg) = c \int_a^b f dg$ teljesül; $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha X és Z komplex vektorterek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris az első változóban, akkor

$$\int_a^b (cf) dg = c \int_a^b f dg, \quad \text{illetve} \quad \int_a^b (cf) dg = \bar{c} \int_a^b f dg,$$

ha pedig Y és Z komplex vektorterek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris a második változóban, akkor

$$\int_a^b f d(cg) = c \int_a^b f dg, \quad \text{illetve} \quad \int_a^b f d(cg) = \bar{c} \int_a^b f dg;$$

- (4) ha $\int_a^b f_1 dg$ és $\int_a^b f_2 dg$ léteznek, akkor $\int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg$; ha $\int_a^b f dg_1$ és $\int_a^b f dg_2$ léteznek, akkor $\int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2$;
- (5) ha W is véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $T: Z \rightarrow W$ egy lineáris leképezés, $\int_a^b f dg$ létezik és $x * y = T(xy)$, akkor $\int_a^b f * dg = \int_a^b T(f dg) = T\left(\int_a^b f dg\right)$;
- (6) ha Z egy adott bázisa esetén $x * y = (x *_1 y, \dots, x *_n y)$, akkor $\int_a^b f * dg$ pontosan akkor létezik, ha az $\int_a^b f *_1 dg, \dots, \int_a^b f *_n dg$ integrálok léteznek, és

$$\int_a^b f * dg = \left(\int_a^b f *_1 dg, \dots, \int_a^b f *_n dg \right);$$

(7) ha $Z = \mathbb{R}$, továbbá valamely bázisban

$$f = (f_1, \dots, f_k), \quad g = (g_1, \dots, g_m), \quad xy = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_i y_j,$$

és ha az $\int_a^b f_i dg_j$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$ integrálok mind léteznek, ahol a szorzás a valós számok szorzása, akkor az $\int_a^b f dg$ integrál is, és értéke

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{i,j} \int_a^b f_i dg_j;$$

(8) ha $\int_a^b f dg$ létezik, akkor $\left| \int_a^b f dg \right| \leq \| \cdot \| \mathbb{V}(g) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$;

(9) ha $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő és folytonos függvény, $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ létezik, akkor

$$\int_a^b (f \circ h) d(g \circ h) = \int_{h(a)}^{h(b)} f dg$$

(helyettesítéssel integrálás);

(10) ha $\int_a^b f dg$ létezik és $a < c < b$, akkor $\int_a^c f dg$ és $\int_c^b f dg$ is léteznek és összegük $\int_a^b f dg$;

(11) ha $a < c < b$, valamint $\int_a^c f dg$ és $\int_c^b f dg$ léteznek, akkor $\int_a^b f dg$ is létezik;

(12) ha $\mathbb{V}_a^b g < \infty$ és $f_j \rightarrow f$ az $[a, b]$ -n egyenletesen, az $\int_a^b f_j dg$ integrálok léteznek, akkor $\int_a^b f dg$ is létezik, és $\int_a^b f_j dg \rightarrow \int_a^b f dg$;

(13) ha $\mathbb{V}_a^b g < \infty$, $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$, a sor az $[a, b]$ -n egyenletesen konvergál, az $\int_a^b f_j dg$ integrálok léteznek, akkor az $\int_a^b f dg$ integrál is létezik, és $\sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j dg = \int_a^b f dg$;

(14) ha f és g korlátos változásúak, nincs közös szakadási pontjuk, $\int_a^b f dg$ létezik, és $y * x = xy$, akkor $\int_a^b f dg + \int_a^b g * df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ (parciális integrálás);

(15) ha $\int_a^b f dg$ létezik, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{c \downarrow a} \left(\int_c^b f dg + f(a)(g(c) - g(a)) \right) &= \lim_{c \uparrow b} \left(\int_a^c f dg + f(b)(g(b) - g(c)) \right) \\ &= \int_a^b f dg. \end{aligned}$$

(16) ha minden $a < c < b$ -re $\int_a^c f dg$ létezik, és a

$$\lim_{c \downarrow a} \left(\int_c^b f dg + f(a)(g(c) - g(a)) \right)$$

határérték létezik vagy ha minden $a < c < b$ -re $\int_c^b f dg$ létezik, és a

$$\lim_{c \uparrow b} \left(\int_a^c f dg + f(b)(g(b) - g(c)) \right)$$

határérték létezik, akkor $\int_a^b f dg$ is létezik és megegyezik a határértékkel.

Bizonyítás. (1)–(13) a közelítő összegek segítségével hasonlóan adódnak, mint a szokásos integrálra vonatkozó tételek, felhasználva a Cauchy-kritériumot és az előző lemmát is.

(14) bizonyításához adott $\varepsilon > 0$ -hoz válasszuk úgy a $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, hogy egy δ -finom beosztásra

$$|f(\tau_i) - f(t_{i-1})| \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad |f(t_i) - f(\tau_i)| \leq \varepsilon$$

vagy pedig

$$|g(\tau_i) - g(t_{i-1})| \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad |g(t_i) - g(\tau_i)| \leq \varepsilon$$

teljesüljön. A két integrálközelítő összeg összegéből levonva $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ -t, a maradék normája legfeljebb $2\|\cdot\|\varepsilon(V(f) + V(g))$.

(15) ugyanazzal az eljárással bizonyítható, amelyet az integrál, mint felső határ függvénye folytonosságának bizonyításánál használtunk, (16) pedig a véges intervallumon történő improprius integrálásra vonatkozó tétel bizonyításánál használt eljárással.

9.1.16. Megjegyzés. Az integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett integráljainak kiszámítására vezethető vissza 9.1.15(6) és 9.1.15(7) segítségével; valós értékű korlátos változású függvény szerinti integrálás Jordan felbontási tétele szerint tovább redukálható, felírható két monoton növekedő függvény szerint vett integrál különbségeként. Például 9.1.15(6) szerint, ha $X = Y = \mathbb{R}^3$, a szorzás az úgynevezett diadikus szorzás, $xy = (x_i y_j)_{i,j=1}^3$, akkor $\int_a^b f dg = (\int_a^b f_i dg_j)_{i,j=1}^3$. Ha a szorzás a belső szorzás, akkor 9.1.15(7) szerint

$$\int_a^b \langle f, dg \rangle = \sum_{i=1}^3 \int_a^b f_i dg_i,$$

ha pedig a vektoriális szorzás, akkor 9.1.15(6) és 9.1.15(7) szerint $\int_a^b f \times dg$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2 dg_3 - \int_a^b f_3 dg_2$, $\int_a^b f_3 dg_1 - \int_a^b f_1 dg_3$ és $\int_a^b f_1 dg_2 - \int_a^b f_2 dg_1$.

9.1.17. Nullahalmazok. Legyen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz g -nullahalmaz, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\mathbb{R}$ -beli zárt, nem csak egy pontból álló intervallumokból álló $[a_i, b_i]$ rendszer, amely lefedi, az a_i, b_i pontok folytonossági pontjai g -nek, és $\sum_i g(b_i) - g(a_i) < \varepsilon$. Ugyanezt kapjuk, ha nyílt intervallumokból, vagy tetszőleges intervallumokból álló rendszert tekintünk, ugyanis ha az összeg η , akkor minden zárt intervallumot növelhetünk ε/η -nál kisebb arányban növelve a függvényértékek különbségét, mivel a végpontok g -nek folytonossági pontjai. Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz és megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz.

9.1.18. Lebesgue-feltétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő és $g(t) = g(a)$, ha $t < a$, $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha f g -majdnem mindenütt folytonos, akkor integrálható.

* **Bizonyítás.** A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a $g(x) = x$ esetben. $\square$

9.1.19. Következmény. Tetszőleges g korlátos változású függvényre, ha f folytonos, akkor g -integrálható. $\square$

9.1.20. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő és $g(t) = g(a)$, ha $t < a$, $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha az f_1 és f_2 függvények g -majdnem mindenütt megegyeznek, és az f_1 függvény g -integrálható, akkor f_2 is és $\int_a^b f_1 dg = \int_a^b f_2 dg$.

A tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóság és az integrál szempontjából a nullahalmazok „elhanyagolhatóak”. Így olyan függvények integráljáról is beszélhetünk, amelyek csak majdnem mindenütt vannak értelmezve.

* **Bizonyítás.** A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a $g(x) = x$ esetben. $\square$

9.1.21. Tétel. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, az f korlátos, a g pedig h -integrálható, és legyen $G(t) = \int_a^t g dh$, ha $a \leq t \leq b$. Ha az f függvény G -integrálható, akkor az fg függvény h -integrálható, és $\int_a^b f dG = \int_a^b fg dh$.

A tételt leggyakrabban a $h(t) = t$, $g(t) = G'(t)$ esetben használjuk integrálok kiszámítására a Newton–Leibniz-formula segítségével.

* **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $|f| \leq K$. A 8.1.14 segédtétel szerint minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan, az $[a, b]$ nem csak egy pontból álló zárt részintervallumain értelmezett szuperadditív ω függvény, és olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, hogy $\omega([a, b]) \leq \varepsilon$ és egy δ -finom pontozott felosztás bármely $([c, d], t)$ pontozott részintervallumára

$$\left| G(d) - G(c) - g(t)(h(d) - h(c)) \right| \leq \omega([c, d]).$$

Legyen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ egy felosztás $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ pontokkal. Ha a pontozott felosztás δ -finom, akkor

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(G(x_i) - G(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(t_i)g(t_i)(h(x_i) - h(x_{i-1})) \right| \leq K\omega([a, b]) \leq K\varepsilon.$$

Innen az fg függvény h -integrálható és integrálja $\int_a^b f dG$. $\square$

9.1.22. Következmény: az integrálszámítás középérték-tétele. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, az f monoton a g pedig abszolút integrálható, akkor van olyan $\xi \in [a, b]$, hogy

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

* **Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy f monoton növekedő. Az előző tételt fogjuk használni $h(t) = t$ választással. Legyen $G_+(x) = \int_a^x g^+(t) dt$, $G_-(x) = \int_a^x g^-(t) dt$ és $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b f(x)g^+(x) dx - \int_a^b f(x)g^-(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dG_+(x) - \int_a^b f(x) dG_-(x) = \int_a^b f(x) dG(x) \\ &= f(b)G(b) - \int_a^b G(x) df(x). \end{aligned}$$

Az $\int_a^b G(x) df(x)$ integrál értéke $\inf_{a \leq \xi \leq b} G(\xi)(f(b) - f(a))$ és $\sup_{a \leq \xi \leq b} G(\xi)(f(b) - f(a))$ között van, és mivel G folytonos, van olyan $a \leq \xi \leq b$, hogy

$$\int_a^b G(x) df(x) = G(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= f(b)G(b) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) - f(a)G(a) \\ &= f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx. \end{aligned}$$

*** 9.1.23. Monoton konvergenciatétel.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, és $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ az $[a, b]$ -n értelmezett valós értékű g -integrálható függvények egy monoton növekedő sorozata, amely mindenütt konvergál egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Tegyük fel, hogy az $\int_a^b f_n dg$ integrálok sorozata felülről korlátos. Ekkor f is g -integrálható, és

$$\int_a^b f dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

Bizonyítás. Ugyanúgy bizonyítható a pontozott téglafüggvényekre vonatkozó konvergenciatételekből, mint a közönséges integrálokra vonatkozó megfelelő tétel. $\square$

*** 9.1.24. Dominált konvergenciatétel.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, és $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ g -integrálható függvények egy sorozata, amely mindenütt konvergál egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $h, H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ g -integrálható függvények, hogy $h \leq f_n \leq H$ mindenütt. Ekkor f is g -integrálható és

$$\int_a^b f dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

Bizonyítás. Ugyanúgy bizonyítható a pontozott téglafüggvényekre vonatkozó konvergenciatételekből, mint a közönséges integrálokra vonatkozó megfelelő tétel. $\square$

*** 9.1.25. Feladat [10].** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

- (1) ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, $c \in [a, b]$ és f konstans a $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon, akkor $\int_a^b f dg$ létezik, és számítsuk ki az értékét;
- (2) ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, akkor $\int_a^b f dg$ létezik;
- (3) ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású függvények, akkor $\int_a^b f dg$ létezik.

*** 9.1.26. Tétel.** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő, és legyenek f_1, f_2 nemnegatív g -integrálható függvények. Ekkor $\min\{f_1, f_2\}$ és $\max\{f_1, f_2\}$ is g -integrálhatóak.

Bizonyítás. Ha $f = \min\{f_1, f_2\}$, akkor $\max\{f_1, f_2\} = f_1 + f_2 - f$, így elég csak f -ről belátni, hogy g -integrálható. Ha $I = [a, b]$ és $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^+$, legyen $M(\delta)$ az összes δ -finom P felosztáshoz tartozó $s(f, g, P)$ integrálközelítő összegek infimuma, és legyen $S = \sup_{\delta} M(\delta)$. Nyilván $M(\delta) \leq \int_a^b (f_1 + f_2) dg$ minden δ függvényre, így S véges.

Legyen $\varepsilon > 0$. Létezik olyan $\delta_0: I \rightarrow \mathbb{R}^+$, amelyre $M(\delta_0) > S - \varepsilon$. Léteznek továbbá olyan $\delta_1, \delta_2: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvények és ω_1, ω_2 szuperadditív függvények I nem csak egy pontból álló részintervallumain, hogy $\omega_i(I) \leq \varepsilon$ és $\left| f_i(t)(g(d) - g(c)) - \int_c^d f_i dg \right| \leq \omega_i([c, d])$, ha $a \leq c < d \leq b$, $t \in [c, d]$ és $[c, d] \subset \mathbb{U}_{\delta_i(t)}(t)$, ahol $i \in \{1, 2\}$. Válasszunk olyan $P = \{(I_i, t_i): i = 1, 2, \dots, n\}$ pontozott felosztást, amelyre

$$s(f, g, P) \leq M(\delta_0) + \varepsilon \leq S + \varepsilon.$$

Válasszunk olyan $\delta \leq \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ pozitív függvényt, amelyre $\mathbb{U}_{\delta(t)}(t) \cap I$ része a P felosztás t pontot tartalmazó részintervallumai egyesítésének. Legyen

$$(J_j, s_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

egy δ -finom pontozott felosztása I -nek. Minden olyan J_j intervallumot, amelynek s_j belső pontja, vágjunk ketté az s_j ponttal, és mindkét részintervallumhoz rendeljük hozzá az s_j pontot. Az így kapott $P^* = \{(K_k, r_k): k = 1, 2, \dots, p\}$ pontozott felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege f -nek ugyanaz, mint a (J_j, s_j) , $j = 1, 2, \dots, m$ pontozott felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg. A δ választása miatt $J_j \subset \cup_{s_j \in I_i} I_i$ minden j -re, így minden K_k -ra K_k° csak egy I_i -be metsz bele, és így $I_i = \cup_{K_k \subset I_i} K_k$, ha $i = 1, 2, \dots, n$. Tegyük fel, hogy $f_1(t_i) \leq f_2(t_i)$. Az adott i -re a (K_k, r_k) , $K_k \subset I_i$ pontozott intervallumok az I_i egy P_i pontozott felosztását alkotják, amely δ -finom, így δ_1 -finom is I_i -n. Mivel $\int_{I_i} f_1 dg \leq f_1(t_i)g(I_i) + \omega_1(I_i)$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(f, g, P_i) &\leq s(f_1, g, P_i) \leq \sum_{K_k \subset I_i} \left(\int_{K_k} f_1 dg + \omega_1(K_k) \right) \\ &\leq \int_{I_i} f_1 dg + \omega_1(I_i) \leq f_1(t_i)g(I_i) + 2\omega_1(I_i) \\ &= f(t_i)g(I_i) + 2\omega_1(I_i). \end{aligned}$$

Az $f_2(t_i) \leq f_1(t_i)$ esetben hasonló gondolatmenet alkalmazható, így azt kapjuk, hogy mindig

$$s(f, g, P_i) \leq f(t_i)g(I_i) + 2\omega_1(I_i) + 2\omega_2(I_i).$$

Innen

$$S - \varepsilon \leq s(f, g, P^*) \leq s(f, g, P) + 2\omega_1(I) + 2\omega_2(I) \leq S + 5\varepsilon,$$

ahonnan következik az állítás. $\square$

9.1.27. Megjegyzés. Az alábbi két tétel mutatja, hogy ha $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, $-\infty < a < b < +\infty$, akkor az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a g -hez tartozó λ_g Lebesgue–Stieltjes-mérték szerinti integrálja megegyezik a g -integráljával és pontosan akkor létezik, ha f és $|f|$ is g -integrálható. A bizonyítás átvihető a vektorváltozós függvények Lebesgue-integráljára is. Természetesen a bizonyítások megértéséhez szükség van a Lebesgue-integrál és a Lebesgue–Stieltjes-mértékek ismeretére: lásd például a [34] könyvet.

* **9.1.28. Tétel.** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő, $g(t) = g(a)$, ha $t < a$ és $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha f egy λ_g -integrálható függvény, akkor g -integrálható is, és a két integrál megegyezik.

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy az intervallumok karakterisztikus függvényeire teljesül az állítás: az $[a, b]$ karakterisztikus függvényének integrálja $g(b) - g(a)$; ha $a \leq c < d \leq b$ és c, d folytonossági pontjai g -nek, akkor $[a, c[$ és $[a, c]$ karakterisztikus függvényének az integrálja megegyezik, és mindkettő $g(c) - g(a)$, továbbá $[d, b]$ és $]d, b]$ karakterisztikus függvényének az integrálja megegyezik, és mindkettő $g(b) - g(d)$, valamint $]c, d[, [c, d[,]c, d]$ és $[c, d]$ karakterisztikus függvényének az integrálja is megegyezik, és mindegyiké $g(d) - g(c)$. Innen határátmenettel következik az állítás.

Második lépésként megmutatjuk, hogy ha $f \geq 0$ felülről folytonos $[a, b]$ -n, akkor teljesül az állítás. Egy ilyen függvény korlátos. Indukcióval, legyen P_k olyan beosztása $[a, b]$ -nek, amelybe tartozó intervallumok rövidebbek, mint 2^{-k} , és tegyük fel, hogy P_k minden osztópontja osztópontja P_{k+1} -nek is, ha $k = 1, 2, \dots$. Ha c, d a P_k szomszédos osztópontjai, $a \neq c$, akkor legyen az f_k függvény értéke a $c < x \leq d$ pontokban

$$\sup\{f(t) : t \in [c, d]\},$$

ha pedig $a = c$, akkor az $x = a = c$ helyen is legyen ez az érték. Nyilván $f_k \geq f_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, és f_k pontonként tart az f függvényhez, amiből következik az állítás.

Legyen most $f \geq 0$ tetszőleges λ_g -integrálható függvény. Az approximációs lemma szerint $f_0 \equiv 0$ és $f_n = f_{n-1} + \chi_{A_n}/n$ definícióval, ahol χ_{A_n} az

$$A_n = \{x \in [a, b] : f(x) - f_{n-1}(x) \geq 1/n\}$$

halmaz karakterisztikus függvénye, $f_n \uparrow f$. Mivel A_n λ_g -mérhető, léteznek

$$F_{n,1} \subset F_{n,2} \subset \dots$$

zárt halmazok, amelyek λ_g -mértéke tart $\lambda_g(A_n)$ -hez. Legyen $f_n^* = \sum_{k=1}^n \chi_{F_{k,n-k}}/k$. Az f_n^* függvények felülről félig folytonosak és monoton növekedve λ_g -majdnem mindenütt, azaz g -majdnem mindenütt tartanak f -hez. Innen a monoton konvergenciátételből következik az állítás.

Végül legyen f tetszőleges λ_g -integrálható függvény. Ekkor f^+ és f^- is λ_g -integrálhatóak, és így $f = f^+ - f^-$ is, és

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f^+ dg - \int_a^b f^- dg = \int_{[a,b]} f^+ d\lambda_g - \int_{[a,b]} f^- d\lambda_g = \int_{[a,b]} f d\lambda_g. \quad \square$$

* **9.1.29. Tétel.** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő, $g(t) = g(a)$, ha $t < a$ és $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre f és $|f|$ is g -integrálhatóak, akkor az f függvény λ_g -integrálható, és $\int_a^b f dg = \int_{[a,b]} f d\lambda_g$.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha f egy $F \subset [a, b]$ halmaz karakterisztikus függvénye és az f függvény g -integrálható, akkor λ_g -mérhető is és

$$\int_a^b f dg = \lambda_g(F) = \int_{[a,b]} f d\lambda_g.$$

Indukcióval, legyen P_k olyan beosztása $[a, b]$ -nek, amelybe tartozó intervallumok rövidebbek, mint 2^{-k} , tegyük fel, hogy P_k minden osztópontja osztópontja P_{k+1} -nek is, ha $k = 1, 2, \dots$, és g folytonos a P_k minden osztópontjában kivéve esetleg a -t és b -t. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt és az $[a, b]$ nem csak egy pontból álló zárt részintervallumain értelmezett szuperadditív ω függvényt, amelyre $\omega([a, b]) \leq \varepsilon$

$$\left| f(t)(g(d) - g(c)) - \int_c^d f dg \right| \leq \omega([c, d])$$

minden δ -finom pontozott $([c, d], t)$ intervallumra. Legyen A_k a P_k felosztáshoz tartozó azon $[c, d]$ intervallumok halmaza, amelyekhez van olyan $t \in [c, d] \cap F$, hogy teljesül $[c, d] \subset \cup_{\delta(t)}(t)$. Legyen B_k ezek közül azok halmaza, amelyek nem részei A_j , $j < k$ egyetlen elemének sem, és legyen $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Nyilván $F \subset \cup B$, mivel minden $t \in F$ -re $\delta(t) > 0$. Minden $[c, d] \in B$ -re

$$\left| g(d) - g(c) - \int_c^d f dg \right| \leq \omega([c, d]).$$

Ha $[c_1, d_1]$ és $[c_2, d_2]$ különböznek, akkor legfeljebb az egyik végpontjuk lehet közös, ahonnan B bármely véges C részrendszerére

$$\sum_{[c, d] \in C} \int_c^d f dg \leq \int_a^b f dg,$$

így

$$\sum_{[c, d] \in B} \int_c^d f dg \leq \int_a^b f dg.$$

Hasonlóan

$$\sum_{[c, d] \in B} \omega([c, d]) \leq \omega([a, b]).$$

Mivel

$$\sum_{[c, d] \in B} g(d) - g(c) \leq \sum_{[c, d] \in B} \int_c^d f dg + \omega([c, d]) \leq \int_a^b f dg + \varepsilon,$$

azt kapjuk, hogy $\lambda_g(F) \leq \int_a^b f dg + \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, $\lambda_g(F) \leq \int_a^b f dg$. Az $1 - f$ függvényre alkalmazva ezt, $\lambda_g([a, b] \setminus F) \leq \int_a^b 1 - f dg$, ahonnan

$$\lambda_g([a, b] \setminus F) + \lambda_g(F) \leq \int_a^b 1 dg = g(b) - g(a) = \lambda_g([a, b]).$$

Ebből következik, hogy az F halmaz λ_g -mérhető és $\lambda_g(F) = \int_a^b f dg$.

Második lépésként megmutatjuk, hogy ha az $f \geq 0$ függvény g -integrálható, akkor a $\{t \in [a, b]: f(t) \geq y\}$ színhalmazok karakterisztikus függvénye is g -integrálható. Ez

nyilvánvaló, ha $y \leq 0$. Ha $y > 0$, legyen y_n nemnegatív valós számok egy szigorúan monoton növekedő sorozata, amely y -hoz konvergál. Ha $0 \leq z < y$, akkor az

$$f_{z,y}(t) = \frac{1}{y-z} \left(\max \left\{ \min \{f(t), y\}, z \right\} - z \right)$$

függvény g -integrálható. Az $f_{y_n,y}$ függvényekre $0 \leq f_{y_{n+1},y}(t) \leq f_{y_n,y}(t) \leq 1$, ha $t \in [a, b]$, és a függvénsorozat pontonként konvergál a $\{t \in [a, b] : f(t) \geq y\}$ halmaz karakterisztikus függvényéhez, így az g -integrálható.

Harmadik lépésként bebizonyítjuk, hogy ha egy $f \geq 0$ függvény g -integrálható, akkor λ_g -integrálható is. Az approximációs lemma segítségével definiált $f_0 \equiv 0$ és $f_n = f_{n-1} + \chi_{A_n}/n$, ha $n > 0$ (ahol χ_{A_n} az $A_n = \{t \in [a, b] : f(t) - f_{n-1}(t) \geq 1/n\}$ halmaz karakterisztikus függvénye) függvénsorozat függvényei g -integrálhatóak és egyben λ_g -integrálhatóak is, a két integráljuk megegyezik, és monoton növekedve pontonként tartanak az f függvényhez. Innen következik az állítás.

Végül tegyük fel, hogy f és $|f|$ is g -integrálhatóak. Ekkor az $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ és $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ függvények is g -integrálhatóak, és mivel nemnegatívak, a g -integráljuk és a λ_g -integráljuk megegyezik. Innen $f = f^+ - f^-$ -nak is megegyezik a g -integrálja és a λ_g -integrálja.

9.1.30. Definíció: görbe menti integrál. Legyen $(y, x) \mapsto y \cdot x$ egy mindkét változó-jában lineáris leképezése $Y \times X$ -nek Z -be, ahol X, Y és Z véges dimenziós valós vektorterek $\mathbb{R}$ felett, azaz egy szorzás; $y \cdot x$ helyett csak yx -et írunk. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ és $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ egy görbe, $f : \gamma([a, b]) \rightarrow Y$ pedig egy függvény. Ha létezik az $\int_a^b f \circ \gamma d\gamma$ integrál, akkor az az f függvény γ görbe menti integrálja. Jelölése: $\int_\gamma f$ vagy $\int_\gamma f(x) dx$. Zárt görbe esetén az $\oint_\gamma f$ vagy $\oint_\gamma f(x) dx$ jelölés is szokásos. Különböző szorzásokkal különböző görbe menti integrálokat kapunk. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektoriális szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$ -ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_\gamma f(x) \times dx$.

9.1.31. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel, legyenek $f, f_j, g : \gamma(I) \rightarrow Y$ függvények. Ekkor

- (1) ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_\gamma f = c(\gamma(b) - \gamma(a))$; ha γ konstans, akkor $\int_\gamma f = 0$;
- (2) $\int_\gamma f$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_\gamma cf = c \int_\gamma f$, továbbá $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha Y és Z komplex vektorterek és a szorzás az első változójában komplex lineáris, illetve konjugált lineáris, akkor $\int_\gamma cf = c \int_\gamma f$, illetve $\int_\gamma cf = \bar{c} \int_\gamma f$;
- (3) ha $\int_\gamma f$ és $\int_\gamma g$ léteznek, akkor $\int_\gamma (f + g)$ is és $\int_\gamma (f + g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$;
- (4) ha γ_1 a γ -val ekvivalens görbe, akkor $\int_\gamma f$ és $\int_{\gamma_1} f$ egyszerre léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$;
- (5) $\int_\gamma f$ és $\int_{-\gamma} f$ egyszerre léteznek és $\int_{-\gamma} f = - \int_\gamma f$;
- (6) ha $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, akkor $\int_\gamma f$ akkor és csak akkor létezik, ha $\int_{\gamma_1} f$ és $\int_{\gamma_2} f$ léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$;

- (7) ha W is véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $T: Z \rightarrow W$ egy lineáris leképezés, $\int_{\gamma} f(x) dx$ létezik és $y * x = T(yx)$, akkor

$$\int_{\gamma} f(x) * dx = \int_{\gamma} T(f(x) dx) = T\left(\int_{\gamma} f(x) dx\right);$$

- (8) ha $\int_{\gamma} f$ létezik, akkor $|\int_{\gamma} f| \leq \|\cdot\| \mathbb{V}(\gamma) \sup_{t \in \gamma(I)} |f(t)|$;

- (9) ha f folytonos, akkor $\int_{\gamma} f$ létezik;

- (10) ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, az $\int_{\gamma} f_j$ integrálok léteznek és $f_j \rightarrow f$ egyenletesen a $\gamma(I)$ -n, akkor $\int_{\gamma} f$ is létezik és $\int_{\gamma} f_j \rightarrow \int_{\gamma} f$;

- (11) ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, az $\int_{\gamma} f_j$ integrálok léteznek és $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$ egyenletesen a $\gamma(I)$ -n, akkor $\int_{\gamma} f$ is létezik és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_j = \int_{\gamma} f;$$

- (12) ha f korlátos $\gamma(I)$ -n, γ pedig differenciálható, és $\int_{\gamma} f$ létezik, akkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Vegyük észre, hogy az utolsó állítás lényegében egy integráltranszformációs formula.

Bizonyítás. Minden állítás következik a Stieltjes-integrál tulajdonságaira vonatkozó tételek állításaiból. $\square$

9.1.32. Megjegyzés. Hasonlóan, mint az integrálnál, görbe menti integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljainak kiszámítására vezethető vissza. Például ha $Y = X = \mathbb{R}^3$, a szorzás a belső szorzás, akkor $\int_{\gamma} \langle f(x), dx \rangle = \sum_{i=1}^3 \int_a^b f_i \circ \gamma d\gamma_i$, ha pedig a vektoriális szorzás, akkor $\int_{\gamma} f(x) \times dx$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2 \circ \gamma d\gamma_3 - \int_a^b f_3 \circ \gamma d\gamma_2$, $\int_a^b f_3 \circ \gamma d\gamma_1 - \int_a^b f_1 \circ \gamma d\gamma_3$ és $\int_a^b f_1 \circ \gamma d\gamma_2 - \int_a^b f_2 \circ \gamma d\gamma_1$. Az $\int_a^b f_i \circ \gamma d\gamma_j$ integrálra a klasszikus jelölés $\int_{\gamma} f_i(x) dx_j$, ezt is használni fogjuk. Ennek az észrevételnek a felhasználásával a görbe menti integrálokat valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett integráljai segítségével is definiálhatjuk. Még egyszerűbb lehetőség a 9.1.31(12) összefüggést használni definíciónak; ennek a hátránya hogy nem minden pályára alkalmazható.

9.1.33. Zárt görbék homotópiája. Legyen $X \subset \mathbb{K}^n$. Az I -n definiált X -beli γ_0 és γ_1 zárt görbékét *homotópoknak* nevezzük X -ben, ha van olyan $\varphi: I \times [0, 1] \rightarrow X$ folytonos függvény, amelyre $\varphi(t, 0) = \gamma_0(t)$ és $\varphi(t, 1) = \gamma_1(t)$ minden $t \in I$ -re, továbbá minden $\xi \in [0, 1]$ -re $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ zárt görbe. A homotópia szemléletes tartalma: a görbék „folytonosan átdeformálhatók egymásba”. Zárt görbék X -beli homotópiája ekvivalencia-reláció. Az X -ben konstans görbével homotóp görbét X -ben *összehúzhatónak* nevezünk.

Felhívjuk rá a figyelmet, hogy zárt görbék homotópiájánál lényeges, hogy a görbék milyen X részhalmazban homotópok. Például ha $X = \mathbb{K}^n$, akkor X -ben bármely két $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow X$ zárt görbe között létezik egy

$$\varphi(t, \xi) = \xi \gamma_1(t) + (1 - \xi) \gamma_0(t)$$

triviális homotópia.

9.1.34. Egyszeresen összefüggő tartomány. Egy tartományt *egyszeresen összefüggő tartománynak* nevezünk, ha benne minden zárt görbe összehúzható.

→ **9.1.35. Feladat [6].** Legyen $X \subset \mathbb{K}^n$ tartomány. Bizonyítsuk be, hogy ha *csillag-szerű*, azaz van benne olyan c pont, úgynevezett *csillagpont*, hogy minden $z \in D$ -re, a c és z pontokat összekötő szakasz D -ben van, akkor D egyszeresen összefüggő. Speciálisan, minden konvex tartomány egyszeresen összefüggő.

9.1.36. Tétel. Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ olyan függvény D -n, amelynek létezik egy F primitív függvénye D -n. Ekkor minden $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ pályára $\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

* **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $x \in D$ -hez van olyan $\eta(x) > 0$, hogy

$$|F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)| \leq \varepsilon |y - x|,$$

ha $|y - x| < \eta(x)$. Mivel γ folytonos, ha $\tau \in [a, b]$, akkor létezik olyan $\delta(\tau) > 0$, hogy $|\gamma(t) - \gamma(\tau)| < \eta(\gamma(\tau))$, ha $t \in [a, b]$ és $|t - \tau| < \delta(\tau)$. Tekintsünk egy δ -finom $a = t_0 \leq \tau_0 \leq t_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq t_k = b$ pontozott beosztást. Erre

$$\begin{aligned} & \left| F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) - \sum_{j=1}^k f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=1}^k F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^k F'(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=1}^k F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(\tau_j)) + F(\gamma(\tau_j)) - F(\gamma(t_{j-1})) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^k F'(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(\tau_j) + \gamma(\tau_j) - \gamma(t_{j-1})) \right| \\ & \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k (|\gamma(t_j) - \gamma(\tau_j)| + |\gamma(\tau_j) - \gamma(t_{j-1})|) \\ & \leq \varepsilon \mathbb{V}(\gamma). \end{aligned}$$

Mivel a fenti összeg tetszőleges közel lehet az integrálhoz, kapjuk az állítást. $\square$

9.1.37. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(1) f -nek létezik primitív függvénye D -n;

- (2) bármely D -beli zárt γ pályára $\int_{\gamma} f = 0$;
- (3) bármely D -beli γ, δ pályákra, amelyeknek kezdő- és végpontja megegyezik, teljesül, hogy $\int_{\gamma} f = \int_{\delta} f$.

Az utolsó feltételt szokás úgy kifejezni, hogy a görbe menti integrál független az úttól.

Bizonyítás. Ha f -nek létezik F primitív függvénye, akkor bármely zárt pályára

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Ha (2) teljesül, és a γ, δ pályák kezdő- és végpontja megegyezik, akkor $\gamma \vee \tilde{\delta}$ zárt pálya, így

$$0 = \int_{\gamma \vee \tilde{\delta}} f = \int_{\gamma} f - \int_{\delta} f.$$

Végül, ha (3) teljesül, legyen $u \in D$ rögzített, és $F(v) = \int_{\gamma} f$, ahol $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ olyan pálya, amelynek u a kezdőpontja, v a végpontja. A fenti integrál nem függ a pálya megválasztásától. A γ pályát egy

$$\gamma_1(t) = v + (t - b)(w - v), \quad \text{ha } t \in [b, b + 1]$$

pályával meghosszabbítva,

$$F(w) - F(v) = \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_1} f(v) dx + \int_{\gamma_1} (f(x) - f(v)) dx,$$

ahonnan

$$F(w) - F(v) = f(v)(w - v) + \omega(w, v),$$

ahol

$$\omega(w, v) = \int_{\gamma_1} (f(x) - f(v)) dx,$$

tehát $|\omega(w, v)|/|w - v| \rightarrow 0$, ha $w \rightarrow v$. $\square$

9.1.38. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) f -nek lokálisan létezik primitív függvénye;
- (2) ha a γ_0 és γ_1 zárt pályák homotópok, akkor $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$;
- (3) ha γ egy háromszögpálya, amely az általa határolt háromszöglappal együtt D -ben van, akkor $\int_{\gamma} f = 0$.

* **Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy (1)-ből következik (2). Legyenek γ_0 és γ_1 az $I = [a, b]$ -n definiálva, és legyen $\varphi: I \times [0, 1] \rightarrow D$ egy homotópiája γ_0 -nak γ_1 -be. Azt nem tesszük fel, hogy minden $\xi \in [0, 1]$ -re a $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ zárt görbe pálya. Mivel φ folytonos, $C = \varphi(I \times [0, 1])$ kompakt részhalmaza D -nek. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk C -nek olyan D -beli nyílt gömbökből álló véges lefedését, amelyeken f -nek van primitív függvénye, és jelölje ϱ ennek a lefedésnek a Lebesgue-számát. Mivel φ egyenletesen folytonos, létezik $\eta > 0$, hogy $|t - t'| \leq \eta$, $|\xi - \xi'| \leq \eta$ esetén $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| \leq \varrho$. Most legyen

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$$

egy η -nál finomabb felosztása I -nek, és

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_\ell = 1$$

egy η -nál finomabb felosztása $[0, 1]$ -nek. Legyen

$$\delta_j(t) = \varphi(t_{i-1}, \xi_j) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (\varphi(t_i, \xi_j) - \varphi(t_{i-1}, \xi_j))$$

ha $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq \ell$. Minden δ_j , $0 \leq j \leq \ell$ egy zárt pálya D -ben. Jelölje $\delta_{j,i}$ a δ_j , $\gamma_{j,i}$ pedig a γ_j megszorítását $[x_{i-1}, x_i]$ -re. Mivel $\gamma_{0,i} \vee \check{\delta}_{0,i}$ zárt pálya D egy olyan nyílt részhalmazában, ahol f -nek van primitív függvénye, az előző tétel szerint

$$\int_{\gamma_{0,i}} f = \int_{\delta_{0,i}} f.$$

Összegezve i -re kapjuk, hogy $\int_{\gamma_0} f = \int_{\delta_0} f$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\int_{\gamma_1} f = \int_{\delta_\ell} f$. Elég tehát azt megmutatnunk, hogy

$$(4) \quad \int_{\delta_{j-1}} f = \int_{\delta_j} f, \quad \text{ha } 1 \leq j \leq \ell.$$

Rögzítsük j -t. Legyen $\alpha_{j,i}$ egy lineáris pálya, $\delta_{j-1}(t_i)$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal, $\beta_{j,i}$ pedig egy lineáris pálya $\delta_{j-1}(t_{i-1})$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$(5) \quad \sum_{r=1}^i \left(\int_{\delta_{j-1,r}} f - \int_{\delta_{j,r}} f \right) + \int_{\alpha_{j,i}} f - \int_{\alpha_{j,0}} f = 0,$$

ha $0 \leq i \leq \ell$. Ha $i = 0$, az állítás triviális. Tegyük fel, hogy i -re igaz. Nyilván

$$\int_{\beta_{j,i+1}} f - \int_{\delta_{j,i+1}} f - \int_{\alpha_{j,i}} f = 0$$

és

$$\int_{\delta_{j-1,i+1}} f + \int_{\alpha_{j,i+1}} f - \int_{\beta_{j,i+1}} f = 0,$$

mivel a megfelelő háromszögpályák egy olyan gömbben vannak, amelyen f -nek van primitív függvénye. Ezt a két összefüggést hozzáadva (5)-höz, éppen az indukciós lépést kapjuk. Ha $i = \ell$, alkalmazva (5)-öt kapjuk (4)-et.

(2)-ből nyilván következik (3), mert γ homotóp egy konstans pályával D -ben. Végül, ha (3) teljesül, és a c középpontú G nyílt gömb D -ben van, v ennek egy pontja, legyen γ egy lineáris pálya c kezdőponttal és v végponttal, és $F(v) = \int_\gamma f$. Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, kapjuk, hogy F a f primitív függvénye a G gömbön. $\square$

9.1.39. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ differenciálható függvény. Az f -nek pontosan akkor van lokálisan primitív függvénye, ha minden $x \in D$, $h, k \in \mathbb{R}^n$ -re $f'(x)hk = f'(x)kh$, azaz ha $f'(x)$ szimmetrikus bilineáris függvény minden $x \in D$ -re.

* **Bizonyítás.** Ha F az f primitív függvénye x egy környezetében, akkor az $F''(x)$ második derivált szimmetrikus, így a feltétel szükséges. Az elégségeség bizonyításához elég belátnunk, hogy ha γ egy háromszögpálya, amely az általa határolt B háromszöglappal együtt D -ben van, akkor $\int_{\gamma} f = 0$. A $\gamma_0 = \gamma$ jelöléssel, a szomszédos töréspontok számtani közepeit lineáris pályákkal összekötve, olyan $\gamma_0^1, \gamma_0^2, \gamma_0^3$ és γ_0^4 háromszögpályákat kaphatunk, amelyekre

$$\int_{\gamma_0} f = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_0^j} f.$$

Jelöljük ezek közül egyet γ_1 -gyel, úgy választva meg, hogy $|\int_{\gamma_1} f| \geq M/4$ legyen, ahol $M = |\int_{\gamma} f|$. Nyilván $\mathbb{V}(\gamma_1) = \mathbb{V}(\gamma_0)/2$. Teljes indukcióval folytatva ezt az eljárást, háromszögpályáknak olyan $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ sorozatát kapjuk, amelyekre $|\int_{\gamma_n} f| \geq M/4^n$, $\mathbb{V}(\gamma_n) = \mathbb{V}(\gamma)/2^n$, és minden pálya értékkészlete tartalmazza a következő kezdőpontját. A két utolsó feltételből a kezdőpontok B -beli Cauchy-sorozatot alkotnak, legyen ennek határértéke x . Mivel $x \in B$, és f differenciálható x -ben, $\varepsilon > 0$ -hoz elég nagy n -re $z \in \text{rng}(\gamma_n)$ esetén $f(z) = f(x) + f'(x)(z - x) + \omega(z, x)$ és $|\omega(z, x)| \leq \varepsilon|z - x|$. Mivel $h \mapsto \frac{1}{2}f'(x)hh$ deriváltja a h pontban $k \mapsto \frac{1}{2}f'(x)hk + \frac{1}{2}f'(x)kh = f'(x)hk$, a $h \mapsto f'(x)h$ függvénynek van primitív függvénye. Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned} M &\leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(x) dz + \int_{\gamma_n} f'(x)(z - x) dz + \int_{\gamma_n} \omega(z, x) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\gamma_n} \omega(z, x) dz \right| \leq \varepsilon 4^n \mathbb{V}(\gamma_n) \frac{\mathbb{V}(\gamma_n)}{2} = \frac{\varepsilon (\mathbb{V}(\gamma))^2}{2}. \end{aligned}$$

Így csak $M = 0$ lehetséges. $\square$

9.1.40. Következmény. A primitív függvény létezésének differenciálható f -re az $f'(x)$ -ek szimmetriája szükséges feltétele, és ha D egyszeresen összefüggő tartomány, akkor ez a feltétel elégséges is. $\square$

° **9.1.41. Megjegyzés.** Az előző tétel bizonyításával együtt érvényben marad akkor is, ha $m = n = 2$, és komplex differenciálásról van szó. Mivel ekkor $f'(x)hk = f'(x)kh$ mindig teljesül, hiszen a komplex számok szorzása kommutatív, differenciálható komplex függvénynek lokálisan mindig van primitív függvénye.

9.2 Felületi integrál

A Stokes-tétel különös sajátága, hogy az egyedüli vele kapcsolatos nehézség a kimondásához szükséges fogalmak definícióinak bonyolultsága. E definíciók differenciálformákra, ezek deriváltjaira, integrációs tartományok határaitra és irányítására

vonatkoznak. Ha ezek a fogalmak már tisztázottak, akkor a tétel kimondása nagyon rövid és tömör, és bizonyítása kevés nehézséget okoz.

Walter Rudin (1978)

Ez a klasszikus témakör a klasszikus fizika talán legszebb részének, a Maxwell-elméletnek az alapját képezi, de alkalmazásai átszövik a fizika különböző ágait, és fontos szerepet játszanak a matematika különböző ágaiban (például parciális differenciálegyenletek, numerikus analízis, topológia stb.) is. Elkerültem az egyszerűbb, de lényegében formális tárgyalásmódot, amely geometriai szempontból keveset mond, és lényegében a Potter–Morrey [51] könyv tárgyalásmódját követem, de nem Riemann-integrált használlok, mert így az eredmények általánosabbak, az integrációs tartományok határára vonatkozó feltételek pedig könnyen ellenőrizhető és szemléletes lokális feltételek. Más változatokat például a Pál–Schip–Simon [46] jegyzetből vagy Rudin [53] könyvéből ismerhet meg az olvasó. A divergenciatétel után részletesen tárgyaljuk a két- és háromdimenziós esetet, és csak ezután fogalmazzuk meg a Stokes-tétel általánosabb alakját.

9.2.1. Lokálisan Lipschitz határú halmazok. Tételeinket olyan $\mathbb{R}^n$ -beli halmazokra tudjuk majd bizonyítani, amelyeknek a határa „elfogadhatóan jó”. Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ halmazra azt mondjuk, hogy *határa lokálisan Lipschitz*, ha a ∂G határ minden x pontjához van egy azt tartalmazó $n - 1$ dimenziós F felület, hogy egy megfelelően választott (ortonormált bázishoz tartozó) $\xi_1, \dots, \xi_n$ lokális koordináta-rendszerben az F felület előállítható egy Lipschitz-függvénnyel is; az F párhuzamos eltoltjainak G -ben, illetve G -n kívül vannak. Pontosabban fogalmazva, az $x \in \partial G$ ponthoz, hogy ha $b_1, \dots, b_n$ a megfelelő ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$ -ben, és ebben a bázisban x koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_n$, akkor az $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ pontnak $\mathbb{R}^{n-1}$ -ben létezik olyan $U_r(x')$ környezete, egy azon értelmezett valós értékű φ Lipschitz-függvény, és egy $\varepsilon > 0$ szám, hogy az

$$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_{n-1} b_{n-1} + (\gamma + \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})) b_n$$

vektor $\gamma = 0$ esetén G határán, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén G külsejében, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén pedig G belsejében van minden $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in U_r(x')$ -re.

9.2.2. Külső normális. Legyen A egy mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek. Az A Lebesgue-sűrűsége az x pontban

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{|A \cap \mathbb{B}_r(x)|}{|\mathbb{B}_r(x)|},$$

ha létezik. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és u egy egységvektor $\mathbb{R}^n$ -ben, azt mondjuk, hogy u a *külső normálisa* A -nak x -ben, ha az

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y \notin A, \langle y - x, u \rangle < 0\} \quad \text{és} \quad \{y \in \mathbb{R}^n : y \in A, \langle y - x, u \rangle > 0\}$$

halmazok Lebesgue-sűrűsége x -ben nulla. A külső normális szemléletes jelentése, hogy „az A határán az x pontban a halmazból kifelé mutat és merőleges a határra”. Ha az A halmaznak az x pontban létezik külső normálisa, akkor az egyértelmű: Valóban, ha u és v két különböző külső normális lenne, akkor $u - v$ benne lenne a

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle > 0 \quad \text{és} \quad \langle y, v \rangle < 0\}$$

nyílt kúpban. Így az $x + C$ halmaz nem üres, Lebesgue-sűrűsége x -ben pozitív, de

$$x + C \subset \{y \in \mathbb{R}^n: y \in A, \langle y - x, u \rangle > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n: y \notin A, \langle y - x, v \rangle < 0\},$$

ami ellentmondás. Ha létezik külső normálisa A -nak az x pontban, akkor azt $\mathbf{n}(x, A)$ -val jelöljük. Világos, hogy A -nak sem a belső, sem a külső pontjaiban nem létezhet külső normális, csak az A határpontjaiban. Gyakran $\mathbf{n}(x, A)$ helyett csak $\mathbf{n}(x)$ -et, esetleg csak $\mathbf{n}$ -et írunk.

A következő lemma segít a külső normális kiszámításában, ha a határ Monge-féle (vagyis explicit) előállítás adott.

9.2.3. Lemma. Legyen valamilyen $b_1, b_2, \dots, b_n$ ortonormált bázisban a $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátozott nyílt halmaz határának egy darabja a φ Lipschitz-leképezés grafikonjaként megadva, pontosabban, tegyük fel, hogy φ az $\mathbb{R}^{n-1}$ egy nyílt D részhalmazát képezi $\mathbb{R}$ -be úgy, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra

$$\psi_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + (\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) + \gamma) b_n$$

$\gamma = 0$ esetén D -t ∂G -ba, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén G belsejébe, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén pedig G külsejébe képezi. Ekkor minden olyan $x' \in D$ pontra, amelyben φ differenciálható, $x = \psi_0(x') \in \partial G$ -ben létezik a G külső normálisa és $v(x') = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}(x') b_i$ jelöléssel $\mathbf{n}(x) = v(x')/|v(x')|$.

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy a határ x -beli $\partial_i \psi_0(x') = b_i + \partial_i \varphi(x') b_n$ lineárisan független érintővektorai merőlegesek $v(x')$ -re. Részletesebben lásd a [34] könyvet, 12.4 lemma. $\square$

9.2.4. Megjegyzés. Ha a határ egy darabja mint elemi felületdarab, Gauss-féle (vagyis paraméteres) $g: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ alakban adott, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $u \in D$, és $x = g(u)$, akkor olyan $b_1, b_2, \dots, b_n$ ortonormált bázist válasszunk $\mathbb{R}^n$ -ben, amelynek első $n-1$ vektora ugyanazt az alteret feszíti ki, mint a $\partial_j g(u)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ vektorok. Ha az x -nek erre a bázisra vonatkozó koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_n$, akkor $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ kifejezhető $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ -el, és a felületnek egy ekvivalens

$$\psi_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) b_n$$

explicit előállítás adható. Mivel $\psi'_0(x')$ értékkészlete megegyezik $g'(u)$ értékkészletével, $\nabla \varphi(x') = 0$, tehát $\mathbf{n}(x)$, ha létezik, $\pm b_n$. Például ha $n = 3$, akkor a külső normális, ha létezik,

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\partial_1 g(u) \times \partial_2 g(u)}{|\partial_1 g(u) \times \partial_2 g(u)|} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{n}(x) = \frac{\partial_2 g(u) \times \partial_1 g(u)}{|\partial_2 g(u) \times \partial_1 g(u)|}.$$

Ha a külső normálist így számítjuk, akkor létezését és a helyes előjelet más, például geometriai megfontolások alapján kell eldönteni.

9.2.5. Divergencia. Ha f egy vektormező $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán, amely differenciálható az x pontban, akkor f divergenciáját az x pontban a

$$(\operatorname{div} f)(x) = (\operatorname{Tr} f')(x)$$

összefüggéssel értelmezzük.

Emlékeztetünk rá, hogy egy $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációra $\text{Tr}(A)$ a $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ karakterisztikus polinom gyökeinek multiplicitással vett összege. Akármilyen bázisban felírva A mátrixát, a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből adódik, hogy $\text{Tr}(A)$ az A mátrixának főátlójában álló számok összege, és nem függ a bázis választásától.

Ebből következik, hogy ha f és g is vektormező és mindkettő differenciálható x -ben, akkor $\text{div}(f + g)(x) = \text{div } f(x) + \text{div } g(x)$.

A divergencia fizikai jelentésének megértéséhez tekintsünk egy

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

téglát. Ha $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ folytonosan differenciálható vektormező valamely, a téglát tartalmazó nyílt halmazon, akkor $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ jelöléssel

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 f_1(x_1, x') dx_1 = f_1(b_1, x') - f_1(a_1, x').$$

Jelölje $\mathbf{n}(x)$ a T téglá valamely oldallapjának egy pontjában a külső normálist, és $n_i(x)$ ennek i -edik koordinátáját. Ennek segítségével a jobb oldal

$$n_1(b_1, x') f_1(b_1, x') + n_1(a_1, x') f_1(a_1, x')$$

alakba írható. Mindkét oldalt integrálva x' szerint, azt kapjuk, hogy

$$\int_T \partial_1 f_1(x) dx = \int_{\partial T} n_1(x) f_1(x) dx;$$

az integrálást az $\{x: x_1 = a_1\}$ és $\{x: x_1 = b_1\}$ oldalakról azért terjeszthetjük ki a téglá határára, mert a többi lapon $n_1(x)$ nulla. Hasonlóan járva el a többi $\partial_i f_i$ -vel is, és összegezve i -re, azt kapjuk, hogy

$$\int_T (\text{div } f)(x) dx = \int_{\partial T} \langle f(x), \mathbf{n}(x) \rangle dx.$$

Formulánk a divergenciatétel speciális esete. Az általános változatot lásd később.

Az f vektormezőre $\langle f, \mathbf{n} \rangle$ az f normális irányú komponense. Ennek felületi integrálja a vektormező által jellemzett áramlásban a felületen időegység alatt átáramló mennyiség, a vektormezőnek az adott felületre vonatkozó *fluxusa*. A fenti integrálban a jobb oldal fizikai jelentése tehát a T téglából időegység alatt kiáramló mennyiség (a beáramlást negatív kiáramlásnak tekintve). Összehúзва T -t egy pontra, azt kapjuk, hogy $\text{div } f$ fizikai jelentése az f vektormező azon pontbeli forrásintenzitása.

9.2.6. Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-skalármező, e pedig egy rögzített vektor. Ekkor

$$\int_G f_e(x) dx = \int_{\partial G} f(x) \langle e, \mathbf{n}(x) \rangle dx,$$

ahol f_e az f -nek az e irány menti deriváltja.

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.7 tétel. $\square$

9.2.7. Divergenciatétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-vektormező. Ekkor

$$\int_G \operatorname{div} f = \int_{\partial G} \langle f(x), \mathbf{n}(x) \rangle dx.$$

Bizonyítás. Általánosabban, ha fennáll a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel állítása egy korlátos nyílt halmazra, amely határának van (véges) felszíne, valamint egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis vektoraira, akkor abból már következik a divergenciatétel, és a divergenciatételből következik a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel.

Valóban, tegyük fel, hogy a divergenciatétel teljesül, és legyen $f(x) = g(x)e$, ahol g egy skalármező, e pedig a rögzített vektor. Az $e = 0$ eset triviális. Egy olyan bázisban írva fel f' mátrixát, amelynek egyik bázisvektora e , kapjuk a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tételt g -re.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel teljesül minden skalármezőre, és egy bázis $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektoraira. Írjuk fel $f(x)$ -et skalár értékű függvényekkel $\sum_i f_i(x)e_i$ alakban. Ha $\partial_{e_j} f_i$ jelöli az f_i függvény e_j irány menti deriváltját, akkor a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tételből azt kapjuk, hogy

$$\int_G \partial_{e_j} f_i(x) dx = \int_{\partial G} f_i(x) \langle e_j, \mathbf{n}(x) \rangle dx$$

teljesül, ahol a $\partial_{e_j} f_i(x)$ számok $f'(x)$ mátrixának elemei az $e_1, \dots, e_n$ bázisban. A $j = i$ választással, összegezve i -re a bal oldalon $\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f_i(x)$ integrálja áll, ami nem más, mint $(\operatorname{div} f)(x)$ integrálja, míg a jobb oldalon álló integrandus $\langle f(x), \mathbf{n}(x) \rangle$. $\square$

9.2.8. Gradienstétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-skalármező. Ekkor

$$\int_G \operatorname{grad} f = \int_{\partial G} f(x) \mathbf{n}(x) dx.$$

Bizonyítás. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisa. Mindkét oldalnak ebben a bázisban vett megfelelő koordinátái megegyeznek a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel szerint. $\square$

9.2.9. Rotáció. Legyen v az $\mathbb{R}^3$ valamely részhalmazán értelmezett vektormező. Ha v differenciálható értelmezési tartománya valamely x pontjában, akkor értelmezzük v rotációját az x pontban. Legyenek v_1, v_2, v_3 a v koordinátafüggvényei a standard e_1, e_2, e_3 bázisban. Legyen

$$\operatorname{rot} v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) e_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) e_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) e_3.$$

A rotáció definíciója könnyebben megjegyezhető a $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$ formális felírás segítségével, ahol a ∇ szimbólum a $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ „differenciáloperátort” jelenti. Ez a szimbolikus jelölés egyébként $\mathbb{R}^n$ -re is kiterjeszthető: $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$. Ezzel a szimbolikus jelöléssel $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$, és ha f egy skalármező, akkor a gradiense $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$, valamint a Δ Laplace-operátor szimbolikusán $\langle \nabla, \nabla \rangle$, röviden ∇^2 alakba írható. [Definíció szerint, $(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f(x)$, ha f kétszer differenciálható x -ben. Vektor értékű függvényre a Laplace-operátort koordinátánként alkalmazzuk.] Ezek a szimbolikus összefüggések megkönnyítik a definíciók és tételek megjegyzését.

9.2.10. Rotációtétel. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Lipschitz-vektormező. Ekkor

$$\int_G \operatorname{rot} f = \int_{\partial G} \mathbf{n}(x) \times f(x) dx.$$

Bizonyítás. Legyen e_1, e_2, e_3 az $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisa. Mindkét oldalnak ebben a bázisban vett megfelelő koordinátái megegyeznek a Gauss–Green–Ostrogradszkij-tétel szerint. $\square$

9.2.11. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett elég sima a és b skalár, illetve c és d vektormezőkre teljesülnek az alábbi összefüggések. Írjuk fel mindegyiket a ∇ operátor segítségével is.

- (1) $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$;
- (2) $\operatorname{div}(ac) = \langle \nabla a, c \rangle + a \operatorname{div} c$;
- (3) $\operatorname{rot}(ac) = \nabla a \times c + a \operatorname{rot} c$;
- (4) $\operatorname{div}(c \times d) = \langle d, \operatorname{rot} c \rangle - \langle c, \operatorname{rot} d \rangle$;
- (5) $\operatorname{rot} \nabla a = 0$;
- (6) $\operatorname{div} \operatorname{rot} c = 0$;
- (7) $\operatorname{div} \nabla a = \Delta a$;
- (8) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} c = \nabla \operatorname{div} c - \Delta c$;
- (9) $\operatorname{grad} \operatorname{div} c = \Delta c + \operatorname{rot} \operatorname{rot} c$.

9.2.12. Feladat [8]. Az előző feladat jelöléseivel, számoljuk ki az alábbi kifejezéseket:

- (1) $\nabla \langle c, d \rangle$;
- (2) $\operatorname{rot}(c \times d)$.

9.2.13. Feladat [8]. A divergencia-tétel alkalmazásával alakítsuk át a következő integrálokat. Itt a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, és a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái) $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

(1)

$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS;$$

(2)

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS;$$

(3)

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cos \gamma dS.$$

→ **9.2.14. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, akkor a $|V|$ térfogatra

$$|V| = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

ahol $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái).

→ **9.2.15. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, akkor tetszőleges rögzített $\mathbf{l}$ irányra

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = 0.$$

→ **9.2.16. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, $\mathbf{r}$ a rögzített (x, y, z) pontból a (ξ, η, ζ) pontba mutató vektor, amelynek hosszát r jelöli, akkor

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} dV = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

→ **9.2.17. Feladat [8].** A jelölések megegyeznek az előző feladat jelöléseivel. Számítsuk ki az alábbi Gauss-integrált, ha (x, y, z) a V halmaz belsejében, illetve külsejében van:

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS.$$

→ **9.2.18. Feladat [8].** A V testet teljesen folyadékba mártjuk. Pascal törvényéből kiindulva bizonyítsuk be Arkhimédész törvényét.

9.2.19. Irányítás. Az egyváltozós integráltranszformációs formulánál láttuk, hogy az irányításra is érdemes tekintettel lenni. A számegegyenes irányítása annyit jelent, hogy kijelöljük egy nem nulla elemét. Mindazok a számok, amelyek egymás pozitív konstansszorosai, ugyanazt az irányítást jelölik ki. Nyilván kétféle irányítás van, pozitív és negatív.

A sík esetén az irányítás egy (b_1, b_2) rendezett vektorpár kijelölését jelenti, amelyek bázist alkotnak. Egy másik (b'_1, b'_2) bázis akkor definiálja ugyanazt az irányítást, ha az egyik bázis folytonosan átdeformálható a másikba bázisokon keresztül. Itt is két irányítás van, amelyeket a sík esetén is szokás pozitívnak és negatívnak nevezni, éspedig a standard (e_1, e_2) bázissal ekvivalens irányítást nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. Nem nehéz megmutatni, hogy a (b_1, b_2) irányítás $\det(b_1, b_2)$ előjele.

Hasonló a fogalom háromdimenziós térben, itt szokás jobb-, illetve balsodrású koordináta-rendszerről beszélni. Itt is megmutatható, hogy kétféle irányítás van. Az egyik a standard bázissal ekvivalens irányítás, ezt nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. A (b_1, b_2, b_3) bázis által definált irányítás itt is $\det(b_1, b_2, b_3)$ előjele.

Ennek megfelelően, $\mathbb{R}^n$ -ben egy $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázis *irányítását* úgy definiáljuk, hogy legyen $\text{sgn}(\det(b_1, b_2, \dots, b_n))$. Világos, hogy a standard bázis irányítása pozitív, és bármely bázis irányítása az ellentettjére változik, ha két bázisvektort felcserélünk, illetve ha valamelyik bázisvektort az ellentettjével helyettesítjük.

→ **9.2.20. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}^3$ és $a \times b \neq 0$, akkor $a, b, a \times b$ pozitív irányítású bázist alkotnak.

9.2.21. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy bázisa akkor és csak akkor pozitív irányítású, ha folytonosan átdeformálható a standard bázisba bázisokon keresztül. (Definiáljuk pontosan bázisok folytonos deformációját egymásba.)

9.2.22. Green-tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor létezik egyszerű zárt Lipschitz-pályák egy $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sorozata, amelyek értékkészlete ∂D egy diszjunkt lefedése úgy, hogy $1 \leq k \leq m$ -re és majdnem minden t -re $\mathbf{n}(\gamma_k(t))$, $\gamma'_k(t)$ pozitív irányítású ortogonális bázisa $\mathbb{R}^2$ -nek, azaz „a γ_k pályán haladva D belseje balra esik”. Bármely ilyen pályasorozatra és $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ Lipschitz-vektormezőre

$$\int_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \langle f(x), dx \rangle.$$

A tétel második része lényegében a divergenciatétel kétdimenziós változatának átformálása.

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.17 tétel. $\square$

9.2.23. Következmény.

$$|D| = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} x_1 dx_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} -x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} x_1 dx_2 - x_2 dx_1. \quad \square$$

→ **9.2.24. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével alakítsuk át az

$$\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya az S korlátos tartományt határolja.

→ **9.2.25. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_K (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$$

integrált, ahol a K háromszögpálya az $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$ csúcsú háromszöget határolja.

→ **9.2.26. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya értékkészlete az $x^2 + y^2 = a^2$ körvonal.

→ **9.2.27. Feladat [8].** Számítsuk ki az

$$\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya értékkészlete egy tartomány határa, amelynek az origó nincs a határán.

9.2.28. Stokes tétele. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ ugyanaz, mint a Green-tételben, továbbá legyen x egy $\overline{D}$ -at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}^3$ -beli értékű kölcsönösen egyértelmű folytonosan differenciálható függvény, f pedig egy $x(\overline{D})$ -at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható vektormező. Legyen n a x értékészletén az

$$n(x(s)) = \frac{\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s)}{|\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s)|},$$

ha $\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s) \neq 0$, egyébként $n(x(s)) = 0$ összefüggéssel értelmezett normálvektormező. Ekkor

$$\int_{x(G)} \langle \operatorname{rot} f, n \rangle = \sum_i \int_{x \circ \gamma_i} \langle f(y), dy \rangle.$$

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.25 tétel. $\square$

→ **9.2.29. Feladat** [9]. A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ körpálya az x tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal. Eredményünket ellenőrizzük az integrál közvetlen kiszámításával.

→ **9.2.30. Feladat** [8]. A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$ ellipszis.

→ **9.2.31. Feladat** [8]. A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x^2 + y^2 = a^2$, $x/a + z/h = 1$ ($a > 0$, $h > 0$) ellipszis az x tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal.

* **9.2.32. Differenciálformák.** Az alábbi séma a vektoranalízis klasszikus differenciáloperátorait és tételeit foglalja össze, a teljesség kedvéért az egydimenziós esettel kezdve:

$$\begin{array}{ccc} \dim = 1 & & \\ \text{skalár „mező”} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & \text{skalár „mező”} \\ & & \\ \int_a^b f' = f(b) - f(a) & & \\ \text{pontok} & \xleftarrow{\bar{\partial}} & \text{szakaszok} \end{array}$$

dim = 2								
skalár- mező	$\nabla \longrightarrow$	vektor- mező	$f \mapsto \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} \longrightarrow$			skalár- mező		
$\int_{\gamma} \langle \nabla f, d\gamma \rangle$ $= f(\gamma(b))$ $- f(\gamma(a))$			Green- tétel					
pontok	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	görbék	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$			2 dim. halmaz		
dim = 3								
skalár- mező	$\nabla \longrightarrow$	vektor- mező	$\text{rot} \longrightarrow$	vektor- mező	$\text{div} \longrightarrow$	skalár- mező		
$\int_{\gamma} \langle \nabla f, d\gamma \rangle$ $= f(\gamma(b))$ $- f(\gamma(a))$			Stokes- tétel		Gauss- tétel			
pontok	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	görbék	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	irányított felületek	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	3 dim. halmaz		
dim = n								
skalár- mező	$\nabla \longrightarrow$	vektor- mező	$\xrightarrow{?}$	$\dots$	$\xrightarrow{?}$	vektor- mező	$\text{div} \longrightarrow$	skalár- mező
$\int_{\gamma} \langle \nabla f, d\gamma \rangle$ $= f(\gamma(b))$ $- f(\gamma(a))$			$?$	$\dots$	$?$		Gauss- tétel	
pontok	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	görbék	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	$\dots$	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	$n-1$ dim. ir. fel.	$\xleftarrow{\bar{\partial}}$	n dim. halmaz

Mint látjuk, az egész történet a Newton–Leibniz-formulával kezdődik, mely szerint egy szakaszon integrálva egy függvény deriváltját, az eredmény a felső és alsó végpontokban vett függvényértékek különbsége.

Vegyük észre, hogy a felső sorokban mezők, és közöttük ható differenciáloperátorok állnak. Az alsó sorokban mindig $\bar{\partial}$ irányított határt képzünk. A középső sorban álló tételek sémája: ha a tétel felett álló differenciáloperátor hat egy mezőre, és a kapott mezőt integráljuk az alatta álló irányított alakzat felett, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az alakzat irányított határa felett integrálnánk az eredeti mezőt. Ezt az általános sémát szeretnénk átvinni tetszőleges dimenzióra.

Az alsó sor általánosításával könnyű dolgunk van. A görbék fogalmát véve alapul, k dimenziós felület, vagy röviden k -felület alatt egy k dimenziós G nyílt halmazon értelmezett ψ folytonos függvénynek egy $D \subset G$ korlátos mérhető halmazra vett megszorítását fogjuk érteni. Ugyanúgy, mint a görbéknél, itt is magát a leképezést fogjuk felületnek nevezni, nem az értékészletét, mert az irányításra is szükség van, és ezt a leképezés adja, átvive az értelmezési tartomány természetes irányítását. Mint a görbéknél, itt is legtöbbször feltesszük, hogy ψ differenciálható, vagy legalábbis Lipschitz, és D -ről is gyakran feltesszük, hogy ∂D lokálisan Lipschitz. Az irányított határt úgy fogjuk képezni, mint a Stokes-tételnél tettük: a D határát irányítja a külső normális, és az irányított határ képzésénél olyan $k - 1$ felületet keresünk, amelynek irányítása ezzel összhangban van.

Nehezebb megtalálni, hogy mit integráljunk a k -felületeinken. A kiindulópontot a görbe menti integrál adhatja. Itt láttuk, hogy vektormező helyett jobb kovektormezőt integrálni, azaz lineáris funkcionál (vagy operátor) értékű függvényt. Egy vektormezőhöz aztán a belső szorzat vagy a vektori szorzat segítségével, vagy más módon hozzárendelhetünk egy kovektormezőt. A görbe menti integrál definiálásakor (a felosztások használatánál) kihasználtuk a valós számok rendezését. A k -felület feletti integráloknál ezt nem tehetjük meg, ezért hasznosabb a görbe menti integrál kiszámítására szolgáló

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

ha $\text{dmn } \gamma = [a, b]$ összefüggés jobb oldalát alapul venni. Ez megtehető, ha γ Lipschitz-függvény, a k -felületeknél is ezt fogjuk feltenni; integrálfogalmunk így is elég általános lesz. A jobb oldalon az $f(\gamma(t))$ lineáris funkcionált (vagy operátort) alkalmazzuk a $\gamma'(t)$ vektorra, és az így kapott értéket, ami t függvénye, integráljuk.

Vegyük közelebbről szemügyre a háromdimenziós esetet. A Stokes-tételben egy

$$\int_F \langle g, n \rangle$$

típusú integrál szerepel, ahol F egy kétdimenziós alakzat, amit az n normálvektor „irányít”, g pedig egy vektormező. Az F -et egy $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 2-felület értékészleteként előállítva, a fenti integrál

$$\int_D \langle g(\gamma(s)), \partial_1 \gamma(s) \times \partial_2 \gamma(s) \rangle ds$$

alakba írható. Így tulajdonképpen a g vektormezőhöz a vegyes szorzat segítségével egy bilineáris formát rendeltünk, és ezt alkalmazzuk a $\partial_1 \gamma(s)$ és $\partial_2 \gamma(s)$ vektorokra. A bilineáris funkcionál alternáló, a vegyes szorzat tulajdonságai miatt. Ennek megfelelően egy k -felületen egy értéként k -lineáris alternáló formákat felvevő függvényt kell integrálnunk. A differenciáloperátor az úgynevezett külső deriválás lesz: értéke egy pontban a differenciálból képzett alternáló forma.

*** 9.2.33. Segédétel.** Tegyük fel, hogy $n > 1$ és $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor van olyan $\mathbb{R}^{n-1}$ valamely D korlátos nyílt részhalmazán értelmezett Lipschitz-függvény, és olyan $B \subset D$ mérhető halmaz, hogy $\psi|B$ kölcsönösen egyértelmű, értékészlete ∂G , majdnem minden $y \in \text{dmn}(\psi)$ -re

$$\mathbf{n}(\psi(y)), \partial_1 \psi(y), \partial_2 \psi(y), \dots, \partial_{n-1} \psi(y)$$

pozitív irányítású bázisa $\mathbb{R}^n$ -nek és $\mathbf{n}(\psi(y))$ merőleges a

$$\partial_i \psi(y), \quad i = 1, \dots, n-1$$

érintővektorokra. Minden ilyen ψ -re és B -re, és minden χ^{n-1} -integrálható $f: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényre

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle = \int_B \det(f(\psi(y)), \partial_1 \psi(y), \dots, \partial_{n-1} \psi(y)) dy.$$

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.30 lemma. $\square$

* **9.2.34. Multilineáris formák.** Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett. Emlékeztetünk rá, hogy egy $f: V^m \rightarrow \mathbb{R}$, minden változójában lineáris (multilineáris, m -lineáris) leképezést m -lineáris funkcionálnak vagy m -lineáris formának, röviden m -formának neveztünk. Az összes m -formák lineáris teret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Az 1-formák a $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, a V' duális tér elemei. A 0-formák definíció szerint $\mathbb{R}$ elemei. Egy példa m -formára a következő: Legyen $\omega_1, \dots, \omega_m \in V'$. Ekkor az

$$(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_m)(v_1, v_2, \dots, v_m) = \prod_{i=1}^m \omega_i(v_i)$$

tenzorszorzat egy m -formát definiál V -n. (Tudjuk, hogy nem minden m -forma áll elő ilyen alakban.)

Tudjuk, hogy az m -formák tere n^m -dimenziós. Megmutatjuk, hogy ha $\omega_1, \dots, \omega_n$ a V' egy bázisa, akkor az

$$\omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n$$

m -formák bázist alkotnak. Válasszunk olyan $e_1, \dots, e_n$ bázist V -ben, amelyre $\omega_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-delta). Ekkor bármely f m -formára

$$f = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m},$$

mert a bal és jobb oldal minden $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor m -esen egybeesik. Másrészt, ha egy

$$\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_m} \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}$$

lineáris kombináció nulla, akkor minden $\alpha_{j_1, \dots, j_m}$ együttható nulla. Valóban, ha valamelyik $\alpha_{k_1, \dots, k_m}$ nem nulla, akkor a lineáris kombináció az $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor m -esen nem a nulla értéket veszi fel.

Az m -formák két speciális fajtája különösen fontos: a szimmetrikus és az alternáló formák.

Jelölje S_m az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz összes permutációinak csoportját. Egy f m -formát szimmetrikusnak nevezzük, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$ -re és $\sigma \in S_m$ -re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = f(v_1, \dots, v_m).$$

A szimmetrikus m -formák egy alterét alkotják az m -formák terének. Bármely f m -formából képezhetünk egy $S(f)$ szimmetrikus m -formát az

$$S(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $S(f)$ szimmetrikus m -forma és az S leképezés lineáris. Ha f maga szimmetrikus volt, akkor $S(f) = m!f$. Emlékeztetünk rá, hogy egy skalár értékű függvény m -edik deriváltja egy szimmetrikus m -forma.

Számunkra most még fontosabbak lesznek az alternáló formák. Egy f m -formát *alternáló*nak vagy *antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$ és $\sigma \in S_m$ esetén

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \text{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_m);$$

itt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, ahol $\varepsilon(\sigma)$ az inverziók száma a σ permutációban. [Ismeret, hogy $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ az S_m csoport szorzástartó leképezése a $\{-1, 1\}$ multiplikatív csoportba.] Egy alternáló forma előjelet vált, ha bármely két változóját megcseréljük, ugyanis a megfelelő σ permutációra $\text{sgn}(\sigma) = -1$. Megfordítva, ha egy m -forma bármely két szomszédos változóját megcserélve előjelet vált, akkor alternáló, mert ilyen cserékkel bármely permutáció előállítható. Ha f alternáló forma, és $v_i = v_j$ valamely $i \neq j$ -re, akkor $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, mert ezt a két változót megcserélve, az érték ugyanaz marad, de előjelet is kell váltania. Az alternáló m -formák is egy alterét alkotják az m -formák terének. Itt is bármely f m -formából képezhető egy $A(f)$ alternáló m -forma az

$$A(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $A(f)$ tényleg alternáló m -forma, és az A leképezés lineáris. Ha f maga alternáló volt, akkor $A(f) = m!f$.

Ha $\omega_1, \dots, \omega_m \in V'$, akkor legyen

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_m = A(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_m).$$

Ezeknek az úgynevezett *külső szorzatok*nak az értékei kifejezhetők determinánsok segítségével: Ha $v_1, \dots, v_m \in V$ egy tetszőleges vektorrendszer, akkor

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m)(v_1, \dots, v_m) &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \omega_{\sigma(m)}(v_m) \\ &= \det \left((\omega_j(v_i))_{i,j=1}^m \right). \end{aligned}$$

Véges dimenziós V esetén megadjuk az alternáló m -formák terének egy bázisát. Legyen $\omega_1, \dots, \omega_n$ a V' egy bázisa. Bármely $1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n$ indexrendszer esetén képezhetjük az $\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_m}$ alternáló m -formákat. Ezek kifeszítik az alternáló m -formák alterét, de nyilván nem függetlenek, hiszen egyrészt a $j_1, j_2, \dots, j_m$ bármely permutációjához ugyanaz az m -forma vagy az ellentettje tartozik, másrészt ha két index megegyezik, akkor a megfelelő m -forma nulla. Ha azonban az összes

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_m}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$$

alternáló m -formákat tekintjük, akkor ezek bázist alkotnak. Csak a lineáris függetlenséget kell megmutatnunk. Ez hasonlóan adódik, mint a nem alternáló esetben.

→ * **9.2.35. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy minden 2-forma egyértelműen előállítható egy alternáló és egy szimmetrikus forma összegeként. Igaz-e ez m -formákra?

→ * **9.2.36. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy egy f m -forma akkor és csak akkor alternáló, ha az alábbi feltételek közül valamelyik fennáll:

(1) minden páratlan σ permutációra és $v_1, \dots, v_m$ -re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = -f(v_1, \dots, v_m);$$

(2) minden σ transzpozícióra és $v_1, \dots, v_m$ -re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = -f(v_1, \dots, v_m);$$

(3) $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, ha a v_i -k közül legalább kettő megegyezik.

→ * **9.2.37. Feladat [5].** Legyen f alternáló m -forma. Mutassuk meg, hogy ha

$$v_1, \dots, v_m$$

lineárisan függőek, akkor $f(v_1, \dots, v_m) = 0$.

→ * **9.2.38. Feladat [8].** Ha V valós n dimenziós vektortér, hány dimenziós a V feletti alternáló m -lineáris formák tere?

* **9.2.39. Feladat[6].** Ha V valós n dimenziós vektortér, hány dimenziós a V feletti szimmetrikus m -lineáris formák tere?

* **9.2.40. Külső szorzat.** Emlékeztetünk rá, hogy ha V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g: V^l \rightarrow \mathbb{R}$ multilineáris leképezések, akkor az $f \otimes g$ *tenzorszorzatukat* az

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

összefüggéssel értelmeztük. Világos, hogy a tenzorszorzás asszociatív, és mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve.

Egy (k, l) -keverés alatt az $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$ halmaz egy olyan permutációját értjük, amely monoton növekedő az

$$\{1, \dots, k\} \quad \text{és} \quad \{k+1, \dots, k+l\}$$

részalmazokon. Az összes (k, l) -keverések halmazát jelölje $S(k, l)$. Ha most f és g alternáló formák, akkor az $f \wedge g$ *külső szorzatukat* az

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ = \sum_{\sigma \in S(k, l)} \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

összefüggéssel definiáljuk. Vegyük észre, hogy

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g),$$

így $f \wedge g$ egy alternáló $(k+l)$ -forma. Ebből az összefüggésből következik, hogy a külső szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra. Megmutatjuk, hogy asszociatív is.

Ehhez azt kell először belátnunk, hogy ha f egy k -forma, g pedig egy l -forma, akkor $A(A(f) \otimes g) = k!A(f \otimes g)$ és $A(f \otimes A(g)) = l!A(f \otimes g)$. Definíció szerint

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\tau \in S_k} \text{sgn}(\tau) f(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(k))}) \right) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Jelölje $\tau' \in S_{k+l}$ azt a permutációt, amelyre $\tau'(i) = \tau(i)$, ha $1 \leq i \leq k$ és $\tau'(i) = i$, ha $k < i \leq k+l$. Ezzel a jelöléssel

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{\tau \in S_k} \text{sgn}(\sigma \circ \tau') f(v_{\sigma \circ \tau'(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau'(k)}) g(v_{\sigma \circ \tau'(k+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau'(k+l)}).$$

Mivel S_{k+l} minden permutációja pontosan $k!$ -féleképpen áll elő $\sigma \circ \tau'$, $\sigma \in S_{k+l}$, $\tau \in S_k$ alakban, a jobb oldal $k!A(f \otimes g)$. A másik összefüggés hasonlóan látható be.

Ezt felhasználva, a külső szorzás asszociativitása adódik a tenzorszorzás asszociativitásából, mivel ha h meg egy m -forma, akkor

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{m!(k+l)!} A((f \wedge g) \otimes h) = \frac{1}{m!(k+l)!} A\left(\frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \otimes h\right) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h) = f \wedge (g \wedge h). \end{aligned}$$

*** 9.2.41. Definíció.** Valamely $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett, értéként $\mathbb{R}^n$ feletti alternáló m -formákat felvevő függvényt m -edrendű differenciálformának nevezünk. Mivel az alternáló m -formák tere (véges dimenziós) normált tér, beszélhetünk a differenciálformák integrálhatóságáról, folytonosságáról, differenciálhatóságáról stb. Hogy a differenciálforma elnevezést megértsük, tekintsünk az $\mathbb{R}^n$ egy D nyílt részhalmazán egy $x: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelynek deriváltja minden pontban invertálható. Az x úgy tekinthető, mint egy görbevonalú koordinátázás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$, azaz x_i az x függvény i -edik koordinátafüggvénye, akkor az x_i differenciáljának hagyományos jelölése dx_i . Bármely $y \in D$ pontra a $dx_1(y), \dots, dx_n(y)$ 1-formák egy bázis alkotnak az 1-formák terében, így bármely $y \in D$ -re a

$$dx_{j_1}(y) \wedge \dots \wedge dx_{j_m}(y), \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$$

m -formák bázist alkotnak az m -formák terében. Bármely m -edrendű ω differenciálforma D -n felírható

$$\omega(y) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_m}(y) dx_{j_1}(y) \wedge \dots \wedge dx_{j_m}(y)$$

alakban $\omega_{j_1, \dots, j_m}$ valós értékű együttható-függvényekkel. Innen ered a differenciálforma elnevezés. Leggyakrabban a szokásos koordinátázást használjuk (x az identikus leképezés), ekkor dx_i nem függ y -től.

Legyen $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, és tegyük fel, hogy G nyílt, D pedig korlátos mérhető halmaz. Legyen $\gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy Lipschitz-függvény, f pedig egy m -edrendű korlátos Baire-differenciálforma $\gamma(D)$ -n. Legyen

$$\int_{\gamma|D} f = \int_D f(\gamma(t)) \partial_1 \gamma(t) \partial_2 \gamma(t) \dots \partial_m \gamma(t) dt.$$

Differenciálformák integráljának egyszerű tulajdonságai (pl. additív, homogén stb.) azonnal következnek a definícióból. Az alábbi tétel mutatja, hogy az integrál nem függ a paraméterezéstől.

*** 9.2.42. Tétel.** Tegyük fel, hogy $n \geq m > 0$, $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, G nyílt, D pedig korlátos és mérhető. Legyen $\gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény. Tegyük fel, hogy adott egy másik, $H \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, ennek egy $E \subset H$ korlátos mérhető részhalmaza, és egy $\psi: H \rightarrow G$ Lipschitz-függvény, amely E -t D -re képezi le kölcsönösen egyértelműen. Legyen f korlátos m -edrendű Baire-differenciálforma $\gamma(D)$ -n. Ha ψ' determinánsa majdnem mindenütt pozitív (ψ „irányítástartó”), akkor $\int_{\gamma \circ \psi|E} f = \int_{\gamma|D} f$, ha pedig majdnem mindenütt negatív (ψ „irányításfordító”), akkor $\int_{\gamma \circ \psi|E} f = - \int_{\gamma|D} f$.

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.39 tétel. $\square$

*** 9.2.43. Külső derivált.** Ha $m > 0$ és az $(m-1)$ -edrendű f differenciálforma differenciálható az x pontban, akkor az x -beli *külső deriváltját* a

$$df(x)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f'(x)(v_i)(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m)$$

összefüggéssel értelmezzük. Az x -beli külső derivált alternáló m -forma, mert bármely két szomszédos változóját felcserélve előjelet vált. Így $x \mapsto df(x)$ egy m -edrendű differenciálforma.

*** 9.2.44. Poincaré–Stokes-tétel.** Legyen $n \geq m-1 > 0$, $D \subset \bar{D} \subset G \subset \mathbb{R}^m$, D és G korlátos nyílt halmazok, tegyük fel, hogy D határa lokálisan Lipschitz, legyen $\gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény, és legyen B és ψ az előző segédétel szerinti halmaz és függvény, a „ D irányított határa”. Ekkor bármely, a $\gamma(\bar{D})$ egy nyílt környezetén értelmezett f folytonosan differenciálható $(m-1)$ -formára

$$\int_{\gamma|D} df = \int_{\gamma \circ \psi|B} f.$$

Bizonyítás. Lásd a [34] könyvet, 12.41 tétel.

→ *** 9.2.45. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy ha

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_m}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m},$$

ahol $x_1, \dots, x_n$ a szokásos koordináták, akkor

$$d\omega(x) = \sum_{i_0=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \partial_{i_0} \omega_{i_1, \dots, i_m}(x) dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}.$$

→ *** 9.2.46. Feladat [12].** Legyen f az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett skalármező, g pedig az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett vektormező.

- (1) Határozzuk meg az f külső deriváltját. Mi a kapcsolata ∇f -fel?
- (2) Határozzuk meg a $\tilde{g}(x)(v) = \langle g(x), v \rangle$ összefüggéssel értelmezett 1-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés g rotációjával?
- (3) Határozzuk meg $\tilde{g}(x)(v, w) = \langle g(x), v \times w \rangle$ összefüggéssel értelmezett 2-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés g divergenciájával?

→ * **9.2.47. Feladat [9].** Mi a kapcsolat a Newton–Leibniz-formula és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→ * **9.2.48. Feladat [9].** Mi a kapcsolat az $\int_{\gamma} \text{grad } f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ összefüggés és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→ * **9.2.49. Feladat [10].** Vezessük le a Green-tételt a Poincaré–Stokes-tételből.

→ * **9.2.50. Feladat [10].** Vezessük le a Stokes-tételt a Poincaré–Stokes-tételből.

→ * **9.2.51. Feladat [10].** Vezessük le a divergencia-tételt a Poincaré–Stokes-tételből.

Komplex függvénytan

A legrövidebb út két valós igazság között a komplexben vezet.

Jacques Hadamard

Miután Euler felfedezte az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolatot, megkezdődött a komplex függvénytan diadalútja. Laplace a Fourier-transzformáltat a változó komplex értékeire is kiterjeszti, ezzel a komplex függvénytan erős eszköz lesz (és mindmáig az marad) a matematikusok, fizikusok és mérnökök kezében. A komplex számok fogalmát Gauss tisztázza véglegesen, és bebizonyítja az algebra alaptételét. Ruffini (1765–1822) és Abel (1802–1829) bebizonyítják a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatatlanságát. Munkájukban Euler és Lagrange ötleteit is használják, akik az egyenletek megoldóképlete és a gyökök permutációi közötti kapcsolatot felfedezték és vizsgálták. A kérdéskört a zseniális Galois (1811–1832) tisztázta, akinek gondolatai ma is élénken hatnak. Közben Cauchy bebizonyította a komplex függvénytan legfontosabb tételeit (integráltétel, reziduúmtétel stb.). A komplex függvénytan harmóniája elbűvölte a matematikusokat. A zseniális Riemann a komplex függvénytan és a matematika többi ága, például a topológia között mély kapcsolatokat tárt fel, gondolatainak hatása napjainkig tart. A komplex számok és függvények alkalmazása ma igen széles körű. A számtalan matematikai alkalmazás mellett olyan egyszerű példaktól, mint a komplex impedanciák használata a mérnöki gyakorlatban, az első repülőgépszárny tervezésén (Zsukovszkij-profil) keresztül egészen a mai fizikai térelméletekig számtalan hivatkozás lehetséges.

Itt a hangsúly az elmélet legegyszerűbb, de hatékony eszközeit nyújtó tárgyalásán van. Először tisztázzuk az analitikus függvények alapvető tulajdonságait. A görbe menti integrálnál tanult tételekből kapjuk a Cauchy-féle alaptételt, abból pedig a komplex függvénytan holomorf és meromorf függvényekkel kapcsolatos alapvető eredményeit. Mellőztem a Riemann-felületek fogalmát, de a Riemann-féle számgömb és a törtlineáris leképezések szerepelnek.

10.1 Holomorf függvények

Riemann megmutatta nekünk, hogy a bizonyításokhoz könnyebben eljuthatunk gondolatokkal, mint hosszú számításokkal.

David Hilbert (1897)

Nem árt emlékezni arra, hogy a matematika nem csak problémák megoldásával foglalkozik, hanem az általa létrehozott objektumok és struktúrák tanulmányozásával. Az egyik legjobb példa a komplex változós függvények klasszikus elmélete. Mellékesen valóban megold problémákat is, mint Riemann leképezési tételében. De szépségének

java olyan állításokban van, amelyeket aligha tekinthetünk úgy, mint bárminek a „megoldása”, mint a reziduumszámítás, vagy Picard tétele, vagy a Cauchy-formula

$$(C) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Az egyetlen „probléma”, amit (C) megold, f meghatározása a γ pályán felvett értékeiből, ami álprobléma és általában nincs megoldása. A (C) formula nem csak rendkívül gyönyörű, hanem rendkívül hasznos is. Közvetlenül mutatja, hogy minden holomorf f függvény végtelen sokszor differenciálható és előállítható konvergens hatványsorával.

Fritz John (1984)

10.1.1. Definíció. Komplex függvény alatt a komplex számok testének valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvényt fogunk érteni. (A komplex függvénytan legtöbb tétele érvényben marad $\mathbb{C}^n$ -beli értékű függvényekre is. Az összes definíciót, tételt és bizonyítást úgy fogalmaztuk, hogy változatlanul érvényes, ha komplex függvény alatt a komplex sík valamely részhalmazát $\mathbb{C}^n$ -be leképező függvényt értünk, és a hatványsor definíciójában azt tesszük fel, hogy az együtthatók $\mathbb{C}^n$ elemei. Ha csak komplex értékű függvényekre gondolunk, akkor azt kifejezetten mondani fogjuk.)

Ismerjük a komplex számokat, komplex szám argumentumát és trigonometrikus alakját. A komplex függvények folytonosságáról, differenciálhatóságáról, sorok konvergenciájáról és abszolút konvergenciájáról is tanultunk már. Ismertek a hatványsor, konvergenciasugár, konvergenciatartomány, sorok és hatványsorok szorzata, analitikusság, exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvények és tulajdonságaik, hatványsorok differenciálása és integrálása, Taylor-tétel, komplex logaritmus, komplex szám komplex kitevős hatványa.

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy halmaz, és f egy D -n értelmezett komplex függvény. Ha f a D minden pontjában differenciálható (persze ekkor D nyílt), akkor azt mondjuk, hogy f holomorf D -n. Ha egy függvény az egész síkon holomorf, akkor *egész függvénynek* nevezzük. Ha f holomorf D -n és $f' = g$, akkor azt is mondjuk, hogy f a g primitív függvénye.

Emlékeztetünk rá, hogy az f komplex függvény pontosan akkor differenciálható c -ben, ha $\varepsilon(z, c) = f(z) - f(c) - (z - c)f'(c)$ jelöléssel $\varepsilon(z, c)/(z - c) \rightarrow 0$, ha $z \rightarrow c$ (4.1.10 segédtétel). Így egy differenciálható komplex változós, komplex értékű függvény, ha egy pontban a deriváltja nem nulla, akkor lokálisan egy komplex számmal (a deriválttal) való szorzással közelíthető, tehát a pont egy környezetében közelítőleg egy nagyítás (vagy kicsinyítés) és egy forgatás összetétele, azaz lokálisan körüljárási irány és szögtartó (konform).

10.1.2. Megjegyzés. A komplex függvénytan egyik legfontosabb és legmeglepőbb tétele szerint minden holomorf függvény analitikus (ez nagyon eltér a valós változós esettől: ott még végtelen sokszor differenciálható függvény sem analitikus, és még az sem biztos, hogy a derivált függvény folytonos). Bár ennek az eredménynek a bizonyításához csak később jutunk el, ismerete segít jobban megérteni a tételeket és kiválasztani a legrövidebb bizonyításokat.

Néhány állítást analitikus függvényekre bizonyítunk be. További analitikus függvényekre vonatkozó állítások is bizonyíthatók, például, hogy analitikus függvények hányadosa is analitikus (ha a nevező nem nulla), analitikus függvények összetétele is analitikus

stb. Mindezekre az állításokra azonban nem lesz szükség, mert a komplex analitikus függvényekről kiderül, hogy megegyeznek a holomorf függvényekkel, amelyekre a fentiek triviálisan fennállnak, a valós analitikus függvényeket pedig hatványsorukkal kiterjeszthetjük a komplex sík egy nyílt részhalmazára, és az analitikus folytatás elve szerint (lásd alább) ez a kiterjesztés lényegében egyértelmű.

→ **10.1.3. Feladat** [7]. Ábrázoljuk a komplex exponenciális függvényt.

10.1.4. Az inverz függvény differenciálási szabálya komplexben. Ha $f \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, $f'(c) \neq 0$, akkor van olyan a c pontot tartalmazó U nyílt halmazt, amelyet f egy V nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le és V -n az f inverze is differenciálható. Ha $x \in U$, $y = f(x)$, akkor

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Bizonyítás. Az állítás az $n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ speciális esete a $\mathbb{K}^n$ -beli inverz függvény tételnek. □

10.1.5. Következmény. Ha $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ és $w \in \mathbb{C}$, akkor $\ln' z = 1/z$ és $z \mapsto z^w$ deriváltja $z \mapsto wz^{w-1}$.

Bizonyítás.

$$\ln'(z) = \frac{1}{\exp'(\ln z)} = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}$$

és

$$(z^w)' = (\exp(w \ln z))' = \exp(w \ln z) \frac{w}{z} = wz^{w-1}. \quad \square$$

10.1.6. Tétel. A $\Re(z) = x$, $\Im(z) = y$, $\Re(c) = a$, $\Im(c) = b$ jelölésekkel, a $z \mapsto f(z)$ komplex függvény pontosan akkor differenciálható a c pontban, ha mint kétváltozós valós függvény differenciálható az (a, b) pontban és $f_x(a, b) + if_y(a, b) = 0$ is teljesül. Ekkor $f'(c) = f_x(a, b)$.

Az $f_x(a, b) + if_y(a, b) = 0$ feltételt gyakran formálisan a $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ alakban írják, mert $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ felhasználásával formálisan (mintha z és $\bar{z}$ függetlenek lennének)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Az f mint komplex függvény akkor differenciálható, ha egy lineáris rész és egy maradéktag összegeként írható, úgy, hogy a maradéktag $|z|$ -kel osztva is nullához tart, ha $z \rightarrow 0$. Ekkor f , mint kétváltozós valós függvény is differenciálható, mert komplex lineáris függvény valós lineáris is.

Megfordítva, ha f differenciálható, mint kétváltozós valós függvény, akkor felírható egy maradéktag, amely még $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ -kel osztva is nullához tart, és egy lineáris rész összegeként. A lineáris rész

$$(x, y) \mapsto f_x x + f_y y = (f_x - if_y) \frac{z}{2} + (f_x + if_y) \frac{\bar{z}}{2}.$$

Ennek az összegnek az első tagja komplex lineáris z -ben, de ha $f_x + if_y \neq 0$, akkor második nem; valóban, a komplex homogenitás nem teljesül: legyen $z = 1$ és $z = i$. Így f pontosan akkor differenciálható, mint komplex függvény, ha $f_x + if_y = 0$, és ekkor $-if_y = f_x$ miatt deriváltja $z \mapsto f_x z$. □

10.1.7. Cauchy–Riemann-egyenletek. Ha u és v kétváltozós valós értékű valós függvények úgy, hogy

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

akkor az előző tétel úgy fogalmazható, hogy az f komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható a c pontban, ha u és v differenciálhatóak (a, b) -ben, továbbá fennállnak az $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$ Cauchy–Riemann-egyenletek; ekkor

$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b).$$

Egy differenciálható kétdimenziós vektormező tehát pontosan akkor felel meg komplex differenciálható függvénynek, ha a derivált mátrixa az $f'(c)$ komplex számmal való szorzás mátrixa, azaz ha

$$\begin{pmatrix} u_x(a, b) & u_y(a, b) \\ v_x(a, b) & v_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re f'(c) & -\Im f'(c) \\ \Im f'(c) & \Re f'(c) \end{pmatrix}.$$

A Cauchy–Riemann-egyenletek geometriai jelentése, hogy ∇v a ∇u -nak $\pi/2$ -vel való elforgatásával kapható. Innen u és v szintvonalai merőlegesek egymásra, mert a szintvonalak merőlegese a gradiensekre.

10.1.8. A zérushelyek izoláltságának elve. Ha az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

hatványsor konvergenciatartománya nem üres (azaz az R konvergenciasugár pozitív), pontjaiban $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, és nem minden a_n nulla, akkor van olyan $0 < r < R$, hogy $0 < |z-c| < r$ esetén $f(z) \neq 0$.

Bizonyítás. Legyen k az a legkisebb természetes szám, amelyre $a_k \neq 0$. Ekkor $f(z) = (z-c)^k g(z)$, ahol

$$g(z) = a_k + a_{k+1}(z-c) + a_{k+2}(z-c)^2 + \dots;$$

a g sora pontosan azokban a z pontokban konvergens, amelyekben f sora. Mivel g folytonos és $g(c) = a_k \neq 0$, van olyan $r > 0$, hogy $g(z) \neq 0$, ha $|z-c| < r$. $\square$

10.1.9. Az analitikus folytatás elve. Legyen $D \subset \mathbb{K}$ egy tartomány, f, g analitikus függvények D -n, amelyek D egy végtelen kompakt részhalmazán megegyeznek. Ekkor $f(z) = g(z)$ minden $z \in D$ -re.

Bizonyítás. Ha $z, z_n \in D$, $z_n \neq z$, $z_n \rightarrow z$ és $f(z_n) = g(z_n)$, akkor z nem izolált zérushelye $f - g$ -nek, így f és g megegyeznek z egy egész környezetén. Az

$$\{z \in D: f(z) = g(z)\}$$

halmaz tehát nyílt és nem üres. Mivel f és g folytonossága miatt az $\{z \in D: f(z) \neq g(z)\}$ halmaz is nyílt, az utóbbi üres kell legyen. $\square$

10.1.10. A nyílt leképezések tétele. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ha f nem konstans, akkor f nyílt leképezés, azaz nyílt halmaz képe nyílt, és $f(D)$ tartomány, továbbá pontosan akkor létezik olyan környezete c -nek, amelyet f az $f(c)$ egy környezetét tartalmazó nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le, ha $f'(c) \neq 0$.

Bizonyítás. Ha $f(u), f(v) \in D$ és γ egy D -beli görbe, amelynek kezdőpontja u , végpontja v , akkor $f \circ \gamma$ egy $f(D)$ -beli görbe, amelynek kezdőpontja $f(u)$, végpontja $f(v)$. Ha még megmutatjuk, hogy bármely $c \in D$ -nek van olyan környezete, amelynek f általi képe tartalmazza $f(c)$ egy környezetét, kapjuk, hogy f nyílt leképezés és így $f(D)$ tartomány. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Mivel az analitikus folytatás elve szerint f nem lehet lokálisan konstans, az origó egy környezetében felírható

$$z \mapsto z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots) = a_m z^m h(z)$$

alakban, ahol h egy hatványsor összege, $h(0) = 1$. Ha $A = a_m^{1/m}$, akkor az origó egy környezetében

$$f(z) = \left(Az(h(z))^{1/m} \right)^m,$$

és $z \mapsto Az(h(z))^{1/m}$ deriváltja az origóban $A \neq 0$. Az inverz függvény tétel szerint ez a leképezés – így f is – nyílt leképezés. Ezt felhasználva kapjuk, hogy az f pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű a 0 egy környezetében, ha $m = 1$. $\square$

10.1.11. Következmény: Maximumelv. Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon. Ha $|f|$ -nek van lokális maximuma D -ben, akkor f konstans.

Bizonyítás. Ellenkező esetben f a c lokális maximumhely egy környezetét $f(c)$ egy környezetét tartalmazó halmazra képezné le, ami ellentmondás. $\square$

→ **10.1.12. Feladat [2].** Ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < k \in \mathbb{N}$, határozzuk meg mindazokat a w komplex számokat, amelyekre $w^k = z$. Mi ezek kapcsolata $z^{1/k}$ -val?

→ **10.1.13. Feladat [1].** A $\sin z/z$, $(1 - \cos z)/z^2$, $(e^z - 1)/z$, $\ln(1 + z)/z$ függvényeket hatványsor segítségével értelmezzük ott is, ahol a nevező eltűnik.

→ **10.1.14. Feladat [5].** Differenciálhatóak-e a $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto ze^{\bar{z}}$ függvények?

→ **10.1.15. Feladat [5].** Van-e z^k -nak primitív függvénye ($k \in \mathbb{Z}$)?

→ **10.1.16. Feladat [1].** Igaz-e, hogy $\ln(zw) = \ln z + \ln w$, ha $z, w \neq 0$?

10.1.17. Feladat [8]. Írjuk fel a $z \mapsto (1 + z)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ függvény Taylor-sorát az origó körül. (Newton binomiális sora). Vizsgáljuk meg a konvergenciát.

→ **10.1.18. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi leképezések értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét:

(1) $z \mapsto az$

(2) $z \mapsto b + z$

$$(3) \quad z \mapsto 1/z$$

$$(4) \quad z \mapsto (az + b)/(cz + d) \text{ (leképezés törtlineáris leképezés).}$$

Adjuk meg az (1), (2), (3) típusú leképezések geometriai jelentését. Bizonyítsuk be, hogy a törtlineáris leképezések (1), (2) és (3) típusú leképezések összetetvéseivel állíthatók elő.

10.1.19. Feladat [6]. A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok *kettősviszonya* a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \bigg/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

szám. Bizonyítsuk be, hogy törtlineáris leképezés megőrzi a kettősviszonyt.

10.1.20. Feladat [7]. Az előző feladat felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha z_1, z_2, z_3 , valamint w_1, w_2, w_3 különböző komplex számok, akkor pontosan egy olyan törtlineáris $z \mapsto w$ leképezés van, amelynél z_1, z_2, z_3 képe rendre w_1, w_2, w_3 .

10.1.21. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettősviszonya akkor és csak akkor valós, ha egy körön, vagy egy egyenesen vannak, így törtlineáris leképezés „körtartó”.

10.1.22. Riemann-felületek. Törtlineáris leképezések vizsgálatánál érdemes a bővített komplex számokat tekinteni. Ekkor a $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ leképezésnél $-d/c$ képe ∞ , és a ∞ képe a/c . Az így kiegészített komplex síkot gyakran *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. A Riemann-féle számgömb sok más esetben is hasznos, és más, „többrétű” leképezések vizsgálatánál a komplex sík más általánosításai, úgynevezett *Riemann-felületek* is fontos szerepet játszanak. Mivel ezen kérdések elegáns tárgyalása a komplex differenciálható sokaságok segítségével oldható meg, itt nem foglalkozunk velük.

10.1.23. Feladat [6]. Határozzuk meg egy törtlineáris leképezés fixpontjait.

10.1.24. Feladat [8]. Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek a felső félsíkot az egységkör lapra képezik le. Határozzuk meg az összes ilyen törtlineáris leképezést.

10.1.25. Feladat [8]. Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek az egységkört az egységkörre képezik le. Határozzuk meg az összes ilyen törtlineáris leképezést.

→ **10.1.26. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto (z + 1/z)/2$ függvényt.

→ **10.1.27. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto z^a$, $a \in \mathbb{C}$ függvényt.

→ **10.1.28. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket. Inverzeik rendre arcsin, arccos, arctg, arsh, arch, arth:

$$(1) \quad \sin z, |\Re(z)| < \pi/2;$$

$$(2) \quad \cos z, 0 < \Re(z) < \pi;$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} z, |\Re(z)| < \pi/2;$$

$$(4) \quad \operatorname{sh} z, |\Im(z)| < \pi/2;$$

$$(5) \quad \operatorname{ch} z, 0 < \Im(z) < \pi;$$

$$(6) \quad \operatorname{th} z, |\Im(z)| < \pi/2.$$

10.1.29. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg a $\operatorname{cosec} = 1/\sin$ függvényt a $|\Re(z)| < \pi/2$, $z \neq 0$ halmazon.

10.1.30. Feladat [10]. Vizsgáljuk a $z \mapsto z/(1-z)^2$ *Koebe-függvényt* az egységkörön.

10.1.31. Cauchy-féle alaptétel. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz, f egy holomorf függvény D -n. Ha a γ_0 és γ_1 zárt pályák D -ben homotópok, akkor

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Bizonyítás. Ez a fontos tétel a mi felépítésünkben következik a 9.1.38 tételből és a bizonyítás lényegét tartalmazó 9.1.41 megjegyzésből. $\square$

10.1.32. Tétel. Legyen $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ egy pálya, és f egy $\gamma(I)$ -n folytonos komplex függvény. Ekkor a

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

összefüggéssel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ -n definiált függvény analitikus. Pontosabban, minden $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pontra az

$$a_n = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw$$

együtthatókkal képzett $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergens minden c középpontú $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ -ben fekvő D nyílt körlapon, és összege g .

Bizonyítás. Ha r az c és $\gamma(I)$ távolsága, és $|z-c| \leq qr$, ahol $0 < q < 1$, akkor minden $w \in \gamma(I)$ -re

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-c)(1-(z-c)/(w-c))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}},$$

amiből

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}.$$

Ha $|f(w)| \leq M$ a $\gamma(I)$ -n, akkor

$$\left| \frac{f(w)(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r} q^n,$$

így a sor egyenletesen konvergens $\gamma(I)$ -n. Tagonkénti integrálással

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

és a jobb oldali sor $|z-c| \leq qr$ esetén konvergens. $\square$

10.1.33. Előkészítő példa. Legyen $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, és $\gamma(t) = c + e^{2\pi int}$, $t \in [0, 1]$. Ekkor

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - c} = \int_0^1 \frac{2\pi i n e^{2\pi int}}{e^{2\pi int}} dt = 2\pi i n,$$

azaz az integrál megadja, hogy a körpálya (előjelesen) hányszor kerüli meg a középpontot.

10.1.34. Definíció. Ha egy c középpontú körpályával $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ -ben homotóp pályát, vagy ez utóbbival ekvivalens pályát veszünk, az is ugyanannyiszor kerüli meg a c pontot. Mivel a fenti integrál ilyen pályára való átéréssel a Cauchy-féle alaptétel szerint nem változik, az előző példa lehetőséget ad arra, hogy definiáljuk egy zárt pályának egy pontra vonatkozó *körüljárási számát*, idegen szóval indexét. Legyen $c \in \mathbb{C}$ és γ egy zárt pálya $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ -ben. A γ pálya c pontra vonatkozó indexét a

$$\text{ind}(c, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - c}$$

összefüggéssel definiáljuk. A következő tétel azt mutatja, hogy a definíció alapjául szolgáló észrevételnek a megfordítása is igaz. A bizonyításhoz azonban szükségünk lesz egy lemmára.

*** 10.1.35. Lemma.** Legyen $D \subset \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz és $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ egy zárt görbe. Ekkor létezik olyan δ szakaszonként lineáris pálya, amely homotóp γ -val D -ben.

Bizonyítás. Mivel $B = \gamma([a, b])$ kompakt, van olyan $r > 0$, hogy a B zárt r -környezete D -ben van. Mivel γ egyenletesen folytonos, van olyan $\eta > 0$, hogy $|t - t'| \leq \eta$ esetén $|\gamma(t) - \gamma(t')| < r$. Legyen $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ egy η -nál finomabb beosztása $[a, b]$ -nek, és legyen a γ szakaszonként lineáris közelítése a

$$\delta(t) = \gamma(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})), \quad \text{ha } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

pálya, továbbá legyen a homotópiát definiáló leképezés $\varphi(t, \xi) = \xi\delta(t) + (1 - \xi)\gamma(t)$. Ekkor $t_{j-1} \leq t \leq t_j$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq \xi \leq 1$ esetén $\varphi(t, \xi)$ a $\gamma(t_j)$ körüli r sugarú nyílt gömbben van. $\square$

10.1.36. Tétel. Ha $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ egy zárt pálya és $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, akkor $\text{ind}(c, \gamma)$ egész. Ha $n = \text{ind}(c, \gamma)$, akkor γ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ -ben a $t \mapsto e^{2\pi int}$, $t \in [0, 1]$ körpályával homotóp pályával ekvivalens. Ha $D \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ egy tartomány, akkor $c \mapsto \text{ind}(c, \gamma)$ konstans D -n. Ha $\gamma(I)$ benne van egy B egyszeresen összefüggő tartományban, akkor ez a konstans nulla $\mathbb{C} \setminus B$ -n.

*** Bizonyítás.** Ekvivalens pályával helyettesítve γ -t, feltehetjük, hogy a $[0, 1]$ intervallumon van értelmezve. Az előző lemma szerint azt is feltehetjük, hogy γ szakaszonként sima. Legyen

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - c} ds \quad \text{és} \quad h(t) = (\gamma(t) - c)e^{-g(t)},$$

ha $0 \leq t \leq 1$. Ekkor $g(1) = 2\pi i n$, a h szakaszonként sima, és véges sok pont kivételével

$$h'(t) = \gamma'(t)e^{-g(t)} + (\gamma(t) - c)e^{-g(t)} \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - c} = 0,$$

így h konstans. Ebből, $h(0) = \gamma(0) - c$ miatt,

$$e^{g(t)} = \frac{\gamma(t) - c}{\gamma(0) - c}.$$

Mivel $\gamma(1) = \gamma(0)$, $\exp(g(1)) = 1$, amiből n , a körüljárási szám, egész. Vegyük észre, hogy

$$(t, \xi) \mapsto c + (\gamma(0) - c)e^{(1-\xi)g(t) + \xi tg(1)}$$

egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ -beli homotópiája γ -nak a $t \mapsto c + (\gamma(0) - c)e^{2\pi int}$ körpályába.

Mivel az integrállal adott $c \mapsto \text{ind}(c, \gamma)$ leképezés analitikus, folytonos is. Mivel D összefüggő, $\text{ind}(c, \gamma)$ pedig csak egész értéket vehet fel, csak konstans lehet. Végül, ha $\gamma(I)$ benne van valamely B egyszeresen összefüggő tartományban, és $c \in \mathbb{C} \setminus B$, akkor γ összehúzható $B \subset \mathbb{C} \setminus \{c\}$ -ben, így $\text{ind}(c, \gamma) = 0$. $\square$

10.1.37. Feladat [7]. Adjunk meg olyan γ pályát, amelyre minden k természetes számhoz van olyan z pont, hogy $\text{ind}(z, \gamma) = k$.

→ **10.1.38. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$$

integrált. [Integráljuk az $(e^{iz} - 1)/(2iz)$ függvényt a 0 középpontú, R sugarú körlap felső fele körül.]

→ **10.1.39. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos x^2 dx, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x^2 dx$$

Fresnel-féle integrálokat. (Integráljuk az e^{-z^2} függvényt egy 0, R , $Re^{\pi i/4}$ csúcsú, R sugarú körcikk körül.)

* **10.1.40. Feladat [9].** Legyen γ egy pálya, g holomorf komplex értékű függvény γ értékkészletének egy környezetén, f pedig folytonos komplex függvény $g \circ \gamma$ értékkészletén. Bizonyítsuk be a helyettesítéses integrálásra vonatkozó alábbi formulát:

$$\int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_{g \circ \gamma} f(w) dw.$$

10.1.41. Tétel. Egy $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf f függvény analitikus D -n. Ha $c \in D$, akkor az f függvény c körüli hatványsora konvergens minden c középpontú D -beli nyílt körlapon.

Bizonyítás. Válasszunk olyan $r > 0$ számot, amelyre a c középpontú r sugarú zárt körlap benne van D -ben. Legyen $|z - c| < r$ és

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \text{ha } w \neq z.$$

Legyen $\gamma_h(t) = hc + (1 - h)z + hre^{it}$, ha $0 \leq t \leq 2\pi$ és $0 < h \leq 1$. Megmutatjuk, hogy $\int_{\gamma_1} g(w) dw = 0$. Nyilván γ_h homotóp γ_1 -gyel $D \setminus \{z\}$ -ben, ha $0 < h \leq 1$, így

$$\int_{\gamma_h} g(w) dw = \int_{\gamma_1} g(w) dw,$$

mivel g differenciálható $D \setminus \{z\}$ -ben. Másrészt ha h elég kicsi, akkor

$$\left| \int_{\gamma_h} g(w) dw \right| \leq (|f'(z)| + 1) 2\pi hr \rightarrow 0,$$

mert $g(w) \rightarrow f'(z)$, ha $w \rightarrow z$. Ebből

$$0 = \int_{\gamma_1} g(w) dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{w - z} dw,$$

azaz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \text{ha } |z - c| < r,$$

amiből a 10.1.32 tétel miatt következik az állítás. $\square$

10.1.42. Morera tétele. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D -n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszög-lappal együtt D -ben van, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, akkor f holomorf D -n.

Bizonyítás. Az f -nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus. $\square$

10.1.43. Cauchy-féle integrálformulák. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D -n. Ha $\gamma: I \rightarrow D$ egy zárt pálya, akkor minden $z \in D \setminus \gamma(I)$ -re és $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\text{ind}(z, \gamma) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

A tétel leggyakrabban az $\text{ind}(z, \gamma) = \pm 1$ esetben fogjuk használni.

Bizonyítás. Először legyen $n = 0$. A tétel azon múlik, hogy az integrálás áthelezhető egy, a z pont kis környezetében lévő, az eredetivel homotóp pályára, és erre az integrál $\approx f(z) \int dw/(w - z)$, de kényelmesebb ugyanúgy, mint az előző bizonyításban, egy segédfüggvénnyel dolgozni, ami lényegében most is az ottani segédfüggvény. Legyen

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \text{ha } w \neq z \quad \text{és} \quad g(z) = f'(z).$$

Egy z -hez elég közeli w -re

$$f(w) = f(z) + (w - z)f'(z) + \frac{(w - z)^2}{2!}f''(z) + \dots,$$

így

$$g(w) = f'(z) + \frac{w - z}{2}f''(z) + \dots,$$

tehát g hatványsor összegfüggvénye z közelében, így differenciálható D -n. A Cauchy-féle alaptételből, hasonlóan, mint az előző bizonyításban,

$$0 = \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z},$$

amiből következik az $n = 0$ eset. Az általános eset abból következik, hogy a

$$z \mapsto \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

függvény analitikus $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ -n, és egy analitikus függvény hatványsorának együttthatói kifejezhetők a deriváltakkal (lényegében a differenciálás és az integrálás felcserélhető), lásd a 10.1.32 tételt. $\square$

10.1.44. Cauchy-egyenlőtlenségek. Tegyük fel, hogy f holomorf a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon, $w \in D$, és az w középpontú, $r > 0$ sugarú zárt B körlap D -ben van. Ekkor $|f^{(n)}(w)| \leq Mn!/r^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), ahol $M = \sup\{|f(z)| : z \in \partial B\}$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma(t) = w + re^{it}$, ha $0 \leq t \leq 2\pi$. Ekkor az előző tétel szerint

$$|f^{(n)}(w)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}. \square$$

10.1.45. Liouville tétele. Legyen f egy egész függvény. Ha f korlátos, akkor konstans.

Bizonyítás. Ha $|f| \leq M$, $w \in \mathbb{C}$ és $r > 0$, akkor $|f'(w)| \leq M/r \rightarrow 0$, ha $r \rightarrow \infty$. Így $f'(w) = 0$ mindenütt. $\square$

10.1.46. Az algebra alaptétele. Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.

Bizonyítás. Ellenkező esetben a p polinom reciproka, $1/p$ egész függvény. Mivel ha p foka n , akkor a

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)|/|z|^n$$

határérték véges, $|p(z)| \rightarrow \infty$, $1/|p(z)| \rightarrow 0$, ha $|z| \rightarrow \infty$. Így $1/p$ korlátos, tehát konstans. Mivel csak nulla lehet, ellentmondást kaptunk. $\square$

10.1.47. Megjegyzés. Polinomok gyöktényezőző alakjának általánosítása egész függvények Weierstrass-féle előállítására végtelen szorzatként. Lásd részletesebben Szőkefalvi-Nagy [60] jegyzetét.

10.1.48. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi függvények MacLaurin-sorát:

- (1) $z \mapsto \ln(1 - z)$;
- (2) $z \mapsto \ln(1 + z)$;
- (3) $z \mapsto (1/2) \ln((1 + z)/(1 - z))$;
- (4) $\arcsin$;
- (5) $\arctg$;
- (6) arsh ;
- (7) arth .

* **10.1.49. Schwarz-lemma.** Legyen f a nyílt komplex egységkör lap önmagába való analitikus leképezése, amelyre $f(0) = 0$. Ekkor $|f(z)| \leq |z|$, és ha valamely $z \neq 0$ pontban egyenlőség teljesül, akkor $f(z) = cz$ (és persze $|c| = 1$).

Bizonyítás. Az f felírható $f(z) = zg(z)$ alakban, és g is analitikus. Ha $0 < r < 1$, akkor $|z| = r$ esetén $|g(z)| \leq 1/r$. A maximumelv miatt $|g(z)| \leq 1/r$ teljesül $|z| \leq r$ esetén is. Ebből $r \uparrow 1$ határátmenettel $|g| \leq 1$ az egész nyílt kör lapon, amiből kapjuk az egyenlőtlenséget. Ha valahol egyenlőség teljesül, akkor ott $|g|$ -nek lokális maximuma van, így a maximumelv szerint konstans. $\square$

10.1.50. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf. Ha u, v valós értékűek, és $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, akkor u és v harmonikusak D -n, azaz $\Delta u \equiv 0$ és $\Delta v \equiv 0$ lap Δ .

Bizonyítás. Az f végtelen sokszor differenciálható, így u és v is végtelen sokszor differenciálhatóak. A Cauchy–Riemann-egyenletekből

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}, \quad u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy},$$

amiből a vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt $\Delta u = \Delta v = 0$. $\square$

10.1.51. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Azt mondjuk, hogy v az u harmonikus társa D -n, ha $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorf D -n. Vegyük észre, hogy ekkor $-if(x + iy) = v(x, y) - iu(x, y)$, azaz ha u -nak v , akkor v -nek $-u$ harmonikus társa.

10.1.52. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Ekkor u -nak létezik D -n harmonikus társa.

A bizonyítás konstruktív, így a harmonikus társ meg is kereshető.

Bizonyítás. Legyen $g(x + iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$. Ekkor g holomorf, mert fennállnak az $u_{xx} = -u_{yy}$, $u_{xy} = u_{yx}$ Cauchy–Riemann-egyenletek, tehát g -nek van primitív függvénye. Legyen G a g egy primitív függvénye, és $G(x + iy) = w(x, y) + iv(x, y)$. Ekkor v és w végtelen sokszor differenciálhatóak, és $w_x = u_x$, $w_y = u_y$, vagyis $w - u$ konstans. Így

$$f(x + iy) = G(x + iy) - (w(x, y) - u(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorf. $\square$

10.1.53. Konform ekvivalencia. Legyenek $D, E \subset \mathbb{C}$ tartományok. Azt mondjuk, hogy f *konform leképezése* D -nek E -re, ha f homeomorfizmusa D -nek E -re, és f, f^{-1} holomorfak. Ha létezik konform leképezése D -nek E -re, akkor azt mondjuk, hogy D és E *konform ekvivalensek*.

Tartományok konform ekvivalenciáját gyakran használjuk arra, hogy az egyik tartomány ismert harmonikus függvényeivel harmonikus függvényeket „gyártsunk” a másik tartományon. Ilyenkor fontos az is, hogy a konform leképezés folytatható-e folytonosan a tartományok határára is? Erről durván azt mondhatjuk, hogy a konform leképezés „igyekszik annyira folytonos lenni a határon, amennyire csak lehet”. Részletesebben lásd Petruska [48] jegyzetét.

A Liouville-tételből következik, hogy az egész komplex sík nem képezhető le konform módon egy korlátos tartományra. A következő tétel azonban mutatja, hogy az egyszerűen összefüggő tartományok csak két ekvivalenciaosztályt alkotnak. Nem egyszerűen összefüggő tartományok körében a helyzet bonyolultabb.

10.1.54. Riemann tétele. Ha $D, E \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ -től különböző egyszerűen összefüggő tartományok, akkor konform ekvivalensek.

Bizonyítás. Megtalálható Szőkefalvi-Nagy [60] jegyzetében. $\square$

10.1.55. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy az $\ln(x^2 + y^2)$ harmonikus függvénynek nincs harmonikus társa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -n.

10.1.56. Feladat [8]. Keressük meg az alábbi függvények harmonikus társát:

- (1) $x^2 - y^2 + 2x$;
- (2) $e^x \cos y$;
- (3) $\sin x \operatorname{ch} y$.

10.1.57. Feladat [14]. Bizonyítsuk be, hogy a C körre a z és w pontok pontosan akkor alkotnak inverz pontpárt, ha minden, a z -n és w -n átmenő kör merőleges C -re. Mutassuk meg, hogy törtlineáris leképezésnél a C -re inverz pontpárok C képére inverz pontpárokká mennek át.

→ **10.1.58. Feladat [8].** Egy síkbeli potenciálméleti problémához tartozó *komplex potenciál*on egy olyan holomorf, komplex értékű függvényt értünk, amelynek képzetes része a potenciál. A potenciál szintvonalai az ekvipotenciális vonalak, a valós rész szintvonalai az erővonalak. Például $k i \ln z$ (ahol k valós konstans) egy ponttöltés komplex potenciálja $\mathbb{C} \setminus \{x: x \leq 0\}$ -n. Ebből kiindulva, keressük meg ellenkező előjelű, egyenlő nagyságú töltések esetén a komplex potenciált az alábbi esetekben:

- (1) két ponttöltés;
- (2) egy körvezető és egy ponttöltés;
- (3) két körvezető.

→ **10.1.59. Feladat [11].** Határozzuk meg a hőáramlást excentrikus csövek között, stacionárius esetben.

→ **10.1.60. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto z + e^z$, $|\Im(z)| \leq \pi$ függvényt. Ezen függvény felhasználásával határozzuk meg egy „félsík kondenzátor” erőterét a kondenzátor szélén.

→ **10.1.61. Feladat [11].** Határozzuk meg két, egy síkban lévő, párhuzamos félsíkból álló kondenzátor erőterét.

→ **10.1.62. Feladat: Zsukovszkij-profil [14].**

- (1) Vizsgáljuk meg a $z \mapsto (z-1)/(z+1)$, $z \mapsto z^2$ leképezéseket, és a $z \mapsto (z-2)/(z+2)$ leképezés inverzét.
- (2) Mi a képe a fenti leképezések összetételénél egy, a -1 és 1 pontokon átmenő C kör külsejének?
- (3) Vizsgáljuk meg egy, a C kört az 1 pontban érintő, nála nagyobb C^* kör képét. (Zsukovszkij-profil.)
- (4) Számoljuk ki a fenti leképezések összetételét.

10.1.63. Feladat [10]. Képezzük le konform módon az alábbi tartományokat a nyílt egységgörré:

- (1) $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \setminus [x, 1]$, ahol $-1 < x < 1$;
- (2) $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \setminus ([-1, -x] \cup [x, 1])$, ahol $0 < x < 1$;
- (3) $\{z: \Im(z) > 0\} \setminus i[0, 1]$;
- (4) $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, x] \cup [y, \infty[)$, ahol $x < 0 < y$;
- (5) $\{z: -\pi < \Im(z) < \pi\} \setminus]-\infty, 0]$.

* **10.1.64. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy a nyílt egységgörlelap önmagára való konform leképezései törtlineáris leképezések. [Először az $f(0) = 0$ esetre mutassuk meg, hogy $f(z) = cz$. Az általános esetben az origó képét vigyük vissza egy törtlineáris leképezéssel az origóba.]

* **10.1.65. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy két, $\mathbb{C}$ -től különböző egyszeresen összefüggő tartomány között létezik olyan konform ekvivalencia, amely egy adott pontot egy adott pontba visz, és ott a derivált adott argumentumú. Mutassuk meg, hogy ilyen mellékfeltételek mellett a konform leképezés már egyértelmű. (Vezessük vissza a problémát a nyílt egységgörlelap önmagára történő leképezéseinek vizsgálatára.)

* **10.1.66. Weierstrass tétele.** Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf függvények f_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozaa a D -n lokálisan egyenletesen konvergál az $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez, azaz minden pontnak van olyan környezete, amin a konvergencia egyenletes. Ekkor f is holomorf, és $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ is teljesül minden $k \in \mathbb{N}^+$ -ra a D -n lokálisan egyenletesen.

Bizonyítás. Mivel D minden pontjának van kompakt környezete, a lokálisan egyenletes konvergencia ekvivalens azzal, hogy a konvergencia a kompakt halmazokon egyenletes. Legyen $c \in D$, és válasszunk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre a c középpontú, r sugarú zárt körlelap D -ben van. Legyen $\gamma(t) = c + re^{it}$, ha $0 \leq t \leq 2\pi$. Ekkor $|z - c| < r$ esetén

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w - z} dw.$$

Rögzítve z -t, γ értékészletén

$$\frac{f_n(w)}{w - z} \rightarrow \frac{f(w)}{w - z}$$

egyenletesen, amiből

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

azaz f analitikus.

Most legyen C kompakt részhalmaza D -nek, és válasszunk olyan $r > 0$ -t és $B \subset D$ kompakt halmazt, amelyre B a C minden pontjának r sugarú zárt környezetét tartalmazza. Ha $z \in C$, akkor z benne valamelyik ilyen környezetben, így a Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \sup\{|f_n(w) - f(w)| : w \in B\} k! / r^k \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$. $\square$

10.1.67. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy a ζ függvény analitikus a $\Re(z) > 1$ félsíkon.

10.2 Meromorf függvények

A legtöbb magasabb matematikai fogalom, így a komplex számok, algebrák, lineáris operátorok, Borel-halmazok – e felsorolást szinte vég nélkül folytathatnánk – fogalmát úgy alkották meg, hogy azok alkalmas anyagként szolgáljanak, melyen a matematikus bemutathatja leleményességét és érzékét az elvont szépség iránt. . . .

A komplex számok különösen találó példát szolgáltatnak a mondottakra. Semmiféle tapasztalat nem követeli, hogy e mennyiségeket bevezessük. Valóban, ha megkérdezzünk egy matematikust, hogy indokolja meg érdeklődését a komplex számok iránt, rá fog mutatni – némi méltatlankodással hangjában – az egyenletek, a hatványsorok s általában az analitikus függvények elméletének sok szép tételére, melyek megfogalmazását a komplex számok bevezetése tette lehetővé. A matematikus nem hajlandó arra, hogy feladja érdeklődését szellemének e legszebb teljesítményei iránt.

Wigner Jenő (1959)

10.2.1. Laurent-sor. Legyen $0 \leq r < R \leq \infty$, $c \in \mathbb{C}$, és tegyük fel, hogy f holomorf a $D = \{z : r < |z - c| < R\}$ körgyűrűn. Ekkor f előállítható

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - c)^{-n}$$

alakban. Az első hatványsor konvergens $|z - c| < R$ esetén, a második függvénytörzs pedig $|z - c| > r$ esetén, így a körgyűrűn mindkettő konvergens. Az a_n együtthatók egyértelműen meghatározottak és minden D -beli zárt γ pályára

$$(1) \quad \text{ind}(c, \gamma) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - c)^{n+1}} dw.$$

Az előállítás, nem teljesen korrekt módon,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

alakban is szokás írni.

* **Bizonyítás.** Legyenek $z \in D$, $r', R' \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek úgy, hogy

$$r < r' < |z - c| < R' < R$$

teljesüljön, és legyen először

$$\gamma(t) = c + r'e^{it}, \quad \Gamma(t) = c + R'e^{it}, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Mivel γ és Γ homotópok D -ben, és a

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{ha } w \neq z, \\ f'(z), & \text{ha } w = z, \end{cases}$$

függvény holomorf D -n,

$$\int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} g(w) dw,$$

azaz

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

amiből $\text{ind}(z, \gamma) = 0$, $\text{ind}(z, \Gamma) = 1$ miatt

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Mivel

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - c) - (z - c)} = \frac{1}{(w - c)(1 - (z - c)/(w - c))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - c)^n}{(w - c)^{n+1}},$$

és a jobb oldali sor egyenletesen konvergens, ha $|w - c| = R'$, (2)-ben az első integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{n=0}^{\infty} (z - c)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - c)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

alakba írható. Hasonlóan,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w - z} &= \frac{1}{z - w} = \frac{1}{(z - c) - (w - c)} = \frac{1}{(z - c)(1 - (w - c)/(z - c))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w - c)^{n-1}}{(z - c)^n}, \end{aligned}$$

ahol a jobb oldali sor w -ben egyenletesen konvergens az $|w - c| = r'$ körön, és így (2)-ben a második integrál

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - c)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - c)^{n-1} dw = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

alakba írható. Az együtthatók nem függenek z -től, csak esetleg γ -tól és Γ -tól, amiből következik, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ minden $|z-c| < R'$ esetén, $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-c)^n$ pedig minden $|z-c| > r'$ esetén konvergens.

Tegyük fel, hogy

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n}(z-c)^{-n},$$

ha $r' < |z-c| < R'$. Az első sor egy hatványsor, a második sor pedig $w = 1/(z-c)$ helyettesítéssel egy hatványsorba megy át, amely egy körlapon konvergens. Tekintsünk egy $\gamma: I \rightarrow D$ zárt pályát, amelyre $r' < |\gamma(t)-c| < R'$ minden $t \in I$ -re. A (3)-ban szereplő sorok egyenletesen konvergensnek $\gamma(I)$ -n, és szorozva $1/(w-c)^{m+1}$ -gyel

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-c)^{m+1}} dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma} a'_n(w-c)^{n-m-1} dw.$$

Mivel $(w-c)^k$ -nak van primitív függvénye D -n, ha $k \neq -1$, a jobb oldali integrálok mind nullák, ha $n-m-1 \neq -1$. Így az $\text{ind}(c, \gamma)$ index definíciójából kapjuk (1)-et, és az $\text{ind}(c, \gamma) \neq 0$ esetben a Laurent-sor egyértelműségét is. Ebből speciálisan következik, hogy az a_n -ek nem függenek r' és R' választásától sem, $r' \downarrow r$, $R' \uparrow R$ esetén pedig, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ konvergens $|z-c| < R$, a $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-c)^n$ sor pedig konvergens $|z-c| > r$ esetén. $\square$

10.2.2. Függvény rendje egy pontban. Legyen $c \in \mathbb{C}$, és tegyük fel, hogy f holomorf valamely $r > 0$ -ra a $D = \{z: 0 < |z-c| < r\}$ lyukas körlapon. Legyen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad \text{ha } z \in D$$

az f Laurent-sora. Tudjuk, hogy az f sorának együtthatói nem függenek r választásától. Az f rendjét c -ben az $\omega(c, f) = \inf\{n: a_n \neq 0\}$ összefüggéssel definiáljuk. Ha $\omega(c, f) < 0$, akkor azt mondjuk, hogy f -nek c -ben *izolált szingularitása* van. Ha $\omega(c, f) = -\infty$, akkor c -ben f -nek *lényeges szingularitása* van, ha pedig $-\infty < \omega(c, f) = -n < 0$, akkor f -nek c -ben n -edrendű *pólusa* van. Az

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}, \quad \text{ha } z \neq c$$

függvény az f főrésze c -ben. Ha $\omega(c, f) \geq 0$, akkor a Laurent-sor hatványsor, így f holomorf módon kiterjeszthető a $\{z: |z-c| < r\}$ körlapra; ekkor azt mondjuk, hogy c megszüntethető szingularitása f -nek. Ha $\omega(c, f) = n > 0$, akkor azt mondjuk, hogy c az f -nek n -edrendű *zérushelye*. Ha g egy másik, a D lyukas körlapon analitikus függvény, akkor triviálisan $\omega(c, f+g) \geq \min\{\omega(c, f), \omega(c, g)\}$ és $\omega(c, fg) = \omega(c, f) + \omega(c, g)$, ha $\omega(c, f)$ és $\omega(c, g)$ végesek; az utóbbi állítás belátásához vegyük észre, hogy ha f véges rendű c -ben, $\omega(c, f) = n$, akkor f a D -n egyértelműen felírható $(z-c)^n f^*(z)$ alakban, ahol f^* a D -n analitikus és rendje c -ben 0. Ha f véges rendű c -ben, akkor $1/f$ is, és $\omega(c, 1/f) = -\omega(c, f)$. Az a_{-1} az f reziduuma c -ben, jelölése $\text{Res}(c, f)$.

10.2.3. Reziduumtétel. Legyen D egy egyszeresen összefüggő tartomány és $S \subset D$ egy csupa izolált pontból álló halmaz. Ha $D \setminus S$ nyílt, f analitikus $D \setminus S$ -en és $\gamma: I \rightarrow D \setminus S$ egy zárt pálya, akkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{ind}(s, \gamma) \text{Res}(s, f),$$

és a jobb oldali összegnek csak véges sok tagja nullától különböző.

* **Bizonyítás.** Az, hogy $D \setminus S$ nyílt, azzal ekvivalens, hogy S -nek nincs D -ben pontja. Feltehetjük, hogy minden $s \in S$ nem megszüntethető szingularitása f -nek, mert a megszüntethető szingularitásokban a reziduum úgyis nulla, így azokat megszüntethetjük anélkül, hogy a jobb oldali összeg megváltozna. Bármely K kompakt részhalmazára D -nek $S \cap K$ véges, mert nem lehet torlódási pontja. Legyen P az összes olyan w pontok halmaza, amelyekre $\text{ind}(w, \gamma) \neq 0$. Választva egy $\gamma(I)$ -t tartalmazó nyílt körlapot, az konvex, tehát egyszeresen összefüggő, az index tulajdonságai miatt P korlátos. Mivel D egyszeresen összefüggő, $P \subset D$. Mivel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ azon pontjainak halmaza, amelyekre $\text{ind}(w, \gamma)$ egy adott értéket vesz fel, nyílt, P minden határpontja $\gamma(I)$ -ben van. Így $\bar{P} \subset D$, és $\bar{P}$ kompakt. Legyen $\varphi: I \times [0, 1] \rightarrow D$ a γ egy homotópiája egy konstans pályával, és $M = \varphi(I \times [0, 1])$. Ha $S' = S \cap (M \cup \bar{P})$, akkor S' véges és $B = (D \setminus S) \cup S'$ nyílt. Jelölje u_s az f főrészt az $s \in S'$ pontban, és tekintsük a

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S'} u_s(z), \quad z \in B$$

analitikussá tett függvényt. Mivel a Cauchy-féle alaptétel szerint $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{s \in S'} \int_{\gamma} u_s(z) dz = \sum_{s \in S'} 2\pi i \text{ind}(s, \gamma) \text{Res}(s, f). \quad \square$$

10.2.4. Megjegyzés. A reziduumtételt gyakran használjuk komplex és valós integrálok kiszámítására. Gyakran egy $z \mapsto f(z)/g(z)$ függvény reziduumára van szükségünk egy c pontban, ahol f, g analitikusak, $g(c) = 0$. Ilyenkor célszerű felírunk f és g Taylor-sorát c középponttal. Például ha $g'(c) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(c) + f'(c)(z-c) + \dots}{g'(c)(z-c) + g''(c)(z-c)^2/2 + \dots} = \frac{1}{z-c} \frac{f(c) + f'(c)(z-c) + \dots}{g'(c) + g''(c)(z-c)/2 + \dots},$$

így $\text{Res}(c, f/g) = f(c)/g'(c)$.

10.2.5. Meromorf függvények. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy az f meromorf D -n, ha f a D egy nyílt B részhalmazán holomorf, és $D \setminus B$ minden pontja pólusa f -nek. (Például a racionális törtfüggvények meromorf függvények.) Vegyük észre, hogy $D \setminus B$ -nek nem lehet torlódási pontja D -ben: a torlódási pont ugyanis nem lehet B -ben, mert az nyílt, de $D \setminus B$ -ben sem, mert annak a pontjai pólusok, így izoláltak. Meromorf függvények összege és konstansszorosa is meromorf, sőt, D -n meromorf komplex értékű függvények szorzata is meromorf. Ha D tartomány, akkor D -n meromorf komplex értékű függvények hányadosa is meromorf, ha az osztó nem azonosan nulla. Az $1/f$ pólusai f zérushelyei, $1/f$ zérushelyei pedig f pólusai.

* **10.2.6. Megjegyzés.** A parciális törtrektek bontás tétele végtelen sok tagra történő általánosításának tekinthető Mittag-Leffler tétele. Ennek a tételnek, valamint a Weierstrass-féle szorzat előállításnak a segítségével sok érdekes és fontos összefüggés levezethető, például a $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ összefüggés. Részletesebben lásd Szőkefalvi-Nagy [60] jegyzetét.

* **10.2.7. Argumentum-elv.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, és f egy nem azonosan nulla komplex értékű meromorf függvény D -n. Legyen N , illetve P az f nullhelyeinek, illetve pólusainak halmaza, g pedig egy D -n holomorf függvény. Minden $D \setminus (N \cup P)$ -beli γ zárt pályára

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in N \cup P} \text{ind}(w, \gamma) g(w) \omega(w, f).$$

Bizonyítás. Az f a w egy környezetében felírható $f(z) = (z-w)^k f_1(z)$ alakban, ahol k az f rendje w -ben, f_1 holomorf, és $f_1(w) \neq 0$. Ebből

$$f'(z) = k(z-w)^{k-1} f_1(z) + (z-w)^k f_1'(z),$$

tehát f'/f rendje az w pontban nemnegatív, ha $k = 0$, egyébként -1 , és a reziduuma k , ha $k \neq 0$. A g függvénnyel szorozva, gf'/f reziduuma $kg(w)$ lesz. Így a reziduumtételből következik az állítás. $\square$

* **10.2.8. Következmény.** Ha γ szakaszonként sima zárt pálya $D \setminus (N \cup P)$ -ben, és $\Gamma = f \circ \gamma$, akkor

$$\text{ind}(0, \Gamma) = \sum_{w \in N \cup P} \text{ind}(w, \gamma) \omega(w, f).$$

Bizonyítás. Nyilván Γ is szakaszonként sima pálya, és ha γ az $[a, b]$ -n van értelmezve, akkor

$$2\pi i \text{ind}(0, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad \square$$

* **10.2.9. Rouché tétele.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, f és g holomorf komplex értékű függvények D -n, N az f , N' pedig az $f+g$ zérushelyeinek halmaza, $\gamma: I \rightarrow D$ egy zárt pálya $D \setminus N$ -ben. Ha $|g(z)| < |f(z)|$ a $\gamma(I)$ -n, akkor

$$\sum_{w \in N} \text{ind}(w, \gamma) \omega(w, f) = \sum_{w \in N'} \text{ind}(w, \gamma) \omega(w, f+g).$$

Bizonyítás. Mivel f és $f+g$ sem azonosan nulla, N és N' izolált pontokból állnak, és megszámlálhatóak. A γ egy, a

$$\left\{ z \in D: |g(z)| < |f(z)| \right\}$$

nyílt halmazban vele homotóp pályával helyettesíthető, így feltehetjük, hogy szakaszonként sima. Legyen $h = (f+g)/f$. Ekkor

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h},$$

és az előző következmény szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\Gamma = h \circ \gamma$ szakaszonként sima pályára $\text{ind}(0, \Gamma) = 0$. Vegyük észre, hogy $|h(z) - 1| = |g(z)/f(z)| < 1$, ha $z \in \gamma(I)$. $\square$

* **10.2.10. A gamma-függvény.** Ez a függvény lényegében a faktoriális kiterjesztése természetes számokról komplex számokra, mert $\Gamma(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$. Ha $\Re(z) > 0$, legyen

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Megmutatjuk, hogy a határérték létezik, és Γ analitikus a $\{z: \Re(z) > 0\}$ félsíkon. Legyen

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{ha } \Re(z) > 0.$$

Ha $C \subset \{z: \Re(z) > 0\}$ kompakt halmaz, akkor $k \leq \Re(z) \leq K$ valamely $0 < k \leq K < \infty$ -re minden $z \in C$ -re, és ha $m \geq n$, akkor

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq \int_{1/m}^{1/n} t^{k-1} e^{-t} dt + \int_n^m t^{K-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{k-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{K-1} e^{-t} dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$, így az f_n függvényt sorozat minden kompakt halmazon egyenletesen konvergens. A paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálásáról szóló tétel és a Cauchy–Riemann-egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy f_n holomorf, és így Weierstrass tétele szerint Γ analitikus a $\{z: \Re(z) > 0\}$ félsíkon. Az f_n definíciójában parciális integrálással, majd $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik a gamma-függvény *függvényegyenlete*: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Ezt átírva a $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ alakba, Γ analitikusan folytatható a $\{z: \Re(z) > -1, z \neq 0\}$ nyílt halmazra és a függvényegyenlet továbbra is fennáll. Újra alkalmazva ezt az összefüggést, a $\{z: \Re(z) > -2, z \neq 0, -1\}$ halmazra folytatható Γ . Teljes indukcióval ismételve az eljárást, Γ egy olyan, a $\mathbb{C}$ -n meromorf függvénné terjeszthető ki, amelynek a $0, -1, -2, \dots$ pontokban elsőrendű pólusai vannak, és erre a kiterjesztett függvényre $-z \notin \mathbb{N}$ esetén teljesül a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ függvényegyenlet. Az analitikus folytatás elve szerint a kiterjesztés egyértelmű.

→ **10.2.11. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, hogy $\Gamma(1) = 1$, és hogy $\Gamma(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$.

10.2.12. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(z)\zeta(z), \quad \text{ha } \Re(z) > 1.$$

→ **10.2.13. Feladat [10].** Ha P, Q polinomok, $\deg P + 2 \leq \deg Q$, mutassuk meg, hogy

(1) ha Q -nak nincs valós zérushelye, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\Im(z) > 0} \text{Res}(z, P/Q);$$

(2) ha Q -nak nincs nemnegatív valós zérushelye, akkor

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -i \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res}(z, f),$$

ahol

$$f(z) = \ln(-z) \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

→ **10.2.14. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy ha $m < n$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - 1}{x^{2n} - 1} dx = \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \operatorname{ctg} \frac{(2m+1)\pi}{2n} \right).$$

→ **10.2.15. Feladat [11].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2m_1} - x^{2m_2}}{x^{2n} - 1} dx, \quad m_1, m_2 < n;$$

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx, \quad m < n.$$

10.2.16. Feladat [10]. A $-R, R, 2\pi i + R, 2\pi i - R$, illetve a $-R, R, \pi i + R, \pi i - R$ csúcsú téglalap körül integrálva, majd $R \rightarrow \infty$ -t véve, mutassuk meg, hogy

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1 + e^t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}, \quad \text{ha } 0 < \alpha < 1;$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{1 - e^t} dt = \pi (\operatorname{ctg} \pi \alpha_1 - \operatorname{ctg} \pi \alpha_2), \quad \text{ha } 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1.$$

10.2.17. Feladat [12]. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$$

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx;$$

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0;$$

$$(6) \quad \int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos ax \, dx, \quad a > 0.$$

* **10.2.18. Feladat** [10]. Bizonyítsuk be a gamma-függvény alábbi Gauss-féle előállítását:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}, \quad \text{ha } z \in \mathbb{C}$$

(itt $1/0 = \infty$).

Megoldás. Lásd Petruska [48], 9.6, vagy Szőkefalvi-Nagy [60].

* **10.2.19. Feladat: β -integrál** [11]. Mutassuk meg, hogy a $p > 0$, $q > 0$ értékekre értelmezett kétparaméteres

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

β -integrál értéke $\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$. Határozzuk meg ennek alapján az $\int_0^{\pi/2} \sin^k x \, dx$, $k \in \mathbb{N}$ integrálok értékét.

Megoldás.

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-(\cos \varphi + \sin \varphi)r} r^{p+q-1} \cos^{p-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi d\varphi dr \\ &= \Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{p-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^{p+q}} d\varphi, \end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon szereplő integrálból $\text{tg } \varphi = 1/x - 1$ helyettesítéssel $\beta(p, q)$ adódik.

* **10.2.20. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{R}^m$ -ben az egy sugarú gömbök térfogata $\Gamma(1/2)^m/\Gamma(m/2 + 1) \rightarrow 0$, ha $m \rightarrow +\infty$.

* **10.2.21. Elliptikus integrálok és elliptikus függvények.** A fizikában gyakran lépnek fel $\int R(z, \sqrt{P(z)}) dz$ típusú, úgynevezett *elliptikus integrálok*, ahol R racionális törtfüggvény, azaz két kétváltozós polinom hányadosa, P pedig polinom. A név onnan ered, hogy ellipszisív hosszának meghatározásakor is ilyen integrált kapunk. Ha P első- vagy másodfokú, akkor alkalmas helyettesítésekkel a primitív függvény megkapható. Ha P harmad- vagy negyedfokú, akkor néhány elliptikus alapintegrálra vezethető vissza az összes eset, és ezek vizsgálata olyan komplex függvényekhez vezet, amelyek két komplex szám szerint is periodikusak. Az ilyen függvényeket nevezik *elliptikus függvényeknek*. A kérdéskörnek kiterjedt irodalma van, a legfontosabb tényeket illetően lásd Frank–Mises [21], I. 206. o.

Differenciálegyenletek

Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa. (Függvényeket differenciálni és differenciálegyenleteket megoldani hasznos.)

Newton Leibnizhez, 1676

A differenciálegyenleteket Newton (1642–1727) találta fel, hogy segítségükkel fizikai problémákat oldjon meg. A XVIII. század folyamán számos differenciálegyenlet-típust oldottak meg. Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) munkái vezettek a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek és magasabbrendű egyenletek elméletéhez, és ez a fejlődés vezetett a lineáris algebra számos fogalmának kialakulásához. Például az adjungált operátor fogalma is Lagrange-tól származik, aki azt lineáris differenciáloperátorokra vezette be. Az általános egyenlettípusokra vonatkozó tételek bizonyítását Cauchy kezdeményezte. A megoldás létezésének és egyértelműségének ma szokásos bizonyítása Picard-tól ered, 1890-ből.

Itt a tárgyalás az alapp probléma vázolásával kezdődik, előrebocsátva a létezési és egyértelműségi tételt. Az elemi megoldási módszereket „szakácskönyvszerűen” tárgyalom, úgy érzem, így használhatók a legkönnyebben. A fő eredményeket a szukcesszív approximáció módszerével vezetem le. A lineáris egyenletek és rendszerek tárgyalása a szokásos.

11.1 Alapfogalmak

11.1.1. Példa. Egy ágyúgolyót függőlegesen 100 m/s kezdősebességgel fellőnek. Mennyi ideig emelkedik?

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - kv(t)^2, \quad v(0) = 100 \text{ m/s.}$$

Ez egy közönséges, elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás egy konstanst tartalmaz, ezt úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltétel teljesüljön.

11.1.2. Példa. Vizsgáljuk meg a matematikai inga mozgását:

$$mgs \sin \varphi(t) = -ml\varphi''(t), \quad \varphi'' = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \varphi'(t_0) = \omega_0.$$

Ez egy közönséges, másodrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás két konstanst tartalmaz, ezeket úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek teljesüljenek.

11.1.3. Példa. Tegyük fel, hogy egy kémiai folyamat során az x anyag bomlik egy y anyaggá, az y anyag pedig bomlik egy z anyaggá. A bomlás sebessége arányos a bomló anyag koncentrációjával (elsőrendű reakció).

$$\begin{aligned}x' &= -ax & x(t_0) &= x_0 \\y' &= -by - x' & y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

Ez egy közönséges, elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás két konstans tartalmaz, ezeket úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek teljesüljenek.

11.1.4. Példa: a rezgő húr differenciálegyenlete. Tekintsünk egy ℓ hosszúságú homogén rezgő húr, amely transzverzális síkrezgést végez. Tegyük fel, hogy a húr rezgései „kicsik”, azaz a húrdarabok hossza a rezgés során nem változik számottevően. Jelölje p a feszítőerőt, ϱ a húr vonal menti sűrűségét, $u(x, t)$ pedig a kitérést.

A húr egy kicsiny, az x és az $x + dx$ pontok közé eső darabjára ható feszítőerők u irányú komponense

$$p \sin \alpha(x + dx) - p \sin \alpha(x),$$

ahol $\alpha(x)$ a húrnak az x pontban az x tengellyel bezárt szöge. Mivel ez az erő okozza a húr gyorsulását,

$$p \sin \alpha(x + dx) - p \sin \alpha(x) \approx \varrho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Másrészt

$$\sin \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)} \approx \operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{du}{dx},$$

így

$$p(\sin \alpha(x + dx) - \sin \alpha(x)) \approx p \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \approx p dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Ebből a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\varrho}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A húr végpontjai rögzítve vannak, így teljesülnie kell még az

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \text{ha} \quad t \geq 0$$

peremfeltételeknek és az

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0(x)$$

kezdeti feltételeknek is. Ez egy másodrendű parciális differenciálegyenletre vonatkozó vegyes feladat.

Egy megoldási módszer a *változók szétválasztása*: keressünk $u(x, t) = X(x)T(t)$ alakban megoldásokat. Az egyenletből azt kapjuk, hogy

$$X''(x)T(t) = \frac{\varrho}{p} X(x)T''(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\rho}{p} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Mivel az egyik oldal csak x -től, a másik csak t -től függ, mindkét oldal konstans, legyen például $-\lambda$. Ekkor

$$T'' = -\lambda T, \quad X'' = -\frac{\lambda p}{\rho} X.$$

A peremfeltételből $X(0) = X(\ell) = 0$, így a második egyenletre, amely egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet, egy *peremérték problémát* kaptunk. Ennek nem minden λ -ra van megoldása. Meghatározva azokat a λ -kat, amelyekre van megoldás, a másik egyenlet is megoldható, annak általános megoldásában két konstans van. Mivel a parciális differenciálegyenletünk lineáris (azaz megoldások összege és konstansszorzosa is megoldás), a kapott speciális megoldások (végtelen) lineáris kombinációjaként kereshetjük az eredeti vegyes feladat megoldását.

11.1.5. Példa: geometriai interpretáció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és vizsgáljuk az

$$x' = f(t, x), \quad (t, x) \in D$$

közönséges explicit elsőrendű differenciálegyenletet. Ha x megoldása ennek a differenciálegyenletnek és áthalad a (t_0, x_0) ponton, akkor ott a meredeksége $f(t_0, x_0)$. Ezért D minden pontjában – a differenciálegyenlet megoldása nélkül – megadhatjuk az ott áthaladó megoldásgörbe irányát. Ha például $x' = -t/x$ ($t > 0, x > 0$), akkor a megoldásgörbék origó középpontú körívek.

11.1.6. A differenciálegyenletek osztályozása. *Differenciálegyenlet-rendszeren* egy

$$\begin{aligned} f_j(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots, x_n^{(m_n)}) \\ = g_j(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots, x_n^{(m_n)}) \end{aligned}$$

($j = 1, 2, \dots, k$) alakú egyenletrendszert értünk. Itt az f_j, g_j függvények adottak, és a t változótól függő $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlen függvényeket keressük. Az adott és az ismeretlen függvények változói és értékei is euklideszi vagy unitér terek vektorai. Az egyenletek átrendezésével elérhetjük, hogy a jobb oldalon nulla álljon. Ha az adott, illetve ismeretlen függvények vektor értékűek, akkor koordinátákra áttérve egy hasonló, de már skalár értékű függvényekre vonatkozó egyenletrendszert kapunk.

Gyakran célszerű az ismeretlen és az ismert függvényeket egy-egy vektor értékű függvény koordinátáinak tekinteni, így az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorra vonatkozó

$$f(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = g(t, x, x', \dots, x^{(m)})$$

differenciálegyenletet kapunk. Az egyenlet *rendje* m , a legmagasabb előforduló derivált rendje; ha $m = 1$, az egyenlet *elsőrendű egyenlet*, egyébként *magasabbrendű egyenlet*.

Általában feltesszük, hogy f és g nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, és *megoldáson* egy nem üres G tartományon (valós változós esetben tehát nyílt intervallumon) értelmezett m -szer folytonosan differenciálható $t \mapsto x(t)$ függvényt értünk, amelyre

$$f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))$$

minden $t \in G$ -re. Azt mondjuk, hogy az x megoldásnak az $\tilde{x}$ megoldás *folytatása*, ha az $\tilde{x}$ függvény kiterjesztése az x függvénynek, azaz $x \subset \tilde{x}$. Egy x megoldást *teljesnek* vagy *nem folytathatónak* nevezünk, ha nincs tőle különböző (azaz valódi) folytatása.

Ha az x ismeretlen függvény t változója valós, akkor *közönséges*, egyébként *parciális differenciálegyenletről* beszélünk. Ez utóbbi esetben $x', x'', \dots, x^{(m)}$ nyilván a parciális deriváltakkal fejezhető ki. A „közönséges” jelzőt általában elhagyjuk.

Közönséges differenciálegyenlet-rendszereknél a gyakorlatban előforduló esetekben az ismeretlen skalár függvények száma és a skalár egyenletek száma megegyezik, azaz $n = k$. Ennek oka, hogy megfelelő feltételek mellett ebben az esetben az egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása létezik. Az $n < k$ esetben az egyenletrendszer túlhatározott, és általában nincs megoldása. Az $n > k$ esetben $n - k$ ismeretlen függvényt szabadon választva az $n = k$ esetet kapjuk. A továbbiakban mindig az $n = k$ esetet fogjuk vizsgálni.

11.1.7. Explicit és implicit egyenletek. Ha egy, az ismeretlen $x_1, \dots, x_n$ függvényekre vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$x_j^{(m_j)} = f_j(t, x_1, x'_1, \dots, x_j, \dots, x_j^{(m_j-1)}, x_{j+1}, x'_{j+1}, \dots)$$

($j = 1, 2, \dots, n$) alakú egyenletekből áll, és az egyenletek jobb oldalán szereplő függvényekben mindenütt csak x_j -nek m_j -nél alacsonyabb fokú deriváltjai szerepelnek, akkor *explicit* differenciálegyenlet-rendszerről beszélünk, minden más differenciálegyenlet-rendszert *implicit egyenletnek* nevezünk. Implicit egyenleteket néha könnyen átalakíthatunk explicit egyenletekké, máskor az átalakítás problémákkal jár, csak lokálisan végezhető el, vagy még úgy sem. A továbbiakban legtöbbször csak explicit egyenletekkel foglalkozunk.

11.1.8. Átviteli elv. Minden magasabbrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer ekvivalens egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. Az átírás a következőképpen történik: ha az x ismeretlen függvénynek az eredeti egyenletrendszerben előforduló legmagasabb deriváltja $x^{(m)}$, akkor bevezetve az

$$x_1 = x', \quad x_2 = x'_1, \quad \dots \quad x_{m-1} = x'_{m-2}$$

új ismeretlen függvényeket, és ezeket beírva az eredeti egyenletekbe, azokban csak $x, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ és $x'_{m-1} = x^{(m)}$ fog előfordulni, így a differenciálegyenlet-rendszer rendje csökken, viszont a helyettesítést definiáló összefüggések $m - 1$ új elsőrendű egyenletet adnak. A szokásos $x(\tau) = \xi, x'(\tau) = \xi_1, \dots, x^{(m-1)} = \xi_{m-1}$ kezdőfeltételből az $x(\tau) = \xi, x_i(\tau) = \xi_i, i = 1, \dots, m - 1$ kezdőfeltételek adódnak. Minden ismeretlen függvényre elvégezve a fenti típusú helyettesítést, egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amely az eredeti differenciálegyenlet-rendszerrel ekvivalens. Világos, hogy ha az eredeti differenciálegyenlet-rendszer explicit volt, akkor az új differenciálegyenlet-rendszer is explicit lesz.

11.1.9. Alapprobléma. A fentiek alapján az alábbi közönséges explicit differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$x' = f(t, x), \quad (t, x) \in D,$$

ahol $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ egy nyílt halmaz, és $f: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ egy folytonos függvény, amelynek x szerinti parciális deriváltja, $f_x: D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ is folytonos. Az egyszerűbb szóhasználat kedvéért a fenti egyenletet *normál egyenletnek* fogjuk nevezni.

Ha $(\tau, \xi) \in D$ és a fenti rendszer olyan x megoldását keressük, amelyre

$$x(\tau) = \xi,$$

akkor *Cauchy-feladat*ról beszélünk. Meg fogjuk mutatni, hogy a fenti feltételek mellett a Cauchy-feladatnak egy és csak egy teljes megoldása van (egzisztencia és unicitás).

A normál egyenlet jobb oldala úgy fogható fel, hogy a D halmaz minden pontjához megad egy irányt (*iránymező*). Az egyenlet megoldása olyan görbe keresését jelenti, amely minden pontban az ottani adott irányban halad. Gyakran az iránymező ábrázolása jól mutatja a differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését. Ha f nem függ t -től, akkor gyakran hasznosabb az f vektormezőt ábrázolni, mint az iránymezőt.

→ **11.1.10. Feladat [5].** Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerekkel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert:

- (1) $x'' + 2x + y'' + 3y' + y = 0, x''' + y' = 0;$
- (2) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 3, x''(0) = 1.$

→ **11.1.11. Feladat [10].** Adjunk meg olyan differenciálegyenlet-rendszert, amelynek megoldásai a t adott függvényei:

- (1) $x = at;$
- (2) $x = at^2;$
- (3) $x = ae^{t/a};$
- (4) $x^2 + t^2 = a^2;$
- (5) $x^2 + t^2 = at;$
- (6) $(t - a)^2 + x^2 = 1;$
- (7) $x = at + b;$
- (8) $x = at^2 + bt + c;$
- (9) $(t - a)^2 + (x - b)^2 = c^2;$
- (10) $x = a \cos t, y = a \sin t;$
- (11) $t^2 + x^2 + y^2 = a^2, t + x + y = b.$

11.1.12. Feladat (N. N. Konsztantyinov) [13]. Az A pontból a B pontba két, egymást nem metsző út vezet. Tudjuk, hogy két gépkocsi, amelyek egy $2r$ -nél rövidebb kötéllal vannak összekötve, és amelyek két különböző úton indulnak el A -ból B -be, képesek útjukon végigmenni úgy, hogy nem szakítják szét a kötelet. Képes-e ezen a két úton két kör alakú, r sugarú szénásszekér elkerülni egymást, ha szemben haladnak?

→ **11.1.13. Feladat [12].** Tanulmányozzuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszerekhez tartozó iránymezőket, illetve vektormezőket. Mit mondhatunk a megoldásokról azok meghatározása nélkül, csak az egyenletből?

- (1) $x' = kx$ (szaporodás);
- (2) $x' = kx^2$ (robbanás);

- (3) $x' = (1 - x)x$ (szaporodás versengéssel);
- (4) $x' = (1 - x)x - c$ (halászat);
- (5) $x' = f(t)$;
- (6) $x'' = -x$ (kis rezgések);
- (7) $x'' = -\sin x$ (inga);
- (8) $x' = kx - axy, y' = -ly + bxy$ (ragadozó-áldozat Lotka–Volterra-modellje);
- (9) $x'' = 0$ (szabad tömegpont);
- (10) $x' = x, y' = ky$;
- (11) $x'' = -x, y'' = -y$ (gömbi inga).

* **11.1.14. Feladat [10].** Néhányszori differenciálással, helyettesítésekkel és egyes tagok kiküszöbölésével redukáljuk differenciálegyenletre az alábbi függvényegyenleteket, amelyekben $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, és az egyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re fennáll:

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (Cauchy-egyenlet);
- (2) $f(x + y) = f(x)f(y)$ (Cauchy exponenciális egyenlete);
- (3) $f(xy) = f(x)f(y)$ (Cauchy hatványegyenlete);
- (4) $f(xy) = f(x) + f(y)$ (Cauchy logaritmikus egyenlete);
- (5) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$ (normanégyzet-egyenlet);
- (6) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ (D'Alembert-egyenlet).

* **11.1.15. Feladat: függvényegyenletek regularitása [15].** (1) Tekintsük a

$$h(x, y)f(x) = h_0(x, y) + \sum_{i=1}^n h_i\left(x, y, f_i(g_i(x, y))\right), \quad (x, y) \in D$$

függvényegyenletet, ahol az

$$f, f_1, \dots, f_n$$

ismeretlen függvények rendre az $X, X_1, \dots, X_n \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazokon vannak definiálva, és értékeik valamely $Z, Z_1, \dots, Z_n \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazokba esnek. Tegyük fel, hogy $Y \subset \mathbb{R}$ és $D \subset X \times Y$ is nyíltak, $f_1, \dots, f_n, h, h_0: D \rightarrow \mathbb{R}$ és $h_i: D \times Z_i \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosak, és a $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h_0}{\partial x}$, $\frac{\partial h_i}{\partial x}$, $\frac{\partial h_i}{\partial y}$, $i = 1, 2, \dots, n$ parciális deriváltak is folytonosak. Tegyük fel továbbá, hogy a g_i függvények kétszer folytonosan differenciálhatóak. Legyen $x_0 \in X$, és tegyük fel, hogy van olyan $y_0 \in Y$, amelyre

$$(x_0, y_0) \in D, \quad h(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

ha $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor valamely X_0 korlátos nyílt intervallumra és $[a, b] \subset Y$ intervallumra $X_0 \times [a, b] \subset D$, $(x_0, y_0) \in X_0 \times]a, b[$ és $\int_a^b h(x, y) dy \neq 0$, ha $x \in X_0$. Az (1) egyenlet mindkét oldalát integrálva y szerint az $[a, b]$ -n, majd a kapott integrálokban külön-külön az $u = g_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ új változót bevezetve, mutassuk meg, hogy a

jobb oldalon álló integrálok folytonosan differenciálhatóak x szerint, és így f folytonosan differenciálható az x_0 egy környezetében.

(2) Mutassuk meg, hogy $h(x, y)$ lehet például $h^*(x, y, f_0(y))$ alakú valamely folytonosan differenciálható h^* -gal, de csak folytonos (esetleg ismeretlen) f_0 -lal, amely akár vektor értékű is lehet. Speciálisan, $h(x, y) = \sum_{j=m}^{-1} h_j(x, y) f_j(y)$ is lehetséges (esetleg ismeretlen) folytonos f_j , $m \leq j < 0$ függvényekkel és folytonosan differenciálható h_j függvényekkel.

(3) Mutassuk meg, hogy

$$H(\tilde{x}, \tilde{y}) f_0(G_0(\tilde{x}, \tilde{y})) f(G(\tilde{x}, \tilde{y})) = H_0(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sum_{i=1}^n H_i(\tilde{x}, \tilde{y}, f_i(G_i(\tilde{x}, \tilde{y})))$$

típusú egyenletek megfelelő feltételek mellett az (1)-ben szereplő típusra vezethetők vissza új $x = G(\tilde{x}, \tilde{y})$, $y = G_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ változókat bevezetve.

(4) Mutassuk meg, hogy a fenti módszer felhasználható arra is, hogy lokálisan integrálható megoldások folytonosságát bizonyítsuk.

(5) A fenti módszert felhasználva a megoldások folytonos differenciálhatóságának bizonyítására, a függvényegyenletet differenciálva, majd a derivált egyenletre újra alkalmazva a fenti módszert, vezessük vissza differenciálegyenlet megoldására az előző feladatban szereplő függvényegyenletek folytonos, illetve lokálisan integrálható megoldásai meghatározásának problémáját.

11.2 Elemi megoldási módszerek

11.2.1. Megjegyzés. Ha egy differenciálegyenletet meg akarunk oldani, akkor alkalmas helyettesítéssel igyekszünk egyszerűbb alakra hozni. Megfelelő helyettesítésekkel az egyenletet megpróbáljuk olyan alakra hozni, amelynek megoldását már ismerjük. Sokszor a transzformáció csak lokálisan végezhető el. Ezzel az eljárással „elég sok” megoldását megtalálhatjuk az egyenletnek. Annak vizsgálata, hogy minden megoldást megkaptunk-e, sokszor célszerűbben elvégezhető az egzisztencia-unicitás tétel felhasználásával, mint a megoldási módszer pontosabbá tételével. Ennek megfelelően, a továbbiakban a megoldási módszereket nem próbáljuk meg nehézkes tételekké átfogalmazni, és a feladatokban az „oldjuk meg” kifejezés csak azt jelenti, hogy keressünk „elég sok” megoldást. Az ismeretlen függvény rendszerint x -szel, változóját t -vel jelöljük, ennek megfelelően a derivált dx/dt az inverz deriváltja pedig dt/dx (nyilván az inverz meghatározása megadja a megoldást). Ezt a megoldás és inverze közötti „szimmetriát” sugallja az is, hogy néha az egyenletet dt -vel „végigszorozva” adjuk meg. Néha az ismeretlen függvényt y -nal, változóját x -szel jelöljük.

11.2.2. Egzakt egyenletek. Az $f_1(t, x) + f_2(t, x)x' = 0$ egyenletet egzaktnak nevezzük, ha van olyan $(t, x) \mapsto F(t, x)$ valós értékű függvény, amely primitív függvénye az $f = (f_1, f_2)$ vektor-vektor függvénynek, pontosabban $\nabla F = f$. Egy egzakt egyenlet megoldásai a $F(t, x) = c$ egyenletből kaphatók meg. Valóban, ha a $t \mapsto x(t)$ függvényre $F(t, x(t)) \equiv c$, akkor differenciálással $f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))x'(t) \equiv 0$. Megfordítva, ha x megoldása a differenciálegyenletnek, akkor a $t \mapsto F(t, x(t))$ függvény deriváltja nulla, azaz a függvény konstans, mint azt az előző számítás mutatja.

Az egyenlet egzakt voltát egyszerűen összefüggő tartományon értelmezett f_1, f_2 függvények esetén biztosítja azok folytonos differenciálhatósága és a $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ feltétel teljesülése. Az F függvény görbe menti integrálással meghatározható.

11.2.3. Integráló szorzó. Ha egy $f_1(t, x) + f_2(t, x)x' = 0$ egyenletre $\partial_1 f_2 \neq \partial_2 f_1$, esetleg egy $\mu(t, x) \neq 0$ függvénnyel végigszorozva egzakttá tehető. Az összes olyan μ függvény meghatározásának problémája, amellyel az egyenletet szorozva, az egzakt lesz, egy parciális differenciálegyenletre vezet, amelynek megoldása nehezebb, mint az eredeti egyenleté. Egy ilyen μ függvényt viszont gyakran találhatunk, ha valamilyen speciális alakban keressük, például csak t -től függ, csak x -től függ, csak tx -től függ stb.

→ **11.2.4. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $t dt + x dx + (t^2 + x^2)t^2 dt = 0;$
- (2) $\operatorname{tg} x dt - \operatorname{ctg} t dx = 0;$
- (3) $x(1 + tx) dt - t dx = 0;$
- (4) $(x^2 + y^2 + 2x) dx - 2y dy = 0;$
- (5) $(x^2 y + y + 1) dx + (x + x^3) dy = 0;$
- (6) $xy^3 dx + (1 + 2x^2 y^2) dy = 0;$
- (7) $(y + xy^2) dx + (x - x^2 y) dy = 0;$
- (8) $(3y^2/x - y/x^2 + 2y) dx + (8y^2/x + 1/x + 3y) dy = 0;$
- (9) $(xy + y^2) dx + (xy - x^2) dy = 0;$
- (10) $(y^3 - 2x^2 y) dx + (2xy^2 - x^3) dy = 0.$

11.2.5. Szeparábilis egyenletek. Ha a differenciálegyenlet $f(x)x' = g(t)$ alakra hozható (szeparábilis), akkor az egzakt egyenletek megoldási módszerével megoldható, de közvetlen differenciálással is adódik, hogy a megoldásokat az $F(x) = G(t) + C$ összefüggésből kaphatjuk, ahol F a f , G a g primitív függvénye. Az $x' = f(x/t)$ alakú *homogén egyenlet* $y = x/t$ helyettesítéssel szeparábilisra vezethető vissza. Ugyancsak szeparábilis egyenletre vezethető vissza az $x' = f(at + bx)$ alakú egyenlet $y = at + bx$ helyettesítéssel.

Az

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$$

alakú egyenlet, ha az $a_1 t + b_1 x + c_1$ és $a_2 t + b_2 x + c_2$ egyenesek párhuzamosak, azaz ha $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, akkor az előző típusba tartozik, egyébként pedig alkalmas α és β választással $t = t_1 + \alpha$, $x = x_1 + \beta$ helyettesítéssel az egyenesek metszéspontját a koordináta-rendszer kezdőpontjába eltolva, homogénné válik.

→ **11.2.6. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi egyenletek összes teljes megoldását:

- (1) $x' = x;$
- (2) $x' = \sqrt[3]{|x|}$ (itt nincs unicitás!);
- (3) $x' x + t = 0;$
- (4) $x'' = 0;$
- (5) $x^{(m)} = f(t).$

→ **11.2.7. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $1 + x^2 + txx' = 0$;
- (2) $tx(1 + t^2)x' = 1 + x^2$;
- (3) $(1 + x^2) = tx'$;
- (4) $t/(1 + x) - xx'/(1 + x) = 0$, $x(1) = 1$;
- (5) $y' \sin x = y \ln y$, $y(0) = 1$;
- (6) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$;
- (7) $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$, $y(0) = 1$;
- (8) $2\sqrt{y} dx = dy$, $y(0) = 1$;
- (9) $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$;
- (10) $(a^2 + y^2) dx + 2x\sqrt{ax - x^2} dy = 0$, $y(a) = 0$.

→ **11.2.8. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $x' = (t + x)/(t + 2x)$;
- (2) $x' = (x^2 - t^2)/(2tx)$;
- (3) $(t^2 + x^2)x' = tx$;
- (4) $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$;
- (5) $(3x^2 + 6xy + 3y^2) dx + (2x^2 + 3xy) dy = 0$;

→ **11.2.9. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $x' = (t - x)^2 + 1$;
- (2) $x' = \sin(t - x)$;
- (3) $x' = at + bx + c$;
- (4) $x'^2 = at + bx + c$;
- (5) $(t + x)^2 x' = a^2$.

→ **11.2.10. Feladat [10].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $(x + y + 1) dx + (2x + 2y + 1) dy = 0$;
- (2) $(x + y - 2) dx + (x - y + 4) dy = 0$;
- (3) $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$.

11.2.11. Lineáris egyenletek. Az $x' = f(t)x + g(t)$ inhomogén lineáris egyenlet minden teljes megoldása előáll $c\varphi + \varphi_0$ alakban, ahol φ_0 az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldása, φ pedig az $x' = f(t)x$ homogén lineáris egyenlet egy nem nulla teljes megoldása. (Ezt később bebizonyítjuk.) Utóbbi szeparábilis, így megoldásait könnyen megkaphatjuk. Az inhomogén egyenlet egy megoldását mindig megkaphatjuk a „konstans variálásával” $c(t)\varphi(t)$ alakban, ahol φ a homogén egyenlet egy nem nulla megoldása. (Ezt is bebizonyítjuk később.) Lineárisra visszavezethető az

$$x' + f(t)x + g(t)x^\alpha = 0$$

Bernoulli-egyenlet $y = x^{1-\alpha}$ helyettesítéssel. Az

$$x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

Riccati-egyenlet egy φ megoldását ismerve, $x = y + \varphi$ helyettesítéssel y -ra egy Bernoulli-egyenletet kapunk. Egyébként egy Riccati-egyenletből

$$x = \frac{1}{yf(t)}$$

helyettesítéssel y -ra egy másik Riccati-egyenletet kapunk, amelyet néha könnyebb megoldani.

→ **11.2.12. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $tx' + 2x = 3t, x(0) = 0;$
- (2) $tx' + 3x = t^2;$
- (3) $x' + ax = e^{mt};$
- (4) $(1 + t^2)x' - 2tx = (1 + t^2)^2;$
- (5) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2};$
- (6) $y' + x^2y = x^2, y(0) = 1.$

→ **11.2.13. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $x' + x = -1/x;$
- (2) $x' + x + x^2 = 0;$
- (3) $xy' + y = y^2 \ln x;$
- (4) $y' + 2xy = 2x^3y^3;$
- (5) $y^{n-1}(ay' + y) = x.$

→ **11.2.14. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1;$
- (2) $y' + y^2 = 2x^{-2};$
- (3) $y' + y^2 = x^{-4};$
- (4) $y' = e^xy^2 - y + e^{-x}.$

11.2.15. Implicit egyenletek. Az

$$x = f(t, x')$$

egyenlet a $p = x'$ paraméter bevezetésével

$$(1) \quad x = f(t, p)$$

alakú, amit differenciálva,

$$\frac{dx}{dt} = p = g\left(t, p, \frac{dp}{dt}\right)$$

alakú egyenletet kapunk. Ezt megoldva, a kapott

$$h(t, p, c) = 0$$

alakú összefüggés, és (1) együtt a megoldást adják a p paraméter függvényében. Szükség esetén p a két egyenletből kiküszöbölhető.

Speciálisan, az

$$x = tf(x') + g(x')$$

Lagrange-egyenlet megoldható ezzel a módszerrel, mert t -re mint p függvényére lineáris egyenletet kapunk.

Hasonlóan oldható meg a

$$t = f(x, x')$$

egyenlet is a $p = x'$ paraméter bevezetésével:

$$(2) \quad t = f(x, p),$$

amiből most x szerinti differenciálással

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p} = g\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

alakú differenciálegyenletet kapunk. Ha ennek megoldása

$$h(x, p, c) = 0,$$

akkor ez az összefüggés és (2) együtt a megoldás egy paraméteres előállítás.

Az

$$f(tx' - x) = g(x')$$

Clairaut-egyenlet lineáris megoldásai az

$$f(tc - x) = g(c)$$

implicit egyenletből kaphatók. Ha az egyenletnek van ezektől különböző megoldása, amelyre tehát $x'' \neq 0$, akkor azt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyenlet differenciálása és x'' -vel való osztás után kapott

$$f'(tx' - x)t - g'(x') = 0$$

egyenletből és az eredeti egyenletből kiküszöböljük x' .

→ **11.2.16. Feladat** [12]. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $t = xx' - tx'^2$;
- (2) $x = 2tx' + xx'^2$;
- (3) $x = 2tx' - ax'^3$;
- (4) $x = 2tx' - x'^2$;
- (5) $(tx' - x)^2 - x'^2 - 1 = 0$.

11.2.17. Magasabbrendű egyenletek. Az

$$f(t, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

hiányos egyenlet rendje a nyilvánvaló $y = x'$ helyettesítéssel csökkenthető.

Hasonlóan, az

$$f(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

most a független változót nem tartalmazó, úgynevezett *autonóm egyenlet* rendje is csökken, ha megoldását $x' = y(x)$ alakban keressük.

Ha az

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

egyenlet $x \mapsto ax$ helyettesítéssel nem változik, akkor $x = e^y$ helyettesítéskor rendje csökken.

Hasonlóan, ha az egyenlet $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik, akkor $t = e^s$ helyettesítéssel autonóm lesz.

Végül, ha az egyenlet a $t \mapsto at$, $x \mapsto a^p x$ helyettesítések elvégzése után ugyanaz marad, akkor az $x = t^p y$ helyettesítés elvégzése után olyan egyenletet kapunk, amely a $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik.

→ **11.2.18. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $x'' = \sin t/t$;
- (2) $x'' = e^x$;
- (3) $tx'' = x' + t \sin(x'/t)$;
- (4) $xx'' - 2xx' \ln x = x'^2$;
- (5) $x'' = 2xx'$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;
- (6) $x'' = x'^2 - x$, $x(1) = -1/4$, $x'(1) = 1/2$;
- (7) $x'' = x'e^x$;
- (8) $tx'' = x'$, $x(0) = x'(0) = 1$;
- (9) $t - x''e^{x''} = 0$;
- (10) $x''' = x''^2$;
- (11) $x''' = 2xx'$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 9/2$.

→ **11.2.19. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (1) $tx'' = 2xx'$;
- (2) $(1-t)(xx'' - x'^2) + t^2x^2 = 0$;
- (3) $t^2x'' + 3tx' = 1/x^3t^4$;
- (4) $x' = t/(t^2x^2 + x^5)$;
- (5) $x'(x' + x) = t(t + x)$;
- (6) $(t^2 - t^3)x'' + (2t^2 - 4t)x' + (6 - 2t)x = 0$;
- (7) $2xx'' - x'^2 = (x' - tx'')^2/3$.

* **11.2.20. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi függvényegyenletek folytonos megoldásait, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, és az egyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re fennáll:

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (Cauchy-egyenlet);
- (2) $f(x + y) = f(x)f(y)$ (Cauchy exponenciális egyenlete);
- (3) $f(xy) = f(x)f(y)$ (Cauchy hatványegyenlete);
- (4) $f(xy) = f(x)f(y)$ (Cauchy logaritmikus egyenlete);
- (5) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$ (normanégyszet-egyenlet);
- (6) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ (D'Alembert-egyenlet).

11.2.21. Vegyes módszerek. Ha tudjuk, vagy sejtjük, hogy az egyenlet megoldásai milyen alakúak, akkor a *határozatlan együtthatók módszerével*, vagy más néven *próbafüggvények módszerével* találhatunk megoldásokat. A megoldásokat például polinom, exponenciális függvény, ezek szorzatainak lineáris kombinációja stb. alakban kereshetjük, és a differenciálegyenletből egy egyenletrendszert kapunk az együtthatókra. A módszer egyik speciális esete, amikor a megoldást végtelen sor, például hatványsor alakban keressük.

Speciális egyenletek integrálására nagyon sok példa létezik. Ezen egyenletek sora tovább bővíthető, ha egy már megoldott egyenletben valamilyen helyettesítést alkalmazunk. Mindez azt az érzést keltheti, hogy csak ügyességünkön múlik, hogy egy adott differenciálegyenletet meg tudunk-e oldani. Ez nincs így. Mint Liouville bebizonyította, egészen egyszerű egyenletek, például az $x' = x^2 - t$ egyenlet általános megoldása sem áll elő elemi és algebrai függvények, valamint integráljaik véges kombinációjaként. Ha a fent megadott egyszerű módszerekkel nem sikerül valamely egyenletet megoldani, vagy a számítások nagyon hosszadalmasak, komputeralgebrai rendszerek (wxMaxima, Maple, MuPAD, muMATH, MATHEMATICA, REDUCE, MACSYMA stb.) segíthetnek. Ha ez sem vezet célra, vagy a megoldás túl bonyolult és így használhatatlan, akkor közelítő módszereket használhatunk.

* **11.2.22. Operátorszámítás.** Heaviside angol mérnök differenciálegyenletekkel foglalkozva, egyszerű és hatékony számítási módszert talált ki. Módszerét egy példán mutatjuk be. Jelölje D a differenciálás „operátorát”, és tegyük fel, hogy az

$$x'' + 2x' + x = t^2 - 4t + 1,$$

azaz $D^2x + 2Dx + x = t^2 - 4t + 1$ differenciálegyenletet szeretnénk megoldani. „Kiemelve” x -et, és „osztva” $D^2 + 2D + 1 = (D + 1)^2$ -nel, majd $1/(D + 1)^2$ -t „sorbafejtve”,

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \dots)(t^2 - 4t + 1) \\ &= t^2 - 4t + 1 - 2(2t - 4) + 3 \cdot 2 = t^2 - 8t + 15, \end{aligned}$$

ami egy partikuláris megoldás. Módszerét sikerrel alkalmazta bonyolultabb esetekben is. Heaviside módszere matematikailag megalapozható a Fourier- (vagy Laplace-) transzformáció segítségével: az egyenlet transzformálása – konstanstól eltekintve – a független változóval való szorzásba viszi át a differenciálást, így az osztás és a sorbafejtés jogossá válik, és az inverz transzformációt alkalmazva, kapjuk az eredményt. Egy másik, elegáns

módszer Heaviside ötletének megalapozására a Mikusiński-féle operátorszámítás: Vezessük be a lokálisan abszolút integrálható, az origótól balra nullát felvevő valós változós, komplex értékű függvények körében az $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$ konvolúciót, mint szorzást: a pontonkénti összeadással egy kommutatív gyűrűt kapunk. A $\Theta(t) = 0$, ha $t \leq 0$ és $\Theta(t) = 1$, ha $t > 0$ Heaviside-függvénnyel való szorzásra $(\Theta * f)(t) = \int_0^t f(t) dt$, így Θ az „integrálás”. Azt várjuk, hogy ennek multiplikatív inverze a differenciálás, ez azonban nincs a gyűrűben, amely nem is egységelemes. Az úgynevezett Titchmarsh-tétel szerint – a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva – a fenti gyűrű nullosztómentes, azaz $f * g = 0$ esetén $f = 0$ vagy $g = 0$. Ugyanúgy, ahogy az egész számokból képez-zük a racionális számokat, ennek a gyűrűnek is képezhetjük a hányadostestét, amelynek elemeit, az (f, g) párokat f/g alakban írjuk ($g \neq 0$), ezek a Mikusiński-operátorok. Az f_1/g_1 és f_2/g_2 hányadost akkor azonosítjuk, ha $f_1 * g_2 = f_2 * g_1$. A Mikusiński-operátorok között ott vannak az eredeti függvények, mint $(f * g)/g$ alakú hányadosok, a komplex szá-mok, mint $(\alpha g)/g$ alakú hányadosok (g/g az egységelem), a differenciálás $D = g/(\Theta * g)$ operátora és hatványai, így ebben a testben a Heaviside-féle számítások elvégezhetők. Értelmezhető például $(D + \alpha)^\beta$, ha α és β komplex számok, és segítségével megoldhatók az

$$(\alpha_2 t + \beta_2)x'' + (\alpha_1 t + \beta_1)x' + (\alpha_0 t + \beta_0)x = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletek ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$). Az operátorszámítás felhasználható bizonyos parciális differenciálegyenletek, például az egydimenziós hővezetési és hullámegyenlet, valamint a telegráfegyenlet megoldására is. Az operátorszámítás részletes tárgyalása megtalálható Mikusiński [45] könyvében. Megjegyezzük, hogy az operátorszámítás kapcsolatban áll a disztribúcióelmélettel is.

11.3 Általános eredmények

Jól ismert, hogy Cauchy volt az első matematikus, aki differenciálegyenletek általános típusaira, amelyekre explicit megoldás nem kapható, bizonyított be egzisztencia tételeket. Stratégiája az volt, hogy tekintette a különböző módszereket, amelyeket korábban vezettek be numerikus számolások céljára, és megmutatta, hogy ezek a módszerek valóban konvergens közelítő eljárást adnak, amelynek a határértéke megoldás.

Jean Dieudonné [13]

11.3.1. Ekvivalens integrálegyenlet. Az alapp probléma jelöléseivel, egy nyílt intervallumon értelmezett $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvény pontosan akkor megoldása a Cauchy-feladatnak, ha φ olyan folytonos függvény, amelyre

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \text{ha } t \in I.$$

Bizonyítás. Ha φ megoldása a Cauchy-feladatnak, akkor integrálással kapjuk, hogy az integrálegyenlet fennáll. Megfordítva, ha a φ folytonos függvény eleget tesz az integrálegyenletnek, akkor a jobb oldalon az integrandusz folytonos, tehát φ folytonosan differenciálható. Mindkét oldalt differenciálva kapjuk, hogy φ megoldása a differenciálegyenletnek. A $t = \tau$ helyettesítés az integrálegyenletben mutatja, hogy a φ megoldása a Cauchy-feladatnak is.

11.3.2. Közelítő megoldások. Az alapprobléma jelöléseivel, ha $\varepsilon > 0$, akkor egy nemüres nyílt intervallumon értelmezett és ott szakaszonként folytonosan differenciálható φ függvényt a differenciálegyenlet ε -megoldásának nevezünk, ha

$$\left| \varphi'(t) - f(t, \varphi(t)) \right| \leq \varepsilon$$

minden olyan t -re, amelyre $\varphi'(t)$ létezik.

A közelítő megoldások hasznos bizonyítási eszközök, és fontos szerepet játszanak differenciálegyenletek numerikus módszerekkel történő megoldásánál.

11.3.3. Peano-tétel. Az alapprobléma jelöléseivel, de csak az $f: D \rightarrow \mathbb{K}^n$ függvény folytonosságát feltéve, létezik olyan x megoldása a differenciálegyenletnek, amelyre $\varphi(\tau) = \xi$.

Bizonyítás. Válasszunk $a, b, K > 0$ valós számokat úgy, hogy

$$C = \{(t, x): |t - \tau| \leq a, |x - \xi| \leq b\} \subset D,$$

továbbá

$$\sup \left\{ |f(t, x)| : (t, x) \in C \right\} < K$$

teljesüljön, és legyen $c = \min\{a, b/K\}$. Defináljuk az x_m úgynevezett „akat”. Ezeket úgy kapjuk, hogy a $[\tau - c, \tau + c]$ intervallumot $2m$ egyenlő h hosszúságú részre osztva, a (τ, ξ) pontból indulva, lineárisan haladunk az f függvénynek a töréspontban felvett értéke által megadott irányban a következő töréspontig. A K és c megválasztásából következik, hogy bármelyik x_m töröttvonal C -ben halad, és értékei a ξ -től nem esnek távolabb, mint b , mert deriváltjuk normája kisebb mint K . Legyen $\varepsilon > 0$. Megmutatjuk, hogy ha m elég nagy, akkor ε -megoldást kapunk. Valóban, mivel f egyenletesen folytonos a kompakt C -n, van olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, \tilde{t} \in [\tau - c, \tau + c]$, $|t - \tilde{t}| \leq \delta$ és $x, \tilde{x}$ távolsága ξ -től legfeljebb b és $|x - \tilde{x}| \leq \delta$, akkor $|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \varepsilon$ teljesül. Ha most m olyan nagy, hogy $h < \delta$ és $hK < \delta$, akkor x_m egy ε -megoldás.

Tekintsünk minden $\varepsilon = 1/k$ -hoz egy x_{m_k} , $m_k > m_{k-1}$ Euler-féle töröttvonalat. Diagonális eljárással válasszuk ki ennek a sorozatnak egy olyan x_{m_j} részsorozatát, amely az összes töréspontok halmazának pontjaiban konvergens. Felhasználva, hogy minden x_m töröttvonalra $|x_m(t) - x_m(\tilde{t})| \leq K|t - \tilde{t}|$, ha $t, \tilde{t} \in [\tau - c, \tau + c]$, megmutatjuk, hogy a konvergencia egyenletes, és így a határfüggvény folytonos. Valóban, kiválasztva töréspontok egy véges halmazát, amely η -nál finomabb felosztása $[\tau - c, \tau + c]$ -nek, ha ezekben a pontokban $x_{m_{j_1}}$ és $x_{m_{j_2}}$ eltérése legfeljebb η , akkor sehol sem több, mint $\eta + 2K\eta$. Mivel elég nagy m -re x_m egy ε -megoldás, kielégíti az

$$\left| x_m(t) - \xi - \int_{\tau}^t f(s, x_m(s)) ds \right| \leq c\varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ebből határártmenettel kapjuk, hogy a határfüggvény, legyen ez x , is kielégíti ezt az egyenlőtlenséget. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ -ra teljesül, x kielégíti a differenciálegyenlettel ekvivalens integrálegyenletet. Ebből következik, hogy x megoldás a $[\tau - c, \tau + c]$ intervallumon. $\square$

* **11.3.4. Grönwall-lemma.** Legyenek u és v a $[0, c]$ intervallumon adott folytonos pozitív függvények, ω pedig olyan, a $[0, c]$ -n folytonos valós függvény, amelyre

$$\omega(t) \leq u(t) + \int_0^t v(s)\omega(s) ds$$

minden $t \in [0, c]$ -re. Ekkor

$$\omega(t) \leq u(t) + \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(r) dr\right) ds$$

minden $t \in [0, c]$ -re.

A becslés könnyen megjegyezhető: ha a feltételben egyenlőség állna, és a szereplő függvények simák lennének, akkor az állítás egyenlőséggel az ekvivalens differenciálegyenlet megoldását adná. Ez a gondolat a bizonyítás alapja is. A bizonyítás egyben példát ad arra, hogyan lehet differenciálegyenlőtlenségeket megoldani.

Bizonyítás. Legyen

$$y(t) = \int_0^t v(s)\omega(s) ds.$$

Ekkor y differenciálható, és

$$y'(t) - v(t)y(t) \leq u(t)v(t).$$

Legyen most

$$z(t) = y(t) \exp\left(-\int_0^t v(s) ds\right).$$

Ekkor az előző egyenlőtlenség a

$$z'(t) \leq u(t)v(t) \exp\left(-\int_0^t v(s) ds\right)$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mivel $z(0) = 0$, ebből

$$z(t) \leq \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(-\int_0^s v(r) dr\right) ds,$$

és így z definíciója szerint

$$y(t) \leq \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(r) dr\right) ds,$$

amiből $\omega(t) \leq u(t) + y(t)$ miatt adódik az állítás. $\square$

11.3.5. Hibabecslési tétel. Az alapp probléma jelöléseivel, tegyük fel, hogy φ_1 egy ε_1 -megoldása, φ_2 pedig egy ε_2 -megoldása a differenciálegyenletnek az I intervallumon, $\tau \in I$, $K > 0$ és $|f_x| \leq K$ mindenütt a D -n, továbbá a

$$D_t = \{x: (t, x) \in D\}$$

„metszet” konvex minden $t \in I$ -re. Ekkor

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)|e^{K|t-\tau|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(e^{K|t-\tau|} - 1)/K$$

minden $t \in I$ -re.

* **Bizonyítás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tau = 0$, és $t \geq 0$. A

$$|\varphi'_1(s) - f(s, \varphi_1(s))| \leq \varepsilon_1$$

egyenlőtlenség integrálásával a $0 \leq s \leq t$ intervallumon

$$|\varphi_1(t) - \varphi_1(0) - \int_0^t f(s, \varphi_1(s)) ds| \leq \varepsilon_1 t,$$

és hasonlóan

$$|\varphi_2(t) - \varphi_2(0) - \int_0^t f(s, \varphi_2(s)) ds| \leq \varepsilon_2 t,$$

tehát

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| + \left| \int_0^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))) ds \right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Ebből $\omega(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ jelöléssel, a középvérték-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\omega(t) \leq \omega(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t + K \int_0^t \omega(s) ds$$

adódik, amiből a Grönwall-lemma felhasználásával kapjuk a keresett egyenlőtlenséget. $\square$

11.3.6. Létezési és egyértelműségi tétel. Az alapp probléma feltételei mellett minden Cauchy-feladatnak pontosan egy teljes megoldása létezik. Ha a differenciálegyenlet valamely teljes megoldása legalább egy pontban megegyezik egy megoldással, akkor annak folytatása. Ha két teljes megoldás legalább egy pontban megegyezik, akkor egybeesnek.

* **Bizonyítás.** Jelölje Ψ a differenciálegyenlet azon φ megoldásainak halmazát, amelyekre $\varphi(\tau) = \xi$, és legyen $\tilde{\varphi} = \bigcup_{\varphi \in \Psi} \varphi$. Megmutatjuk, hogy $\tilde{\varphi}$ függvény. Ha $\varphi_1, \varphi_2 \in \Psi$, φ_1 az I_1 -en, φ_2 az I_2 -n van értelmezve, de $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $I_1 \cap I_2$ -n, akkor az $a, b \in I_1 \cap I_2$, $a < \tau < b$ számok megválaszthatók úgy, hogy $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $]a, b[$ -n. Válasszunk a $\varphi_1([a, b])$ kompakt halmaz minden pontjához olyan nyílt környezetet, amelyen f_x korlátos. Az $r > 0$ -t ezen lefedés Lebesgue-számának választva, a

$$C = \{(t, x): a < t < b, |x - \varphi_1(t)| < r\}$$

„hengeren” f_x korlátos. A φ_2 függvény folytonossága miatt van olyan

$$a \leq a_0 < \tau < b_0 \leq b,$$

hogy $|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < r$, de $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $]a_0, b_0[$ intervallumon. Ez azonban ellentmond az előző tételnek. Így $\tilde{\varphi}$ függvény. Nyilván $\tilde{\varphi}$ teljes megoldás, $\tilde{\varphi}(\tau) = \xi$, és $\tilde{\varphi}$ az egyetlen teljes megoldás. Ha most a $\tilde{\varphi}$ teljes megoldás és a φ megoldás egy pontban egybeesnek, jelölje τ ezt a pontot, és legyen $\varphi(\tau) = \xi$. Mivel $\varphi \cup \tilde{\varphi} \supset \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \cup \varphi$, azaz $\varphi \subset \tilde{\varphi}$. Ha φ is teljes megoldás, akkor $\tilde{\varphi} \subset \varphi$ is teljesül. $\square$

11.3.7. A teljes megoldás határtól határig halad. Az alapprobléma jelöléseivel, legyen $C \subset D$ egy kompakt halmaz, és x a differenciálegyenlet egy teljes megoldása, amelynek értelmezési tartománya $]a, b[$. Ekkor léteznek olyan $a < a_0 < b_0 < b$ számok, hogy $a < t < a_0$, illetve $b_0 < t < b$ esetén $(t, x(t)) \notin C$.

* **Bizonyítás.** Elég a felső végponttal foglalkozni. Ha $b = \infty$, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként válasszunk olyan $r > 0$ számot, amelyre C -től D komplementerének minden pontja $2r$ -nél nagyobb távolságban van. A C -től r -nél nem nagyobb távolságra lévő pontok C^* halmaza kompakt, így rajta f korlátos $K > 0$ -val. Ha p, q pozitív számok úgy, hogy $p + q \leq r$, akkor a Peano-tétel szerint $c = \min\{p, q/K\}$ -ra minden $(\tau, \xi) \in C$ kezdőértékkel létezik megoldás $]\tau - c, \tau + c[$ -n. Megmutatjuk, hogy $b_0 = b - c$ választható. Valóban, ha egy $b_0 < \tau < b$ értékre $(\tau, x(\tau)) \in C$ lenne, akkor az előző tétel szerint x a b -nél nagyobb értékekre is értelmezve lenne. $\square$

11.4 Lineáris differenciálegyenletek

A XVIII. században a differenciálegyenletekről írt nagyszámú munkák közül kiemelkednek Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) művei. Ezekben a munkákban dolgozták ki mindenekelőtt a kis rezgések elméletét, következésképpen a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elméletét is, mellékesen kialakultak a lineáris algebra alapfogalmai (az n dimenziós eset sajátértékei és vektorai). A lineáris operátor karakterisztikus egyenletét sokáig szekuláris egyenletnek nevezték, mert éppen egy ilyen egyenletből határozták meg a Lagrange-féle kis rezgések elmélete alapján a bolygómozgások szekuláris (évszázados, azaz az éves mozgáshoz képest lassú) perturbációit. Newtont követve először Euler és Lagrange majd Gauss (1777–1855) fejlesztette ki a rezgéselmélet módszereit.

V. I. Arnold [2]

11.4.1. Lineáris alapprobléma. Legyen I egy nyílt intervallum,

$$A: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n), \quad b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

legyenek folytonos függvények. Tekintsük az $x' = A(t)x + b(t)$ differenciálegyenletet (a $D = I \times \mathbb{K}^n$ tartományon). Az egyszerűbb hivatkozás kedvéért ezt a differenciálegyenletet a fenti feltételek mellett *lineáris normál egyenlet*nek fogjuk nevezni. A megfelelő *homogén lineáris normál egyenlet* az $x' = A(t)x$ egyenlet. Ezek a differenciálegyenletek nyilvánvalóan kielégítik az létezési és egyértelműségi tétel feltételeit.

11.4.2. Tétel. Az $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in I$ lineáris normál differenciálegyenlet minden teljes megoldása az egész I intervallumon van értelmezve.

* **Bizonyítás.** Legyen $c, d \in I$, $c < \tau < d$, és x egy teljes megoldás, amely értelmezve van a $]c, d[$ intervallumon, $x(\tau) = \xi$. Az

$$\varepsilon = \sup \left\{ |b(t)| : c \leq t \leq d \right\}, \quad K > \sup \left\{ |A(t)| : c \leq t \leq d \right\}$$

konstansokkal, mivel az azonosan nulla függvény ε -megoldása az egyenletnek,

$$|x(t)| \leq |\xi|e^{K|t-\tau|} + \varepsilon(e^{K|t-\tau|} - 1)/K,$$

ha $c < t < d$. A jobb oldal korlátos, így x is korlátos $]c, d[$ -n, amiből $x(]c, d[)$ lezártja kompakt halmaz. Mivel a teljes megoldás határtól határig halad, „kibújik” minden kompakt halmazból, így d nem lehet az x értelmezési tartományának felső határa, c pedig nem lehet az alsó határa. Ebből következik, hogy x az egész I -n értelmezve van. $\square$

11.4.3. Szuperpozíció, komplexifikálás. Lineáris egyenletek tanulmányozásánál igen hasznos a *szuperpozíció elve*: Ha x_1 az $x' = A(t)x + b_1(t)$ az x_2 pedig az $x' = A(t)x + b_2(t)$ egyenlet egy megoldása, α_1, α_2 skalárok, akkor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ megoldása az $x' = A(t)x + \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$ egyenletnek. Speciálisan, az $x' = A(t)x$ homogén lineáris egyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak, és az inhomogén $x' = A(t)x + b(t)$ egyenlet egy x_0 megoldásához hozzáadva a homogén egyenlet összes megoldását, az inhomogén egyenlet összes megoldását megkapjuk.

A komplex számtest algebrai zártága miatt gyakran hasznos komplex megoldásokat keresni. Ehhez $\mathbb{R}^n$ -et $\mathbb{C}^n$ részének tekintjük és egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ lineáris operátort kiterjesztünk egy $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ komplex lineáris operátorra az

$$A_{\mathbb{C}}(z) = A_{\mathbb{C}}(x + iy) = A(x) + iA(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad z = x + iy$$

definícióval; ez annak felel meg, hogy A mátrixát komplex elemű mátrixnak tekintjük, az $\mathbb{R}^n$ -beli vektorokat pedig $\mathbb{C}^n$ -belieknek. Ha $z = x + iy$ a valós inhomogén egyenlet egy komplex megoldása, akkor $\bar{z} = x - iy$ is komplex megoldása a valós inhomogén egyenletnek, és $(z + \bar{z})/2$ az inhomogén, $(z - \bar{z})/(2i)$ pedig a homogén egyenletnek egy valós megoldása.

Másrészt, minden komplex lineáris tér valós lineáris térnek is tekinthető, kétszer akkora dimenzióval, így a komplex eset sokszor visszavezethető a valósra. Ezért sok tételt elég a valós esetben bebizonyítani.

Ez a két trükk csak a linearitáson múlik, ezért nem csak differenciálegyenletekre, hanem más lineáris egyenletekre is alkalmazható.

11.4.4. Alaprendszer. A lineáris alaprobléma jelöléseivel, a szuperpozíció elve szerint a homogén lineáris

$$x' = A(t)x, \quad t \in I$$

egyenlet teljes megoldásai lineáris teret alkotnak. Ha $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ teljes megoldásoknak egy lineárisan független rendszere, akkor minden $\tau \in I$ -re a $\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_r(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek. Valóban, ha

$$c_1 \varphi_1(\tau) + \dots + c_r \varphi_r(\tau) = 0$$

teljesülne, akkor $c_1\varphi_1 + \dots + c_r\varphi_r$ az azonosan nulla megoldással egyezne meg. A homogén rendszer teljes megoldásainak egy lineárisan független $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rendszerét *alaprendszernek* nevezzük. Egy tetszőleges φ teljes megoldás előáll egy alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációjaként, azaz egy alaprendszer bázis a megoldások terében: Valóban, ha

$$\varphi(\tau) = c_1\varphi_1(\tau) + \dots + c_n\varphi_n(\tau),$$

akkor φ és $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ ugyanazon kezdeti feltételnek eleget tévő teljes megoldások, azaz egybeesnek I -n.

Az alábbi tétel mutatja, hogy van alaprendszer, így a megoldástér dimenziója n , és egy alaprendszer meghatározása ekvivalens az

$$U' = A(t)U, \quad U(\tau) = \mathbb{I}$$

operátor értékű $U: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ függvényekre vonatkozó Cauchy-feladat, a *rezolvens egyenlet* egyetlen teljes megoldásának meghatározásával. A rezolvens egyenlet megoldásának (mint operátornak) a mátrixát *alpmátrixnak* nevezzük.

11.4.5. Tétel. Az előző pont jelöléseivel, ha $\xi \in \mathbb{K}^n$, akkor $t \mapsto U(t)\xi$ a homogén $x' = A(t)x$ egyenlet $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételhez tartozó teljes megoldása. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy bázisa $\mathbb{K}^n$ -nek, akkor a $t \mapsto U(t)\xi_j$ függvények alaprendszert alkotnak. Megfordítva, ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ egy alaprendszer, legyen $\Psi(t)$ olyan lineáris leképezés, amely mátrixának oszlopai $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Ekkor $t \mapsto \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}$ a rezolvens egyenlet megoldása.

Bizonyítás. Tekintsük a rezolvens egyenlet egy teljes megoldását. Mivel az egyenlet lineáris, U az egész I -n van értelmezve. Bármely $\xi \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = \frac{dU(t)}{dt}\xi = A(t)U(t)\xi$$

és $U(\tau)\xi = \xi$. Az unicitás miatt így $\varphi(t) = U(t)\xi$ az $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételhez tartozó φ teljes megoldása az $x' = A(t)x$ egyenletnek. Minden ξ_i -re alkalmazva ezt, kapjuk, hogy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ alaprendszer.

Megfordítva, $t \mapsto \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}$ a rezolvens egyenlet megoldása. $\square$

11.4.6. A konstans variálása. Keressük az inhomogén

$$x' = A(t)x + b(t), \quad t \in I$$

differenciálegyenlet egy megoldását az alpmátrix ismeretében. Ha U a rezolvens egyenlet egy megoldása, keressük az inhomogén egyenlet megoldását

$$\varphi(t) = U(t)c(t), \quad c: I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

alakban. Mivel

$$\varphi'(t) = U'(t)c(t) + U(t)c'(t),$$

és $U'(t) = A(t)U(t)$, azt kapjuk, hogy $U(t)c'(t) = b(t)$, azaz $c'(t) = U(t)^{-1}b(t)$, aminek eleget tesz a

$$c(t) = \int_{\tau}^t U(s)^{-1}b(s) ds$$

függvény, és így

$$\varphi(t) = U(t) \int_{\tau}^t U(s)^{-1} b(s) ds$$

Ezzel a heurisztikus gondolatmenettel valóban megoldást kapunk és az alábbi tételhez jutunk:

11.4.7. Tétel. *A lineáris alaprobléma jelöléseivel az inhomogén egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat teljes megoldása*

$$(1) \quad \varphi(t) = U(t)\xi + U(t) \int_{\tau}^t U(s)^{-1} b(s) ds, \quad t \in I,$$

ahol U a rezolvens egyenlet egyetlen teljes megoldása. Ha ξ befutja $\mathbb{K}^n$ -et, akkor az inhomogén egyenlet összes teljes megoldását megkapjuk.

Bizonyítás. Nyilván $\varphi(\tau) = \xi$. A szuperpozíció elve szerint az inhomogén egyenlet minden teljes megoldását megkapjuk, ha az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet valamely teljes megoldását. A jobb oldal első tagja teljes megoldása a homogén egyenletnek, a második tag pedig az inhomogén egyenletnek. $\square$

11.4.8. A csatolás csökkentése. Ha az együtthatómátrix nem függ t -től, azaz a differenciálegyenlet

$$x' = Ax + b(t), \quad t \in I$$

alakú, az egyenlet a csatolás csökkentésével megoldható. Válasszuk meg a T lineáris transzformációt úgy, hogy $TAT^{-1} = B$ felső (vagy alsó) háromszög-mátrixú (például Jordan-normálalakú) legyen. Az $y = Tx$ helyettesítéssel

$$y' = By + Tb(t),$$

és az egyik egyenlet csak egy ismeretlen függvényt tartalmaz. Ezzel kezdve az egyenletrendszer fokozatos visszahelyettesítéssel könnyen megoldható.

11.4.9. Definíció. *Exponenciális polinomnak nevezünk egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt, ha előállítható*

$$f(t) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} p_j(t)$$

alakban, ahol $\lambda_j \in \mathbb{C}$, p_j pedig komplex együtthatós polinom, ha $j = 1, 2, \dots, n$.

* **11.4.10. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} p_j(t), \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad \text{ha} \quad j \neq k$$

exponenciális polinom nulla egy I nemüres nyílt intervallum minden pontjában. Ekkor $p_j(t) \equiv 0$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, azaz a

$$t \mapsto t^k e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots$$

komplex értékű függvények lineárisan függetlenek I -n.

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben $e^{-\lambda_1 t}$ -vel szorozva, kapjuk, hogy $p_1(t) \equiv 0$ az I intervallumon, így mindenütt. Tegyük fel indirekt, hogy $n - 1$ -re igaz az állítás, de n -re nem. Szorozva $e^{-\lambda_n t}$ -vel

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{(\lambda_j - \lambda_n)t} p_j(t) + p_n(t) = 0, \quad \text{ha } t \in I.$$

Mivel $e^{\lambda t} p(t)$ deriválásakor a polinom főegyütthatója mindig λ -val szorzódik, addig differenciálva, amíg $p_n(t)$ deriváltja nulla nem lesz, ellentmondásra jutunk. $\square$

11.4.11. Tétel. *A lineáris alapprobléma jelöléseivel, ha b minden koordinátája exponenciális polinom, akkor $x' = Ax + b(t)$ minden megoldása is exponenciális polinom. Ha $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a b koordinátaiban legfeljebb r -edfokú, és λ az A -nak k -szoros ($k \geq 0$) sajátértéke, akkor $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a megoldás koordinátaiban legfeljebb $r + k$ -adfokú. (Azonosan nulla polinom foka -1 .)*

* **Bizonyítás.** A csatolás csökkentésére az $y = Tx$ komplex lineáris helyettesítéssel az $y' = By + Tb(t)$ egyenletre térünk át, amelyben B alsó háromszög mátrix. Nyilván $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a $Tb(t)$ koordinátaiban is legfeljebb r -edfokú. Ugyanezen okból elég megmutatnunk, hogy az y megoldás y_i koordinátaiban az $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja legfeljebb $r + k$ -adfokú. Haladjunk i szerinti indukcióval. Az i -edik egyenlet $y'_i = \lambda' y_i + E_i(t)$ alakú, ahol E_i exponenciális polinom. A $\lambda' = \lambda$ eset az egyenletek közül pontosan k darabban lép fel. Megmutatjuk, hogy ha az i -edik egyenletben $\lambda' = \lambda$, akkor $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja y_i -ben legfeljebb eggyel magasabb fokú, mint az E_i -ben, ha pedig $\lambda' \neq \lambda$, akkor nem magasabb fokú. Ebből adódik az állítás, mert E_i a Tb koordinátáinak és az y_j , $j < i$ függvényeknek a lineáris kombinációja. Az i -edik egyenlet megoldása a konstans variálásával $c(t)e^{\lambda' t}$ alakú, ahol

$$c(t) = \int E_i(t) e^{-\lambda' t} dt.$$

Felhasználva, hogy az integrandus exponenciális polinom, amelyben az előző tétel bizonyítása szerint csak a nulla kitevőhöz tartozó polinom foka csökken eggyel differenciáláskor, a többi nem változik, kapjuk, hogy integráláskor meg csak ennek a foka nőhet eggyel. Így y_i -ben csak az $e^{\lambda' t}$ együttható-polinomjának foka nagyobb eggyel, mint E_i -ben. $\square$

11.4.12. Konstans együtthatós egyenlet. Az $x' = Ax$ konstans együtthatós homogén lineáris egyenlet esetén az előző tétel alapján egy alaprendszer meghatározható a határozatlan együtthatók módszerével. A konstans variálásával megkaphatjuk az $x' = Ax + b(t)$ inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ha b koordinátái exponenciális polinomok, akkor gyakran jobb erre a célra is az előző tételt használni, és a határozatlan együtthatók módszerével dolgozni. A szuperpozíció elve szerint az a minden λ sajátértékére külön dolgozhatunk.

→ **11.4.13. Feladat.** Oldjuk meg:

$$(1) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 5, \\ x'_2 = 2x_1 + 4x_2 & x_2(0) = 5; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2, & x_1(0) = -3, \\ x_2' = -8x_1 - 3x_2, & x_2(0) = 2. \end{cases}$$

11.4.14. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet. Legyen I egy nyílt intervallum, $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) folytonos függvények. A skalár értékű x -re vonatkozó

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)} + b(t)$$

n -edrendű lineáris egyenlet teljes megoldásait a szuperpozíció elve szerint úgy kaphatjuk, hogy az egyenlet egy teljes megoldásához hozzáadjuk a megfelelő n -edrendű homogén lineáris

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)}$$

egyenlet összes teljes megoldását. Az eredeti egyenlet az átviteli elv szerint egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel ekvivalens, amelyhez a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

mátrix, illetve vektor tartozik. Az *alaprendszer* itt is a homogén egyenlet I -n értelmezett megoldásainak egy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárisan független rendszere. A homogén egyenlet minden megoldása ezek lineáris kombinációja. A $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ teljes megoldások pontosan akkor alkotnak alaprendszert, ha a

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

mátrix determinánása, a

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t)$$

Wronski-determináns nem nulla valamely $t \in I$ -re. Ha ez a determináns egy t -re nem nulla, akkor egyetlen t -re sem. A *konstans variálásának* módszerét alkalmazva itt a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i'(t)\varphi_i^{(j)}(t) &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-2) \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) &= b(t) \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk a c_i' függvényekre, amelynek determinánása éppen a Wronski-determináns, ami alaprendszer esetén nem nulla.

Ha az n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek ismerjük egy φ nem nulla megoldását, akkor az egyenlet rendje $x(t) = \varphi(t) \int_{\tau}^t y(s) ds$ helyettesítéssel csökkenthető.

11.4.15. Tétel. Legyen

$$x^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)}$$

egy n -edrendű konstanssegýtthatós lineáris egyenlet, és legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ a

$$z^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

karakterisztikus egyenlet egy k -szoros gyöke. Ekkor a

$$t \mapsto t^j e^{\lambda t} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1)$$

függvények a differenciálegyenlet (komplex) megoldásai.

* **Bizonyítás.** A

$$p(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

polinomot $p(z) = q(z)(z - \lambda)^k$ alakban írhatjuk. Ha D jelöli a differenciálás operátorát a végtelen sokszor differenciálható függvények vektorterén, akkor a differenciálegyenlet ezen a téren

$$q(D)(D - \lambda \mathbb{I})^k x = 0$$

alakba írható. Mivel

$$(D - \lambda \mathbb{I}) \frac{t^j}{j!} e^{\lambda t} = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t},$$

ha $j > 0$ és $(D - \lambda \mathbb{I}) e^{\lambda t} \equiv 0$, látható, hogy a megadott függvények valóban megoldások.

□

11.4.16. Megjegyzés. A p minden zérushelyére felírva a $t^j e^{\lambda t}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ függvényeket, a differenciálegyenlet egy alapszisztemét kapjuk. Valós a_j együtthatók esetén könnyen áttérhetünk valós alapszisztemre úgy, hogy a nem valós $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ zérushelyekhez tartozó függvényeket kombináljuk:

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} + t^j e^{\bar{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} - t^j e^{\bar{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

11.4.17. Vegyes módszerek. A $\sum_{j=0}^n a_j(t) x^{(j)} = b(t)$ lineáris egyenlet rendjének csökkentésére megpróbálhatjuk integrálni az egyenlet mindkét oldalát. Ha a bal oldalon parciális integrálások után nem marad olyan tag, amely x primitív függvényét tartalmazza, akkor egy eggyel kisebb rendű lineáris egyenletet kaptunk. Esetleg hasznos lehet az egyenletet végigsorozni egy t -től függő függvénnyel.

Ha $a_j(t) = c_j t^j$, akkor *Euler-egyenletről* beszélünk, és $t = e^s$ helyettesítéssel konstanssegýtthatós egyenletet kapunk.

→ **11.4.18. Feladat [10].** Oldjuk meg:

- (1) $xy'' + 2y' - xy = 0;$
- (2) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0;$
- (3) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0;$
- (4) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0;$
- (5) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0;$
- (6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0.$

→ **11.4.19. Feladat [10].** Oldjuk meg:

- (1) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x;$
- (2) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2;$
- (3) $(x + 1)xy'' + (x + 2)y' - y = x + 1/x.$

→ **11.4.20. Feladat [10].** Oldjuk meg:

- (1) $y'' - y - 2y = 0;$
- (2) $y'' - 4y' + 5y = 0;$
- (3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

→ **11.4.21. Feladat [10].** Oldjuk meg:

- (1) $y'' - 2y/x^2 = 0;$
- (2) $y'' - 3y'/x + 5y/x^2 = 0;$
- (3) $y'' + 7y'/x + 9y/x^2 = 0.$

11.4.22. Feladat [10]. Határozzuk meg az $x' = Ax$ differenciálegyenlet-rendszer egy alaprendszerét Jordan-normálalak segítségével.

11.5 Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció egy integráltranszformáció, integrálás segítségével $\mathbb{R}^+$ -on értelmezett, komplex értékű függvényekhez komplex változós függvényeket rendel. A mérnöki gyakorlatban előszeretettel használják lineáris közönséges és bizonyos parciális differenciálegyenletek megoldására. Ennek az az oka, hogy a transzformáció a differenciálást a független változóval való szorzásba viszi, így a differenciálegyenletből algebrai egyenletet kapunk. Ezt megoldva, a megoldás egyszerűen egy Laplace-transzformáltakat tartalmazó táblázatból való „visszakeresésre” redukálódik. Persze, néhány alaptulajdonságot ismerni kell, mert a táblázat nem tartalmazhat minden függvényt. Itt az alaptulajdonságok ismertetésére és a legalapvetőbb példákra szorítkozunk.

11.5.1. Laplace-transzformáció. A Laplace-transzformáció $\mathbb{R}^+$ -on értelmezett, komplex értékű függvényekhez komplex változós függvényeket rendel. Szokásos a Laplace-transzformáltat a megfelelő nagybetűvel jelölni, azaz az f , g , f_1 , f_2 stb. függvény Laplace-transzformáltja F , G , F_1 , F_2 stb. Csak olyan f függvénynek definiáljuk a Laplace-transzformáltját, amely minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon abszolút integrálható, az

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

improprius integrállal azon s komplex számokra, amelyekre az improprius integrál abszolút konvergens; ez azzal ekvivalens, hogy az integrál mint Lebesgue-integrál (lásd [34]) létezik. (Megtehetnénk, hogy csak az integrál konvergenciáját követeljük meg, de ekkor a tételek megfogalmazása és bizonyítása is bonyolultabb lenne; lásd Doetsch [14] könyvét.) Mivel az integrál nem változik, ha az integrandust egy nulla halmazon tetszőlegesen megváltoztatjuk, $f(0)$ értékét tetszőlegesen definiálhatjuk. Célszerű lesz az $f(x) = 0$, ha $x < 0$ megállapodással élni, így f az egész számegyenesen értelmezve van. [Ha $s = x + iy$, ahol x és y valósak, akkor

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt,$$

így a Laplace-transzformált az $\Re(s) = x$ egyenesen lényegében a $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ függvény Fourier-transzformáltja; lásd [34].]

11.5.2. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel, ha $F(s_0)$ értelmezve van, akkor minden s komplex számra, amelyre $\Re(s) \geq \Re(s_0)$, a Laplace-transzformált értelmezve van, így a Laplace-transzformált értelmezési tartománya egy zárt vagy nyílt jobb oldali félsík (esetleg üres, vagy az egész komplex sík).

* **Bizonyítás.** Ha $\int_0^{\infty} |e^{-s_0 t} f(t)| < \infty$, akkor $s_0 = x_0 + iy_0$, $s = x + iy$ jelöléssel

$$\int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{-xt} f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |e^{-x_0 t} f(t)| dt < \infty. \quad \square$$

11.5.3. Megjegyzés. Egy függvény Laplace-transzformáltja nem lehet tetszőleges analitikus függvény: például a Riemann–Lebesgue-lemmából (lásd [34]), ha $F(s)$ értelmezve van és $\Re(s) = x$, akkor $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x + iy) = 0$. Így például a konstans 1 függvény semmilyen függvénynek nem Laplace-transzformáltja.

11.5.4. Példa. Tekintsük a $\Theta(t) = 1$, ha $t \geq 0$ és $\Theta(t) = 0$, ha $t < 0$ összefüggéssel definiált Heaviside-függvényt. Ha $\Re(s) \leq 0$, akkor $|e^{-st} \Theta(t)| \geq 1$, ha $t \geq 0$, így nem abszolút integrálható. Ha viszont $\Re(s) = x > 0$, akkor $|e^{-st} \Theta(t)| \leq e^{-xt}$ és

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) = \frac{1}{s}.$$

11.5.5. Feladat [5]. Adjunk példát olyan függvényre, amelynek a Laplace-transzformáltja a $\Re(s) \geq 0$ zárt félsíkon van értelmezve.

11.5.6. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel F analitikus az értelmezési tartománya belső pontjaiban.

* **Bizonyítás.** Hasonlóan bizonyítható, mint a Γ függvény analitikussága a jobb félsíkon. $\square$

11.5.7. Tétel: a Laplace-transzformáció alaptulajdonságai. Az előző definíció jelöléseivel,

- (1) ha $c \in \mathbb{C}$ és $g = cf$, akkor $G(s) = cF(s)$ minden olyan s -re, amelyre $F(s)$ értelmezve van (homogenitás);
- (2) ha $f = f_1 + f_2$, akkor $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$ minden olyan s -re, amelyre $F_1(s)$ és $F_2(s)$ értelmezve vannak (additivitás);
- (3) ha $g = \bar{f}$, akkor $G(s) = \overline{F(\bar{s})}$ minden olyan s -re, amelyre $F(s)$ értelmezve van (konjugálás);
- (4) ha $c > 0$ és $g(t) = f(ct)$, akkor $G(s) = F(s/c)/c$ minden olyan s -re, amelyre $F(s/c)$ értelmezve van (nyújtás);
- (5) ha $c > 0$ és $g(t) = f(t - c)$, akkor $G(s) = e^{-cs}F(s)$ minden olyan s -re, amelyre $F(s)$ értelmezve van (eltolás);
- (6) ha $c \in \mathbb{C}$ és $g(t) = e^{ct}f(t)$, akkor $G(s) = F(s - c)$ minden olyan s -re, amelyre $F(s - c)$ értelmezve van (moduláció).

Bizonyítás. Minden állítás bizonyítása egyszerű számolás. $\square$

11.5.8. Példa. Legyen $c > 0$ konstans. Ekkor $f(t) = \Theta(t - c)$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = e^{-cs}/s$, ha $\Re(s) > 0$ függvény.

11.5.9. Példák. Legyen $c \in \mathbb{C}$ konstans. Ekkor

- (1) $f(t) = e^{ct}$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = 1/(s - c)$, ha $\Re(s) > \Re(c)$ függvény;
- (2) $f(t) = \text{ch}(ct) = (e^{ct} + e^{-ct})/2$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = s/(s^2 - c^2)$, ha $\Re(s) > |\Re(c)|$ függvény;
- (3) $f(t) = \text{sh}(ct) = (e^{ct} - e^{-ct})/2$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = c/(s^2 - c^2)$, ha $\Re(s) > |\Re(c)|$ függvény;
- (4) $f(t) = \cos(ct) = (e^{ict} + e^{-ict})/2$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = s/(s^2 + c^2)$, ha $\Re(s) > |\Im(c)|$ függvény;
- (5) $f(t) = \sin(ct) = (e^{ict} - e^{-ict})/(2i)$ Laplace-transzformáltja az $F(s) = c/(s^2 + c^2)$, ha $\Re(s) > |\Im(c)|$ függvény.

11.5.10. Példa. Számítsuk ki egyetlen szinuszhullám, azaz az $f(t) = \sin t$, ha $0 \leq t \leq 2\pi$ és 0 egyébként összefüggéssel definiált függvény Laplace-transzformáltját. (Ilyen, egy korlátos intervallumon kívül nulla függvény Laplace-transzformáltja az egész komplex síkon értelmezve van.) Legyen $g(t) = \sin t$, ha $t \geq 0$ és $h(t) = g(t - 2\pi)$. Ekkor $G(s) = 1/(s^2 + 1)$ és $H(s) = e^{-2\pi s}/(s^2 + 1)$, így mivel $f = g - h$,

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}, \quad \text{ha } \Re(s) > 1.$$

Ez a gondolat visszafelé is alkalmazható, egy $h(t) = f(t + c)\Theta(t)$, $c > 0$ függvény Laplace-transzformáltjának kiszámítására: kiszámítjuk a $g(t) = f(t)$, ha $0 \leq t < c$ és 0 egyébként összefüggéssel definiált függvény Laplace-transzformáltját, majd felhasználjuk, hogy $h(t - c) = f(t) - g(t)$.

11.5.11. Egyértelműségi tétel. Tegyük fel, hogy f és g Laplace-transzformáltja értelmezve van a $\Re(s) > x_0$ félsíkon, és megegyezik egy, a félsík belsejében fekvő végtelen kompakt halmazon. Ekkor $f = g$ majdnem mindenütt (azaz egy nullahalmaztól eltekintve).

* **Bizonyítás.** A komplex függvénytanból tudjuk, hogy ha két analitikus függvény megegyezik egy tartomány belsejében fekvő végtelen kompakt halmazon, akkor az egész tartományon megegyeznek, így a Laplace-transzformáltak megegyeznek az egész $\Re(s) > x_0$ félsíkon. Mivel $x > x_0$ esetén a Laplace-transzformáltak különbsége az $x + iy$, $y \in \mathbb{R}$ egyenesen lényegében megegyezik a $t \mapsto e^{-xt}(f(t) - g(t))$ függvény Fourier-transzformáltjával, a Fourier-transzformáltra vonatkozó inverziós tétel (lásd [34]) szerint $e^{-xt}(f(t) - g(t))$ majdnem minden t -re nulla. Innen f és g majdnem mindenütt megegyeznek. $\square$

11.5.12. Példa. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $f(t) = t^c$, ha $t \geq 0$. Ha $c \leq -1$, akkor a függvény nem integrálható $[0, 1]$ -en, így nem lehet Laplace-transzformáltja. Ha viszont $c > -1$, akkor a függvény minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon (abszolút) integrálható. Ha $x > 0$, akkor $u = xt$ helyettesítéssel

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^c dt = \frac{1}{x^{c+1}} \int_0^\infty u^c e^{-u} du = \frac{\Gamma(c+1)}{x^{c+1}}$$

a Γ függvény definíciója szerint. Az egyértelműségi tétel szerint

$$F(s) = \frac{\Gamma(c+1)}{s^{c+1}}, \quad \text{ha } \Re(s) > 0.$$

11.5.13. Megjegyzés. Az előző példa segítségével minden racionális törtfüggvényre meg tudjuk határozni, hogy minek a Laplace-transzformáltja: t^n , $n \in \mathbb{N}$ Laplace-transzformáltja $n!/s^{n+1}$, innen modulációval $e^{ct}t^n$ Laplace-transzformáltja $n!/(s-c)^{n+1}$. Egy racionális törtfüggvényt (a komplex számok felett) parciális törtekre bontva, a tagok visszatranszformálhatók.

11.5.14. Konvolúció. Legyenek $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon abszolút integrálhatóak. A $h = f * g$ konvolúciójukat az $h(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$ összefüggéssel értelmezzük, ahol az integrál létezik. A integrál tulajdonságait felhasználva következik, hogy az f majdnem mindenütt értelmezve van és abszolút integrálható minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon. Egyszerű számolás mutatja, hogy a konvolúció-képzés kommutatív és asszociatív művelet.

11.5.15. Konvolúciótétel. Az előző definíció feltételeivel, ha $F(s)$ és $G(s)$ léteznek, akkor $H(s)$ is, és $H(s) = F(s)G(s)$.

* **Bizonyítás.** A Lebesgue-integrál tulajdonságait használva, $v = t - u$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u)g(t-u) du dt = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-su} e^{-s(t-u)} f(u)g(t-u) du dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-su} f(u) \int_{-\infty}^\infty e^{-s(t-u)} g(t-u) dt du \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-su} f(u) \int_{-\infty}^\infty e^{-sv} g(v) dv du = F(s)G(s). \quad \square \end{aligned}$$

11.5.16. Következmény: integrálás. Ha $h(t) = \int_0^t f(u) du$ és $F(s)$ létezik valamely s -re, amelyre $\Re(s) > 0$, akkor $H(s)$ is létezik és $H(s) = F(s)/s$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a konvolúciótételt $g = \Theta$ választással. $\square$

11.5.17. Következmény: differenciálás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy f minden $t > 0$ -ra n -szer differenciálható, valamint $g = f^{(n)}$ abszolút integrálható minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon és $G(s)$ létezik valamely s -re, amelyre $\Re(s) > 0$. Ekkor létezik $f(0+)$ és $f(0) = f(0+)$ definícióval léteznek az $f^{(k)}(0)$ jobb oldali deriváltak és $f^{(k)}(0+) = f^{(k)}(0)$, ha $k < n$, továbbá

$$G(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

* **Bizonyítás.** Az $n = 1$ esetben az előző tételből, mivel $f(t) - f(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t f'(u) du$, létezik $f(0+)$, és így az $f(0) = f(0+)$ definícióval $f(t) - f(0)\Theta(t) = \int_0^t f'(u) du$. Alkalmazva az előző tételt, kapjuk az $n = 1$ esetet. Ismételten alkalmazva az eddig bizonyítottakat, indukcióval kapjuk, hogy az $f^{(k)}(0+)$ határértékek mind léteznek, és a Laplace-transzformáltra vonatkozó állítás fennáll, de $f^{(k)}(0)$ helyett $f^{(k)}(0+)$ -szal; csak azt kell tehát bizonyítanunk, hogy ez a két érték megegyezik. De ha egy h függvényre $\lim_{t \downarrow 0} h'(t)$ és $h(0+)$ létezik, $h(0) = h(0+)$, akkor

$$\frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(\tau), \quad 0 < \tau < t, \quad \text{ha } t > 0$$

miatt a $h'(0)$ jobb oldali derivált $h'(0+)$. $\square$

11.5.18. Megjegyzés. Ezt a tételt alkalmazzuk a leggyakrabban differenciálegyenletek megoldásánál.

11.5.19. Tétel: a Laplace-transzformált deriváltja. Tegyük fel, hogy f Laplace-transzformáltja értelmezve van, ha $\Re(s) > x$. Ekkor a $g(t) = (-t)^n f(t)$ függvényre $G(s) = F^{(n)}(s)$, ha $\Re(s) > x$.

* **Bizonyítás.** Lásd Doetsch [14] könyvét, 37. oldal. $\square$

11.5.20. Szorzástétel. Tegyük fel, hogy $f_1, f_2: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ minden $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon abszolút integrálhatóak. Ha az $|f_1|^2$ illetve $|f_2|^2$ Laplace-transzformáltja értelmezve van a $2x_1$ illetve $2x_2$ valós számokra, akkor $F_1(s)$ illetve $F_2(s)$ értelmezve van, ha $\Re(s) > x_1$ illetve $\Re(s) > x_2$, és ha $f = f_1 f_2$, akkor $F(s)$ értelmezve van, ha $\Re(s) > x_1 + x_2$, továbbá $x_1 + x_2 < x < \Re(s)$ esetén

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x + iy) F_2(s - x - iy) dy.$$

* **Bizonyítás.** Lásd Doetsch [14] könyvét, 230. oldal. $\square$

11.5.21. Inverziós formula. Tegyük fel, hogy f Laplace-transzformáltja értelmezve van, ha $s = x + iy$. Ha $t \in \mathbb{R}$ -nek van olyan környezete, ahol f korlátos változású (azaz két monoton növekedő függvény különbsége), akkor

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-Y}^Y e^{ts} F(x + iy) dy.$$

* **Bizonyítás.** Lásd Doetsch [14] könyvét, 169. oldal. $\square$

Valószínűségszámítás és statisztika

Ez a fejezet két paragrafusból áll. Az első a valószínűségszámítás, a második pedig a matematikai statisztika alapjait tárgyalja nagyon röviden.

12.1 Valószínűségszámítás

Ez a paragrafus a valószínűségszámítás alapjaival foglalkozik.

12.1.1. Valószínűségi mező. Az Ω halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *eseményalgebrának* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (3) ha $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, 2, \dots$), akkor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Az Ω elemeit *elemi eseményeknek*, $\mathcal{A}$ elemeit *eseményeknek* nevezzük. Az $\emptyset$ a *lehetetlen esemény*, az Ω pedig a *biztos esemény*. Az $\Omega \setminus A$ esemény az A esemény *ellentettje*, amit gyakran A' -vel jelölünk. Ha két esemény diszjunkt, akkor *kizáró eseményeknek* nevezzük őket; *teljes eseményrendszer* alatt eseményeknek egy olyan sorozatát értjük, amelyek páronként kizárják egymást, és egyesítésük a biztos esemény. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast *valószínűségi mezőnek*, $\mathbb{P}$ -et pedig *valószínűségnek* nevezzük, ha $\mathbb{P}$ az eseményeken értelmezett, $[0, 1]$ -be képező függvény, amelyre

- (4) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (5) ha az A_i , $i = 1, 2, \dots$ események páronként kizáróak, akkor

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-additivitás}).$$

Események uniója helyett szokás az *összegükről*, metszete helyett pedig a *szorzatukról* beszélni, és a megfelelő $+$ illetve $\cdot$ jelöléseket használni.

* **12.1.2. Mértéktér.** A valószínűségi mező egy általánosabb fogalomnak, a *mértéktérnek* speciális esete. Itt az alaphalmazt X -szel szokás jelölni, az (1)–(3) feltételeknek eleget tévő $\mathcal{A}$ halmazrendszert σ -algebrának, X elemeit egyszerűen pontoknak, az $(X, \mathcal{A})$ párt pedig *mérhető térnek* nevezzük. A *mértéktér* egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármas, ahol $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, a μ *mérték* pedig egy $\mathcal{A}$ -t $[0, +\infty]$ -be képező függvény, amelyre (5) teljesül; (4) helyett azt kötjük ki, hogy $\mu(\emptyset) = 0$, mert (4) hiányában ez nem adódik (5)-ből.

12.1.3. Klasszikus valószínűségi mező. Ha Ω véges halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll, és minden elemi esemény valószínűsége egyforma, akkor *klasszikus valószínűségi mezőről* beszélünk. Ekkor egy A esemény valószínűségét megkapjuk, ha A elemeinek számát (a „kedvező esetek száma”) osztjuk Ω elemeinek számával (az „összes esetek száma”).

Abból, hogy Ω véges halmaz, még nem következik, hogy minden elemi esemény valószínűsége egyforma. (Például szabálytalan érmével, rajzszezzel, szezzel vagy ólmozott kockával dobunk, fiú vagy lány születik stb.)

12.1.4. Példa. Kockadobásnál hat elemi esemény van, tehát

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Események például: „páros számot dobni”, „háromnál kisebbet dobni” stb. Ha az elemi események valószínűsége egyforma, akkor ezek valószínűsége $1/2$, $1/3$ stb.

12.1.5. Geometriai valószínűségek. Gyakran Ω az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza, az események Ω mérhető részhalmazai, a valószínűség pedig a mérték (vagy valamilyen „geometriai mérték”) konstansszorososa. Ilyen esetekben *geometriai valószínűségről* beszélünk.

12.1.6. Példa. Bekötött szemmel 30 cm átmérőjű, kör alakú céltáblára lövünk, amíg el nem találjuk. Mi a valószínűsége, hogy tízest lőttünk, ha a tízes kör átmérője 3 cm? A területek arányából adódik a valószínűség, vagyis 0,01 lesz.

12.1.7. Feladat [8]. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy racionális számot találunk el.

12.1.8. Feladat [6]. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az egységnégyzetből egy olyan pontot találunk el, amelynek egyik koordinátája racionális.

12.1.9. Feladat [8]. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy olyan számot találunk el, amely felírható úgy hármas számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest.

12.1.10. Feladat [5]. A $[0, 1]$ intervallum közepéből kiveszünk egy $1/4$ hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó két zárt intervallum közepéből kiveszünk egy-egy $1/4^2$ hosszúságú nyílt intervallumot stb. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy olyan számot találunk el, amely a visszamaradó halmazban van.

12.1.11. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Ekkor események különbsége, véges vagy végtelen sorozatának az uniója és metszete is esemény.

* **Bizonyítás.**

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

miatt $\mathcal{A}$ -ból nem vezet ki a véges unióképzés. Most a

$$\bigcap_i A_i = \left(\bigcup_i A'_i \right)'$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Végül $A \setminus B = A \cap B'$ miatt $\mathcal{A}$ -ból nem vezet ki a különbségképzés. $\square$

12.1.12. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Ekkor

- (1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- (2) események bármely véges, páronként diszjunkt rendszerére

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \quad (\text{additivitás});$$

- (3) ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotonitás), és $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;

(4) események bármely (véges vagy végtelen) sorozatára

$$\mathbb{P}(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-szubadditivitás});$$

(5) események bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ sorozatára

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i);$$

(6) események bármely szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sorozatára

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Az (5) és (6) tulajdonságokat szokás a *valószínűség folytonosságának* nevezni.

* **Bizonyítás.** (1) következik abból, hogy

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$$

(2) következik (1)-ből és a definícióból, $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$ választással. (3) azon múlik, hogy A és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig B . (4) bizonyításához azt kell észrevenni, hogy $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)$, ha $i > 1$ jelöléssel $\cup_i A_i = \cup_i B_i$ és a B_i -k diszjunktak. (5) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a B_i -k diszjunktak, így

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{i=1}^n B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(6)-öt megkapjuk, ha (3)-at és (5)-öt alkalmazzuk a $B_i = A'_i$ halmazokra. $\square$

12.1.13. Feltételes valószínűség. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az A esemény B -re vonatkozó *feltételes valószínűségén* a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

számot értjük. Nyilván $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$, ez a *valószínűségek szorzási szabálya*. Ha $B_1, B_2, \dots$ egy teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(B_k) > 0$ minden k -ra, és A egy esemény, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k),$$

ez a *teljes valószínűség tétele*. Ha még $\mathbb{P}(A) > 0$ is teljesül, akkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)},$$

ez a *Bayes-tétel*.

12.1.14. Függetlenség. Egy valószínűségi mező A_i eseményeit *függetlennek* nevezzük, ha különböző $i_1, i_2, \dots, i_n$ indexek esetén

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Az A_i eseményeket *páronként függetlennek* nevezzük, ha bármely kettő közülük független.

12.1.15. Feladat [4]. Kockadobásnál határozzuk meg annak valószínűségét, hogy háromnál nagyobbat dobtunk, feltéve, hogy páros számot dobtunk.

12.1.16. Feladat [4]. Két különböző szabályos pénzdarabot feldobunk. A megfelelő elemi valószínűségi mezőben adjunk meg három olyan eseményt, amelyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

12.1.17. Feladat [5]. Mi a valószínűbb, az, hogy egy szabályos kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk, vagy az, hogy két kockával 24-szer dobva, legalább egyszer két hatost dobunk?

* **12.1.18. Feladat [11].** Határozzuk meg pókerban annak valószínűségét, hogy osztáskor lapunk 1 pár, 2 pár, drill stb., royalflush.

12.1.19. Feladat [6]. Péter pénzét három borítékban tartja. Az elsőben két ötszáz, a másodikban egy ötszáz és egy ezres, a harmadikban egy ötszáz és három ezres van. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választva egy borítékot és abból egy bankjegyet, az ezres lesz?

12.1.20. Feladat [5]. Egy városban ugyanannyi férfi él, mint nő. 100 férfiból 5, míg 10 000 nóból 25 színvak. Egy színvak kartonját kiválasztva, az milyen valószínűséggel lesz nő?

12.1.21. Majdnem biztosan. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Ha T egy, az elemi eseményeken értelmezett tulajdonság (igaz–hamis értékű függvény), akkor gyakran fogjuk azt mondani, hogy T *majdnem biztosan* vagy *egy valószínűséggel* teljesül Ω -n. Ez azt jelenti, hogy azon elemi események halmaza, ahol T nem teljesül, vagy nincs értelmezve, esemény, és valószínűsége nulla. Például az, hogy az f és g függvények majdnem biztosan egyenlőek Ω -n, azt jelenti, hogy az $\{\omega: \omega \in \Omega, f(\omega) = g(\omega)\}$ halmaz komplementere esemény és nulla valószínűségű. Ezt a halmazt egyébként gyakran röviden, bár némileg pontatlanul $\{f = g\}$ -vel jelöljük. Hasonlóan értjük az $\{f < g\}$, $\{f < a\}$ stb. jelöléseket is.

12.1.22. Valószínűségi változó. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező Ω alaphalmazán értelmezett, valós értékű ξ függvényt akkor nevezünk *valószínűségi változónak*, ha minden $x \in \mathbb{R}$ -re értelmezve van az

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\}$$

függvény, a ξ valószínűségi változó F *eloszlásfüggvénye* vagy *eloszlása*, azaz ha $\{\xi < x\}$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re esemény (azokban az esetekben, amikor az Ω minden részhalmaza $\mathcal{A}$ -ban van, ez semmilyen megszorítást nem jelent, egyébként pedig egy gyenge feltétel, a gyakorlatban előforduló $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre mindig teljesül). Egy Ω -n értelmezett, $\mathbb{R}^k$ -beli értékű (azaz vektorértékű) ξ függvényt akkor nevezünk *valószínűségi változónak*,

ha a ξ_j koordinátafüggvényei valószínűségi változók; ennek az *eloszlásfüggvényét* vagy *eloszlását* az

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{\xi_j < x_j, j = 1, 2, \dots, k\}, \quad \text{ha } x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha az A eseményre $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor a ξ valószínűségi változónak az A -ra vonatkozó *feltételes eloszlásfüggvénye* az

$$F_A(x) = \mathbb{P}\{\xi < x | A\}$$

függvény.

*** 12.1.23. Mérhető függvények.** Mértéktéren a valószínűségi változónak a mérhető függvény felel meg: egy, az alaphalmazon értelmezett valós értékű f függvényt akkor nevezünk *mérhető függvénynek*, ha minden $x \in \mathbb{R}$ -re az $\{f < x\}$ halmaz mérhető. Az alaphalmazon értelmezett, $\mathbb{R}^k$ -beli értékű (azaz vektorértékű) f függvényt akkor nevezünk *mérhető függvénynek*, ha a koordinátafüggvényei mérhető függvények.

12.1.24. Baire-függvények. Emlékeztetünk rá, hogy az $\mathbb{R}^k$ -n értelmezett $\mathbb{R}^n$ -be képező függvények azon osztályainak metszete, amelyek tartalmazzák a folytonos függvényeket és nem vezet ki belőlük a pontonkénti konvergencia, a Baire-függvények osztálya. Ez egy nagyon bő osztály, az összes olyan függvények osztálya, amelyek a „folytonos függvényekből pontonkénti konvergenciával elérhetőek”; minden, a gyakorlatban előforduló függvény ide tartozik. A Baire-halmazok $\mathbb{R}^k$ -ban azok a halmazok, amelyeknek karakterisztikus függvénye Baire-függvény; ez nagyon széles halmazosztály, minden, a gyakorlatban előforduló halmaz ide tartozik. Mint említettük, megmutatható, hogy a Baire-függvények osztálya megegyezik az úgynevezett Borel-függvények osztályával, így a Baire-halmazok osztálya megegyezik az úgynevezett Borel-halmazok osztályával.

12.1.25. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ egy valószínűségi változó, $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ pedig Baire-függvény. Ekkor a $g(\xi)$ összetett függvény is valószínűségi változó.

*** Bizonyítás.** Következik a [34] könyv általánosabb 1.81 tételéből. $\square$

12.1.26. Következmény. Ha ξ és η valós értékű valószínűségi változók, $c \in \mathbb{R}$, akkor az $\xi + c$, $c\xi$, $|\xi|$, $1/\xi$, $\xi + \eta$, $\xi\eta$, $\max\{\xi, \eta\}$, $\min\{\xi, \eta\}$ függvények – ha mindenütt értelmezve vannak – valós értékű valószínűségi változók. $\square$

12.1.27. Tétel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, ξ_n , $n = 1, 2, \dots$ pedig valószínűségi változók egy sorozata. Ha minden $\omega \in \Omega$ -ra $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$, akkor a ξ függvény is valószínűségi változó.

*** Bizonyítás.** Következik a [34] könyv általánosabb 1.85 tételéből. $\square$

12.1.28. Példa. Az, hogy kockával hányat dobtunk, valószínűségi változó. Az is valószínűségi változó, ha az annyiadik prímszámot tekintjük eredménynek, ez az előző függvénye.

12.1.29. Példa. Hogy céltáblára löve vagy dartsban dobva hány pontot értünk el, valószínűségi változó. (Mindenkinél más a valószínűségi mező, és persze attól is függ, hogy hova célunk!)

12.1.30. Tétel. Egy valós értékű valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye monoton növekedő, balról folytonos, és

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Bizonyítás. Következik a valószínűség monotonitásából és folytonosságából. $\square$

12.1.31. Megjegyzés. Hasonlóan egy valószínűségi változó egyik koordinátájának vagy néhány koordinátájának az eloszlásfüggvényét megkaphatjuk, ha a többi koordinátával tartunk végtelenhez.

12.1.32. Medián, kvantilis és kvartilisek. Legyen egy valós értékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F . Ha $0 < q < 1$, akkor az a legnagyobb x valós szám, amelyre $F(x) \leq q$, a valószínűségi változó q -kvantilise. A $q = 1/2$ -hez tartozó kvantilis a *medián*, a $q = 1/3$ és $q = 2/3$ értékekhez tartozó kvartilisek a *tercilisek*, a $q = 1/4$, $q = 3/4$ értékekhez tartozó kvartilisek a *kvartilisek*, a $q = k/10$ értékekhez tartozó kvartilisek a *decilisek* stb.

12.1.33. Diszkrét valószínűségi változók. Ha egy valószínűségi változó által felvett értékek sorozatba rendezhetőek (felsorolhatóak), akkor *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük.

12.1.34. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke. Legyen ξ valós értékű diszkrét valószínűségi változó, vegye fel a $x_1, x_2, \dots$ értékeket $p_1, p_2, \dots$ valószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy ξ -nek létezik *várható értéke*, ha a

$$\sum_i p_i x_i$$

sor abszolút konvergens (ilyenkor az összeg nem függ az összeadás sorrendjétől). Ezt az értéket $\mathbb{E}(\xi)$ -vel jelöljük.

12.1.35. Segédteétel. Tegyük fel, hogy az $\eta \leq \zeta$ diszkrét valószínűségi változóknak létezik várható értéke. Ekkor $\mathbb{E}(\eta) \leq \mathbb{E}(\zeta)$. Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változóhoz léteznek olyan η és ζ diszkrét valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értéke és amelyekre $\eta \leq \xi \leq \zeta$. Ekkor pontosan egy olyan $\mathbb{E}(\xi)$ valós szám létezik, amelyre $\mathbb{E}(\eta) \leq \mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\zeta)$ minden olyan η, ζ diszkrét valószínűségi változóra, amelyre $\eta \leq \xi \leq \zeta$.

* **Bizonyítás.** Mivel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta) &= \sum_i y_i \mathbb{P}\{\eta = y_i\} = \sum_i \sum_j y_i \mathbb{P}\{\eta = y_i, \zeta = z_j\} \leq \sum_i \sum_j z_j \mathbb{P}\{\eta = y_i, \zeta = z_j\} \\ &= \sum_j \sum_i z_j \mathbb{P}\{\eta = y_j, \zeta = z_j\} = \sum_j z_j \mathbb{P}\{\zeta = z_j\} = \mathbb{E}(\zeta), \end{aligned}$$

kapjuk az első állítást. Innen következik, hogy létezik a második állításban szereplő tulajdonságú $\mathbb{E}(\xi)$ szám. Az $[y_i, z_j]$ intervallumot $\varepsilon > 0$ -nál kisebb részekre osztva, kapjuk, hogy csak egy.

12.1.36. Várható érték. Egy ξ valós értékű valószínűségi változó *várható értékét* az előző lemma feltételeinek teljesülése esetén az egyértelműen létező $\mathbb{E}(\xi)$ számot értjük. (Diszkrét valószínűségi változó esetén visszakapjuk az eredeti definíciót.) Ha ξ egy $\mathbb{R}^k$ -beli értékű vektor valószínűségi változó, akkor legyen

$$\mathbb{E}(\xi) = y, \quad \text{ahol} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_k), \quad y_j = \mathbb{E}(\xi_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

ha minden ξ_j koordinátának létezik várható értéke. A várható értékre az $\mathbb{M}(\xi)$ jelölés is szokásos. (Hasonlóan definiálható mérhető függvények mértéktéren vett integrálja.)

Fontos tudni, hogy egy valószínűségi változó várható értéke csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ; ez közvetlenül belátható a definíció alapján. A valószínűségi változó bármely Baire-függvényének a várható értéke is csak az eloszlásfüggvényétől függ. Valós értékű valószínűségi változó esetén ez az alábbi tételből következik.

*** 12.1.37. Tétel.** Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, ξ pedig Ω -n értelmezett valós értékű valószínűségi változó F eloszlásfüggvénnyel, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Baire-függvény. Ekkor $\mathbb{E}(g(\xi))$ pontosan akkor létezik, ha g abszolút integrálható F -re nézve és

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x).$$

Bizonyítás. Következik a [35] könyv általánosabb 9.2.2 tételéből. $\square$

12.1.38. Tétel: a várható érték tulajdonságai. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, ξ és η az Ω -n értelmezett valószínűségi változók, és $c \in \mathbb{R}$.

(1) Ha ξ csak az $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n$ értékeket veszi fel és $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tetszőleges függvény, akkor $g(\xi)$ -nek pontosan akkor van várható értéke, ha az alábbi sor abszolút konvergencia, és ekkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i \mathbb{P}\{\xi = x_i\} g(x_i);$$

(2) ξ -nek pontosan akkor létezik várható értéke, ha $|\xi|$ -nek, és $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$;

(4) ha $\mathbb{E}(|\xi|) = 0$, akkor $\xi = 0$ majdnem biztosan;

(5) ha $|\xi| \leq \eta$ és η -nak van várható értéke, akkor ξ -nek is;

(6) ha $\xi = \eta$ majdnem biztosan és $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, akkor $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta)$;

(7) ha $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, akkor $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$;

(8) ha $\mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(\eta)$ léteznek, akkor $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$.

*** Bizonyítás.** Diszkrét valószínűségi változókra az állítások közvetlenül kiszámolhatók, az általános eset pedig a definíció alapján, diszkrét valószínűségi változókkal való közelítéssel kapható. $\square$

12.1.39. Markov-egyenlőtlenség. Legyen a ξ nemnegatív valószínűségi változó várható értéke E . Ekkor minden $\lambda > 0$ valós számra

$$\mathbb{P}\{\xi \geq E\lambda\} \leq 1/\lambda.$$

Bizonyítás. Ellenkező esetben legyen η az a valószínűségi változó, amelynek értéke λ , ha $\xi \geq E\lambda$ és 0 egyébként. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) \geq \mathbb{E}(\eta) = E\lambda \mathbb{P}\{\xi \geq E\lambda\} > E,$$

ami ellentmondás. $\square$

12.1.40. Szórás. Egy ξ valós értékű valószínűségi változó *szórásnégyzete*

$$\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right),$$

a $\mathbb{D}(\xi)$ *szórása* pedig ennek négyzetgyöke. Nyilván $\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi)$ (a két oldal egyszerre létezik), mivel

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = \mathbb{E}\left(\xi^2 - 2\mathbb{E}(\xi)\xi + \mathbb{E}^2(\xi)\right) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi).$$

Innen az is következik, hogy ha $\mathbb{D}(\xi)$ létezik, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{D}(a\xi + b) = |a|\mathbb{D}(\xi)$, mivel

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(a\xi + b) &= \mathbb{E}((a\xi + b)^2) - \mathbb{E}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{E}(\xi^2) + 2ab\mathbb{E}(\xi) + b^2 - (a\mathbb{E}(\xi) + b)^2 \\ &= a^2(\mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi)).\end{aligned}$$

12.1.41. Momentumok. Egy ξ valós értékű valószínűségi változó k -adik *momentuma* $\mathbb{E}(\xi^k)$ (ha létezik), $k = 1, 2, \dots$

12.1.42. Csebisev-egyenlőtlenség. Legyen a ξ valószínűségi változó várható értéke E , szórása pedig D . Ekkor minden $\varepsilon > 0$ valós számra

$$\mathbb{P}\{|\xi - E| \geq D/\varepsilon\} \leq \varepsilon^2.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $|\xi - E|^2$ valószínűségi változóra a Markov-egyenlőtlenséget $\lambda = 1/\varepsilon^2$ választással. $\square$

12.1.43. Feladat [5]. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának, illetve minimumának várható értéke, illetve szórása?

12.1.44. Feladat [5]. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, még kétszer dobunk, ha írás, még egyszer. Mennyi a fejek számának várható értéke és szórása?

12.1.45. Karakterisztikus eloszlás. Ha egy p valószínűségű esemény bekövetkezik, legyen az úgynevezett *karakterisztikus valószínűségi változó* értéke 1, egyébként 0. Ennek az eloszlásának, az úgynevezett *karakterisztikus eloszlásnak* a várható értéke p , a szórásnégyzete $p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = p(1-p)$.

12.1.46. Példa. Tegyük fel, hogy n kulcsunk van, és a sötétben véletlen sorrendben próbáljuk bele a zárba. Mennyi a valószínűsége, hogy a k -adik kulcs nyitja a zárat? Az első kulcs n -féle lehet, a második $n-1$ -féle stb., az utolsó már csak egyféle. Az elemi események száma $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Feltesszük, hogy minden elemi esemény valószínűsége ugyanannyi. Ha a „jó” kulcs a k -adik, akkor a többi $(n-1)!$ sorrendben lehet, így a valószínűség $(n-1)!/n! = 1/n$.

A faktoriálisok – vagy a túlsordulás elkerülésére a logaritmusuk – kiszámítására nagy n esetén a *Stirling-formulát* érdemes használni: $n! = \sqrt{2\pi n}^{n+1/2} e^{-n+1/(12n)-c_n}$, ahol $0 \leq c_n \leq 1/(180n^3)$. Megmutatható, hogy $n > 8$ esetén $c_n = 0$ választással a relatív hiba kisebb, mint 0,0008% (lásd [34]).

12.1.47. Diszkrét egyenletes eloszlás. Ha egy ξ valószínűségi változó egyforma, $1/n$ valószínűséggel veszi fel az $1, 2, \dots, n$ értékeket, akkor azt mondjuk, hogy *diszkrét egyenletes eloszlású*. Várható értéke nyilván

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

A szórás kiszámításához szükségünk van a $\sum_{k=1}^n k^2$ összeg értékére. Teljes indukcióval könnyen adódik, hogy ez $n(n+1)(2n+1)/6$, így

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

12.1.48. Példa. Egy rajzszeget dobálunk fel, p valószínűséggel ($0 < p < 1$) esik a lapjára. Mennyi a valószínűsége, hogy n dobásból éppen k -szor esik így? Összesen 2^n elemi esemény (lehetséges eredmény sorozat) van, ha egy sorozatban k -szor esett lapjára a rajzszeget, akkor a sorozat valószínűsége $p^k(1-p)^{n-k}$. Ilyen sorozat annyi van, ahányféleképpen n helyből ki lehet választani k helyet. Rendezzük sorba a helyeket, és válasszuk az első k helyet. Összesen $n!$ sorrend van, de ugyanazt a k darabot választjuk, ha az utolsó $n-k$ darab tetszőleges sorrendben van, azaz $n!/(n-k)! = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ esetben választjuk ugyanazt a k helyet. Mivel ezek sorrendje sem számít, az n helyből k darabot

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

-féleképpen választhatunk ki. Így a keresett valószínűség

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

12.1.49. Binomiális eloszlás. Egy ξ valószínűségi változót n -edrendű, p paraméterű ($0 < p < 1$) *binomiális eloszlásúnak* nevezzük, ha a $k = 0, 1, \dots, n$ értékeket veszi fel rendre

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

valószínűséggel. Ilyen eloszlás lép fel például visszatevésees mintavételnél. Megmutatjuk, hogy várható értéke np , szórása $\sqrt{np(1-p)}$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)}{(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np.$$

Hasonlóan

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2,$$

ahonnan

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 + np.$$

Innen

$$\mathbb{D}^2(\xi) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

12.1.50. Példa: visszatevés nélküli mintavétel. Egy urnában N golyó van, ebből K fehér. Kihúzzunk n golyót visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy k darab lesz fehér? Egy elemi esemény az, hogy N golyóból kiválasztunk n darabot. A kedvező esetek azok, amikor a K golyóból k darabot, a többi $N - K$ -ből pedig $n - k$ darabot választottunk. Így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

12.1.51. Hipergeometrikus eloszlás. A ξ valószínűségi változó *hipergeometrikus eloszlású*, ha értékei a $k = 0, 1, \dots, n$ számok, és a k értéket

$$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $0 < n \leq \min(K, N - K)$ és $K < N$. Megmutatjuk, hogy várható értéke Kn/N , szórása pedig

$$\sqrt{n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}.$$

Valóban,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= n \frac{K}{N} \sum_{k=1}^n \frac{(K-1) \cdots (K-k+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{(N-K) \cdots (N-K-n+k+1)}{(n-k)!} \\ &= n \frac{K}{N} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{\ell} \cdot \binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-\ell}}{\binom{N-1}{n-1}} = n \frac{K}{N}. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n(n-1) \frac{K(K-1)}{N(N-1)},$$

ahonnan

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n(n-1) \frac{K(K-1)}{N(N-1)} + n \frac{K}{N}.$$

Innen

$$\mathbb{D}^2(\xi) = n(n-1) \frac{K(K-1)}{N(N-1)} + n \frac{K}{N} - n^2 \frac{K^2}{N^2} = n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

Nyilván ha N nagy n -hez képest, akkor a visszatevés nem nagyon befolyásolja a valószínűségeket, így a hipergeometrikus eloszlás közelíthető a binomiálissal.

12.1.52. Példa. 10 kg kalácsot sütünk, a kalácsba 1000 darab mazsolát teszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 10 dkg-os szeletben k darab mazsola van? A valószínűséget kiszámíthatjuk a binomiális eloszlás segítségével, de n kellemetlenül nagy, 1000, míg a p valószínűség kellemetlenül kicsi: 0,01. Nyilván nem sokat változik a valószínűség, ha 100 kg kalácsot készítünk 10000 darab mazsolával, így tulajdonképpen az

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

valószínűség határértéke érdekel bennünket rögzített k -ra, amikor $n \rightarrow \infty$ és $p \rightarrow 0$, de úgy, hogy közben $np = \lambda$ rögzített érték:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Így tényleg egy eloszlást kaptunk, mert

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

12.1.53. Poisson-eloszlás. Egy ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha a $k = 0, 1, \dots$ értékeket

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $\lambda > 0$ pozitív állandó. Megmutatjuk, hogy várható értéke λ , szórása $\sqrt{\lambda}$. Valóban,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

és hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2,$$

ahonnan $\mathbb{E}(\xi) = \lambda$, $\mathbb{E}(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda$, tehát $\mathbb{D}^2(\xi) = \lambda$.

12.1.54. Példa. Egy rajzszeget dobálunk fel, p valószínűséggel ($0 < p < 1$) esik a lapjára. Addig dobunk, amíg a lapjára nem esik. Annak a valószínűsége, hogy ez éppen a k -adik dobásnál következik be, $p(1-p)^{k-1}$. Annak a valószínűsége, hogy még a k -adik dobásnál sem esik a lapjára, $(1-p)^k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, úgyhogy annak a valószínűsége, hogy ez soha nem következik be, 0. (Itt abban célszerű megállapodni, hogy $0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 = 0$.)

12.1.55. Geometriai eloszlás. Ha $0 < p < 1$ és egy ξ valószínűségi változó a $k = 1, 2, \dots$ értékeket $p(1-p)^{k-1}$ valószínűséggel ($+\infty$ értéket pedig 0 valószínűséggel) veszi fel, *geometriai eloszlás*únak nevezzük. A nevét onnan kapta, hogy a valószínűségek mértani (geometriai) sort alkotnak, amelynek összege 1. Ilyen eloszlásnál a várható érték $1/p$, a szórás pedig $\sqrt{1-p}/p$. Valóban, az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

összefüggést differenciálva, majd szorozva p -vel, $x = 1 - p$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Kétszer differenciálva x szerint, majd szorozva x -szel és p -vel, $x = 1 - p$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} = \frac{2p(1-p)}{p^3}.$$

Innen

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},$$

amiből $\mathbb{D}^2(\xi) = (2-p)/p^2 - 1/p^2 = (1-p)/p^2$.

* **12.1.56. Feladat [10].** Egy szabályos érmét addig dobunk fel, amíg egymás után két fejet dobunk. Mennyi a dobások számának várható értéke? És ha addig dobunk, amíg fejre írás jön?

12.1.57. Feladat [5]. Egy vegyi anyaggal kezelve 20 kísérleti állatot, 10-nél jött létre (nem látható) elváltozás. Ha 10-et kiválasztunk és felboncolunk, milyen valószínűséggel fogunk 0, 1, $\dots$ 9, 10 egyednél elváltozást tapasztalni?

12.1.58. Feladat [6]. Egy üzemben tízen egymástól függetlenül használnak 1 kW-os kéziszerszámot. Mindenki átlagosan 12-szer 1 percet használja óránként a gépét. Ha a hálózat 7 kW-ot bír el, akkor az időnek hány százalékában lép fel túlterhelés?

12.1.59. Feladat [6]. Rutherford 2608 alkalommal 7,5 s-ig észlelt rádioaktív bomlást. Alkalmanként 3,87 bomlást észlelt átlagosan. Várhatóan hány alkalommal észlelt 0, 1, 2, ..., 9, ≥ 10 bomlást?

12.1.60. Definíció. Legyen egy $\mathbb{R}^k$ -beli értékű ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F . Ha létezik olyan $f: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty[$ függvény, amelyre

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1 dt_2 \dots dt_k$$

minden $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ -ra, akkor azt mondjuk, hogy f a ξ *sűrűségfüggvénye*. Megmutatható, hogy ekkor $F_{x_1 x_2 \dots x_k}(x) = f(x)$ majdnem mindenütt [azaz a valós esetben $F'(x) = f(x)$.] Az ilyen valószínűségi változókat *abszolút folytonosnak*, vagy (hibásan, de elterjedten) *folytonosnak* nevezzük. (Diszkrét valószínűségi változónak sohasem létezik sűrűségfüggvénye.)

Ha a sűrűségfüggvény folytonos, és valamely pontban lokális maximuma van, akkor azt a pontot az eloszlás *móduszának* nevezzük. Több módusz is lehet, két módusz esetén például *bimodális eloszlásról* stb., beszélünk.

12.1.61. Sűrűségfüggvény és várható érték. Ha az $\mathbb{R}^n$ -beli értékű ξ -nek létezik az f sűrűségfüggvénye, és $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ egy tetszőleges Baire-függvény, akkor $\mathbb{E}(g(\xi))$ pontosan akkor létezik, ha az alábbi integrál abszolút konvergens, és

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx.$$

* **Bizonyítás.** Következik a [35] könyv általánosabb 9.2.2 tételéből. $\square$

12.1.62. Egyenletes eloszlás. A ξ valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon ($a < b$) *egyenletes eloszlású*, ha sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{b-a}, \quad \text{ha } a < x < b, \quad 0 \quad \text{egyébként.}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke $(a+b)/2$, szórása pedig $(b-a)/(2\sqrt{3})$, mert

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2},$$

és

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

12.1.63. Feladat [3]. Határozzuk meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

12.1.64. Exponenciális eloszlás. A ξ valószínűségi változót λ paraméterű *exponenciális eloszlásúnak* nevezzük akkor, ha sűrűségfüggvénye

$$\lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0, \quad 0 \quad \text{egyébként.}$$

Itt $\lambda > 0$. Várható értéke $1/\lambda$, és szórása is $1/\lambda$, amint az integrálással könnyen adódik.

12.1.65. Feladat [3]. Határozzuk meg az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét.

12.1.66. Feladat [8]. Alkatrészek, készülékek meghibásodásáig eltelt idő, illetve a két meghibásodás közötti idő legtöbbször exponenciális eloszlást követ. Ha egy készüléknél ezen idő várható értéke, az MTBF 1000 óra, határozzuk meg, hogy mennyi a valószínűség, hogy a készülék 500 óráig, 1000 óráig, 2000 óráig hibátlanul működik. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy a készülék még t ideig hibátlanul működik, feltéve, hogy T ideig már hibátlanul működött, nem függ T -től.

12.1.67. Normális eloszlás. Az (m, σ) paraméterű *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Itt m tetszőleges, σ pedig pozitív konstans. Látni fogjuk, hogy az eloszlás várható értéke m , szórása pedig σ . Az F eloszlásfüggvény kifejezhető a 0 várható értékű, 1 szórású eloszlás *standard normális eloszlás* Φ eloszlásfüggvényével, amelynek sűrűségfüggvénye $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, éspedig

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

valóban, az $y = (x-m)/\sigma$ helyettesítéssel

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2/2} dy = \Phi(y) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Meg kell mutatnunk, hogy Φ eloszlásfüggvény, ebből már következik, hogy $\Phi((x-m)/\sigma)$ is az. Az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

integrál kiszámításához tekintsük az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = I^2$$

integrált és térjünk át polár koordinátákra:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi.$$

A standard normális eloszlás várható értéke nyilván 0, mert a sűrűségfüggvénye páros, a második momentuma pedig parciális integrálással könnyen számolhatóan 1. Mivel ha η standard normális eloszlású, akkor $\xi = \sigma\eta + m$ eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{\sigma\eta + m < x\} = \mathbb{P}\{\eta < (x-m)/\sigma\} = \Phi((x-m)/\sigma),$$

kapjuk az általános esetet is.

Megjegyezzük, hogy a sűrűségfüggvény párossága miatt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, speciálisan $\Phi(0) = 1/2$. Elég tehát $x > 0$ esetén ismerni $\Phi(x)$ értékét. Mivel a Φ függvény nem írható fel elemi függvényekkel, értékét rendszerint táblázatból vesszük, vagy a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

integrálba beírva az exponenciális függvény sorát, a tagonkénti integrálással kapott sorból számítjuk. Nagy pozitív x -ekre hasznosabb az

$$1 - \Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{x^5} + \cdots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{x^{2k+1}} \right)$$

közelítés, amely páros k esetén felső, páratlan k esetén alsó becslést ad.

12.1.68. Feladat [5]. Egy mérés eredmény normális eloszlású 0,1 szórással, várható értéke a mérendő mennyiség. Mennyi a valószínűsége, hogy a mérés hibája nagyobb, mint 0,3?

12.1.69. Valószínűségi változók függetlensége. A ξ_i valószínűségi változókat *páronként függetlennek*, illetve *függetlennek* nevezzük, ha a $\{\xi_i < x_i\}$ események bármilyen x_i -k esetén páronként függetlenek, illetve függetlenek. Más szavakkal a függetlenség azt jelenti, hogy az együttes eloszlásfüggvény az egyes eloszlásfüggvények szorzata. Ebből következik, hogy ha van együttes sűrűségfüggvény, akkor az egyes valószínűségi változóknak is van sűrűségfüggvénye, és a közös sűrűségfüggvény az egyes sűrűségfüggvények szorzata. Megmutatható, hogy ha a ξ_i -k függetlenek, illetve páronként függetlenek, akkor tetszőleges g_i Baire-függvényekre a $g_i(\xi_i)$ valószínűségi változók is függetlenek, illetve páronként függetlenek.

12.1.70. Tétel. Ha ξ és η valós értékű független valószínűségi változók, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$.

* **Bizonyítás.** Diszkrét valószínűségi változókra közvetlen számolással adódik a tétel. Ha ξ nemnegatív, akkor a $\{k\varepsilon \leq \xi < (k+1)\varepsilon\}$ eseményekre vonatkozó feltételes eloszlásfüggvények segítségével kapott alsó és felső becslésből adódik $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel. Végül ha ξ tetszőleges, akkor írjuk fel $\xi^+ - \xi^-$ alakban. $\square$

12.1.71. Kovariancia és korrelációs együttható. Legyenek ξ és η valós értékű valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórása. Ekkor $\mathbb{D}^2(\xi + \eta)$ is létezik, mert $(\xi + \eta)^2 = \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 \leq 2(\xi^2 + \eta^2)$, és

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi) + \eta - \mathbb{E}(\eta))^2\right) = \mathbb{D}^2(\xi) + \mathbb{D}^2(\eta) + 2\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right).$$

Az itt megjelenő

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta))\right) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$$

kovarianciát a „függetlenségtől való eltérés” mértékéül használhatjuk. Az előző tétel szerint független valószínűségi változók kovarianciája nulla, így szórásnégyzeteik összeadódnak. A megfordítás nem igaz: még az is előfordulhat, hogy η a ξ függvénye és mégis nulla

a kovariancia, legyen például ξ az a valószínűségi változó, amely a $-2, -1, 1, 2$ értékeket $1/4$ valószínűséggel veszi fel, és legyen η a négyzete. Ha $\eta = \xi$, akkor $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{D}^2(\xi)$, ha $\eta = -\xi$, akkor $\text{cov}(\xi, \eta) = -\mathbb{D}^2(\xi)$.

Megmutatjuk, hogy a kovarianciára

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta);$$

valóban, a $\xi_0 = \xi - \mathbb{E}(\xi)$ és $\eta_0 = \eta - \mathbb{E}(\eta)$ valószínűségi változókra minden λ valós számra

$$0 \leq \mathbb{E}((\eta_0 - \lambda \xi_0)^2) = \mathbb{E}(\eta_0^2) - 2\lambda \mathbb{E}(\eta_0 \xi_0) + \lambda^2 \mathbb{E}(\xi_0^2) = \mathbb{D}^2(\eta) + 2\lambda \text{cov}(\xi, \eta) + \lambda^2 \mathbb{D}^2(\xi),$$

innen a polinom diszkriminánása nem lehet pozitív, tehát

$$\text{cov}^2(\xi, \eta) \leq \mathbb{D}^2(\eta)\mathbb{D}^2(\xi).$$

Ennek alapján, ha $\mathbb{D}(\xi) > 0$ és $\mathbb{D}(\eta) > 0$, akkor célszerű bevezetni a

$$\text{cor}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)}$$

korrelációs együtthatót, amelynek értéke a $[-1, 1]$ intervallumba esik. Megjegyezzük, hogy könnyen láthatóan $a\xi + b$ és $c\eta + d$ korrelációs együtthatója megegyezik ξ és η korrelációs együtthatójával, ha $ac > 0$.

12.1.72. Regresszió. Ha a ξ, η valós értékű valószínűségi változóknak létezik a szórása, megkérdezhetjük, hogy mely a, b valós számokra lesz $\mathbb{E}((\eta - a\xi - b)^2)$ minimális? Mivel

$$\mathbb{E}((\eta - a\xi - b)^2) = \mathbb{E}(\eta^2) - 2a\mathbb{E}(\xi\eta) - 2b\mathbb{E}(\eta) + a^2\mathbb{E}(\xi^2) + 2ab\mathbb{E}(\xi) + b^2,$$

a minimumot akkor kapjuk, ha

$$-2\mathbb{E}(\xi\eta) + 2a\mathbb{E}(\xi^2) + 2b\mathbb{E}(\xi) = 0 \quad \text{és} \quad -2\mathbb{E}(\eta) + 2a\mathbb{E}(\xi) + 2b = 0.$$

Ha $\mathbb{D}(\xi) \neq 0$, akkor azt kapjuk, hogy a minimum

$$a = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)}, \quad b = \mathbb{E}(\xi) - a\mathbb{E}(\eta)$$

esetén adódik. Az $y = ax + b$ egyenest az η -nak ξ -re vonatkozó *regressziós egyenesének* nevezzük. Hasonlóan kezelhető az a kérdés, amikor egy $g(x, a_1, \dots, a_m)$ paraméteres görbeseregéből keressük azt a görbét, amelyre $\mathbb{E}((\eta - g(\xi, a_1, \dots, a_n))^2)$ minimális, ilyenkor *regressziós görbéről* beszélünk. Általánosabban, lehet ξ vektor értékű is, ekkor a lineáris esetben *regressziós síkról*, az általános esetben *regressziós felületről* beszélünk.

Ha azt kérdezzük, hogy az összes valós értékű Baire-függvények közül melyik az a függvény, amelyre $\mathbb{E}((\eta - g(\xi))^2)$ minimális, akkor a válasz, hogy ezt a $g(x) = \mathbb{E}(\eta|\xi = x)$ feltételes várható érték adja, ez az η -nak ξ -re vonatkozó *regressziós függvénye*; ha a (ξ, η) pár diszkrét valószínűségi változó, akkor a feltételes eloszlásfüggvény azokon az x helyeken van értelmezve, amelyekre $\mathbb{P}\{\xi = x\} > 0$, ha pedig a (ξ, η) pár eloszlásának van egy $h(x, y)$ közös sűrűségfüggvénye, akkor a feltételes eloszláshoz tartozó feltételes sűrűségfüggvény

$$g(y|\xi = x) = \frac{h(x, y)}{f(x)}, \quad \text{ha} \quad f(x) > 0,$$

ahol f a ξ sűrűségfüggvénye, azaz $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy$.

12.1.73. Tétel. Legyenek η és ζ független valószínűségi változók, amelyek sűrűségfüggvénye g , illetve h . Ekkor a $\xi = \eta + \zeta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, amelyre $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y) dy$ majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Legyen $b(y, z) = 1$, ha $y + z < x$, és nulla egyébként. A $b(\eta, \zeta)$ várható értéke a ξ eloszlásfüggvényének az x helyen felvett értéke, így

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(y, z)g(y)h(z) dz dy.$$

Innen $z = t - y$ helyettesítéssel

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(y, t-y)g(y)h(t-y) dt dy.$$

Felhasználva b definícióját,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(t-y) dy dt.$$

Innen létezik az f sűrűségfüggvény és majdnem mindenütt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y) dy. \quad \square$$

12.1.74. A χ^2 -eloszlás. Ha n darab független, standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetét összeadjuk, kapjuk az n szabadságfokú χ^2 -eloszlást. Megmutatjuk, hogy ennek a sűrűségfüggvénye

$$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \quad \text{ha } x > 0, \quad \text{és } 0 \text{ egyébként.}$$

Azt is megmutatjuk, hogy a várható értéke n , szórása pedig $\sqrt{2n}$. Megjegyezzük, hogy a Γ függvény értékei a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ összefüggés segítségével $\Gamma(1) = 1$ és $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ismeretében a szükséges helyeken kiszámíthatók.

Ha a ξ_i valószínűségi változók standard normális eloszlásúak, akkor a négyzetük eloszlásfüggvénye $\mathbb{P}\{\xi_i^2 < x\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{x} < \xi_i < \sqrt{x}\}$, ha $x > 0$ és 0 egyébként. A ξ_i^2 (szintén független) valószínűségi változók várható értéke a ξ_i szórásnégyzete, azaz 1, a szórásnégyzetük pedig ξ_i negyedik momentuma segítségével kiszámítható, értéke 2. Így csak a sűrűségfüggvényre vonatkozó állítást kell megmutatnunk. Mivel

$$F(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}),$$

a sűrűségfüggvény

$$\Phi'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + \Phi'(-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}},$$

ami az állítás az $n = 1$ esetben. Az általános esetet indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $n - 1$ tagú η összegre igaz az állítás és legyen $\zeta = \xi_n^2$. Az előző tétel szerint a sűrűségfüggvény értéke az x helyen $y = tx$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{y^{(n-1)/2-1} e^{-y/2}}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} \frac{(x-y)^{-1/2} e^{-(x-y)/2}}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} dy \\ &= \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma((n-1)/2) \Gamma(1/2)} \int_0^1 t^{(n-1)/2-1} t^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

Az integrál a Γ függvény tulajdonságait kihasználva kiszámolható, és kapjuk az eredményt, vagy egyszerűbben, abból, hogy sűrűségfüggvényt kell kapnunk, a Γ függvény definícióját felhasználva adódik a helyes konstans.

12.1.75. A Student-eloszlás. Ha $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

eloszlása az n szabadságfokú *Student-eloszlás*. Hasonlóan, mint az előző pontban, megmutathatjuk, hogy ennek a sűrűségfüggvénye

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2) (1+x^2)^{(n+1)/2}}.$$

Az $n = 1$ esetben az eloszlásnak nincs várható értéke, egyébként a várható értéke 0. Az $n \leq 2$ esetben az eloszlásnak nincs szórása, egyébként a szórás $1/\sqrt{n-2}$.

12.1.76. Az F-eloszlás. Ha ξ illetve η független, m illetve n szabadsági fokú χ^2 -eloszlású, akkor hányadosuk (m, n) szabadsági fokú *F-eloszlású*; ennek sűrűségfüggvénye (hasonlóan, mint az előző pontokban, adódik, hogy)

$$\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2) \Gamma(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+x)^{(m+n)/2}}, \quad \text{ha } x > 0, \quad \text{és } 0 \text{ egyébként.}$$

12.1.77. Feladat [6]. Adjunk példát páronként független, de nem független valószínűségi változókra.

* **12.1.78. Feladat [10].** Hasonlítsuk össze a 3 szabadságfokú χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvényét egy nemesgáz atomjainak energiaeloszlását leíró függvénnyel. Mi a magyarázat?

12.1.79. A nagy számok gyenge törvénye. Legyenek a ξ_k , $k = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és páronként függetlenek E várható értékkel. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - E\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A tételnek az a speciális esete, amikor a ξ_k -k független karakterisztikus eloszlások, következik a Csebisev-egyenlőtlenségből is; ezt fedezték fel legelőször.

* **Bizonyítás.** Lásd Rényi [52], VI, 3§, 4. tétel.

12.1.80. A nagy számok erős törvénye. Legyenek a ξ_k , $k = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek E várható értékkel. Ekkor

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = E\right\} = 1.$$

* **Bizonyítás.** Lásd Rényi [52], VI, 7§, 3. tétel.

12.1.81. Centrális határeloszlás tétel. Legyenek a ξ_k , $k = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek nem nulla szórással. Legyen továbbá

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad \text{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbb{E}(\eta_n)}{\mathbb{D}(\eta_n)}.$$

Jelölje F_n a ζ_n eloszlásfüggvényét, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}.$$

* **Bizonyítás.** Lásd Rényi [52], VIII, 1§, 1. tétel.

12.1.82. Moivre–Laplace-tétel. Ez a tétel a centrális határeloszlás tételnek a független karakterisztikus eloszlások összegére, azaz a binomiális eloszlásra vonatkozó speciális esete (ezt fedezték fel először.)

12.1.83. Feladat [9]. Egy pénzérmét 10 000-szer feldobva, 5400-szor kaptunk fejet. Szabályos-e az érme?

* **12.1.84. Feladat [10].** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, $[0, 1]$ -ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad \text{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbb{E}(\eta_n)}{\mathbb{D}(\eta_n)}.$$

Ábrázoljuk ζ_1 , ζ_2 és ζ_3 , valamint a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét. Mennyi $\mathbb{D}(\eta_{12})$ és $\mathbb{E}(\eta_{12})$?

* **12.1.85. Feladat: szimuláció, Monte–Carlo módszerek [19].** Számos olyan természeti folyamat van, amelynek a lefolyását különböző véletlen tényezők befolyásolják. Ilyen folyamatok jellemzőinek pontos meghatározása gyakran nem megoldható, de jó közelítéseket kaphatunk *szimulációval*. Példaként a láncreakciót szimulálva, határozzuk meg egy Pu^{239} gömb kritikus sugarát.

* **12.1.86. Mátrixjátékok.** A játékelméletben vizsgált legegyszerűbb játékban két játékos van, mindkettőnek véges sok *stratégia*ja vagy *tiszta stratégia*ja van. Az első és a második stratégiáit is megszámozzuk: $1, 2, \dots, m$ illetve $1, 2, \dots, n$. Ha az első játékos az i -edik, a második a j -edik stratégiáját választja, akkor a második fizet az elsőnek $a_{i,j}$ összeget (ami persze negatív is lehet). Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^m_{j=1}^n$ mátrixot a *játék mátrixának* nevezzük.

Lehetőségeinket kibővítjük, ha *kevert stratégiát* használunk; ezeket Neumann János vezette be. Ez az első játékosnál azt jelenti, hogy egy m tagú valószínűségi eloszlást választ, és annak megfelelően véletlenszerűen választja meg stratégiáját. Ha az y eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az y' a sormátrix j -edik koordinátája jelenti nyereményének várható értékét, ha a második játékos a j -edik stratégiáját választotta. Ezen sormátrix koordinátáinak minimumát szeretné maximalizálni, azaz ha b és c egy m illetve n hosszú oszlopmátrix, amelynek minden koordinátája 1, akkor célja $\beta \rightarrow \max$, az $y'a \geq \beta c'$, $y \geq 0$ és $b'y = 1$ feltételek mellett; utóbbi azt fejezi ki, hogy y valószínűségeloszlás, koordinátáinak összege 1. A feladatnak vannak megengedett megoldásai, például az egységvektorok: ezek a tiszta stratégiáknak felelnek meg. Célszerű, ha a mátrix minden eleme pozitív. Ezt könnyen elérhetjük, ha minden eleméhez hozzáadunk egy elég nagy d számot. Jelölje az így kapott mátrixot $\bar{a}$. Persze, ekkor a nyeremények is d -vel megnőnek, és $\bar{\beta} = \beta + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\bar{\beta} \rightarrow \max, \quad b'y = 1, \quad \bar{a}'y \geq \bar{\beta}c, \quad y \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy már a tiszta stratégiákra is $\bar{\beta} > 0$. Az $\bar{y} = y/\bar{\beta}$ jelöléssel a feladat

$$b'\bar{y} = 1/\bar{\beta} \rightarrow \min, \quad \bar{a}'\bar{y} \geq c, \quad \bar{y} \geq 0.$$

Teljesen hasonlóan, ha a második játékos az x eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az ax oszlopmátrix koordinátáinak maximumát szeretné minimalizálni, azaz célja $\alpha \rightarrow \min$, az $ax \leq \alpha b$, $x \geq 0$ és $c'x = 1$ feltételek mellett. Most is a feladatnak vannak megengedett megoldásai, például a tiszta stratégiák. A $\bar{\alpha} = \alpha + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\bar{\alpha} \rightarrow \min, \quad c'x = 1, \quad \bar{a}x \leq \bar{\alpha}b, \quad x \geq 0.$$

Mivel $\bar{a}$ minden eleme pozitív, bármely megengedett stratégiára $\bar{\alpha} > 0$. Az $\bar{x} = x/\bar{\alpha}$ jelöléssel a feladat

$$c'\bar{x} = 1/\bar{\alpha} \rightarrow \max, \quad \bar{a}\bar{x} \leq b, \quad \bar{x} \geq 0.$$

Egy duál-primál feladatpárt kaptunk, amely például a szimplex módszerrel megoldható.

*** 12.1.87. Neumann nyeregpont tétele.** Az előző pont jelöléseivel, mármely mátrixjátékhoz vannak olyan x_0, y_0 optimális kevert stratégiák, hogy bármely x, y kevert stratégiákra $y'ax_0 \leq y'_0ax_0 \leq y'_0ax$. Az optimális stratégiákhoz tartozó α, β értékekre $\alpha = y'_0ax_0 = \beta$.

Az optimális kevert stratégiák általában nem egyértelműek. Az y'_0ax_0 érték a *játék értéke*; a tétel szerint az első játékos ennél nagyobb nyereséget nem tud elérni, ha a második valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza, és a második ennél kisebb értéket nem tud elérni, ha az első játékos valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza.

Bizonyítás. Az előző pont szerint írjuk át a játékot egy duál-primál feladatpárra. Mivel a primál feladat megengedett $\bar{x}$ megoldásainak halmaza korlátos, hiszen egy megengedett megoldás egyetlen koordinátája sem lehet nagyobb, mint $\bar{a}$ elemei minimumának a reciproka, a megengedett megoldások halmaza kompakt. Így a primál feladatnak van optimális $\bar{x}_0$ megoldása. Alkalmazva a lineáris programozás fő tételét kapjuk, hogy a duál feladatnak is van egy $\bar{y}_0$ optimális megoldása, és $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ nyeregpontja az $L(\bar{x}, \bar{y}) = c'\bar{x} + b'\bar{y} - \bar{y}'\bar{a}\bar{x}$ Lagrange-függvénynek, azaz $L(\bar{x}, \bar{y}_0) \leq L(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \leq$

$L(\bar{x}_0, \bar{y})$ és $1/\bar{\alpha}_0 = 1/\bar{\beta}_0 = L(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{y}'_0 \bar{a}x_0$. Innen $c'\bar{x} + b'\bar{y}_0 - \bar{y}'_0 \bar{a}\bar{x} \leq 1/\bar{\beta}_0$, tehát $1/\bar{\alpha} - y'_0 \bar{a}x/(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}_0) \leq 0$, ahonnan $\bar{\beta}_0 \leq y'_0 \bar{a}x$. Mivel $1/\bar{\alpha}_0 = \bar{y}'_0 \bar{a}x_0 = y'_0 \bar{a}x_0/(\bar{\alpha}_0 \cdot \bar{\beta}_0)$, egyrészt $\bar{\beta}_0 = y'_0 \bar{a}x_0$, amiből levonva d -t, $\beta = y'_0 \bar{a}x_0$, másrészt $y'_0 \bar{a}x_0 \leq y'_0 \bar{a}x$, amiből levonva d -t, kapjuk az egyik egyenlőtlenséget. A másik egyenlőség és egyenlőtlenség hasonlóan adódik. $\square$

12.2 Matematikai statisztika

12.2.1. Minta, statisztika. *Statisztikai mintán* független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sorozatát értjük. *Statisztikának* nevezzük a mintaelemek bármely Baire-függvényét.

12.2.2. Az empirikus eloszlásfüggvény. Az $F(x)$ eloszlású valószínűségi változókból álló $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintához legyen

$$F_n(x) = \sum_{\xi_k \leq x} \frac{1}{n},$$

a minta *empirikus eloszlásfüggvénye*. Ha

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

az eloszlásfüggvény és az empirikus eloszlásfüggvény távolsága, akkor megmutatható, hogy

$$\mathbb{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0\} = 1.$$

Ez a *matematikai statisztika alaptétele*. (Lásd Rényi [52], VI, 8§, 1. tétel.)

12.2.3. Hisztogram. A hisztogram a sűrűségfüggvény közelítésére használható. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a minta, és a számegyenesen $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ osztópontokat választunk, akkor a *hisztogram*

$$f_n(x) = \sum_{t_{i-1} \leq \xi_k < t_i} \frac{1}{n(t_i - t_{i-1})}, \quad \text{ha } t_{i-1} \leq x < t_i.$$

Az osztópontok helytelen választása, túl sok vagy túl kevés osztópont használata a közelítést erősen lerontja, ezért több különböző osztópontrendszerrel is érdemes próbálkozni. Egy ökölszabály az osztópontok megválasztásához: osszuk az empirikus eloszlásfüggvényhez tartozó alsó és felső kvartilis közötti részt $\sqrt[3]{n}/2$ egyenlő részre, és ezzel a lépésközzel folytassuk a beosztást mindkét irányba. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett ennek a lépésköznek egy (1-hez közeli) konstansszorosa esetén közelíti a hisztogram a sűrűségfüggvényt $\mathbb{L}^2$ -ben a legjobban.

12.2.4. Becslések. Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ statisztikai mintánk $F_\vartheta(x)$ eloszlású, és a ϑ paramétert nem ismerjük, közelítésére egy alkalmas $\tilde{\vartheta}_n$ statisztikát használhatunk. Ezt az eljárást nevezzük *becslésnek*. A jó becsléstől elvárjuk, hogy *torzítatlan* legyen, azaz $\mathbb{E}(\tilde{\vartheta}_n) = \vartheta$ teljesüljön, valamint hogy *konzisztens* legyen, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{D}(\tilde{\vartheta}_n) = 0$$

teljesüljön. Kíváncsi, hogy a $\mathbb{D}(\tilde{\vartheta}_n)$ szórás minél kisebb legyen.

Példaként tekintsük a várható érték becslését. A

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

átlag a várható értéknek torzítatlan és konzisztens becslése.

Másik példaként vizsgáljuk a szórásnégyzet becslését. Az

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2$$

empirikus szórásnégyzet a szórásnégyzetnek nem torzítatlan becslése, mert mint nem nehéz kiszámolni, $\mathbb{E}(s^2) = (n-1)/n$. Torzítatlan és konzisztens becslés viszont az

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2$$

korrigált empirikus szórásnégyzet. (Megjegyezzük, hogy a szórássra ennek a négyzetgyöke nem torzítatlan becslés!)

12.2.5. Konfidencia-intervallumok. Gyakran arra van inkább szükségünk, hogy a ϑ valós paraméterhez és egy adott $\varepsilon > 0$ -hoz a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ minta segítségével olyan $\tilde{\vartheta}_1$ és $\tilde{\vartheta}_2$ statisztikákat adjunk meg, hogy

$$\mathbb{P}(\tilde{\vartheta}_1 < \vartheta < \tilde{\vartheta}_2) > 1 - \varepsilon$$

teljesüljön. A $[\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2[$ intervallumot *konfidencia-intervallumnak* nevezzük.

Például ha tudjuk, hogy a mintaelemek normális eloszlásúak ismert σ szórással, de ismeretlen m várható értékkel (a legtöbbször ez a helyzet méréseknél), akkor a várható értékre szerkeszthetünk konfidencia-intervallumot. Az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

valószínűségi változó standard normális eloszlású lesz, így meghatározható olyan u_ε szám, amelyre

$$\mathbb{P}\{|u| \leq u_\varepsilon\} = 1 - \varepsilon = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1.$$

Ebből

$$\mathbb{P}\left\{|\bar{\xi} - m| \leq u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bar{\xi} - u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{\xi} + u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \varepsilon.$$

12.2.6. Hipotézisvizsgálat. A hipotézisvizsgálatnál valamely adott H_0 *hipotézis* fennállásáról kell döntenünk. Az egyéb lehetséges eseteket a H_1 *ellenhipotézis*ben gyűjtjük össze. A rendelkezésre álló adatok alapján egy *próbastatisztikát* készítünk, és megvizsgáljuk, hogy ennek értéke egy T_0 *elfogadási tartományba* esik-e, vagy ennek komplementé-ébe, a *kritikus tartományba*. Ha a próbastatisztika az elfogadási tartományba esik, a H_0 hipotézist elfogadjuk, egyébként elvetjük. Az egész eljárást *próbának* nevezzük. Kétféle

hibát követhetünk el. Ha a H_0 hipotézis fennáll, mégis elvetjük, akkor *elsőfajú hibáról*, ha pedig a H_1 ellenhipotézis áll fenn, és hipotézisünket mégis elfogadjuk, akkor *másodfajú hibáról* beszélünk. A hibák nagyságát elsősorban az elfogadási tartomány megválasztásával befolyásolhatjuk. Az elsőfajú hiba valószínűségének csökkentésével a másodfajú hiba valószínűsége általában nő, és viszont. Természetesen a próbastatisztika helyes megválasztása is befolyásolja az eredményt. Ha $\varepsilon > 0$ -hoz úgy választottuk az elfogadási tartományt, hogy az elsőfajú hiba $1 - \varepsilon$ valószínűségű legyen, akkor a hipotézis elfogadása esetén azt mondjuk, hogy *az eltérés $1 - \varepsilon$ szinten nem szignifikáns*, egyébként pedig *szignifikáns*. Az elfogadási tartományt a próba statisztika ismert eloszlása alapján, rendszerint az $\varepsilon/2$ -kvantilis és az $1 - \varepsilon/2$ kvantilis közötti intervallumnak választjuk. Ha egy mintánk van, és a hipotézis az, hogy a mintaelemek valamilyen adott eloszlásúak, akkor *egymintás próbáról*, ha pedig két mintánk van, és a hipotézis az, hogy a két minta eloszlása, vagy a két eloszlás valamilyen paramétere megegyezik, akkor *kétmintás próbáról* beszélünk.

12.2.7. Paraméteres próbák. Ezeknél a próbáknál az eloszlásfüggvénynek csak egy vagy néhány paramétere ismeretlen. Néhány példát mutatunk be.

Az *egymintás u-próba* esetén tudjuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintaelemek normális eloszlásúak ismert σ szórással. Hipotézisünk az, hogy az m várható érték egy m_0 adott érték, ellenhipotézisünk pedig, hogy $m \neq m_0$. A hipotézis fennállása esetén az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

próbastatisztika standard normális eloszlású. Adott $\varepsilon > 0$ esetén az u_ε értéket úgy választva, hogy

$$\Phi(u_\varepsilon) - \Phi(-u_\varepsilon) = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1 = 1 - \varepsilon$$

legyen, $]-u_\varepsilon, u_\varepsilon[$ az elfogadási tartomány.

Kétmintás u-próba akkor használható, ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ mintánk normális eloszlású ismert σ_1 , az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ mintánk pedig normális eloszlású ismert σ_2 szórással, hipotézisünk, hogy az eloszlások várható értékei megegyeznek, ellenhipotézisünk pedig, hogy nem. A hipotézis fennállása esetén az

$$u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}$$

próbastatisztika standard normális eloszlású, így ismét a fenti elfogadási tartomány használható.

Az *F-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen és esetleg különböző várható értékű $\xi_0, \dots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \dots, \eta_n$ minták szórása azonos-e. Ha igen, az $f = ms_\xi^{*2}/(ns_\eta^{*2})$ statisztika (m, n) paraméterű F eloszlású.

Az *egymintás t-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen szórású $\xi_0, \dots, \xi_n$ minta várható értéke adott m érték-e? Ha igen, a

$$t = \frac{(\bar{\xi} - m)\sqrt{n+1}}{\sqrt{ns^{*2}}}$$

statisztika n szabadsági fokú Student-eloszlású.

A *kétmintás t-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen de, egyforma szórású $\xi_0, \dots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \dots, \eta_n$ minták várható értéke azonos-e. Ha igen, a

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{ms_{\xi}^{*2} + ns_{\eta}^{*2}}} \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)(m+n)}{m+n+2}}$$

statisztika $m+n$ paraméterű Student-eloszlású.

A *Welch-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen szórású $\xi_0, \dots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \dots, \eta_n$ minták várható értéke azonos-e? Ha igen, a

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{s_{\xi}^2/(m+1) + s_{\eta}^2/(n+1)}}$$

statisztika közelítőleg f paraméterű Student-eloszlású; itt

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n} + \frac{(1-c)^2}{m}, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{s_{\eta}^2/n}{s_{\xi}^2/m + s_{\eta}^2/n}.$$

12.2.8. Nemparaméteres próbák. Paraméteres próbák csak bizonyos eloszlások (például normális eloszlás, illetve exponenciális eloszlás) esetén konstruálhatók. Általánosabban használhatók a nemparaméteres próbák. Kettőt mutatunk be.

A *Kolmogorov-próba* annak a hipotézisnek az ellenőrzésére használható, hogy mintánk eloszlásfüggvénye egy adott folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvény-e. Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvény bármilyen más folytonos eloszlásfüggvény. A próba azon alapul, hogy az empirikus eloszlásfüggvénytől említett Δ_n mennyiség $\sqrt{n}$ -szeresének eloszlása a hipotézis fennállása esetén nem függ $F(x)$ -től, sőt, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\sqrt{n}\Delta_n < t\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 t^2}$$

összefüggés szerint már kb. $n = 30$ -tól az n -től való függéstől is eltekinthetünk.

A *Kolmogorov–Szmirnov-próba* a Kolmogorov-próba kétmintás megfelelője. Annak a hipotézisnek a vizsgálatára alkalmas, hogy a folytonos eloszlásokból származó két mintánk $F(x)$, illetve $G(x)$ eloszlásfüggvénye megegyezik-e. Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvények folytonosak, de nem egyeznek meg. A próbastatisztika

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \Delta_{n,m}, \quad \text{ahol} \quad \Delta_{n,m} = \sup_x |F_n(x) - G_m(x)|.$$

Ennek eloszlása nem függ F -től és G -től, határeloszlása ugyanaz, mint $\sqrt{n}\Delta_n$ -é, és a határeloszlás használható $n, m \geq 30$ esetén.

12.2.9. A χ^2 -próba. Igen sok célra, például illeszkedés- és függetlenségvizsgálatra használható nem paraméteres próba. Alapgondolata, hogy ha $A_1, A_2, \dots, A_r$ egy teljes eseményrendszer, és teljesül az a hipotézis, hogy az A_i esemény valószínűsége $p_i > 0$,

továbbá n független kísérletet végezve ν_i az A_i esemény bekövetkezéseinek száma, akkor a

$$\kappa = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

próbastatisztika jó közelítéssel $r - 1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ. A jó közelítéshez általában az szükséges, hogy az np_i értékek 10-nél nagyobbak legyenek. A próba akkor is használható, ha a p_i valószínűségek meghatározásához s darab, a mintából számított becslést használtunk fel, de ekkor a χ^2 -eloszlás szabadságfoka $r - s - 1$.

12.2.10. A legkisebb négyzetek módszere. Ha (ξ, η) egy vektor valószínűségi változó, amelynek első koordinátája maga is lehet vektor, akkor egy

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$$

minta birtokában szeretnénk meghatározni egy paraméteres seregből az a paramétervektor azon értékét, amelyre a megfelelő regressziós görbe, felület stb. a legjobban illeszkedik, azaz

$$\mathbb{E}\left((\eta - g(\xi, a))^2\right)$$

minimális. Az a paramétervektort a

$$\sum_{i=1}^n w_i (\eta - g(\xi, a))^2 \rightarrow \min.$$

minimumfeladat megoldásaként kapjuk, ahol a w_i -k szabadon választott pozitív súlyok. Ez az eljárás elméletileg ugyan csak akkor megalapozott, ha ξ nem is valószínűségi változó, hanem értékét mi választhatjuk meg, de az általános esetben is használják. A súlyokat η négyzetének ingadozásával fordítottan arányosnak érdemes választani, azaz a legjobb választás az, ha w_i az η adott ξ_i érték mellett vett szórásnégyzetének reciproka.

Ha ξ valós értékű, és az $y = ax + b$ regressziós egyenes paramétereit becsüljük így, akkor a -ra a c/s_ξ^{*2} becslést, b -re az $\bar{\eta} - \bar{\xi}c/s_\xi^{*2}$ becslést kapjuk, ahol

$$c = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})(\eta_i - \bar{\eta})$$

az *empirikus kovariancia*. A korrelációs együttható becslésére az $r = c/(s_\xi^* s_\eta^*)$ együttható *empirikus korrelációs együttható* használható.

12.2.11. Feladat [6]. Egy fizikai mennyiséget mértünk, és az alábbi eredményeket kaptuk: 12,15; 12,33; 10,94; 10,25; 9,80; 12,90; 12,04; 11,45; 9,64; 11,20; 9,78; 10,89; 11,22; 11,91; 10,78; 10,04; 10,35; 11,32; 9,18; 11,36; 10,40; 10,89; 11,50; 11,26; 11,95; 9,28; 11,11; 10,34; 11,12; 9,71. Ábrázoljuk az empirikus eloszlásfüggvényt. Készítsünk hisztogramot. Becsüljük meg a várható értéket és a szórást. Feltételezve, hogy a minta normális eloszlású 1 szórással, készítsünk konfidencia-intervallumot a várható értékre, és 95%-os szinten döntsük el azt a hipotézist, hogy a várható érték 11,2.

12.2.12. Feladat [6]. Egy másik laboratóriumban az előző feladatban szereplő fizikai mennyiség mérésekor az alábbi értékeket kaptuk: 10,62; 13,10; 12,40; 9,80; 10,31; 9,25; 10,87; 9,93; 9,72; 12,34; 11,77; 13,23; 9,20; 10,11; 11,66; 10,79; 11,06; 12,71; 10,89; 11,19; 10,93; 10,17; 11,97; 9,14; 11,76; 11,60; 9,14; 10,56; 11,57; 12,53. Tudjuk, hogy ezek az adatok is normális eloszlásúak, de szórásuk 1,2. Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy a két minta átlaga megegyezik?

12.2.13. Feladat [6]. Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy az előző feladatban szereplő minta normális eloszlású 11,2 várható értékkel és 1,2 szórással? Hát az, hogy a két előző feladatban szereplő minták egyforma eloszlásúak?

12.2.14. Feladat [6]. Egy kockát 600-szor feldobva, rendre 92, 87, 91, 101, 86, 143 esetben kaptuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ellentmond-e ez 95%-os szinten annak, hogy a kocka szabályos?

* **12.2.15. Feladat [16].** Készítsünk programot a megismert becslésekre és próbákra. Használjunk adatbázis-kezelőt.

Irodalom

- [1] Alexandrov, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [2] Arnold, V. I.: *Közönséges differenciálegyenletek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [3] Arnold, V. I.: *A differenciálegyenletek elméletének geometria fejezetei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988.
- [4] Babcsányi I. – Csank L. – Nagy A. – Szép G. – Zibolen E.: *Matematika feladatgyűjtemény III*. BMGE TTK, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [5] Babcsányi I. – Gyurmánczi J. – Szabó L. – Wettl F.: *Matematika feladatgyűjtemény I*. BMGE TTK, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [6] Babcsányi I. – Gyurmánczi J. – Wettl F. – Zibolen E.: *Matematika feladatgyűjtemény II*. BMGE TTK, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [7] Budó Á.: *Kísérleti fizika I–III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
- [8] Coddington, E. A. – Levinson, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955.
- [9] Cormen, T. H. – Leiserson, C. E. – Rivest, R. L. – Stein, C.: *Új algoritmusok*. Sclolar Informatika, 2003.
- [10] Csurgay Á. – Simonyi K.: *Elektronfizika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [11] Czách L. – Simon L.: *Parciális differenciálegyenletek I*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. J3-300.
- [12] Dieudonné, J., *Grundzüge der modernen Analysis I–IX*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971–1988.
- [13] Dieudonné, J.: *History of Functional Analysis*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1981.
- [14] Doetsch, G.: *Einführung in Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1979.
- [15] Dringó L. – Kátai I.: *Bevezetés a matematikába. Egységes jegyzet*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
- [16] Duncan, J.: *Bevezetés a komplex függvénytanba*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [17] Federer, H.: *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [18] Feller, W., *Bevezetés a valószínűségi számításba és alkalmazásaiba*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [19] Fényes I. (szerk.): *Modern fizikai kisenciklopédia*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1971.

- [20] Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M.: *Mai fizika I–X*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [21] Frank, Ph. – Mises, R. E.: *A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I–II*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966–1967.
- [22] Freud R.: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.
- [23] Fried E.: *Algebra I–II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [24] Fuchs L.: *Bevezetés az algebrába és a számelméletbe. Kézirat*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [25] Fuksz, B. A. – Sabat, B. V.: *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
- [26] Gelfand, I. M.: *Előadások a lineáris algebrából*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- [27] Gjunter, N. M. – Kuzmin, R. O.: *Felsőbb matematikai példatár I–III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [28] Gombás P. – Kisdi D.: *Bevezetés az elméleti fizikába I–II*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
- [29] Gyemidovics, B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
- [30] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [31] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet*. Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [32] Hewitt, E. – Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.
- [33] Járai A.: *Bevezetés a matematikába*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.
- [34] Járai A.: *Modern alkalmazott analízis*. KLTE Debrecen, 1991.
- [35] Járai A.: *Mérték és integrál*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [36] Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, I–II*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.–G., Leipzig, 1951.
- [37] Kósa A.: *Differenciálegyenletek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. J3-569.
- [38] Kuros, A. G.: *Felsőbb algebra*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [39] Kurzweil, J.: *Nichtabsolut konvergente Integrale*. Teubner, 1980.
- [40] Laczkovich M. – T. Sós V.: *Analízis I.–II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005–2007.
- [41] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis*. Chelsea Publishing Company Inc., New York, 1948.
- [42] Landau, L. D. – Lifsic, E. M.: *Elméleti fizika I–X*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [43] Leindler L. – Schipp F. : *Analízis I. Egységes jegyzet. Kézirat*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [44] Meszéna Gy., Ziermann M.: *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [45] Mikusiński, J.: *Operátorszámítás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.

- [46] Pál J. – Schipp F. – Simon P.: *Analízis II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991. J3-960.
- [47] Páles Zs.: *Feltételes szélsőértékszámítás.* Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1989.
- [48] Petruska Gy.: *Komplex függvénytan. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. J3-1288.
- [49] Petruska Gy.: *Analízis I–II. Egyetemi jegyzet.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998–1999.
- [50] Pontrjagin, L. Sz.: *Közönséges differenciálegyenletek.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [51] Potter, M. H. – Morrey, C. B.: *A first course in real analysis.* Springer, 1977.
- [52] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [53] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [54] Rudin, W., *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [55] Simonyi K.: *Villamosságtan.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.
- [56] Simonyi K.: *Elméleti villamosságtan.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [57] Simonyi K.: *A fizika kultúrtörténete.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1978.
- [58] Simonyi K.: *Elektronfizika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [59] Szidarovszky F.: *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [60] Szőkefalvi-Nagy B.: *Komplex függvénytan. Egységes jegyzet. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. J3-434.
- [61] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R.: *Thomas-féle Kalkulus I–III.* Typotex, Budapest, 2006–2007.
- [62] Tietze, U. – Schenk, Ch.: *Analóg és digitális áramkörök.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [63] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its Application, I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.
- [64] Zwillinger, D.: *Handbook of differential equations.* Academic Press, Boston–San Diego–New York–Berkeley–London–Sydney–Tokyo–Toronto, 1989.

Mutató

- ábécé *26*
- Abel folytonossági tétele *66*
 - tétele *67*
- Abel-csoport *21*
- Abel, Niels Henrik (1802–1829) *21*,
66–67, 313
- abszolút érték *38, 42*
 - folytonos *377*
 - integrálható *108, 242, 250*
 - konvergens *62, 109, 199*
- || *173*
- abszolútérték-homogenitás *173*
- abszolút konvergens improprius integrál
109, 244
- A_C *354*
- addíciós formula *73*
 - képlet *95*
- additív *141, 254, 362*
- additivitás *173*
- adjungált *179, 336*
- affin kombináció *137*
 - sokaság *137*
- ∂A *187*
- akkor és csak akkor *17*
- A° *187*
- alap *27*
- alapharmonikus *277*
- alpmátrix *355, 355*
- alapprobléma *339*
- alaprendszer *355, 358*
- aldetermináns *161*
- Alexandrov, Pavel Szergejevics
(1896–1982) *391*
- algebra alaptétele *323*
- algebrai multiplicitás *167, 171*
 - struktrúra *122*
- alsó bidiagonális *124*
 - egész rész *30*
 - háromszög egységmátrix *124*
- — mátrix *124*
- határ *14*
- — tulajdonság *14*
- határérték *59*
- korlát *14*
- trapéz egységmátrix *124*
- — mátrix *124*
- alsó Hessenberg-mátrix *124*
- alsó k -sávmátrix *123*
- általános asszociativitás tétele *27*
 - disztributivitás *28*
 - kommutativitás *27*
 - rekurziótétel *26*
- általánosított inverz *184*
 - Pitagorasz-tétel *265*
 - sajátaltér *170, 171*
 - sajátvektor *170*
- altér *130*
- alternáló *159*
 - bilineáris forma *150*
 - — leképezés *150*
 - forma *306, 308, 308*
- alulról félig folytonos *195*
 - folytonos *195*
- amplitúdó *277*
- analitikus *70, 319, 321*
 - folytatás elve *316*
- antikommutatív *42*
- antiszimmetria *7*
- antiszimmetrikus bilineáris forma *150*
 - — leképezés *150*
 - forma *308*
- approximáció *227*
 - alapfeladata *177*
- arccos *318*
- arch *318*
- arcsin *318*
- arctg *318*
- arcus *84*

area *84*
 arg *76*
 argumentum *15*
 argumentum-elv *331*
 arkhimédészi tulajdonság *30*
 Arnold, Vlagyimir Igorjevics (1937–2010) *353, 391*
 arsh *318*
 arth *318*
 asszociatív *13, 20, 309*
 asszociativitás *130*
 aszimptóta *90*
 átlag *386*
 átló *122*
 átlós mátrix *124*
 áttérésmátrix *146*
 átviteli elv *339, 358*
 autonóm egyenlet *347*
 Babcsányi István *391*
 Baire-függvény *243, 369*
 Baire-halmaz *369*
 Baire [bēr], René-Louis (1874–1932) *243, 369*
 bal oldali derivált *77, 206*
 — — határérték *55, 196*
 bal k -sávmátrix *123*
 balról folytonos *53, 195*
 Banach-féle fixponttétel *202*
 Banach, Stefan (1892–1945) *199, 202*
 Banach-tér *199*
 Bayes-tétel *367*
 Bayes, Thomas (1701–1761) *367*
 bázis *132, 307–308, 310*
 bázismegoldás *139*
 bázisra vonatkozó koordináták *135*
 bázisváltó *138*
 becslés *385*
 belseje *187*
 belső pont *49, 187*
 — — módszerek *235*
 — szorzás *43*
 — szorzat *174, 180, 268, 275*
 — — tér *174*
 Bernoulli [bernuli], Daniell (1700–1782) *265*
 Bernoulli-egyenlet *344*
 Bessel-egyenlőtlenség *177*
 Bessel-féle differenciálegyenlet *117*
 Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846) *117, 177*
 β -integrál *334*
 bijektív *15*
 bilineáris *149*
 — forma *149, 306*
 bimodális eloszlás *377*
 binér művelet *17*
 — reláció *10*
 binomiális együttható *28*
 — eloszlás *373*
 biztos esemény *365*
 bolygómozgás *353*
 Bolzano tétele *52*
 Bolzano, Bernard (1781–1848) *52, 199*
 Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel *199*
 Boole-algebrai összeg *9*
 Borel, Félix Edouard Justin Émile (1871–1956) *190, 243*
 Borel-függvény *243*
 bővített komplex számok *41*
 — valós számok *32*
 Broyden, Charles George (1933–2011) *229, 234*
 Broyden-módszer *229, 234*
 Budó Ágoston (1914–1969) *391*
 Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics (1804–1889) *174*
 Cantor, Georg (1845–1918) *23, 36*
 Cardano [kardano], Gerolamo (1501–1576) *36*
 Cardano-képlet *36*
 casus irreducibilis *36*
 Cauchy középérték-tétele *83*
 Cauchy [kósi], Augustin (1789–1857) *60, 62, 64, 68, 83, 174, 199–200, 252, 313–314, 319, 323, 336, 340, 349*
 Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség *174*
 Cauchy-egyenlőtlenség *323*
 Cauchy-feladat *340, 349, 352, 356*
 Cauchy-féle alaptétel *319*
 — gyökkritérium *64, 200*

- integrálformulák 322
- konvergenciakritérium 60, 62, 199–200
- Cauchy–Hadamard-tétel 68
- Cauchy-kritérium függvénysorozatokra 252
- Cauchy–Riemann-egyenletek 316, 324, 332
- Cauchy-sorozat 60, 60, 199, 199
- Cauchy-szorzat 64
- Cayley [kéli], Arthur (1821–1895) 168
- Cayley–Hamilton-tétel 168
- ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszere 230
- Clairaut-egyenlet 346
- Coddington, Earl Alexander 391
- Cormen, Thomas H. 391
- Csank Lajos 391
- csatolás csökkentése 356
- Csebisev-egyenlőtlenség 372
- Csebisev, Pafnutyij Lvovics (1821–1894) 276, 372
- csillagpont 293
- csillagszerű 293
- csoport 21
- Csurgay Árpád 391
- Czách László (1929–2021) 391
- d’Alembert-féle hányadoskritérium 64 — 200
- d’Alembert, Jean Baptiste le Rond (1717–1829) 64, 200, 265
- Darboux, Jean-Gaston (1842–1917) 85
- Darboux közbenső érték tétele 85
- De Morgan-szabály 9
- decilis 370
- Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831–1916) 23
- Dedekind-szelet 23
- δ -finom 99, 236
- derivált 77, 206, 211
- deriváltfüggvény 77
- Descartes [dékárt], René (1596–1650) 10
- Descartes-szorzat 10
- determináns 159
 - lineáris transzformációé 163–164
- determinánsrang 162
- diagonális 10, 122
- mátrix 124
- Dieudonné, Jean 4, 349, 391
- différenca 9
- différenciahányados 77
- différenciál 80, 206, 211
- différenciálegyenlet 115, 336, 338
- différenciálegyenlet-rendszer 338
- différenciálforma 310, 310–311
- différenciálhányados 77
- différenciálható 77, 205–206, 208, 316
 - sokaság 318
- différenciáloperátor 336
- dimenzió 132, 137
- direkt összeg 136
 - szorzat 10
- Dirichlet-féle generátorfüggvény 119
 - magfüggvény 273
- Dirichlet-formula 273
- Dirichlet-függvény 50
- Dirichlet [diriklé], Gustav Peter Lejeune (1805–1859) 50, 119, 253, 273
- diszjunkció 17
- diszjunkt 8
- diszkrét egyenletes eloszlás 373
 - valószínűségi változó 370
- disztribúcióelmélet 349
- disztributív 20, 130, 309
- disztributivitás 9
 - axiómái 20
- div 299
- divergencia 299
- divergenciátétel 299, 300, 303
- divergens 58, 61, 68, 198–199
- Doetsch, Gustav (1892–1977) 361, 364, 391
- Dringó László 391
- duál feladat 223
- duális bázis 148
 - tér 148, 307
- Duncan, John 391
- duplázási eljárás 41
- $d(x, A)$ 187
- $d(x, y)$ 187, 203
- egész függvény 314, 323
 - szám 20, 29
- egy valószínűséggel 368

egybevágóság *203*
 egyenes *137*
 — egyenletrendszere *44*
 — paraméteres egyenlete *44*
 egyenirányítás *277*
 egyenlet *36, 115, 228*
 egyenletes eloszlás *377*
 egyenletesen folytonos *195*
 — konvergál *252*
 — legjobb közelítés *228*
 egymás utáni bejárás *193*
 egymintás próba *387*
 egymintás t-próba *387*
 egymintás u-próba *387*
 egységelemes félcsoport *21*
 — gyűrű *21*
 egységmátrix *124*
 egységvektor *43, 132*
 egyszeresen összefüggő tartomány *293, 322, 324–325, 330–331*
 egyszerű görbe *193*
 egyszerűsítési szabály *21*
 együttható *27, 46, 48, 68*
 egzakt egyenlet *342*
 egzisztencia és unicitási tétel *352*
 Einstein, Albert (1879–1955) *157*
 Einstein-konvenció *157*
 ekvipotenciális *325*
 ekvivalencia *17*
 ekvivalenciaosztály *15*
 ekvivalenciareláció *15*
 ekvivalens *32, 148*
 — előállítás *226*
 — görbék *193*
 — normák *202, 202*
 eleme *122*
 elemei száma *33*
 elemi esemény *365*
 — függvény *96*
 — oszlopművelet *124*
 — sorművelet *124*
 elemien integrálható *96*
 elfajuló eset *219*
 elfogadási tartomány *386*
 elimináció *125*
 ellenhipotézis *386*
 ellentett *130, 365*
 ellipszis *335*
 elliptikus függvény *335*
 — integrál *335*
 eloszlás *368–369*
 eloszlásfüggvény *368–369, 370, 377*
 előállítási tétel *178*
 előjel függvény *22*
 előjelszabály *21*
 első *14*
 elsőfajú Bessel-függvény *117*
 — hiba *387*
 — szakadás *55, 197*
 elsőrendű *339*
 — egyenlet *338*
 eltolás *362*
 empirikus eloszlásfüggvény *385*
 — korrelációs *389*
 — kovariancia *389*
 — szórásnégyzet *386*
 ε -megoldás *350*
 eredmény *17*
 érintkezési pont *187*
 érintő *207*
 érintőegyenest *207*
 érintőformula *114*
 érintősík *227*
 érintőtér *205*
 érintővektor *207*
 erővonal *325*
 érték *15*
 értékkészlet *11*
 értelmezési tartomány *11*
 és *17*
 esemény *365*
 eseményalgebra *365*
 Eukleidész ($\approx$ i.e. 300) *36*
 euklideszi tér *175*
 Euler-egyenlet *359*
 Euler-féle helyettesítés *99*
 — összefüggés *73*
 — töröttvonal *350*
 Euler, Leonhard (1707–1783) *73, 226, 265, 313, 336, 353, 359*
 Euler–Monge-féle előállítás *226*
 explicit egyenlet *339*

— előállítás [226](#), [227](#)
 exponenciális eloszlás [377](#)
 — függvény [71](#), [313](#)
 — generátorfüggvény [119](#)
 — polinom [356](#), [356](#)
 Federer, Herbert (1920–2010) [391](#)
 fékezett Newton-módszer [229](#)
 felcserélhető [123](#)
 félcsoport [21](#)
 félérintő [274](#)
 felharmonikus [277](#)
 Feller, William (1906–1970) [391](#)
 F-eloszlás [382](#)
 felosztás [99](#), [236](#)
 felső bidiagonális [124](#)
 — egész rész [30](#)
 — háromszög egységmátrix [124](#)
 — — mátrix [124](#)
 — határ [14](#)
 — — tulajdonság [14](#)
 — határérték [59](#)
 — korlát [14](#)
 — lépcsős mátrix [124](#)
 — trapéz egységmátrix [124](#)
 — — mátrix [124](#)
 felső Hessenberg-mátrix [124](#)
 felső k -sávmátrix [123](#)
 felszín [249](#)
 feltételes eloszlásfüggvény [369](#)
 — szélsőérték-számítás [218–219](#)
 — valószínűség [367](#)
 feltételesen konvergens [62](#), [199](#)
 felület [226](#)
 felületi görbe [227](#)
 — integrál [249](#)
 — normális [227](#)
 — — egységvektor [227](#)
 felülről félig folytonos [195](#)
 — folytonos [195](#)
 Fényes Imre [391](#)
 ferdén Hermite-szimmetrikus [180](#)
 — önadjungált [180](#)
 — szimmetrikus [180](#)
 ferdetest [21](#)
 Ferrari, Lodovico (1522–1565) [36](#)
 Ferro, Scipione del (?1465–1526) [36](#)

Feynman, Richard Phillips (1918–1988) [392](#)
 f''' [211](#)
 Fibonacci, Leonardo Pisano (1170–1250) [27](#)
 Fischer, Ernst (1875–1959) [269](#)
 fixpont [202](#), [202](#)
 fixponttétel [202](#)
 fizikai jelentés [299](#)
 f'' [211](#)
 fluxus [299](#)
 $f^{(m)}$ [213](#)
 fok [46](#), [48](#)
 folytatás [339](#)
 folytonos [50](#), [190–191](#), [377](#)
 folytonosan átdeformálhatók egymásba [292](#)
 Fontana, Niccolo „Tartaglia” [tartajja] (?1500–1557) [36](#)
 fordított lengyel jelölés [17](#)
 forrásintenzitás [299](#)
 Fourier-együttható [175](#), [272](#)
 Fourier [furiÉ], Jean Baptiste Joseph (1768–1830) [175](#), [265](#), [269](#), [348](#)
 Fourier-sor [266](#), [269–270](#)
 Fourier-transzformáció [271](#), [313](#)
 főátló [122](#)
 főegyüttható [46](#)
 főelem [125](#)
 főminor [162](#)
 főnormális [111](#)
 főpolinom [46](#)
 főrés [329](#)
 főtengety-transzformáció [152](#)
 F-próba [387](#)
 Frank, Phillip (1884–1966) [335](#), [392](#)
 Fresnel [frenel], Augustin Jean (1788–1827) [321](#)
 Fresnel-féle integrál [321](#)
 Freud Róbert [392](#)
 Fried Ervin [392](#)
 Fuchs László [392](#)
 Fuksz, B. A. [392](#)
 funkcionál [173](#)
 független [368](#), [379](#)
 függvény [15](#)

- rendje pontban *329*
- függvényegyenlet *332*
- függvénytér *252*
- függvénytér *252*
- tagonkénti differenciálása *262*
- függvényter *252*
- fűrészfog-feszültség *277*
- f' *206*
- $f_{x_j}(x)$ *208*
- f_{xy} *211*
- Galois [galoá], Évariste (1811–1832) *313*
- $\gamma_1 \vee \gamma_2$ *193*
- gamma-függvény *332*
- Γ *332*
- $\check{\gamma}$ *193*
- Gauss, Carl Friedrich (1777–1855) *37*,
124–125, *127–129*, *131*, *134*, *226*, *278*,
298–299, *313*, *334*, *353*
- Gauss-féle előállítás *226*, *334*
- kiküszöbölés *124–125*, *128–129*
- Gauss–Green–Osztrogradskij-tétel
300–301
- Gauss–Jordan-kiküszöbölés *128–129*
- Gelfand, Iszrail Mojszejevics (1913–2009)
392
- generált altér *130*
- generátorfüggvény *117*
- generátorrendszer *132*
- geometriai eloszlás *376*
- multiplicitás *166*, *171*
- valószínűség *366*
- Giordano, F. R. *393*
- gitárhang *277*
- Gjunter, N. M. *392*
- g -nullahalmaz *285*
- Gombás Pál (1909–1971) *392*
- görbe *193*
- kezdőpontja *193*
- menti integrál *291*
- végpontja *193*
- görbék ekvivalenciája *193*
- görbület *111*
- gradiens *207*
- módszer *230*
- gráf *10*
- grafikon *10*, *15*
- Gram, Jorgen Pedersen (1850–1916) *176*
- Gram–Schmidt-ortogonalizálás *176*
- Green [grin], Georg (1793–1841) *278*, *299*,
303
- Green-tétel *303*
- Grönwall-lemma *351*, *352*
- Grönwall, Thomas Hakon (1877–1932)
351
- Gyemidovics, B. P. *392*
- gyök *30*, *45*, *115*, *228*
- gyökkritérium *64*, *200*
- gyöktényezős *47*
- Gyurmánczi János *391*
- gyűrű *21*
- ha ... akkor ... *17*
- Hadamard, Jacques (1865–1963) *68*, *313*
- halmaz *7*
- Halmos Pál R. *10*, *392*
- Hamilton-féle számok *41*
- Hamilton [hemilt], William Rowan
(1805–1865) *41*, *168*
- hamis *17*
- hányados *30*
- hányadoskritérium *64*, *200*
- harmonikus *324*
- sor *63*
- társ *324*, *324*
- háromszög-egyenlőtlenség *38*, *42*, *173*,
203
- háromszögpálya *281*
- Hass, J. *393*
- határ *187*, *299–301*
- határa lokálisan Lipschitz *297*, *306*
- határérték *274*
- határozatlan együtthatók módszere *348*
- integrál *91*
- határpont *187*, *298*
- határtól határig halad *353*
- hatvány *27*
- hatványhalmaz *9*
- hatványozás komplex *76*
- hatványsor *68*, *314*, *348*
- Hausdorff, Felix (1868–1942) *194*
- Hausdorff-tétel *194*
- Heaviside-függvény *349*, *361*

- Heaviside [heviszájd], Oliver (1850–1925) 348–349, 361
- Heine–Borel-tétel 190
- Heine, Eduard Heinrich (1821–1882) 190
- hely 15
- helyettesítéses integrálás 321
- helyettesítési érték 92
- Hermite-antiszimmetrikus 154
- Hermite [ermit], Charles (1822–1901) 154, 276
- Hermite-forma 154
- Hermite-szimmetria 173
- Hermite-szimmetrikus 154, 180
- Hessenberg, Karl Adolf (1904–1959) 124
- Hewitt, Edwin 392
- hibabecslési tétel 352
- Hilbert, David (1862–1943) 199, 313
- Hilbert-tér 199
- hipergeometrikus eloszlás 374
- hipersík 137
- hipotézis 386
- hisztogram 385
- holomorf 314, 319, 321–322, 331
- homogén 141, 362
- egyenlet 343
- lineáris egyenlet 165, 344
- polinom 48
- homogenitás 173
- homogén lineáris normál egyenlet 353
- homotóp 292, 319–320
- hossz 102, 244, 280
- hozzárendelés 15
- idegen 8
- identikus leképezés 15
- időszerű rész 41
- i -edik koordináta 10
- igaz 17
- implicit egyenlet 339, 345
- függvény tétel 215
- implikáció 17
- improprius integrál 109, 244
- — konvergens 109
- improprius integrál abszolút konvergens 109
- indefinit 152, 180
- index 16
- pályáé 320
- indexelt család 16
- halmaz 16
- halmazcsalád 16
- indexhalmaz 16
- infimum 14
- inflexió hely 87
- inhomogén lineáris egyenlet 344
- injektív 15
- integrációs változó 91
- integrál 100, 236, 255, 282
- kiszámítása 330
- integrálegyenlet 349
- $\int_{\gamma} f$ 291
- $\int_{\gamma} f(x) dx$ 291
- integrálható 100, 236, 255
- integrálközelítő összeg 254
- integráló szorzó 343
- integrálszámítás alaptétele 104
- $\int_T f$ 237
- integráltranszformációs formula 292
- $\oint_{\gamma} f$ 291
- $\oint_{\gamma} f(x) dx$ 291
- interpoláció 227–228
- invariáns altér 166
- inverz 12, 20, 124
- függvény tétel 216
- kép 12
- irány mentén differenciálható 206
- menti derivált 206
- irányítás 302
- irányított határ 311
- iránykoszinusz 301
- irány menti csökkentés módszere 230
- iránymező 340
- irányvektor 44
- irracionalis szám 30
- iteráció 202, 228
- izolált pont 49, 187
- szingularitás 329
- izometria 203
- izomorf 135
- izomorfizmus 135, 173–174
- Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) 42, 247, 276

Jacobi-determináns *247*
 Jacobi-identitás *42*
 Járai, Antal *23, 392*
 játék értéke *384*
 — mátrixa *383*
 jegy *67*
 jobb oldali derivált *77, 206*
 — — határérték *55, 196*
 jobb k -sávmátrix *124*
 jobbról folytonos *53, 195*
 jobbsodrású *42*
 jólrendezés *14*
 jólrendezett *14, 26*
 Jordan-bázis *171, 171–172*
 Jordan-blokk *171, 171*
 Jordan [zsordā], Camille (1838–1922)
 128–129, 171–172, 279, 356
 Jordan-felbontás *279*
 Jordan-normálalak *171, 171–172, 356, 360*
 Kamke, Erich (1890–1961) *392*
 karakterisztikus egyenlet *353, 359*
 — eloszlás *372*
 — függvény *33*
 — polinom *167*
 — valószínűségi változó *372*
 Káta Imre *391*
 k dimenziós térfogat *244*
 kép *12*
 képzetes *36, 37*
 — rész *37, 41*
 kételemű test *21*
 kétmintás próba *387*
 kétmintás t -próba *388*
 kétmintás u -próba *387*
 kettős sor tétel *64, 201*
 kettősviszony *318*
 kétváltozós művelet *17*
 — reláció *10*
 keverés *309*
 kevert stratégia *384*
 kezdőpont *193*
 kezdőszelet *14, 26*
 χ^2 -eloszlás *381*
 χ^2 -próba *388*
 kis rezgések *353*
 Kisdi Dávid *392*
 kisebb *14*
 kísérő transzformáció *146*
 kiterjesztés *12*
 kiterjesztési paraméter *230*
 kitevő *27*
 kizáró esemény *365*
 klasszikus Fourier-sor *270*
 Klein, Christian Felix (1849–1925) *278*
 Koebe-függvény *319*
 kogrediens *157*
 Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics
 (1903–1987) *388*
 Kolmogorov-próba *388*
 Kolmogorov–Szmirnov-próba *388*
 kommutatív *20*
 — csoport *21*
 — félcsoport *21*
 — gyűrű *21*
 — monoid *21*
 kompakt *189, 189*
 komplementer *9*
 komplex *354*
 — alak *271, 271*
 — egységggyök *39*
 — függvény *314*
 — potenciál *325*
 — szám *20, 37, 314*
 komplexifikálás *183*
 komplex szám trigonometrikus alakja *76*
 kompozíció *13, 123*
 komputeralgebrai rendszer *348*
 konfidencia-intervallum *386*
 konform *314*
 — ekvivalens *325, 325*
 — leképezés *325*
 konjugálás *362*
 konjugált *37, 41*
 — bilineáris leképezés *153*
 — gradiens módszer *231*
 — homogén *153*
 — lineáris *153*
 konjunkció *17*
 konkáv *87*
 — függvény *189*
 konstans görbe *193*
 — sorozat *58, 198*

— tag *46, 48*
 — variálás *344, 355, 358*
 konstansgyűthetős egyenlet *359*
 konstansgyűthetős homogén lineáris
 egyenlet *357*
 Konsztantyinov, N. N. *340*
 kontragrediens *157*
 kontrakció *202, 202*
 kontravariáns *156, 157*
 konvergál *58, 198, 252*
 konvergenciahalmaz *252*
 konvergencia-középpont *68*
 konvergenciasugár *69*
 konvergenciatartomány *69*
 konvergens *58, 109, 198, 244*
 — improprius integrál *109*
 — sor *61, 199*
 — szorzat *68*
 konvex *87, 293*
 — függvény *189*
 — halmaz *189*
 — kombináció *189*
 — poliéder *138*
 konvolúció *363*
 konzisztens *385*
 koordináta *156*
 koordinátafüggvény *47, 208*
 koordináta-rendszer *132*
 korlátos *49, 58, 187*
 — változású *278*
 korrelációs egyűthetős *380*
 korrigált empirikus szórásnégyzet *386*
 Kósa András *392*
 koszinusz *72*
 kovariancia *379*
 kovariáns *156, 157*
 kölcsönösen egyértelmű *15*
 környezet *49, 55, 187*
 körpálya *281, 320*
 körüljárási szám *320*
 követi *14*
 közé esik *14*
 közelítő integrálás *114*
 — megoldás *350*
 középérték-egyenlőtlenség *209*
 közönséges differenciálegyenlet *339*
 közvetlenül követi *14*
 — megelőzi *14*
 kritikus tartomány *386*
 Kronecker-delta *124*
 Kronecker-féle δ -függvény *17*
 Kuros, Alekszandr Gyennagyijevics
 (1908–1971) *164, 392*
 Kurzweil, Jaroslav *242, 392*
 Kuzmin, R. O. *392*
 különbség *9*
 külső derivált *311*
 — direkt összeg *136*
 — normális *297*
 — pont *187*
 — szorzat *308–309*
 kvadratikus *122*
 — forma *150*
 — leképezés *150*
 kvartilis *370*
 kvaternió *41*
 kvázi Newton-módszer *229, 233*
 Laczkovich Miklós *392*
 Lagrange középérték-tétele *83*
 Lagrange-egyenlet *346*
 Lagrange-elv *218–219*
 Lagrange-féle interpolációs eljárás *47*
 Lagrange-függvény *219*
 Lagrange-interpoláció *228*
 Lagrange-interpolációs alappolinom *47*
 Lagrange, Joseph Louis (1736–1813) *47,*
83, 89, 218–219, 228, 265, 313, 336,
353
 Lagrange-szorzó *219*
 Laguerre [lágér] Edmond Nicolas
 (1834–1886) *276*
 láncszabály *207*
 Landau, Edmund Georg Hermann
 (1877–1938) *23, 392*
 Landau, Lev Davidovics (1908–1968) *392*
 $\triangle$ *300, 324*
 Laplace-operátor *300*
 Laplace, Pierre Simon, Marquis de
 (1749–1827) *300, 313, 348–349, 360*
 Laplace-transzformáció *360*
 Laurent, Pierre Alphonse (1813–1854)
327

- Laurent-sor *327, 329*
- Lebesgue [lőbeg], Henry Leon
(1875–1941) *194, 288, 297*
- Lebesgue-integrál *288*
- Lebesgue-integrálható *108*
- Lebesgue–Stieltjes-mérték *288*
- Lebesgue-sűrűség *297, 297*
- Lebesgue-szám *194*
- Legendre [lőzsádr], Adrien Marie
(1752–1833) *276*
- legjobban approximáló elem *177*
- legjobb lineáris approximáció belső
szorzat térben *177*
- legkisebb *14*
- felső korlát *14*
- négyzetek módszere *184, 228, 389*
- négyzetes közelítés *228*
- legnagyobb *14*
- alsó korlát *14*
- lehetetlen esemény *365*
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716)
63, 104, 203, 336
- Leibniz-kritérium *63*
- Leighton, Robert B. (1919–1997) *392*
- Leindler László *392*
- Leiserson, Charles E. *391*
- leképezés *15*
- lengyel jelölés *17*
- lényeges szingularitás *329*
- leszűkítés *12*
- létezési és egyértelműségi tétel *352*
- *353*
- Levinson, Norman (1912–1975) *391*
- lezárt *187*
- L’Hospital [lopitál], Guillaume François
(1661–1704) *86*
- Lifsic, Jevgenyij Mihajlovics (1915–1985)
392
- lineáris algebra *336, 353*
- burok *130*
- differenciálegyenlet *336*
- differenciálegyenlet-rendszer *353*
- egyenlet *165, 228*
- egyenletrendszer *228*
- forma *148*
- funkcionál *148, 306*
- görbe *193*
- inhomogén egyenlet *356*
- kombináció *131*
- leképezés *141*
- normál differenciálegyenlet *354*
- — egyenlet *353*
- pálya *281*
- polinom *46, 48*
- rendezés *13*
- tér *130*
- törtfüggvény *48*
- transzformáció *142*
- — determinánsa *163–164*
- lineárisan független *132*
- függő *132*
- Liouville, Joseph (1809–1882) *323, 348*
- Liouville-tétel *323, 325*
- Lip *191*
- Lipschitz-felület *226, 249*
- Lipschitz-függvény *50, 191, 247*
- Lipschitz-kritérium *274*
- Lipschitz [lipsic], Rudolf Otto Sigismund
(1832–1903) *50, 191, 274, 297*
- ln *72, 76*
- logaritmus *76*
- függvény *76*
- naturalis *72*
- logikai jel *18*
- művelet *18*
- lokálisan egyenletesen *326*
- Lipschitz határú *297*
- Lotka, Alfred James (1880–1949) *341*
- Lotka–Volterra-modell *341*
- L’Hospital-szabály *86*
- MacLaurin, Colin (1698–1746) *80*
- MacLaurin-sor *80*
- mag *142*
- magasabbrendű derivált *211*
- differenciál *211*
- egyenlet *338, 347*
- lineáris egyenlet *358*
- parciális differenciál *211*
- majdnem biztosan *368*
- mindenütt *102, 240*
- maradék *30*
- maradékos osztás *30*

Markov, Andrej Andrejevics (1856–1922)

371

Markov-egyenlőtlenség 371

másodfajú hiba 387

— szakadás 55, 197

második derivált 77

— deriváltfüggvény 77

— duális tér 148

matematikai statisztika alaptétele 385

mátrix 122, 144–145, 149, 153

mátrixnorma 204

maximális QR -felbontás 185

maximális szinguláris érték felbontás 183

maximumelv 317

Mead, Roger 230

medián 370

m -edik differenciál 213

m -edrendű irány menti derivált 211

meglőzi 14

megengedett megoldás 139

megfeleltetés 10

megfordítás 193

megoldás 138, 338

megszámlálható 34

megszámlálhatóan végtelen 34

megszorítás 12

megszüntethető szakadás 55, 197

— szingularitás 329

mellékátló 122

mérhető 244

— felületdarab 249

— függvény 369

— tér 365

meromorf 330

merőleges 175

— vetítés 178

mérték 236, 244, 365

mértéktér 365

Meszéna György 392

metrikus tér 203

metset 8, 16

m -forma 307

Mikusiński, Jan (1913–1987) 349, 392

mindenütt sűrű 189

minimális QR -felbontás 185

minimális szinguláris érték felbontás 183

minimumfeladat 230

Minkowski-egyenlőtlenség 269

Minkowski, Hermann (1864–1909) 269

minor 161

minormátrix 161

Mises, Richard Edler (1883–1953) 335, 392

Mittag-Leffler, Gösta Magnus
(1846–1927) 331

m -lineáris forma 307

m -lineáris funkcionál 307

módosított Gauss-féle kiküszöbölés 127

— Newton-módszer 228

moduláció 362

módusz 377

Moivre [moávre], Abraham de
(1667–1754) 38

Moivre-azonosság 38

momentum 372

Monge [monzs], Gaspard (1746–1818)
226, 298

monoid 21

monom 46, 48

monoton csökkenő 16

— növekedő 16

Morera, Giacinto (1856–1909) 322

Morera-tétel 322

Morrey, Charles Bradfield, Jr.
(1907–1984) 297, 393

$M^\perp$ 175

$M \perp N$ 175

m -szer differenciálható 211

multifok 48

multilineáris 155, 307

— leképezés 213, 309

művelettartó 19

∇ 300

Nagy Attila 391

nagyobb 14

n -edrendű homogén lineáris egyenlet 358

n -edrendű konstanssegűtthatós lineáris
egyenlet 359

n -edrendű lineáris egyenlet 358

negáció 18

negatív 22

— definit 152, 180

- rész 108, 242
- szemidefinit 152, 180
- négy alapművelet 227
- négyzetes 122
- négyzetesen integrálható 268, 275
- Nelder, John Ashworth (1924–2010) 230
- Nelder–Mead-módszer 230
- nem 18
 - aktív 219
 - folytatható 339
 - megszüntethető szakadás 55, 197
- nemelfajuló eset 219
- Neumann János (1903–1957) 384
- Newton binomiális sora 95
- Newton [njútn], Isaac (1643–1727) 95, 104, 115, 228–229, 233, 336, 353
- Newton–Leibniz-formula 104
- Newton-módszer 115, 228
- $\parallel$ 172–174, 212–213
- normál egyenlet 340
 - integrációs tartomány 245
 - tartomány 245
- normális 180
 - eloszlás 378
- normált 173
 - tér 172, 174
- normálvektor 44
- normálvektor-mező 304
- nullahalmaz 102, 240
- nullelem 20
- nullér művelet 17
- nullgyűrű 22
- nullmátrix 123
- nullsorozat 58, 198
- $\mathbf{n}(x, A)$ 298
- nyeregpont 223
- nyílt 49, 187
 - gömb 49, 188
 - lefedés 189
 - leképezés 317
 - leképezések tétele 317
- nyom 167
- nyújtás 362
- oldjuk meg 342
- $\omega(f)$ 329
- operáció 15
 - operandus 17
 - operátor 15, 173
 - operátornorma 204
 - operátorszámítás 349
 - optimális megoldás 139
 - ortogonális 175, 177
 - komplementer 175
 - lineáris transzformáció 181
 - mátrix 181
 - projekció 178
 - rendszer 175
 - ortonormált rendszer 175, 269
 - oszlopindex 122
 - oszlopmátrix 122, 144
 - oszloprang 134
 - osztályozás 15
 - osztópont 99
 - Osztrogradszkij, Mihail Vasziljevics (1801–1861) 278, 299
 - önadjungált 180
 - összeadás axiómái 20
 - monoton 22
 - összeg 27, 61, 131, 199, 365
 - összegszabály 207
 - összehasonlító kritérium 62, 200
 - összehúzási paraméter 230
 - összehúzható 292
 - összetétel 13
 - összetett Simpson-formula 114
 - trapézformula 114
 - Páles Zsolt 220, 393
 - Pál Jenő 297, 393
 - pálya 280
 - indexe 320
 - paralelogramma-azonosság 175
 - páratlan 30
 - permutáció 158
 - parciális derivált 208
 - differenciál 208, 211
 - differenciálegyenlet 339
 - függvény 15
 - művelet 18
 - törtekre bontás 331
 - parciálisan differenciálható 208
 - $\partial_{h_m} \dots \partial_{h_1} f$ 211
 - $\partial_j f(x)$ 208

$\partial_{x_j} f(x)$ 208
 $\partial_x \partial_y f$ 211
 párhuzamos 137
 páronként diszjunkt 8
 — független 368, 379
 páros 30
 — permutáció 158
 Parseval-egyenlőség 270
 Peano-axiómák 24
 Peano-tétel 350
 peremérték probléma 338
 periodikus 270, 335
 permutáció 158, 308
 Petruska György 325, 334, 393
 p hatványon integrálható 268
 Picard, Charles Emile (1856–1941) 314, 336
 Pitagorasz-tétel 175
 p -norma 268
 Poincaré, Jules Henry (1854–1912) 278, 311
 Poincaré–Stokes-tétel 311
 Poisson-eloszlás 375
 Poisson [poasző], Simeon Denis (1781–1840) 375
 polinom 45, 47, 227–228
 polinomfüggvény 45, 47
 pólus 329, 330
 pont 137
 pontonként konvergál 252
 pontos alsó korlát 14
 — felső korlát 14
 pontosan akkor 17
 pontozott felosztás 99, 236
 Pontrjagin, Lev Szemjonovics (1908–1988) 393
 Potter, Murray Harold (1918–2008) 297, 393
 pozitív 22
 — definit 152, 173, 180
 — rész 108, 242
 — szemidefinit 152, 180
 precedencia 17
 primál feladat 223
 primitív egységgyökök 39
 — függvény 91, 207, 293, 314, 342
 — próba 386
 — próbafüggvények módszere 348
 — próbastatisztika 386
 — projekció 193
 — tétel 178
 q -kvantilis 370
 QR -felbontás 185
 racionális szám 20, 30
 — törtfüggvény 45, 48, 227, 335
 Rademacher tétele 247
 Rademacher, Hans Adolf (1892–1969) 247
 rang 134, 142
 rangmeghatározó aldetermináns 162
 redukciós paraméter 230
 reflexív 7, 15
 reflexivitás 32
 regressziós egyenes 380
 — felület 380
 — függvény 380
 — görbe 380
 — sík 380
 rektifikálható görbe 280
 rekurzió 26
 reláció 10
 relaxáció 115
 relaxációs paraméter 115, 229
 rend 329, 338
 — csökkentése 358, 359
 rendezés 13
 rendezett halmaz 13
 — pár 10
 — test 22
 rendezett n -es 10
 Rényi Alfréd (1921–1970) 393
 részhalmaz 7
 részintervallum 99
 részleges főelem-kiválasztás 129
 részletösszeg 61, 199
 részletszorzat 68
 részmátrix 161
 részsorozat 198
 reziduum 329
 $\text{Res}(c, f)$ 329
 reziduumtétel 330, 330
 rezolvens egyenlet 355, 355
 Riccati-egyenlet 345

- Riemann átrendezési tétele *65*
Riemann-féle lokalizációs tétel *275*
— számgömb *318*
Riemann-felület *318*
Riemann-függvény *55*
Riemann, Georg Friedrich Bernhardt
(1826–1866) *4, 55, 65, 100, 236, 275, 282, 313, 318, 325*
Riemann-összeg *100, 236*
Riemann–Stieltjes integrálközelítő *282*
Riemann-tétel *325*
Riesz–Fischer-tétel *269*
Riesz Frigyes (1880–1956) *269*
Rivest, Ronald L. *391*
 $\varrho(A)$ *166*
Rolle, Michel (1652–1719) *82*
Rolle-tétel *82*
rotáció *300*
Rouché [rusé], Eugène (1832–1910) *331*
Rouché-tétel *331*
Rudin, Walter (1921–2010) *68, 297, 393*
Ruffini, Paolo (1765–1822) *313*
Sabat, B. V. *392*
sajátaltér *166*
sajátérték *166*
sajátvektor *166*
Sands, Matthew *392*
sarokminor *162*
Schenk, Christoph *393*
Schipp Ferenc (1939–2024) *297, 392–393*
Schmidt, Erhard (1876–1959) *176*
Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921)
174, 213, 324
Schwarz-lemma *324*
semleges *20*
sem ... sem ... *17*
Sigler, Laurence Edward *10, 392*
 $\sigma(A)$ *166*
sík *137*
— egyenlete *44*
— paraméteres egyenlete *44*
síkgörbe *193*
sima felület *226*
— görbe *207*
Simon László *391*
Simon Péter *297, 393*
Simonyi Károly (1916–2001) *391, 393*
Simpson-formula *114*
simulókör *111*
skalár *130*
— rész *41*
skaláris szorzás *43, 174*
— szorzat *43, 174*
skalármező *190*
skalárral való szorzás *130*
skalár-vektor *190*
sor *61, 199*
— konvergens *61, 199, 252*
sorindex *122*
sormátrix *122*
sorompó módszer *235*
sorozat *25*
sorrang *134*
sorskálázás *129*
spektrálsugár *166*
spektrum *166*
standard normális *378*
statisztika *385*
statisztikai minta *385*
Stein, Clifford *391*
Stieltjes, Thomas Jan (1856–1894) *282, 288*
Stirling-formula *372*
Stirling [sztörling], James (1692–1770)
372
Stokes tétele *304*
Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903)
278, 296, 304, 311
stratégia *383*
Stromberg, Karl *392*
Student-eloszlás *382*
Student: Gosset, William Sealy
(1876–1937) *382*
súlyfüggvény *275*
sűrű *189*
sűrűségfüggvény *377*
Sylvester-féle tehetetlenségi tétel *152, 154*
Sylvester, James Joseph (1814–1897) *152, 154*
Szabó Lajos *391*
szakadás *55, 197*
szakaszonként lineáris görbe *193*

- — pálya *281, 320*
- síma *207*
- számosság *33*
- számtani *59*
- szekuláris egyenlet *353*
- szélsőérték-számítás *217–219*
 - feltételes *218–219*
- szeparábilis egyenlet *343*
- Szép Gabriella *391*
- Szidarovszky Ferenc *393*
- σ -algebra *365*
- szignifikáns *387*
- szigorúan konkáv *87*
 - — függvény *189*
 - konvex *87*
 - — függvény *189*
 - monoton csökkenő *16*
 - — növekedő *16*
- szimmetria *7, 32, 203*
- szimmetrikus *15, 122, 180, 213*
 - bilineáris forma *150*
 - — leképezés *150*
 - csoport *158*
 - differencia *9*
 - forma *307*
- szimplex *230*
- szimuláció *383*
- szinguláris érték *183*
 - — felbontás *183*
- szingularitás izolált *329*
 - lényeges *329*
 - megszüntethető *329*
- szinusz *72*
- Szmirnov, Nyikolaj Vasziljevics *388*
- szó *26*
- szokásos bázis *133*
 - belső szorzat *174*
- szórás *372*
- szórásnégyzet *372*
- szorzás *282*
 - axiómái *20*
 - monoton *22*
- szorzat *13, 27, 64, 66, 123, 143, 365*
 - konvergens *68*
- szög *175*
- Szőkefalvi-Nagy Béla (1913–1998) *265, 323, 325, 331, 334, 393*
- szubadditív *254*
- szubmultiplikatív *204*
- szukcesszív approximáció *336*
- szuperadditív *254*
- szuperjektív *15*
- szuperpozíció *356, 358*
 - elve *354*
- szuprémum *14*
- szűrjektív *15*
- tag *61, 199*
- tag k -adfokú *46*
- Tartaglia $\rightarrow$ Fontana, Nicolo *36*
- tartomány *189, 193*
- távolság *44, 49, 187, 203*
- távolságtartó leképezés *203*
- Taylor, Brook (1685–1731) *79–80, 89, 214*
- Taylor-formula *214*
 - Lagrange-féle maradéktaggal *89*
 - maradéktag nélkül *89*
- Taylor-polinom *89*
- Taylor-sor *80*
- Taylor-tétel *79*
- tégla *236*
- tehetetlenségi nyomaték *246*
- teljes *203, 267, 339*
 - eseményrendszer *365*
 - főelem-kiválasztás *129*
 - indukció *24*
 - — elve *24*
 - megoldás *339, 352–356, 358*
 - rendezés *13*
 - valószínűség tétele *367*
- tényező *68*
- tenzor *156*
- tenzorszorzat *156, 307, 309*
- tercilis *370*
- térfogat *244*
- térgörbe *193*
- téridő *42*
- természetes irányítás *306*
 - leképezés *148*
 - logaritmus *72*
 - paraméterezés *111, 281*
 - szám *20, 23*

térszerű *42*
 — rész *41*
 terület *244*
 Thomas, G. B. *393*
 Tietze, Ulrich *393*
 tiszta stratégia *383*
 tisztán képzetes *42*
 Titchmarsh, Edward Charles (1899–1963) *349*
 torlódási pont *49, 187, 189*
 torzítatlan *385*
 totális differenciál *206*
 totálisan differenciálható *205*
 többbretű *318*
 többszörös gyök *46*
 többváltozós függvény *17*
 tömb *26*
 törtlineáris *318*
 transzfinit indukció *26, 27*
 — rekurziótétel *26*
 transzformáció *15*
 transzponált *122*
 transzpozíció *158*
 tranzitív *7, 13, 15*
 tranzitivitás *32*
 trapézformula *114*
 trichotom *13*
 tridiagonális mátrix *124*
 trigonometrikus alak *38, 271*
 — függvény *37*
 — polinom *271*
 — rendszer *269*
 triviális affin sokaság *137*
 — altér *130*
 — homotópia *293*
 — invariáns altér *166*
 T. Sós Vera *392*
 tükrözési paraméter *230*
 Tyihonov, Andrej Nyikolajevics (1906–1993) *186*
 Tyihonov-operátor *186*
 Tyihonov-regularizáció *186*
 ugrás *55, 197*
 unér művelet *17*
 unió *8, 16*
 unitér *179*
 — tér *175*
 utolsó *14*
 üres halmaz *7*
 vagy *17–18*
 vagy ... vagy ... *17–18*
 valódi altér *130*
 — részhalmaz *7*
 valós alak *271*
 — rész *37, 41*
 — szám *20, 23*
 valószínűség *365*
 — folytonossága *367*
 valószínűségek szorzási szabálya *367*
 valószínűségi mező *365, 365–366, 368*
 — változó *368, 369*
 változás *278*
 változásfüggvény *278*
 változók szétválasztása *337*
 várható érték *370–371*
 variáció *206*
 variációs számítás *119*
 véges *33*
 — sorozat *25*
 végpont *193*
 végtelen *33*
 — dimenziós *132*
 — mértani sor *63*
 — sor *61, 199*
 — sorozat *24–25*
 — szorzat *68*
 egyes módszerek *348, 359*
 — szorzás *43*
 — szorzat *175*
 vektor *42, 130*
 — rész *41*
 vektoriális szorzás *42, 151*
 vektormező *190, 306*
 vektor-skalár *190*
 vektorsorozat *170*
 vektortér *130*
 vektor-vektor *190*
 Volterra, Vito (1860–1940) *341*
 Wade, William Raymond *265*
 Weierstrass tétele *52*

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm
 (1815–1897) 52, 199, 253, 323, 326,
 331
 Weierstrass-kritérium 253
 Weierstrass-tétel 326
 Weir, M. D. 393
 Welch, B. L. 388
 Welch-próba 388
 Wetzl Ferenc 391
 Wigner Jenő Pál (1902–1995) 327
 Wronski-determináns 358
 X -beli reláció 10
 $x \perp y$ 175
 $x(\tau) = \xi$ 340
 $x' = A(t)x$ 353
 $x' = A(t)x + b(t)$ 353
 $x' = Ax$ 357

$x' = f(t, x)$ 340
 z^w 76
 zárt 49, 187, 267
 — gömb 49, 188
 — görbe 193, 320
 — pálya 280, 322
 Zeidler, Eberhard 218, 393
 zérógyűrű 22
 zérushely 329, 331
 zérushelyek izoláltságának elve 316
 ζ függvény 119
 Zibolen Endre 391
 Ziermann Margit 392
 Zsukovszkij, Nyikolaj Jegorovics
 (1847–1921) 313, 326
 Zsukovszkij-profil 326
 Zwillinger, Daniel 393