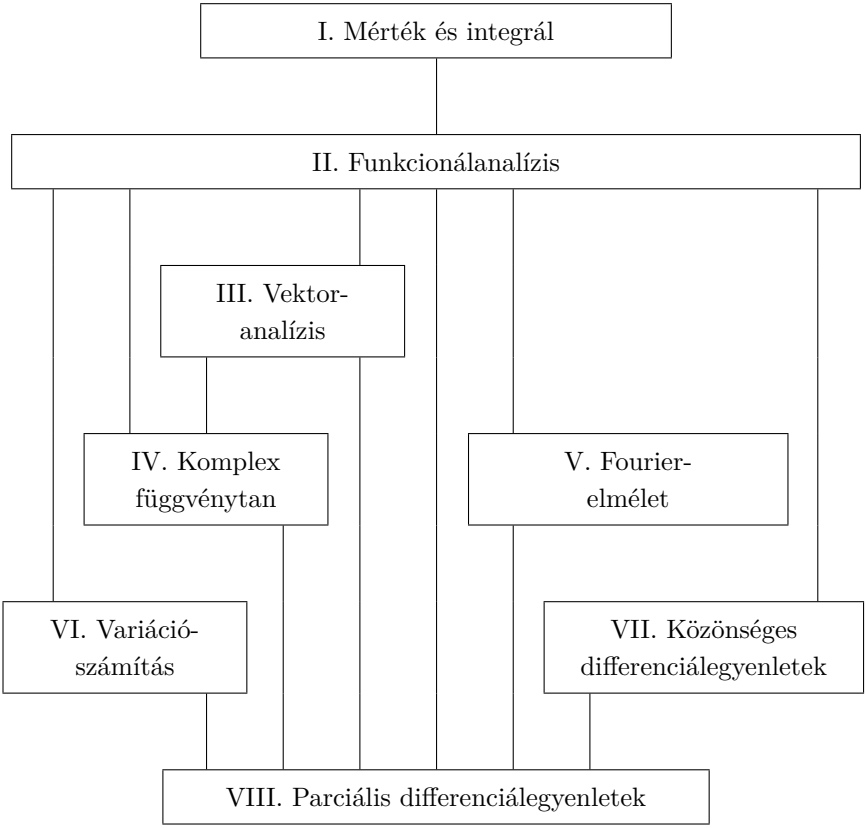
Modern Alkalmazott Analízis

Járai Antal

ELTE Informatikai Kar, 2026

Harmadik, átdolgozott elektronikus kiadás

Tanáromnak, Erdős Jenőnek, akitől oly sokan oly sokat tanultunk.


I. Mérték és integrál
II. Funkcionálanalízis
III. Vektor-
analízis
IV. Komplex
függvénytan
V. Fourier-
elmélet
VI. Variáció-
számítás
VII. Közönséges
differenciálegyenletek
VIII. Parciális differenciálegyenletek

Tartalomjegyzék

Bevezetés 6

I. Mérték és integrál 14

1 **Mértékelmélet** 16

2 **Integrálás** 35

II. Funkcionálanalízis 74

3 **Metrikus terek** 77

4 **Normált terek** 112

5 **Lineáris operátorok** 128

6 **Hilbert-terek** 156

7 **Spektrálelmélet** 172

8 **Kompakt operátorok** 215

III. Vektoranalízis 226

9 **Differenciálszámítás** 227

10 **A differenciálgeometria alapjai** 247

11 **Stieltjes-integrál és görbe menti integrál** 265

12 **Differenciálformák integrálása** 283

IV. Komplex függvénytan 308

13 **Analitikus függvények** 309

14 **Holomorf függvények** 323

15 **Meromorf függvények** 338

V. Fourier-elmélet 348

16 Klasszikus Fourier-sorok 350

17 Ortogonális polinomok 371

18 Fourier-transzformáció 402

VI. Variációszámítás 425

19 Az Euler–Lagrange egyenletek 426

VII. Közönséges differenciálegyenletek 467

20 Alapfogalmak 468

21 Elemi megoldási módszerek 473

22 Általános eredmények 483

23 Lineáris egyenletek 495

24 Stabilitás 507

VIII. Parciális differenciálegyenletek 517

25 Alapfogalmak és általános módszerek 519

26 Disztribúciók 537

27 Cauchy-feladatok 550

28 Peremérték-problémák 559

29 Vegyes feladatok 587

30 Nemlineáris egyenletek 605

Irodalom 621

Mutató 632

Bevezetés

A második kiadás bevezetése:

A természet könyvét a matematika nyelvén írták.

Galileo Galilei

Ne képzeljük, hogy a matematika nehéz, rideg, és ellentéte a józan észnek. A matematika a józan ész desztillátuma.

Lord Kelvin

Van egy történet két barátról, akik osztálytársak voltak a középiskolában, s most éppen munkájukról beszélgetnek. Egyikük statisztikus lett, s a népesség alakulásával foglalkozik. Egy különlenyomatot mutat volt osztálytársának. A dolgozat elején szokás szerint ott áll a Gauss-eloszlás, s a statisztikus elmagyarázza volt osztálytársának az egyes szimbólumok jelentését: melyik jelöli a népesség tényleges számát, melyik az átlagát s.í.t. Az osztálytárs kissé hitetlenkedve nézi a képletet, s gyanú támad benne: a statisztikus csak ugratja őt. „Honnan tudod te ezt?" kérdi kétkedőn. „S ez a szimbólum itt, ez mi?" „Ez?" mondja a statisztikus, „ez a π." „Hát az meg micsoda?" „Az a kör kerületének és átmérőjének viszonya." „Hm, te túlzásba viszed a tréfát", mondja az osztálytárs, „bizonyos, hogy a népességnek semmi köze sincs a kör kerületéhez."

Wigner Jenő (1959)

A matematika és a fizika közötti kapcsolat időről időre változik. Most és az utóbbi néhány évben harmónia uralkodik és mézesheteiket töltik. Láttam azonban más időket is, válás és keserűség idejét, amikor a testvértudományok haszontalannak vagy még rosszabbnak nevezték egymást. Az alábbi szóváltás egy híres elméleti fizikus és egy ugyanolyan híres matematikus között tipikus lett volna tizenöt vagy húsz évvel ezelőtt:

Fizikus: „Nincs szükségem matematikára. Minden matematikát, amire valaha is szükségem lesz, kitalálok egy hét alatt."

Matematikus: „Arra a hét napra gondolsz, amely alatt Isten teremtette a világot?"

Egy kissé komolyabb dokumentum található Hermann Weyl csoportelméletről és kvantummechanikáról szóló könyve 1928-as első kiadásának előszavában. Így ír: „Nem tudom elkerülni, hogy a (gyakran nem kívánt) közvetítő szerepét játszam ebben a drámában a matematika és a fizika között, akik megtermékenyítik egymást a sötétben, de megtagadják és félreértik egymást szemtől szembe."

Res Jost (1984)

d'Alembert urat nagy matematikusnak tartom in abstractis, *de ha kirándulásokat tesz az alkalmazott matematika területére, elvesztem minden tiszteletemet. ... és jobb lenne az igazi fizikus számára, ha egyáltalán nem lennének matematikusok a földön.*

Daniel Bernoulli

A matematikusok, akik mindent felfedeznek és megállapítanak, akik az egész munkát elvégzik, meg kell hogy elégedjenek a száraz számolók és rabszolgák szerepével; más, aki mindent csak elragad és mindenre igényt tart, mind az elődei, mind a követői felfedezéseit kisajátítja.

Isaac Newton

Két ember repül egy léghajón. „Hol vagyunk?" kérdi az egyik. A másik sokáig gondolkodik, és így válaszol: „Egy kosárban egy léggömb alatt." Ez matematikus kell, hogy legyen, mert sokáig gondolkozott, a válasz pontos és használhatatlan.

Népköltészet

Egy nap egy ember odament Bertrand Russellhez, és azt mondta: „Ön azt állítja, hogy egy hibás feltevésből bármi következik. Kérem, bizonyítsa be egy hibás feltevésből, hogy én vagyok a japán császár." „Well", mondta Russell. „$0 = 1$-ből következik $1 = 2$." „Ön és a japán császár az kettő, kettő egyenlő egy, kész."

Szájhagyomány

Nem vagyok képes matematikát tanulni, ha nem látok valami problémát, amit meg akarok oldani segítségével, és nem értem, hogy tud valaki matematikát tanítani anélkül, hogy bemutatva egy csoport problémát a hallgatókban felkeltse az érdeklődést a megoldás iránt és aztán megmutassa, hogyan használhatók az eszközök a megoldásra.

Steven Weinberg (1986)

A leggyakorlatiasabb megoldás egy jó elmélet.

Albert Einstein

Minél több fizikát tanulok, annál inkább meggyőződésem, hogy, bizonyos értelemben, a fizika adja a matematika legmélyebb alkalmazását. A megoldott matematikai problémák, vagy technikák, amelyek a fizikából jöttek a múltban, jelentik az éltető nedvet a matematikának. ... Az igazán mély problémák még mindig a fizikában vannak. Kutatási szinten a matematika egészségéhez, úgy gondolom, nagyon fontos ápolni ezt a kapcsolatot amennyire csak lehet.

Sir Michael Atiyah (1984)

A csoda, a matematika nyelvének alkalmas volta a fizika törvényeinek megfogalmazására, varázslatos adomány, melyet nem értünk, és nem is érdemlünk meg. Hálásaknak kell lennünk érte és remélnünk kell, hogy érvénye jövő kutatásaink folyamán — jóban és rosszban — fennmarad, s ki fog terjedni a tudomány tág területeire, örömünkre, bár még talán meghökkenésünkre is.

Wigner Jenő (1959)

(a) *A fizikai irodalomban a matematikai eszközöket nem mindig korrekt módon kezelik. Még az elméleti fizika legjobb tankönyvei is tartalmaznak hibás matematikai állításokat, vagy helytelen bizonyításokat. Ennek az a következménye, hogy sok matematikus tiszta matematikai meggondolásokra korlátozódik, vagy ha fizikai témakört tárgyalnak, akkor a fizikusnak nehézséget okoz, hogy az ismert fizikai anyagra ráismerjen.*

(b) *Másrészt, az alkotó fizikusnak számos kifogása van a matematikával szemben. „A matematika szigorúsága luxus. Konkrét válaszokra van szükségünk a kérdéseinkre. A matematikusok általános eredményei gyakran használhatatlanok a céljainkra, vagy a megfogalmazás olyan absztrakt, hogy nem tudjuk eldönteni, hogy egy matematikai eredmény hasznos-e a számunkra vagy sem. Így ki kell fejlesztenünk saját módszereinket, és nem várhatunk, amíg matematikailag igazolják őket. A tapasztalat szerint ez túl soká tart."*

Egy hallgató számára, aki matematikát és fizikát is akar tanulni, skrizofrén helyzet ez, és válaszúton érezheti magát. Tulajdonképpen mindkét fenti nézőpont jogos. ... Speciális példák választásával megpróbáljuk megmutatni, hogy létezik speciális matematikai és fizikai gondolkodás, és külön-külön is, együtt is fontosak a hatékony kutatáshoz. Sok fontos fizikai elmélethez nem deduktív matematikai okoskodással jutottak, hanem zseniális fizikusok szoros kapcsolatban a megfigyelt fizikai jelenséggel fejlesztették ki a speciális fizikai gondolatokat, matematikai szempontból igencsak kérdéses matematikai eszközöket használva. Ugyanakkor azonban számos nagyon gyümölcsöző matematikai ötletet is kifejlesztettek. A matematikai és fizikai gondolkodás különböző formája nagyon nehézzé teszi, hogy közös nyelvet találjunk a két tudomány számára. Egy hallgató például kétségbeeshet, ha megpróbálja lefordítani Landau és Lifsic [101] standard tíz kötetes elméleti fizika könyvét pontos matematikai nyelvre. A gyakorlat azt mutatja, hogy sokkal hasznosabb egy hallgató számára pragmatikus álláspontra helyezkedni, és megismerkedni mindkét *nyelvvel, a matematika és a fizika nyelvével is, és megpróbálni annyi kapcsolatot találni köztük, amennyit csak lehet.*

Eberhard Zeidler

A legnagyobb matematikusok, mint Archimédesz, Newton és Gauss, mindig egyenlő arányban egyesítették az elméletet és a gyakorlatot.

Felix Klein

Egy matematikai állítást értünk, ha

(i) használni tudjuk;

(ii) teljesen megértettük a bizonyítást;

(iii) bármikor egyedül újra megtaláljuk a bizonyítást.

Igazi megértésről csak akkor beszélhetünk, ha elértük a harmadik lépcsőfokot.

Alekszander Ostrowski (1951)

A matematikában a gondolat, ami számít.

Szonja Vasziljevna Kovalevszkaja

A matematika nem deduktív tudomány — ez sablon. Ha be akarunk bizonyítani egy tételt, nem csak felsoroljuk a feltevéseket, és elkezdünk érvelni. Amit teszünk, az kísérletezés, próbák és hibák, találgatás.

Paul Halmos (1985)

Ha tudományos munkát végzünk, gyakran le kell szállnunk nagy elveink magas lováról, és az orrunkkal a sárban turkálni. Ha elértük célunkat, elfedjük erőfeszítéseink nyomait, hogy gondolatunk isteni szikrának tűnjön.

Albert Einstein

Mindent olyan egyszerűvé kell tenni, amennyire csak lehet, de nem egyszerűbbé.

Albert Einstein

Amikor hallgató voltam, divat volt előadásokat tartani olyan címekkel mint „Elemi matematika magasabb szempontból". . . . Amire nekem szükségem lett volna, az néhány előadássorozat olyasmi címmel, mint „Magasabb matematika elemi szempontból".

Joel Franklin

A matematikai szigor olyan, mint az öltözködés: stílusában meg kell felelnie az alkalomnak. Csökkenti a kényelmet és korlátozza a mozgás szabadságát, ha túl bő vagy túl szoros.

G. F. Simmons

Ami világos és könnyen felfogható, vonz bennünket, a komplikációk elrettentenek.

David Hilbert

Ne számokat adj: szemléletet!

Egy kortárs természettudós egy matematikusnak.

Ezen könyv jegyzetként megjelent első kiadásának alapját azoknak az előadásoknak és gyakorlatoknak az anyaga alkotja, amelyeket 1990-ben és 1991-ben tartottam másod- és harmadéves fizikus hallgatók számára a Kossuth Lajos Tudományegyetemen analízisből. A jegyzet nagy része jól használhatónak bizonyult a programtervező matematikusok oktatásában is, egyes anyagrészek kisebb mértékű bővítése után. Egyes részeket alkalmazott matematikus illetve villamosmérnök hallgatók oktatásában is tudtam használni. Úgy gondolom, hogy haszonnal forgathatják mindazok, akiknek természettudományokkal vagy műszaki problémákkal kapcsolatos munkájuk során a matematikai analízisnek a differenciál- és integrálszámítás alapjain túlmenő ismeretére van szükségük. A modern műszaki- és természettudományok, elsősorban a fizika által használt matematikai apparátus igen nagy. Egy könyv nem vállalkozhat részletes ismertetésre, a cél csak az, hogy biztos alapot nyújtson.

A könyv anyaga két részre oszlik: törzsanyagra és kiegészítő részekre, amelyeket egy vagy több * jelöl, és kihagyhatók. Az anyag egy része feladatokba került. Azokat a feladatokat, amelyek anyaga a további anyag tárgyalásához szükséges, → jelöli. Természetesen egyszerű gyakorló feladatokat is tartalmaz a jegyzet a szükségesnek ítélt mennyiségben.

A törzsanyagot kiegészítettem további olyan eredményekkel, amelyeket hasznosnak vagy érdekesnek tartok, és a törzsanyaghoz könnyen kapcsolhatók. Ide sorolható a bizonyítások egy része is. Vázlatosan ismertetem a tárgyalt anyagrészekhez kapcsolódó numerikus eljárásokat. Ezeket a részeket is *-gal jelöltem. Számos, a törzsanyagot kiegészítő feladatot is beiktattam, némelyik igen nehéz. Hogy a feladatok közötti válogatást segítsem, egy-egy szám jelzi minden feladatnál, hogy milyen nehéz. Eggyel nagyobb szám kétszer akkora megoldási időt jelent. Természetesen minden ilyen skálázás nagyon szubjektív és erősen függ a megoldó előismereteitől.

Az anyag kiválasztásánál igyekeztem szem előtt tartani, hogy jegyzetíráshoz a legfontosabb eszköz Occam borotvája. Így elsősorban arra fordítottam gondot, hogy az anyag mély, a tárgyalt eredmények erősek legyenek, de mégis a lehetőségekhez képest egyszerű eszközöket használjak. A tárgyalás ennek megfelelően csak az alapvető lineáris algebrai fogalmakra és az egyváltozós függvények elemi differenciál- és integrálszámítására épül, és a jegyzet lényegében teljesen önálló.

Hogy a hallgatóknak kevesebb gondot okozzon, a törzsanyagban az elméletet sokszor csak az alapesetben, rendszerint skalár, vagy legfeljebb véges dimenziós vektor értékű függvényekre fejtem ki, de a bizonyításokat igyekeztem úgy megválasztani, hogy általánosabb esetben, rendszerint Banach-térbeli értékű függvényekre is változatlanok maradjanak, és külön rámutattam az általánosítási lehetőségekre. Néhány esetben több felépítési vagy bizonyítási módot is ismertetek.

A bizonyításokat úgy tekintettem, mint a fogalmak és gondolatok jobb megértésének eszközeit. Kihagytam azokat a bizonyításokat, amelyeket túlságosan „technikai" jellegűnek éreztem, ilyen esetekben a tétel állítását inkább feladatokkal igyekeztem megvilágítani.

Természetesen, a matematikai szigorúsághoz mindenütt ragaszkodtam, és ha elhagytam egy nehéz bizonyítást, azt rendszerint hivatkozással pótoltam. A definíciók általában tartalmazzák az új fogalom pár szavas megvilágítását is, és gyakran a definícióban megemlítem az új fogalom néhány triviális tulajdonságát. Ezek bizonyítása az olvasónak nem okozhat nehézséget. Mindenkinek, aki az anyagot meg akarja tanulni, azt javaslom, hogy minden definíciónál próbáljon meg egyszerű példákat találni a definiált fogalomra (és az „ellenkezőjére"), a tételeknél vizsgálja meg, hogy a feltételeket hol használtuk ki, miért nem hagyhatók el, és gyengíthetők-e? Oldjon meg minden feladatot, amelyet $\rightarrow$ jelöl, és a többi feladatból is minél többet!

A tömörség érdekében a jegyzet nem a szokásos, lineáris felépítésű, és néha olyan fogalmat vagy eredményt használunk fel, amely később kerül tárgyalásra, természetesen circulus viciosus nélkül. Az index segít az eligazodásban. Néhány feladat is „rossz helyen" van, és később tárgyalt anyagrész segíthet a megoldásban. Az ilyen — elismerem, kellemetlen — feladatok felébresztik az olvasó érdeklődését. Egy előadásban az előadó — a hallgatók előismereteitől is függően — biztosan el fog térni a jegyzet sorrendjétől. Például a metrikus terek tanításánál célszerű sort keríteni a normált terekkel és a belső szorzat terekkel foglalkozó fejezetek első néhány oldala ismertetésére, a metrikus terek tárgyalása általában megelőzi a mértékelméletet, stb.

Az irodalom ismertetésénél fejezetenként megadtam néhány kapcsolódó, illetve további elmélyedésre alkalmas – lehetőleg magyar nyelvű – munkát. Ezeket úgy igyekeztem kiválasztani, hogy az itt nem tárgyalt bizonyításokat tartalmazzák. Az idézetek nagy részét Zeidler [179] könyvéből vettem át.

A huszadik század matematikája talán Lebesgue mérték- és integrálelméletével kezdődött. A jegyzet első fejezete ezt ismerteti. A legfontosabb mértékek konstrukcióját részletesen tárgyalom, beleértve a Hausdorff-mértéket is. A mérhetőség fogalma az alkalmazások szempontjából csak teher, így a hangsúlyt azokra az eredményekre helyeztem, amelyek megmutatják, hogy a mérhetőség „szinte mindig" teljesül. Az integrál kétféle felépítését is megadom, egy egyszerűbb felépítést, amely a nemnegatív függvények integrálja segítségével gyorsan elvezet a fontos tételekhez, és egy bonyolultabb, de természetes és koordinátamentes, Banach-térbeli értékű függvényekre is alkalmazható felépítést. Az alapok részletes tárgyalása után bizonyítás nélkül szerepel az integrálszámítás több fontos tétele.

Az anyag központi része a funkcionálanalízis, ez a modern analízis szíve. Teljesen mellőzöm a topologikus tér fogalmát, csak a metrikus terekre építve a tárgyalás sokkal kevesebb fogalmat használ, szemléletesebb, de még kellően mély. Az operátorok tárgyalásánál – mindenütt, ahol ez kényelmes volt – Hilbert-térre szorítkoztam, az alkalmazásoknál ez az eset a legfontosabb. Bizonyítással szerepel a nemkorlátos normális operátorok spektrálelmélete. A nemlineáris funkcionálanalízisből csak a differenciálszámítást tárgyaljuk.

A vektoranalízis új ebben a kiadásban. A két- és háromdimenziós eset részletes tárgyalása után jutunk el a differenciálformák integrálásához. Geometriai jellegű, nem túl absztrakt felépítést választottam. Ez a fejezet a görbékkel és elemi felületekkel kapcsolatos differenciálgeometriai ismereteket is tárgyalja.

A komplex függvénytan klasszikus témakörét a szokásos módon a Cauchy-integráltétel homotóp változatára építettem, nem használva fel a Jordan-tételt. Mellőztem a Riemann-felületek fogalmát, mivel elegáns tárgyalásuk a differenciálható sokaságokra épülne.

A variációszámítás rövid tárgyalásánál az Euler–Lagrange-egyenletek levezetése a cél, mivel a fizika legfontosabb egyenleteit így kaphatjuk variációs elvekből. Röviden szerepel a Pontrjagin-féle maximumelv is.

A Fourier-elmélet tárgyalása a Hilbert-terek ismeretére épül. A klasszikus Fourier-sorok és ortogonális polinomok mellett a Fourier-transzformációt és az approxiációelmélet alapjait is részletesen tárgyalom.

A közönséges differenciálegyenleteknél az elmélet (egzisztencia, unicitás, függés a paraméterektől és a kezdeti értékektől) mellé számos megoldási módszer vázlatos ismertetését is beiktattam. A stabilitás tárgyalása csak vázlatos.

Mivel a Dirac-delta a fizikában és a műszaki alkalmazásokban úgyis előkerül, a parciális differenciálegyenleteket a disztribúcióelmélet segítségével tárgyalom. A disztribúciók ismertetése bizonyítások nélkül történik. Az elmélet tárgyalása így nem teljes, de igyekeztem vázolni néhány fontos gondolatot.

Jelölések. Feltételezzük az elsőéves anyaghoz tartozó lineáris algebra, valamint differenciál- és integrálszámítás ismeretét, azon a szinten, ahogy az megtalálható magyar nyelven Halmos [62], illetve Rudin [139] bevezető jellegű munkájában, de számos jegyzetben is, például az analízis alapismeretek a kitűnő Leindler–Schipp [103] jegyzetben. Ezeket az ismereteket hivatkozás nélkül használjuk, az ottani jelölésekkel együtt. Ezen kívül néhány algebrai fogalmat és jelölést (*algebra* fogalma, *komplexus műveletek*, stb.) is használunk, ezek megtalálhatók Fuchs [45] jegyzetében. Minden szükséges előismeret megtalálható a Járai [74] könyvben, amely szabadon letölthető az ELTE IK Könyvtár honlap-

járól. *Megszámlálható halmaz* alatt véges vagy *megszámlálható* végtelen halmazt értünk. A nullát is természetes számnak tekintjük, így az *egész szám*ok halmaza $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$; a *pozitív természetes szám*ok halmazát $\mathbb{N}^+$ jelöli. A *függvény*eket párok halmazának, azaz a *reláció*k speciális esetének tekintjük (lásd Halmos–Sigler [63]). Egy f reláció *értelmezési tartomány*át $\operatorname{dmn}(f)$-el, *értékkészlet*ét $\operatorname{rng}(f)$-el fogjuk jelölni. Az összes, X valamely részhalmazát Y-ba képező függvények osztályát $X \to Y$ jelöli. Így $f \in X \to Y$ azt jelenti, hogy f az X valamely részhalmazát Y-ba képező függvény, míg $f\colon X \to Y$ azt jelenti, hogy f az egész X-en értelmezett Y-beli értékű függvény. Egy adott halmazon értelmezett függvények között pontonként értelmezzük mindazokat a műveleteket, relációkat, stb., amelyek az értékkészletek elemei között értelmezve vannak. Egy A halmaz *karakterisztikus függvény*ét ξ_A fogja jelölni, ez A-n 1, egyébként 0. A *Kronecker-delta* függvényre $\delta_{xy} = 1$, ha $x = y$, egyébként nulla. Az X halmaz identikus leképezése önmagára $\mathbb{1}_X$. Egy kétváltozós f függvény esetén az $x \mapsto f(x, y)$, illetve $y \mapsto f(x, y)$ *parciális függvény*eket $f(., y)$, illetve $f(x, .)$ jelöli, és hasonló jelöléseket használunk többváltozós függvények esetén is. A *bővített valós szám*ok halmaza $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$(általában $+\infty$ helyett ∞-t írunk), a nyilvánvaló természetes rendezéssel és az algebrai műveletekkel, amelyeket akkor definiálunk, ha ez folytonosan lehetséges. (Például $\infty + \infty = \infty$, $x \cdot \infty = \infty$, ha $x > 0$, de $\infty - \infty$ és $0 \cdot \infty$ nincs definiálva.) Néhányszor $0 \cdot \infty$-t célszerű 0-nak definiálni. Ha ezt a megállapodást használjuk, jelezni fogjuk. Megállapodás szerint $\inf \emptyset = \infty$ és $\sup \emptyset = -\infty$. A $\mathbb{K}^n$ tér egy vektorának a koordinátáit, vagy egy lineáris transzformációjának a mátrixát mindig a standard bázisban értjük, ha mást nem mondunk. Bonyolultabb jelöléseket gyakran rövidítünk részeik elhagyásával. Például, egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz külső normálisát az x pontban $\mathbf{n}(x, A)$ jelöli, de ha nem okozhat félreértést, csak $\mathbf{n}(x)$-et, sőt, esetleg $\mathbf{n}$-et írunk. Fizikai, kémiai, műszaki példákban minden mértékegység az SI rendszerben értendő.

A könyv jegyzetként megjelent első változata 1991-ben készült el. A jelen kiadás jelentősen kibővült. Az első változat összeállítása során sok támogatást, hasznos tanácsot kaptam kollégáimtól, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Analízis Tanszéke dolgozóitól, nélkülük ez a könyv nem jöhetett volna létre. Különös köszönettel tartozom Daróczy Zoltánnak†, akitől a mérték- és integrálelméletet, Makai Imrének†, akitől közönséges differenciálegyenleteket és variációszámítást, Losonczi Lászlónak, akitől a funkcionálanalízist és a parciális differenciálegyenleteket tanultam, és gazdag oktatási tapasztalataival segített, Maksa Gyulának, akitől az ortogonális sorokat tanultam, Molnár Lajosnak, aki több részt átnézett, és aki a spektrálelmélettel kapcsolatban sokat segített, Páles Zsoltnak, akivel az anyag nagy részét többször megbeszéltem, és több részt többször is átnézett, Szabó Györgynek†, aki több évig oktatta ezt a tárgyat, és rendelkezésemre bocsátotta az általa összeállított anyagot, Száz Árpádnak, akitől kutatási területével, a disztribúcióelmélettel kapcsolatban sokat tanultam, Székelyhidi Lászlónak, akitől átvettem a differenciálegyenletek tárgyalásának módját, és tervezett közös jegyzetünkből több részt, és Gilányi Attilának a hasznos beszélgetésekért. Ugyancsak köszönettel tartozom számos kollégának jelenlegi munkahelyeimen, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen és a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, különösen Czách Lászlónak, Fridli Sándornak, Laczkovich Miklósnak, Schipp Ferencnek† és Simon Péternek. Minden megjegyzést, észrevételt, segítséget köszönettel veszek.

Köszönöm könyvem lektorának, Maksa Gyulának nagyon alapos, kritikus és lelkiismeretes lektori munkáját.

Köszönöm feleségemnek és gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték, hogy könyvírással töltöttem számos hétvégét és szünidőt. A szedést az AmSTEX Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával végeztem.

Végezetül köszönöm a TYPOTEX Kiadónak, hogy vállalta könyvem megjelentetését, munkatársainak pedig a szedéssel kapcsolatos javaslataikat, tanácsaikat. Köszönetem fejezem ki a Felsőoktatási Tankönyvpályázatok Kuratóriumának a könyv kiadásához nyújtott támogatásáért.

Budapest, 2007. február 25.

A jelenlegi harmadik, elektronikus kiadás lényegében két, a Műegyetemen MSc hallgatók számára tartott előadás anyagával bővült. Az egyik előadás számos témakör alapjait tartalmazta: Fourier-analízis, waveletek, Hardy-terek, differenciálható sokaságok, maximumelv, numerikus módszerek stb. Ennek anyaga elszórva épült be a jelen kiadásba. A másik előadás tárgya nemlineáris differenciálegyenletek volt. Ez egy új, utolsó fejezetbe került. A topologikus terek és a dimenzióelmélet rövid tárgyalása, valamint a Pontrjaginféle maximumelv bizonyítása új ebben a kiadásban. Vannak új feladatok is. A nehezebb feladatoknál általában szerepel a megoldás ötlete vagy utalás arra, hogy hol található meg. Számos hibát is kijavítottam.

Budapest, 2025. október 23.

Járai Antal

Komputeralgebra Tanszék, Eötvös Loránd Tudományegyetem
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

I. Mérték és integrál

Majdnem minden fogalom, amely a modern mérték- és integrálelmélethez kapcsolódik, Lebesgue (1875–1941) munkájára vezethető vissza. Ezeknek a fogalmaknak a bevezetése volt a fordulópont a tizenkilencedik század matematikájából a huszadik század matematikájába való átmenet során.

N. J. Vilenkin (1975)

A mérték fogalma egyidős a matematikával: a matematika alapjait a hosszúság-, terület- és térfogatmérések hívták életre. Később a különböző mértékek, a hosszúság, terület, térfogat, ívhossz és felszín fogalmát, legalábbis bizonyos egyszerűbb alakzatokra, a görög matematikusok pontosan definiálták. Arkhimédész görbe vonalakkal határolt síkidomok (például parabolaszegmens) területét, és görbült felületű testek (például gömb, henger) térfogatát definiálta és határozta meg, lényegében integrálszámítás segítségével.

A mérték fogalma szoros kapcsolatban áll az integrál fogalmával. Minden integrálfogalom lényegében a következőképpen épül fel: az integrációs tartományt kis részekre osztjuk, majd minden kis rész mértékét szorozzuk az integrálandó függvénynek ezen a részen felvett értékeit közelítő értékkel, és az így nyert szorzatok összegének vesszük a határértékét, miközben a beosztás valamilyen értelemben „finomodik".

A sokszögek területének, illetve a poliéderek térfogatának egyszerű fogalmát először Giuseppe Peano és Camille Jordan terjesztették ki a XIX. század végén a sík, illetve a tér részhalmazainak nagyobb osztályára, véges sok poliéderrel történő külső és belső közelítéseket használva. (Peano–Jordan-mérték.) Ez a mértékfogalom egyszerű, de több célra, elsősorban az integrálás céljára, nem teljesen megfelelő. René Baire és Émile Borel fejlesztették tovább, de a döntő lépést Henry Leon Lebesgue tette meg 1902-ben. Lebesgue véges lefedések helyett megszámlálható sok ismert mértékű halmazzal történő lefedéseket vizsgált, és bevezetett a euklidészi terekben egy, a Peano–Jordan-mértéknél jóval általánosabb és kényelmesebben kezelhető mértéket, valamint egy erre alapozott integrálfogalmat, és bebizonyított sok fontos, ezekre a fogalmakra alapozott tételt.

Az évek során egyre nyilvánvalóbbá váltak az új mérték- és integrálfogalom előnyei: a jóval nagyobb általánosság, az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, az integrál és a differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Döntő lépés volt a Riesz–Fischer-tétel felfedezése (1907), amely összekapcsolta Lebesgue elméletét az ortogonális sorok régi, és a funkcionálanalízis akkor születő új elméletével, új lendületet adva mindegyiknek. A század tízes-húszas éveiben tisztázódtak a mérték- és integrálelmélet, és a vele szoros kapcsolatban álló valós függvénytan alapvető kérdései, és az elmélet a modern analízis egyik legfontosabb eszközévé vált. A valószínűségszámítás megalapozását 1933-ban Andrej Nyikolajevics Kolmogorov a mértékelmélet segítségével végezte el, ezzel a valószínűségszámítás a mértékelmélet egyik legfontosabb felhasználási területévé vált. Ugyanebben az évben Haar Alfréd magyar matematikus bevezetett egy Lebesgue-típusú mértéket, amely döntő jelentőségű a topologikus csoportok elméletében. A modern geometria egyes fejezetei is elképzelhetetlenek a Lebesgue-féle mértékelmélet nélkül.

Itt a hangsúlyt az eredmények gyors elérésére helyezzük, mellőzve a – matematikus számára bizonyítási eszközként nélkülözhetetlen – finomabb eredményeket. A külső mértékek és a mértékterek tárgyalása után definiáljuk a Lebesgue-, Lebesgue–Stieltjes-, és a Hausdorff-mértéket, összefoglalva legfontosabb tulajdonságaikat. A mérhető függvények tárgyalása nagyon rövid: csak azon eredményekre szorítkozunk, amelyek mutatják, hogy ez a függvényosztály minden, a gyakorlatban felmerülő függvényt tartalmaz. Az integrál kétféle felépítését is megadjuk. Az egyik egyszerűbb és koordinátákat használ. A másik koordinátamentes, és végtelen dimenziós terekben is alkalmazható. Az alapvető tételek tárgyalása után bizonyítások nélkül foglaljuk össze az „integrálási szabályokat", azokat az aránylag könnyen megfogalmazható, de néha nehezen bizonyítható eredményeket, amelyeket a matematika alkalmazásaiban lépten–nyomon használunk. Ezeknek a tételeknek a bizonyítása „Mérték és integrál" című könyvemben megtalálható.

1

Mértékelmélet

Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel ezeket, hogy atyáink következtetéseire rácáfoljanak, s soha nem is fogják ezeket másra használni.

Henry Poincaré

Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!

Charles Hermite

1.1. Halmazfüggvények. A geometriai hossz, terület, térfogat, ívhossz, felszín, a valószínűség, valamint a fizikában az extenzív mennyiségek közös tulajdonságait általánosító mérték fogalmát kívánjuk vizsgálni. Egy X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett μ függvénnyel (*halmazfüggvénnyel*) kívánunk foglalkozni. Olyan μ halmazfüggvények érdekelnek bennünket, amelyek nemnegatív bővített valós számokat vesznek fel értékként, és amelyekre

(1) $A, A_i \in \mathcal{H}$, $A \subset \bigcup_i A_i$ esetén $\mu(A) \leq \sum_i \mu(A_i)$

teljesül, bármely véges A_i halmazrendszerre. Ezt a tulajdonságot *szubadditivitás*nak fogjuk nevezni. A szubadditivitásból következik a *monotonitás*: ha $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$. Az egyszerűbb fogalmazás érdekében, érdemes megállapodni abban, hogy az üres unió az üres halmaz, az üres összeg pedig nulla. Így ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\emptyset) = 0$. További hasznos megállapodások: $\inf \emptyset = \infty$ és $\sup \emptyset = -\infty$. A továbbiakban ezeket használni fogjuk. Néha egyszerűsíti a fogalmazást, ha $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$; ha ezt használjuk, azt külön jelezzük.

Egy másik követelmény, amelyet szemléletünk sugalmaz:

(2) diszjunkt $A_i \in \mathcal{H}$ rendszer esetén, ha $\cup_i A_i \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$,

bármely véges A_i halmazrendszerre. Ez az *additivitás*. Megállapodásunk értelmében ebből is következik, hogy ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\emptyset) = 0$.

A tapasztalat szerint sokkal jobban használható fogalmakat kapunk – jobb lesz a határátmenettel való kapcsolat – ha erősebb követelményeket támasztunk, és (1) illetve (2) teljesülését megszámlálható halmazrendszerre követeljük meg. Ekkor a *σ-szubadditivitás* illetve *σ-additivitás* fogalmához jutunk. (Mivel nemnegatív tagú sorok összege permutációinál nem változik, a jobb oldali összeget a tagok tetszőleges sorbarendezésénél fellépő részletösszegek határértékeként definiálhatjuk.) Célszerűnek tűnik a μ halmazfüggvényt az X alaphalmaz összes részhalmazán értelmezni. A σ-szubadditivitásnál ez nem okoz problémát. A σ-additivitás esetén ez sajnos nem mindig tehető meg. Célszerűnek tűnik μ értelmezési tartományától megkövetelni, hogy ne vezessenek ki belőle a leggyakoribb halmazműveletek. Ezen meggondolások segítségével az alábbi fogalmakhoz jutunk.

1.2. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *σ-algebrá*nak nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(2) ha $A_i \in \mathcal{A}$ egy megszámlálható halmazrendszer, akkor $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Vegyük észre, hogy $\emptyset \in \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmaz*oknak nevezzük. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktér*nek, μ-t pedig *mérték*nek nevezzük, ha μ az $\mathcal{A}$-n értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű σ-additív halmazfüggvény. Mértéktér egy részhalmazát *σ-véges*nek nevezzük, ha lefedhető megszámlálható sok véges mértékű mérhető halmazzal. A μ mértéket (vagy a mértékteret) *véges*nek nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$ és *σ-véges*nek, ha X σ-véges. Ha $\mu(X) = 1$, akkor μ-t *valószínűségi mérték*nek nevezzük. A mértékteret (vagy a mértéket) *teljes*neknevezzük, ha bármely mérhető és nullmértékű halmaz minden részhalmaza is mérhető.

1.3. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazainak rendszere, és $\mu(A)$ az A elemeinek száma, ∞, ha A-nak végtelen sok eleme van. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér; μ-t *számláló mérték*nek nevezzük.

1.4. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbség és a megszámlálható metszetképzés, μ pedig σ-szubadditív, valamint*

(1) *ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \le \mu(B)$ (monotonitás); ha még az is teljesül, hogy $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(2) *mérhető halmazok bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ sorozatára*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i);$$

(3) *mérhető halmazok bármely szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sorozatára, ha $\mu(A_1) < \infty$, akkor*

$$\mu\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

A (2) és (3) tulajdonságokat szokás a *mérték folytonosságá*nak nevezni.

Bizonyítás. A

$$\cap_i A_i = X \setminus (\cup_i (X \setminus A_i))$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Másrészt

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B).$$

A σ-szubadditivitás bizonyításához azt kell észrevenni, hogy ha $A \subset \cup_{i \in I} A_i$, $I \subset \mathbb{N}$, akkor $B_i = (A \cap A_i) \setminus (\cup_{j<i} A_j)$ jelöléssel $A = \cup_i B_i$ és a B_i-k diszjunktak. (1) azon múlik, hogy A és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig B. (2) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a B_i-k diszjunktak, így

$$\begin{aligned} \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(3)-at megkapjuk, ha (1)-et és (2)-at alkalmazzuk a $B_i = A_1 \setminus A_i$ halmazokra.

→ **1.5. Feladat [6].** Adjuk meg egy háromelemű halmazon az összes σ-algebrát.

→ **1.6. Feladat [7].** Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is σ-véges mértéktérre.

1.7. Feladat [8]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B), \quad \text{ha} \quad A, B \in \mathcal{A}$$

eltérés $\mathcal{A}$-n.

1.8. Feladat [9]. Legyen X tetszőleges halmaz, $f\colon X \to [0, \infty]$ tetszőleges függvény, $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazainak osztálya, és legyen

$$\mu(A) = \sup\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) : \{x_1, \dots, x_n\} \subset A\},$$

ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

1.9. Külső mérték, Carathéodory-feltétel. Egy X halmaz összes részhalmazán értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű és σ-szubadditív halmazfüggvényt *külső mérték*nek fogunk nevezni. Legyen μ külső mérték az X halmazon. Egy $A \subset X$ halmazt *μ-mérhető*nek nevezünk, ha

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \text{minden } T \subset X\text{-re.}$$

Mivel a $\leq$ mindig teljesül, elég a $\geq$ feltételt vizsgálni, ha $\mu(T) < \infty$. A definíciót az motiválja, hogy ha ki szeretnénk válogatni azokat a halmazokat, amelyeken μ σ-addditív, csak olyan halmazok jöhetnek szóba, amelyek elég sok halmazt „jól vágnak ketté".

1.10. Tétel. *Legyen μ külső mérték X-en, és jelölje $\mathcal{A}$ a μ-mérhető halmazok osztályát. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ teljes mértéktér.*

Gyakran, nem teljesen korrekt módon, $\mu|_{\mathcal{A}}$ helyett csak μ-t írunk.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ha A μ-mérhető, akkor

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$$

minden T-re, de $T \cap (X \setminus A) = T \setminus A$ és $T \setminus (X \setminus A) = T \cap A$ miatt ez azt jelenti, hogy $X \setminus A$ is μ-mérhető. Ha most A és B μ-mérhetőek, akkor

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \\ &= \mu(T \cap A) + \mu((T \setminus A) \cap B) + \mu((T \setminus A) \setminus B) \\ &\geq \mu(T \cap (A \cup B)) + \mu(T \setminus (A \cup B)), \end{aligned} \tag{1}$$

ha $T \subset X$, így $A \cup B$ is μ-mérhető. Ebből indukcióval kapjuk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a véges unió- és metszetképzésre. Az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots$$

összefüggés szerint elég megszámlálható végtelen sok diszjunkt μ-mérhető halmaz uniójáról megmutatni, hogy μ-mérhető. Vegyük észre, hogy (1)-ben egyenlőség áll, és így (1)-ből következik, hogy ha A, B diszjunktak, és $T \subset A \cup B$, akkor

$$\mu(T \cap (A \cup B)) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap B).$$

Ez nyilván tetszőleges $T \subset X$-re is érvényes marad. Ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt μ-mérhető halmazok, akkor indukcióval

$$\mu(T \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(T \cap A_i). \tag{2}$$

Innen

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{n} A_i)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)), \end{aligned}$$

amiből $n \to \infty$ határátmenettel

$$\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

és a külső mérték σ-szubadditivitása miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

azaz az $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz μ-mérhető.

Megmutatjuk, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt, mérhető halmazok, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Vegyük észre, hogy minden n természetes számra

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i).$$

Mivel (2) miatt $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk. Végül, ha $\mu(A) = 0$, akkor $T \cap A \subset A$ miatt $\mu(T \cap A) = 0$, így $T \setminus A \subset T$ miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \setminus A) = \mu(T \setminus A) + \mu(T \cap A),$$

azaz A μ-mérhető, amiből következik a teljesség.

$\rightarrow$ **1.11. Feladat [5].** Legyen X tetszőleges halmaz, $\mu(A)$ legyen 0, ha A üres, X egyéb részhalmazaira pedig legyen 1. Mutassuk meg, hogy μ külső mérték, és keressük meg a μ-mérhető halmazokat.

1.12. Külső mérték konstruálása. *Legyen X egy halmaz, és ν az X részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű halmazfüggvény. Ha $B \subset X$, legyen $\mu(B)$ az összes $\sum_i \nu(A_i)$ megszámlálható összegek infimuma, ahol $A_i \in \mathcal{H}$ és $B \subset \cup_i A_i$. Ekkor μ külső mérték X-en.*

μ-t a *ν-höz tartozó külső mérték*nek nevezzük.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a B_j megszámlálható halmazrendszer (ahol az indexek pozitív természetes számok) lefedi a B halmazt. Meg kell mutatnunk, hogy $\mu(B) \leq \sum_j \mu(B_j)$. Ha a jobb oldalon álló összeg ∞, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Egyébként legyen $\varepsilon > 0$. Van olyan $A_{i,j}$ megszámlálható halmazrendszer, amely lefedi B_j-t, és amelyre

$$\sum_i \nu(A_{i,j}) \leq \mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Mivel az összes $A_{i,j}$ együtt lefedi B-t,

$$\mu(B) \leq \sum_j \sum_i \nu(A_{i,j}) \leq \sum_j \left(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \leq \sum_j \mu(B_j) + \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, az egyenlőtlenségnek ε nélkül is fenn kell állnia.

1.13. Tétel. *Az előző tétel jelöléseivel, μ pontosan akkor kiterjesztése ν-nek, ha az σ-szubadditív. Egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor μ-mérhető halmaz, ha minden $A \in \mathcal{H}$-ra, amire $\nu(A) < \infty$, fennáll, hogy*

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B).$$

Vegyük észre, hogy egy ν mértékből kiindulva, egy μ teljes mértékhez jutunk, amely kiterjesztése ν-nek, ez a *természetes kiterjesztés*. Ebből látható, hogy ha mértékek helyett teljes mértékekkel, vagy külső mértékekkel dolgoznánk, az nem jelentené az általánosság lényeges megszorítását. Ráadásul külső mértékekkel dolgozni kényelmesebb is lenne. Hogy mégsem ezt tesszük, annak oka az, hogy ez ma még nem terjedt el általánosan.

Bizonyítás. Az első állítás triviális. A második állításnál $\mu(A) \leq \nu(A)$ miatt a szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy ha $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$, akkor $\mu(T) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és A_i olyan megszámlálható, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló rendszer, amely lefedi T-t, és amelyre $\mu(T)+\varepsilon \geq \sum_i \nu(A_i)$. Ekkor

$$\mu(T) + \varepsilon \geq \sum_i \nu(A_i) \geq \sum_i \mu(A_i \cap B) + \sum_i \mu(A_i \setminus B) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

$\rightarrow$ **1.14. Feladat [6].** Az $X = \{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazaira legyen $\nu\{1\} = 1$, $\nu\{1, 2\} = 2$, $\nu\{2, 3\} = 5$, $\nu\{3\} = 2$, és $\nu\{1, 2, 3\} = 6$. Határozzuk meg a ν-ből származó külső mértéket és a mérhető halmazokat.

1.15. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha μ külső mérték, $B \subset A$, a B halmaz mérhető és $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, akkor A is mérhető.

1.16. Feladat [8]. Legyen μ külső mérték X-en, $Y \subset X$ és $(\mu\lfloor Y)(A) = \mu(Y \cap A)$, ha $A \subset X$. Mutassuk meg, hogy $\mu\lfloor Y$ külső mérték X-en.

1.17. Feladat [8]. Legyen μ külső mérték X-en, $f\colon X \to Y$ egy tetszőleges függvény, és $(f_{\#}\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$, ha $B \subset Y$. Mutassuk meg, hogy $f_{\#}\mu$ külső mérték Y-on.

$*$ **1.18. Feladat [12].** Legyen ν külső mérték X-en, $\mathcal{H}$ az X részhalmazainak egy rendszere, amelyre $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$. Legyen μ a $\nu|\mathcal{H}$ halmazfüggvényhez tartozó külső mérték, és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minden eleme ν-mérhető és μ mérhető is. Mutassuk meg, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz μ-mérhető és lefedhető megszámlálható sok $\mathcal{H}$-beli véges mértékű mérhető halmazzal, akkor az A halmaz ν-mérhető is, és $\nu(A) = \mu(A)$. (Lásd Járai [71].)

$*$ **1.19. Feladat [11].** Legfeljebb három elemű X halmazon adott ellenpéldákkal mutassuk meg, hogy az előző feladat feltételei közül egyik sem hagyható el. (Lásd Járai [71].)

1.20. Borel-halmazok. Legyen μ mérték az X metrikus téren. Természetes dolog a mérték és a topológia kapcsolatát vizsgálni. A legegyszerűbb kapcsolat az, ha a nyílt halmazok mind mérhetőek. A nyílt halmazok mérhetőségéből igen sok halmaz mérhetősége következik. Például mérhetőek a zárt halmazok, azok a halmazok, amelyek megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként állíthatók elő (ezeket $\mathcal{G}_\delta$-*halmaz*oknaknevezzük), azok a halmazok, amelyek megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként állíthatók elő (ezeket $\mathcal{F}_\sigma$-*halmaz*oknaknevezzük), stb. Általában mindazok a halmazok mérhetőek, amelyek előállíthatók a nyílt halmazokból kiindulva, megszámlálható sok művelettel, ahol minden művelet komplementerképzés vagy unióképzés. Az ilyen halmazokat Borel-halmazoknak nevezzük. Pontosabban, X *Borel-halmaz*ainak osztálya az összes, a nyílt halmazokat tartalmazó σ-algebrák metszete. Mivel σ-algebrák tetszőleges rendszerének a metszete is σ-algebra, a Borel-halmazok σ-algebrát alkotnak.

1.21. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az irracionális számok halmaza $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

$*$ **1.22. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben a racionális számok halmaza nem $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

$\rightarrow$ **1.23. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az alábbi halmazosztályok mindegyikére a generált σ-algebra a Borel-halmazok osztálya: nyílt intervallumok, kompakt intervallumok, racionális végpontú nyílt intervallumok, racionális végpontú kompakt intervallumok, $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{Q}$ alakú intervallumok. Adjunk hasonló példákat $\overline{\mathbb{R}}$-ban, $\mathbb{C}$-ben, $\mathbb{K}^n$-ben és más metrikus terekben.

1.24. Feladat [12]. A síkon adjunk meg olyan konvex halmazt, amely nem Borel-halmaz.

$*$ **1.25. Feladat [18].** Mutassuk meg, hogy szeparábilis metrikus térben legfeljebb kontinuum sok Borel-halmaz van.

$*$ **1.26. Feladat [20].** Mutassuk meg, hogy teljes szeparábilis metrikus térben minden Borel-halmaz vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.

1.27. Radon-mértékek. Egy μ mértéket egy metrikus téren *Radon-mérték*nek nevezzük, ha a nyílt halmazok mérhetőek, a kompakt halmazok mértéke véges, és

(1) minden V nyílt halmazra

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset V,\ K \text{ kompakt}\} \quad (\textit{belső regularitás});$$

(2) minden μ-mérhető A halmazra

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) \colon A \subset V,\ V \text{ nyílt}\} \quad (\textit{külső regularitás}).$$

Az a feltétel, hogy a kompakt halmazok mértéke véges, azzal a feltétellel helyettesíthető, hogy a mérték *lokálisan véges*. Valóban, ha a mérték lokálisan véges, akkor egy kompakt halmazt lefedve véges sok véges mértékű nyílt gömbbel, kapjuk, hogy véges mértékű. Megfordítva, ha a kompakt halmazok mértéke véges, akkor az egyelemű halmazokra alkalmazva (2)-t, kapjuk, hogy minden pontnak van véges mértékű nyílt környezete.

Ha μ Radon-mérték és egy μ-mérhető A halmaz véges mértékű, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $C \subset A$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. Először válasszunk olyan V nyílt halmazt, amely tartalmazza A-t és amelyre $\mu(V \setminus A) + \varepsilon/2$, majd olyan W nyílt halmazt, amely tartalmazza $V \setminus A$-t, és amelyre $\mu(W) < \varepsilon/2$, végül olyan $K \subset V$ kompakt halmazt, amelyre $\mu(V \setminus K) < \varepsilon/2$, és legyen $C = K \setminus W$. Nyilván $C \subset A$ és $\mu(A \setminus C) \le \mu(V \setminus K) + \mu(W) < \varepsilon$.

$*$ **1.28. Tétel.** *Legyen X olyan metrikus tér, amely megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése, $\mathcal{B}$ az X Borel-halmazainak σ-algebrája, μ mérték $\mathcal{B}$-n, és tegyük fel, hogy minden kompakt halmaz mértéke véges. Ekkor μ Radon-mérték.*

Bizonyítás. Tekintsük az X nyílt részhalmazain értelmezett $V \mapsto \mu(V)$ halmazfüggvényt. Jelöljük ν-vel a hozzá tartozó külső mértéket. A μ mérték σ-szubadditivitásából következik, hogy μ és ν megegyeznek a nyílt halmazokon. Legyenek V és W nyílt halmazok, és tegyük fel, hogy $\mu(W) < \infty$. Válasszunk olyan, kompakt halmazokból álló $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ sorozatot, amelyre $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. A mérték folytonossága miatt

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Mivel $W \setminus V = \bigcap_{i=1}^{\infty}(W \setminus K_i)$, ugyancsak a mérték folytonossága miatt

$$\mu(W \setminus V) = \lim_{i\to\infty} \mu(W \setminus K_i).$$

Ebből

$$\begin{aligned}\mu(W) &= \mu(W \cap V) + \mu(W \setminus V) = \nu(W \cap V) + \lim_{i\to\infty} \mu(W \setminus K_i)\\ &\ge \nu(W \cap V) + \nu(W \setminus V),\end{aligned}$$

azaz a nyílt halmazok ν-mérhetőek, tehát a Borel-halmazok is. Legyen B tetszőleges Borel-halmaz, és válasszunk egy kompakt halmazokból álló sorozatot úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = X$ teljesüljön. Legyen $\varepsilon > 0$. A ν definíciója miatt minden i-re van olyan V_i nyílt halmaz, hogy

$$\mu(V_i) = \nu(V_i) < \nu(B \cap K_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad \text{és} \quad B \cap K_i \subset V_i.$$

Ebből $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$-re

$$\nu(V \setminus B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i \setminus (B \cap K_i)) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alkalmazva ezt $X \setminus B$-re is, egy olyan W nyílt halmazt kapunk, amelyre

$$\nu(W \setminus (X \setminus B)) \le \varepsilon/2$$

és $X \setminus B \subset W$. Az $X \setminus W = F$ jelöléssel F zárt halmaz, $F \subset B$ és $\nu(B \setminus F) \le \varepsilon/2$. Ebből $\nu(V \setminus F) \le \varepsilon$. Mivel ν és μ megegyeznek a nyílt halmazokon, $\mu(V \setminus F) \le \varepsilon$ és így

$$\mu(V \setminus B) \le \mu(V \setminus F) < \varepsilon,$$

amiből

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : B \subset V,\, V \text{ nyílt}\}$$

minden B Borel-halmazra, így μ Radon-mérték.

→ **1.29. Feladat [6].** Mikor lesz a számláló mérték Radon-mérték egy X metrikus téren?

1.30. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, x_n az X elemeiből álló sorozat, és a_n egy nemnegatív tagú konvergens számsorozat. Ha $A \subset X$, legyen $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} a_n$. Mutassuk meg, hogy μ Radon-mérték.

→ **1.31. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy Radon-mérték természetes kiterjesztése is Radon-mérték.

∗ **1.32. Feladat [17].** Legyen μ olyan Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Mutassuk meg, hogy ha A egy véges, de pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

∗ **1.33. Feladat [19].** Legyen μ olyan nem nulla véges Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Mutassuk meg, hogy létezik kontinuum sok diszjunkt részhalmaza X-nek úgy, hogy egyiknek a komplementere sem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt.

1.34. A Lebesgue-mérték. Egy *n-dimenziós téglán* n darab korlátos intervallum (egydimenziós tégla) Descartes-szorzatát értjük. Egy T tégla $\nu^n(T)$*térfogat*a az élhosszak szorzata. Jelölje λ^na ν^n halmazfüggvényhez tartozó külső mértéket. λ^n-et n-dimenziós *Lebesgue külső mérték*nek nevezzük. A λ^n-mérhető halmazokat n-dimenziós *Lebesgue-mérhető* halmazoknak, ezeken λ^n-et pedig *n-dimenziós Lebesgue-mérték*nek nevezzük.

1.35. Tétel. *Az n-dimenziós téglák Lebesgue-mérhetőek, és Lebesgue-mértékük a térfogatuk. A λ^n mérték σ-véges Radon-mérték, és bármely halmaz külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek infimuma. Ha $a, b \in \mathbb{R}^n$ és a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés a $g(x) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \dots, a_nx_n + b_n)$ összefüggéssel van definiálva, ahol $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, akkor $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\lambda^n(g(A)) = |a_1a_2 \cdots a_n|\lambda(A)$, és ha A mérhető, akkor $g(A)$ is.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy ha egy téglát az oldallapokkal párhuzamos hipersíkokkal véges sok téglára osztunk, akkor a részek térfogatainak összege az eredeti tégla térfogata. Legyenek T és S téglák. Mivel T-t azon hipersíkokkal, amelyeken S oldallapjai fekszenek, alkalmasan véges sok téglára osztva, $T \cap S$ ezen téglák egyike, $T \setminus S$ pedig a többi egyesítése, kapjuk, hogy $\nu^n(T) \geq \lambda^n(T \cap S) + \lambda^n(T \setminus S)$, amiből következik, hogy a téglák mérhetőek.

Ha belátjuk, hogy a térfogat σ-szubadditív, akkor abból következik, hogy a téglák Lebesgue-mértéke a térfogatuk, és mivel az egész tér megszámlálható sok tégla egyesítése, az is, hogy a Lebesgue-mérték σ-véges. Válasszunk egy megszámlálható T_i lefedést a T téglához (az indexek legyenek pozitív egészek). Először tegyük fel, hogy a lefedés véges. Osszuk fel a lefedő téglákat és a lefedett téglát is az összes olyan hipersíkokkal, amelyeken rajta van valamely tégla oldallapja. Mivel a lefedett tégla minden darabjának a lezártja szerepel a lefedő téglák darabjainak lezártjai között, kapjuk a szubadditivitást. Ha most a lefedés nem véges, akkor kicsit megnövelve a T_i téglát, egy olyan S_i nyílt téglával helyettesíthetjük, amelyre $\nu^n(S_i) \leq \nu^n(T_i) + \varepsilon/2^i$. Hasonlóan, kicsit csökkentve a T téglát egy olyan S zárt téglával helyettesíthetjük, amelyre $\nu^n(S) + \varepsilon \geq \nu^n(T)$. Nyilván $S \subset \cup_i S_i$, és mivel S kompakt, a lefedésből kiválasztható véges lefedés. Ebből $\nu^n(S) \leq \sum_i \nu^n(S_i)$, és így $\nu^n(T) - \varepsilon \leq \sum_i \nu^n(T_i) + \varepsilon$. Ha $\varepsilon \downarrow 0$, kapjuk a σ-szubadditivitást.

A nyílt halmazok mérhetősége könnyen megkapható: bármely nyílt halmaz előáll az összes olyan benne lévő téglák egyesítéseként, melyek csúcspontjainak koordinátái mind racionálisak. Mivel megszámlálható sok ilyen tégla van, minden nyílt halmaz megszámlálható sok tégla egyesítése, így mérhető. A kompakt halmazok mértéke véges, mivel téglába foglalhatók. A fent leírt módon a lefedő téglákat kicsit nagyobb nyílt téglákkal helyettesítve, minden A halmazhoz kaphatunk egy $V \supset A$ nyílt halmazt, amelyre $\lambda^n(V) \leq 2\varepsilon + \lambda^n(A)$. Ha most V tetszőleges nyílt halmaz, legyen

$$K_i = \{x : x \in V,\ |x| \leq i,\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus V) \geq 1/i\}.$$

A K_i halmazsorozat monoton növekedő, kompakt halmazokból áll, és egyesítése V, így a mérték folyonosságából kapjuk a belső regularitást.

Végül vegyük észre, hogy ha T tégla, akkor $g(T)$ is, és

$$\lambda^n(g(T)) = |a_1 a_2 \cdots a_n| \lambda^n(T).$$

Mivel ha a T_i téglák lefedik A-t, akkor a $g(T_i)$ téglák lefedik $g(A)$-t,

$$\lambda^n(g(A)) \leq |a_1 a_2 \cdots a_n| \lambda^n(A).$$

Az az eset, amikor az a_i-k valamelyike nulla, innen már triviális. Egyébként a másik irányú egyelőtlenséget úgy kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenséget alkalmazzuk A helyett $g(A)$-ra és g helyett g^{-1}-re. Mivel A jól vágja ketté a $g^{-1}(T)$ halmazt, $g(A)$ jól vágja ketté a T halmazt.

→ **1.36. Feladat [0].** Határozzuk meg a racionális számok halmazának Lebesgue-mértékét.

→ **1.37. Feladat [3].** Határozzuk meg a sík azon pontjai halmazának Lebesgue-mértékét, amelyek egyik koordinátája racionális.

→ **1.38. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ nulla Lebesgue-mértékű részhalmazainak nincs belső pontja.

1.39. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy $[0,1]$ minden egy Lebesgue külső mértékű részhalmaza sűrű $[0,1]$-ben.

→ **1.40. Feladat: Cantor-halmaz [6].** Határozzuk meg azon $[0,1]$-beli számok halmazának a Lebesgue-mértékét, amelyek felírhatók úgy hármas számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest.

1.41. Feladat: pozitív mértékű Cantor-halmaz [8]. A $[0,1]$ intervallum közepéből kiveszünk egy $1/4$ hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó két zárt intervallum közepéből kiveszünk egy-egy $1/4^2$ hosszúságú nyílt intervallumot, stb. Határozzuk meg a visszamaradó halmaz Lebesgue-mértékét. Mutassuk meg, hogy homeomorf a Cantor-halmazzal.

1.42. Feladat [8]. Adjuk meg a számegyenes egy nulla Lebesgue-mértékű sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmazát.

∗ **1.43. Feladat [11].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely konvex részhalmaza Lebesgue-mérhető.

∗ **1.44. Feladat [14].** Igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ minden nulla Lebesgue-mértékű A részhalmazához van olyan B nulla Lebesgue-mértékű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, amely tartalmazza A-t?

∗ **1.45. Feladat: Steinhaus tétele [15].** Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor $A-A$ tartalmazza a 0 egy környezetét. Mutassuk meg, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhetőek és pozitív mértékűek, akkor $A+B$ belseje nem üres. Igaz-e ez, ha B nem mérhető, de a külső mértéke pozitív?

1.46. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy $C - C = [-1,1]$, ahol C a Cantor-halmaz.

∗ **1.47. Feladat [14].** Adjunk példát olyan $A \subset [0,1] \times [0,1]$ Borel-halmazra, amelyre $\lambda^2(A) = 1$, de A nem tartalmaz $B \times C$ alakú halmazt, ahol B és C Lebesgue-mérhetőek és $\lambda(B)\lambda(C) > 0$.

∗ **1.48. Nem Lebesgue-mérhető halmaz létezése.** Tekintsük $[-1,1]$ pontjai között az $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$ ekvivalenciarelációt, és legyen A olyan halmaz, amelyik minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Az $A+r$, $r \in \mathbb{Q} \cap [-2,2]$ halmazok külső mértéke megegyezik, és nem lehet nulla, mivel ezek a halmazok lefedik a $[-1,1]$ intervallumot, hiszen ha $-1 \le x \le 1$, akkor valamely $y \in A$-ra $r = x - y \in \mathbb{Q} \cap [-2,2]$, így $x \in A + r$. Másrész, az $A + r$ halmazok diszjunktak, hiszen $x \in (A+r) \cap (A+s)$-ből $x = y + r = z + s$, $0 \neq s - r = y - z \in Q$ következne. Ha A mérhető lenne, akkor ellentmondást kapnánk, mert

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-2,2]} A + r \subset [-3,3].$$

(A konstrukció könnyen átvihető $\mathbb{R}^n$-re is.)

$*$ **1.49. Kiválasztási axióma.** Az előző példa felhasználja a kiválasztási axiómát. A kiválasztási axióma azt mondja ki, hogy ha $\gamma \mapsto A_\gamma$ egy Γ nem üres halmazon értelmezett, értékként nem üres halmazokat felvevő függvény, akkor létezik olyan $\gamma \mapsto a_\gamma$ függvény, amelyre $a_\gamma \in A_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$-ra. Ennek az ártalmatlan kinézetű axiómának nagyon sok fontos következménye van, így a matematikában kiterjedten használjuk. Következményeinek egy része – mint például a Hahn–Banach-tétel – szinte nélkülözhetetlen, más része viszont nagyon furcsa. Például a *Banach–Tarski-paradoxon* azt állítja, hogy $\mathbb{R}^3$ egy 1 sugarú gömbjét fel lehet osztani véges sok diszjunkt részre úgy, hogy azokat megfelelően eltolva és elforgatva, egy 2 sugarú gömb rakható ki belőlük. (Lásd Laczkovich [99], 75. o.)

A kiválasztási axiómára épülő bizonyítások jellemzője, hogy „nem konstruktívak"; biztosítják valaminek a létezését, de nem adnak módszert annak megkonstruálására. Nem Lebesgue-mérhető halmaz létezésének a fenti bizonyítása tipikus példa. Mint R. Soloway megmutatta, ez a bizonyítás nem is végezhető el a kiválasztási axióma nélkül (a Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerben). A „naiv halmazelmélet" szintjén Hewitt–Stromberg [66] tárgyalja a kiválasztási axiómát és számos alkalmazását az analízisben. A szigorú axiomatikus tárgyaláshoz közelebb álló felépítés található a Halmos–Sigler [63] könyvben.

1.50. Feladat [12]. Legyen ξ irracionális szám, $X_0 = 2\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$, $X_1 = X_0 + 1$, és $X = X_0 \cup X_1$. Mutassuk meg, hogy X_0 és X sűrű részcsoportjai $\mathbb{R}$-nek. Legyen A olyan halmaz, amely minden X szerinti mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, és legyen $N = A + X_0$. Mutassuk meg, hogy $N - N$ nem tartalmaz X_1-beli pontot, X_1 sűrű $\mathbb{R}$-ben, $\mathbb{R} \setminus N = N + 1$ és N nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

1.51. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelynek pozitív a Lebesgue külső mértéke, tartalmaz olyan B halmazt, amelyre sem B, sem $A \setminus B$ nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

1.52. Feladat [10]. Legyen A olyan zárt részhalmaza $[0,1]$-nek, amelynek nincs belső pontja, és $f(x) = \lambda([0,x] \setminus A)/\lambda([0,1] \setminus A)$, ha $x \in [0,1]$. Mutassuk meg, hogy f a $[0,1]$ intervallumot önmagára képezi le, szigorúan monoton növekedő, folytonos, az inverze is folytonos, $\lambda(f(A)) = 0$, valamint ha $B \subset A$ nem Lebesgue-mérhető, akkor $f(B)$ Lebesgue-mérhető, de nem Borel-halmaz.

1.53. Lebesgue–Stieltjes-mértékek. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, és tekintsük azon intervallumok osztályát, amelyek a, b végpontjai g-nek folytonossági pontjai, és legyen ν_g az egy ilyen intervallumhoz a $g(b) - g(a)$ számot rendelő függvény. A ν_g-hez tartozó λ_g külső mérték a g-hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes külső mérték*, a belőle származó mérték pedig a g-hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes-mérték*.

A Lebesgue–Stieltjes-mértékek fontos szerepet játszanak a valószínűségszámításban. Megjegyezzük, hogy magasabb dimenzióban is definiálhatók Lebesgue–Stieltjes-mértékek. A Lebesgue–Stieltjes-mértékek jelentősége abban áll, hogy segítségükkel extenzív mennyiségek olyan eloszlásait is reprezentálhatjuk, amelyekben pontszerű és folytonosan eloszló részek vegyesen fordulnak elő.

1.54. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, a korlátos intervallumok Lebesgue–Stieltjes-mérhetőek és*

$$\lambda_g]a,b[= g(b-) - g(a+), \quad \lambda_g]a,b] = g(b+) - g(a+),$$
$$\lambda_g[a,b[= g(b-) - g(a-), \quad \lambda_g[a,b] = g(b+) - g(a-).$$

A λ_g mérték σ-véges Radon-mérték és bármely halmaz külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek infimuma.

Bizonyítás. Hasonlóan eljárva, mint a Lebesgue-mérték esetében, mindent beláthatunk, de az intervallum mértékére vonatkozó eredmény csak arra az esetre adódik, amikor a és b folytonossági pontjai g-nek. Ha a és b tetszőlegesek, válasszunk olyan folytonossági pontokból álló sorozatokat, amelyekre $a_n \downarrow a$ és $b_n \uparrow b$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda_g]a,b[&= \lambda_g(\cup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[) = \lim_{n\to\infty}\lambda_g]a_n,b_n[\\ &= \lim_{n\to\infty}\big(g(b_n)-g(a_n)\big) = g(b-)-g(a+).\end{aligned}$$

A többi összefüggés hasonlóan bizonyítható.

→ **1.55. Feladat [5].** Határozzuk meg a λ_Θ Lebesgue–Stieltjes-mértéket, és a mérhető halmazokat, ha Θ a *Heaviside-függvény.* (λ_Θ a *Dirac-mérték.*)

1.56. Feladat [9]. Legyen x_n a racionális számok egy sorozatba rendezése, és legyen $g(x) = \sum_{x_n<x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy g szigorúan monoton növekedő, balról folytonos, minden irracionális pontban folytonos és egyetlen racionális pontban sem folytonos. Határozzuk meg a λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket, és a mérhető halmazokat.

1.57. Feladat [8]. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, λ_g a hozzá tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték. Mutassuk meg, hogy $\lambda_g\{x\} = 0$ pontosan akkor, ha g folytonos az x pontban. Mutassuk meg, hogy van olyan sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, amelynek λ_g-mértéke nulla.

1.58. Feladat [7]. Legyenek $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények. Mutassuk meg, hogy a λ_g és a λ_h Lebesgue–Stieltjes-mértékek pontosan akkor egyeznek meg, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = g(x) + c$ egy sűrű halmazon.

∗ **1.59. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy minden teljes Radon-mérték $\mathbb{R}$-en Lebesgue–Stieltjes-mérték. (Lásd Járai [71].)

∗ **1.60. Feladat [13].** Terjesszük ki a Lebesgue–Stieltjes-mértékek definícióját $\mathbb{R}^n$-re. (Lásd Járai [71].)

1.61. Geometriai mértékek. A három dimenziós euklédeszi téren a Lebesgue-mérték a térfogat fogalmának általánosítása. Be lehet azonban vezetni olyan kétdimenziós mértéket az $\mathbb{R}^3$ téren, amely a felszínt adja, illetve olyan egydimenziós mértéket, amely ívek ívhosszát adja. Példaként tekintsük egy görbült felületdarab felszínének a meghatározását. Ha a felületdarabot kis részekre osztjuk, egy kis rész felszíne, ha „nem nagyon görbült" és „nem nagyon hosszúkás", az átmérőjének négyzetével becsülhető. Két probléma lép fel. Az egyik a túlbecslés, ami abból adódik hogy a darabok nem elég „kerekek". Ez kiküszöbölhető, ha a kis részek átmérői négyzetösszegeinek infimumát képezzük az összes lehetséges felosztásokra vagy lefedésekre, de szoroznunk kell egy konstanssal, az egységnyi átmérőjű körlap területével, mert „nagyjából kör alakú" darabokból készíthető a legtakarékosabb lefedés. A másik az alulbecslés, ami abból adódik, hogy a kis részek is még görbültek. Ezt úgy küszöbölhetjük ki, hogy csak egy adott δ-nál kisebb átmérőjű darabokkal történő lefedéseket engedünk meg, majd δ-val tartunk nullához, vagy ami

ugyanaz, szuprémumot veszünk. Az általános esetben fellépő pozitív konstans $\boldsymbol{\alpha}(m)/2^m$, ahol $\boldsymbol{\alpha}(m)$ az m-dimenziós egység sugarú gömb Lebesgue-mértéke, ha m pozitív egész.

Legyen tehát (X,d) egy metrikus tér, $m \geq 0$, és

$$\boldsymbol{\alpha}(m) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^m}{\boldsymbol{\Gamma}(m/2+1)}.$$

(A $\boldsymbol{\Gamma}$ függvény a faktoriális általánosítása nem egész számokra: $\boldsymbol{\Gamma}(m) = (m-1)!$, ha m pozitív egész szám. Értelmezését lásd később, a komplex függvénytannál. Meg fogjuk mutatni, hogy $\boldsymbol{\alpha}(m)$ minden $m \geq 0$-ra pozitív, és ha m pozitív egész, akkor $\boldsymbol{\alpha}(m)$ az $\mathbb{R}^m$ tér 0 középpontú, 1 sugarú gömbjének λ^m-mértéke.) Az X minden nem üres A részhalmazára legyen

$$\nu^m(A) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(m)}{2^m}\big(d(A)\big)^m.$$

Jelölje $\delta > 0$ esetén ν^m_δ a ν^m leszűkítését a δ-nál nem nagyobb átmérőjű halmazokra, χ^m_δ pedig a ν^m_δ-hoz tartozó külső mértéket. Legyen $\chi^m(A) = \sup_{\delta>0} \chi^m_\delta(A)$. Megmutatjuk, hogy χ^m külső mérték. Legyen A_i egy megszámlálható lefedése A-nak. Mivel χ^m_δ külső mérték, $\chi^m_\delta(A) \leq \sum_i \chi^m_\delta(A_i)$. Először a jobb oldalon véve tagonként szuprémumot $\delta > 0$-ra, majd a bal oldalon, kapjuk, hogy χ^m is σ-szubadditív; χ^m-et m-dimenziós *Hausdorff külső mérték*nek nevezzük, a belőle származó mértéket pedig m-dimenziós *Hausdorff-mérték*nek. A Hausdorff-mérték az integráltranszformációs formula segítségével számítható ki. Ennek a formulának a segítségével általában az is eldönthető, hogy $\mathbb{R}^n$ egy adott részhalmaza χ^m-mérhető-e, és a formulából következik, hogy $\mathbb{R}^n$-en χ^n megegyezik a λ^n Lebesgue-mértékkel. Az integráltranszformációs formula azt is mutatja, hogy $\mathbb{R}^3$-ban χ^2 a felszínt, χ^1 pedig az ívhosszt adja.

A Hausdorff-mérték felhasználható arra is, hogy az X metrikus tér egy A részhalmazának a *Hausdorff-dimenzió*ját definiáljuk. Legyen

$$\dim(A) = \sup\{m\colon m \geq 0, \chi^m(A) > 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy a dimenzió nem csak egész lehet, a törtdimenziós halmazok a *fraktál*ok.

1.62. Feladat [4]. Az előző definíció jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha $0 < \delta < \sigma$, akkor $\chi^m_\delta(A) \geq \chi^m_\sigma(A)$.

1.63. Feladat [4]. Mutassuk meg, hogy χ^0 a számláló mérték.

1.64. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha egy X metrikus tér egy A részhalmazára $\chi^n(A) < \infty$ és $m > n$, akkor $\chi^m(A) = 0$.

1.65. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha A nem üres, akkor

$$\dim(A) = \inf\{m \geq 0\colon \chi^m(A) = 0\},$$

és ha A nem véges, akkor

$$\dim(A) = \sup\{m \geq 0\colon \chi^m(A) = \infty\}.$$

1.66. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha X és Y metrikus terek, $f\colon X \to Y$ Hölder-folytonos C *Hölder-konstans*sal és β kitevővel, $A \subset X$ és $m \geq 0$, akkor

$$\chi^m(f(A)) \leq C^m \frac{\boldsymbol{\alpha}(m)}{\boldsymbol{\alpha}(\beta m)2^{m(1-\beta)}}\chi^{m\beta}(A),$$

speciálisan izometrikus halmazok Hausdorff külső mértéke egyenlő.

1.67. Feladat [7]. Adjunk meg $[0,1]$-ben olyan kontinuum számosságú halmazt, amelynek Hausdorff-dimenziója 0.

$*$ **1.68. Feladat [14].** Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\ln 2/\ln 3$. (Lásd Laczkovich [98], 100. o.)

$*$ **1.69. Feladat [12].** Legyen X metrikus tér, $\gamma\colon [a,b] \to X$ egy leképezés. Mutassuk meg, hogy $\chi^1(\operatorname{rng}\gamma) \le \mathbb{V}_a^b\,\gamma$, és ha γ folytonos és injektív, akkor egyenlőség áll. (Lásd Laczkovich [98], 98. o.)

$*$ **1.70. Feladat [10].** Legyen X teljes metrikus tér, az $f_i\colon X \to X$, $i = 1,2,\dots,s$ leképezések pedig kontrakciók. Mutassuk meg, hogy ekkor egyetlen olyan K nem üres kompakt halmaz létezik, amelyre $K = \cup_{i=1}^s f_i(K)$.

$*$ **1.71. Feladat [9].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha valamely $m \in \mathbb{R}$-re $\sum_{i=1}^s \bigl(\operatorname{Lip}(f_i)\bigr)^m = 1$, akkor $\chi^m(K) < \infty$.

$*$ **1.72. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha az f_i függvények hasonlóságok, és az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, akkor $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [98], 107. o.)

$*$ **1.73. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha $X = \mathbb{R}^n$, nem tudjuk, hogy az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, csak azt, hogy van olyan G nem üres korlátos nyílt halmaz, amelyre az $f_i(G)$ halmazok diszjunkt részhalmazai G-nek, akkor is $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [98], 109. o.)

1.74. Feladat: Sierpiński-szőnyeg [6]. Az előző feladatok segítségével sok halmaz Hausdorff-dimenziója könnyen meghatározható. Határozzuk meg az alábbi leképezésekhez tartozó kompakt halmaz Hausdorff-dimenzióját: $f_{i,j}(x,y) = (x/3 + i/3, y/3 + j/3)$, $i,j \in \{0,1,2\}$ de nem mindkettő 2.

$*$ **1.75. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha X metrikus tér, $A \subset X$ és $m \ge 0$, akkor van olyan $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, amely tartalmazza A-t, és ugyanannyi a χ^m-mértéke.

$*$ **1.76. Feladat [16].** Egy metrikus téren egy külső mértéket *metrikus külső mérték*nek nevezünk, ha két pozitív távolságú halmaz egyesítésének a külső mértéke a külső mértékeik összege. Mutassuk meg, hogy egy μ külső mérték egy metrikus téren pontosan akkor metrikus külső mérték, ha a Borel-halmazok μ-mérhetőek. (Lásd Laczkovich [98], 92. o.)

$*$ **1.77. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a Hausdorff-mérték metrikus külső mérték, így minden Borel-halmaz Hausdorff-mérhető.

1.78. Majdnem mindenütt. A mérhetőségnél gyakran, az integrálásnál mindig a nulla mértékű halmazok „elhanyagolhatóak". Ez indokolja az alábbi szóhasználat bevezetését. Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ egy mértéktér. Ha P egy pontbeli tulajdonság (azaz $P(x)$ igaz vagy hamis lehet: $x \mapsto P(x)$ egy logikai függvény), akkor azt mondjuk, hogy P *majdnem mindenütt* teljesül X-en, ha azon pontok halmaza, ahol P nem teljesül, vagy nincs értelmezve, mérhető, és mértéke nulla. Például az hogy az f és g függvények majdnem mindenütt egyenlőek, azt jelenti, hogy az $\{x\colon x \in X, f(x) = g(x)\}$ halmaz komplementere mérhető és nullmértékű. Ezt a halmazt egyébként gyakran röviden, bár némileg pontatlanul $\{f = g\}$-vel jelöljük. Hasonlóan értjük az $\{f < g\}$, $\{f < a\}$, stb. jelöléseket is. Általánosan, gyakran röviden, bár pontatlanul $\{P\}$ jelöli azon pontok halmazát, amelyekre a P pontbeli tulajdonság értelmezve van és igaz.

1.79. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája, Y tetszőleges halmaz, f egy $\mathcal{A}$-beli halmazt Y-ba képező függvény. Az Y azon B részhalmazai, amelyekre $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, egy σ-algebrát alkotnak.*

Bizonyítás. A definíció alapján azonnal adódik.

1.80. Mérhető függvények. Ahhoz, hogy a mértékelmélet eszközeivel egy függvényt kezelni tudjunk, szükséges, hogy a képtér sok részhalmazára azon pontok halmaza, amelyek képe ebben az adott halmazban van, kezelhető legyen a mértékelmélet eszközeivel. Például gyakran szükségünk lesz $\{f < a\} = f^{-1}[-\infty, a[$, $\{f \leq a\} = f^{-1}[-\infty, a]$, stb., típusú, úgynevezett „nívóhalmazok" mérhetőségére. Az előző lemma azt mutatja, hogy elég a képtér részhalmazainak egy szűk osztályára megkövetelni, hogy az inverz képe mérhető legyen. Ez motiválja a következő definíciót: ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és Y metrikus tér, egy $f \in X \to Y$ függvényt *mérhető*nek nevezünk, ha $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ az Y minden V nyílt részhalmazára. Ha X egy metrikus tér, akkor az $f \in X \to Y$ függvényt *Borel-függvény*nek nevezzük, ha $f^{-1}(V)$ Borel-halmaz az Y minden V nyílt részhalmazára. (Speciálisan, Borel-halmazon értelmezett folytonos függvény Borel-függvény.) A előző lemma mutatja, hogy a nyílt halmazok rendszere helyett más halmazrendszert is választhattunk volna, például az f függvény pontosan akkor mérhető, ha $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ minden V Borel-halmazra, és pontosan akkor Borel-függvény, ha $f^{-1}(V)$ Borel-halmaz minden V Borel-halmazra. Vegyük észre azt is, hogy a függvény mérhetősége csak az $\mathcal{A}$ σ-algebrán múlik, de nem függ a mértéktől.

Ha X az A_i mérhető halmazok megszámlálható uniója, és az A_i mérhető halmazon egy f_i mérhető függvénnyel egyezik meg az f, akkor mérhető, mert

$$f^{-1}(V) = \cup_i (f^{-1}(V) \cap A_i) = \cup_i (f_i^{-1}(V) \cap A_i).$$

Speciálisan, teljes mértéktéren, ha egy függvény majdnem mindenütt egyenlő egy mérhető függvénnyel, akkor mérhető.

Egy függvényt *egyszerű függvény*nek nevezünk, ha az értékkészlete véges.

1.81. Összetett függvény mérhetősége. *Ha $f \in X \to Y$ mérhető és $g \in Y \to Z$ Borel-függvény, akkor $g \circ f$ mérhető.*

Bizonyítás. Ha V nyílt halmaz, akkor $g^{-1}(V)$ Borel-halmaz, így $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ mérhető.

1.82. Mérhetőség és koordináta-függvények. *Legyen μ mérték X-en, Y pedig az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ szeparábilis metrikus terek szorzata. Egy $f \in X \to Y$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ függvény pontosan akkor mérhető, ha az f_k függvények mind mérhetőek.*

Bizonyítás. Ha f mérhető, akkor az $f_k = p_k \circ f$ koordináta-függvények is mérhetőek, mert a $p_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_k$ összefüggésekkel definiált projekciók folytonosak, így Borel-függvények. Megfordítva, ha az f_k koordináta-függvények mérhetőek, akkor egy $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ Descartes-szorzat alakban előállítható nyílt halmazra $f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(V_n)$, így mérhető. Mivel Y szeparábilis, egy tetszőleges nyílt halmaz előáll, mint megszámlálható sok olyan nyílt halmaz egyesítése, melyek mindegyike racionális sugarú nyílt gömbök Descartes-szorzata. Mivel unió teljes inverz képe a teljes inverz képek uniója, bármely nyílt halmaz teljes inverz képe mérhető.

1.83. Következmény. *Ha f és g bővített valós értékű mérhető függvények, c bővített valós szám, akkor a cf, $|f|$, $1/f$, $\max\{f,g\}$, $f+g$, fg függvények mérhetőek.*

Bizonyítás. Az első három állítás abból következik, hogy Borel-függvénybe beírva egy mérhetőt, mérhető függvényt kapunk. A negyedik állítás abból adódik, hogy az $x \mapsto (f(x), g(x))$ leképezés mérhető, az $(y_1, y_2) \mapsto \max\{y_1, y_2\}$ leképezés pedig folytonos, így Borel-függvény. Az utolsó két állítás hasonlóan adódik.

1.84. Következmény. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, Y szeparábilis normált tér $\mathbb{K}$ felett, f mérhető függvény $\mathbb{K}$-beli értékekkel, g, h pedig mérhető függvények Y-beli értékekkel. Ekkor fg és $g+h$ mérhetőek.*

Bizonyítás. Az előző következmény bizonyítása használható.

1.85. Mérhetőség és konvergencia. *Ha μ mérték X-en, Y metrikus tér, $f_n\colon X \to Y$ mérhető függvények egy sorozata, és $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re, akkor f is mérhető.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha V nyílt részhalmaza Y-nak, akkor

$$f^{-1}(V) = \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}\{y\colon d(y, Y \setminus V) > 1/j\}.$$

Ebből már következik a bizonyítandó állítás, mivel $y \mapsto d(y, A)$ folytonos függvény, így az $\{y\colon d(y, Y \setminus V) > 1/j\}$ halmazok nyíltak, amiből a jobb oldalon mérhető halmaz áll.

Legyen $x \in f^{-1}(V)$, azaz tegyük fel, hogy $f(x) \in V$. Mivel V nyílt, van olyan j, hogy $\mathbb{U}(f(x), 2/j) \subset V$. Mivel $f_k(x) \to f(x)$, van olyan n, hogy $k \geq n$ esetén $f(x)$ és $f_k(x)$ távolsága kisebb, mint $1/j$. Ekkor

$$d(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j,$$

amiből x eleme a jobb oldalnak. Megfordítva, ha x eleme a jobb oldalnak, akkor van olyan j és n, hogy $k \geq n$ esetén $d(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j$. Határátmenettel azt kapjuk, hogy $d(f(x), Y \setminus V) \geq 1/j$, amiből $f(x) \in V$.

1.86. Következmény. *Ha μ mérték X-en, $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvények egy sorozata, akkor a*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

függvények mérhetőek.

Bizonyítás. A

$$\begin{aligned}
\sup_n f_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq k\leq n} f_k \\
\inf_n f_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{1\leq k\leq n} f_k \\
\limsup_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k \\
\liminf_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k
\end{aligned}$$

összefüggésekből következik.

1.87. Approximációs lemma nemnegatív függvényekre. *Legyen μ mérték X-en, $f\colon X \to [0,\infty]$ mérhető függvény. Ekkor létezik X-en értelmezett nemnegatív egyszerű mérhető függvények olyan s_n monoton növekedő sorozata, amelyre $s_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re. Az s_n függvények választhatók racionális értékűeknek.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval, legyen $s_0 \equiv 0$, és $s_n(x) = s_{n-1}(x) + 1/n$, ha $f(x) - s_{n-1}(x) \geq 1/n$, egyébként legyen $s_n(x) = s_{n-1}(x)$. Ha $f(x) = \infty$, akkor $s_n(x) \to \infty$. Ha $f(x) < \infty$, akkor végtelen sok n-re $s_n(x) = s_{n-1}(x)$, és minden ilyen n-re $f(x) - s_{n-1}(x) < 1/n$.

Az előző lemma könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, amikor f értékei $\overline{\mathbb{K}}$-ban vagy $\mathbb{K}^n$-ben vannak; a monotonitás helyébe az kerül, hogy $|s_n|$ monoton növekedő, és nem nagyobb, mint $|f|$. Az alábbi lemma további általánosításnak tekinthető.

1.88. Approximációs lemma. *Legyen μ mérték X-en, Y szeparábilis metrikus tér, és $f\colon X \to Y$ mérhető függvény. Ekkor léteznek olyan $s_n\colon X \to Y$ egyszerű mérhető függvények, hogy $s_n \to f$ az X minden pontjában. Ha Y szeparábilis normált tér, akkor s_n választható úgy, hogy $|s_n| \leq |f|$ teljesüljön minden n-re.*

$*$ **Bizonyítás.** Legyen V_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ egy megszámlálható bázisa Y-nak, és $y_i \in \overline{V_i}$ minden i-re. Indukcióval, legyen $s_0(x) \equiv y_0$ és $n > 0$ esetén

$$s_n(x) = \begin{cases} y_n, & \text{ha } x \in f^{-1}(V_n) \text{ és } d(y_n, f(x)) < d(s_{n-1}(x), f(x)); \\ s_{n-1}(x) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha x az f értelmezési tartományába tartozik és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan n, hogy $f(x) \in V_n \subset \mathbb{U}_\varepsilon(f(x))$, és $k \geq n$ esetén $d(s_k(x), f(x)) \leq d(y_n, f(x)) \leq \varepsilon$.

Ha Y szeparábilis normált tér, akkor legyen $c_0 = 0$, válasszuk a V_n-eket $\mathbb{U}_{r_n}(c_n)$ nyílt gömböknek, legyen $y_n = 0$, ha $|c_n| \leq r_n$ és legyen $y_n = ((|c_n| - r_n)/|c_n|)c_n$, ha $|c_n| > r_n$.

$\to$ **1.89. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy az $\{f < a\}$, $\{f \leq a\}$, $\{f > a\}$, $\{f \geq a\}$ és $\{f = a\}$ halmazok mérhetőek, ha f bővített valós értékű mérhető függvény, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Igaz-e a megfordítás? (Lásd Járai [71], 43. o.)

$\to$ **1.90. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha a nemnegatív függvényekre vonatkozó approximációs lemmában a függvény korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.

1.91. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha az f_n valós értékű függvények mérhetőek, akkor azon pontok halmaza, ahol a függvénysorozatnak létezik a határértéke, mérhető.

$*$ **1.92. Feladat: Luzin tétele [15].** Legyen μ Radon-mérték az X metrikus téren, $A \subset X$ véges mértékű mérhető halmaz, Y szeparábilis metrikus tér, $f\colon A \to Y$ mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan K kompakt részhalmaza A-nak, amelyre $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ és $f|K$ folytonos. (Lásd Oxtoby [120], 37. o.)

$*$ **1.93. Feladat [11].** Legyen μ Radon-mérték X-en, Y szeparábilis metrikus tér, f az X egy mérhető és σ-véges A részhalmazán értelmezett mérhető függvény Y-beli értékekkel. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $B \subset A$ Borel-halmaz, amelyre $\mu(A \setminus B) = 0$ és $f|_B$ Borel-függvény.

∗ **1.94. Feladat: Jegorov tétele [13].** Legyen μ véges mérték X-en, Y szeparábilis metrikus tér, $f, f_n\colon X \to$ mérhető függvények, és tegyük fel, hogy $f_n \to f$ majdnem mindenütt. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $A \subset X$ mérhető halmaz, amelyre $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ és A-n a konvergencia egyenletes. (Lásd Federer [37], 77. o.)

∗ **1.95. Feladat: mértékben való konvergencia [10].** A mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia mellett a mértékben való konvergencia játszik fontos szerepet. Legyen μ egy mérték X-en, (Y, d) szeparábilis metrikus tér. Jelölje $\mathbb{L}^0(\mu; Y)$ az $X \to Y$-beli μ-majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztályát. Ha $f, g \in \mathbb{L}^0(\mu; Y)$, akkor legyen

$$d_0(f, g) = \inf\Big\{\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R},\ \mu\big\{d(f, g) > \varepsilon\big\} \le \varepsilon\Big\}.$$

Ha $d_0(f_n, f) \to 0$, akkor azt mondjuk, hogy f_n *mértékben konvergál* f-hez. Mutassuk meg, hogy $\mu\big\{d(f, g) > d_0(f, g)\big\} \le d_0(f, g)$, hogy d_0 eltérés, és hogy $d_0(f, g) = 0$ pontosan akkor, ha $f = g$ majdnem mindenütt. Mutassuk meg, hogy a mértékben való konvergencia azzal ekvivalens, hogy minden $\sigma > 0$-ra $\mu\big\{d(f_n, f) > \sigma\big\} \to 0$, ha $n \to \infty$. (Lásd Federer [37], 78. o.)

∗ **1.96. Feladat: Riesz kiválasztási tétele [14].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha f_n mértékben konvergál f-hez, akkor van olyan részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergál f-hez. (Lásd Federer [37], 79. o.)

∗ **1.97. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha Y teljes és $\sum_{n=1}^{\infty} d_0(f_{n+1}, f_n) < \infty$, akkor van olyan f mérhető függvény, amelyre $d_0(f_n, f) \to 0$ és $f_n \to f$ majdnem mindenütt. Vezessük le ebből, hogy minden Cauchy-sorozatnak van olyan részsorozata, amely konvergens és majdnem mindenütt is konvergens, speciálisan $\mathbb{L}^0(\mu; Y)$ teljes. (Lásd Federer [37], 79. o.)

∗ **1.98. Feladat: Lebesgue tétele [7].** Mutassuk meg, hogy ha μ véges mérték X-en, Y szeparábilis metrikus tér, $f, f_n \in X \to Y$ mérhető függvények, és f_n majdnem mindenütt konvergál f-hez, akkor mértékben is.

∗ **1.99. Feladat [7].** Legyenek az f_n függvények $[0, 1]$-en a következőképpen definiálva: ha $n = 2^k + j$, $0 \le j < 2^k$, akkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [j/2^k, (j+1)/2^k], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f_n mértékben tart az azonosan nulla függvényhez, de $f_n(x)$ egyetlen $x \in [0, 1]$-re sem konvergens.

∗ **1.100. Feladat [9].** Keressünk olyan $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekből álló függvénysorozatot és olyan $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre f_n pontonként konvergál f-hez, de a konvergencia egyetlen részintervallumon sem egyenletes.

∗ **1.101. Feladat [6].** Adjunk meg olyan folytonos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló függvénysorozatot, amely minden pontban monoton csökkenően az azonosan nulla függvényhez konvergál, de Lebesgue-mértékben nem.

$*$ **1.102. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy egy véges mértéktéren mérhető függvények egy sorozata pontosan akkor konvergál mértékben egy f mérhető függvényhez, ha minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely majdnem mindenütt f-hez konvergál.

$*$ **1.103. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $[0,1]$-en értelmezett, valós értékű Lebesgue-mérhető függvenyek körében a majdnem mindenütti konvergencia nem származtatható metrikából.

1.104. Megjegyzés. Mint látható, fontos tételek csak akkor érvényesek, ha az értékkészlet szeparábilis. Ez nyilván enyhíthető úgy, hogy a szereplő függvények értékei egy-egy szeparábilis altérben legyenek. Ha tehát μ mérték, Y metrikus tér, legyen $\mathbb{L}^0(\mu;Y)$ azon $f \in X \to Y$ μ-majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztálya, amelyekre $\operatorname{rng} f$ szeparábilis. d_0 definíciója értelmes marad erre az általánosabb esetre is, és tulajdonságai is változatlanok. Ha a mértéktér teljes, akkor azt is elég lenne feltenni, hogy f értékei μ-majdnem mindenütt valamely $Z \subset Y$ (az f-től függő) szeparábilis altérben vannak. A gyakorlatban ennek a feltételnek a teljesülése általában könnyen belátható.

2
Integrálás

Ellentétben a klasszikus Riemann-integrállal, az én új integrálfogalmam jobb választ ad a differenciálás és integrálás közötti kapcsolat kérdésére.

Henry Leon Lebesgue (1902)

$$0 \le f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n \uparrow \int f;$$
$$0 \le f \Rightarrow \iint f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \iint f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).$$

Adrian Cornelis Zaanen

2.1. Definíció. Lebesgue eredeti gondolata az integrálással kapcsolatban az volt, hogy nem az értelmezési tartományt osztotta fel, hanem az értékkészletet. Eljárása nem érzékeny a szakadásokra és gyors oszcillációkra, viszont intervallumnál bonyolultabb halmazok hosszának (mértékének) ismeretére is szükség van. Nemnegatív függvények esetén legegyszerűbb alsó közelítésekkel dolgozni. Minden nemnegatív mérhető függvénynek tulajdonítható integrál. Az általános esetben, vektor értékű függvényekre egyszerű függvények közelítő sorozataival fogunk dolgozni.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és f nemnegatív, bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Az f

$$\int f \quad \text{vagy} \quad \int f\, d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f\, d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

módon jelölt *integrál*ját az összes

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$$

alakú *integrálközelítő összeg*ek pontos felső korlátjaként definiáljuk, ahol $A_1, \dots, A_n$ diszjunkt mérhető részhalmazai X-nek, $y_1, \dots, y_n$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \ge y_i$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1, \dots, n)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$). Vegyük észre, hogy a szuprémum ugyanaz marad, ha csak azt követeljük meg, hogy $f(x) \ge y_i$ majdnem minden $x \in A_i$-re teljesüljön.

Ha A mérhető részhalmaza X-nek, és f az A-n majdnem mindenütt értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény, akkor az

$$\int_A f \quad \text{vagy} \quad \int_A f\, d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_A f(x)\, d\mu(x)$$

módon jelölt A *halmaz feletti integrál*ját f-nek a $g(x) = f(x)$, ha $x \in A$, $g(x) = 0$, ha $x \in X \setminus A$ összefüggéssel definiált g függvény X feletti integráljaként definiáljuk (ha g

mérhető). Tételeinket általában az egész X felett vett integrálokra fogjuk megfogalmazni, de a definíció alapján könnyen átvihetők egy mérhető A halmaz feletti integrálokra is.

Megjegyezzük, hogy az „integrációs változó" kiírása általában csak akkor hasznos, ha f többváltozós függvény. Az integrációs változó „kötött változó", így az integrálon kívül szabadon használható. Ez a filozófia egyszerűsíti a jelölést.

→ **2.2. Feladat [6].** Az $f(0) = 0$, $f(x) = 1 + \sin(1/x)$, ha $0 < |x| \leq 1$ függvény esetén, 8 egyenlő részre osztva az értelmezési tartományt, illetve az értékkészletet, ábrázoljuk a Riemann-féle és a Lebesgue-féle alsó összegeknek megfelelő halmazokat.

2.3. A nemnegatív függvények integráljának tulajdonságai. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f és g majdnem mindenütt értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű mérhető függvények, $\alpha \geq 0$ valós szám. Ekkor*

(1) *ha $f \leq g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f \leq \int g$ (*monotonitás*);*

(2) *ha $f = g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$;*

(3) *$\alpha\mu\{f \geq \alpha\} \leq \int f\,d\mu$ (Csebisev-egyenlőtlenség; itt $0 \cdot \infty = 0$);*

(4) *ha $\int f < \infty$, akkor f majdnem mindenütt véges;*

(5) *ha $\int f = 0$, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt;*

(6) *$\int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$ (*pozitív homogenitás*; itt $0 \cdot \infty = 0$);*

(7) *ha f egyszerű függvény, amely az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékeket veszi fel, akkor*

$$\int f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu\{f = y_i\}$$

(itt $0 \cdot \infty = 0$).

Bizonyítás. (1) triviális, (2) az (1)-ből következik. A Csebisev-egyenlőtlenség $y_1 = \alpha$, $A_1 = \{f \geq \alpha\}$ választással a definícióból következik. (4)-et úgy kapjuk, hogy $\alpha \in \mathbb{N}$-re, (5)-öt pedig, hogy $1/\alpha \in \mathbb{N}$-re alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, vegyük észre, hogy ha $x \in A_i$ esetén $f(x) \geq y_i$, akkor $\alpha f(x) \geq \alpha y_i$, amiből bármely integrálközelítő összegre

$$\alpha \sum_{i=1} y_i \mu(A_i) \leq \int \alpha f.$$

A bal oldalon szuprémumot véve, kapjuk, hogy $\alpha \int f \leq \int \alpha f$. Most f helyére αf-et, α helyére $1/\alpha$-t helyettesítve, kapjuk az ellenkező irányú egyenlőtlenséget. (7) bizonyításához, ha $A_1, A_2, \ldots, A_m$ diszjunkt mérhető halmazok, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq z_i$, ha $x \in A_i$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} z_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} z_j \mu(A_j \cap \{f = y_i\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_i \mu(A_j \cap \{f = y_i\}) \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu\{f = y_i\},\end{aligned}$$

amiből

$$\int f \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu\{f = y_i\}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség az integrál definíciója alapján nyilvánvaló.

2.4. Beppo Levi tétele. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n\colon X \to [0,\infty]$ mérhető függvények egy monoton növekedő sorozata, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\sum_{i=1}^{m} y_i \mu(A_i)$ a $\lim_{n\to\infty} f_n$ függvény egy integrálközelítő összege; feltehetjük, hogy $y_1, y_2, \dots, y_m$ pozitívak. Legyen $0 < t < 1$. Tekintsük az

$$A_{i,n} = A_i \cap \{f_n > t y_i\}$$

növekvő halmazsorozatot. Nyilván $\cup_{n=1}^{\infty} A_{i,n} = A_i$, így

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i).$$

Mivel

$$\int f_n\, d\mu \geq \sum_{i=1}^{m} t y_i \mu(A_{i,n}),$$

mindkét oldalon határértéket véve,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \geq t \sum_{i=1}^{m} y_i \mu(A_i).$$

Most $t \uparrow 1$ határértéket, majd a jobb oldalon szuprémumot véve, kapjuk az egyenlőség nem triviális felét.

2.5. Fatou-lemma. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_n\colon X \to [0,\infty]$ mérhető függvények, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Bizonyítás. Legyen $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Beppo Levi tétele szerint

$$\begin{aligned}\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) &= \int \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)\, d\mu(x) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.\end{aligned}$$

2.6. Nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitása. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, I megszámlálható halmaz, és minden $i \in I$-re $f_i\colon X \to [0,\infty]$ mérhető függvény. Ekkor*

$$\sum_{i\in I} \int f_i = \int \Big(\sum_{i\in I} f_i\Big).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f és g egyszerű függvények. Ekkor összegük is egyszerű függvény és

$$\begin{aligned}\int f + \int g &= \sum_i x_i \mu\{f = x_i\} + \sum_j y_j \mu\{g = y_j\} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \mu(\{f = x_i\} \cap \{g = y_j\}) \\ &= \sum_k z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mu(\{f = x_i\} \cap \{g = y_j\}) \\ &= \sum_k z_k \mu\{f + g = z_k\} = \int (f + g).\end{aligned}$$

Most legyenek f és g tetszőlegesek, és válasszunk olyan egyszerű mérhető függvényekből álló r_n illetve s_n sorozatokat, amelyekre $r_n \uparrow f$ és $s_n \uparrow g$. Beppo Levi tételéből

$$\int f + \int g = \lim_{n\to\infty} \int r_n + \lim_{n\to\infty} \int s_n = \lim_{n\to\infty} \int (r_n + s_n) = \int (f+g).$$

Végül az általános eset bizonyításához feltehetjük, hogy $I \subset \mathbb{N}$. Ismét Beppo Levi tételét alkalmazva,

$$\int \Big(\sum_{i\in I} f_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \int \Big(\sum_{i\le n, i\in I} f_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\le n, i\in I} \int f_i = \sum_{i\in I} f_i.$$

2.7. Integrálható függvények. Egy tetszőleges X halmazon értelmezett bővített valós értékű függvényre definiáljuk a függvény $f^+ = \max\{f, 0\}$ *pozitív részét* illetve $f^- = \max\{-f, 0\}$ *negatív részét*. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és az f bővített valós értékű mérhető függvény majdnem mindenütt értelmezve van az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, akkor definiáljuk az f halmazon *integrálját az A halmazon* az

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_A f\, d\mu = \int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$$

összefüggéssel, ha a jobb oldalon álló különbség értelmezve van, azaz ha nem $\infty - \infty$ alakú. Nemnegatív függvényre az eddigi definíciót kapjuk vissza. Ha $\int_A f$ véges, akkor azt mondjuk, hogy f *integrálható A-n.* A „létezik az integrál” és az „integrálható” fogalmak között hasonló kapcsolat van, mint a „létezik a határérték” és a „konvergens” fogalmak között. Az első esetben végtelen is megengedett, a második esetben nem. Az egész téren vett integrálra itt is használjuk a rövidebb $\int f = \int f\, d\mu = \int f(x)\, d\mu(x)$jelölést.

2.8. Bővített valós értékű függvények integráljának tulajdonságai. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és f, g az X-en értelmezett, bővített valós értékű mérhető függvények.*

(1) *Ha $f = g$ majdnem mindenütt és f integrálja létezik, akkor $\int g\, d\mu = \int f\, d\mu$;*

(2) *f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, és $\left|\int f\, d\mu\right| \le \int |f|\, d\mu$;*

(3) *ha $\int f\, d\mu$ létezik és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ (*homogenitás*; itt $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$);*

(4) *ha $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ értelmezve van, akkor $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ (*additivitás*);*

(5) *ha $f \le g$ és $\int f\, d\mu > -\infty$ vagy $\int g\, d\mu < \infty$, akkor $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$;*

(6) *ha $|f| \le g$ majdnem mindenütt és g integrálható, akkor f is integrálható (*majoráns kritérium*).*

Bizonyítás. (1) abból következik, hogy $f^+ = g^+$ és $f^- = g^-$ majdnem mindenütt. (2) következik abból, hogy $|f| = f^+ + f^-$. (3) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ és $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, így (3) a definícióból következik. Az $\alpha < 0$ eset erre az esetre vezethető vissza a $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ összefüggések felhasználásával. (5) az $f^+ \le g^+$ és $f^- \ge g^-$ egyenlőtlenségek következménye. (6) $\int f\, d\mu$ definíciójából triviális. Végül ha $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu \in \mathbb{R}$, akkor (4) az

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \tag{7}$$

összefüggés átrendezésével adódó

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

összefüggés mindkét oldalának integrálásával, majd visszarendezésével adódik. Ha

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \infty,$$

akkor a (7) összefüggésből $(f+g)^+ + f^- + g^- \geq f^+ + g^+$, így $\int (f+g)^+\,d\mu = \infty$, az $(f+g)^- = |f+g| - (f+g) \leq |f| + |g| - f - g = f^- + g^-$ egyenlőtlenségből viszont $\int (f+g)^-\,d\mu < \infty$. Hasonlóan kezelhető az $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = -\infty$ eset is.

2.9. Komplex és vektor értékű függvények integrálja. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, az f pedig az A-n majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Komplex értékű f függvény A feletti integrálját akkor definiáljuk, ha $\Re f$ és $\Im f$ integrálhatóak A felett, az

$$\int_A f = \int_A \Re f + i \int_A \Im f$$

összefüggéssel. Egy $\mathbb{K}^n$-beli értékű $f = (f_1, \ldots, f_n)$ függvény A feletti integrálját pedig akkor definiáljuk, ha az f_i koordináta-függvények integrálhatóak A felett, az

$$\int_A f\,d\mu = \Big(\int_A f_1\,d\mu, \ldots, \int_A f_n\,d\mu \Big)$$

összefüggéssel.

Komplex, illetve vektor értékű függvények integráljának tulajdonságai könnyen következnek a definícióból. Például f akkor és csak akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, mert $|f_j| \leq |f| \leq \sum_{j=1}^n |f_j|$. Némi külön meggondolást igényel $\mathbb{K}^n$-beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $\big|\int f\big| \leq \int |f|$. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j f_j(x) \leq |y|\big|f(x)\big|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int f_j \leq |y| \int |f|.$$

Ebből adódik az állítás.

Ez az egyszerű megközelítés nem használható, ha az értékkészlet nem véges dimenziós. Az alábbiakban egy általánosabb megközelítést fogunk tárgyalni. Ez speciális esetben visszaadja az itt definiált integrált, mint az könnyen következik a következő tételből. A további tételek bizonyítását az általánosabb definícióra adjuk meg, de a speciális definícióra nagyon hasonlóak, például a majoráns kritérium triviális, Lebesgue majorált konvergencia tételének bizonyítása pedig egyszerűbb lesz.

2.10. Banach-térbeli értékű függvények integrálja. Sokkal általánosabban, definiálhatjuk Banach-térbeli értékű mérhető függvény integrálját. Vegyük észre, hogy egy f nemnegatív mérhető függvény integrálját lényegében mint az összes $0 \le s \le f$ egyszerű mérhető függvények integráljainak szuprémumát definiáltuk. A szuprémumot határértékre cseréljük: ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, Y egy Banach-tér, jelölje $\mathcal{I}$ azon $s\colon X \to Y$ mérhető egyszerű függvények osztályát, amelyek egy véges mértékű halmazon kívül nullák.Az integrált ezen függvények segítségével definiáljuk. Ha $s \in \mathcal{I}$ és s nem nulla értékei $y_1, \dots, y_n$, akkor legyen

$$S(s) = \sum_{j=1}^{n} \mu\{s = y_j\} y_j.$$

Nyilván $\big|S(s_n)\big| \le S(|s_n|) = \int |s_n|$. Az X-en majdnem mindenütt értelmezett Y-beli értékű mérhető függvényt *integrálható*nak nevezünk, ha létezik olyan $s_n \in \mathcal{I}$ függvénysorozat, amely majdnem mindenütt f-hez konvergál, és amelyre $\int |f - s_n| \to 0$, amint $n \to \infty$. (Az $|f - s_n|$ függvény mérhető, mert véges sok $|f - c|$ alakú függvényből rakható össze.) Vegyük észre, hogy a $\lim_{n\to\infty} S(s_n)$ határérték létezik, mert

$$\big|S(s_n) - S(s_m)\big| \le \int |s_n - s_m| \le \int |f - s_n| + \int |f - s_m|.$$

Továbbá a határérték nem függ az s_n sorozat választásától, mert vehetjük a két sorozat tagjait felváltva. Valós értékű integrálható függvényhez létezik ilyen s_n sorozat: válasszuk s_n-et úgy, hogy $s_n^+ \uparrow f^+$ és $s_n^- \uparrow f^-$ teljesüljön, ekkor $|f - s_n| = f^+ - s_n^+ + f^- - s_n^-$, amiből

$$\int |f - s_n| = \int f^+ - \int s_n^+ + \int f^- - \int s_n^- \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nyilván erre a sorozatra $S(s_n) \to \int f$. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\int |f| \le \int |f - s_n| + \int |s_n| < \infty,$$

látjuk, hogy az integrálhatóság itteni definíciója valós értékű függvényekre visszaadja régit. Tehát a valós értékű függvényekre definiált integrálfogalom kiterjesztését kapjuk, ha egy tetszőleges Banach-térbeli értékű integrálható f függvény *integrál*ját az

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} S(s_n)$$

összefüggéssel értelmezzük. Az $A \in \mathcal{A}$ *halmazon vett integrál*t, ugyanúgy mint a nemnegatív függvényeknél, úgy értelmezzük, hogy a függvényt nullának definiáljuk A komplementerén, és az egész téren integrálunk.

2.11. Megjegyzés. Integrálokra vonatkozó tételek bizonyításának általános módja a következő *approximációs eljárás*: Az állítást belátjuk mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire, ebből azonnal következik nemnegatív egyszerű függvényekre és $\mathcal{I}$ elemeire. Ezután Beppo Levi tételét használva nemnegatív függvényekre térünk át, majd az integrál definíciójának megfelelően haladunk tovább. Ezzel a módszerrel a tételek általában átvihetők vektor értékű függvényekre is.

2.12. Az integrál tulajdonságai. *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha $f \in \mathcal{J}$, akkor f integrálható és $\int f\,d\mu = S(f)$;*

(2) *ha α, β skalárok, f és g integrálható függvények, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható, és $\int(\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu$ (linearitás);*

(3) *ha f integrálható, g mérhető, és $f = g$ majdnem mindenütt, akkor g is integrálható és $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$;*

(4) *ha f integrálható, akkor $|f|$ is, és $\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$;*

(5) *ha $f = (f_1, \dots, f_n)$, akkor f pontosan akkor integrálható, ha minden f_j integrálható, és $\int f\,d\mu = (\int f_1\,d\mu, \dots, \int f_n\,d\mu)$;*

(6) *ha Z is Banach-tér, $T\colon Y \to Z$ korlátos lineáris operátor és f integrálható, akkor $T \circ f$ is és $\int T \circ f = T(\int f)$;*

(7) *ha f integrálható, akkor van olyan szeparábilis altere Y-nak, hogy f értékei majdnem mindenütt ebben az altérben vannak.*

Bizonyítás. (1) és (3) triviálisak. (2) az $\mathcal{J}$ elemeire hasonló gondolatmenettel látható be, mint amit a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitásáról szóló tétel bizonyításának elején használtunk, (4), (5) és (6) pedig $\mathcal{J}$ elemeire triviálisak. Innen az általános eset határátmenettel következik. (7) teljesül, mert az s_n-ek értékkészletei lineáris burkának a lezártja szeparábilis altér.

2.13. Majoráns kritérium. *Ha f majdnem mindenütt értelmezett Banach-térbeli értékű mérhető függvény, amelynek értékei majdnem mindenütt egy szeparábilis altérben vannak, g pedig nemnegatív integrálható függvény egy mértéktéren, és $|f| \le g$ majdnem mindenütt, akkor f integrálható.*

A tételt a következő tétellel együtt bizonyítjuk.

2.14. Lebesgue majorált konvergencia tétele. *Ha $f_1, f_2, \dots$ majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű integrálható függvények az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktéren, g nemnegatív integrálható függvény, $|f_n| \le g$ majdnem mindenütt minden n-re és $f_n \to f$ majdnem mindenütt, akkor $\int |f_n - f|\,d\mu \to 0$ és $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Ha a mértéktér nem lenne teljes, f és $f_n - f$ mérhetőségét is fel kellene tenni.

Bizonyítás. Alkalmasan megváltoztatva a függvényeket nulla mértékű halmazon, az f_n és az f függvények értékkészlete egy szeparábilis altérben marad, és a $2g - |f_n - f|$ nemnegatív mérhető függvénysorozat pontonként a $2g$ függvényhez konvergál. A Fatou-lemma szerint

$$0 \ge \int 2g\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|)\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu \ge 0.$$

Ha most az approximációs tételt felhasználva, egy egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot választunk, amely mindenütt konvergál f-hez, és amelyre $|s_n| \le |f| \le g$, akkor f_n helyett s_n-re alkalmazva az eddig bizonyítottakat, azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \int |s_n - f| = 0$. Ez azt jelenti, hogy a majoráns kritérium teljesül. Ezek szerint f_n és f integrálhatóak. Mivel

$$\left|\int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu\right| \le \int |f_n - f|\,d\mu,$$

a bizonyítás kész.

2.15. Az integrál abszolút folytonossága. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és f integrálható függvény, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta$ esetén $\int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $0 \le s \le |f|$ egyszerű függvényt, amelyre

$$\int (|f| - s)\,d\mu < \varepsilon/2.$$

Ha $K \in \mathbb{R}$, $s < K$, akkor $\delta = \varepsilon/(2K)$ választással

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_A (|f| - s)\,d\mu + \int_A s\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A)K \le \varepsilon.$$

2.16. Az integrál σ-additivitása. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $A = \cup_{i=1}^{\infty}$ a diszjunkt, mérhető halmazokból álló A_i halmazrendszer egyesítése, valamint $\int_A f\,d\mu$ létezik, akkor*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f\,d\mu.$$

Bizonyítás. Nemnegatív függvényekre az állítás a szumma és az integrál felcserélhetőségéből következik. Bővített valós értékű függvényekre azért teljesül, mert a pozitív és a negatív részre is teljesül. A mérték σ-additivitása miatt bármely $s \in \mathcal{J}$ függvényre is teljesül az állítás. Innen határátmenettel kapjuk tetszőleges integrálható függvényre.

2.17. A Riemann- és a Lebesgue-integrál. Ha a Lebesgue-mérték szerint integrálunk, akkor a *Lebesgue-integrál*t kapjuk. Megmutatható, hogy egy korlátos halmazon értelmezett korlátos függvény, ha Riemann-integrálható, akkor mindig Lebesgue-integrálható is, és a két integrál megegyezik; ezt a kérdés a Stieltjes-integrálnál tárgyaljuk. Így a Lebesgue-integrál általánosabb a Riemann-integrálnál. Hasonlóan, ha egy Lebesgue–Stieltjes-mérték szerint integrálunk, akkor a *Lebesgue–Stieltjes-integrál*t kapjuk. Ha egy korlátos függvény egy korlátos intervallumon Stieltjes-integrálható egy monoton g függvényre vonatkozóan és az intervallum végpontjai g-nek folytonossági pontjai, akkor Lebesgue–Stieltjes-integrálható is, és a két integrál megegyezik; lásd a Stieltjes-integrálnál.

A jelölések egyszerűsítése érdekében érdemes megállapodni abban, hogy a továbbiakban az $\int f(x)\,dx$, stb., jelölést fogjuk használni a „természetes” mérték, a Lebesgue-mérték szerinti integráláskor. (Primitív függvény jelölésére ezt nem használjuk.) Általánosabban, ezt a jelölést fogjuk használni, ha egy m-dimenziós halmazon az m-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk; a „majdnem mindenütt” kitételt és a mérhetőséget is erre a mértékre értjük.

A számegyenesen, ha lényegtelen, hogy az intervallum végpontjai az integrációs tartományhoz tartoznak-e, akkor $a \le b$ esetén használni fogjuk az $\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ és az $\int_b^a f(x)\,d\mu(x) = -\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ jelölést. Általában más betűt használunk a határok jelölésére, mint integrációs változónak, de ez nem szükségszerű, mert az integrációs változó „kötött változó”, így például $\int_a^t f(t)\,dt$ teljesen legális.

→ **2.18. Feladat [2].** Határozzuk meg $[0,1]$-en a racionális számok karakterisztikus függvényének Riemann- és Lebesgue-integrálját.

→ **2.19. Feladat [3].** Számítsuk ki egy függvény Dirac-mérték szerinti integrálját.

→ **2.20. Feladat [5].** Számítsuk ki egy függvény számláló mérték szerinti integrálját.

→ **2.21. Feladat [4].** Mennyi $\int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx$?

→ **2.22. Feladat [5].** Legyen $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, ha $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Számítsuk ki $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ és $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ értékét.

2.23. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy egy Banach-térbeli értékű görbe Lebesgue-integrálható.

2.24. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy egy Banach-térbeli értékű korlátos változású függvény Lebesgue-integrálható.

→ **2.25. Feladat [6].** Számítsuk ki az $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ és $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ integrálokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

→ **2.26. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy σ-véges halmazon kívül nulla.

→ **2.27. Feladat [7].** Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelyre a Fatou-lemmában éles egyenlőtlenség teljesül. Lehet-e a függvénysorozat egyenletesen konvergens? Lehet-e a függvénysorozat korlátos, ha a mértéktér véges?

→ **2.28. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy Beppo Levi tétele nem marad igaz, ha $\leq$ helyett $\geq$ szerepel.

2.29. Feladat [6]. Igazoljuk, hogy ha egy integrálható bővített valós értékű f függvényre $\int_A f = 0$ minden mérhető A halmazra, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

2.30. Feladat [8]. Legyen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelyre $\int_0^x f = 0$ minden $x \in [0,1]$-re. Mutassuk meg, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

→ **2.31. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy skalár értékű függvények körében egy korlátos és mérhető függvénynek minden integrálható függvénnyel való szorzata integrálható. Igaz-e a megfordítás?

2.32. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy egy zárt intervallumon Riemann-integrálható függvény esetén az integrál, mint a felső határ függvénye majdnem mindenütt differenciálható.

2.33. Feladat [8]. Adjunk példát olyan $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amelyre $\lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 f(x)\,dx$ véges, de f a $]0,1]$-en nem Lebesgue-integrálható.

2.34. Feladat [10]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $\int_0^1 x^\alpha \sin x^\beta\,dx$, és mikor létezik a $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \sin x^\beta\,dx$ határérték?

$*$ **2.35. Feladat [10].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, (Y, d_Y) szeparábilis metrikus tér. Mutassuk meg, hogy a mérhető Y-beli értékű függvények között a

$$d(f,g) = \int \frac{d_Y(f,g)}{1 + d_Y(f,g)}\, d\mu$$

összefüggés egy eltérést ad meg, és a megfelelő konvergencia a mértékben való konvergencia.

$\to$ **2.36. Feladat [5].** Adjunk példát olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely λ-majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, de sehol sem folytonos.

$\to$ **2.37. Feladat [5].** Adjunk példát olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely λ-majdnem mindenütt folytonos, de nincs olyan folytonos függvény, amellyel λ-majdnem mindenütt egyenlő.

$*$ **2.38. Feladat [13].** Igaz-e, hogy egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény majdnem mindenütt egyenlő egy majdnem mindenütt folytonos függvénnyel?

Megoldás. Nem, ellenpélda a pozitív mértékű Cantor-halmaz karakterisztikus függvénye.

2.39. Mértékterek szorzata. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek, és tekintsük az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ halmazfüggvényt (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). Jelölje $\mu \times \nu$ az ehhez tartozó külső mértéket $X \times Y$-on, és $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a $\mu \times \nu$-mérhető halmazok osztályát. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mértékterek szorzatá*nak nevezzük.

2.40. Fubini-tétel. *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ teljes mértékterek. Ha $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, akkor az $A \times B$ halmaz $\mu \times \nu$-mérhető és $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). Ha f egy $\mu \times \nu$-mérhető függvény, amelynek $\mu \times \nu$-integrálja létezik és amely egy σ-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmazon kívül nulla, akkor az alábbi integrálok léteznek, és*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\,\mu \times \nu(x,y) &= \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

$*$ **Bizonyítás.** Jelölje $\mathcal{F}$ az olyan $S \subset X \times Y$ halmazok osztályát, amelyeknek ξ_S karakterisztikus függvényére a

$$\varrho(S) = \int_Y \int_X \xi_S(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

kétszeres integrál értelmezve van. Kétszer alkalmazva a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitását, illetve Lebesgue tételét, kapjuk, hogy

(1) ha $S_1, S_2, S_3, \ldots$ diszjunkt elemei $\mathcal{F}$-nek, akkor

$$\cup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\cup_{j=1}^{\infty} S_j);$$

(2) ha $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \dots$ egy $\mathcal{F}$-beli sorozat és $\varrho(S_1) < \infty$, akkor

$$\cap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \lim_{j\to\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\cap_{j=1}^{\infty} S_j).$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 =& \{A \times B : A \ \mu\text{-mérhető}, \ B \ \nu\text{-mérhető}\}, \\
\mathcal{P}_1 =& \{\cup_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_0\}, \\
\mathcal{P}_2 =& \{\cap_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_1\}
\end{aligned}$$

halmazrendszereket, és vegyük észre, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$, akkor $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Innen $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$ és $C \times D \in \mathcal{P}_0$, akkor $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0$ és

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big((A \setminus C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B \setminus D)\big)$$

két diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmaz uniója. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_1$ minden tagja előállítható diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmazok uniójaként. Így $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$. Két $\mathcal{P}_1$-beli halmaz metszete is $\mathcal{P}_1$-ben van. Így $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mathcal{P}_1$-beli halmazok egy csökkenő sorozatának a metszete.

Most megmutatjuk, hogy bármely $S \subset X \times Y$-ra

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\{\varrho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\},$$

és van olyan W halmaz, hogy

$$S \subset W \in \mathcal{P}_2 \quad \text{és} \quad (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W).$$

Először is, ha $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, A_3 \times B_3, \dots$ a $\mathcal{P}_0$ osztályban vannak, és

$$S \subset V = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j,$$

akkor

$$\xi_V \le \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{A_j \times B_j},$$

amiből

$$\varrho(V) \le \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j),$$

továbbá egyenlőség teljesül, ha az $A_j \times B_j$ halmazok diszjunktak. Másodszor, ha $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, választhatunk $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ halmazokat úgy, hogy $S \subset V_j \in \mathcal{P}_1$ és

$$(\mu \times \nu)(S) = \lim_{j\to\infty} \varrho(V_j)$$

teljesüljön. Végül, legyen $W = \cap_{j=1}^{\infty} V_j$, ha $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, ha pedig $(\mu \times \nu)(S) = \infty$, akkor legyen $W = X \times Y$.

Most (1) bizonyításához tegyük fel, hogy $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Mivel

$$\mu(A)\nu(B) = \varrho(A \times B) \le \varrho(V)$$

minden $A \times B \subset V \in \mathcal{P}_1$-re, kapjuk, hogy $\mu(A)\nu(B) \le (\mu \times \nu)(A \times B)$. A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Továbbá, ha $T \subset X \times Y$, akkor $T \subset U \in \mathcal{P}_1$-ből $U \cap (A \times B)$ és $U \setminus (A \times B)$ diszjunkt $\mathcal{P}_1$-beli halmazok, így

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) \\ \le \varrho(U \cap (A \times B)) + \varrho(U \setminus (A \times B)) = \varrho(U),\end{aligned}$$

amiből U-ra infimumot véve az $A \times B$ halmaz $\mu \times \nu$-mérhetősége adódik. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mu \times \nu$-mérhető. Ha most $(\mu \times \nu)(S) = 0$, akkor S benne van valamely $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $\varrho(W) = 0$, innen $\varrho(S) = 0$.

Ha $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ és az S halmaz $\mu \times \nu$-mérhető, akkor S benne van egy $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$, innen $(\mu \times \nu)(W \setminus S) = 0$. Így $\varrho(W \setminus S) = 0$,

$$\mu\{x\colon (x,y) \in S\} = \mu\{x\colon (x,y) \in W\}$$

teljesül ν-majdnem minden $y \in Y$-ra. Ez azt jelenti, hogy

$$\varrho(S) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(S),$$

azaz az első egyenlőség teljesül S karakterisztikus függvényére. Ugyanez teljesül, ha S tetszőleges σ-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmaz. A második egyenlőség μ és ν szerepének felcserélésével kapható a σ-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire. Végül az approximációs lemma és Beppo Levi tétele alapján kapjuk a tételt nemnegatív, az integrál definíciója alapján pedig tetszőleges függvényekre.

→ **2.41. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy λ^n és λ^m szorzata λ^{n+m}.

→ **2.42. Feladat [7].** Legyen λ a Lebesgue-mérték, μ pedig a számláló mérték $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy a $\delta_{x,y}$ Kronecker-delta $\mu \times \lambda$-mérhető, és határozzuk meg a Fubini-tételben szereplő integrálokat. Miért nem mond ellent az eredmény a Fubini-tételnek?

2.43. Feladat [10]. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 \big|f(x,y)\big|\,dy\,dx$$

integrálokat, ha

(1) $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$;

(2) $f(x,y) = 1/(x - 1/2)^3$, ha $0 < y < |x - 1/2|$, és 0 egyébként;

(3) $f(x,y) = (x - y)/(x^2 + y^2)^{3/2}$;

(4) $f(x,y) = 1/(1 - xy)^p$, ahol $p > 0$.

2.44. Feladat: az integrál, mint görbe alatti terület [10]. Legyen λ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0,\infty]$ mérhető függvény, és

$$T_* = \big\{(x,t)\colon (x,t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \le t < f(x)\big\},$$
$$T^* = \big\{(x,t)\colon (x,t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \le t \le f(x)\big\}.$$

Mutassuk meg, hogy a T_* és T^* halmazok $\mu \times \lambda$-mérhetőek, és

$$(\mu \times \lambda)(T_*) = (\mu \times \lambda)(T^*) = \int_X f\,d\mu.$$

(Lebesgue eredetileg a nemnegatív valós értékű függvények Lebesgue-integrálját görbe alatti területként definiálta.)

→ **2.45. Feladat [6].** Fogalmazzuk meg pontosan, és igazoljuk a *Cavalieri-elv*et.

∗ **2.46. Feladat: a nagy számok gyenge törvénye [13].** Ha $\gamma \in \Gamma$, legyen $(X_\gamma, \mathcal{A}_\gamma, \mu_\gamma)$ valószínűségi mértéktér. Az

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \mapsto \prod_{i=1}^{n} \mu_{\gamma_i}(A_{\gamma_i}),$$

$n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \Gamma$ páronként különböző indexek, $A_{\gamma_i} \in \mathcal{A}_{\gamma_i}$, ha $i = 1,\dots,n$ és $A_\gamma = X_\gamma$, ha $\gamma \ne \gamma_i$, $i = 1,\dots,n$ összefüggéssel értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ külső mértéket $\prod_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma$-val jelöljük, az erre nézve mérhető halmazok osztályát pedig $\prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma$-val. A μ megszorítását a μ-mérhető halmazok osztályára a μ_γ mértékek szorzatának nevezzük. Legyen $\Gamma = \mathbb{N}$, $X_n = \{-1, 1\}$, $\mathcal{A}_n$ az X_n összes részhalmazainak osztálya, μ_n pedig a számláló mérték $1/2$-szerese, ha $n \in \mathbb{N}$. Legyen $f_n(x) = x_n$, ha $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Mutassuk meg, hogy az f_n mérhető függvénysorozat mértékben az azonosan nulla függvényhez tart.

2.47. Probléma [?]. Igaz-e, hogy ha μ külső mérték X-en, ν pedig külső mérték Y-on, akkor az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$ leképezés σ-szubadditív $X \times Y$ részhalmazain?

2.48. Motiváció. Legyen μ Radon-mérték X-en. Ekkor az

$$F\colon f \mapsto \int f\,d\mu$$

megfeleltetés minden $f \in \mathcal{K}(X)$-hez hozzárendel egy komplex számot. Az integrál tulajdonságaiból következik, hogy F lineáris funkcionál $\mathcal{K}(X)$-n. Az F funkcionál rendelkezik még egy fontos tulajdonsággal: ha f és g valós értékű függvények és $f \ge g$, akkor $F(f) \ge F(g)$, amit úgy fogunk kifejezni, hogy F *monoton lineáris funkcionál*. Igen fontos tény, hogy ennek az egyszerű állításnak teljesül a megfordítása.

∗ **2.49. Riesz-féle reprezentációs tétel.** *Legyen X lokálisan kompakt metrikus tér, és F monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}(X)$-en. Ekkor létezik egy olyan μ teljes Radon-mérték X-en, amely megegyezik a saját természetes kiterjesztésével, és amelyre*

$$F(f) = \int f\,d\mu \quad \textit{minden } f \in \mathcal{K}(X)\textit{-re.} \tag{1}$$

Ha κ egy másik Radon-mérték, amelyre szintén teljesül (1), akkor μ a κ természetes kiterjesztése.

Bizonyítás. Legyen

$$\nu(V) = \sup\{F(f)\colon f \in \mathcal{K}(X),\ 0 \le f \le 1 \text{ és } \operatorname{spt} f \subset V\},$$

ha V nyílt részhalmaza X-nek, és μ a ν-höz tartozó külső mérték. Megmutatjuk, hogy ν σ-szubadditív a nyílt halmazokon. Tegyük fel, hogy $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$, ahol V, V_i, $i = 1, 2, \dots$ nyílt halmazok, és $f \in \mathcal{K}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \le f \le 1$ és $\operatorname{spt} f \subset V$. Mivel $\operatorname{spt} f$ kompakt, van olyan n, hogy $\operatorname{spt} f \subset \cup_{i=1}^{n} V_i$. Dieudonnénak az egység felbontására vonatkozó tétele szerint léteznek olyan $g_1, g_2, \dots, g_n$ függvények, hogy $g_i \in \mathcal{K}(X)$, $0 \le g_i \le 1$, $\operatorname{spt} g_i \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, ha $x \in \operatorname{spt} f$. Ebből

$$F(f) = \sum_{i=1}^{n} F(g_i f) \le \sum_{i=1}^{n} \nu(V_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i).$$

A bal oldalon szuprémumot véve, kapjuk, hogy $\nu(V) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i)$.

Ha $\varepsilon > 0$ és V, W nyílt halmazok úgy, hogy $\nu(W) < \infty$ és $f \in \mathcal{K}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \le f \le 1$, $\operatorname{spt} f \subset V \cap W$ és $F(f) > \nu(V \cap W) - \varepsilon$, akkor a ν definíciója értelmében

$$\nu(W) \ge F(f) + \nu(W \setminus \operatorname{spt} f) \ge \mu(V \cap W) + \mu(W \setminus V) - \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden nyílt halmaz μ-mérhető, $\mu(V) = \nu(V)$, ha V nyílt, és X bármely részhalmazának a külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek pontos alsó korlátja.

Legyen most K kompakt részhalmaza X-nek és $f \in \mathcal{K}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \le f \le 1$ és $f(x) = 1$, ha $x \in K$. Ha $0 < \alpha < 1$ és $V_\alpha = X(f > \alpha)$, akkor $K \subset V_\alpha$ és $g \le f/\alpha$ minden olyan $g \in \mathcal{K}(X)$ függvényre, amelyre $0 \le g \le 1$ és $\operatorname{spt} g \subset V_\alpha$. Innen

$$\mu(K) \le \mu(V_\alpha) = \nu(V_\alpha) \le \sup_g F(g) \le \frac{1}{\alpha} F(f),$$

amiből $\alpha \uparrow 1$ határátmenettel

$$\mu(K) \le F(f) < \infty. \tag{2}$$

Végül, ha V nyílt és $f \in \mathcal{K}(X)$, $0 \le f \le 1$ és $\operatorname{spt} f \subset V$, akkor egy olyan W nyílt halmazra, amely tartalmazza $\operatorname{spt} f$-et de kompakt lezártja V-ben van,

$$\mu(V) \ge \mu(\overline{W}) \ge \mu(W) \ge F(f),$$

amiből

$$\mu(V) \le \sup\{\mu(K)\colon K \subset V,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy μ teljes Radon-mérték X-en. Nyilván μ természetes kiterjesztése önmaga.

Most megmutatjuk, hogy

$$F(f) = \int f\, d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{K}(X; \mathbb{R}).$$

Nyilván f μ-mérhető, mert folytonos. Legyen $K = \operatorname{spt} f$ és $]a, b[$ egy olyan intervallum, amely tartalmazza f értékkészletét. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$$

felosztását $[a, b]$-nek, amelyre $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ $(1 \le i \le n)$. Legyen

$$E_i = K \cap \{y_{i-1} < f \le y_i\}.$$

Válasszunk olyan V_i nyílt halmazokat, amelyekre $E_i \subset V_i$, $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n$ és

$$f(x) < y_i + \varepsilon \quad \text{minden } x \in V_i\text{-re.}$$

Az egység felbontásáról szóló tétel szerint léteznek olyan $g_i \in \mathcal{K}(X; \mathbb{R})$ függvények, hogy $0 \le g_i \le 1$, $\operatorname{spt} g_i \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, ha $x \in K$. Innen $f = \sum_{i=1}^n g_i f$ és (2) szerint

$$\mu(K) \le F\Big(\sum_{i=1}^n g_i\Big) = \sum_{i=1}^n F(g_i).$$

Mivel $g_i f \le (y_i + \varepsilon) g_i$ és mivel $y_i - \varepsilon < f(x)$, ha $x \in E_i$,

$$\begin{aligned}
F(f) &= \sum_{i=1}^n F(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) F(g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) F(g_i) - |a| \sum_{i=1}^n F(g_i) \\
&\le \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\le \int f\, d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk, hogy $F(f) \le \int f\, d\mu$. Alkalmazva ezt $-f$-re,

$$-F(f) = F(-f) \le \int (-f)\, d\mu = -\int f\, d\mu,$$

ami éppen a másik irányú egyenlőtlenség. Most tetszőleges $f \in \mathcal{K}(X)$-re $f = f_1 + i f_2$, ahol $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(X; \mathbb{R})$ és így

$$F(f) = F(f_1) + iF(f_2) = \int f_1\, d\mu + i \int f_2\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Hátra van még annak igazolása, hogy ha κ egy másik Radon-mérték X-en, amelyre

$$F(f) = \int f\, d\kappa \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}(X)\text{-re,}$$

akkor μ a természetes kiterjesztése κ-nak. Legyen K kompakt részhalmaza X-nek, $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $K \subset V$ nyílt részhalmazt, amelyre $\kappa(V) \leq \kappa(K) + \varepsilon$. Az Uriszon-lemma szerint van olyan $f \in \mathcal{K}(X; \mathbb{R})$, hogy

$$0 \leq f \leq 1, \operatorname{spt} f \subset V \text{ és } f(x) = 1, \text{ ha } x \in K.$$

Innen (2) szerint

$$\mu(K) \leq \int f\,d\mu = F(f) = \int f\,d\kappa \leq \kappa(V) \leq \kappa(K) + \varepsilon,$$

és így $\mu(K) \leq \kappa(K)$. Felcserélve μ és κ szerepét, kapjuk, hogy $\mu(K) = \kappa(K)$ bármely K kompakt részhalmazára X-nek. Mivel μ és κ Radon-mértékek, megegyeznek a nyílt halmazokon is. Ha a κ-hoz tartozó külső mértéket is κ-val jelöljük, akkor

$$\kappa(A) = \inf\{\kappa(V) \colon A \subset V,\ V \text{ nyílt}\}$$

minden $A \subset X$-re, így $\kappa(A) = \mu(A)$ minden $A \subset X$-re, azaz μ a κ természetes kiterjesztése.

$*$ **2.50. Példa.** Legyen $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, és

$$F_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,dg \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})\text{-re.}$$

Ekkor F_g monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}(\mathbb{R})$-n, így a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint előáll egy teljes Radon-mérték szerinti integrálként. Mivel a Riemann–Stieltjes-integrálható függvények Lebesgue–Stieltjes-integrálhatók is és a két integrál megegyezik,

$$F_g(f) = \int f\,d\lambda_g \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})\text{-re,}$$

és mivel, mint könnyen ellenőrizhető, λ_g természetes kiterjesztése önmaga, az F_g-hez a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint tartozó teljes Radon-mérték éppen λ_g.

2.51. Motiváció. Az integrál σ-additivitása miatt, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és ϱ egy nemnegatív mérhető függvény X-en, a

$$\nu(A) = \int_A \varrho\,d\mu, \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A} \tag{1}$$

összefüggéssel értelmezett halmazfüggvény mérték. Nyilvánvaló, hogy ha $\mu(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$. Meglepő, hogy ennek a triviális észrevételnek a megfordítása is igaz.

2.52. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak σ-algebrája, μ és ν pedig ezen értelmezett mértékek. A ν mértéket *abszolút folytonos*nak nevezzük μ-re nézve, ha bármely $A \in \mathcal{A}$-ra, amelyre $\mu(A) = 0$, fennáll, hogy $\nu(A) = 0$. Jelölése: $\nu \ll \mu$. Azt mondjuk, hogy ν *szinguláris* μ-re nézve, ha van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(A) = 0$ és $\nu(X \setminus A) = 0$. Jelölése: $\nu \perp \mu$.

2.53. Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak σ-algebrája, μ és ν pedig ezen értelmezett σ-véges mértékek. Ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{A}$-n értelmezett ν_a és ν_s mértékekből álló pár létezik, hogy*

(1) $\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A)$ *minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra;*

(2) $\nu_a \ll \mu$ *és* $\nu_s \perp \mu$.

Létezik továbbá egy olyan X-en értelmezett ϱ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

(3) $\nu_a(A) = \int_A \varrho\, d\mu$ *minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra.*

A ϱ függvény μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varrho}$ egy másik X-en értelmezett nemnegatív mérhető függvény, amelyre (3) fennáll, akkor a két függvény μ-majdnem mindenütt egyenlő. Ha $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_X f\, d\nu_a = \int_X f\varrho\, d\mu. \tag{4}$$

∗ **Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy μ és ν véges mértékek. Legyen $\kappa(A) = \mu(A) + \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ekkor κ is mérték $(X, \mathcal{A})$-n, továbbá

$$\int f\, d\kappa = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu,$$

ha valamelyik oldal definiálva van. Ez az utóbbi állítás mérhető, egyszerű függvényekre nyilvánvaló, nemnegatív mérhető függvényekre Beppo Levi tételéből, tetszőlegesekre pedig az integrál definíciójából következik.

A bizonyítás kulcsa a Riesz-féle reprezentációs tétel alkalmazása a (valós) $\mathbb{L}^2(\kappa)$ tér folytonos lineáris funkcionáljaira. Ha $f \in \mathbb{L}^2(\kappa)$, akkor

$$\Big|\int f\, d\nu\Big| \le \int |f|\, d\nu \le \int |f|\, d\kappa \le \kappa(X)^{1/2}\Big(\int |f|^2\, d\kappa\Big)^{1/2},$$

így az $f \mapsto \int f\, d\nu$ funkcionál folytonos lineáris funkcionál $\mathbb{L}^2(\kappa)$-n. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint van olyan $g \in \mathbb{L}^2(\kappa)$, hogy

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\kappa = \int fg\, d\nu + \int fg\, d\mu, \tag{5}$$

ha $f \in \mathbb{L}^2(\kappa)$. Legyen $f = \xi_A$ valamely $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor az előző egyenlőség bal oldala $\nu(A)$, és mivel $0 \le \nu(A) \le \kappa(A)$,

$$0 \le \int_A g\, d\kappa \le \kappa(A).$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{A}$-ra fennáll, κ-majdnem minden $x \in X$-re $0 \le g(x) \le 1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez minden $x \in X$-re fennáll. (5)-öt átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$\int_X (1-g) f\, d\nu = \int_X fg\, d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^2(\kappa). \tag{6}$$

Legyen $B = X(g = 1)$, és legyen $\nu_a(A) = \nu(A \setminus B)$, $\nu_s(A) = \nu(A \cap B)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ha f a B karakterisztikus függvénye (6)-ban, akkor látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Nyilván $\nu_s(X \setminus B) = 0$, így $\mu \perp \nu_s$. Mivel g korlátos, (6) akkor is teljesül, ha f-et $(1 + g + \ldots + g^n)\xi_A$-val helyettesítjük, $A \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$-re. Így azt kapjuk, hogy

$$\int_A (1 - g^{n+1})\, d\nu = \int_A g(1 + g + \ldots + g^n)\, d\mu. \tag{7}$$

A B minden pontjában $g(x) = 1$, és így $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Az $X \setminus B$ minden pontjában $g^{n+1}(x) \to 0$ monoton csökkenve. Így a bal oldal $\nu(A \setminus B) = \nu_a(A)$-hoz tart monoton növekedve. A jobb oldalon szereplő függvény egy nemnegatív mérhető ϱ függvényhez tart monoton növekedve, maga az integrál pedig $\int_A \varrho\, d\mu$-höz. Ezzel beláttuk (3)-at. (3)-ból következik, hogy $\nu_a \ll \mu$.

Most térjünk át az általános eset bizonyítására. Válasszunk egy olyan C_n, $n = 1, 2, \ldots$ diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozatot, amelyre

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X, \quad \mu(C_n) < \infty$$

és $\nu(C_n) < \infty$ minden n-re. A ν_{C_n} és μ_{C_n} mértékekre alkalmazva a tétel eddig bizonyított részét, a $\nu_{C_n,a}$ és $\nu_{C_n,s}$ mértékeket és ϱ_n függvényeket kapjuk. Legyen

$$\nu_a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,a}(A \cap C_n) \quad \text{és} \quad \nu_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,s}(A \cap C_n),$$

ha $A \in \mathcal{A}$, és legyen $\varrho(x) = \varrho_n(x)$, ha $x \in C_n$ és $\varrho_n(x)$ definiálva van. Ekkor az (1), (2) és (3) összefüggések teljesülnek. A ν_a és ν_s mértékek unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B) = 0$ és $\nu_s(X \setminus B) = 0$, továbbá hogy $\nu'_a + \nu'_s = \nu$, $\nu'_a \ll \mu$, és $B' \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B') = 0$ és $\nu'_s(X \setminus B') = 0$. Ekkor bármely $\mathcal{A}$-beli $D \subset B \cup B'$ halmazra $\mu(D) = 0$, és így ν_a és ν'_a abszolút folytonossága miatt $\nu(D) = \nu_s(D) = \nu'_s(D)$. Ha $D \subset X \setminus (B \cup B')$, akkor $\nu_s(D) = \nu'_s(D) = 0$ teljesül. Így

$$\begin{aligned} \nu_s(A) &= \nu_s(A \cap (B \cup B')) + \nu_s(A \setminus (B \cup B')) \\ &= \nu'_s(A \cap (B \cup B')) + \nu'_s(A \setminus (B \cup B')) = \nu'_s(A), \end{aligned}$$

ha $A \in \mathcal{A}$. Ebből már adódik, hogy $\nu_a(A) = \nu'_a(A)$. Így $\nu_a = \nu'_a$ és $\nu_s = \nu'_s$.

A ϱ unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\nu_a(A) = \int_A \tilde{\varrho}\, d\mu$$

minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor az $\{\varrho > \tilde{\varrho}\}$ halmazra

$$0 = \int_{\{\varrho > \tilde{\varrho}\}} (\varrho - \tilde{\varrho})\, d\mu,$$

amiből $\mu\{\varrho > \tilde{\varrho}\} = 0$. Hasonlóan $\mu\{\varrho < \tilde{\varrho}\} = 0$, így a két függvény μ-majdnem mindenütt egyenlő.

Végül (4) a szokásos módon kapható: nyilvánvaló egyszerű függvényekre, Beppo Levi tételéből adódik nemnegatív, az integrál definíciójából pedig tetszőleges függvényekre.

2.54. Megjegyzés. Az előző tételben szereplő ν_a, ν_s párt a ν mérték μ-re vonatkozó *Lebesgue-féle felbontás*ának, a tétel ennek létezésére és egyértelműségére vonatkozó részét pedig *Lebesgue felbontási tétel*ének nevezzük. A tétel második fele, amely a ν_a mérték integrálként való előállításával foglalkozik, a *Radon–Nikodym-tétel*. ϱ-t szokás *Radon–Nikodym-deriválts*nak nevezni, és $d\nu_a/d\mu$-vel d//a jelölni. Definiálhatók előjeles, illetve komplex mértékek is, mint valamely X halmaz részhalmazainak egy σ-algebráján értelmezett, bővített valós, illetve komplex értékű σ-additív halmazfüggvények. Megfelelő módosításokkal a Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel ebben az esetben is érvényes marad.

$*$ **2.55. Feladat: láncszabály [5].** Legyenek μ, ν és κ σ-véges mértékek az X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ σ-algebráján úgy, hogy $\nu \ll \mu$ és $\kappa \ll \nu$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\kappa \ll \mu$ és $d\kappa/d\mu = (d\kappa/d\nu)(d\nu/d\mu)$ μ-majdnem mindenütt.

$*$ **2.56. Feladat [9].** Vezessük le a Lebesgue-féle felbontási tételt a Radon–Nikodym-tételből.

Megoldás. Legyenek μ és ν mértékek $(X, \mathcal{A})$-n, $\kappa = \nu + \mu$, $\varphi = d\nu/d\kappa$, $B = X(\varphi = 1)$, $\nu_s(A) = \nu(A \cap B)$, $\nu_a(A) = \nu(A \setminus B)$.

2.57. Megjegyzés. Ha a Lebesgue–Radon–Nikodym-tételben μ a térfogat, ν pedig valamilyen extenzív mennyiség, akkor ϱ a megfelelő sűrűség, például tömeg esetén tömegsűrűség. Ezen példa alapján azt várjuk, hogy ha μ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-en, akkor

$$\varrho(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\nu(\mathbb{U}_\varepsilon(x))}{\mu(\mathbb{U}_\varepsilon(x))}$$

μ-majdnem mindenütt. Valóban ez a helyzet elég általános feltételek mellett. A részletes tárgyalás a maximálfüggvényre vagy a Vitali-féle lefedésekre alapozható. Itt a maximálfüggvényt fogjuk használni, a másik felépítést illetően lásd a Járai [71] könyvet.

$*$ **2.58. Maximálfüggvény.** Legyen μ Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en. A μ *maximálfüggvény*ét az

$$(M\mu)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{\mu\mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)}$$

összefüggéssel definiáljuk. Vegyük észre, hogy minden t-re az $\{M\mu > t\}$ halmaz nyílt, mert ha valamely x-re és r-re $T = \mu\mathbb{U}_r(x)/\lambda^n\mathbb{U}_r(x) > t$, akkor $(r+\delta)^n < r^n T/t$, $|y - x| < \delta$ esetén $\mathbb{U}_r(x) \subset \mathbb{U}_{r+\delta}(y)$, így $\mu\mathbb{U}_{r+\delta}(y) > t\lambda^n\mathbb{U}_{r+\delta}(y)$.

$*$ **2.59. Hardy–Littlewood-féle maximál egyenlőtlenség.** *Legyen μ egy Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és t egy pozitív valós szám. Ekkor $\lambda^n\{M\mu > t\} \le 3^n\mu(\mathbb{R}^n)/t$.*

Bizonyítás. Legyen K egy kompakt részhalmaza a $\{M\mu > t\}$ nyílt halmaznak. Minden $x \in K$-hoz van olyan $r > 0$, hogy $\mu\mathbb{U}_r(x) > t\lambda^n\mathbb{U}_r(x)$. Ezek közül a gömbök közül véges sok, mondjuk $\mathbb{U}_{r_i}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ lefedi K-t. Feltehetjük, hogy $r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_N$. Legyen $i_1 = 1$, és hagyjuk el mindazokat a gömböket, amelyek az első gömbbe belemetszenek. Legyen i_2 a megmaradó gömbök közül az elsőnek az indexe, és hagyjuk el a $j > i_2$ indexű gömbök közül mindazokat, amelyek az i_2 indexű gömbbe belemetszenek, stb. Legyen I a végül megmaradó gömbök indexeinek halmaza. Ezek a gömbök diszjunktak, de $K \subset \cup_{i\in I}\mathbb{U}_{3r_i}(x_i)$, így

$$\lambda^n(K) \le 3^n \sum_{i\in I} \lambda^n \mathbb{U}_{r_i}(x_i) \le \frac{3^n}{t} \sum_{i\in I} \mu\mathbb{U}_{r_i}(x_i) \le \frac{3^n}{t}\mu(\mathbb{R}^n).$$

Végül vegyünk szuprémumot K-ra.

$*$ **2.60. Tétel: Lebesgue-pontok.** *Legyen f lokálisan Lebesgue-integrálható függvény $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontban*

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)} \int_{\mathbb{U}_r(x)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy = 0.$$

Azokat a pontokat, ahol a konvergencia fennáll, az f *Lebesgue-pont*jainak nevezzük. A tétel tehát úgy is fogalmazható, hogy majdnem minden pont Lebesgue-pont.

Bizonyítás. Mivel lokálisan integrálható függvény minden kompakt halmazon integrálható, $\mathbb{R}^n$ pedig megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése, elég az állítást integrálható f függvényre megmutatni. Legyen

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)} \int_{\mathbb{U}_r(x)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy,$$

ha $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, és legyen $(Tf)(x) = \limsup_{r\downarrow 0}(T_r f)(x)$. Meg kell mutatnunk, hogy $Tf = 0$ majdnem mindenütt. Válasszunk egy $t > 0$-t. Legyen $k > 0$ egy természetes szám. Létezik olyan g folytonos függvény, amelyre $\|f - g\|_1 < 1/k$. Legyen $h = f - g$. Mivel g folytonos, $Tg = 0$. Ha $\mu(A) = \int_A |h|\, d\lambda^n$ a mérhető halmazokon, akkor

$$(T_r h)(x) \le \frac{\mu \mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)} + \big|h(x)\big|,$$

amiből $Th \le M\mu + |h|$. Mivel $T_r f \le T_r g + T_r h$, kapjuk, hogy $Tf \le M\mu + |h|$. Ebből $\{Tf > 2t\} \subset \{M\mu > t\} \cup \{|h| > t\}$. Mivel $\|h\|_1 < 1/k$, a jobb oldal mértéke legfeljebb $(3^n + 1)/(tk)$. Ez tart nullához, ha $k \to \infty$, így $\{Tf > 2t\}$ nullmértékű. Mivel ez minden t-re teljesül, $Tf = 0$ majdnem mindenütt.

2.61. Lebesgue-sűrűség. Legyen A egy λ^n-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor a

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\lambda^n\big(A \cap \mathbb{U}_r(x)\big)}{\lambda^n\big(\mathbb{U}_r(x)\big)}$$

határértéket – ha létezik – az A halmaz x pontbeli *Lebesgue-sűrűség*ének nevezzük.

2.62. Lebesgue sűrűségi tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, majdnem minden $x \in A$ pontban az A Lebesgue-sűrűsége 1, és majdnem minden $x \notin A$ pontban az A Lebesgue-sűrűsége 0.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt az A karakterisztikus függvényére.

2.63. Tétel. *Legyen μ egy teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és $\mu = \mu_a + \mu_s$ a μ Lebesgue-felbontása λ^n-re vonatkozóan (a Borel-halmazokon). Ekkor*

$$\frac{d\mu_a}{d\lambda^n}(x) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu \mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)}$$

λ^n majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re.

$*$ **Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $\mu = \mu_a$. Az $f = d\mu/d\lambda^n$ függvény minden Lebesgue-pontjában

$$f(x) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)} \int_{\mathbb{U}_r(x)} f\, d\lambda^n = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu \mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)}.$$

Ha még megmutatjuk, hogy $\mu = \mu_s$ esetén

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mu \mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)} = 0$$

λ^n-majdnem mindenütt, akkor a bizonyítás kész. Legyen

$$(\overline{D}\mu)(x) = \limsup_{r\downarrow 0} \frac{\mu \mathbb{U}_r(x)}{\lambda^n \mathbb{U}_r(x)}.$$

Legyen B egy Borel-halmaz, amelyre $\lambda^n(B) = 0$, $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$. Válasszunk egy V kompakt lezártú nyílt halmazt, egy $t > 0$ és egy $\varepsilon > 0$ számot. Mivel μ Radon-mérték, van olyan $K \subset B \cap V$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(K) > \mu(B \cap V) - \varepsilon = \mu(V) - \varepsilon$. Legyen

$$\mu_\varepsilon(A) = \mu(A \cap (V \setminus K)),$$

ha A Borel-halmaz. Ha $x \in V \setminus K$, akkor

$$(\overline{D}\mu)(x) = (\overline{D}\mu_\varepsilon)(x) \le (M\mu_\varepsilon)(x).$$

Innen

$$\{x\colon x \in V, (\overline{D}\mu)(x) > t\} \subset K \cup \{M\mu_\varepsilon > t\},$$

amiből a jobb oldalon szereplő halmaz külső λ^n-mértéke legfeljebb $3^n\varepsilon/t$. Mivel ε tetszőleges volt, $\{x\colon x \in V, (\overline{D}\mu)(x) > t\}$ nulla Lebesgue-mértékű. Mivel t is tetszőleges, $\overline{D}\mu = 0$ a V-n λ^n-majdnem mindenütt. Mivel $\mathbb{R}^n$ lefedhető megszámlálható sok kompakt lezártú nyílt halmazzal, $\overline{D}\mu = 0$ λ^n-majdnem mindenütt.

2.64. Lebesgue tétele. *Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, λ_g a g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték, $\lambda_{g,a}$ és $\lambda_{g,s}$ pedig ennek a λ-ra vonatkozó Lebesgue-féle felbontása (a Borel-halmazokon). A g függvény λ-majdnem mindenütt differenciálható és g' a $\lambda_{g,a}$-nak λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.*

A tétel a valós függvénytan egyik legmeglepőbb és legfontosabb eredménye. Egy másik bizonyítása található Szőkefalvi-Nagy [164] könyvében, 97. o.

$*$ **Bizonyítás.** Ha az $x \in \mathbb{R}$ pont Lebesgue-pontja $f = d\lambda_{g,a}/d\lambda$-nak,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\lambda_{g,s}]x-h, x+h[}{2h} = 0,$$

g pedig folytonos x-ben, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < h < \delta$, akkor

$$\left| f(x) - \frac{\lambda_{g,a}]x, x+h[}{h} \right| = \left| f(x) - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\, d\lambda(y) \right|$$
$$\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \big| f(x) - f(y) \big|\, d\lambda(y) \leq 2 \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \big| f(x) - f(y) \big|\, d\lambda(y) < \varepsilon$$

és

$$\frac{\lambda_{g,s}]x, x+h[}{h} \leq 2 \frac{1}{2h} \lambda_{g,s}]x-h, x+h[< \varepsilon.$$

Ebből $0 < h < \delta$ esetén, ha $x + h$ folytonossági pontja g-nek, akkor

$$\left| f(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| \leq 2\varepsilon.$$

Mivel g monoton növekedő, ez akkor is igaz, ha $0 < h < \delta$ tetszőleges. Negatív h-ra hasonló számítással kaphatjuk meg a fenti egyenlőtlenséget. Ebből viszont $g'(x)$ létezik és

$$f(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\lambda_{g,a}]x-r, x+r[}{2r} = g'(x)$$

λ-majdnem mindenütt.

2.65. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Az $f\colon [a, b] \to X$ függvény *változás*án a

$$\mathbb{V}(f) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} d(f(x_{i-1}), f(x_i))\colon a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b \Big\}$$

bővített valós számot értjük. Ha $\mathbb{V}(f) < \infty$, akkor f-et *korlátos változású*nak nevezzük. Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor használni fogjuk az $\mathbb{V}_c^d(f)$ jelölést $f|_{[c,d]}$ változásának jelölésére. Ha $a \leq d < c \leq b$, akkor legyen $\mathbb{V}_c^d f = -\mathbb{V}_d^c f$.

2.66. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér és $f\colon [a, b] \to X$ egy függvény. Ekkor*

(1) *ha $a \leq c \leq b$, akkor $\mathbb{V}_a^b f = \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$;*

(2) *ha $X = X_1 \times \cdots X_n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, akkor $\mathbb{V}(f_j) \leq \mathbb{V}(f) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(f_i)$, ha $j = 1, \ldots, n$;*

(3) *ha $\mathbb{V}(f) < \infty$, $s(x) = \mathbb{V}_a^x f$, $a \leq x \leq b$, akkor f és s egyszerre folytonosak x-ben, és megszámlálható sok olyan x pont van, amelyre nem folytonosak;*

(4) *ha X teljes és $\mathbb{V}(f) < \infty$, akkor minden $a < x \leq b$ esetén létezik $f(x-) = \lim_{t \uparrow x} f(t)$ és minden $a \leq x < b$ esetén létezik $f(x+) = \lim_{t \downarrow x} f(t)$.*

Bizonyítás. (1) bizonyításához, ha $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k = b$ és $x_j \leq c \leq x_{j+1}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{j} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) + d(f(x_j), f(c))$$
$$+ d(f(c), f(x_{j+1})) + \sum_{i=j+2}^{k} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f,$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \le \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$. Megfordítva,

$$\mathop{\mathbb{V}}_a^b f \ge \sum_{i=1}^{j} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) + \sum_{i=j+1}^{k} d(f(x_{i-1}), f(x_i)),$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \ge \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$.

(2)-t úgy kapjuk, hogy a megfelelő egyenlőtlenséget felírjuk egy felosztásra, majd előbb a jobb, aztán a bal oldalon veszünk szuprémumot.

(3) bizonyításához vegyük észre hogy $d(f(x), f(y)) \le \big|s(y) - s(x)\big|$, amiből következik, hogy ha s folytonos x-ben, akkor f is. Ha f balról folytonos x-ben, akkor válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t és egy olyan $\delta > 0$-t, amelyre $x > t > x - \delta$ esetén $d(f(t), f(x)) < \varepsilon/2$, továbbá egy olyan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = x$ felosztást, amelyre $s(x) - \varepsilon/2 < \sum_{j=1}^{k} d(f(x_{j-1}), f(x_j))$ és $x_{k-1} \ge x - \delta$. Mivel a jobb oldali összeg utolsó tagja kisebb, mint $\varepsilon/2$,

$$s(x) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k-1} d(f(x_{j-1}), f(x_j)) \le s(x_{k-1}).$$

Ebből $t > x_{k-1}$ esetén $s(x) - s(t) < \varepsilon$, azaz s balról folytonos x-ben. A jobb oldali folytonosság hasonlóan látható be.

Mivel s monoton növekedő függvény, a bal illetve jobb oldali határérték definíciója alapján kapjuk, hogy $s(x-) = \sup\{s(t)\colon a \le t < x\} \le s(x)$, ha $a < x \le b$ és $s(x+) = \inf\{s(t)\colon x < t \le b\} \ge s(x)$, ha $a \le x < b$. Ha x egy $]a, b[$-beli szakadási helye s-nek, tekintsük az $\big]s(x-), s(x+)\big[$ intervallumot. Ezek az intervallumok diszjunktak és mindegyikük tartalmaz racionális számot, így legfeljebb megszámlálható sokan vannak.

(4) bizonyításához, a már használt $d(f(y), f(z)) \le \big|s(y) - s(z)\big|$ egyenlőtlenségből, minden olyan x_n sorozatra, amelyre $s(x_n)$ Cauchy-sorozat, $f(x_n)$ is Cauchy-sorozat. Így $x_n < x$, $x_n \to x$ esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ létezik, és nem függ a sorozat megválasztásától, mert egyébként a két sorozat tagjait váltakozva véve, nem létezhetne.

2.67. Tétel. *Ha X normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f, g\colon [a, b] \to X$ függvények, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor*

(1) $\mathbb{V}(f + g) \le \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$;

(2) $\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha|\, \mathbb{V}(f)$ *(itt $0 \cdot \infty = 0$).*

Bizonyítás. (1)-et úgy kapjuk, hogy a megfelelő egyenlőtlenséget felírjuk egy felosztásra, majd előbb a jobb, aztán a bal oldalon veszünk szuprémumot. (2) mindkét oldala ugyanazon számhalmaz szuprémuma.

2.68. Jordan felbontási tétele. *Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos változású függvény, $a \le c \le b$. Ekkor az*

$$f_+(x) = \frac{\mathbb{V}_c^x f + f(x)}{2} \quad \text{és} \quad f_-(x) = \frac{\mathbb{V}_c^x f - f(x)}{2}, \quad \text{ha} \quad a \le x \le b$$

függvények monoton növekedőek, és $f = f_+ - f_-$.

Bizonyítás. Ha $a \le x \le y \le b$, akkor a $\mathbb{V}_x^y f \ge \big|f(x) - f(y)\big|$ egyenlőtlenségből $\mathbb{V}_x^y f \ge f(y) - f(x)$, tehát

$$f_-(y) - f_-(x) = \frac{1}{2}(\overset{y}{\underset{x}{\mathbb{V}}} f - f(y) + f(x)) \ge 0,$$

és $\mathbb{V}_x^y f \ge f(x) - f(y)$, tehát

$$f_+(y) - f_+(x) = \frac{1}{2}(\overset{y}{\underset{x}{\mathbb{V}}} f - f(x) + f(y)) \ge 0.$$

2.69. Feladat [3]. Az előző tétel jelöléseivel, mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos egy pontban, ha f_+ és f_- is folytonosak.

$*$ **2.70. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy az előző tételben szereplő felbontás minimális abban az értelemben, hogy $\mathbb{V}_a^b f_+ + \mathbb{V}_a^b f_- = \mathbb{V}_a^b f$, és nem nagyobb. Mutassuk meg, hogy minimális felbontások csak konstansban különböznek.

2.71. Tétel. *Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ egy függvény, amely minden $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon korlátos változású. Ekkor f λ-majdnem mindenütt differenciálható és*

$$\int_a^b \big|f'(x)\big|\,dx \le \overset{b}{\underset{a}{\mathbb{V}}} f.$$

Bizonyítás. Jordan felbontási tételéből és Lebesgue tételéből következik a majdnem mindenütti differenciálhatóság. Legyen $f(x) = f(b)$, ha $x > b$, és $s(x) = \mathbb{V}_a^x f$. Minden olyan x-re, amelyre $f'(x)$ létezik,

$$\big|f'(x)\big| = \lim_{n\to\infty} \frac{\big|f(x+1/n) - f(x)\big|}{1/n} \le \liminf_{n\to\infty} n \overset{x+1/n}{\underset{x}{\mathbb{V}}} f.$$

Ebből a Fatou-lemma szerint

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|f'(x)\big|\,dx &\le \int_a^b \liminf_{n\to\infty} n\big(s(x+1/n) - s(x)\big)\,dx \\
&\le \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \big((s(x+1/n) - s(x)\big)\,dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_b^{b+1/n} s(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} s(x)\,dx \right) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_b^{b+1/n} s(b)\,dx - n\int_a^{a+1/n} s(a)\,dx \right) \\
&= s(b) - s(a) = s(b) = \overset{b}{\underset{a}{\mathbb{V}}} f.
\end{aligned}$$

2.72. Abszolút folytonos függvények. Az előző következményben állhat éles egyenlőtlenség. Sőt, van olyan szigorúan monoton növekedő és folytonos függvény, amelynek a

deriváltja majdnem mindenütt nulla: lásd Riesz–Szőkefalvi-Nagy [137], 63. o. Ilyen függvényekre, a deriváltat integrálva, nyilván nem kapjuk vissza a függvényt. Egy olyan feltételt fogalmazunk meg, aminek teljesülése biztosítja, hogy a deriváltat integrálva, visszakapjuk az eredeti függvényt. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $f\colon[a,b]\to X$ függvényt *abszolút folytonos*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy

$$a\le u_1<v_1\le u_2<v_2\le\ldots\le u_k<v_k\le b\quad\text{és}\quad\sum_{i=1}^{k}(v_i-u_i)<\delta$$

esetén

$$\sum_{i=1}^{k}d(f(u_i),f(v_i))<\varepsilon.$$

Nyilvánvaló, hogy abszolút folytonos függvény folytonos, sőt egyenletesen folytonos. Az is nyilvánvaló, hogy ha f Lipschitz-függvény, akkor f abszolút folytonos. Speciálisan, ha f normált térbeli értékű és folytonosan differenciálható vagy csak *szakaszonként folytonosan differenciálható*, azaz folytonos, és értelmezési tartománya véges sok olyan szakaszra osztható, amelyek mindegyikén f folytonosan differenciálható (a szakaszok végpontjaiban bal és jobb oldali deriváltakat értve), akkor f abszolút folytonos. Végül megjegyezzük, hogy ha f abszolút folytonos, akkor korlátos változású. Valóban, $\varepsilon=1$-hez választva $\delta>0$-t, azt kapjuk, hogy

$$\bigvee_c^d f\le 1,\quad\text{ha}\quad a\le c<d\le b\quad\text{és}\quad d-c<\delta.$$

$[a,b]$-t előállítva véges sok δ-nál rövidebb intervallum egyesítéseként, kapjuk, hogy $\mathbb{V}_a^b f<\infty$. Vegyük észre, hogy ha $X=X_1\times\cdots\times X_n$, akkor f pontosan akkor abszolút folytonos, ha a koordináta-függvényei abszolút folytonosak.

2.73. Newton–Leibniz-formula. *Tegyük fel, hogy $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ minden $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon korlátos változású. A következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\int_a^b g'(x)\,dx=g(b)-g(a)$, *ha* $a<b$;

(2) $\int_a^b\bigl|g'(x)\bigr|\,dx=\mathbb{V}_a^b g$, *ha* $a<b$;

(3) g *minden* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *intervallumon abszolút folytonos;*

(4) *ha* $g_k=g_{k,+}-g_{k,-}$ *a* g *függvény* k*-adik koordináta-függvényének Jordan-felbontása, akkor* $\lambda_{g_{k,\pm}}\ll\lambda$ *(a Borel-halmazokon), ha* $k=1,2,\ldots,n$;

(5) *van olyan* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ *függvény, amelyre* $\int_a^b f\,d\lambda=g(b)-g(a)$, *ha* $a<b$.

Továbbá, ha (5) teljesül, akkor λ-majdnem mindenütt $f=g'$.

A tétel nyilván érvényben marad $\mathbb{C}^n$-beli értékű függvényekre is.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2), mivel ha $a\le x_0\le x_1\le\ldots\le x_m\le b$, akkor

$$\sum_{j=1}^{m}\bigl|g(x_j)-g(x_{j-1})\bigr|=\sum_{j=1}^{m}\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j}g'\,d\lambda\right|\le\int_a^b|g'|\,d\lambda,$$

amiből $\mathop{\mathbb{V}}_a^b g \le \int_a^b |g'|\,d\lambda$, és a másik irányú egyenlőtlenség az előző tételből következik.

(2)-ből (3)-at a

$$\big|g(v)-g(u)\big| \le \mathop{\mathbb{V}}_u^v g = \int_u^v |g'|\,d\lambda, \quad \text{ha} \quad u<v$$

egyenlőtlenség és az integrál abszolút folytonossága segítségével kaphatjuk.

(3)-ból az $]u_j, v_j[$ intervallumokat tovább osztva kapjuk, hogy ha $\varepsilon>0$, akkor van olyan $\delta>0$, hogy $u_1<v_1\le u_2<v_2\le\ldots\le u_m<v_m$ és $\sum_{j=1}^m (v_j-u_j)<\delta$ esetén $\sum_{j=1}^m \mathop{\mathbb{V}}_{u_j}^{v_j} g_k \le \varepsilon$. Így a $g_{k,+}$ és $g_{k,-}$ függvények is abszolút folytonosak. Mivel bármely $C\subset]a,b[$ kompakt halmaz, amelyre $\lambda(C)<\delta$, lefedhető az $]a,b[$ véges sok diszjunkt nyílt részintervallumával úgy, hogy azok összhossza kisebb mint δ, kapjuk, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $\lambda(C)<\delta$, akkor $\lambda_{g_{k,\pm}}(C)<\varepsilon$. Innen ha V nyílt, $V\subset]a,b[$ és $\lambda(V)<\delta$, akkor $\lambda_{g_{k,\pm}}(V)\le\varepsilon$. Ugyanez teljesül minden $B\subset]a,b[$ Borel-halmazra. Ebből $\lambda_{g_{k,\pm}} \ll \lambda$.

(4)-ből következik (1), mivel Lebesgue tétele szerint

$$\lambda_{g_{k,\pm}}]a,b[= g_{k,\pm}(b)-g_{k,\pm}(a) = \int_a^b g'_{k,\pm}\,d\lambda,$$

amiből $g_k(b)-g_k(a)=\int_a^b g'_k\,d\lambda$.

Végül ha (5) fennáll, akkor g abszolút folytonossága $[a,b]$-n az integrál abszolút folytonosságából következik. Az f minden Lebesgue-pontjában

$$\left|f(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| = \left|f(x)-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,d\lambda(y)\right|$$
$$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big|f(x)-f(y)\big|\,d\lambda(y) \le 2\frac{1}{2|h|}\int_{x-|h|}^{x+|h|} \big|f(x)-f(y)\big|\,d\lambda(y)\to 0,$$

ha $h\to 0$, így $f(x)=g'(x)$.

→ **2.74. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi teljes változásokat:

$$\mathop{\mathbb{V}}_0^{50} e^x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_1^{2} \ln x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_0^{4\pi} \cos x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_{-1}^{1} (x-x^3).$$

2.75. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x)=|x|^\alpha \sin|x|^\beta$, ha $x\ne 0$, $f(0)=0$ függvény milyen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ értékekre lesz $[-1,1]$-en korlátos változású.

∗ **2.76. Feladat [6].** Legyen X Banach-tér, $g\colon [a,b]\to X$ egy görbe. Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\int_a^x g(t)\,dt$, $a\le x\le b$ függvény differenciálható, és $f'(x)=g(x)$, ha $a\le x\le b$.

∗ **2.77. Feladat [19].** Terjesszük ki az előző tételt reflexív Banach-térbeli értékű függvényekre. (Lásd Federer [37], 2.9.22.)

$*$ **2.78. Feladat [9].** Legyen $g(x) \in \mathbb{L}^1([0,1];\mathbb{R})$ a $[0,x]$ karakterisztikus függvénye, ha $0 < x < 1$. Mutassuk meg, hogy g Lipschitz-függvény, de sehol sem differenciálható, sőt, még az $f \circ g$ függvények sem differenciálhatóak, ahol $f\colon \mathbb{L}^1 \to \mathbb{R}$ egy korlátos lineáris funkcionál.

$*$ **2.79. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy az

$$\int_a^b \left|f'(x)\right| dx \le \bigvee_a^b f,$$

ha $-\infty < a < b < \infty$ egyenlőtlenség akkor is fennáll, ha f egy valós változós Banach-térbeli értékű λ-majdnem mindenütt differenciálható függvény, amely minden kompakt intervallumon korlátos változású.

2.80. Feladat [8]. Jelölje C a Cantor-halmazt, és ha $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n/3^n$, $x_n \in \{0,1\}$, akkor legyen $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$. Ha $x \in [0,1] \setminus C$, akkor legyen $\varphi(x) = \sup\{\varphi(t)\colon t < x, t \in C\}$. Ez a *Lebesgue-féle szinguláris függvény*. Bizonyítsuk be, hogy

(1) φ monoton növekedő;

(2) $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(C) = [0,1]$;

(3) φ folytonos.

2.81. Feladat [7]. Adjuk meg a Cantor-halmaz, majd a $[0,1]$ egy folytonos leképezését $[0,1]^2$-re illetve $[0,1]^n$-re.

2.82. Feladat: Fubini tétele monoton függvényekről[16]. Legyenek $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ monoton növekedő függvények, és tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re. (Lásd Szőkefalvi-Nagy [164].)

2.83. Feladat [8]. Adjunk meg olyan $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvényeket, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, de $f'(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0)$.

$\to$ **2.84. Feladat [9].** Jelölje φ a Lebesgue-féle szinguláris függvényt, és terjesszük ki az egész $\mathbb{R}$-re úgy, hogy $x < 0$-ra legyen 0, $x > 1$-re pedig legyen 1. Legyen $a_n = j/2^k$, $b_n = (j+1)/2^k$, ha $n = 2^k + j$, $0 \le j < 2^k$. Mutassuk meg, hogy

(1) minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) = f(x) \in \mathbb{R};$$

(2) f szigorúan monoton növekedő $[0,1]$-en;

(3) f folytonos $[0,1]$-en;

(4) $f'(x) = 0$ majdnem minden $x \in [0,1]$-re.

$\to$ **2.85. Feladat [10].** Adjunk meg olyan nem nulla λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket $\mathbb{R}$-en, amely szinguláris a Lebesgue-mértékre. Választható-e g úgy, hogy folytonos legyen? Választható-e g úgy, hogy minden nem üres nyílt halmaz mértéke pozitív legyen? Választható-e g úgy, hogy mindkét feltétel teljesüljön?

→ **2.86. Feladat [9].** Legyen $f(x) = x^2 \sin x^{-2}$, ha $0 \neq x \in [-1,1]$ és legyen $f(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy f mindenütt differenciálható $[-1,1]$-en, de a deriváltja nem Lebesgue-integrálható.

∗ **2.87. Parciális integrálás Lebesgue–Stieltjes-integrálokra.** *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, f balról, g jobbról folytonos, és $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\int_{]a,b]} f\,d\lambda_g + \int_{[a,b[} g\,d\lambda_f = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. A $\{(x,y)\colon a \le x < y \le b\}$ háromszög $\lambda_f \times \lambda_g$-mértékét a Fubini-tétel segítségével kétféleképpen kiszámolva, kapjuk az állítást.

∗ **2.88. Lebesgue–Stieltjes-integrál és Lebesgue-integrál.** *Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan monoton növekedő függvény, amely minden kompakt intervallumon abszolút folytonos. Minden $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda_g = \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)\,dx.$$

A bizonyítás azon múlik, hogy Lebesgue tétele szerint g' λ-majdnem mindenütt megegyezik λ_g-nek a λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjával. A technikai részleteket lásd a Járai [71] könyvben.

∗ **2.89. Parciális integrálás Lebesgue-integrálokra.** *Legyen $[a,b]$ zárt intervallum $\mathbb{R}$-ben és tegyük fel, hogy az $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ függvények abszolút folytonosak $[a,b]$-n. Ekkor az alábbi integrálok léteznek, és*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b g(x)f'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. Kombináljuk az előző két tételt, vagy alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát fg-re.

∗ **2.90. Leibniz-szabály.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, $I \subset \mathbb{R}$ egy kompakt intervallum, és $f\colon X \times I \to \mathbb{K}^n$ egy függvény, amelyre az $y \mapsto f(x,y)$ függvény abszolút folytonos I-n μ-majdnem minden $x \in X$-re, f_y pedig $\mu \times \lambda$-integrálható $X \times I$-n. Ekkor az*

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$$

függvény abszolút folytonos I-n, és

$$\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_X f_y(x,y)\,d\mu(x)$$

λ-majdnem minden $y \in I$-re.

A tétel azt mutatja, hogy igen általános feltételek mellett egy paramétertől függő függvény integrálja differenciálható a paraméter szerint, és a deriváltat a függvény paraméter szerinti parciális deriváltjának integrálásával számolhatjuk ki, azaz a differenciálás és az integrálás felcserélhetőek.

Bizonyítás. Felhasználva a Newton–Leibniz-formulát, a Fubini-tételből következik, ha azt alkalmazzuk f_y-ra.

∗ **2.91. Eloszlásfüggvény.** Ha μ véges mérték, akkor egy μ-mérhető valós g függvény *eloszlásfüggvényén* a

$$h(x) = \mu\{g < x\}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük.

∗ **2.92. Integrál és eloszlásfüggvény.** *Legyen μ véges mérték, g egy μ-mérhető valós értékű függvény, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig Borel-függvény. Jelölje g eloszlásfüggvényét h. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik, és*

$$\int_X f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_h.$$

A tétel nagyon fontos a valószínűségszámításban, mivel mutatja, hogy egy valószínűségi változó jellemzői (várható érték, szórás, momentumok, stb.) kifejezhetők az eloszlásával. Ha f egy $[a, b[$ intervallum karakterisztikus függvénye, akkor

$$\int_X f \circ g \, d\mu = \mu(g^{-1}[a, b[) = \lambda_h[a, b[= \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_h,$$

és ebből approximációval kapjuk az általános esetet; a bizonyítás technikai jellegű, lásd a Járai [71] könyvet. A leggyakrabban alkalmazott $f(x) = x$ esetet könnyű szemléltetni, ha X a $[0, \mu(X)]$ intervallum a Lebesgue-mértékkel: mivel $\int g$ csak a g nívóhalmazainak mértékétől függ, de nem függ azok elhelyezkedésétől, a nívóhalmazokat jobbra eltolva, feltehetjük, hogy g monoton növekedő.

∗ **2.93. Helyettesítéses integrálás Lebesgue–Stieltjes-integrálokra.** *Tegyük fel, hogy $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges függvény. Ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h\circ g} = \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h.$$

Ha f egy $[a, b[\subset g(\mathbb{R})$ intervallum karakterisztikus függvénye, akkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h\circ g} &= \lambda_{h\circ g}(g^{-1}[a, b[) = \lambda_{h\circ g}[g^{-1}(a), g^{-1}(b)[\\ &= h(b-) - h(a-) = \lambda_h[a, b[= \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h,\end{aligned}$$

és ebből approximációval kapjuk az általános esetet; a bizonyítás technikai jellegű, a részleteket lásd a Járai [71]könyvben.

2.94. Multiplicitás. Ha X és Y halmazok, egy $g\colon X \to Y$ függvény *multiplicitás*án azt az $\mathbb{M}_g\colon Y \to [0,\infty]$ függvényt értjük, amelynek értéke egy $y \in Y$ helyen $g^{-1}(y)$ elemeinek száma. Ez lehet esetleg ∞ is.

$*$ **2.95. Helyettesítéses integrálás Lebesgue-integrálokra.** *Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos függvény, A korlátos Lebesgue-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, és $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy tetszőleges függvény. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$\int_A (f \circ g)|g'| = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbb{M}_{g|_A}(y)\,dy.$$

Továbbá, ha $[a,b] \subset \mathbb{R}$ és

$$y \mapsto f(y)\mathbb{M}_{g|_{[a,b]}}(y)$$

integrálja létezik, akkor

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

A tétel a helyettesítéses integrálás szokásos formulájának messzemenő általánosítása. A második formulában, ha g kölcsönösen egyértelmű, a $g(a) < g(b)$ eset az értékkészlet pozitív, a másik eset az értékkészlet negatív irányításának felel meg. Ha g nem kölcsönösen egyértelmű, a jobb oldal nem függ f-nek $g([a,b])$ azon pontjaiban felvett értékétől, amelyek nem esnek $g(a)$ és $g(b)$ közé. Ez azért van, mert ezeket a pontokat g „ugyanannyiszor futja be" növekedve, mint csökkenve, és így az integrálból kiesnek. Az első formula viszont irányításmentes, így ebben g' helyére a bal oldalon $|g'|$ kerül, és az egyes pontok többször történő befutását, az irány figyelembevétele nélkül az $\mathbb{M}_{g|A}$ multiplicitás reprezentálja.

2.96. Rademacher tétele. *Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, és $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ egy lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor a g függvény majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja mérhető.*

Bizonyítás. Lásd a Járai [71] könyvet.

2.97. Integráltranszformációs formula. *Legyen $m \le n$, V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, $A \subset V$ egy λ^m-mérhető halmaz, és $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ egy χ^m-mérhető függvény. Ekkor*

$$Jg(x) = \sqrt{\det(g'(x)^* g'(x))}$$

jelöléssel az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_A f(g(x))Jg(x)\,d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{M}_{g|_A}(y)\,d\chi^m(y).$$

Ez az integrálszámítás talán leggyakrabban alkalmazott formulája görbe menti és felületi integrálok kiszámítására, helyettesítéses integrálásra. Gyakran g kölcsönösen egyértelmű A-n. Ekkor a jobb oldal $\int_{g(A)} f(y)\,d\chi^m(y)$. Az általános eset erre a speciális esetre vezethető vissza A megfelelő felosztásával. Ha $f \equiv 1$, akkor $m = 1, 2, 3$ esetén rendre

ívhossz, felszín, illetve térfogat kiszámítására alkalmas formulát kapunk. Vizsgáljuk meg formulánk geometriai jelentését ebben a speciális esetben. Mivel A-t megfelelően felosztva elérhetjük, hogy egy kis részen g már nagyon jól közelíthető legyen egy affin leképezéssel, azaz egy lineáris leképezés és egy eltolás összetételével, elég azt az esetet megvizsgálnunk, amikor g affin. Mivel az eltolások, mint izometriák, nem változtatják meg a Hausdorff külső mértéket, elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor g lineáris, és így $g'(x) = g$ minden x-re. Ekkor $Jg(x)$ geometriai jelentése a $[0,1]^m$ egységkocka képének χ^m-mértéke, azaz a szokásos bázisvektorok képei által kifeszített paralelepipedon χ^m-mértéke. Ha $m = n$, akkor $g'(x)^*$ és $g'(x)$ determinánsa megegyezik, így $Jg(x) = \bigl|\det g'(x)\bigr|$. Az általános esetben $g'(x)$ mátrixa nem négyzetes, és a négyzetgyökjel alatt a szokásos bázis vektorai képeinek belső szorzataiból alkotott mátrix determinánsa áll. Technikailag a tétel bizonyítása lineáris g esetére úgy megy, hogy g-t felírjuk $g_1 \circ g_2 \circ g_3$ alakban, ahol $g_1 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ és $g_3 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris izometriák, így nem változtatják meg a χ^m külső mértéket, g_2 pedig $(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (c_1 x_1, c_2 x_2, \dots, c_m x_m)$ alakú. Ez utóbbi a Lebesgue-mértéket $c_1 c_2 \cdots c_m$-szeresére változtatja, mint az $m = 1$ esetből a Fubini-tétellel következik. Végül a szemléletes, de technikailag legnehezebben igazolható tény, hogy $\mathbb{R}^m$-en $\chi^m = \lambda^m$.

$*$ **2.98. Kofelszín-képlet.** *Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $m \geq n$, $g \colon V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, és $Jg(x) = \sqrt{\det(g'(x)g'(x)^*)}$. Ha f egy V-n értelmezett Lebesgue-mérhető függvény és a bal oldali integrál létezik, akkor*

$$\int_V f(x) Jg(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{g^{-1}\{y\}} f(x)\, d\chi^{m-n}(x)\, d\lambda^n(y).$$

Az $m = n$ eset az integráltranszformációs formula. Ha g az utolsó $m - n$ koordináta elhagyásával létrejövő projekció, akkor a Fubini-tételt kapjuk. Az általános eset ezek kombinációjának tekinthető, és gyakran kényelmesebb használni, mint egy helyettesítést és a Fubini-tételt.

→ **2.99. Feladat [5].** Számítsuk ki egy ellipszis területét.

→ **2.100. Feladat [6].** Számítsuk ki egy ellipszoid térfogatát.

→ **2.101. Feladat [5].** Határozzuk meg a $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ csavarvonal ívhosszát.

→ **2.102. Feladat [7].** Számítsuk ki a gömb felszínét.

→ **2.103. Feladat [8].** Számítsuk ki az alábbi Lebesgue–Stieltjes-integrálokat, ha $x \leq -1$ esetén $g(x) = x + 2$, $-1 < x < 0$ esetén $g(x) = 2$, és $x \geq 0$ esetén $g(x) = x^2 + 3$:

$$\int_{-2}^{2} x\, d\lambda_g(x), \quad \int_{-2}^{2} x^2\, d\lambda_g(x), \quad \int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, d\lambda_g(x).$$

→ **2.104. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{\alpha}(n)$ az n-dimenziós egységgömb λ^n-mértéke.

→ **2.105. Feladat [8].** Az $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$ integrált polárkoordinátákban is kiszámítva, vezessük le az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$ összefüggést.

2.106. Feladat [7]. Határozzuk meg egy homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva.

2.107. Feladat [6]. Mekkora erővel vonzza az origóban lévő m tömeget az $x^2+y^2=r^2$, $y \geq 0$ félköríven egyenletesen eloszló M tömeg?

2.108. Feladat [7]. Milyen erős mágneses teret létesít az 1 m átmérőjű, kör alakú vezetőben folyó 1 A erősségű áram a kör középpontjában?

2.109. Feladat [8]. Az $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z \geq 0$ félgömb felületén egyenletesen eloszló Q töltés milyen erővel vonzza az origóban lévő, q nagyságú, ellenkező előjelű töltést?

$*$ **2.110. Feladat [18].** Legyen X véges dimenziós Banach-tér, $V \subset X$ nyílt halmaz, Y szeparábilis Banach-tér, $f\colon V \to Y$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy f' Borel-függvény.

Megoldás. Lásd a cikkemet.

$*$ **2.111. Közelítő integrálás.** Egy függvény integrálját úgy közelíthetjük, hogy a függvény egy közelítését integráljuk. Itt egy valós intervallumon értelmezett, valós értékű függvény integrálását fogjuk vizsgálni. Gyakran célszerű $\int_a^b f(x)\varrho(x)\,dx$ alakban írni az integrált, ahol ϱ egy könnyen integrálható, f pedig egy jól közelíthető függvény. A ϱ függvényt igyekezzünk úgy megválasztani, hogy az integrandusz „problémás” részeit, például szingularitásait, gyorsan oszcilláló részét, stb., magába foglalja, de a $p(x)\varrho(x)$ függvények integráljait, ahol p polinom, könnyű legyen számítani. Az f sima függvényt egy p polinommal közelítve, az

$$\int_a^b f(x)\varrho(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\varrho(x)\,dx$$

közelítést kapjuk. A közelítő polinomot legegyszerűbben interpolációval kaphatjuk. Bár Hermite-interpolációt is használhatnánk, gyakorlati jelentősége csak a Lagrange-interpoláció használatának van. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az intervallum különböző pontjai. Ha L_j az az interpolációs polinom, amelynek értéke a j-edik alappontban 1, a többiben 0, akkor az

$$\int_a^b f(x)\varrho(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

közelítést kapjuk, ahol a w_j *súly*okra

$$w_j = \int_a^b L_j(x)\varrho(x)\,dx.$$

Ezek a *Newton–Cotes-formulá*k, és nyilván pontos értéket adnak, ha f az n-nél alacsonyabb fokú polinom. Ha az alappontok között szerepelnek az intervallum végpontjai, akkor *zárt formulá*ról, egyébként *nyílt formulá*ról beszélünk.

Például egy $[a,b]$ korlátos intervallumon adódó legegyszerűbb formulák az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

érintőformula, az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

trapézformula, és az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Simpson-formula. Az érintőformula neve onnan ered, hogy ha a függvényt az intervallum középpontjában vett érintővel közelítjük, akkor ezt a formulát kapjuk. A Simpson-formula parabolikus interpolációnak felel meg.

Mivel az alappontok tetszőlegesen választhatók, kedvezőbb választásukkal a formulákat kedvezőbbé tehetjük. Választhatunk például a középpontra szimmetrikus alappontrendszert, vagy bevehetjük az alappontok közé a végpontokat, hogy zárt formulát kapjunk, stb. Ha például a függvényértékek jelentős (egyforma) szórású független hibákkal terheltek, akkor az alappontokat úgy célszerű választani, hogy a súlyok egyenlőnek adódjanak, mert az eredmény szórása így lesz minimális. Ilyen, egyforma súlyokkal képzett, úgynevezett *Csebisev-kvadratúrák* a ϱ függvénytől függően gyakran csak kis n-re léteznek, például $\varrho \equiv 1$ esetén csak $n \le 7$ és $n = 9$-re. Az alappontokat a súlyok egyenlőségét leíró egyenletrendszerből számíthatjuk. Ilyen Csebisev-kvadratúrákat használnak hajók vízkiszorításának számítására.

∗ **2.112. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy ha egy test térfogatát a Simpson-formulával úgy közelítjük, hogy

$$V \approx \frac{m}{6}(T_a + 4T_k + T_f),$$

ahol T_a, T_k, T_f rendre az alaplap, a középmetszet, illetve a fedőlap területei, és m a magasság, akkor henger, hasáb, kúp, gúla, gömb, csonkakúp és csonkagúla esetén pontos értéket kapunk.

∗ **2.113. Gauss-kvadratúrák.** Az alappontok szabad választását legcélszerűbb arra használni, hogy a Newton–Cotes-formulák pontosságának rendjét növeljük. Mivel n szabad paraméterünk van, azt várjuk, hogy minden, legfeljebb $2n-1$-ed fokú polinomra pontos formulát, *Gauss-kvadratúrát* nyerhetünk. Vizsgáljuk mindjárt azt az általánosabb esetet, amikor az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alappontokat előírjuk, és a többit szabadon választhatjuk. $\vartheta(x) = \pm(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$ és $\omega(x) = (x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)$ jelöléssel, ha sikerül a pontokat úgy választani, hogy

$$\int_a^b \varrho(x)\vartheta(x)\omega(x)q(x)\,dx = 0$$

teljesüljön minden, $n-k$-nál alacsonyabb fokú q polinomra, akkor egy $2n-k$-nál alacsonyabb fokú p polinomot

$$p(x) = \vartheta(x)\omega(x)q(x) + r(x)$$

alakban írva, ahol q az $n-k$-nál alacsonyabb fokú, r pedig n-nél alacsonyabb fokú, azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b \varrho(x)p(x)\,dx = \int_a^b \varrho(x)r(x)\,dx = \sum_{i=1}^n w_i r(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i).$$

Vegyük észre, hogy a pontok ilyen választása elérhető, ha $\tau = \varrho\vartheta > 0$ majdnem mindenütt, és az alappontokat a τ súlyfüggvénnyel képzett ortogonális polinomrendszer $n-k$-ad fokú polinoma gyökeinek választjuk. Amikor $\vartheta \equiv 1$ és ϱ egy súlyfüggvény, akkor a Gauss-kvadratúrához jutunk, amely nyílt formula. A másik fontos eset, amikor $\vartheta(x) = (b-x)(x-a)$ és ϱ egy súlyfüggvény, ekkor a *Markov-kvadratúrá*hoz jutunk, amely zárt formula.

Korlátos $[a,b]$ intervallum esetén megmutatható, hogy ha egy Newton–Cotes-formula pontos az m-nél alacsonyabb fokszámú polinomokra, akkor az m-szer folytonosan differenciálható (vagy $\mathcal{C}^{m-1,1}$-osztályú) függvények osztályán, amelyekre $|f^{(m)}| \le C$, a kvadratúra hibája legfeljebb $C\int_a^b \big|K(y)\big|\,dy$, ahol

$$K(y) = \frac{(b-y)^m}{m!} - \sum_{x_j - y > 0} w_j \frac{(x_j - y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

és ez a becslés nem javítható. (Lásd Bahvalov [7], 96. o.)

∗ **2.114. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy a $\{f\colon f \in \mathcal{C}^2[a,b], |f''| \le C\}$ függvényosztályon a trapézformula hibája legfeljebb $C(b-a)^3/12$, az érintőformula hibája pedig legfeljebb $C(b-a)^3/24$, és ez a becslés nem javítható.

∗ **2.115. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy a

$$\{f\colon f \in \mathcal{C}^4[a,b], |f''''| \le C\}$$

függvényosztályon a Simpson-formula hibája nem nagyobb, mint

$$C(b-a)^5/2880,$$

és ez a becslés nem javítható.

∗ **2.116. Összetett kvadratúraformulák.** Gyakran az eddig tanult egyszerű kvadratúraformulákkal nem érünk célt. Ekkor az értelmezési tartományt kisebb részekre osztjuk, minden kis részen egy közelítést választunk, ennek az integrálját számítjuk ki, és a kis részeken vett integrálokat összeadjuk. Például ha egy $[a,b]$ intervallumon egy valós értékű függvény integrálját akarjuk közelíteni, az intervallumot $h = (b-a)/n$ hosszúságú egyenlő részekre osztva az $x_k = a + kh$ beosztást kapjuk. Az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumon a trapézformulát alkalmazva, az *összetett trapézformulát* kapjuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

Ha az $[x_{k-1}, x_k]$ szakaszon parabolikus interpolációt használunk, kapjuk az *összetett Simpson–formulát*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right.$$
$$\left. + 2f(x_2) + \cdots + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n)\right).$$

A pontosság az osztópontok számának növelésével növelhető. Látszik, hogy zárt formulák használatánál előny, hogy a szakaszok végpontjaiban vett függvényértékeket a két szomszédos intervallum mindegyikében felhasználjuk a közelítésre. Az összetett formulák hibájára az egyszerű formulák hibabecslésének felhasználásával kaphatunk becslést. A becslésben szereplő, egy derivált normájával egyező konstans a deriváltnak véges differenciával történő közelítésével becsülhető. Elég sima f függvény esetén a hibára gyakran aszimptotikus formula is adható. Például az összetett trapézformula esetén megmutatható, hogy ha $f \in \mathcal{C}^{2m}[a,b]$, akkor az I integrál és az $S(h)$ közelítés eltérésére

$$I - S(h) = C_2 h^2 + C_4 h^4 + \cdots + C_{2m-2} h^{2m-2} + O(h^{2m}),$$

ahol a konstansok és az O függvény az f-től függnek, és $O(h^{2m})/h^{2m}$ korlátos a 0 egy környezetében. Az összetett formulák használatánál a hiba elegáns becslését teszi lehetővé az alábbi észrevétel.

∗ **2.117. Runge-szabály.** A Runge-szabály alapgondolata, hogy a hiba aszimptotikus ismerete lehetővé teszi a hiba becslését, valamint a hiba fő részének kiküszöbölésével a pontosság növelését. Az előző pont jelöléseivel, ha úgy sejtjük, hogy a hiba $I - S(h) = Ch^m + o(h^m)$ alakban írható, ahol $o(h^m)/h^m \to 0$, ha $h \downarrow 0$, akkor két elég kicsiny $0 < h < \lambda h$ lépésközzel kiszámítva a közelítéseket, a hibára az $I - S(h) \approx Ch^m$ és $I - S(\lambda h) \approx C\lambda^m h^m$ közelítésekből az $I - S(h) \approx \big(S(h) - S(\lambda h)\big)/(\lambda^m - 1)$ közelítést kapjuk, I-re pedig az $I \approx S(h) + \big(S(h) - S(\lambda h)\big)/(\lambda^m - 1)$ közelítést. Ha $S(\lambda^2 h)$ is ismeretes, akkor feltevésünk és közelítéseink jogossága esetén

$$\frac{S(\lambda h) - S(\lambda^2 h)}{S(h) - S(\lambda h)} \approx \lambda^m,$$

ennek alapján feltevéseink jogosságát ellenőrizhetjük.

∗ **2.118. Romberg módszere.** Ha a Runge-szabályt alkalmazzuk, célszerű az osztópontok számát minden lépésben duplázni. Jelölje S_k az $n2^k$ osztópontra alkalmazott trapézformulával kapott értékeket. Célszerű S_k számítására az

$$S_k = \frac{S_{k-1}}{2} + \frac{b-a}{n2^k} \sum_{j=1}^{n2^{k-1}} f\Big(a + \frac{2j-1}{n2^k}(b-a)\Big)$$

összefüggést használni. Ha a hiba főtagját a Runge-szabály alapján kiküszöböljük, majd a kapott közelítés hibájának főtagját újra kiküszöböljük, stb., *Romberg módszeré*hez jutunk: Számítsuk ki az

$$S_k^{(i)} = S_k^{(i-1)} + \frac{1}{2^i - 1}\left(S_k^{(i-1)} - S_{k-1}^{(i-1)}\right)$$

mennyiségeket, ahol $S_k^{(1)} = S_k$. Az $S_k^{(i)}$ mennyiség általában annál pontosabb közelítése az integrálnak, minél nagyobb i és k. A számítást addig folytatjuk, míg két közelítés között az eltérés már elég kicsi. Megjegyezzük, hogy az $S_k^{(2)}$ közelítések ugyanazok, amiket a Simpson-formulával kapunk.

∗ **2.119. Numerikus integrálás automatikus lépésközváltással.** A könyvtári programok általában automatikus lépésközváltással készülnek valós változós, valós értékű függvények integrálására, és alkalmasak szingularitásokat tartalmazó függvények korlátos vagy nem korlátos intervallumon vett integráljának közelítésére. (Nem korlátos intervallum esetén egy „elég nagy" korlátos intervallumot kell megadnunk.) A felépítés alapelve, hogy a program igyekszik minden lépésben a hibát egy $\varepsilon > 0$ és egy $\beta\varepsilon$, $0 < \beta < 1$ érték között tartani. Ha az $[a, b]$ intervallumon integrálunk, az $x_0 = a$ pontból indulunk, tetszőleges $h_0 > 0$ lépésközzel. Ha az $[x_0, x_k]$ intervallumon már kiszámoltuk az integrált, akkor a következő lépésben kiszámoljuk az $[x_k, x_k + h_k]$ intervallumon. Ha ennek a lépésnek a becsült hibája nagyobb mint ε, akkor a lépésközt csökkentjük, h_k-t σh_k-val helyettesítjük, ahol $0 < \sigma < 1$ egy konstans, rendszerint $1/2$. Ha a hiba nem nagyobb mint ε, akkor legyen $x_{k+1} = x_k + h_k$, és áttérhetünk a következő lépésre. Ha a hiba még $\beta\varepsilon$-nál is kisebb, akkor a lépésközt növeljük, $h_{k+1} = h_k/\sigma$, egyébként $h_{k+1} = h_k$. Az eljárás akkor áll le, ha $x_k + h_k \geq b$, ekkor az utolsó lépésben legyen $h_k = b - x_k$. Ha egy lépésben a hiba rendje Ch^m, akkor $\beta \approx \sigma^m$-et tanácsos választani, mert kisebb β esetén megnő a lépések száma, nagyobb β esetén pedig sokszor változik a lépésköz. Ha az integrálás intervallumán a függvénynek lehetnek keskeny és meredek csúcsai, akkor az integrálás lépésközét ezek szélessége alatt kell tartani.

Az eljárást rekurzívan hívhatóra érdemes elkészíteni, mert ekkor többszörös integrálok számítására is felhasználható a szokásos ismételt integrálással.

∗ **2.120. Feladat [7].** Próbáljuk ki, hogy az $\int_{-4}^{4} dx/(1 + x^2)$ integrál közelítésekor egyszerű formulával nem érünk célt, de a Romberg-módszerrel igen.

∗ **2.121. Feladat [7].** Egy gázkromatográf érzékelő berendezése egy csúcs érzékelése során, 100 ms-onként az alábbi intenzitásokat mérte, ng/s egységekben: 0, 1, 4, 18, 54, 130, 242, 352, 399, 381, 333, 266, 194, 130, 79, 44, 22, 10, 4, 2, 1, 0. Határozzuk meg az anyagmennyiséget.

∗ **2.122. Feladat [8].** Számoljuk ki az $\int_0^\pi \sin x/x\, dx$ integrált Romberg módszerével.

∗ **2.123. Feladat [9].** Határozzuk meg az $x = 0,0{,}2, \ldots, 5{,}0$ értékekre az

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt$$

integrált.

∗ **2.124. Valószínűségszámítás.** A mértékelmélet egyik legfontosabb alkalmazási területe a *valószínűségszámítás*. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező* egy véges mértéktér, amelyre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Az 1. Táblázat „miniszótára" rámutat a valószínűségszámítási és mértékelméleti fogalmak kapcsolatára.

∗ **2.125. Szimuláció.** Olyan feladatok esetén, amelyeknél a feladat pontos megoldása a probléma bonyolultsága miatt lehetetlen, vagy túlságosan költséges, gyakran használunk *szimuláció*t. Sokszor nem is a pontos megoldásra vagyunk kíváncsiak, hanem inkább a rendszer viselkedésére. Egy példa lehet egy számítógépes hálózat viselkedésének tanulmányozása. Ha az érkező feladatok és azok erőforrásigényének eloszlása ismert, és az egyes erőforrások és hálózati utak kapacitása is, akkor szimulálással képet kaphatunk a rendszer viselkedéséről, új erőforrások munkába állításának hatásáról, stb.

Valószínűségszámítás	Mértékelmélet
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező	$(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér
Ω eseménytér	X alaphalmaz
$\omega \in \Omega$ elemi esemény	$x \in X$ pont
$A \in \mathcal{A}$ esemény	$A \in \mathcal{A}$ mérhető
$\emptyset$ lehetetlen esemény	$\emptyset$
Ω biztos esemény	X
$\mathbb{P}$ valószínűség, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$	μ mérték
függetlenség	mértékterek szorzata
majdnem biztosan	majdnem mindenütt
valószínűségi változó	mérhető függvény
stochasztikusan konvergens	mértékben konvergens
$\mathbb{E}$ várható érték	integrál, átlag
véges szórású	négyzetesen integrálható
korrelálatlan	ortogonális
klasszikus valószínűség	számláló mérték
geometriai valószínűség	Hausdorff-mérték
feltételes várható érték	Radon–Nikodym-derivált
karakterisztikus függvény	Fourier-transzformált

1. Táblázat: miniszótár a valószínűségszámításhoz

A fizikában is gyakran találkozunk olyan bonyolult folyamatokkal (például részecskék szóródása), amelyek legegyszerűbben szimulációval vizsgálhatók. Szimuláció programozására külön számítógépes nyelveket dolgoztak ki. A szimulációs modellt felhasználása előtt ismert eredményt adó adatokkal szokás ellenőrizni.

∗ **2.126. Monte Carlo-módszerek.** Egy adott matematikai probléma megoldását közelíthetjük úgy, hogy egy, a problémával kapcsolatban álló rendszert szimulálunk, és a szimuláció eredményét használjuk a probléma megoldásának közelítésére, ez a *Monte Carlo-módszer*. Ezt a módszert Neumann János, Stanislaw Ulam és Enrico Fermi dolgozták ki a Manhattan-program keretében.

Egy tipikus példa többdimenziós integrálok közelítő számítása. Ha

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

egy *statisztikai minta*, azaz független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, és az $\mathbb{E}(\xi) = \int \xi d\,\mathbb{P}$ várható érték az adott integrál, vagy annak konstansszorosa, akkor a $\sum_{i=1}^{n} \xi_i/n \approx \mathbb{E}(\xi)$ közelítés alapján a ξ_i-k átlagával az integrál becsülhető.

Egy másik lehetőség annak felhasználása, hogy az integrál meghatározása egy alakzat mértékének meghatározására vezethető vissza. A szóban forgó alakzatot például egy téglatestbe foglalva, és a téglatestben egyenletes eloszlású, független vektorsorozatot generálva, figyeljük azt az eseményt, hogy a vektor az alakzatba esik. Ennek relatív gyakorisága segítségével közelíthetjük az integrált. Természetesen a módszer hatékonyságát növelhetjük, ha egyes részek leválasztásával, súlyfüggvény alkalmazásával, vagy más módon a szórást csökkentjük. A hiba nagyságrendje $1/\sqrt{n}$, de nem függ a dimenziószámtól, így magas dimenziószám esetén ez lehet a leghatékonyabb ismert módszer.

Integráláson kívül konstruáltak Monte Carlo-módszereket integrálegyenletek, lineáris egyenletrendszerek, parciális differenciálegyenletek megoldására is, és a módszer intenzíven fejlődik. A részleteket, további alkalmazásokat, és az irodalmat illetően lásd Szobol [163] könyvét.

∗ **2.127. Véletlenszám-generátorok.** Szimulációhoz és Monte Carlo-módszerek alkalmazásához különféle eloszlású véletlen szám- vagy vektorsorozatokra van szükségünk. Ezeket általában a $[0,1[$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlenszám-sorozatokból állítjuk elő. Bár léteznek ilyen egyenletes eloszlású számsorozatokat tartalmazó táblázatok, és véletlenszerű folyamatokat (például elektronikai zaj vagy radioaktív bomlás) is felhasználhatunk véletlenszámok generálására, számítógépen legtöbbször pszeudo véletlen sorozatokat szolgáltató véletlenszám-generátorokat használunk. Ezek előnye, hogy gyorsak, karbantartást nem igényelnek, használatuk egyszerű, és a számítások megismételhetők. A (pszeudo) véletlenszám generátorok egyik legegyszerűbb és legtöbbet használt fajtája a következő:

$$x_n \equiv a x_{n-1} + c \pmod{m}, \quad 0 \le x_n < m \quad \text{és} \quad u_n \leftarrow x_n/m.$$

Az m legtöbbször az adott gépen fixpontosan már nem ábrázolható természetes számok közül a legkisebb, esetleg ennél eggyel kisebb vagy nagyobb. Az a szorzó, a c konstans és az x_0 kezdőérték megválasztásával részletesen foglalkozik Knuth [87] könyvének 3. fejezete. Egy másik, Knuth [87] (II, 180. o.) által ajánlott eljárás a kivonó módszer:

$$x_n \equiv x_{n-55} - x_{n-24} \pmod{m}, \quad 0 \le x_n < m, \quad u_n \leftarrow x_n/m.$$

Itt m egy nagy páros szám, és az utolsó 55 darab x_n értéket tárolnunk kell. Az indításhoz 55 kezdőérték kell, ezeket például a $0 \le x < m$ szám felhasználásával az $x_{n_0} = 1$, $x_{n_1} = x$ kezdőértékekből az

$$x_{n_k} \equiv x_{n_{k-2}} - x_{n_{k-1}} \pmod{m}$$

összefüggéssel állíthatjuk elő, ahol $n_k \equiv 21k \pmod{55}$. A kezdőértékek beállítása után $3 \cdot 55$ véletlenszámot generálva, a generátor „bemelegíthető". A generátor előnye, hogy magas szintű nyelven is jól programozható, sőt, ha a szükséges lebegőpontos műveleteket a gép aritmetikája pontosan képes elvégezni, közvetlenül az u_n értékek kiszámítását is programozhatjuk lebegőpontos aritmetikában. A ciklushossz legalább $2^{55} - 1$. Ennek a módszernek az elmélete nem olyan kidolgozott, mint az előző módszeré, de a gyakorlati tapasztalatok jók. (Újabb változatok találhatók Donald E. Knuth honlapján.)

Gyengébb minőségű véletlenszám-generátorok is általában feljavíthatók „véletlen keveréssel" (lásd Knuth [87], II. 40. o.): A

$$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$$

táblázat fel van töltve véletlenszámokkal, és v is egy véletlenszám. Ha u_j a következő, $[0,1[$-ben egyenletes eloszlású bejövő véletlenszám, akkor legyen

$$k \leftarrow \lfloor nv \rfloor, \quad v \leftarrow v_k, \quad v_k \leftarrow u_j,$$

és v a kimenő véletlenszám ($\lfloor x \rfloor$ az x egész része).

Fontos tudni, hogy megfelelő minőségű véletlenszám sorozat előállítása nem történhet „véletlenszerű” módszerekkel. A véletlenszám-generátorokat statisztikai próbákkal gondosan tesztelni kell. Sajnos, sok rossz minőségű véletlenszám-generátor van forgalomban, az ezek alkalmazásával kapott eredmények használhatatlanok. Véletlenszámok generálásával kapcsolatban az elméleti megfontolásokat és a további lehetőségeket lásd Knuth [87] könyvében, 3. fejezet. A különböző eloszlású véletlenszámok előállítása a fő témája Deák [24] könyvének.

Mivel sohasem lehetünk biztosak abban, hogy egy adott véletlenszám generátor alkalmas-e egy adott célra, Knuth könyve azt javasolja, hogy legalább két, független véletlenszám-forrással ismételjük meg a számításokat.

** **2.128. Feladat [20].** Becsüljük meg egy ^{239}Pu gömb kritikus sugarát. Hogyan változik a kritikus sugár az anyag összenyomásakor?

*** **2.129. Feladat [21].** Legyen ξ egy n-dimenziós normális eloszlású, 0 várható értékű és adott korrelációs mátrixú valószínűségi változó, $x \in \mathbb{R}^n$. Dolgozzunk ki $n \leq 50$ esetén hatékony eljárást a $\{\xi < x\}$ esemény valószínűségének meghatározására. Itt $\xi < x$ koordinátánként értendő. (Lásd Deák [24], 7. fejezet.)

II. Funkcionálanalízis

A módszerek és gondolatok, amelyek lassan felgyűltek a XIX. század folyamán, 1900 és 1910 között hirtelen kikristályosodtak. Ez lényegében négy alapvető dolgozat publikálásának köszönhető:

Fredholm 1900-as dolgozata az integrálegyenletekről;
Lebesgue disszertációja 1902-ből az integrálásról;
Hilbert 1906-os dolgozata a spektrálelméletről;
Fréchet disszertációja 1906-ból a metrikus terekről.

Jean Dieudonné [28]

1926 őszén a fiatal Neumann János (1903–1957) Göttingenbe érkezett, hogy hivatalba lépjen, mint Hilbert asszisztense. Ezek voltak azok a lázas évek, amelyekben a kvantummechanika nyaktörő sebességgel fejlődött, és néhány hetenként egy új gondolat bukkant fel a láthatáron. Az új elméletet kifejlesztő fizikusok megfelelő matematikai eszközöket kerestek, és sikeresen próbálkoztak végtelen mátrixokkal, figyelmen kívül hagyva a konvergenciát, differenciáloperátorokkal, „folytonos mátrixokkal" (akármit is jelentsen ez), stb. 1924-ig a legtöbb fizikus azt sem tudta, hogy véges mátrix létezik! Végül rádöbbentek, hogy „megfigyeléseik" a Hilbert-tér Hermite-féle operátoraihoz hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, a Hilbert-féle „spektrum" (egy név, amelyet ő egy látszólag felszínes analógia alapján választott) a központi fogalom az atom „spektrumának" magyarázatában. Ezért természetesen igénybe vették Hilbert segítségét, hogy némi matematikai értelmet próbáljon vinni számításaikba. Nordheim és von Neumann segítségével, Hilbert először $\mathbb{L}^2$ integráloperátoraival próbálkozott, de ez a Dirac-féle „δ-függvény" felhasználását igényelte, egy olyan fogalomét, amely ezen kor matematikusai számára önellentmondó volt, von Neumann ezért elhatározta, hogy más megközelítéssel próbálkozik.

Jean Dieudonné [28]

A XIX. század folyamán felgyülemlő tapasztalatok a század közepére azt mutatták, hogy a különböző matematikai „objektumokkal" (számok, pontok, görbék, felületek, függvények, operátorok, stb.) való algebrai manipulációk nem az objektumok tulajdonságain, hanem a „szabályok" azonosságán múlnak. A halmazelmélet megszületésével a század végén adva volt az általános keret, amely lehetővé tette, hogy az algebrai struktúrák bevezetésével kellő általánosságban és így hatékonyan lehessen ezeket a kérdéseket tárgyalni.

Hasonló tapasztalatok gyűltek fel az analízis területén is a XIX. század végére. A XX. század elején Fréchet felismerte, hogy az analízis „legdurvább", konvergenciával, határértékkel, folytonossággal, Cauchy-sorozatokkal, egyenletes folytonossággal összefüggő munkálatai elvégzésére érdemes bevezetni a metrikus tér fogalmát. A matematikusok, többek között Riesz Frigyes munkái nyomán, hamarosan még általánosabb, topologikus és uniform tereket kezdtek vizsgálni.

A legfontosabb problémák – parciális differenciálegyenletek, integrálegyenletek, variációszámítás – azonban lineáris tereken (függvénytereken) értelmezett lineáris vagy nem lineáris operációk vizsgálatát igényelték. Fredholm és Hilbert vizsgálatai integráloperátorokkal és ezek spektrumával kapcsolatban „konkrét" Hilbert-terekhez, a $\mathbb{l}^2$ és $\mathbb{L}^2$ térhez vezettek. Riesz Frigyes úttörő munkái nyomán az eredményeket fokozatosan sikerült kiterjeszteni más konkrét terekre ($\mathbb{l}^p$, $\mathbb{L}^p$, $\mathcal{C}[a,b]$, stb.) is, és a végtelen dimenzióval, dualitással, és különböző konvergenciafajtákkal kapcsolatos problémák tisztázódása után a század húszas éveiben elsősorban lengyel matematikusok (S. Banach, H. Steinhaus, S. Mazur), valamint O. Hahn munkáiban jelent meg a normált terek, lineáris funkcionáljaik és operátoraik elmélete az általunk ma ismert formában. Ez az elmélet lehetővé tette az analízis „finomabb", sorokkal, lineáris egyenletekkel, differenciálással kapcsolatos kérdéseinek kellő általánosságban történő tárgyalását. A további általánosítás a topologikus vektorterek elméletéhez vezetett.

Mint látjuk, a „spektrálelmélet" döntően készen állt, mire Heisenberg és Schrödinger dolgozataiban (1925) megszületett a kvantumelmélet. Az új elmélet azonban a nemkorlátos operátorok vizsgálatát igényelte. Ezek elméletét, felhasználva Hilbert tanítványainak (R. Courant, H. Weyl, E. Schmidt) és másoknak az eredményeit, Neumann János alkotta meg, az absztrakt Hilbert-tér fogalmával együtt. Ez az általános fogalom a véges dimenzióban régóta alkalmazott, belső szorzattal és ortogonalitással kapcsolatos fogalmak és geometriai szemlélet használatát tette lehetővé függvényterekben is, megadva a Fourier-sorok, és más, sajátfüggvények szerinti sorfejtések elméletének a megfelelő keretet, és kristálytisztán mutatva Fourier gondolatainak lényegét.

Dirac nyomán a fizikusok kiterjedten és hatékonyan használták a „δ-függvényt". Ez a fogalom a matematikusok számára kezdetben önellentmondó volt, és csak Szoboljev úttörő munkája (1936) tette lehetővé ellentmondásmentes tárgyalását, az „általánosított függvények" elméletében. L. Schwarz az új fogalomnak a disztribúció nevet adta (1950), és tárgyalását a topologikus vektortereknek a Bourbaki-csoport által időközben kifejlesztett elmélete keretébe ágyazta, tovább általánosítva a Fourier-transzformációt is. A fejlődés ma is tovább folyik, a Banach-algebrák, pszeudo-differenciáloperátorok, a nemlineáris funkcionálanalízis, és más területek fejlődése sok régi probléma megoldását hozta meg. Ma a funkcionálanalízist talán a topologikus vektorterek közötti leképezések elméleteként lehetne definiálni. Ez a szerteágazó elmélet áthatja az analízist és a numerikus analízist, és módszerei behatolnak a matematika és alkalmazásai más területeire is.

Ez a fejezet csak a legalapvetőbb fogalmak és eredmények tárgyalására szorítkozik. A metrikus, normált és belső szorzat terek tárgyalása is a teljesség kedvéért az alapoktól indul. A metrikus tereknél a hangsúly a kompaktsággal és teljességgel kapcsolatos alapvető tényeken van. A Banach-féle fixponttételt is tárgyaljuk, amely egyszerűsége ellenére sok numerikus módszer alapja. A normált terek megismerése után a lineáris analízis lineáris operátorokra vonatkozó fő tételeit tárgyaljuk számos alkalmazással. A Hilbert-terekről szóló paragrafus központi kérdése a Fourier-sorok tárgyalása. A spektrálelméletnél a nemkorlátos operátorokra vonatkozó spektráltételre koncentrálunk, tárgyalva a függvénnyel való szorzásként és a spektrálmérték szerinti integrálként való előállítást is. A spektráltétel szorzat alakja, a spektrálmérték és a spektrálintegrál fogalma, és a spektráltétel elég egyszerűen megfogalmazható, még igen általános, a Hilbert-tér nem feltétlenül korlátos, normális operátorainak szerkezetét leíró formájában is. Célszerűnek tűnik tehát azok számára, akik a spektráltételt csak alkalmazni kívánják, a legegyszerűbb tények ismertetése

után mindjárt a spektráltételt elmondani bizonyítás nélkül, és az elmélet egyszerűbb tényeinek bizonyításával illusztrálni annak erejét. Így azonban a mélyebben érdeklődők számára nem világos, hogyan juthatunk el minél gyorsabban ehhez az alakhoz. Ezért a teljes bizonyítás is szerepel. Ez a paragrafus – mivel igen fontos a kvantumelméletben – meglehetősen sok feladatot tartalmaz. A kompakt operátorok Riesz-féle elméletét a klasszikus módon tárgyaljuk. A nemlineáris elméletből csak a differenciálszámítás szerepel, az eredmények nagyon hasonlóak a valós analízisből már jól ismertekhez. A jelöléseket igyekeztem úgy megválasztani, hogy ne nagyon térjenek el az egyváltozós esetben szokásostól.

3
Metrikus terek

Annak lehetősége, hogy a határérték és a folytonosság fogalmát egy tetszőleges *halmazon definiáljuk, olyan gondolat, melyet kétségtelenül először Fréchet javasolt 1904-ben, és ő dolgozott ki nevezetes disszertációjában 1906-ban. A legegyszerűbb és leggyümölcsözőbb módszer, melyet ilyen definícióra javasolt a* távolság *fogalmának bevezetése volt. . . . Rendkívül figyelemreméltó, hogy ilyen egyszerű axiómákkal általánosítható a legtöbb fogalom és érvelés, amelyet az $\mathbb{R}^n$ térben a környezetekkel, határértékkel és folytonossággal kapcsolatban szokás bevezetni. Azonban Fréchet legnagyobb érdeme abban van, hogy különösen kiemelt három fogalmat, amelyek alapvető szerepet játszottak a funkcionálanalízis egész további fejlődésében: kompaktság, teljesség és szeparábilitás.*

Jean Dieudonné [28]

3.1. Metrikus tér. Az X halmaz *félmetrikus tér*nek nevezzük, ha bármely két x, y eleméhez hozzá van rendelve egy $d(x, y)$ nemnegatív bővített valós szám, az x és y *eltérés*e úgy, hogy minden $x, y, z \in X$ esetén

(1) $d(x, x) = 0$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*szimmetria*);

(3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha még az is teljesül, hogy

(4) $x \neq y$ esetén $0 < d(x, y) < \infty$,

akkor d-t *távolság*nak vagy *metrik*ának, az X halmazt *metrikus tér*nek nevezzük.

Ha d eltérés, $x_0 \in X$, és $X_0 = \{x\colon x \in X,\ d(x, x_0) < \infty\}$, akkor ezen a részhalmazon az eltérés véges. Ha d egy véges eltérés X-en és x, y, u, v tetszőleges pontok, akkor teljesül a

$$\big|d(x, y) - d(u, v)\big| \le d(x, u) + d(y, v)$$

négyszög-egyenlőtlenség. Ez a

$$d(x, y) \le d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

egyenlőtlenségből, illetve az x és u, valamint y és v szerepének felcserélésével kapható hasonló egyenlőtlenségből következik. Minden véges eltérésből kaphatunk távolságot, ha azokat a pontokat, amelyek eltérése nulla, egy osztályba sorolva, azonosítjuk.

A metrikát általában d-vel fogjuk jelölni, néha d_X-el, ha utalnia akarunk arra, hogy az X tér metrikájáról van szó. Metrikus tér bármely részhalmaza maga is metrikus tér, az eredeti tér *alt*ere. A metrikus terek izomorfizmusai a *távolságtartó leképezés*ek, másnéven *izometriá*k vagy *egybevágóság*ok: az $f\colon X \to Y$ leképezése az (X, d_X) térnek az (Y, d_Y) térre izometria, ha $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ minden $x, y \in X$ esetén. Természetesen egy izometria mindig kölcsönösen egyértelmű.

Metrikus terek hasonlósága is definiálható: az $f\colon X \to Y$ leképezése az (X, d_X) térnek az (Y, d_Y) térre *hasonlóság*, ha valamely $0 < c < \infty$ konstanssal

$$d_Y(f(x), f(y)) = cd_X(x, y)$$

minden $x, y \in X$ esetén. Hasonlóság is mindig kölcsönösen egyértelmű.

Metrikára a legegyszerűbb példa a *diszkrét metrika*, amelynél különböző pontok távolsága mindig 1. A számegyenes, illetve a komplex sík metrikus tér a $d(x, y) = |x - y|$ metrikával. Általánosabban, minden normált tér metrikus tér a $d(x, y) = \|x - y\|$ metrikával. Speciálisan, a belső szorzat terek metrikus terek.

Az X halmazon értelmezett d_1 és d_2 metrikákat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha léteznek olyan $c, C > 0$ konstansok, hogy $cd_1(x, y) \le d_2(x, y) \le Cd_1(x, y)$ minden $x, y \in X$ esetén. Egy adott X halmazon értelmezett metrikák körében a metrikák ekvivalenciája ekvivalenciareláció. Egy normált téren ekvivalens normákból ekvivalens metrikák származnak. (Fontos tudni, hogy véges dimenziós normált téren bármely két norma ekvivalens.)

3.2. Feladat [5]. Legyenek $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *kódszavak*, azaz egy véges X halmazból, az *ábécé*ből vett n-tagú sorozatok. A $d(x, y)$ *Hamming-távolság* legyen azon k indexek száma, amelyekre $x_k \ne y_k$. Mutassuk meg, hogy d metrika a kódszavakon.

3.3. Feladat [6]. Vizsgáljuk meg, hogy az $(x, y) \mapsto (x - y)^2$, $(x, y) \mapsto \sqrt{|x - y|}$, $(x, y) \mapsto |x^2 - y^2|$, $(x, y) \mapsto |x - 2y|$, $(x, y) \mapsto |x - y|/(1 + |x - y|)$, ha $x, y \in \mathbb{R}$ leképezések közül melyek metrikák.

3.4. Gömbök, átmérő, korlátosság. Ha (X, d) metrikus tér, $x \in X$ és $A, B \subset X$, használni fogjuk a (nem teljesen korrekt) $d(x, A) = \inf\{d(x, y)\colon y \in A\}$ és $d(A, B) = \inf\{d(x, y)\colon x \in A, y \in B\}$ jelöléseket.Nyilván $d(x, A) = d(\{x\}, A)$. Tetszőleges nem üres A halmazra és $x, y \in X$-re $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$; valóban, minden $z \in X$-re $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, tehát $d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$, és hasonlóan $d(y, A) \le d(x, y) + d(x, A)$.

Az A halmaz *átmérő*jén a $d(A) = \sup\{d(x, y)\colon x, y \in A\}$ számot értjük. (A jelölés nem teljesen korrekt.) $d(A) = 0$ pontosan akkor, ha A egyelemű. Ha $d(A) < +\infty$, akkor az A halmazt *korlátos*nak nevezzük. Nyilván ha $A, B \subset X$ nem üresek, akkor $d(A \cup B) \le d(A) + d(A, B) + d(B)$, így véges sok korlátos halmaz egyesítése korlátos.

Legyen X metrikus tér, $x \in X$ és $\varepsilon \ge 0$. Az ε sugarú *gömb*ökre az $\mathbb{U}_\varepsilon(x) = \{y\colon d(x, y) < \varepsilon\}$, $\mathbb{B}_\varepsilon(x) = \{y\colon d(x, y) \le \varepsilon\}$,jelöléseket fogjuk használni. Az ε sugarú *gömbfelület*re az $\mathbb{S}_\varepsilon(x) = \{y\colon d(x, y) = \varepsilon\}$ jelölést fogjuk használni. Általánosabban, ha $A \subset X$, használni fogjuk a $\mathbb{U}_\varepsilon(A) = \{x\colon d(x, A) < \varepsilon\}$, $\mathbb{B}_\varepsilon(A) = \{x\colon d(x, A) \le \varepsilon\}$ és $\mathbb{S}_\varepsilon(A) = \{x\colon d(x, A) = \varepsilon\}$ jelöléseket.

Az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbb{U}_1(0)$, $\mathbb{B}_1(0)$ és $\mathbb{S}_1(0)$ gömböket olyan gyakran használjuk, hogy ezekre külön jelölést vezetünk be: $\mathbb{U}^n$, $\mathbb{B}^n$ és $\mathbb{S}^{n-1}$.

→ **3.5. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha X metrikus tér, $A \subset X$, akkor $d(\mathbb{B}_\varepsilon(A)) \le 2\varepsilon + d(A)$.

3.6. Feladat [7]. Lehet-e egy metrikus térben egy 3 sugarú gömb valódi részhalmaza egy 2 sugarú gömbnek?

3.7. Feladat [7]. Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben egy 5 sugarú gömb benne van egy 2 sugarú gömbben, akkor a két gömb azonos.

3.8. Belső, külső és határpontok. Legyen X metrikus tér, $A \subset X$. Az $x \in X$ pontot az A halmaz *belső pont*jának nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset A$. Az A halmaz összes belső pontjainak halmazát A *belsejé*nek nevezzük, ezt A° fogja jelölni. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy x *külső pont*ja A-nak. A külső pontjai nyilván pontosan $X \setminus A$ belső pontjai. Könnyű látni, hogy x pontosan akkor külső pontja A-nak, ha $d(x, A) > 0$. Ha x nem belső, és nem is külső pontja A-nak, akkor azt mondjuk, hogy x *határpont*ja A-nak. Az A határpontjainak halmazát A *határ*ának nevezzük, és ∂A-val jelöljük. Ha x nem külső pontja A-nak, azaz ha belső pontja vagy határpontja, akkor azt mondjuk, hogy x *érintkezési pont*ja A-nak. Ez azzal ekvivalens, hogy $d(x, A) = 0$. Az A összes érintkezési pontjainak halmazát $\overline{A}$ jelöli. Nyilván $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$. Az $\overline{A}$ pontjait szokás a következőképpen is felosztani: egy $x \in \overline{A}$ pont *izolált pont*ja A-nak, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x)$-ben ő az egyetlen A-beli pont; egyébként azt mondjuk, hogy x *torlódási pont*ja A-nak.

3.9. Feladat [3]. Lehet-e metrikus térben egy véges halmaz belseje nem üres?

3.10. Nyílt és zárt halmazok, környezetek. Ha (X, d) metrikus tér, és az $A \subset X$ halmaz minden pontja belső pont, akkor A-t *nyílt*nak nevezzük; ez nyilván azzal ekvivalens, hogy $A = A^\circ$. Például az üres halmaz és az egész X nyílt halmazok. Diszkrét térben minden halmaz nyílt. Egy A halmaz *környezet*én olyan halmazt értünk, amely tartalmaz az A-t tartalmazó nyílt halmazt. Ha az A halmaz minden érintkezési pontját tartalmazza, akkor *zárt*nak nevezzük. Egy halmaz nyilván akkor és csak akkor zárt, ha a komplementere nyílt. Például az üres halmaz és az egész X zártak. Diszkrét térben minden halmaz zárt. Ha egy halmaz zárt és nincs izolált pontja, akkor *perfekt*nek nevezzük.

Az $\mathbb{U}_\varepsilon(A)$ halmazok nyíltak; valóban, ha $x \in \mathbb{U}_\varepsilon(A)$, akkor $d(x, A) < \varepsilon$, ahonnan $\delta = \varepsilon - d(x, A) > 0$ választással $\mathbb{U}_\delta(x) \subset \mathbb{U}_\varepsilon(A)$, mert $d(x, y) < \delta$ esetén $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A) < \varepsilon$. Hasonlóan, a $\mathbb{B}_\varepsilon(A)$ halmazok zártak; valóban, ha x nem eleme $\mathbb{B}_\varepsilon(A)$-nak, akkor $d(x, A) > \varepsilon$, ahonnan $\delta = d(x, A) - \varepsilon > 0$ választással $\mathbb{U}_\delta(x) \subset X \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(A)$, mert $d(x, y) < \delta$ esetén $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y) > \varepsilon$. Tehát $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbb{U}_\varepsilon(A)$ nyílt, $\mathbb{B}_\varepsilon(A)$ pedig zárt környezete A-nak. Ezeket a halmazokat az A halmaz *ε-környezet*einek nevezzük.

3.11. Feladat [7]. Vizsgáljuk meg az $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{N}$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$, $]a, b[$, $\mathbb{R}$ halmazokat, mint $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ részhalmazait, és az $\{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, $\{z : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, $\mathbb{C}$ halmazokat, mint $\mathbb{C}$ részhalmazait, hogy melyik nyílt, zárt, perfekt, illetve korlátos.

3.12. Feladat [7]. Adjunk meg $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$-nek olyan U környezetét, amelyre $\mathbb{U}_\varepsilon(\mathbb{N}) \not\subset U$ egyetlen $\varepsilon > 0$-ra sem.

3.13. Tétel. *Legyen X metrikus tér, $A \subset X$. Az A egy torlódási pontjának bármely környezetében A-nak végtelen sok pontja van.*

Bizonyítás. Legyen x torlódási pontja A-nak. Ha az állítás az x valamely U környezetére nem teljesülne, akkor $\varepsilon > 0$-t úgy választva, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset U$ legyen, és $\mathbb{U}_\varepsilon(x)$ az $U \cap A$-ból egyetlen x-től különböző pontot se tartalmazzon, ellentmondást kapnánk.

3.14. Tétel. *Metrikus térben nyílt halmazok egyesítése nyílt és véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*

Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, például $\mathbb{R}$-ben $\{0\} = \cap_{n=1}^{\infty}]-1/n, 1/n[$.

Bizonyítás. Ha G_γ, $\gamma \in \Gamma$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és $x \in G = \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, akkor valamely $\gamma \in \Gamma$-ra $x \in G_\gamma$. Ebből következik, hogy valamely $\varepsilon > 0$-ra $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G_\gamma \subset G$. Ha G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nyílt halmazok, és $x \in G = \cap_{i=1}^{n} G_i$, akkor minden i-re van olyan $\varepsilon_i > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$. De ekkor $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$-vel $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G$.

3.15. Következmény. *Zárt halmazok metszete zárt. Véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

→ **3.16. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ∂A és $\mathbb{S}_\varepsilon(A)$ zárt halmazok.

3.17. Halmaz belseje és lezártja. Legyen X metrikus tér, és $A \subset X$. Mivel $\overline{A} = \mathbb{B}_0(A)$, az $\overline{A}$ halmaz zárt; ezt a halmazt A *lezárt*jának nevezzük. Komplementerképzéssel kapjuk, hogy A° nyílt. Az A belseje a legbővebb nyílt halmaz, amely része A-nak, mert a definíció szerint ha $B \subset A$ nyílt, akkor $B \subset A^\circ$. Ugyancsak a definícióból, ha $A \subset B \subset X$, akkor $A^\circ \subset B^\circ$. Ha $A, B \subset X$, akkor $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, mivel egyrészt az előző összefüggésből $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$, másrészt pedig $A^\circ \cap B^\circ$ nyílt és része $A \cap B$-nek, így $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Komplementerképzéssel azt kapjuk, hogy $\overline{A}$ a legszűkebb zárt halmaz, amely tartalmazza A-t; ha $A \subset B$, akkor $\overline{A} \subset \overline{B}$; ha $A, B \subset X$, akkor $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.18. Feladat [6]. Igaz-e minden metrikus térben, hogy $\overline{\mathbb{U}_r(x)} = \mathbb{B}_r(x)$?

Megoldás. Nem.

3.19. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként és minden zárt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként.

3.20. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, $A \subset X$ és A' az A torlódási pontjainak halmaza. Bizonyítsuk be, hogy A' zárt és $A' = \overline{A}'$. Igaz-e, hogy $A'' = A'$?

3.21. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, $A_\gamma \subset X$, ha $\gamma \in \Gamma$. Bizonyítsuk be, hogy $\cup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma} \subset \overline{\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma}$, és mutassuk meg, hogy a tartalmazás lehet valódi.

3.22. Szeparábilis terek. Legyen X metrikus tér, $A, B \subset X$. Az mondjuk, A *sűrű* B-ben, ha $B \subset \overline{A}$. Ha A sűrű B-ben, és B sűrű C-ben, akkor A sűrű C-ben, mivel $B \subset \overline{A}$-ból $\overline{B} \subset \overline{A}$. Egy, az egész térben sűrű halmazt *mindenütt sűrű*nek, vagy röviden *sűrű*nek nevezünk. Egy metrikus teret *szeparábilis*nek nevezünk, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza. $\mathbb{R}$ példa szeparábilis térre, a racionális számok megszámlálható sűrű halmazt alkotnak. Az X nyílt halmazainak egy $\mathcal{B}$ rendszerét *bázis*nak nevezzük, ha minden nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Az X nyílt halmazainak egy $\mathcal{S}$ rendszerét *szubbázis*nak nevezzük, ha az $\mathcal{S}$-beli halmazok véges metszetei bázist alkotnak. Például $\mathbb{R}$-ben az összes $]a, b[$ nyílt intervallum, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, vagy akár csak $a, b \in \mathbb{Q}$, egy bázis, az összes $]-\infty, b[$ és $]a, +\infty[$ nyílt intervallum, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, vagy akár csak $a, b \in \mathbb{Q}$, egy szubbázis.

3.23. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha van megszámlálható bázisa.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{B}$ egy megszámlálható bázis, akkor minden nem üres $\mathcal{B}$-beli halmazból választva egy tetszőleges pontot, a kapott halmaz sűrű, mert minden nem üres nyílt halmazba belemetsz; megfordítva, ha $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy megszámlálható sűrű halmaz, megmutatjuk, hogy $\mathcal{B} = \{\mathbb{U}_r(x_n) : n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ egy bázis. Legyen G tetszőleges nyílt halmaz, és tekintsük azon $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítését, amelyek részhalmazai G-nek. Csak azt kell megmutatnunk, hogy az egyesítés G minden pontját tartalmazza. Legyen $x \in G$, és válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, amelyre $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G$. Alkalmas n-re $d(x, x_n) < \varepsilon/2$. Ha $d(x, x_n) < r < \varepsilon - d(x, x_n)$, akkor $x \in \mathbb{U}_r(x_n) \subset G$.

3.24. Feladat [5]. Adjunk példát két sűrű halmazra, amelynek a metszete üres.

$*$ **3.25. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy szeparábilis metrikus tér bármely zárt részhalmaza előáll egy megszámlálható és egy perfekt halmaz egyesítéseként. (Lásd Alekszandrov [3], 183. o.)

3.26. Feladat [6]. Van-e olyan nem üres perfekt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, amely nem tartalmaz racionális számot?

3.27. Alterek. Legyen X metrikus tér, $Y \subset X$. Mint említettük, Y is metrikus tér, ha az X-beli d távolságot csak Y pontjai között tekintjük. Az alterek használatával sokszor elkerülhetjük, hogy tételeinket metrikus terek részhalmazaira kelljen megfogalmazni. Nyilván $y \in Y$ és $\varepsilon > 0$ esetén az y pont Y-beli ε sugarú környezete Y és az X-beli ε sugarú környezet metszete. Egy altér egy nyílt részhalmaza általában nem nyílt az eredeti térben is. Megmutatjuk, hogy *Y egy részhalmaza pontosan akkor nyílt, ha előáll $G \cap Y$ alakban, ahol G nyílt X-ben.* Valóban, ha $y \in G \cap Y$, és az y pont X-beli $\varepsilon > 0$ sugarú környezete része G-nek, akkor az y pont Y-beli ε sugarú környezete része $G \cap Y$-nak. Megfordítva, ha E nyílt Y-ban, akkor minden $y \in E$-hez van olyan $\varepsilon_y > 0$, amelyre $d(y, x) < \varepsilon_y$, $x \in Y$ esetén $x \in E$. Jelölje V_y az y pont X-beli ε_y sugarú nyílt környezetét. Ekkor $G = \cup_{y \in E} V_y$ nyílt halmaz X-ben, és $G \cap Y = E$.

Ebből az állításból azonnal következik, hogy *Y egy részhalmaza pontosan akkor zárt Y-ban, ha előáll $F \cap Y$ alakban, ahol F zárt X-ben.* Hasonlóan, *egy részhalmaza Y-nak pontosan akkor környezete egy $y \in Y$ pontnak, ha előáll $U \cap Y$ alakban, ahol U környezete y-nak X-ben.*

Ha X szeparábilis tér, akkor Y is, mert X egy megszámlálható bázisának elemei elmetszve Y-nal, Y egy megszámlálható bázisát kapjuk.

3.28. Feladat [8]. Adjuk meg egy szeparábilis tér egy alterének egy megszámlálható sűrű részhalmazát.

3.29. Sorozatok. Egy (X, d) metrikus térbeli x_n sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergens*, és *határértéke* $x \in X$, ha x bármely környezetére véges sok n kivételével minden n-re x_n benne van az adott környezetben. Egy sorozatnak csak egy határértéke van, mert ha $x \neq y$, akkor léteznek diszjunkt környezeteik. A határérték és a konvergencia jelölése: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ekvivalens megfogalmazás, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n \geq N$, akkor $d(x_n, x) < \varepsilon$, valamint hogy $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a határértéke ugyanaz. Az mondjuk, hogy a metrikus tér egy x pontja az x_n sorozatnak *sűrűsödési helye*, ha van a sorozatnak olyan részsorozata, amelynek határértéke x. Az x pont pontosan akkor sűrűsödési helye az x_n sorozatnak, ha x bármely U környezetéhez és bármely N-hez van olyan $n \geq N$, amelyre

$x_n \in U$. Ebből következik, hogy egy sorozat sűrűsödési helyeinek halmaza zárt halmaz. Ha $A \subset X$, akkor $x \in \overline{A}$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x_n \in A$ sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Egy sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n, m \geq N$, akkor $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Konvergens sorozat mindig Cauchy-sorozat. A megfordítás nem mindig teljesül, de ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens; valóban, ha $x_{n_k} \to x$, $\varepsilon > 0$ és $n, m \geq N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, akkor elég nagy k-ra $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ és $n_k \geq N$, azaz $d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon/2$, így $d(x_n, x) < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Egy Cauchy-sorozat értékkészlete korlátos. Egy metrikus teret *teljes*nek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Könnyű látni, hogy metrikus tér teljes altere zárt, és teljes metrikus tér egy zárt altere teljes. $\mathbb{R}$ teljes: ez például úgy látható be, hogy megmutatjuk, minden x_n sorozatnak van monoton részsorozata. Valóban, vagy végtelen sok olyan n van, amelyre $m \geq n$ esetén $x_m \leq x_n$, amikor is ezek a tagok egy monoton csökkenő részsorozatot alkotnak, vagy csak véges sok ilyen n van, amikor viszont a legnagyobb utáni tagjaiból a sorozatnak kiválasztható egy monoton növekedő részsorozat. Mivel Cauchy-sorozat korlátos, monoton és korlátos valós számsorozat pedig konvergens, $\mathbb{R}$ teljes. A teljesség jelentősége abban áll, hogy egy sorozatról úgy is eldönthetjük, hogy konvergens, hogy nem tudjuk, mi a határértéke.

→ **3.30. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $s_{m,n} = m/(m+n)$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n} \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n}.$$

∗ **3.31. Feladat [11].** Igazoljuk, hogy teljes metrikus térben korlátos zárt halmazok egy csökkenő sorozatát véve, ha az átmérők nullához tartanak, a halmazok metszete nem üres. Mutassuk meg, hogy egyik feltétel sem hagyható el, még akkor sem, ha a halmazok gömbök.

→ **3.32. A bővített valós és komplex számok metrizálása [10].** Legyen (Y, d_Y) egy metrikus tér, és $f\colon X \to Y$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés. Mutassuk meg, hogy a

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

összefüggés egy metrikát definiál X-en, amivel X és $f(X)$ izometrikusak. A d_X metrikát szokás a d_Y metrika f függvénnyel való *visszahúzás*ának nevezni. Az $f(x) = x/(1+|x|)$, $f(-\infty) = -1$, $f(\infty) = 1$ leképezést használva, metrizáljuk a bővített valós számok halmazát, és mutassuk meg, hogy a metrikából a sorozatok szokásos határértéke származik. Az így kapott metrika $\overline{\mathbb{R}}$ *szokásos metrikája*. Az

$$f(x+iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \in \mathbb{S}_1(0) \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\text{ha } x, y \in \mathbb{R},$$
$$f(\infty) = (0, 0, 1)$$

leképezést használva, metrizáljuk a bővített komplex számok halmazát, és mutassuk meg, hogy a metrikából a sorozatok szokásos határértéke származik. Az így kapott metrika $\overline{\mathbb{C}}$ *szokásos metrikája*.

3.33. Kompakt halmazok. Egy X metrikus tér egy K részhalmazát *kompakt*nak nevezzük, ha K bármely nyílt halmazokkal való befedéséből kiválaszható véges befedés. Véges sok kompakt halmaz egyesítése nyilván kompakt. A véges halmazok kompaktak. A kompaktság a végesség valamilyen kiterjesztése; egy kompakt halmaz „közelítőleg véges". Egy K kompakt halmaz és egy F zárt halmaz $K \cap F$ metszete kompakt; valóban, $K \cap F$ egy nyílt lefedéséhez hozzávéve F komplementerét, K nyílt lefedését kapjuk; ebből kiválasztva egy véges lefedést, és elhagyva belőle F komplementerét, $K \cap F$ egy véges lefedését kapjuk. A K halmaz kompaktsága nem függ attól, hogy milyen altérben tekintjük: ha $K \subset Y \subset X$, akkor K pontosan akkor kompakt, mint Y részhalmaza, ha mint X részhalmaza kompakt. Ez azonnal következik az altérbeli nyílt halmazok előállításából. Speciálisan, elég K-nak, mint altérnek a kompaktságát vizsgálni.

Az X metrikus tér egy B részhalmaza *ε-háló* az $A \subset X$ halmaz számára, ha $A \subset \mathbb{U}_\varepsilon(B)$. Az A-t *teljesen korlátos*nak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik véges ε-háló A számára. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra A lefedhető véges sok ε-nál kisebb átmérőjű halmazzal. Világos, hogy teljesen korlátos halmaz bármely részhalmaza is teljesen korlátos. Teljesen korlátos halmaz mindig korlátos, megfordítva azonban nem, mint egy végtelen diszkrét tér mutatja.

Egy $A \subset X$ halmaz egy lefedésének a *Lebesgue-szám*án egy olyan δ számot értünk, amelyre minden $x \in A$ esetén $\mathbb{U}_\delta(x)$ benne van a lefedés valamelyik halmazában.

3.34. Tétel. *Egy X metrikus térre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *X kompakt;*

(2) *X minden végtelen részhalmazának létezik torlódási pontja;*

(3) *minden X-beli sorozatnak van sűrűsödési helye;*

(4) *X teljes és teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül. (2) bizonyításához elég megmutatni, hogy X minden megszámlálható végtelen $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ részhalmazának létezik torlódási pontja. Ha ez nem teljesülne, akkor az $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$ halmazok zártak lennének, így komplementereik X egy nyílt lefedését adnák. Ebből a lefedésből nem választható ki véges lefedés.

Ha (2) teljesül, és az x_n sorozat értékkészlete végtelen, akkor az értékkészlet egy torlódási pontja a sorozatnak sűrűsödési helye. Ha a sorozat értékkészlete véges, akkor valamelyik értéket végtelen sokszor veszi fel, így van sűrűsödési helye.

Ha (3) teljesül, akkor bármely X-beli Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata. Bármely metrikus térben, ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens, így X teljes. Ha X nem lenne teljesen korlátos, akkor valamely $\varepsilon > 0$-hoz nem létezne véges ε-háló. Erre az ε-ra teljes indukcióval kiválaszthatnánk egy x_n sorozatot úgy, hogy a sorozat bármely két különböző tagjának távolsága legalább ε. Ennek a sorozatnak nyilván nem lehet konvergens részsorozata, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy (4) teljesül, de X valamely V_γ nyílt lefedéséből nem választható ki véges lefedés. Mivel X teljesen korlátos, lefedhető véges sok $1/2$ sugarú nyílt gömbbel. Ezek között van egy olyan U_1 gömb, amely nem fedhető le véges sok V_γ-val. X-et lefedve véges sok $1/2^2$ sugarú nyílt gömbbel, ezek között van egy olyan U_2 gömb, amely belemetsz U_1-be, és nem fedhető le véges sok V_γ-val. Teljes indukcióval, nyílt gömbök olyan U_n sorozatát kapjuk, amelyekre $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, U_n sugara $1/2^n$, és a gömbök egyike sem

fedhető le véges sok V_γ-val. U_n középpontját x_n-nel jelölve, $d(x_n, x_{n+1}) < 1/2^{n-1}$, és így

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) < \frac{1}{2^{n-2}},$$

ha $m > n$, tehát x_n Cauchy-sorozat, amely X teljessége miatt konvergál egy x elemhez. Van olyan γ, hogy $x \in V_\gamma$, és mivel V_γ nyílt, van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset V_\gamma$. Ha $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ és $1/2^n < \varepsilon/2$, akkor $U_n = \mathbb{U}_{1/2^n}(x_n) \subset \mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset V_\gamma$, ami ellentmondás.

3.35. Következmény. *Metrikus tér kompakt részhalmaza korlátos és zárt.*

3.36. Következmény. *Kompakt metrikus tér szeparábilis.*

Bizonyítás. A $0 < n \in \mathbb{N}$-re vett véges $1/n$-hálók egyesítése sűrű.

3.37. Tétel. *Egy metrikus tér bármely kompakt halmaza nyílt lefedésének van pozitív Lebesgue-száma.*

Bizonyítás. Legyen G_γ, $\gamma \in \Gamma$ az X metrikus tér K kompakt részhalmazának egy nyílt lefedése. Minden $x \in K$-hoz van olyan $\varepsilon_x > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset G_\gamma$ valamely $\gamma \in \Gamma$-ra. Az $\mathbb{U}_{\varepsilon_x/2}(x)$ nyílt gömbök nyílt lefedését alkotják K-nak. Kiválasztva ebből a nyílt lefedésből egy véges részlefedést, az ehhez tartozó $\varepsilon_{x_i}/2$ számok minimuma Lebesgue-száma a nyílt lefedésnek.

→ **3.38. Feladat [6].** Lehet-e diszkrét metrikus tér kompakt?

→ **3.39. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy teljesen korlátos metrikus tér szeparábilis.

→ **3.40. Feladat [6].** Adjunk példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan korlátos és zárt halmaz, amely nem kompakt.

3.41. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B kompakt halmazok az X metrikus térben, akkor van olyan $a \in A$ és $b \in B$, hogy $d(a, b) = d(A, B)$.

3.42. Feladat [13]. Mutassuk meg, hogy egy X metrikus térre az alábbiak ekvivalensek:

(1) X kompakt;

(2) ha F_γ, $\gamma \in \Gamma$ zárt halmazok egy rendszere X-ben úgy, hogy bármely véges soknak a metszete nem üres, akkor $\cap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \neq \emptyset$;

(3) X minden megszámlálható nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés;

(4) X-beli nem üres zárt halmazok csökkenő sorozatának a metszete nem üres;

(5) X minden végtelen nyílt lefedéséből elhagyható egy halmaz úgy, hogy még mindig lefedést kapunk;

(6) X minden olyan nyílt lefedéséből, amelyre minden pontot csak véges sok nyílt halmaz tartalmaz, kiválasztható véges lefedés;

(7) X-nek nincs zárt végtelen részhalmaza, amelyben mint altérben minden halmaz nyílt.

$*$ **3.43. Feladat: Hausdorff-távolság [12].** Legyen (X,d) metrikus tér. Ha $A,B\subset X$, legyen

$$d_H(A,B)=\inf\{\delta\geq 0\colon A\subset \mathbb{U}_\delta(B), B\subset \mathbb{U}_\delta(A)\}.$$

Mutassuk meg, hogy d_H eltérés, és ha csak az X nem üres kompakt halmazainak K rendszerén tekintjük, akkor távolság. Ezt a távolságot *Hausdorff-távolság*nak nevezzük. Mutassuk meg, hogy ha az (X,d) metrikus tér szeparábilis, teljesen korlátos, teljes, vagy kompakt, akkor a (K,d_H) tér is rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

3.44. Határérték. Legyen $f\colon A\to Y$ egy függvény, ahol X és Y metrikus terek és $A\subset X$, és legyen a egy torlódási pontja A-nak. Azt írjuk, hogy $f(x)\to b$, ha $x\to a$, vagy $\lim_{x\to a} f(x)=b$, ha $b\in Y$ és b bármely V környezetéhez van olyan U környezete a-nak, hogy ha $x\neq a$, $x\in A\cap U$, akkor $f(x)\in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $x\in A$ és $0<d_X(x,a)<\delta$ akkor $d_Y(f(x),b)<\varepsilon$. Ha $X=\overline{\mathbb{R}}$, akkor az $f|_{[-\infty,a[}$ illetve $f|_{]a,\infty]}$ határértékét az *f bal illetve jobb oldali határértékének* nevezzük. Jelölése: $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ illetve $\lim_{x\downarrow a} f(x)$.

3.45. Átviteli elv. *Az előző definíció jelöléseivel $\lim_{x\to a} f(x)=b$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden olyan $a\neq x_n\in A$ sorozatra, amelyre $x_n\to a$, teljesül, hogy $f(x_n)\to b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to a} f(x)=b$. Ekkor bármely $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy $x\in A$, $0<d_X(x,a)<\delta$ esetén $d_Y(f(x),b)<\varepsilon$. Ha $a\neq x_n\in A$ egy sorozat, amelyre $x_n\to a$, akkor van olyan N, hogy $n\geq N$ esetén $d_X(x_n,a)<\delta$. De ekkor $n\geq N$ esetén az is fennáll, hogy $d_Y(f(x_n),b)<\varepsilon$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\lim_{x\to a} f(x)=b$ nem teljesül. Ekkor van olyan $\varepsilon>0$, hogy minden $\delta>0$ esetén van olyan $x\in A$ pont (δ-tól függően), amelyre $d_Y(f(x),b)\geq\varepsilon$, de $0<d_X(x,a)<\delta$. Vegyük a $\delta_n=1/n$ számokat, $n=1,2,\ldots$. Így olyan $a\neq x_n\in A$ sorozatot találunk, amelyre $x_n\to a$, de $f(x_n)\to b$ nem teljesül.

3.46. Következmény. *Függvény határértéke, ha létezik, egyértelmű.*

Bizonyítás. Következik a sorozat határértékének egyértelműségéből.

3.47. Folytonosság. Legyenek X és Y metrikus terek, $A\subset X$ és $f\colon A\to Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos az $a\in A$ pontban*, ha $f(a)$ bármely V környezetéhez van olyan U környezete a-nak, hogy ha $x\in U\cap A$, akkor $f(x)\in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $x\in A$ és $d_X(x,a)<\delta$, akkor $d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon$. A határérték és a folytonosság definíciójának összevetéséből azt kapjuk, hogy ha a izolált pontja A-nak, akkor f mindig folytonos a-ban, egyébként pedig pontosan akkor, ha $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. Ha f nem folytonos a-ban, akkor azt mondjuk, hogy *szakadás*a van a-ban. Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik, de nem egyenlő $f(a)$-val, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *megszüntethető szakadás*a van. Ha $X=\overline{\mathbb{R}}$, $a\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ és $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ léteznek, de nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *elsőfajú szakadás*a van a-ban, minden más nem megszüntethető szakadást *másodfajú*nak nevezünk.

Ha f az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy *folytonos*. Vegyük észre, hogy az A halmaz X-beli komplementerének semmi szerepe sincs a folytonosság definíciójában. (A határérték definíciójában más a helyzet, mert $a\notin A$ is lehet.) Ezért elhagyhatjuk az értelmezési tartomány komplementumát, és elég egy metrikus téren mindenütt definiált függvények folytonosságával foglalkozni.

Egy $f\colon X \to Y$ függvény folytonossága az a pontban azzal ekvivalens, hogy $f(a)$ bármely V környezetére $f^{-1}(V)$ környezete a-nak. Ebből azonnal következik, hogy ha f folytonos a-ban, $g\colon Y \to Z$ egy másik függvény, amely folytonos $f(a)$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos a-ban.

→ **3.48. Feladat: metrikus terek szorzata [10].** Legyenek (X_i, d_i) metrikus terek, $1 \le i \le n$. Mutassuk meg, hogy az $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ halmazon a

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\},$$

ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ összefüggés metrikát definiál (*szorzatmetrika*). Hogyan néznek ki a szorzattérben a gömbök? Mutassuk meg, hogy egy $V \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ halmaz pontosan akkor nyílt ebben a metrikában, ha minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ ponthoz léteznek olyan $V_i \subset X_i$ nyílt halmazok, hogy $x \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subset V$. Mutassuk meg, hogy a $p_i\colon x \mapsto x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ projekciók folytonosak. Mutassuk meg, hogy egy X-beli értékű függvény határértéke akkor és csak akkor létezik, ha minden koordináta-függvényének létezik a határértéke, és ekkor a határérték koordinátái a koordináta-függvények határértékei.

→ **3.49. Feladat [8].** Az előző feladat jelöléseivel, legyen $1 \le p < \infty$ és

$$d'(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^p}.$$

Mutassuk meg, hogy d' és d ekvivalens metrikák.

∗ **3.50. Feladat: oszcillációs függvény [9].** Legyen X, Y metrikus tér, $A \subset X$ és $f\colon A \to Y$. Legyen $\omega_f(x)$ a $d_Y(f(V))$ bővített valós számok infimuma, ahol V befutja x környezeteit. Az ω_f függvényt az f *oszcillációs függvény*ének nevezzük. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos az $x \in A$ pontban, ha $\omega_f(x) = 0$. Mutassuk meg, hogy az $\{\omega_f < y\}$, $y > 0$ halmazok nyíltak.

∗ **3.51. Feladat [10].** Adjunk meg olyan $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvényt, amely pontosan az irracionális pontokban folytonos. Mutassuk meg, hogy nincs olyan $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvényt, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

3.52. Tétel. *Legyenek X, Y metrikus terek, $f\colon X \to Y$ egy függvény. A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

(1) *f folytonos;*

(2) *bármely G nyílt részhalmazára Y-nak $f^{-1}(G)$ nyílt;*

(3) *bármely F zárt részhalmazára Y-nak $f^{-1}(F)$ zárt;*

(4) *bármely A részhalmazára X-nek $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Bizonyítás. Ha (1) teljesül, és a érintkezési pontja A-nak, akkor mivel $f(a)$ bármely V környezetére $f^{-1}(V)$ környezete a-nak, belemetsz A-ba. Így $f(a)$ érintkezési pontja $f(A)$-nak, azaz teljesül (4). Nyilván (4)-ből következik (3), mivel ha $F \subset Y$ zárt, $A = f^{-1}(F)$, akkor $f(\overline{A}) \subset \overline{F} = F$, amiből $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Komplementerképzéssel következik (3)-ból (2). Végül, ha (2) teljesül, és V környezete $f(a)$-nak, akkor V tartalmaz egy $f(a)$-t tartalmazó G nyílt halmazt. Mivel $f^{-1}(G)$ nyílt, tartalmazza a-t, és része $f^{-1}(V)$-nek, $f^{-1}(V)$ környezete a-nak.

3.53. Következmény. *Ha X és Y metrikus terek, $f\colon X \to Y$ folytonos függvény, $A \subset X$ sűrű a $B \subset X$ halmazban, akkor $f(A)$ sűrű az $f(B)$ halmazban.*

3.54. Tétel. *Legyenek X és Y metrikus terek, X kompakt, $f\colon X \to Y$ folytonos. Ekkor $f(X)$ kompakt.*

Bizonyítás. Ha V_γ, $\gamma \in \Gamma$ egy nyílt lefedése $f(X)$-nek, akkor $f^{-1}(V_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ nyílt lefedése X-nek. Ebből kiválasztva egy véges lefedést, a megfelelő V_γ halmazok lefedését adják $f(X)$-nek.

3.55. Következmény: Weierstrass tétele. *Ha $X \neq \emptyset$ kompakt metrikus tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $f(X)$ korlátos, és van olyan $a, b \in X$, hogy $f(a) = \inf_{x\in X} f(x)$, $f(b) = \sup_{x\in X} f(x)$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $f(X)$ kompakt, így korlátos és zárt. Mivel $\inf f(X)$ és $\sup f(X)$ érintkezési pontjai $f(X)$-nek, benne vannak $f(X)$-ben.

3.56. Definíció. Legyen X metrikus tér, Y Abel-csoport. Egy $f\colon X \to Y$ függvény *tartó*ján a $\operatorname{spt} f = \overline{\{f \neq 0\}}$ halmazt értjük.

Az előző következmény nyilván érvényben marad, ha X nem kompakt, de f kompakt tartójú.

3.57. Tétel. *Ha f folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezése az X kompakt metrikus térnek az Y metrikus térre, akkor f^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy ha $F \subset X$ zárt, akkor $f(F)$ is zárt. Ez azonban következik az előző tételből.

3.58. Feladat [6]. Legyenek A, B az X metrikus tér diszjunkt részhalmazai, A zárt, B kompakt. Mutassuk meg, hogy $d(A, B) > 0$.

→ **3.59. Feladat [9].** Bizonyítsuk be, hogy ha A kompakt halmaz az X metrikus térben, $x \in X$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $d(x, a) = d(x, A)$. Elég-e, ha A zárt?

→ **3.60. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy ha A és B diszjunkt zárt halmazok egy X metrikus térben, akkor van olyan $f\colon X \to [0, 1]$ folytonos függvény, amely A-n nulla, B-n egy.

→ **3.61. Feladat: az egyenlőség kiterjesztésének elve [5].** Legyenek f és g egy metrikus téren értelmezett, folytonos függvények. Mutassuk meg, hogy ha egy sűrű halmazon megegyeznek, akkor egyenlőek.

→ **3.62. Feladat: az egyenlőtlenség kiterjesztésének elve [6].** Legyenek f és g egy metrikus téren értelmezett, bővített valós értékű folytonos függvények. Mutassuk meg, hogy ha egy sűrű halmazon $f \leq g$, akkor mindenütt.

∗ **3.63. Feladat [8].** Legyen f egy intervallumon értelmezett, metrikus térbeli értékű függvény, amelynek csak megszámlálható sok szakadási helye van. Bizonyítsuk be, hogy f értékkészlete szeparábilis.

3.64. Egyenletes folytonosság. Egy X metrikus teret egy Y metrikus térbe képező $f\colon X \to Y$ leképezést *egyenletesen folytonos*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in Y$ és $d_X(x, y) < \delta$, akkor $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Nyilván egyenletesen folytonos leképezés folytonos is, de a megfordítás nem igaz általában.

Ha $g\colon Y \to Z$ is egyenletesen folytonos, akkor $g \circ f$ is egyenletesen folytonos.

3.65. Heine tétele. *Egy kompakt metrikus téren folytonos függvény egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Legyenek X és Y metrikus terek, X kompakt, $f\colon X \to Y$ folytonos függvény, $\varepsilon > 0$. Minden $x \in X$-nek van olyan U_x környezete, hogy $y \in U_x$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Legyen $\delta > 0$ az U_x, $x \in X$ nyílt lefedés Lebesgue-száma. Ekkor $y, z \in X$, $d_X(y, z) < \delta$ esetén $d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon$.

→ **3.66. Feladat [8].** Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}$ nem kompakt. Mutassuk meg, hogy van olyan folytonos $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény, amely nem korlátos, illetve nem veszi fel a szuprémumát. Ha A korlátos, akkor van olyan $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény, amely nem egyenletesen folytonos, de van olyan $A \subset \mathbb{R}$ nem korlátos halmaz, amelyen minden $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos.

→ **3.67. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy egy metrikus tér egy sűrű alterét egy teljes metrikus térbe képező, egyenletesen folytonos leképezés kiterjeszthető az egész téren értelmezett egyenletesen folytonos függvénnyé.

3.68. Összefüggő halmazok. Egy X metrikus teret *összefüggő*nek nevezzük, ha nem léteznek U, V diszjunkt, nyílt és nem üres halmazok, amelyek egyesítése X. Egy $A \subset X$ részhalmazt akkor nevezünk összefüggőnek, ha mint altér összefüggő. *Tartomány* alatt összefüggő nyílt halmazt értünk.

3.69. Tétel. *A számegyenes összefüggő részhalmazai éppen az intervallumok.*

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ összefüggő. Azt kell megmutatnunk, hogy ha $\inf A < z < \sup A$, akkor $z \in A$. Ha ez nem teljesülne, akkor a

$$B = A \cap]-\infty, z[\quad \text{és} \quad C = A \cap]z, \infty[$$

nem üres diszjunkt nyílt halmazok egyesítése A lenne.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A intervallum. Ha $A = B \cup C$ az A felbontása lenne két, A-ban nyílt nem üres diszjunkt halmazra, akkor legyen $x \in B$ és $y \in C$. Feltehetjük, hogy $x < y$. Legyen z a $B \cap [x, y]$ halmaz felső határa. Ha $z \in B$, akkor $z < y$ és mivel B nyílt, van olyan $[z, z + h[$ intervallum, amely része B-nek, ellentmondás. Ha $z \in C$, akkor $x < z$, és hasonlóan van olyan $]z - h, z]$ intervallum, ami része C-nek, ami szintén ellentmondás.

3.70. Tétel. *Legyen X összefüggő metrikus tér, Y metrikus tér, és $f\colon X \to Y$ folytonos függvény. Ekkor $f(X)$ összefüggő.*

Bizonyítás. Ha léteznének B és C nem üres, diszjunkt, $f(X)$-ben nyílt halmazok, amelyek egyesítése $f(X)$, akkor $f^{-1}(B)$ és $f^{-1}(C)$ olyan nem üres, diszjunkt, nyílt részhalmazai lennének X-nek, amelyek egyesítése X.

3.71. Következmény: Bolzano tétele. *Legyen X összefüggő metrikus tér, és $f\colon X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $a, b \in f(X)$, $a < c < b$, van olyan $x \in X$, amelyre $f(x) = c$.*

Bizonyítás. Mivel $f(X)$ összefüggő, intervallum.

3.72. Következmény. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű, akkor f^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Az f függvénynek I bármely kompakt részintervallumára való megszorításának az inverze folytonos. Mivel $f(I)$ minden kompakt részintervalluma az I valamely kompakt részintervallumának a képe, f^{-1} az $f(I)$ minden kompakt részintervallumán folytonos.

3.73. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, $A \subset X$ összefüggő halmaz, és $A \subset B \subset \overline{A}$. Mutassuk meg, hogy B is összefüggő.

3.74. Feladat [4]. Igaz-e, hogy metrikus tér összefüggő részhalmazának a belseje is összefüggő?

3.75. Feladat [9]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza előállítható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítéseként.

3.76. Feladat [8]. Legyenek A és B az X metrikus tér részhalmazai. Mutassuk meg, hogy ha A összefüggő, $A \cap B$ és $A \setminus B$ nem üresek, akkor $A \cap \partial B$ sem üres. Speciálisan, ha X összefüggő, akkor bármely nem üres valódi részhalmazának a határa nem üres.

3.77. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ összefüggő halmazok, amelyeknek a metszete nem üres. Mutassuk meg, hogy $\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ is összefüggő.

3.78. Feladat [6]. Legyen X metrikus tér, $A_k \subset X$, $k = 1, 2, \ldots, n$ összefüggő halmazok, amelyekre $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$, ha $1 \leq k < n$. Mutassuk meg, hogy $\cup_{k=1}^{n} A_k$ is összefüggő.

$*$ **3.79. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy egy X metrikus tér minden x pontjához létezik egy maximális összefüggő halmaz, amely az adott pontot tartalmazza, ezt nevezzük az x pont *összefüggő komponens*ének. Mutassuk meg, hogy a pontok összefüggő komponensei zárt halmazok, és osztályozását alkotják X-nek.

3.80. Lokális tulajdonságok. Akkor mondjuk, hogy egy tulajdonság *lokálisan teljesül*, ha metrikus terünk bármely pontjának bármely környezete tartalmazza olyan környezetét az adott pontnak, amelyen az adott tulajdonság (mint altéren) teljesül. Például egy metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának van olyan környezete, amely kompakt; vegyük észre, hogy ha a pontnak van kompakt környezete, akkor minden zárt gömb, amely ennek része, szintén kompakt, így a pontnak van tetszőlegesen kicsiny kompakt környezete is. Hasonlóan, sok más (de nem minden, például lokális összefüggőség) tulajdonságnál is, az hogy az adott tulajdonság lokálisan teljesül, arra egyszerűsödik, hogy a tér minden pontjának van az adott tulajdonsággal rendelkező környezete.

A kompakt halmazok jelentősége az, hogy a legtöbb lokális tulajdonság átvihető kompakt halmazokra. Valóban, a kompakt halmaz minden pontjához választva egy olyan környezetet, amely az adott tulajdonsággal rendelkezik, az így kapott lefedésből kiválaszthatunk egy véges lefedést. Például lokálisan kompakt térben minden kompakt halmaznak létezik kompakt környezete. Megfordítva, lokálisan kompakt terekben a kompakt halmazokra teljesülő tulajdonságok lokálisan teljesülnek.

$*$ **3.81. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy egy metrikus tér pontosan akkor lokálisan összefüggő, ha a nyílt részhalmazainak az összefüggő komponensei nyíltak.

$\rightarrow$ **3.82. Feladat [7].** Legyen X metrikus tér, F_1, F_2 diszjunkt zárt részhalmazai X-nek. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan V_1, V_2 diszjunkt nyílt részhalmazai X-nek, hogy $F_1 \subset V_1$ és $F_2 \subset V_2$.

→ **3.83. Feladat [7].** Legyen X lokálisan kompakt metrikus tér, $K \subset V \subset X$, K kompakt, V nyílt. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\mathbb{B}_\varepsilon(K)$ kompakt és $K \subset \mathbb{B}_\varepsilon(K) \subset V$.

3.84. Feladat [9]. Mutassuk meg, hogy lokálisan kompakt szeparábilis metrikus térben minden nyílt halmaz megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése.

Megoldás. Válasszunk egy kompakt lezártú nyílt halmazokból álló megszámlálható bázist.

3.85. Uriszon-lemma metrikus terekre. *Legyen X metrikus tér, $K \subset V \subset X$, ahol K zárt, V nyílt. Ekkor létezik olyan $f\colon X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely a K-n 1, és amelyre* $\operatorname{spt} f \subset V$. *Ha X lokálisan kompakt, K pedig kompakt, akkor f választható kompakt tartójúnak.*

Bizonyítás. Legyen

$$g(x) = \frac{d(x, X \setminus V)}{d(x,K) + d(x, X \setminus V)} \quad \text{és} \quad f = \max\{2g - 1, 0\}.$$

Ekkor $\operatorname{spt} f = \overline{\{g > 1/2\}} \subset \{g \geq 1/2\} \subset \{g > 0\} \subset V$. A második esetben legyen W kompakt környezete K-nak, és V helyett $W^\circ \cap V$-re alkalmazzuk az első esetet.

∗ **3.86. Az egység felbontása.** *Legyen X egy metrikus tér, F zárt részhalmaza X-nek, és $V_1, V_2, \dots, V_n$ nyílt részhalmazai X-nek úgy, hogy $F \subset \cup_{k=1}^n V_k$. Ekkor léteznek $h_k\colon X \to [0,1]$ folytonos függvények úgy, hogy*

(1) $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ *minden $x \in F$-re;*

(2) $\operatorname{spt} h_k \subset V_k$, *ha $k = 1, 2, \dots, n$.*

Ha X lokálisan kompakt, F pedig kompakt, akkor a h_k függvények választhatók kompakt tartójúnak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Megmutatjuk, hogy léteznek $A_1, \dots, A_n$ zárt halmazok úgy, hogy $\cup_{k=1}^n A_k = X$ és $A_k \subset V_k$. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$. Ha $n = 2$, legyen $A_i = \{x\colon d(x, X \setminus V_i) \geq d(x, X \setminus V_{3-i})\}$, $i = 1, 2$. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n-1$-re, és legyen $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Mivel $X = (\cup_{k=1}^{n-1} V_k) \cup V_n$, léteznek A és A_n zárt halmazok, amelyekre $A \subset \cup_{k=1}^{n-1} V_k$, $A_n \subset V_n$ és $A \cup A_n = X$. Most $k = 1, 2, \dots, n-1$-re legyen $W_k = V_k \cap A$. Az A zárt altérre alkalmazva az indukciós feltevést, olyan $A_1, \dots, A_{n-1}$ zárt halmazokat kapunk, amelyekre $\cup_{k=1}^n A_k = X$.

Először tegyük fel, hogy $F = X$. Ekkor $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Ha az $A_1, \dots, A_n$ halmazok az előző lépés szerint vannak meghatározva, az Uriszon-lemma szerint léteznek olyan $f_k\colon X \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $f_k(A_k) = 1$ és $\operatorname{spt} f_k \subset V_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Legyen

$$h_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Végül, az általános esetben, legyen $V_0 = X \setminus F$ és alkalmazzuk az előző lépést. Mivel $h_0(F) = 0$,

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1, \quad \text{ha} \quad x \in F.$$

A lokálisan kompakt esetben válasszunk egy V kompakt lezártú nyílt halmazt, amelyre $F \subset V \subset \overline{V} \subset \cup_{k=1}^{n} V_k$ és alkalmazzuk az egység felbontását a $\overline{V}$ tér zárt részhalmazára és $V \cap V_k$ nyílt részhalmazaira, majd a kapott függvényeket terjesszük ki $X \setminus \overline{V}$-ra úgy, hogy ott nullák legyenek.

→ **3.87. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy véges sok metrikus tér metrikus terek szorzata pontosan akkor rendelkezik az alábbi tulajdonságok valamelyikével, ha a szorzat minden tényezője rendelkezik az adott tulajdonsággal: diszkrét, korlátos, szeparábilis, teljes, teljesen korlátos, kompakt, lokálisan kompakt, összefüggő, lokálisan összefüggő.

→ ∗ **3.88. Feladat: Tyihonov tétele metrikus terekre [10].** Legyenek (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots$ metrikus terek, és legyen $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{1/2^i, d_i(x^{(i)}, y^{(i)})\},$$

ha $x, y \in X$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots)$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots)$. Mutassuk meg, hogy (X, d) metrikus tér. Ezt a teret az (X_i, d_i) metrikus terek *szorzat*ának nevezzük. Mutassuk meg, hogy egy $x_n \in X$ sorozat pontosan akkor konvergál az $x \in X$-hez, ha $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ minden i-re. Bizonyítsuk be *Tyihonov tételé*t: ha az X_i terek mindegyike kompakt, akkor X is.

Megoldás. Átlós eljárás.

3.89. Függvényterek, függvénysorozatok. Legyen (Y, d_Y) metrikus tér, X tetszőleges halmaz. Az X-et Y-ba képező függvények Y^X terében két konvergencia játsza a legfontosabb szerepet. Azt mondjuk, hogy az $f_n \colon X \to Y$ függvények sorozata *pontonként konvergál* az $f \colon X \to Y$ függvényhez, ha $f_n(x) \to f(x)$ minden x-re. Ez a konvergencia általában nem származtatható Y^X egy metrikájából vagy eltéréséből.

Ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n \ge N,$$

akkor azt mondjuk, hogy f_n *egyenletesen konvergál* f-hez. Az egyenletes konvergenciából nyilván következik a pontonkénti. Az egyenletes konvergencia eltérésből származtatható:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)), \quad \text{ha} \quad f, g \colon X \to Y$$

könnyen láthatóan eltérés, sőt, $d(f, g) = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = g$, és $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ azzal ekvivalens, hogy f_n egyenletesen konvergál f-hez. (Ha csak korlátos függvényeket tekintünk, akkor d metrika.) Ha X is metrikus tér, akkor ezeket a konvergenciákat gyakran használjuk az X-et Y-ba képező folytonos függvények terén, amelyet $\mathcal{C}(X; Y)$-nal jelölünk, vagy az X-et Y-ba képező korlátos folytonos függvények terén, amelyet $\mathcal{B}(X; Y)$-nal jelölünk.

3.90. Tétel. *Tegyük fel, hogy X metrikus tér, Y pedig teljes metrikus tér, $A \subset X$, $f, f_n \colon A \to Y$, és a torlódási pontja A-nak. Ha f_n egyenletesen konvergál A-n f-hez, és $\lim_{x \to a} f_n(x) = b_n$ létezik minden n-re, akkor a b_n sorozat konvergens, és ha határértéke b, akkor $\lim_{x \to a} f(x) = b$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan N, hogy ha $n, m \geq N$, akkor $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ minden $x \in A$-ra. Vegyünk $x \to a$ határértéket: azt kapjuk, hogy $d_Y(b_n, b_m) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy b_n Cauchy-sorozat, így Y teljessége miatt konvergens; jelölje b a határértékét. Nyilván

$$d_Y(f(x), b) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), b_n) + d_Y(b_n, b).$$

Válasszunk olyan n-et, amelyre egyrészt $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/3$ minden $x \in A$-ra, másrészt $d_Y(b_n, b) \leq \varepsilon/3$. Erre az n-re válasszunk olyan V környezetét a-nak, amelyre $a \neq x \in A \cap V$ esetén $d_Y(f_n(x), b_n) \leq \varepsilon/3$. Ekkor az is teljesül, hogy $d_Y(f(x), b) \leq \varepsilon$.

3.91. Tétel. *Ha X, Y metrikus terek, és az $f_n \colon X \to Y$ folytonos függvények egyenletesen konvergálnak az $f \colon X \to Y$ függvényhez, akkor f folytonos.*

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint az előző tétel.

3.92. Tétel. *Legyen X egy halmaz, Y pedig teljes metrikus tér. Ekkor a függvényterek definíciójánál megadott távolsággal az X-et Y-ba képező korlátos függvények tere teljes metrikus tér. Ha X is metrikus tér, akkor $\mathcal{B}(X; Y)$ is teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Ha f_n Cauchy-sorozat a d metrikára nézve, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy ha $n, m \geq N$, akkor $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$. Ebből minden $x \in X$-re $f_n(x)$ Cauchy-sorozat Y-ban, így konvergens. Jelölje a határértékét $f(x)$. A $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ összefüggésben $m \to \infty$ határértéket véve, azt kapjuk, hogy $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Ez azt mutatja, hogy f korlátos, és f_n egyenletesen konvergál f-hez. Továbbá az előző tételből, ha az f_n-ek folytonosak, akkor f is.

→ **3.93. Feladat [5].** Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^2/(1+x^2)^k$ határértéket, ha $x \in \mathbb{R}$.

→ **3.94. Feladat [5].** Határozzuk meg a $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$ határértéket, ha $x \in \mathbb{R}$.

∗ **3.95. Feladat [14].** Mutassuk meg, hogy ha X kompakt metrikus tér, Y pedig szeparábilis metrikus tér, akkor $\mathcal{C}(X; Y)$ szeparábilis.

Megoldás. Lásd Bourbaki.

3.96. Homeomorfizmus. Izometria létezésénél gyengébb feltétel *homeomorfizmus*, az egyik metrikus teret a másikra kölcsönösen egyértelműen leképező folytonos és folytonos inverzű leképezés létezése. Ha két metrikus tér között létezik homeomorfizmus, akkor *homeomorf terek*ről beszélünk. Könnyű látni, hogy metrikus terek homeomorfizmusa ekvivalenciareláció.

→ **3.97. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ és $]0, 1[$, illetve $\overline{\mathbb{R}}$ és $[0, 1]$ homeomorfak.

→ **3.98. Feladat [9].** Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ és $\mathbb{T}$ terek között nincs két homeomorf.

∗ **3.99. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy teljes metrikus tér bármely nem üres perfekt részhalmaza tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt.

3.100. Topológia. Egy metrikus tér nyílt halmazainak osztályát a tér *topológiá*jának nevezzük. Nagyon sok fogalom csak a tér topológiájától függ, és nem függ attól, hogy mi pontosan a metrika. Az ilyen fogalmakat *topologikus fogalmak*nak nevezzük. Topologikus fogalmak például a környezet, zárt halmaz, érintkezési pont, belső pont, külső pont, határpont, izolált pont, torlódási pont, lezárt, belseje, perfektség, sűrű, szeparábilitás, bázis, sorozat határértéke és sűrűsödési helye, kompaktság, függvény határértéke és folytonossága, összefüggőség, homeomorfizmus, Borel-halmaz, Borel-függvény, stb. Más fogalmakra ez nem áll, például gömbök, átmérő, korlátosság, ε-háló, Lebesgue-szám, egyenletes folytonosság, Cauchy-sorozatok, teljesség, stb.

$*$ **3.101. Metrikák topologikus és egyenletes ekvivalenciája.** Legyen d_1 és d_2 metrika ugyanazon az X halmazon. Ha az (X, d_1) térnek az (X, d_2) térre való identikus leképezése homeomorfizmus, akkor a d_1 és d_2 metrikákat *topologikusan ekvivalens*nek nevezzük. Ekkor nyilván a két térben a topologikus fogalmak egybeesnek. Erősebb megszorítás, ha azt tesszük fel, hogy az identikus leképezés mindkét irányban egyenletesen folytonos; ekkor *egyenletes ekvivalenciá*ról vagy *uniform ekvivalenciá*ról beszélünk, és nem csak a topologikus fogalmak esnek egybe, hanem például a Cauchy-sorozatok is. Természetesen ekvivalens metrikák egyenletesen, és így topologikusan is ekvivalensek.

$\rightarrow$ **3.102. Feladat [7].** Legyen (X, d) metrikus tér, $c > 0$, $d_c = \min\{d, c\}$ és $d' = d/(1+d)$. Mutassuk meg, hogy (X, d') és (X, d_c) metrikus terek, és a két térben ugyanaz a határérték, és ugyanazok a Cauchy-sorozatok, mint az eredeti térben. Adjunk meg más ilyen tulajdonságú metrikákat, amelyekben X korlátos. Mi a helyzet, ha d eltérés?

$\rightarrow$ **3.103. Feladat [7].** Legyenek $d_1, d_2, \ldots$ eltérések, illetve metrikák az X halmazon. Mutassuk meg, hogy $d = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{d_i, 1/2^i\}$ is eltérés, illetve metrika X-en, és $d(x_n, x) \to 0$ pontosan akkor, ha $d_i(x_n, x) \to 0$ minden i-re.

$*$ **3.104. Feladat [8].** Legyen $\varphi\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ egy monoton növekedő függvény, amely szubadditív, azaz $\varphi(x+y) \le \varphi(x)+\varphi(y)$, ha $x, y \in [0, \infty[$, és amelyre $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(x) > 0$, ha $x > 0$. Mutassuk meg, hogy ha d metrika, akkor $\varphi \circ d$ is metrika. Mutassuk meg, hogy ha φ a nullában folytonos, akkor d és $\varphi \circ d$ uniform ekvivalensek. Igaz-e a megfordítás? Mutassuk meg, hogy minden metrika uniform ekvivalens egy korlátos metrikával.

$*$ **3.105. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-en az $(x, y) \mapsto |x^3 - y^3|$ metrika nem uniform ekvivalens a szokásos metrikával, de topologikusan ekvivalens, és a Cauchy-sorozatok is megegyeznek.

$*$ **3.106. Feladat: Alexandrov tétele [14].** Bizonyítsuk be, hogy egy teljes metrikus tér egy részhalmazán pontosan akkor létezik az altér-metrikával topologikusan ekvivalens metrika, amellyel teljes metrikus tér, ha a részhalmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz. (Lásd Oxtoby [120] 12.)

3.107. Baire-tétel. *Teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű.*

A Baire-tétel állításából gyakran csak annyit fogunk felhasználni, hogy a metszet nem üres: néha könnyebb megmutatni, hogy valamiből sok van, mint hogy van egy.

Bizonyítás. Legyen az X teljes metrikus térben V_n sűrű nyílt halmazok egy sorozata. Megmutatjuk, hogy bármely $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$ nyílt gömb esetén $\mathbb{U}_{r_0}(x_0) \cap (\cap_{n=1}^{\infty} V_n)$ nem üres. Az $\mathbb{U}_{r_0}(x_0) \cap V_1$ metszet nyílt és nem üres, mert $\overline{V_1} = X$ miatt $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$-ban van

V_1-beli pont, így tartalmaz egy x_1 középpontú, $0 < r_1 < 1/2$ sugarú zárt gömböt. Most alkalmazzuk ugyanezt a meggondolást $\mathbb{U}_{r_1}(x_1) \cap V_2$-re, stb. Teljes indukcióval olyan x_n és $0 < r_n < 1/2^n$ sorozatot kapunk, amelyre $\mathbb{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \mathbb{U}_{r_n}(x_n) \cap V_{n+1}$. A gömbök középpontjai Cauchy-sorozatot alkotnak, és így a tér teljessége miatt van olyan $x \in X$, amelyre $x_n \to x$. Mivel $x_k \in \mathbb{B}_{r_n}(x_n)$, ha $k \geq n$, x benne van minden $\mathbb{B}_{r_n}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ zárt gömbben, így minden V_n-ben, és $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$-ban is.

∗ **3.108. Következmény.** *Teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz metszete is sűrű.*

∗ **3.109. Feladat: folytonos, sehol sem differenciálható függvény létezése [11].** Legyen X a $\mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tér 1 szerint periodikus függvényekből álló altere, és álljon V_n az X azon f függvényeiből, amelyekre minden $x \in \mathbb{R}$-hez van olyan $y \in \mathbb{R}$, hogy $0 < |x-y| < 1/n$ de $\big|f(x) - f(y)\big|/|x - y| > n$. Mutassuk meg, hogy X teljes metrikus tér, V_n sűrű nyílt halmaz X-ben, és $\cap_{n=1}^{\infty} V_n$ elemei sehol sem differenciálhatóak. (Lásd Losonczi [104], 48. o.)

3.110. Lipschitz-függvények. Egy X metrikus térnek egy Y metrikus térbe való T leképezését Lipschitz-függvénynek nevezzük, ha

$$\mathrm{Lip}(T) = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(T(x), T(y))}{d_X(x, y)}$$

véges. Nyilván $d_Y(T(x), T(y)) \leq \mathrm{Lip}(T) d_X(x, y)$, ha $x, y \in X$ és $\mathrm{Lip}(T)$ a legkisebb ilyen konstans. A Lipschitz-függvények nyilván egyenletesen folytonosak. Ha $\mathrm{Lip}(T) < 1$, akkor T-t *kontrakció*nak nevezzük. Ha T az X halmazt önmagába leképező függvény, akkor T *fixpont*jának azokat a pontokat nevezzük, amelyekre $T(x) = x$.

3.111. Hölder-folytonos függvények. Legyen $0 < \alpha \leq 1$. Egy X metrikus térnek egy Y metrikus térbe való T leképezését Hölder-folytonos függvénynek nevezzük α kitevővel, ha

$$H_\alpha(T) = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(T(x), T(y))}{d_X(x, y)^\alpha}$$

véges. Nyilván $d_Y(T(x), T(y)) \leq H_\alpha(T) d_X(x, y)^\alpha$, ha $x, y \in X$ és $H_\alpha(T)$ a legkisebb ilyen konstans. A Hölder-folytonos függvények nyilván egyenletesen folytonosak. Ha $\alpha = 1$, akkor a Lipschitz-függvényeket kapjuk vissza.

3.112. Banach-féle fixponttétel. *Egy X teljes metrikus tér önmagába való T kontrakciójának pontosan egy x fixpontja van. Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, akkor az $x_{n+1} = T(x_n)$ iterációval adódó sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Bizonyítás. Legyen d a metrika, $D = d(x_0, x_1)$ és $\alpha = \mathrm{Lip}(T)$. Teljes indukcióval

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n D, \quad \text{ha} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Ebből $m > n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n D + \alpha^{n+1} D + \cdots + \alpha^{m-1} D \leq \alpha^n D(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) \\ &= \frac{\alpha^n D}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Mivel $\alpha^n D/(1-\alpha) \to 0$, ha $n \to \infty$, x_n Cauchy-sorozat, amely a teljesség miatt konvergál X egy x eleméhez. Megmutatjuk, hogy x fixpontja T-nek.

$$0 \le d(x, T(x)) \le d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \le d(x, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x),$$

amiből $n \to \infty$ esetén $d(x, T(x)) = 0$ következik. A fixpont egyértelműsége abból következik, hogy ha x és y fixpontok, akkor

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \le \alpha d(x, y).$$

3.113. Megjegyzés. Ha T és S valamely halmaznak önmagába való felcserélhető leképezései, azaz $T \circ S = S \circ T$, továbbá T-nek pontosan egy fixpontja van, akkor T fixpontja fixpontja S-nek is. Valóban, ha x a T fixpontja, akkor $T(S(x)) = S(T(x)) = S(x)$ miatt $S(x)$ is fixpontja T-nek, így $S(x) = x$. A S-nek lehetnek más fixpontjai is, például S lehet az identikus leképezés.

Ebből az egyszerű észrevételből következik, hogy teljes metrikus tér önmagába való T leképezésére, ha $T^n = T \circ \cdots \circ T$ kontrakció valamely n természetes számra, akkor T-nek pontosan egy fixpontja van. Valóban, T felcserélhető T^n-nel, így van fixpontja. Mivel T minden fixpontja T^n-nek is fixpontja, T-nek csak egy fixpontja lehet.

3.114. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy $T(x) = (\cos(x/2) - |x - 1/2|)/2$ kontrakció az $1/2$ valamely környezetében, és keressük meg a fixpontját.

3.115. Feladat [7]. Adjunk példát olyan leképezésre, amely nem kontrakció, de a négyzete már kontrakció.

3.116. Feladat [7]. Adjunk példát olyan $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezésre, amelyre $|T(x) - T(y)| < |x - y|$, ha $x \neq y$, de nincs fixpontja.

Megoldás. $x \mapsto x + 2 - \operatorname{arctg} x$.

3.117. Feladat [8]. Legyen $F(x) = x^3 + x - 1$. Legyen

$$T_1(x) = 1/(1 + x^2), \quad T_2(x) = 1 - x^3, \quad T_3(x) = \sqrt{x}/\sqrt{1 + x^2}.$$

Mutassuk meg, hogy mindhárom esetben az $F(x) = 0$ egyenlet ekvivalens a $T_i(x) = x$ fixpont problémával. Melyik T_i alkalmas iterációra?

3.118. Feladat [9]. Tekintsük az $F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1 + x - 2 - 1)$ függvény. Legyen

$$T_1(x_1, x_2) = \left((1 - x_2)/2, \sqrt{1 - x_1^2}\right), \quad T_2(x_1, x_2) = \left((1 - x_2)/2, \sqrt{1 - x_1^2}\right).$$

Mutassuk meg, hogy a $(-0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_1 az $F(x) = 0$ egyenlet egyik, a $(0{,}9, 0{,}9)$ pontból indítva T_2 a másik megoldásához konvergál. Magyarázzuk meg a konvergenciák sebessége közötti különbséget.

3.119. Feladat [8]. A Banach-féle fixponttétel és bizonyítása jelöléseivel bizonyítsuk be a alábbiakat:

(1) *a priori hibabecslés*: $d(x_n, x) \leq \alpha^n(1-\alpha)^{-1}d(x_0, x_1)$;

(2) *a posteriori hibabecslés*:

$$d(x_{n+1}, x) \leq \alpha(1-\alpha)^{-1}d(x_n, x_{n+1});$$

(3) *konvergenciasebesség*: $d(x_{n+1}, x) \leq \alpha d(x_n, x)$;

(4) az a posteriori becslés élesebb, mint az a priori becslés.

3.120. Feladat: a fixpont folytonos függése a paramétertől [9]. Legyen X teljes metrikus tér, P metrikus tér (a paraméter tér), $\alpha < 1$ és minden $p \in P$-re legyen T_p egy kontrakciója X-nek, úgy, hogy $\mathrm{Lip}(T_p) \leq \alpha$. Tegyük fel, hogy egy rögzített $p_0 \in P$-re, és minden $x \in X$-re $\lim_{p\to p_0} T_p x = T_{p_0} x$. Jelölje x_p a T_p fixpontját. Mutassuk meg, hogy $\lim_{p\to p_0} x_p = x_{p_0}$.

$\rightarrow$ **3.121. Feladat [5].** Legyen (X, d) metrikus tér, A nem üres részhalmaza X-nek. Mutassuk meg, hogy $x \mapsto d(x, A)$ Lipschitz-függvény. Mennyi a legkisebb Lipschitz-konstans?

$*$ **3.122. Fixpont tulajdonság.** Az X metrikus teret *fixpont tulajdonság*únak nevezzük, ha X bármely önmagába való folytonos leképezésének van fixpontja. A fixpont-tulajdonság nyilván topológiai tulajdonság.

$*$ **3.123. Retraktum.** Egy X metrikus tér egy Y részhalmazára azt mondjuk, hogy az X *retraktum*a, ha van olyan folytonos leképezése X-nek Y-ra, amely Y-on az identitás. Az hogy Y retraktuma X-nek, nyilván topológiai tulajdonság. Például egy Hilbert-tér bármely nem üres zárt konvex részhalmaza bármely nála bővebb halmaznak retraktuma: a retrakciót úgy kapjuk, hogy minden ponthoz a hozzá legközelebbi Y-beli pontot rendeljük.

$*$ **3.124. Tétel.** *Ha az X metrikus tér fixpont tulajdonságú és Y retraktuma X-nek, akkor Y is fixpont-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen $r\colon X \to Y$ egy retrakció. Ha T folyonos leképezése Y-nak önmagába, akkor $T \circ r$ folytonos leképezése X-nek Y-ba. Mivel X fixpont tulajdonságú, és $Y \subset X$, van x fixpont, amelyre $T(r(x)) = x$. Nyilván $x \in Y$, és így $r(x) = x$, amiből $T(x) = x$.

$*$ **3.125. Homotópia, összehúzhatóság.** Az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező f_0, f_1 folytonos leképezéseket *egymásba folytonosan átdeformálható*aknak, idegen szóval *homotóp*oknak nevezzük, ha van olyan $h\colon X \times [0,1] \to Y$ folytonos leképezés, a *homotópia*, amelyre $h(x,0) = f_0(x)$ és $h(x,1) = f_1(x)$ minden $x \in X$-re. (A vektoranalízisben és a komplex függvénytanban használni fogjuk zárt görbék homotópiáját; ez a homotópia általános fogalmának speciális esete, mivel egy zárt görbe $\mathbb{T}$ folytonos leképezésének tekinthető.) Általánosabban, definiálhatjuk a *relatív homotópiá*t: legyen $A \subset X$; az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező f_0, f_1 folytonos leképezéseket *A-homotóp*oknak nevezzük, ha van olyan homotópia, amely A-n a leképezést fixen hagyja, azaz van olyan $h\colon X \times [0,1] \to Y$ homotópia, amelyre $h(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$ minden $x \in A$-ra és $0 \leq t \leq 1$-re. Az X-et Y-ba képező folytonos függvények A-homotópiája (így homotópiája is, amely az $A = \emptyset$ speciális eset) nyilván ekvivalencia-reláció, tehát

beszélhetünk a függvények homotópia-osztályairól. Azt is könnyű látni, hogy ha f_0 és f_1 A-homotópok, Z is metrikus tér, $B \subset Y$, $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ B-homotópok, $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, akkor $g_0 \circ f_0$ és $g_1 \circ f_1$ A-homotópok. Függvények homotópiája nyilván topologikus fogalom.

Az X metrikus teret (az X egy x_0 pontjára) *összehúzható*nak nevezzük, ha az identikus leképezése homotóp a konstans $f(x) \equiv x_0$ függvénnyel. Az összehúzhatóság nyilván topológiai tulajdonság.

∗ **3.126. Borsuk tétele.** *Legyen C zárt részhalmaza az X metrikus térnek, f_0 és f_1 homotóp leképezései F-nek $\mathbb{S}^n$-be. Ha f_0 kiterjeszthető az X egy folytonos F_0 leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be, akkor f_1 is kiterjeszthető az X egy F_1 folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be úgy hogy F_0, F_1 homotópok.*

Bizonyítás. Legyen h egy homotópiája f_0-nak f_1-be, és legyen

$$C' = \{(x,t) \in X \times [0,1] \colon\ t = 0 \text{ vagy } x \in C\}.$$

A C' halmaz zárt, és a $H'(x,t) = F(x)$, ha $t = 0$ és $H'(x,t) = h(x,t)$, ha $x \in C$ leképezése C'-nek $\mathbb{S}^n$-be folytonos. Megmutatjuk, hogy ez a leképezés kiterjeszthető C' egy nyílt U környezetére; a kiterjesztést jelölje H''. Valóban, $\mathbb{S}^n$ helyettesíthető a $[-1,1]^{n+1}$ tér vele homeomorf határával, és Tietze kiterjesztési tétele szerint ez a leképezés (koordinátánként) kiterjeszthető az egész tér egy $[-1,1]^{n+1}$-be való folytonos leképezésévé. A C' valamely környezetén ez a leképezés nem veszi fel értékként az origót, és $[-1,1]^{n+1}$ határa retraktuma $[-1,1]^{n+1}$ origótól különböző pontjai halmazának. Megmutatjuk, hogy U tartalmaz egy $V \times [0,1]$ alakú halmazt, ahol V egy, a C-t tartalmazó nyílt halmaz. Valóban, minden $x \in C$-re a $\{x\} \times [0,1]$ kompakt halmaz távolsága U komplementerétől pozitív, így van olyan V_x nyílt környezete x-nek, amelyre $V_x \times [0,1] \subset U$; legyen $V = \cup\{V_x \colon x \in C\}$. Végül az Uriszon-lemma (vagy a metrikus terekre vonatkozó változata) szerint van olyan $p \colon X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely a C-n 1, a V komplementerén pedig nulla. Legyen $H(x,t) = H''(x, tp(x))$ a keresett homotópia és $F_1(x) = H(x,1)$ a keresett kiterjesztése f_1-nek.

∗ **3.127. Tétel.** *Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *$\mathbb{S}^{n-1}$ nem összehúzható;*

(2) *$\mathbb{S}^{n-1}$ nem retraktuma $\mathbb{B}^n$-nek;*

(3) *$\mathbb{B}^n$ fixpont tulajdonságú (Brouwer-féle fixponttétel);*

(4) *az $\mathbb{R}^n$ bármely nem üres X kompakt konvex részhalmaza fixpont tulajdonságú;*

(5) *ha $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $r_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ és a*

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \colon |x_j - a_j| \le r_j\}$$

tégla

$$T_j^{\pm} = \{(x_1, \dots, x_n) \in T \colon x_j - a_j = \pm r_j\}$$

lapjain valamely $f = (f_1, \dots, f_n) \colon T \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényre $\pm f_j \ge 0$, akkor a függvény a T téglán felveszi az origót értékként (Miranda közbenső érték tétele).

Mindegyik állítás igaz, és egyiket sem könnyű bebizonyítani. Mi a variációszámítás segítségével fogjuk majd (2)-t bizonyítani. Egy elemi, de nem egyszerű bizonyítás található (1)-re Hurewicz és Wallman [70] könyvében. Az (5) állítás egyenletrendszer megoldására használható.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha X összehúzható, akkor X bármely Y retraktuma is összehúzható: valóban, ha r a retrakciója X-nek Y-ra, és h összehúzza X-et x_0-ra, akkor $r\circ h$ összehúzza Y-t $r(x_0)$-ra. Mivel $\mathbb{B}^n$ nyilván összehúzható, de (1) szerint $\mathbb{S}^{n-1}$ nem, $\mathbb{S}^{n-1}$ nem lehet $\mathbb{B}^n$ retraktuma, azaz (1)-ből következik (2). A megfordítás Borsuk tételéből adódik: ha $\mathbb{S}^{n-1}$ összehúzható lenne, akkor $\mathbb{S}^{n-1}$ identikus leképezését kiterjeszthetnénk $\mathbb{B}^n$-nek egy folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be, azaz (2) nem teljesülne.

A Brouwer-féle fixponttételt (2)-ből bizonyítjuk. Ha létezne olyan $T\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ leképezés, amelynek nincs fixpontja, akkor tudnánk konstruálni $\mathbb{B}^n$-nek egy retrakcióját $\mathbb{S}^{n-1}$-re: minden $x \in \mathbb{B}^n$-re hosszabbítsuk meg a $T(x)$-ből x-be vezető szakaszt amíg metszi $\mathbb{S}^{n-1}$-et. Jelöljük ezt a pontot $r(x)$-el. Az r egy retrakciója $\mathbb{B}^n$-nek $\mathbb{S}^{n-1}$-re. (4) bizonyításához, ha R elég nagy, akkor az R sugarú, origó középpontú gömb tartalmazza X-et. Mivel X retraktuma $\mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^n$-nek, X is fixpont tulajdonságú. A megfordítás abból következik, hogy ha $\mathbb{S}^{n-1}$ retraktuma lenne $\mathbb{B}^n$-nek, akkor fixpont tulajdonságú lenne, de nem az: az $x \mapsto -x$ leképezésnek nincs fixpontja.

A Brouwer-féle fixponttételből következik (5): Először tegyük fel, hogy $\pm f_j > 0$ a $T_j^{\pm}$ lapokon ($j = 1, \dots, n$), és legyen $F_j(x) = x_j - \varepsilon_j f_j(x)$. Ha az $\varepsilon_j > 0$ számok elég kicsik, az F leképezés T-t T-be képezi, így van fixpontja, amely zérushelye f-nek. Egyébként térjünk át az $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(x-a)$ leképezésre. Ennek van egy x_ε zérushelye T-ben, és a zérushelyekből kiválasztható egy konvergens sorozat. A megfordításhoz legyen $F\colon T \to T$ egy folytonos leképezés, és $f(x) = x - F(x)$; (5) alkalmazható f-re, és f zérushelye F egy fixpontja.

∗ **3.128. Megjegyzés.** A Brouwer-féle fixponttételnek számos alkalmazása van: egyrészt más fixponttételek bizonyíthatók belőle, másrészt olyan egyenlőtlenségek, amelyeknek fontos játékelméleti (például a *Nash-féle egyensúlypont* létezése, *Neumann minimax tétele*) és közgazdasági alkalmazásaik vannak (a matematikai közgazdaságtan fő tétele), de az is belátható segítségével, hogy $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$ nem homeomorfak, ha $m \neq n$. Az alábbi tételt később használjuk majd.

∗ **3.129. Vektormező zérushelye.** *Legyen $g\colon \mathbb{B}_R(0) \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, ahol $\mathbb{R}^n$-et egy tetszőleges normával és a szokásos belső szorzattal tekintjük, $\mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Ha minden $x \in \mathbb{S}_R(0)$-ra $\langle g(x), x\rangle \geq 0$, akkor a $g(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $\mathbb{B}_R(0)$-ban.*

Bizonyítás. Indirekt: Egyébként $f(x) = -Rg(x)/\|g(x)\|$ folytonos leképezése lenne $\mathbb{B}_R(0)$-nak önmagába, amelynek van egy x fixpontja. Erre $\|x\| = R$, de

$$\langle g(x), x\rangle = -\frac{\|g(x)\|}{R}\langle f(x), x\rangle = -\frac{\|g(x)\|}{R}\langle x, x\rangle < 0.$$

∗ **3.130. Egyenletek megoldása és fixponttételek.** Fixponttételek felhasználhatók lineáris és nemlineáris, skalár vagy vektor egyenletek megolhatóságának bizonyítására, és elsősorban a Banach-féle fixponttétel az egyenletek megoldására is. Az alábbiakban

vázoljuk az alapgondolatot. A különböző fixponttételek és az alkalmazásokkal való kapcsolatuk részletes tárgyalása sok hivatkozással megtalálható Zeidler [179] könyvében, I. kötet.

Legyen $F\colon X \to X$ egy függvény, és foglalkozzunk az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával. Az egyenletet kivonva a triviális $x = x$ azonosságból, az ekvivalens $x = T(x)$ fixpontproblémához jutunk, ahol $T(x) = x - F(x)$. Sokszor érdemesebb az egyenletet előbb egy ω konstanssal szorozni, így $T(x) = x - \omega F(x)$, ez a *lineáris relaxáció*. Ha előbb az egyenletre egy kölcsönösen egyértelmű, könnyen számítható G függvényt alkalmazunk, amelyre $G \circ F$ közel van az identitáshoz, és amelyre $G(0) = 0$, akkor $T(x) = x - G(F(x))$, ez a *nemlineáris relaxáció*. Speciálisan, ha $G = F'(x_0)^{-1}$ valamely rögzített x_0-ra, akkor a *módosított Newton-módszer*t kapjuk. Ha G az x-től is függ, $G(x)(y) = F'(x)^{-1}(y)$, akkor a *Newton-módszer*t kapjuk. Ha előbb az $x = x$ azonosságra alkalmazunk egy kölcsönösen egyértelmű H függvényt, amely közel van F-hez, és az inverze könnyen számítható, akkor $T(x) = H^{-1}(H(x) - F(x))$, ez a *megosztás módszere*. Ezt a módszert a relaxációval kombinálva, $T(x) = H^{-1}\Big(H(x) - G(F(x))\Big)$.

∗ **3.131. Aitken Δ^2-módszere.** A Runge-szabály szerint a hiba viselkedésének ismerete felhasználható jobb közelítés előállítására. Használjuk fel ezt az elvet iteráció konvergenciájának gyorsítására. Ha az x pontos értéket közelítő x_n skalár iterációs sorozatra feltehető, hogy jó közelítéssel $x_n \approx x + cq^n$, ami elsőrendben konvergáló eljárások esetén gyakran előfordul, akkor az

$$x_n \approx x + cq^n, \quad x_{n+1} \approx x + cq^{n+1}, \quad x_{n+2} \approx x + cq^{n+2}$$

közelítésekből a $\Delta = \Delta_1$ differenciaoperátorral

$$\Delta x_n \approx cq^n(q-1), \quad \Delta x_{n+1} \approx cq^{n+1}(q-1), \quad \Delta^2 x_n \approx cq^n(q-1)^2,$$

így $\Delta x_{n+1}/\Delta x_n \approx q$, továbbá $(\Delta x_n)^2/\Delta^2 x_n \approx cq^n$, amiből

$$x \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

ez *Aitken Δ^2-módszere*. Ha két iterációs lépés után mindig alkalmazzuk ezt a gyorsítást egy jobb közelítés előállítására, az *Aitken–Steffensen-iteráció*hoz jutunk. Ez akkor is konvergálhat, ha az eredeti iterácó divergál.

∗ **3.132. Feladat [8].** Az $x_{n+1} = \cos x_n$, $x_0 = 0$ iteráció során hasonlítsuk össze az x_{n+2} értékek hibáját az x_n, x_{n+1}, x_{n+2} értékekből az Aitken-féle Δ^2-eljárással kapott értékek hibájával.

∗ **3.133. Feladat [7].** Próbáljuk ki, hogy az $x_{n+1} = 2/x_n$, $x_0 = 1$ iteráció divergens, de a megfelelő Aitken–Steffensen-iteráció konvergens.

∗ **3.134. Feladat [11].** Az Aitken-féle Δ^2-eljárást gyakran alkalmazzák konvergencia gyorsításra vektoriteráció esetén is, koordinátánként. Magyarázzuk meg, hogy ez miért hatásos bizonyos esetekben.

∗ **3.135. Feladat: metrikus tér faktortere [10].** Legyen (X,d) metrikus tér, $\sim$ egy ekvivalenciareláció, $x\in X$ osztályát jelölje $\tilde{x}$, az ekvivalenciaosztályok halmazát $\tilde{X}$. Ezen a halmazon egy eltérést definiálunk, az ekvivalens elemek „összeragasztásával”: Legyen $d'(u,v)=d(u,v)$, ha u,v nem ekvivalensek és nulla, ha ekvivalensek, és legyen

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} d'(z_{i-1},z_i)\colon n\in\mathbb{N}, z_0=x, z_n=y\}.$$

Mutassuk meg, hogy $\tilde{d}$ eltérés $\tilde{X}$-on, amelyre $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})\le d(x,y)$. Ha $\tilde{d}$ metrika, akkor azt mondjuk, hogy $(\tilde{X},\tilde{d})$ az (X,d) *metrikus tér faktortere az $\sim$ ekvivalenciareláció szerint.* Mutassuk meg, hogy ekkor az ekvivalenciaosztályok zártak. Megjegyezzük, hogy néha érdemes más metrikára áttérni a faktortér képzése előtt. Mutassuk meg, hogy ha d_1 és d_2 két metrika X-en, amelyekre valamely c konstanssal $d_1\ge cd_2$, akkor $\tilde{d_1}\ge c\tilde{d_2}$.

∗ **3.136. Feladat: sündisznó tér [8].** Legyen X tetszőleges halmaz a diszkrét metrika kétszeresével, és az $X\times[0,1]$ szorzattér $(x,t)\ne(y,s)$ elemei legyenek ekvivalensek, ha $t=s=0$. Határozzuk meg a faktormetrikát. A faktortér a *sündisznó tér.*

∗ **3.137. Feladat: metrikus tér kúpja [8].** Legyen (X,d) metrikus tér. Az $X\times[0,1]$ szorzattér $(x,t)\ne(y,s)$ elemei legyenek ekvivalensek, ha $t=s=0$. Határozzuk meg a faktormetrikát. A faktortér az X *metrikus tér kúpja.*

∗ **3.138. Feladat [10].** Legyen $\mathbb{B}^n$ két különböző pontja ekvivalens, ha a gömb határán vannak. Mutassuk meg, hogy a faktortér homeomorf $\mathbb{S}^n$-nel.

∗ **3.139. Feladat [10].** A Cantor-halmaz különböző elemei legyenek ekvivalensek, ha a komplementer ugyanazon intervallumának végpontjai. Mutassuk meg, hogy nem kapunk faktormetrikát. Mutassuk meg, hogy ugyanez a konstrukció a pozitív mértékű Cantor-halmaznál metrikát eredményez, és a faktortér izometrikus egy intervallummal.

∗ **3.140. Feladat: pályaterek [10].** Legyen X metrikus tér, G az X önmagára való izometriáinak egy csoportja. Az $x\sim y$, ha $y=g(x)$ valamely $g\in G$-re összefüggés egy ekvivalenciareláció; egy adott $x\in X$-el ekvivalens elemek alkotják az x elem *pályáját.* Az $\tilde{X}$ faktorteret szokás X/G-vel is jelölni, és *pályatér*nek nevezni. Mutassuk meg, hogy minden $x,y\in X$-re

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\inf\{d(x',y')\colon x'\in\tilde{x}, y'\in\tilde{y}\}=\inf\{d(x,y')\colon y'\in\tilde{y}\}.$$

Mutassuk meg, hogy ha a pályák zártak, akkor $\tilde{d}$ metrika.

Megoldás. A $\le$ mindkét egyenlőtlenségnél nyilvánvaló, így elég megmutatni, hogy

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})\ge\inf\{d(x,y')\colon y'\in\tilde{y}\}.$$

Egy tetszőleges $\sum_{i=1}^{n} d'(z_{i-1},z_i)$, $z_0=x$, $z_n=y$ összegre fogjuk megmutatni, hogy nem kisebb, mint a jobb oldal. Ha $z_{i-1}\sim z_i$, válasszunk $g_i\in G$-t, amelyre $g_i(z_i)=z_{i-1}$, egyébként legyen g_i az egységelem. Legyen $z'_0=z_0=x$ és $z'_i=(g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_{i-1}\circ g_i)(z_i)$, $y'=z'_n$. Ekkor $d(z'_{i-1},z'_i)=d'(z_{i-1},z_i)$ minden i-re; valóban, ha $z_{i-1}\sim z_i$, akkor $z_{i-1}=g_i(z_i)$, így $z'_i=z'_{i-1}$, egyébként pedig $g=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_{i-1}$ jelöléssel $z'_{i-1}=g(z_{i-1})$, $z'_i=g(z_i)$. Ebből következik az első állítás. A második állítás következik az elsőből.

∗ **3.141. Feladat: projektív terek [10].** Tekintsük $\mathbb{S}^n$-et a $G = \{x \mapsto x, x \mapsto -x\}$ izometriákkal. A megfelelő pályatér a $\mathbb{P}^n$ n-dimenziós *projektív tér*. Határozzuk meg a metrikáját.

∗ **3.142. Feladat: egységkör [8].** Legyen G a számegyenes $f_z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_z(x) = x + z$, $z \in \mathbb{Z}$ alakú izometriáinak csoportja. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}/G$ pályatér megegyezik az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ faktorcsoporttal, és mutassuk meg, hogy hasonló a szögmetrikával tekintett komplex egységkörhöz. Állítsuk elő $[0, 1]$ faktortereként is.

∗ **3.143. Feladat: henger [8].** Legyen G a sík

$$f_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_z(x_1, x_2) = (x_1 + z, x_2), \quad z \in \mathbb{Z}$$

alakú izometriáinak csoportja. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^2/G$ pályatér megegyezik az $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \{0\})$ faktorcsoporttal, és mutassuk meg, hogy homeomorf egy hengerfelülettel. Állítsunk elő homeomorf teret $\mathbb{R} \times [0, 1]$ illetve $]0, 1[\times [0, 1]$ faktortereként is.

∗ **3.144. Feladat: tórusz [8].** Legyen G a sík

$$f_{z_1,z_2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_{z_1,z_2}(x_1, x_2) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

alakú izometriáinak csoportja. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^2/G$ pályatér megegyezik az $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ faktorcsoporttal. Állítsunk elő izometrikus teret $[0, 1] \times [0, 1]$ faktortereként. Adjunk meg homeomorf alteret $\mathbb{R}^3$-ban.

∗ **3.145. Feladat: Möbius-szalag [8].** Legyen G a sík

$$f_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_z(x_1, x_2) = (x_1 + z, (-1)^z x_2), \quad z \in \mathbb{Z}$$

alakú izometriáinak csoportja. Állítsunk elő a pályatérrel homeomorf teret $\mathbb{R} \times [0, 1]$ illetve $]0, 1[\times [0, 1]$ faktortereként is. Adjunk meg homeomorf alteret $\mathbb{R}^3$-ban.

∗ **3.146. Feladat: Klein-féle kancsó [14].** Legyen G a sík $f_{z_1,z_2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_{z_1,z_2}(x_1, x_2) = (x_1 + z_1, (-1)^{z_2} x_2 + z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ alakú izometriáinak csoportja. Állítsunk elő izometrikus teret $[0, 1] \times [0, 1]$ faktortereként. Van-e homeomorf altér $\mathbb{R}^3$-ban?

∗ **3.147. Általános topológia.** A topológiával kapcsolatos észrevételek szerint nagyon sok fogalom a nyílt halmazok segítségével definiálható és vizsgálható. Ez az észrevétel vezet a topologikus tér fogalmához: Az $(X, \mathcal{O})$ párt *topologikus tér*nek, $\mathcal{O}$-t *topológiá*nak nevezzük, ha X egy halmaz, $\mathcal{O}$ az X részhalmazainak egy rendszere, amely tartalmazza X-et, és nem vezet ki belőle a véges metszet és a tetszőleges unió képzése. Az $\mathcal{O}$ elemei a tér *nyílt halmaz*ai. Itt csak érintjük a topológiát, nem tárgyaljuk rendszeresen. Például ha $\mathcal{O}$ az X összes részhalmazaiból áll, akkor X *diszkrét topológiá*járól beszélünk. A topologikus fogalmak minden topologikus térben definiálva vannak. Minden (X, d) metrikus tér topologikus tér is, ha a nyílt halmazokat a szokásos módon definiáljuk. A topologikus terek izomorfizmusai a homeomorfizmusok.

Ha $\mathcal{O}_1$ és $\mathcal{O}_2$ topológiák az X halmazon, akkor $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{O}_1$ *gyengébb*, mint $\mathcal{O}_2$, illetve, hogy $\mathcal{O}_2$ *erősebb*, mint $\mathcal{O}_1$. Mivel az X-en vett topológiák

tetszőleges rendszerének a metszete is topológia, az X részhalmazainak akármilyen $\mathcal{H}$ rendszeréhez a $\mathcal{H}$-t tartalmazó topológiák metszete topológia, amelyet a $\mathcal{H}$ által *generált topológiá*nak nevezünk; ez a leggyengébb topológia, amelyre $\mathcal{H}$ elemei nyíltak. Például egy bázis vagy egy szubbázis generálja a topológiát. Persze, nem akármilyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer bázisa, illetve szubbázisa az általa generált topológiának: könnyű látni, hogy egy halmazrendszer pontosan akkor szubbázisa az általa generált topológiának, ha lefedés, és pontosan akkor bázisa az általa generált topológiának, ha lefedés és $U, V \in \mathcal{H}$, $x \in U \cap V$ esetén van olyan $W \in \mathcal{H}$, hogy $x \in W \subset U \cap V$. Legyen Y_i, $i \in I$ topologikus terek egy családja, $\mathcal{B}_i$ a bázisa, $\mathcal{S}_i$ pedig a szubbázisa az Y_i topológiájának. Ha $f_i\colon X \to Y_i$, $i \in I$ függvények egy családja, akkor könnyű látni, hogy a leggyengébb topológiának X-en, amelyre minden f_i folytonos, az $f_i^{-1}(S)$, $i \in I$, $S \in \mathcal{S}_i$ halmazok egy szubbázisát, a $\cap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(B_i)$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, $B_i \in \mathcal{B}_i$ halmazok pedig bázisát alkotják.

Topológiát megadhatunk a zárt halmazokkal is, hiszen a nyílt halmazok ezek komplementerei; természetesen a zárt halmazok rendszeréből nem vezethet ki a tetszőleges metszet és a véges unióképzés, valamint tartalmaznia kell az üres halmazt. Az X összes részhalmazainak rendszerét önmagába képező $A \mapsto A^\circ$ „belseje-képzéssel" is megadhatjuk a topológiát, amelyre $X^\circ = X$ és $A^\circ \subset A$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ és $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, ha $A, B \subset X$; nem nehéz megmutatni, hogy ez a négy tulajdonság elegendő ahhoz, hogy a leképezés fixpontjai egy topológia nyílt halmazait alkossák. Hasonlóan, az X összes részhalmazainak rendszerét önmagába képező $A \mapsto \overline{A}$ „lezárási operátorral" is megadhatjuk a topológiát, amelyre $\overline{\emptyset} = \emptyset$ és $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, ha $A, B \subset X$; nem nehéz megmutatni, hogy ez a négy tulajdonság elegendő ahhoz, hogy a leképezés fixpontjai egy topologikus tér zárt halmazait alkossák.

A topologikus terek fogalma sok szempontból természetesebb és kényelmesebben használható, mint a metrikus terek fogalma. Az $(X, \mathcal{O})$ topologikus tér bármely Y részhalmaza is topologikus tér, az eredeti tér *altere* az $\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$ *altér-topológiá*val. Páronként diszjunkt $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topologikus terek *összege* definiálható az $X = \cup_{i \in I} X_i$ halmazt ellátva az $\cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ (bázis) által generált $\mathcal{O}$ toplógiával. Akárhány X_i, $i \in I$ topologikus tér szorzata definiálható, mint a $\prod_{i \in I} X_i$ szorzathalmaz, az összes olyan topológiák metszetével topologizálva, amelyekre az összes $p_i\colon x \mapsto x_i$, $i \in I$ projekciók folytonosak. Ha X topologikus tér, az X^I szorzattopológiájából az $x\colon I \to X$ függvények pontonkénti konvergenciája származik. (Még ha X metrikus tér is, általában akkor sem származtatható ez a konvergencia metrikából vagy eltérésből.) Különösen fontosak a $[0,1]^I$ *Tyihonov-téglá*k. Legyen X topologikus tér és $\sim$ egy ekvivalenciareláció X-en. Az $X/\!\sim$ *topologikus faktortér* alatt az ekvivalenciaosztályok $\tilde{X}$ halmazát értjük, azokat az $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmazokat tekintve nyíltnak, amelyekre $\cup \tilde{U}$ nyílt X-ben. Nyilván az $x \mapsto \tilde{x}$ természetes leképezés folytonos. A kompaktság nyilván „öröklődik" a zárt alterekre, a véges összegekre és a faktorterekre (mert kompakt tér folytonos képe kompakt). Nevezetes tény, hogy a szorzatra is: *Tyihonov tétele* szerint kompakt terek szorzata kompakt; ezt külön bizonyítjuk. A lokális kompaktság nyilván „öröklődik" a nyílt és a zárt alterekre, így a nyílt és zárt halmaz metszeteként előálló alterekre is, a tetszőleges összegre és a véges szorzatra.

A topologikus terek fogalma sok célra túl általános. Például nem feltétlenül léteznek bármely két különböző ponthoz őket tartalmazó, diszjunkt, nyílt halmazok. (Legyen $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$; az így kapott tér az *indiszkrét tér*.) A leggyengébb feltétel, amit használni szokás, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely valamelyiket tartalmazza, a másikat meg nem. Az ennek a feltételnek eleget tévő tereket T_0-*ter*eknek

nevezzük; a jelölés a német „trennen” szóból ered. (Például $\{0,1\}$ az $\mathcal{O}=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ topológiával T_0-tér; ezt a teret *összefüggő pontpár*nak hívják.) Erősebb feltétel, hogy két különböző ponthoz mindig létezik olyan nyílt halmaz, amely az elsőt tartalmazza, a másodikat nem. Az ilyen tereket T_1-*tér*nek hívják, és a feltétel könnyen láthatóan azzal ekvivalens, hogy az egyelemű halmazok zártak. (Az összefüggő pontpár nem T_1-tér.) Ha azt követeljük meg, hogy különböző pontok nyílt halmazzal szétválaszthatók legyenek, azaz létezzenek diszjunkt nyílt halmazok, amelyek közül az egyik az egyik, a másik a másik pontot tartalmazza, akkor a T_2-*tér* vagy *Hausdorff-tér* fogalmához jutunk. (Bármely végtelen halmaz a véges részhalmazokkal, mint zárt halmazokkal T_1-tér, de nem T_2-tér.) Könnyen látható, hogy Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt. Ezt felhasználva bármilyen $(X,\mathcal{O})$ Hausdorff-térről belátható, hogy homeomorf egy kompakt Hausdorff-tér egy alterével: feltehetjük, hogy $\infty\notin X$, legyen $X_\infty=X\cup\{\infty\}$ az X *egy pont kompaktifikált*ja az X-beli nyílt halmazok és az X-beli kompakt halmazok X_∞-beli komplementereinek rendszerével topologizálva. Könnyű látni, hogy az egy pont kompaktifikált pontosan akkor lesz Hausdorff-tér, ha X lokálisan kompakt.

A T_3 feltétel azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik a pontot, a másik a zárt halmazt tartalmazza (ami nyilván ekvivalens azzal, hogy ha U nyílt, $x\in U$, akkor van olyan V nyílt halmaz, amelyre $x\in V\subset\overline{V}\subset U$), a T_4 feltétel pedig azt, hogy diszjunkt zárt E, F halmazok nyílt halmazokkal szétválaszthatók, azaz léteznek olyan diszjunkt nyílt halmazok, hogy az egyik az egyik, a másik a másik zárt halmazt tartalmazza (ami nyilván ekvivalens azzal, hogy ha F zárt, U nyílt, $F\subset U$, akkor van olyan V nyílt halmaz, amelyre $F\subset V\subset\overline{V}\subset U$). Például metrikus tér T_4, mert a $\{x\colon d(x,E)<d(x,F)\}$ és $\{x\colon d(x,E)>d(x,F)\}$ nyílt halmazok szétválasztják E-t és F-et. A T_π feltétel bizonyos értelemben a T_3 és T_4 feltétel között fekszik, és azt köti ki, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos f függvény, amely $[0,1]$-be képez, és a zárt halmazon 0, a pontban pedig 1. Nevezetes tény az *Uriszon-lemma*, (külön bizonyítjuk), mely szerint T_4 térben bármely két diszjunkt zárt halmaz folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz van olyan, az egész téren értelmezett folytonos függvény, amely $[0,1]$-be képez, és az egyik zárt halmazon 0, a másikon pedig 1, így további axiómaként ezt nem érdemes felvenni. A T_π feltételből következik T_3 mert az $f^{-1}[0,1/2[$ és $f^{-1}]1/2,1]$ nyílt halmazok szétválasztják a zárt halmazt és a pontot, de a kételemű indiszkrét tér mutatja, hogy sem T_4-ből, sem T_π-ből nem következik még T_0 sem, az összefüggő pontpár pedig, hogy T_4-ből nem következik T_3. Ezért leggyakrabban ezen feltételek kombinációja használatos: a T_3 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket *reguláris*nak, a T_π és T_1 feltételnek eleget tévő tereket *teljesen reguláris*nak vagy *Tyihonov-tér*nek, a T_4 és T_1 feltételeknek eleget tévő tereket pedig *normális*nak nevezzük. A fentiek szerint normális tér teljesen reguláris, teljesen reguláris tér reguláris, és reguláris tér nyilván Hausdorff-tér. Azt sem nehéz belátni, hogy kompakt Hausdorff-tér normális, és ezt felhasználva adódik hogy lokálisan kompakt Hausdorff-tér teljesen reguláris, sőt, bármely kompakt halmaz elválasztható folytonos függvénnyel egy tőle diszjunkt zárt halmaztól. Megjegyezzük, hogy ha $Z=\{1/n\colon 0\neq n\in\mathbb{Z}\}$, és $\mathbb{R}$-en azt a topológiát tekinjük, amelynek a $]a,b[$, $a,b\in\mathbb{Q}$ és vagy $a<b\leq 0$ vagy $0\leq a<b$ valamint a $]a,b[\setminus Z$, $a,b\in\mathbb{Q}$ és $a<0<b$ halmazok alkotják egy bázisát, akkor Hausdorff-teret kapunk, de ebben a térben a Z zárt halmaz és a 0 pont nem választhatók el nyílt halmazokkal. Az is megmutatható, hogy van

olyan reguláris tér, amely nem teljesen reguláris, de a konstrukció bonyolult (lásd R. Engelking: Outline of general topology, North-Holland, Amsterdam, 1968] Ch. 2, Example 4.4). Végül az egyik feladatból következni fog, hogy van olyan teljesen reguláris tér, amely nem normális.

Nem nehéz belátni, hogy a T_i, $i \leq \pi$ tulajdonságok „öröklődnek" alterekre, a T_4 tulajdonság zárt alterekre; terek összege pontosan akkor rendelkezik egy T_i, $i \leq 4$ tulajdonsággal, ha mindegyik összeadandó rendelkezik az adott tulajdonsággal; T_i, $i \leq \pi$ tulajdonságú terek szorzata is rendelkezik az adott tulajdonsággal, és ha nem üres terek szorzata rendelkezik egy T_i, $i \leq 4$ tulajdonsággal, akkor minden tényezője is.

A sorozatok nem megfelelőek tetszőleges topologikus terek vizsgálatához. Lehet a sorozat fogalmát általánosítani, vagy szűrőket használni: Egy tetszőleges halmazban egy *szűrő* a halmaz részhalmazainak egy olyan rendszere, amely nem tartalmazza az üres halmazt, zárt a halmazbővítésre és a véges metszetképzésre. Például egy topologikus térben egy adott pont környezetei szűrőt alkotnak. (A pontok környezetszűrőinek megadása meghatározza a topológiát; persze a környezetszűrőket nem adhatjuk meg tetszőlegesen.) Egy szűrőt meghatároz egy olyan részrendszere, amely bármely két eleméhez tartalmaz olyan elemet, amely azok metszetében benne van. Egy szűrőnek egy ilyen részrendszerét *szűrőbázis*nak nevezzük. Egy pont környezetei szűrőjének egy szűrőbázisát a pont *környezetbázis*ának nevezzük. Például a pont összes nyílt környezetei, vagy a tér egy bázisának azok az elemei, amelyek tartalmazzák az adott pontot, környezetbázist alkotnak. Míg metrikus térben az adott középpontú $1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$ sugarú nyílt (vagy zárt) gömbök az adott pont egy megszámlálható környezetbázisát alkotják, tetszőleges topologikus térben nincs feltétlenül megszámlálható környezetbázis: elsősorban ez okozza a sorozatkonvergencia elégtelenségét. Helyette szűrők konvergenciáját használhatjuk: egy szűrő konvergál egy adott ponthoz, ha annak minden környezete benne van a szűrőben.

Mint látjuk, a topologikus terek vizsgálatánál számos új fogalmat kell bevezetni, és az ezek közötti finom kapcsolatok vizsgálata időigényes. A fokozatosság elve mellett ez az oka, hogy ebben a könyvben metrikus terekre szorítkozunk. Általános topológiával kapcsolatban magyarul a kitűnő [145] könyvet, egyébként Hewitt–Stromberg [66] könyvének megfelelő fejezeteit, és Bourbaki [14] művének II. könyvét ajánljuk.

∗ **3.148. Alexander tétele.** *Legyen $\mathcal{S}$ egy szubbázisa az X tér topológiájának. Az X tér pontosan akkor kompakt, ha minden $\mathcal{S}$-beli halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan nyílt halmazokból álló lefedés, amelyből nem választható ki véges lefedés. Tekintsük az ilyen lefedések rendszerét. Ez féligrendezett a tartalmazásra nézve, és benne minden lánc felülről korlátos, így a Zorn-lemma szerint tartalmaz egy $\mathcal{V}$ maximális lefedést. Legyen $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. Ekkor $\mathcal{W}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le X-et, így $\mathcal{W}$ nem lehet lefedése X-nek. Legyen $x \in X \setminus (\cup \mathcal{W})$ és válasszunk egy $V \in \mathcal{V}$ halmazt, amely lefedi x-et. Mivel $\mathcal{S}$ szubbázis, léteznek $S_1, \ldots, S_n$ halmazok $\mathcal{S}$-ből, amelyekre $x \in \cap_{j=1}^n S_j \subset V$. Mivel $x \notin \cup \mathcal{W}$, egyetlen S_j sincs a $\mathcal{V}$-ben. Mivel $\mathcal{V}$ maximális, minden j-re van egy olyan A_j halmaz, amely véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítése, és amelyre $S_j \cup A_j = X$. Innen

$$V \cup (\cup_{j=1}^n A_j) \supset (\cap_{j=1}^n S_j) \cup (\cup_{j=1}^n A_j) = X,$$

és így X előáll véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítéseként. Ez ellentmond $\mathcal{V}$ kiválasztásának.

∗ **3.149. Tyihonov tétele.** *Kompakt terek szorzata kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $X = \prod_{i\in I} X_i$ a szóban forgó szorzattér és legyen $\mathcal{S}$ ennek a szorzattopológia definíciójánál leírt szubbázisa. Alexander tételét felhasználva, elég egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ lefedést vizsgálni. Legyen minden $i \in I$-re $\mathcal{U}_i$ az összes olyan $U_i \subset X_i$ nyílt halmazok osztálya, amelyekre $p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{U}$, ahol p_i az i-edik projekció. Megmutatjuk, hogy van olyan $i \in I$, amelyre $\cup\mathcal{U}_j = X_j$. Valóban, ha nem ez lenne a helyzet, akkor létezne olyan $x \in X$ pont, amely nem lenne $\cup\mathcal{U}$-ban. Mivel X_j kompakt, létezik véges sok $U_{j,1}, \dots, U_{j,n}$ halmaz $\mathcal{U}_i$-ben, amelyre $X_j = \cup_{k=1}^n U_{j,k}$. Nyilván $p_j^{-1}(U_{j,k})$, $k = 1, 2, \dots, n$ egy véges lefedése X-nek.

∗ **3.150. Tétel.** *Megszámlálható bázisú T_3-tér T_4-tér is.*

Bizonyítás. Legyenek E és F diszjunkt zárt halmazok X-ben. Minden $x \in E$-hez létezik a megszámlálható bázisnak olyan U_x eleme, amelyre $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset X \setminus F$ és minden $y \in F$-hez létezik a megszámlálható bázisnak olyan V_y eleme, amelyre $y \in V_y \subset \overline{V_y} \subset X \setminus E$. Legyen $\cup_{x\in E} U_x = \cup_{n=1}^\infty U_{x_n}$ és $\cup_{y\in F} V_y = \cup_{n=1}^\infty V_{y_n}$. Legyen $G_n = U_{x_n} \setminus \cup_{k\le n} \overline{V_{y_k}}$ és $H_n = V_{y_n} \setminus \cup_{k\le n} \overline{U_{x_k}}$, és legyen $G = \cup_{n=1}^\infty G_n$, $H = \cup_{n=1}^\infty H_n$. Mivel $G_i \cap V_{y_j} = \emptyset$, ha $j \le i$, azt kapjuk, hogy $G_i \cap H_j = \emptyset$, ha $j \le i$. Hasonlóan adódik, hogy $H_j \cap G_i = \emptyset$, ha $i \le j$. Innen $G \cap H = \emptyset$ és $E \subset G$, $F \subset H$.

∗ **3.151. Feladat: Uriszon-lemma [14].** Legyen X egy T_4 tér, E és F diszjunkt zárt részhalmazai X-nek.

(1) Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re az $r \in R = \{k/2^n : n = 0, 1, \dots; k = 01, , \dots, 2^n\}$ diadikusan racionális számokhoz léteznek olyan $V(r)$ nyílt halmazok, amelyekre $E \subset V(0) \subset \overline{V(0)} \subset V(1) = X \setminus F$ és

$$\overline{V(k/2^n)} \subset V\big((2k+1)/2^{n+1}\big) \subset \overline{V\big((2k+1)/2^{n+1}\big)} \subset V\big((k+1)/2^n\big),$$

ha $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

(2) Legyen $f(x) = \inf\{1, r \in R : x \in V(r)\}$ és mutassuk meg, hogy $f : X \to [0, 1]$ folytonos függvény, amely szétválasztja az E és F halmazokat.

∗ **3.152. Feladat: Tietze kiterjesztési tétele [14].** Legyen X egy T_4 tér, F zárt részhalmaza X-nek, $I = [-1, 1]$ és legyen $f : F \to [-1, 1]$ folytonos függvény.

(1) Teljes indukcióval adjunk meg olyan $g_0, g_1, \dots$ és $h_1, h_2, \dots$ folyonos függvényeket, amelyekre

$$g_n : X \to [-1 + (2/3)^n, 1 - (2/3)^n],$$
$$h_n : X \to [-2^{(n-1)}/3^n, 2^{(n-1)}/3^n],$$

$g_n = g_{n-1} + h_n$ és $|f(x) - g_n(x)| \le (2/3)^n$.

(2) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $g : X \to I$ folytonos függvény, amelyre $g|_F = f$.

(3) Mutassuk meg, hogy az állítás akkor is érvényben marad, ha I nem üres félig zárt, illetve nyílt intervallum.

(Lásd Járai [71].)

∗ **3.153. Feladat: az egység felbontása [8].** Általánosítsuk az egység felbontását T_4-térre, illetve lokálisan kompakt Hausdorff-térre. (Lásd Járai [71].)

∗∗ **3.154. Feladat [12].** Legyen $\mathbb{R}$-en $\mathcal{O}_{[[}$ az a szokásosnál erősebb topológia, amelynek az $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú halmazok alkotják egy bázisát. Mutassuk meg, hogy

(1) $\mathbb{Q}$ sűrű ebben a térben, így a tér szeparábilis;

(2) a megadott bázisnak nincs olyan megszámlálható $[a_n, b_n[$ részrendszere, amely bázis lenne, mert ezen halmazok közül az x pontot tartalmazók csak akkor alkothatják egy környezetbázisát x-nek, ha $x = a_n$ valamely n-re;

(3) a topológiának nincs megszámlálható bázisa;

(4) ha E zárt halmaz, akkor azon E-beli pontok F halmaza, amely belső pontja a komplementernek a szokásos topológiában, megszámlálható;

(5) ha F megszámlálható halmaz, akkor választva minden racionális végpontú nyílt intervallumból egy $\mathbb{R} \setminus F$-beli pontot, egy, a szokásos topológiában sűrű halmazt kapunk;

(6) az $]a, b[$, $a, b \in D$ és $[a, b[$, $a \in F$, $b \in D$ halmazok egy, a szokásosnál erősebb, de $\mathcal{O}_{[[}$-nél gyengébb $\mathcal{O}$ topológia megszámlálható bázisát alkotják;

(7) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ tér reguláris, és így normális;

(8) ha E_1 és E_2 diszjunkt zárt halmazok $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$-ben, akkor a (4) szerint hozzájuk tartozó F_1, F_2 megszámlálható halmazok F uniójához tartozó $\mathcal{O}$ topológiában is zártak, így szétválaszthatók $\mathcal{O}$-beli nyílt halmazokkal;

(9) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$ tér normális;

(10) az $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{[[})$ tér önmagával vett szorzata szeparábilis, így kontinuum sok folytonos leképezése létezik $[0, 1]$-be;

(11) a szorzattérben a $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ halmaz minden részhalmaza zárt;

(11) a $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ halmaz egy adott részhalmazán 0-nak, az erre a halmazra vonatkozó komplementerén 1-nek definiált függvények folytonosak, de „túl sokan vannak" ahhoz, hogy mindegyik folytonosan kiterjeszthető legyen a szorzattér egy $[0, 1]$-be való folytonos leképezésévé, így a szorzattér nem lehet normális.

∗∗ **3.155. Feladat: faktorterek [10].** Mutassuk meg, hogy ha (X, d) metrikus tér, és $\tilde{d}$ metrika, továbbá $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ nyílt a metrikus faktortérben, akkor $\cup\tilde{U}$ is nyílt X-ben. Mutassuk meg, hogy ha X kompakt és $\tilde{d}$ metrika, akkor az $\tilde{X}$ metrikus faktortérben egy $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $\cup\tilde{U}$ nyílt X-ben, azaz a metrikus faktortér topológiája megegyezik topologikus faktortér topológiájával. Mutassuk meg, hogy egy pályatér faktormetrikájának (ha létezik faktormetrika) a topológiája mindig a topologikus faktortér topológiája.

Megoldás. Az utolsó állítás bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy ha valamely $\tilde{U} \subset \tilde{X}$-re $\cap\tilde{U}$ nyílt, akkor $\tilde{U}$ is nyílt. Tegyük fel, hogy $x \in \cap\tilde{U}$ egy ε sugarú nyílt környezete $\cap\tilde{U}$-ban van. Legyen $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \varepsilon$. Ekkor van olyan $y' \in \tilde{y}$, amelyre $d(x, y') < \varepsilon$, így $y' \in \cap\tilde{U}$, azaz $\tilde{y} \in \tilde{U}$.

∗∗ **3.156. Feladat: öröklődés faktorterekre [14].** Mutassuk meg, hogy ha $\sim$ egy ekvivalencia-reláció az X topologikus téren, amelyhez tartozó természetes leképezés zárt, azaz minden zárt halmazt zártba visz, akkor

(1) ha X normális, akkor $\tilde{X} = X/\!\sim$ is normális;

(2) ha X kompakt Hausdorff-tér, akkor $\tilde{X}$ is az;

(3) ha az ekvivalencia-osztályok kompaktak és X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, akkor $\tilde{X}$ is az.

(Lásd Bourbaki [14].)

∗ **3.157. Uniform terek.** Metrikus terek esetén néhány fogalomnál (teljesség, egyenletes folytonosság, stb.) az játszik szerepet, hogy az x és y pontok „ε-közel" vannak ($\varepsilon > 0$), azaz fennáll az $xR_\varepsilon^d y$ reláció, ahol

$$R_\varepsilon^d = \{(u, v) \colon d(u, v) < \varepsilon\}.$$

Ez az észrevétel az uniform tér fogalmához vezet. Az $(X, \mathcal{U})$ párt *uniform tér*nek, $\mathcal{U}$-t *uniformitás*nak nevezzük, ha X nem üres halmaz, $\mathcal{U}$ pedig X reflexív relációiból álló szűrő úgy, hogy bármely reláció tartalmazza valamely reláció önmagával vett kompozícióját, és bármely reláció tartalmazza valamely relációt inverzét. Persze, az $\mathcal{U}$ szűrő egy bázisával is megadható. Például könnyű látni, hogy az $\mathcal{U}$-beli szimmetrikus relációk $\mathcal{U}$ egy bázisát adják. Ha $R \in \mathcal{U}$ és $(x, y) \in R$, azaz xRy, akkor azt szokás mondani, hogy x és y *R-közel* vannak. Egy metrikus tér a fenti R_ε^d, $\varepsilon > 0$ relációkkal példa uniform térre. Sokkal általánosabban, ha d_i, $i \in I$ eltérések egy tetszőleges családja X-en, akkor az $R_\varepsilon^{d_i}$, $\varepsilon > 0$, $i \in I$ relációk véges metszetei egy uniformitás egy bázisát alkotják; ez a d_i, $i \in I$ *eltéréscsaládból származó uniformitás*. Ha egy uniform térben az

$$\mathcal{O} = \{V \colon V \subset X, \text{ minden } x \in V\text{-hez van olyan } R \in \mathcal{U}, \text{ hogy } R(x) \subset V\}$$

halmazrendszert tekintjük, akkor X topologikus térré válik, így az uniform tér fogalma a topologikus térnél speciálisabb. Ha az uniformitásból származó topológia T_0, akkor T_2 is, ugyanis mint könnyen látható, mindkettő azzal ekvivalens, hogy $\cap_{R \in \mathcal{U}} R = \mathbb{1}_X$. Megmutatható, hogy már az $X \times X$ topologikus térben nyílt, illetve zárt szimmetrikus relációk is bázisát alkotják az uniformitásnak. Egy X uniform tér egy Y részhalmaza is uniform tér az $R \cap Y \times Y$, $R \in \mathcal{U}$ relációkkal, ez az uniform tér *uniform altere*. Könnyű látni, hogy az altér-uniformitásból az altér-topológia származik.

Legyenek $(X, \mathcal{U})$ és $(Y, \mathcal{V})$ uniform terek. Egy $f \colon X \to Y$ leképezést *egyenletesen folytonos*nak nevezünk, ha minden $S \in \mathcal{V}$ relációhoz van olyan $R \in \mathcal{U}$ reláció, hogy ha x és y R-közel vannak X-ben, akkor $f(x)$ és $f(y)$ S-közel vannak Y-ban. Az uniform terek izomorfiái a kölcsönösen egyértelmű és inverzükkel együtt egyenletesen folytonos leképezések. Legyen X tetszőleges halmaz, $(Y_i, \mathcal{V}_i)$, $i \in I$ uniform terek, $f_i \colon X \to Y_i$, $i \in I$ pedig leképezések indexelt családja. Az összes olyan X feletti uniform struktúrák metszete, amelyekre minden f_i, $i \in I$ egyenletesen folytonos, egy uniform struktúra X-en. Ha $\mathcal{B}_i$ az $\mathcal{U}_i$ egy bázisa, akkor ennek egy bázisa az összes

$$\left\{(x, y) \in X \times X \colon (f_i(x), f_i(y)) \in S_i \in \mathcal{B}_i\right\}$$

alakú relációk véges metszeteiből áll. Akárhány X_i, $i \in I$ uniform tér szorzata definiálható, mint a $\prod_{i \in I} X_i$ szorzathalmaz, az összes olyan uniformitások metszetével ellátva, amelyekre az összes $p_i \colon x \mapsto x_i$, $i \in I$ projekciók egyenletesen folytonosak. Könnyű látni, hogy a szorzat-uniformitásból a szorzat-topológia származik.

∗ **3.158. Feladat [13].** Tegyük fel, hogy V az X uniform tér egy relációja. Mutassuk meg, hogy

(1) létezik szimmetrikus környékeknek egy $V_1, V_2, \dots$ sorozata, hogy $V_1 \subset V$ és $V_{n+1}^3 \subset V_n$ minden n-re;

(2) ha $h(x,y) = \inf\{1, 2^{-n} \colon (x,y) \in V_n\}$ és

$$d(x,y) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} h(z_{i-1}, z_i) \colon n \in \mathbb{N}, z_0, z_1, \dots, z_n \in X, x = z_0, y = z_n\},$$

akkor d eltérés;

(3) $\frac{1}{2}h(x,y) \le d(x,y) \le h(x,y)$, így $y \notin V(x)$-re $d(x,y) \ge \frac{1}{2}$;

(4) uniform tér T_π-tér;

(5) bármely uniform struktúra származtatható eltéréscsaládból;

(6) egy uniform struktúra pontosan akkor származtatható egyetlen eltérésből, ha megszámlálható bázisú;

(7) egy Hausdorff uniform struktúra pontosan akkor származtatható metrikából, ha megszámlálható bázisú.

∗ **3.159. Feladat: Tyihonov beágyazási tétele [13].** Legyen X topologikus tér, és legyen Φ az X-et $[0,1]$-be képező folytonos leképezések egy halmaza.. Mutassuk meg, hogy

(1) az $x \in X$-hez a $\varphi \mapsto \varphi(x)$, ha $\varphi \in \Phi$ kiválasztási függvényt rendelő J leképezés egy $J \colon X \to [0,1]^\Phi$ folytonos leképezés, amelyre $\varphi = p_\varphi \circ J$;

(2) ha X egy T_π-tér, és Φ az összes, X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények halmaza, akkor az összes $W_\varphi = \varphi^{-1}[0,1[$ halmazok X egy bázisát alkotják;

(3) ha Φ az összes, X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények halmaza, és $\mathcal{U}$ az a leggyengébb uniformitás $[0,1]^\Phi$-n, amelyre minden $\varphi \in \Phi$ egyenletesen folytonos, akkor $\mathcal{U}$-ból $[0,1]^\Phi$ szorzattopológiája származik;

(4) minden T_π-tér uniformizálható;

(5) ha X teljesen reguláris, és Φ az X-et $[0,1]$-be képező folytonos függvények egy olyan halmaza, amelyre a $W_\varphi = \varphi^{-1}[0,1[$ halmazok X egy bázisát alkotják, akkor a J leképezés homeomorfizmusa X-nek $J(X) \subset [0,1]^\Phi$-re;

(6) egy topologikus tér pontosan akkor teljesen reguláris, ha homeomorf egy kompakt Hausdorff-tér egy alterével;

(7) egy teljesen reguláris tér pontosan akkor megszámlálható bázisú, ha homeomorf $[0,1]^\mathbb{N}$ egy alterével;

(8) a $[0,1]^\mathbb{N}$ tér homeomorf a Hilbert-kockával;

(9) megszámlálható bázisú reguláris tér metrizálható;

(10) kompakt Hausdorff-tér pontosan akkor megszámlálható bázisú, ha metrizálható.

∗ **3.160. Dimenzióelmélet.** Ha be akarjuk bizonyítani, hogy két topologikus tér nem homeomorf, akkor nagyon hasznos lehet egy *topológiai invariáns*, valamilyen szám (vagy bármi más) ami homeomorf terekre megegyezik (és lehetőleg könnyen számítható). Egyike a legkorábban bevezetett topológiai invariánsoknak a *dimenzió*.

Egy X halmaz egy $\mathcal{A}$ lefedése a $\mathcal{B}$ lefedés *finomítás*a, ha minden $A \in \mathcal{A}$-hez van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $A \subset B$. Egy *lefedés rendje* eggyel kisebb, mint az egy x pontot lefedő halmazok számának a szuprémuma az összes $x \in X$ pontra (-1, ha nincs pont). Egy X metrikus tér $\operatorname{cdim}(X)$ *lefedési dimenzió*ja a legkisebb olyan n egész szám amelyre X minden nyílt lefedésének van olyan finomítása, amelynek a rendje n. Az üres tér dimenziója -1. Két másik dimenziófogalom – az üres tér dimenzióját -1-nek véve – indukcióval definiálható: egy nem üres térre $\operatorname{idim}(X)$ az a legkisebb n természetes szám, amire minden x ponthoz és azt tartalmazó U nyílt halmazhoz van olyan $V \subset U$ nyílt halmaz, amelyre $\operatorname{idim}(\partial V) < n$ (kis induktív dimenzió), $\operatorname{Idim}(X)$ pedig az a legkisebb n természetes szám, amire minden F zárt halmazhoz és azt tartalmazó U nyílt halmazhoz van olyan $F \subset V \subset U$ nyílt halmaz, amelyre $\operatorname{Idim}(\partial V) < n$ (nagy induktív dimenzió). Az elmélet fő eredménye, hogy ezek a (nyilván topologikus) fogalmak szeparábilis metrikus terekben egybeesnek. Csak a szeparábilis metrikus terekben teljesülő fontosabb eredményeket soroljuk fel: Altér dimenziója legfeljebb annyi, mint a tér dimenziója. Összeg tétel: ha a tér megszámlálható sok legfeljebb n dimenziós zárt altér összege, akkor maga is legfeljebb n dimenziós, ha pedig egy m és egy n dimenziós altér egyesítése, akkor legfeljebb $n+m+1$ dimenziós. Felbontási tétel: egy nem üres, legfeljebb n dimenziós tér felbontható egy legfeljebb 0 és egy legfeljebb $n-1$ dimenziós altérre. Szorzat tétel: két tér szorzatának a dimenziója legfeljebb a dimenziók összege (de lehet kisebb: van két olyan kétdimenziós tér, amelyeknek a szorzata csak három dimenziós). Kiterjesztési tétel: nem üres tér pontosan akkor legfeljebb n dimenziós, ha bármely zárt részhalmazának folytonos leképezése $\mathbb{S}^n$-be kiterjeszthető az egész tér folytonos leképezésévé $\mathbb{S}^n$-be. Legnehezebb annak bizonyítása, hogy $\mathbb{R}^n$ dimenziója n, ez használja a Brouwer-féle fixponttételt. (Egyébként $\mathbb{R}^n$-ben pontosan a nem üres belsejű halmazok dimenziója n). Az $\mathbb{R}^{2n+1}$ térben létezik univerzális n-dimenziós kompakt halmaz: minden legfeljebb n dimenziós tér homeomorf ennek egy részhalmazával. További nevezetes, $\mathbb{R}^n$-re vonatkozó tételek: legfeljebb $n-2$ dimenziós részhalmaz komplementere összefüggő; $\mathbb{R}^n$ két homeomorf kompakt részhalmazának a komplementere ugyanannyi diszjunkt tartomány egyesítése (ez tartalmazza a Jordan-tételt speciális esetként); $\mathbb{R}^n$ két részhalmazának egy homeomorfizmusa $\mathbb{R}^n$-beli belső pontot $\mathbb{R}^n$-beli belső pontba visz (ez Brouwer nevezetes tartomány-invariancia tétele). Végül két állítás, amely a Hausdorff-dimenzióval való kapcsolatot írja le: ha X topológiai dimenziója n, akkor $\chi^n(X) > 0$, és minden $m > n$ valós számra van olyan X-szel homeomorf Y részhalmaza $[0,1]^{2n+1}$-nek, amelyre $\chi^m(Y) = 0$. A dimenzióelmélettel kapcsolatban bevezetésként Hurewicz és Wallman [70] könyvét ajánljuk, amely ma is jól olvasható, bár első kiadása 1941-ben jelent meg!

∗ **3.161. A fundamentális csoport.** Egy *pontozott tér* alatt egy metrikus (vagy topologikus) teret fogunk érteni, aminek ki van jelölve egy pontja, azaz egy (X, x_0) párt, ahol X metrikus tér és $x_0 \in X$. Egy (X, x_0) pontozott térnek egy (Y, y_0) pontozott térbe való folytonos leképezésén egy olyan $f\colon X \to Y$ folytonos leképezést értünk, amelyre $f(x_0) = y_0$. Tekintsük az $(\mathbb{S}^1, *)$ pontozott térnek, ahol $* = (1,0) \in \mathbb{S}^1$, az (X, x_0) pontozott térbe való folytonos leképezéseit, és ezek között azt az A-homotópiát, amelyre $A = \{*\}$. A $\pi_1(X, x_0)$ *fundamentális csoport* elemei az ezen leképezések A-homotópia osz-

tályai. Hogy a műveletet be tudjuk vezetni, a körvonalat egy intervallum két végpontjának „összeragasztásával" készítjük el, mindjárt le is képezve X-be. Pontosabban, azonosítsuk az $(\mathbb{S}^1, *)$ pontozott tér (X, x_0)-ba való folytonos leképezéseit azokkal a $\gamma\colon I \to X$ zárt görbékkel, amelyre $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$-nek az $\mathbb{R}$-ben vett $\partial I = \{0,1\}$ határa x_0-ba képeződik, azaz mindkét végpontja x_0. Ezeknek az $A = \partial I = \{0,1\}$ halmazra vett A-homotópia osztályai azonosíthatók $\pi_1(X, x_0)$ elemeivel. A $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to X$ zárt görbékre, amelyeknek mindkét végpontja x_0, az alábbi összefüggéssel definiált $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ a két *görbe szorzata*:

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{ha } 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & \text{ha } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a szorzat mindkét végpontja szintén x_0, és ha az adott homotópia-osztályokból más görbéket választunk, a szorzatuk ugyanabba a homotópia-osztályba esik, tehát a fundamentális csoporton definiáltunk egy szorzást. A konstans x_0 görbe osztálya egységelem, és minden elemnek van inverze, a γ osztályának a $\check{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ osztálya. Nem nehéz belátni, hogy ha X *ívszerűen összefüggő*, azaz bármely két pontjához van olyan X-beli görbe, amelynek az egyik a kezdő-, a másik a végpontja, akkor $\pi_1(X, x_0)$ nem függ x_0-tól, azaz x_0 változtatásával izomorf csoport keletkezik. Ilyenkor az egyszerűbb $\pi_1(X)$ jelölést használjuk.

A fundamentális csoport sokszor elég arra, hogy két, akár egyforma dimenziós teret megkülönböztessünk. Például $\mathbb{U}^3$ fundamentális csoportja egyelemű, de ha kiveszünk belőle egy origón átmenő egyenest, akkor már nem. Ha viszont csak az origót vesszük ki, akkor a fundamentális csoport megint egyelemű. Finomabb megkülönböztetéshez szükség van magasabb dimenziós homotópia csoportokra.

∗ **3.162. Homotópia csoportok.** Tekintsük az $(\mathbb{S}^n, *)$ pontozott teret, ahol $* = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Tekintsük ezen pontozott térnek a (X, x_0) pontozott térbe való folytonos leképezéseit, ahol X metrikus (vagy topologikus) tér, $x_0 \in X$, és ezek között az A-homotópiát, ahol $A = x_0$. A $\pi_n(X, x_0)$ n-edik *homotópia csoport* elemei ezen folytonos pontozott leképezések A-homotópia osztályai. Itt is, hogy a műveletet be tudjuk vezetni, a $\mathbb{S}^n$ felületet elő kell állítanunk az $I^n = [0,1^n$ halmaz $\mathbb{R}^n$-ben vett ∂I^n határának „összeragasztásával", azaz az $(\mathbb{S}^n, *)$ pontozott tér folytonos leképezéseit (X, x_0)-ba azonosítanunk kell I^n azon folytonos leképezéseivel (X, x_0)-ba, amelyeknél ∂I^n pontjai x_0-ba képeződnek. Az ilyen $\gamma_1, \gamma_2\colon I^n \to X$ leképezések $\gamma_1\gamma_2$ szorzata

$$\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \gamma_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{ha } 0 \le t_1 \le 1/2, \\ \gamma_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{ha } 1/2 \le t_1 \le 1. \end{cases}$$

Ha az adott homotópia osztályokból más függvényeket választunk, a szorzat ugyanabban a homotópia osztályban van, tehát tulajdonképpen a homotópia osztályok között definiáltunk szorzást. Az egységelem a konstans x_0 leképezés, a $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto \gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ inverze $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto \gamma(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Ellentétben a fundamentális csoporttal, $n \ge 2$ esetén a homotópia csoportok kommutatívak. Ennek bizonyítása, vázlatosan elmesélve az $n = 2$ esetben: $\gamma_1\gamma_2$ definíció szerint, egy olyan leképezés az egységnégyzeten, amely lényegében annak bal felén γ_1, jobb felén pedig γ_2. Ez homotóp egy olyan leképezéssel, amely az egységnégyzet bal alsó negyedében x_0, bal felső negyedében lényegében γ_1, jobb felső negyedében x_0, jobb alsó negyedében pedig lényegében γ_2. Ez viszont homotóp egy olyan leképezéssel, amely az egységnégyzet bal alsó negyedében lényegében γ_2, bal

felső negyedében x_0, jobb felső negyedében lényegében γ_1, jobb alsó negyedében x_0. Utolsó lépésként, ez homotóp a $\gamma_2\gamma_1$ szorzatot definiáló leképezéssel. Itt sem nehéz belátni, hogy ha X ívszerűen összefüggő, akkor $\pi_n(X, x_0)$ nem függ x_0-tól, azaz x_0 változtatásával izomorf csoport keletkezik. Ilyenkor az egyszerűbb $\pi_n(X)$ jelölést használjuk.

∗ **3.163. Algebrai topológia.** Az előző két pontban topologikus terekhez csoportokat rendeltünk; a folytonos leképezésekhez homomorfizmusok rendelődnek. Így a topológiai vizsgálatokat algebrai vizsgálatokra vezettük vissza. Ez az *algebrai topológia* tárgya. A homotópia csoportok nagyon erős eszközök, de általában nehéz őket kiszámítani. Már a $\pi_n(\mathbb{S}^m)$ csoportok kiszámítása is nehézségekbe ütközik. Más módszerek is vannak, amelyekkel topologikus terekhez csoportokat rendelhetünk: a különböző *homológia* és *kohomológia* elméletek. Ezekről szemléletesen a [13] könyvből tájékozódhatunk. Részletesebb tárgyalás található magyarul a [145] könyvben. Részletes tárgyalást ad [27] IX. kötete.

4

Normált terek

Riesz F. és Helly munkáiból kiindulva, természetes általánosítás volt normát definiálni egy tetszőleges $\mathbb{R}$ *vagy* $\mathbb{C}$ *feletti vektortéren, és nem csak függvények terén vagy* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *alterein. Ezt egymástól függetlenül H. Hahn és S. Banach tették meg,* teljes *terekre szorítkozva. Banach dolgozata a disszertációja, amelyet 1920-ban írt .... 1932-ben jelent meg Banach könyve, amely átfogó leírását adta a normált terek elméletében akkor ismert összes eredménynek, beleértve azokat a tételeket, amelyeket 1923-ban és 1929-ben megjelent dolgozataiban publikált. Nagy részt szentelt a gyenge konvergenciának és általánosításainak, amelyet 1929-ben kezdett tanulmányozni ... és könyvének ugyanaz volt a hatása a funkcionálanalízisben, mint van der Waerden két évvel korábban megjelent könyvének az algebrában. Az analízissel foglalkozók az egész világon kezdték felismerni az új módszerek erejét, és alkalmazni azokat a legkülönbözőbb problémákra; Banach terminológiáját és jelöléseit általánosan átvették, a teljes normált terek* Banach-tér *néven váltak ismertté, és elméletüket hamarosan a legtöbb, felsőbbéveseknek szóló tanterv kötelező részének tekintették.*

Jean Dieudonné [28]

A boldogság egy Banach-tér.

Népköltészet.

4.1. Normált terek. Legyen X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését X-nek $[0, \infty]$-be *félnorm*ának nevezzük, ha

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (*abszolútérték-homogén*, itt $0 \cdot \infty = 0$);

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*);

Ha még az is teljesül, hogy

(3) $0 < \|x\| < \infty$, ha $0 \neq x \in X$,

akkor a leképezést *norm*ának, az $(X, \| \ \|)$ párt pedig *normált tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Megjegyezzük, hogy $\| \ \|$ helyett az $| \ |$ jelölés is szokásos. $\mathbb{K}$ elemeit gyakran *skalár*oknak, X elemeit *vektor*oknak fogjuk nevezni. Szorzásnál a skalárt néha a másik oldalra írjuk.

Egy félnormált térben $\{x : x \in X, \|x\| < \infty\}$ lineáris altér, és ezen az altéren a félnorma véges. Ha a félnorma véges, akkor a tér mindig normált térré tehető, ha azokat az elemeket, amelyek különbségének félnormája nulla, egy osztályba sorolva azonosítjuk. A normált terek izomorfizmusai a lineáris és normatartó leképezések. Egy $x \in X$ elemet *normált*nak nevezünk, ha $\|x\| = 1$.

Félnormált téren $d(x, y) = \|x - y\|$ eltérés. Az így definiált eltérésre $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$) és $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, ha $x, y, z \in X$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, azaz az eltérés *abszolútérték-homogén* és *eltolásinvariáns*. Ha normából indulunk ki, akkor metrikát kapunk. Így normált térben használni fogunk minden olyan fogalmat, amelyet metrikus térben definiáltunk. Ilyenkor mindig a normából származó metrikára gondolunk.

A norma tulajdonságaiból, ha $x_n \to x$, $y_n \to y$ és $\alpha_n \to \alpha$, akkor $x_n + y_n \to x + y$ és $\alpha_n x_n \to \alpha x$, azaz a határértékképzés lineáris, továbbá $\|x_n\| \to \|x\|$. Következményként kapjuk, hogy ha X metrikus tér, Y normált tér $\mathbb{K}$ felett, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \subset X$, a torlódási pontja A-nak, $f, g\colon A \to Y$ függvények, amelyekre $\lim_{x\to a} f(x) = p$ illetve $\lim_{x\to a} g(x) = q$, akkor $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = p + q$ és $\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \alpha p$. Ebből következik, hogy ha f és g folytonosak az $a \in A$ pontban, akkor $f + g$ is és αf is.

Egy normált teret *Banach-tér*nek nevezünk, ha teljes. Normált tér bármely lineáris altere is normált tér. Banach-tér egy lineáris altere pontosan akkor Banach-tér, ha zárt.lineáris

→ **4.2. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy egy normált tér egy lineáris alterének a lezártja is lineáris altér.

→ **4.3. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy normált tér szeparábilis részhalmaza lineáris burkának a lezártja is szeparábilis.

∗ **4.4. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér egy metrikája pontosan akkor származik normából, ha a metrika eltolásinvariáns és abszolútérték-homogén. (Lásd Losonczi [104], 100. o.)

∗ **4.5. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy normált tér pontosan akkor nem szeparábilis, ha található benne nemmegszámlálható sok páronként diszjunkt 1 sugarú gömb.

4.6. Sorok. Normált terekben definiálható sorok összege. A normált tér x_n elemeiből képzett $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sort konvergens*nek nevezzük, és azt mondjuk, hogy *összeg*e s, ha az $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ *részletösszeg*ek sorozata s-hez konvergál. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha a sor konvergens, a részletösszegek Cauchy-sorozatot alkotnak, így $s_n - s_{n-1} = x_n \to 0$. A határértékképzés linearitása miatt a sor összegének képzése is lineáris, továbbá $\|s\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. A sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ sor konvergens. Abszolút konvergens sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, így Banach-térben minden abszolút konvergens sor konvergens.

Azok a *konvergencia kritérium*ok, amelyek nemnegatív tagú számsorokra bizonyítanak konvergenciát, nyilván alkalmazhatók normált térbeli sorok abszolút konvergenciájának bizonyítására. Hasonlóan, azok a kritériumok, amelyek egy sor divergenciáját abból vezetik le, hogy a tagjai nem tartanak nullához, alkalmazhatók normált térbeli sorok divergenciájának bizonyítására. Speciálisan, normált terekben is érvényben marad a gyökkritérium és a hányados-kritérium: ha

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} < 1,$$

akkor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens, ha viszont

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} > 1,$$

akkor a sor divergens, továbbá ha a tagok mind nullától különböznek, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < 1$$

esetén a sor abszolút konvergens,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1$$

esetén pedig divergens.

Fontos tudni, hogy tetszőleges normált térben egy abszolút konvergens sor nem feltétlenül konvergens. A következő tétel tisztázza a helyzetet.

4.7. Tétel. *Egy normált tér pontosan akkor Banach-tér, ha benne minden abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. A szükségességet már láttuk. A másik irányhoz elég megmutatni, hogy minden x_n Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata. Válasszunk ki olyan részsorozatot, amelyre

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Ekkor az

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

sor abszolút konvergens, tehát konvergens is, azaz a részletösszegek

$$x_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) = x_{n_k}$$

sorozata konvergens.

4.8. Kettős sor tétel. *Legyen X Banach-tér, $x_{j,k} \in X$, ha $j, k \in \mathbb{N}$. Ha van olyan K valós szám, hogy $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \|x_{j,k}\| \le K$ minden $n, m \in \mathbb{N}$-re, akkor az alábbi sorok abszolút konvergensek és*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{j,k}.$$

Bizonyítás. Rögzített m-re $n \to \infty$ határátmenettel

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{j,k}\| \le K,$$

ahonnan $m \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{j,k}\| \le K$, és hasonlóan kapjuk, hogy a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy K a lehető legkisebb, $\varepsilon > 0$, elég nagy m-re és n-re $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \|x_{j,k}\| \ge K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\Big\| \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n'} x_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} x_{j,k} \Big\| \le \varepsilon,$$

amiből $n' \to \infty$ határátmenettel

$$\Big\| \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} x_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} x_{j,k} \Big\| \le \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} x_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} x_{j,k}\Big\| \le \varepsilon,$$

amiből

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} x_{j,k} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} x_{j,k}\Big\| \le 2\varepsilon.$$

Ha most $n \to \infty$, majd $m \to \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását.

4.9. Következmény: sorok átrendezése. *Ha $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), X Banach-tér, és a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens, összege x, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege x.*

A következmény alapján ha M megszámlálható végtelen halmaz, $x_m \in X$, ha $m \in M$, és van olyan K valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$-re $\sum_{m\in M'} \|x_m\| \le K$, akkor bármely $p\colon \mathbb{N} \to M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} x_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m\in M} x_m$.

Bizonyítás. Legyen $x_{j,k} = x_j$, ha $k = p_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

4.10. Következmény. *Ha a K megszámlálható halmaz a K_j, $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, X Banach-tér, $x_k \in X$, ha $k \in K$, és $\sum_{k\in K} \|x_k\| < \infty$, akkor*

$$\sum_{k\in K} x_k = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K_j} x_k.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $K, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $x_{j,k} = x_k$, ha $k \in K_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

4.11. Feladat: integrálkritérium [10]. Nemnegatív sorok konvergenciájának vizsgálatánál gyakran hasznos a sor összegét egy olyan függvény integráljának felfogni, amely két szomszédos természetes szám között konstans, és az integrált összehasonlítani egy másik, sima függvény integráljával. Használjuk fel ezt a módszert az alábbi sorok konvergenciájának eldöntésére: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$, $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{\alpha}/n$, $\sum_{n=3}^{\infty} (\ln\ln n)^{\alpha}/(n \ln n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.12. Feladat: Riemann átrendezési tétele [10]. Mutassuk meg, hogy ha egy valós számsor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor tetszőleges x bővített valós számhoz van olyan átrendezése, amelynek az összege x.

$*$ **4.13. Feladat: Cauchy-szorzat [8].** Legyenek X, Y és Z valós Banach-terek, és az $(x, y) \mapsto xy$ leképezése $X \times Y$-nak Z-be egy szorzás. A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sorok ($x_n \in X$, $y_n \in Y$) *Cauchy-szorzata* a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sor, ahol $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Bizonyítsuk be, hogy abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és összege xy, ahol $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$

$*$ **4.14. Feladat: Mertens tétele [10].** Az előző feladat jelöléseivel, bizonyítsuk be, hogy ha az egyik sor konvergens, a másik abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk konvergens, és összege xy. (Lásd Rudin.)

∗ **4.15. Feladat: parciális összegzés [10].** Az előző két feladatban használt jelölésekkel, bizonyítsuk be az alábbi *parciális összegzési formulát*:

$$\sum_{k=n}^{m-1} x_k(\Delta_1 y)_k + \sum_{k=n+1}^{m} (\Delta_{-1}x)_k y_k = x_m y_m - x_n y_n, \quad \text{ha } n, m \in \mathbb{N},\ m > n;$$

itt $(\Delta_1 y)_k = y_{k+1} - y_k$ és $(\Delta_{-1}x)_k = x_k - x_{k-1}$ a haladó, illetve retrográd differenciák. Ez a formula hasonlóan használható sorok konvergenciájának vizsgálatánál, mint a parciális integrálás formulája integráloknál. Mutassuk meg segítségével, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n$ sorok konvergensek, ha $0 < x < 2\pi$. Használjuk fel annak bizonyítására, hogy ha $a_n \downarrow 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergens.

∗ **4.16. Feladat: Abel tételei [11].** Az előző feladatok jelöléseivel, parciális összegzés felhasználásával bizonyítsuk be *Abel folytonossági tételét*: ha $\sum_0^{\infty} z_n = z$, akkor

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n = z.$$

Használjuk fel ezt a tételt annak bizonyítására, hogy ha $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$, és a Cauchy-szorzatukra $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, akkor $z = xy$. (Lásd Rudin.)

∗ **4.17. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n = \ln 2$.

Megoldás. Abel folytonossági tétele.

∗ **4.18. Feladat [9].** Az $\arctan 1 = \pi/4$ összefüggés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(2n+1)$. Bizonyítsuk be az $\arctan 1 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$, illetve $\arctan 1 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$ összefüggéseket, és segítségükkel adjunk meg gyorsabban konvergáló sorokat, amelyek összege π.

Megoldás. Abel folytonossági tétele, tg addíciós képlete.

∗ **4.19. Feladat: végtelen szorzatok [11].** Legyen z_n egy komplex számsorozat, és $p_n = \prod_{k=0}^{n} z_k$. A

$$\prod_{k=0}^{\infty} z_k$$

*végtelen szorzat*ot mint a $\lim_{n\to\infty} p_n$ bővített komplex határértéket definiáljuk, ha ez létezik. Mutassuk meg, hogy ha $\prod_{k=0}^{\infty} z_k = z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy ha $n > m \geq N$, akkor $|\prod_{k=m}^{n} z_k - 1| < \varepsilon$ (*Cauchy-kritérium*). Megfordítva, ha ez a feltétel teljesül, akkor $\prod_{k=0}^{\infty} z_k \in \mathbb{C}$ létezik, és csak akkor nulla, ha valamelyik z_k nulla. Vezessük le ebből, hogy $\prod_{k=0}^{\infty} z_k = z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ fennállásának $z_k \to 1$ szükséges feltétele. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum_{k=0}^{\infty}(z_k - 1)$ konvergens, akkor $\prod_{k=0}^{\infty} z_k = z \in \mathbb{C}$, és megfordítva, ha $\prod_{k=0}^{\infty} z_k = z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, akkor $\sum_{k=0}^{\infty}(z_k - 1)$ konvergens.

Megoldás. A Cauchy-kritérium topologikus csoportokban is vizsgálható. A továbbiak azon múlnak, hogy exp és inverze lokálisan Lipschitz leképezések.

∗∗ **4.20. Feladat [17].** Vizsgáljuk meg az előző feladat általánosításának lehetőségét normált algebrákra.

∗ **4.21. Feladat [7].** Jelölje H_n a *harmonikus sor* n-edik részletösszegét, azaz legyen $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Mutassuk meg, hogy a nemnegatív tagú $H_{n-1} - \ln n$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat szigorúan monoton növekedő, a $H_n - \ln n$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat pedig szigorúan monoton csökkenő. Mivel különbségük $1/n \to 0$, létezik a közös γ határértékük, ez az *Euler-konstans*. Adjunk felső és alsó becslést rá.

Megoldás. Integrálkritérium.

∗ **4.22. Feladat [6].** Legyenek a *Bernoulli-polinom*ok a $B_0 \equiv 1$, $B_n' = B_{n-1}$, $\int_0^1 B_n = 0$, ha $n > 0$ összefüggések által definiálva. Bizonyítsuk be, hogy

$$n! B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k},$$

ahol az (n-től független) b_k számok a Bernoulli-számok. Mutassuk meg, hogy $b_0 = 1$ és

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0,$$

ha $n > 1$.

Megoldás. Kiszámoljuk.

∗ **4.23. Feladat: Euler összegzési formulája [12].** Bizonyítsuk be, hogy ha $m > 0$, az f függvény m-szer differenciálható az $[1, n]$ intervallumon, $f^{(m)}$ integrálható, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) = &\int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) \\ &+ \sum_{j=1}^{m} (-1)^j B_j(0) \left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(1)\right) \\ &+ (-1)^{m+1} \int_1^n B_m\left(x - \lfloor x \rfloor\right) f^{(m)}(x)\,dx,\end{aligned}$$

ahol a B_j függvények a Bernoulli-polinomok. (Ez a formula jól alkalmazható véges vagy végtelen összegek közelítésére.) (Lásd Petruska [127], 19.7.)

∗ **4.24. Feladat: Stirling-formula [12].** Bizonyítsuk be a *Stirling-formulá*t:

$$n! = \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\,e^{\frac{1}{12n} - c_n}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le c_n \le \frac{1}{180n^3}.$$

(Lásd Petruska [127], 19.10.)

∗ **4.25. Feladat [10].** Adjunk hatékony módszert az Euler-konstans közelítésére.

Megoldás. Használjuk Euler összegzési formuláját.

4.26. Bázis. Az X normált tér elemeinek egy e_n (véges vagy végtelen) sorozatát a tér *Schauder-bázis*ának, vagy röviden *bázis*ának nevezzük, ha minden $x \in X$ egyértelműen előállítható $x = \sum_n \alpha_n e_n$ alakban. Világos, hogy véges dimenziós térben ez a fogalom egybeesik a szokásos bázis fogalommal. Végtelen dimenziós térben egy másik, tisztán algebrai bázis fogalom, a Hamel-bázis fogalma is létezik, ezt mi nem fogjuk használni. Ha egy normált térben van Schauder-bázis, akkor a tér szeparábilis, mert a bázis vektorainak racionális (vagy racionális valós és képzetes részű) együtthatókkal képzett véges lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak a térben. A megfordítás nem igaz, mint 1973-ban Enflo megmutatta.

4.27. Ekvivalens normák. Az X lineáris téren a $|\ |$ és $\|\ \|$ normákat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha léteznek olyan $c, C > 0$ valós számok, hogy

$$c|x| \le \|x\| \le C|x|$$

minden $x \in X$ esetén. Normák ekvivalenciája nyilván ekvivalenciareláció. Ekvivalens normákra ugyanaz a határérték és ugyanazok a Cauchy-sorozatok.

$\rightarrow$ **4.28. Feladat [6].** Legyenek $(X_j, \|\ \|_j)$ normált terek, $j = 1, 2, \dots, n$, legyen $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ és $\|x\| = \max_j \|x_j\|_j$, ha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mutassuk meg, hogy $(X, \|\ \|)$ normált tér. Ez az $(X_j, \|\ \|_j)$ *normált terek szorzata.*

$\rightarrow$ **4.29. Feladat [8].** Az előző feladat jelöléseivel, legyen $1 \le p < \infty$ és

$$\|x\|' = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^p}.$$

Mutassuk meg, hogy $\|\ \|'$ és $\|\ \|$ ekvivalens normák.

4.30. Lemma. *Legyen Y véges dimenziós, Z pedig zárt altere az X normált térnek úgy, hogy $Y \cap Z = \{0\}$. Ekkor $Y + Z$ is zárt altér, és ha az $x_n = y_n + z_n$, $y_n \in Y$, $z_n \in Z$ sorozat konvergens, akkor y_n és z_n is konvergensek.*

A bizonyítás azon a jól ismert tételen múlik, hogy egy korlátos valós számsorozatnak van konvergens részsorozata. Ezt annak felhasználásával szokás bizonyítani, hogy minden x_n valós számsorozatnak van monoton részsorozata: ha csak véges sok olyan n index van, amelyre $x_j \le x_n$, ha $j > n$, akkor az utolsó utáni tagokból kiválasztható egy monoton növekedő részsorozat, ha pedig végtelen sok, akkor ezek az indexek egy monoton csökkenő részsorozatot határoznak meg.

Bizonyítás. Y dimenziója szerinti teljes indukciót használunk. Ha Y egydimenziós, y egy nem nulla eleme, és d jelöli az y távolságát Z-től, akkor $\alpha_n y + z_n = x_n \to x$ esetén $\|\alpha_n y + z_n\| \ge |\alpha_n| d$ miatt α_n korlátos, így van konvergens részsorozata. Erre áttérve, kapjuk, hogy ez a részsorozata z_n-nek is konvergens, így x előáll $\alpha y + z$ alakban, tehát $Y + Z$ zárt. Ha α_n-nek más torlódási pontja is lenne, akkor ez az előállítás nem lenne egyértelmű, ami ellentmond az $Y \cap Z = \{0\}$ feltételnek. Az általános esetet az $Y = Y' + Y''$, $x_n = y'_n + y''_n + z_n$, $y'_n \in Y'$, $y''_n \in Y''$, $z_n \in Z$ felbontásból kapjuk, ahol Y' egydimenziós.

4.31. Következmény. *Normált tér véges dimenziós altere zárt.*

4.32. Tétel. *Véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen φ_i a tér véges bázisa. Elég megmutatnunk, hogy egy $\|\ \|$ norma és a

$$|x| = \sum_i |\alpha_i|, \quad \text{ha} \quad x = \sum_i \alpha_i \varphi_i$$

összefüggéssel definiált norma ekvivalensek. Nyilván

$$\|x\| \le \sum_i |\alpha_i| \|\varphi_i\| \le |x| \max_i \|\varphi_i\|.$$

A másik irányt az n dimenziószám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 0$-ra triviális, és ha $n-1$-re igaz, akkor d-vel jelölve φ_n távolságát a $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ által kifeszített zárt altértől,

$$d|\alpha_n| \le \|\alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1} + \alpha_n\varphi_n\| = \|x\|,$$

így

$$\begin{aligned} |x| &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i| + |\alpha_n| \le c_{n-1}\|x - \alpha_n\varphi_n\| + \|x\|/d \\ &\le c_{n-1}\|x\| + c_{n-1}\|\varphi_n\|\|x\|/d + \|x\|/d. \end{aligned}$$

4.33. Következmény. *Ha az X normált térben φ_i lineárisan független elemek egy véges sorozata, akkor az $x_n = \sum_i \alpha_i^{(n)}\varphi_i$ sorozat pontosan akkor konvergál az x elemhez, ha $x = \sum_i \alpha_i\varphi_i$, és $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ minden i-re.*

4.34. Következmény. *Véges dimenziós normált tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. A szükségességet már láttuk. Ha K egy korlátos és zárt halmaz és $x_n = \sum_i \alpha_i^{(n)}\varphi_i$ egy K-beli sorozat, akkor $i = 1$-re, majd ebből $i = 2$-re, stb. kiválasztva egy részsorozatot , melyre $\alpha_i^{(n)}$ konvergens, x_n egy konvergens részsorozatát kapjuk.

4.35. Következmény: Bolzano–Weierstrass-tétel. *Véges dimenziós normált térben minden korlátos, végtelen halmaznak van torlódási pontja.*

4.36. Következmény. *Bármely véges dimenziós normált tér teljes.*

Bizonyítás. Minden Cauchy-sorozat korlátos, tehát értékkészletének lezártja kompakt, azaz a Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata.

4.37. Megjegyzés. Az előző tétel könnyen bizonyítható $\mathbb{R}^n$ szokásos, belső szorzatból származó $\|\ \|_2$ normájának tulajdonságait felhasználva. Elég $\mathbb{R}^n$-re belátni, hogy bármely norma a $\|\ \|_2$ normával ekvivalens. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ a szokásos ortonormált bázis, $\|\ \|$ tetszőleges norma. Ekkor $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ esetén $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ és

$$\|x\| \le \max\{|x_i| : 1 \le i \le n\} \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \le \|x\|_2 \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|,$$

tehát teljesül az $\|x\| \le C\|x\|_2$ egyenlőtlenség. Innen az $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ tér $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ térre való identikus leképezése folytonos, és mivel a $\|\ \|_2$ normában vett egységgömb határa kompakt, rajta a $\|\ \|$ függvény felveszi c pontos alsó határát, ami nem lehet nulla. Így $\|x/\|x\|_2\| \ge c$, ha $x \ne 0$, azaz $\|x\| \ge c\|x\|_2$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re.

4.38. Riesz lemmája majdnem ortogonális elem létezéséről. *Legyen X egy normált tér, Y valódi zárt lineáris altere X-nek. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan x elem, amelyre $\|x\| = 1$ és a $d(x, y) = \|x - y\|$ távolsággal $d(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyen $z \in X \setminus Y$ és válasszuk meg az $y \in Y$ elemet úgy, hogy

$$\|z - y\| - d(z, Y) < \varepsilon d(z, Y)$$

teljesüljön. Mivel Y zárt, $z \notin Y$, így $0 < d(z, Y) \leq \|z - y\|$, képezhetjük tehát az $x = (z - y)/\|z - y\|$ elemet. Erre $\|x\| = 1$, és megbecsülve a $d(x, Y)$ távolságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d(x, Y) &= \inf_{u \in Y} \|x - u\| = \inf_{u \in Y} \left\| \frac{z - y}{\|z - y\|} - u \right\| \\ &= \frac{1}{\|z - y\|} \inf_{u \in Y} \|z - (y + u\|z - y\|)\| \\ &= \frac{1}{\|z - y\|} \inf_{v \in Y} \|z - v\| = \frac{d(z, Y)}{\|z - y\|} \\ &> \frac{d(z, Y)}{d(z, Y)(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

4.39. Megjegyzés. Véges dimenziós térben $d(x, Y) = 1$ is elérhető, mert az $x \mapsto d(x, Y)$ függvény folytonos a zárt egységgömbön, és így felveszi szuprémumát. Euklidészi térben ekkor x ortogonális Y-ra, innen kapta a lemma a nevét.

4.40. Tétel. *Egy normált tér akkor és csak akkor véges dimenziós, ha a zárt egységgömbje kompakt.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatnunk, hogy ha a tér nem véges dimenziós, akkor az egységgömb nem kompakt. Teljes indukcióval válasszunk olyan, egységnyi normájú elemekből álló x_n sorozatot, amelynek minden tagja az előzőek lineáris burkától 1/2-nél nagyobb távolságra van. Az így kapott sorozat bármely két különböző tagja 1/2-nél nagyobb távolságra van, tehát nem lehet konvergens részsorozata.

→ **4.41. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy egy normált tér pontosan akkor lokálisan kompakt, ha véges dimenziós.

4.42. A legjobb approximáció problémája. Az approximációelmélet sok problémája az alábbi absztrakt sémába tartozik: Adott egy (X, d) metrikus tér, annak egy Y részhalmaza, és egy $x \in X$ elem. Az $y \in Y$ elemet az *x-et legjobban approximáló Y-beli elem*nek nevezzük, ha $d(x, y) = d(x, Y)$. A kérdés az, hogy létezik-e mindig legjobban approximáló elem, egyértelmű-e, és jellemezhetjük-e valahogyan, mert tulajdonságainak ismerete segíthet a meghatározásában. Például ha Y kompakt, akkor létezik legjobban approximáló elem. Abban a nagyon fontos esetben, amikor Y egy normált tér véges dimenziós altere, az egzisztencia problémája elintézhető:

4.43. Tétel. *Ha Y véges dimenziós altere az X normált térnek, akkor minden $x \in X$ elemhez létezik őt legjobban approximáló Y-beli elem.*

Bizonyítás. Legyen $y_0 \in Y$ és $Y_0 = \{y : y \in Y, \|x - y\| \leq \|x - y_0\|\}$. Mivel Y_0 kompakt, létezik legjobban approximáló elem Y_0-ban, ami egyben Y-beli legjobban approximáló elem is.

→ **4.44. Feladat [7].** Egyértelmű-e egy kétdimenziós normált tér egy lineáris alterében a legjobban approximáló elem?

4.45. Függvényterek. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $(Y, |\ |)$ normált tér. Az Y^X lineáris térben értelmezve van sorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Sorok pontonkénti és egyenletes konvergenciáját a részletösszegek pontonkénti, illetve egyenletes konvergenciájával értelmezzük. Az egyenletes konvergencia az

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|\colon t \in X\}$$

félnormából származik. Ha csak az X-et Y-ba képező korlátos függvények osztályát tekintjük, akkor normát kapunk. Ha Y teljes, akkor 3.92 szerint ez a normált tér teljes, így benne minden abszolút konvergens sor konvergens (ez az úgynevezett *Weierstrass-kritérium*).

Ha X metrikus tér, és csak a korlátos folytonos függvények $\mathcal{B}(X;Y)$ terét tekintjük a fenti normával, akkor a fenti tér egy alterét kapjuk. Mivel folytonos függvények egyenletes határértéke folytonos, ez az altér zárt, így teljes.

A $\mathcal{B}(X;Y)$ tér egy (általában nem zárt) altere az X-et Y-ba képező kompakt tartójú folytonos függvények $\mathcal{K}(X;Y)$ tere. Ha X kompakt, akkor nyilván $\mathcal{C}(X;Y) = \mathcal{B}(X;Y) = \mathcal{K}(X;Y)$.

∗ **4.46. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy ha $z \in X$ rögzített, és $f_y(x) = d(x,y) - d(x,z)$ minden $x \in X$-re, akkor az $y \mapsto f_y$ leképezés izometrikus beágyazása az X metrikus térnek a $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ Banach-térbe.

∗ **4.47. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy

$$K = \{f \in \mathcal{C}[0,1]\colon f(0) = 0, \mathrm{Lip}(f) \le 1\}$$

kompakt.

∗ **4.48. Feladat [9].** Az előző feladat felhasználásával, mutassuk meg, hogy minden X metrikus térhez létezik őt sűrű altérként tartalmazó teljes metrikus tér, az X *teljes metrikus burka*. Mutassuk meg, hogy ha $\tilde{X}$ és $\tilde{\tilde{X}}$ az X két teljes metrikus burka, akkor X identikus leképezése egyértelműen terjeszthető ki egy $\tilde{X}$-ot $\tilde{\tilde{X}}$-ra képező izometriává.

∗ **4.49. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy minden X normált térhez létezik őt sűrű lineáris altérként tartalmazó Banach-tér. Egy ilyen Banach-teret az X *teljes burká*nak nevezünk. Mutassuk meg, hogy ha $\tilde{X}$ és $\tilde{\tilde{X}}$ az X két teljes burka, akkor X identikus leképezése egyértelműen terjeszthető ki egy $\tilde{X}$-ot $\tilde{\tilde{X}}$-ra képező lineáris és normatartó leképezéssé.

Megoldás. Alkalmazzuk az előző feladatot, és az egyenlőség és az egyenlőtlenség kiterjesztésének elvét.

4.50. Feladat [10]. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ és $x_0, x_1, x_2, \dots$ egy különböző számokból álló $[a,b]$-beli sorozat, amelyre $x_0 = a$ és $x_1 = b$. Legyen $\varphi_0 \equiv 1$, φ_1 az a lineáris függvény, amely a-ban nulla, b-ben pedig egy. Ha $n > 1$, legyen $x'_n = \sup\{x_k\colon k < n, x_k < x_n\}$ és $x''_n = \inf\{x_k\colon k < n, x_k > x_n\}$, továbbá legyen a φ_n folytonos függvény 1 az x_n pontban, nulla az $[a, x'_n]$ és $[x''_n, b]$ szakaszokon, és lineáris az $[x'_n, x_n]$ és $[x_n, x''_n]$ szakaszokon. Mutassuk meg, hogy $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ bázis a $\mathcal{C}[a,b]$ térben.

∗ **4.51. Feladat [11].** Legyen X Banach-tér $e_1, e_2, \dots$ bázissal. Mutassuk meg, hogy egy $K \subset X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos, zárt, és bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $\|R_n x\| < \varepsilon$, ha $n > N$, $x \in K$, ahol $x = \sum_j \alpha_j e_j$ és $R_n x = \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j e_j$. (Lásd Losonczi [104], 194. o.)

∗ **4.52. Feladat: Arzèla–Ascoli-tétel [11].** Legyen X kompakt metrikus tér, Y metrikus tér. Mutassuk meg, hogy egy $K \subset \mathcal{C}(X;Y)$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha a függvényei egyenlő mértékben folytonosak (adott pontban adott ε-hoz ugyanaz a δ jó minden függvénynél), és értékkészletük egy közös teljesen korlátos halmazban marad.

∗ **4.53. Feladat: Dini-tétel [11].** Bizonyítsuk be, hogy kompakt metrikus téren valós értékű folytonos függvények monoton sorozata, ha pontonként konvergál egy folytonos függvényhez, akkor egyenletesen is.

Megoldás. Használjuk a definíciókat, lásd Dieudonné [27].

∗ **4.54. Feladat [10].** Legyen $X = \mathcal{C}[0,1]$, $x(t) = t$, és

$$Y = \{y \colon y \in \mathcal{C}[0,1], y(0) = 0, \int_0^1 y(t)\,dt = 0\}.$$

Mutassuk meg, hogy x-hez az Y zárt altérben nem létezik legjobban approximáló elem. (Lásd Losonczi [104], 115. o.)

4.55. $\mathbb{L}^p$-terek. Legyen μ mérték és f egy $\mathbb{K}$-beli értékű mérhető függvény. Ha $1 \le p < \infty$, legyen

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (\text{itt } \infty^{1/p} = \infty),$$

és legyen

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \colon a \ge 0, \mu\{|f| > a\} = 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy $|f| \le \|f\|_\infty$ majdnem mindenütt, mert az $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ halmaz a nullmértékű $\{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}$ halmazok egyesítése. Jelölje $\mathbb{L}^p(\mu;\mathbb{K})$, vagy rövidebben $\mathbb{L}^p$, $1 \le p \le \infty$ azon $\mathbb{K}$-beli értékű mérhető függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$. Világos, hogy $\|f\|_p \ge 0$, és nulla csak akkor lehet, ha $f = 0$ majdnem mindenütt, továbbá $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$ és $f \in \mathbb{L}^p$. A következő tétel azt mutatja, hogy $\| \ \|_p$ félnorma $\mathbb{L}^p$-n, és a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva, $\mathbb{L}^p$ normált tér.

Ha a természetes mérték szerint integrálunk, akkor gyakran az $\mathbb{L}^p(X;\mathbb{K})$ jelölést fogjuk használni.

4.56. Minkowski-egyenlőtlenség. *Ha μ mérték, f és g pedig μ-mérhető $\mathbb{K}$-beli értékű függvények, és $1 \le p \le \infty$, akkor*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. Ha a jobb oldal ∞, nincs mit bizonyítani. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v} y + \frac{v}{u+v} z \right)^p \le \frac{u}{u+v} y^p + \frac{v}{u+v} z^p,$$

ha $u, v, y, z \geq 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = |f(x)|/\|f\|_p$, $z = |g(x)|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int (|f| + |g|)^p \, d\mu \leq 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség.

4.57. Riesz–Fischer-tétel. *$\mathbb{L}^p(\mu)$ teljes.*

∗ **Bizonyítás.** Az 4.7 tétel szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_p = \alpha < \infty,$$

akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor konvergens. Legyen

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{és} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Ekkor $\|y_n\|_p \leq \alpha$. Legyen $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, ekkor $p = \infty$ esetén $|y| \leq \alpha$ majdnem mindenütt, így $\|y\|_p \leq \alpha$, ha pedig $1 \leq p < \infty$, akkor $\int y_n^p \, d\mu \leq \alpha^p$, és Beppo Levi tétele szerint

$$\int y^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} y_n^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int y_n^p \, d\mu \leq \alpha^p.$$

Ez azt jelenti, hogy y majdnem mindenütt véges, azaz a $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ sor majdnem mindenütt konvergens. Ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor is majdnem mindenütt konvergens, összege legyen az x függvény. Megmutatjuk, hogy $x \in \mathbb{L}^p$ és $\|s_n - x\|_p \to 0$. A $p = \infty$ esetben ez azonnal adódik az $\|s_n - x\|_p \leq \|y_n - y\|_p$ becslésből. Az $1 \leq p < \infty$ esetben az

$$|s_n - x|^p = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \Big|^p \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \Big)^p \leq y^p$$

egyenlőtlenség miatt, amely majdnem mindenütt teljesül, $s_n - x \in \mathbb{L}^p$, azaz $x = s_n - (s_n - x) \in \mathbb{L}^p$. Lebesgue tétele miatt

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\int |s_n - x|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int \lim_{n\to\infty} |s_n - x|^p \, d\mu \right)^{1/p} = 0.$$

4.58. Tétel. *Legyen μ mérték és $1 \leq p < \infty$. Ekkor az $\mathbb{L}^p(\mu)$-beli egyszerű függvények sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{L}^p(\mu)$-ben a $\| \ \|_p$ normára nézve.*

Bizonyítás. $f \in \mathbb{L}^p$ valós és képzetes részének pozitív és negatív részére is alkalmazva az approximációs lemmát, olyan egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot kapunk, amely majdnem mindenütt konvergál f-hez és amelyre $|s_n| \leq |f|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Az $|f - s_n|^p$ sorozatra alkalmazva Lebesgue tételét kapjuk, hogy $\|f - s_n\|_p \to 0$. Így egy adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $s \in \mathbb{L}^p(\mu)$ egyszerű függvény, amelyre $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

∗ **4.59. Tétel.** *Legyen μ Radon-mérték az X lokálisan kompakt metrikus téren és $1 \le p < \infty$. Ekkor $\mathcal{K}(X)$ sűrű $\mathbb{L}^p(\mu)$-ben a $\|\ \|_p$ normára nézve.*

Bizonyítás. Az előző tétel felhasználásával adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk egy olyan $s \in \mathbb{L}^p(\mu)$ egyszerű függvényt, amelyre $\|f - s\|_p < \varepsilon$. Legyenek $\operatorname{rng} s$ nem 0 értékei $y_1, y_2, \dots, y_n$, $A_j = s^{-1}\{y_j\}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, $A = \cup_{j=1}^n A_j$ és $M = \sup\{|y_j| : j = 1, 2, \dots, n\}$. Nyilván $\mu(A) < \infty$. Egy tetszőleges $\delta > 0$-hoz választhatunk olyan V nyílt halmazt, amelyre $A \subset V$ és $\mu(V \setminus A) < \delta$, valamint olyan K_j, $j = 1, 2, \dots, n$ kompakt halmazokat, amelyekre $K_j \subset A_j$ és $\mu(A_j \setminus K_j) < \delta$. Legyen $K = \cup_{j=1}^n K_j$. Az Uriszon-lemma szerint minden j-re létezik olyan $g_j \in \mathcal{K}(X)$, amelyre $\operatorname{rng} g_j \subset [0, 1]$, és amely K_j-n 1, $F_j = (X \setminus V) \cup (K \setminus K_j)$-n pedig 0. Legyen $g = \sum_{j=1}^n g_j y_j$. Ekkor g folytonos, és

$$\int_X |s - g|^p \, d\mu = \int_{V \setminus K} |s - g|^p \, d\mu \le \mu(V \setminus K)((n+1)M)^p \le (n+1)\delta((n+1)M)^p.$$

Ebből $\|s - g\|_p < \varepsilon$, ha δ elég kicsi, így

$$\|f - g\|_p \le \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < 2\varepsilon.$$

∗ **4.60. Hölder-egyenlőtlenség.** *Ha μ egy mérték, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), akkor $f \in \mathbb{L}^p(\mu)$, $g \in \mathbb{L}^q(\mu)$ esetén*

$$\int |f||g| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Bizonyítás. A $p = 1$ és $p = \infty$ esetek triviálisak. Feltehetjük, hogy a jobb oldal nem nulla. Az $F = |f|^p / \|f\|_p^p$, $G = |g|^q / \|g\|_q^q$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$ jelölésekkel $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, $F \ge 0$, $G \ge 0$. Mivel $-\ln$ konvex függvény, ha $u, v > 0$, akkor

$$\ln(\alpha u + \beta v) \ge \alpha \ln u + \beta \ln v,$$

amiből

$$\alpha u + \beta v \ge u^\alpha v^\beta,$$

így

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \, d\mu = \int F^\alpha G^\beta \, d\mu \le \int (\alpha F + \beta G) \, d\mu =$$
$$\alpha \int F \, d\mu + \beta \int G \, d\mu = 1.$$

∗ **4.61. Feladat [11].** Egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér *bázis*án egy olyan $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszert értünk, amelyre minden $\varepsilon > 0$-hoz és $A \in \mathcal{A}$-hoz van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{L}^p$, $1 \le p < \infty$ terek pontosan akkor szeparábilisak, ha a mértéktérnek létezik megszámlálható bázisa.

$*$ **4.62. Feladat [11].** Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *m-rektifikálhatónak* nevezünk, ha χ^m-mérhető, és χ^m-majdnem része megszámlálható sok $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény értékkészlete uniójának. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{L}^p$-terek ($1 \le p < \infty$) szeparábilisak, ha a mérték a Lebesgue-mérték, vagy a χ^m Hausdorff-mérték egy m-rektifikálható halmazon.

$\to$ **4.63. Feladat: $\mathbb{L}^p$-normák $\mathbb{K}^n$-en [8].** Legyen $X = \{1, 2, \dots, n\}$ és μ a számláló mérték. Vizsgáljuk meg az $\mathbb{L}^p(\mu)$-tereket ebben az esetben. Az $n = 2$ esetben vázoljuk az egységgömböt.

$\to$ **4.64. Feladat [8].** Ha $X = \mathbb{N}$ és μ a számláló mérték, $\mathbb{L}^p(\mu)$ a hagyományosan $\mathbb{l}^p$-vel jelölt tér. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat a $\mathbb{l}^p$ terekben, hogy konvergensek-e, és mi a határértékük (x_n-ben n nem nulla tag van):

(1) $x_n = (1, 2, \dots, n, 0, 0, \dots)$;

(2) $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$;

(3) $x_n = (1/n, 2/n, \dots, n/n, 0, 0, \dots)$;

(4) $x_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$;

(5) $x_n = (1/n^\alpha, 1/n^\alpha, \dots, 1/n^\alpha, 0, 0, \dots)$.

$\to$ **4.65. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy azok a sorozatok, amelyeknek valamilyen (a sorozattól függő) indextől kezdve minden tagja nulla, sűrű alteret alkotnak az $\mathbb{l}^p$, $1 \le p < \infty$ térben.

4.66. Feladat [9]. Adjunk meg bázist a $\mathbb{l}^p$, $1 \le p < \infty$ térben.

4.67. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{l}^\infty$ nem szeparábilis.

$\to$ **4.68. Feladat [8].** Zárt alteret alkotnak-e $\mathbb{l}^\infty$-ben a konvergens, illetve a nullsorozatok? (A nullsorozatokat, illetve a konvergens sorozatokat $\mathbb{l}^\infty$ altereként fogjuk tekinteni. Ezen terek szokásos jelölése $\mathbf{c}_0$ illetve $\mathbf{c}$.)

$\to$ **4.69. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy a

$$H = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{l}^2 \colon x_i \in \mathbb{R}, |x_i| \le 1/i\}$$

Hilbert-kocka kompakt részhalmaza $\mathbb{l}^2$-nek.

$\to$ **4.70. Feladat [7].** Adjuk meg $[0, 1]$ egy folytonos leképezését a Hilbert-kockára.

4.71. Feladat [7]. Adjunk meg bázist a nullsorozatok terében.

4.72. Feladat [8]. Adjunk meg bázist a konvergens sorozatok terében.

$\to$ **4.73. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy véges mérték esetén $\mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^q$, ha $1 \le q < p \le \infty$, és $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$, ha f mérhető, skalár értékű függvény.Mutassuk meg, hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0, 1]$-en, akkor a tartalmazás valódi.

$\to$ **4.74. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbf{l}^q \subset \mathbb{l}^p$, ha $1 \le q \le p \le \infty$.

$\to$ **4.75. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^n)$, ha $p \ne q$.

$*$ **4.76. Feladat [8].** Adjunk példát $\mathbb{L}^1[0, 1]$-ben olyan korlátos sorozatra, amely nem konvergens, de majdnem mindenütt nullához tart.

$*$ **4.77. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy $1 < p < \infty$ esetén a Hölder-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor teljesül egyenlőség, ha van olyan $c \geq 0$, hogy $\big|f(x)\big|^p = c\big|g(x)\big|^q$ μ-majdnem minden x-re vagy $c\big|f(x)\big|^p = \big|g(x)\big|^q$ μ-majdnem minden x-re. Mikor teljesül egyenlőség a $p = 1$ esetben?

$*$ **4.78. Feladat [9].** Ha egy X normált térben $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ esetén van olyan $c \geq 0$, hogy $x = cy$ vagy $y = cx$, akkor a normált teret *szigorúan normált*nak nevezzük. Mutassuk meg, hogy egy X normált térre az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) X szigorúan normált;

(2) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ esetén $\big\|(x + y)/2\big\| < 1$;

(3) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$ esetén $\big\|\alpha x + (1 - \alpha)y\big\| < 1$.

$*$ **4.79. Feladat [5].** Legyen X szigorúan normált tér, $K \subset X$ konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy minden $x \in X$-hez legfeljebb egy olyan $y \in K$ létezik, amelyre $\|x-y\| = d(x, K)$.

$*$ **4.80. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $1 < p < \infty$ esetén $\mathbb{L}^p(\mu)$ szigorúan normált, de $p = 1$ és $p = \infty$ esetén általában nem.

$*$ **4.81. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén esetén $\mathbb{L}^p(\mu)$ normája általában nem származik belső szorzatból.

4.82. Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy a 4.55-4.60 definíciók és tételek nem az f, hanem az $|f|$ függvény tulajdonságain múlnak, így ezeket minden nehézség nélkül átvihetjük $\mathbb{K}^n$, sőt bármilyen valós vagy komplex szeparábilis Banach-térbeli értékű mérhető függvényekre is, az abszolút érték helyett mindenütt normát használva. A további általánosítás akadálya, hogy ha az Y Banach-tér nem szeparábilis, akkor nem biztos, hogy két mérhető függvény összege mérhető, de tekinthetünk $\mathbb{L}^0(\mu; Y)$-beli függvényeket. Ha Y Hilbert-tér, az $(f, g) \mapsto \int \langle f(x), g(x)\rangle \, d\mu(x)$ belső szorzattal az $\mathbb{L}^2(\mu; Y)$ tér Hilbert-tér.

$*$ **4.83. Feladat [10].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és Y metrikus tér. Mutassuk meg, hogy ha $1 \leq p < \infty$, akkor

$$d_p(f, g) = \left(\int d(f(x), g(x))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}^0(\mu; Y)$$

eltérés. Mutassuk meg, hogy

$$d_\infty(f, g) = \inf\Big\{ r \colon r \geq 0, \mu\big\{d(f, g) > r\big\} = 0 \Big\}, \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}^0(\mu; Y)$$

is eltérés. Mutassuk meg, hogy ha $0 < p < 1$, akkor

$$(f, g) \mapsto \left(\int d(f(x), g(x))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

általában nem eltérés, de

$$d_p(f, g) = \int d(f(x), g(x))^p \, d\mu(x), \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}^0(\mu; Y)$$

eltérés. Ha Y normált tér, azon $f \in \mathbb{L}^0(\mu; Y)$ függvények osztályát, amelyekre $d_p(f, 0) < \infty$, jelölje $\mathbb{L}^p(\mu; Y)$. Mutassuk meg, hogy az $f \mapsto d_p(f, 0)$ leképezés általában nem norma.

$*$ **4.84. Topologikus algebrai struktúrák.** Topologikus algebrai struktúrák definiálásának alapgondolata, hogy megköveteljük a műveletek folytonosságát. Így például egy *topologikus csoport* egy olyan G csoport, amely egyben topologikus tér is, úgy, hogy az $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ leképezése $G \times G$-nek G-be folytonos. A fizikában és kémiában legfontosabb példák egy H (gyakran véges dimenziós) Hilbert-tér $\mathcal{L}(H; H)$-beli reguláris lineáris operátorainak különböző részcsoportjai (az unitér operátorok csoportja, az egy determinánsú operátorok csoportja, stb.), ezek metrizálhatók. A lokálisan kompakt Hausdorff-csoportok vizsgálatának talán legfontosabb eszköze a Haar Alfréd magyar matematikus által 1933-ban bevezetett (bal) *Haar-mérték*. Ez egy nem azonosan nulla λ Radon-mérték G Borel-halmazain, amely *bal invariáns*, azaz $\lambda(xB) = \lambda(B)$ minden $x \in G$ és $B \subset G$ Borel-halmaz esetén. Megmutatható, hogy egy ilyen mérték konstans szorzótól eltekintve egyértelmű. Sok fontos esetben, de nem mindig λ *jobb invariáns* is, azaz $\lambda(Bx) = \lambda(B)$, ha $x \in G$ és $B \subset G$ Borel-halmaz. $\mathbb{R}^n$ additív csoportján a Lebesgue-mérték egy Haar-mérték. A Haar-mérték rövid tárgyalása megtalálható a Járai [71] jegyzetben. Topologikus csoportokkal kapcsolatban Bourbaki [14] művének II. könyve tartalmazza az alapfogalmakat. Részletesebb tárgyalás található a Hewitt–Ross [65] monográfiában.

Egy másik fontos fogalom a *topologikus vektortér* fogalma. Ez egy olyan vektortér $\mathbb{K}$ felett, amely additív topologikus csoport, és amelyre az $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ leképezése $\mathbb{K} \times X$-nek X-be folytonos. A legfontosabbak a *lokálisan konvex* terek, amelyekben a nullának bármely környezete tartalmazza a nulla egy konvex környezetét (a normált terek mind ilyenek), illetve a *Fréchet-terek*, azok a lokálisan konvex terek, amelyek topológiája egy olyan metrikából származik, amelyre a tér teljes (a Banach-terek mind ilyenek). Finom vizsgálatokkal a lineáris analízis fő tételei átvihetők ezekre a terekre. Mivel a bennünket érdeklő legfontosabb esetekben ($\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$) a metrika vagy a konvergencia közvetlen megadásával is boldogulhatunk, nem tárgyaljuk a topologikus vektortereket. Az alapfogalmakat további utalásokkal lásd Losonczi [104] jegyzetében.

5

Lineáris operátorok

Valószínűleg Riesz Frigyes volt az első matematikus, aki egy H szeparábilis Hilbert-tér összes endomorfizmusainak $\mathcal{L}(H;H)$ algebráját tekintette annak normájával ...

Jean Dieudonné [28]

5.1. Lineáris operátorok. Legyenek X és Y lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $T \in X \to Y$ leképezést *lineáris operátor*nak nevezünk, ha X egy lineáris alterén van értelmezve, és minden $x, y \in \operatorname{dmn}(T)$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

$$T(x+y) = Tx + Ty \qquad (\textit{additív}),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T x \qquad (\textit{homogén}).$$

Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor *lineáris funkcionál*ról beszélünk. Egy lineáris operátor $\operatorname{rng}(T)$ képtere (azaz értékkészlete) és $\ker(T) = T^{-1}(0)$ *mag*ja vagy *nulltere* lineáris alterek; T pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha $\ker(T) = \{0\}$, és ekkor T^{-1} is lineáris operátor, mert $y_1, y_2 \in \operatorname{rng}(T)$ esetén az $T^{-1}y_1 = x_1$, $T^{-1}y_2 = x_2$ jelölésekkel $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ és T linearitása miatt $y_1 + y_2 = Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$, azaz

$$T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2 = x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1 + y_2),$$

és hasonlóan $\alpha y_1 = \alpha T x_1 = T(\alpha x_1)$, amiből

$$\alpha T^{-1} y_1 = \alpha x_1 = T^{-1}(\alpha y_1).$$

Megjegyezzük, hogy a közönséges algebrai műveletek óvatosan kezelendők, ha az operátorok nem az egész téren vannak értelmezve. Például a T és S operátorok összege csak a $\operatorname{dmn}(T+S) = \operatorname{dmn}(T) \cap \operatorname{dmn}(S)$ halmazon, szorzata (összetétele) pedig csak a $\operatorname{dmn}(TS) = \{x : x \in \operatorname{dmn}(S) \text{ és } Sx \in \operatorname{dmn}(T)\}$ halmazon értelmezhető.

A normált teret normált térbe képező T lineáris operátor *normá*ja

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|.$$

Ha $\operatorname{dmn}(T) \neq \{0\}$, akkor

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in \operatorname{dmn}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1, x \in \operatorname{dmn}(T)} \|Tx\|.$$

Nyilván $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$ minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re, és $\|T\|$ a legkisebb ilyen konstans. Ha a T normája véges, akkor T-t *korlátos*nak nevezzük. Vegyük észre, hogy ez csak azt jelenti,

hogy T korlátos a zárt egységgömbön, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy korlátos a korlátos halmazokon, de nem azt, hogy korlátos a teljes értelmezési tartományon. Így ez az elterjedt szóhasználat némileg félrevezető. A norma és a műveletek kapcsolatát az

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(\alpha T)x\big\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = |\alpha|\|T\|,\\ \|T+S\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(T+S)x\big\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| + \sup_{\|x\|\le 1}\|Sx\| = \|T\|+\|S\|,\\ \|TS\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(TS)x\big\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|T\|\|Sx\| \le \|T\|\|S\|\end{aligned}$$

összefüggések jellemzik. Az X-et Y-ba képező korlátos lineáris operátorok terét $\mathcal{L}(X;Y)$-nal fogjuk jelölni. A fentiek szerint $\mathcal{L}(X;Y)$ normált tér. Az $\mathcal{L}(X;\mathbb{K})$ teret X^*-gal is jelöljük, és X *konjugált ter*ének nevezzük.

5.2. Tétel. *Egy normált teret normált térbe képező lineáris operátorra a folytonosság, a folytonosság valamely pontban és a korlátosság ekvivalensek.*

Bizonyítás. Ha az operátor korlátos, akkor Lipschitz-függvény, így folytonos. Ha a T operátor folytonos x_0-ban, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $\|x\| = \delta$ esetén $\|Tx\| = \big\|T(x+x_0) - T(x_0)\big\| \le 1$, így $\big\|T(x/\|x\|)\big\| \le 1/\delta$, azaz $\|T\| \le 1/\delta$.

→ **5.3. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy egy $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ operátorra $\mathrm{Lip}(T) = \|T\|$.

→ **5.4. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $T_n \to T$ a $\mathcal{L}(X;Y)$ térben, és $x_n \to x$ az X térben, akkor $T_n x_n \to Tx$.

→ **5.5. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy véges dimenziós téren értelmezett lineáris operátor mindig korlátos.

→ **5.6. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy egy valós normált teret valós normált térbe képező additív és folytonos leképezés homogén is.

5.7. Tétel. *Ha Y Banach-tér, akkor $\mathcal{L}(X;Y)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen T_n egy Cauchy-sorozat. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy ha $n, m \ge N$, akkor $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$. Bármely x-re

$$\|T_n x - T_m x\| = \big\|(T_n - T_m)x\big\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|, \tag{1}$$

ha $n, m \ge N$, ezért $T_n x$ Cauchy-sorozat. Y teljessége miatt $T_n x$ konvergens, legyen $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. A T lineáris, mert

$$\begin{aligned}T(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty,\\ T(\alpha x) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x = \alpha T x.\end{aligned}$$

Végül (1)-ben $m \to \infty$ határátmenettel $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon\|x\|$, ha $n \ge N$, amiből $T_n - T$, és így T is korlátos és $\|T_n - T\| \to 0$.

5.8. Banach-algebrák. *Normált algebra* alatt egy olyan $\mathbb{K}$ feletti X algebrát értünk, amely normált tér is, és $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$, ha $x, y \in X$. Egy normált algebrát *Banach-algebrá*nak, vagy röviden B-*algebrá*nak nevezünk, ha teljes. *Egységelemes normált algebra* esetén feltesszük, hogy az egységelem normája 1. Ha X normált tér, akkor $\mathcal{L}(X;X)$ egységelemes normált algebra, és ha X Banach-tér, akkor $\mathcal{L}(X;X)$ egységelemes Banach-algebra. Ez a Banach-algebra általában nem kommutatív. $\mathcal{B}(X;\mathbb{K})$ példa egységelemes kommutatív Banach-algebrára. Egységelemes algebrában definiálható egy x elem $\sigma(x)$ *spektrum*a, mint azon $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárok halmaza, amelyekre $x-\lambda e$-nek nem létezik multiplikatív inverze, valamint az $r(x)$ *spektrálsugar*a, mint a spektrum elemei abszolút értékeinek szuprémuma. Csak a $\mathbb{C}$ feletti egységelemes Banach-algebrák fontosak.

5.9. Projekcióoperátorok és zárt alterek. Legyen X lineáris tér és $X = Y \oplus Z$ az X direkt felbontása, azaz tegyük fel, hogy Y és Z az X alterei és minden $x \in X$ egyértelműen írható fel $x = y + z$ alakban, ahol $y \in Y$ és $z \in Z$. A felírás lehetősége azzal ekvivalens, hogy $Y \cup Z$ lineáris burka X, az egyértelműsége pedig azzal, hogy $Y \cap Z = \{0\}$. Legyen $Px = z$. Az így definiált lineáris operátort a Z mentén Y-ra való *projekció*nak nevezzük. Nyilván az Y mentén Z-re való projekció $\mathbb{I} - P$. Egy $P\colon X \to X$ lineáris operátor pontosan akkor projekció, ha $P^2 = P$. Valóban, ekkor P a $\ker(P)$ mentén $\mathrm{rng}(P)$-re való projekció. A legegyszerűbb projekcióoperátorok az $\mathbb{I}$ identikus operátor és a nulloperátor. Ha X normált tér, a projekciók nem feltétlenül folytonosak. Ha P folytonos projekció, akkor $\ker(P)$ és $\mathrm{rng}(P) = \ker(\mathbb{I} - P)$ zártak.

→ **5.10. Feladat [9].** Állapítsuk meg, hogy $\mathcal{C}[0,1]$ alábbi funkcionáljai közül melyek lineárisak, korlátosak, és mi a normájuk:

(1) $f(x) = \int_0^1 x(t) \sin t \, dt$;

(2) $f(x) = \int_0^1 t^{1/2} x(t^2) \, dt$;

(3) $f(x) = \int_0^1 |x(t)| \, dt$;

(4) $f(x) = \sup_{0 \le t \le 1} x(t)$;

(5) $f(x) = x(1/2)$;

(6) $f(x) = \int_0^1 x(t) \, dt - 2x(1/2)$;

(7) $f(x) = \int_0^1 x^2(t) \, dt$.

5.11. Feladat [8]. Legyen $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$, legyen $\alpha_j \in \mathbb{K}$, ha $1 \le j \le n$ és $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x(t_j)$, ha $x \in \mathcal{C}[a,b]$. Határozzuk meg az f funkcionál normáját.

→ **5.12. Feladat [9].** Legyen $\alpha \ge 0$ és $a \in \mathcal{C}[0,1]$ rögzített. Vizsgáljuk meg, hogy $\mathcal{C}[0,1]$ alábbi, önmagába való leképezései folytonosak-e:

(1) $(Tx)(t) = a(t)x(t)$;

(2) $(Tx)(t) = x(t^2)$;

(3) $(Tx)(t) = x(t^\alpha)$;

(4) $(Tx)(t) = \int_0^t x^2(s) \, ds$;

(5) $(Tx)(t) = \int_0^1 \sin(t-s) x(s) \, ds$.

5.13. Feladat [10]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett lesz a $(Tx)(t) = \beta x(t^\alpha)$ leképezés folytonos $\mathbb{L}^2[0,1]$-en? Mikor lesz kontrakció?

5.14. Feladat [5]. Legyen $k\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{C}[a,b]$-n értelmezett $f(x) = \int_a^b k(s)x(s)\,ds$ funkcionál korlátos.

5.15. Feladat [6]. Legyen $K\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a $(T_K x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ integráloperátor $\mathcal{C}[a,b]$-t önmagába képezi és korlátos.

5.16. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt$$

funkcionál értékeinek szuprémuma $\mathcal{C}[0,1]$ zárt egységgömbjén 1, de ezt nem veszi fel.

5.17. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy a

$$(Tx)(s) = \int_{-1}^1 x(t)\operatorname{sgn}(s-t)\,dt$$

összefüggés $\mathcal{C}[-1,1]$-et önmagába képező folytonos lineáris operátort definiál és határozzuk meg a normáját.

5.18. Feladat [11]. Legyen μ a számláló mérték $\{1,2,\dots,n\}$-en. Fejezzük ki $\mathbb{L}^p(\mu)$ egy lineáris operátorának normáját mátrixának elemeivel $p = 1, 2, \infty$ esetén. (Lásd Losonczi [104], 130–133. o.)

5.19. Feladat [12]. Általánosítsuk az előző feladatot $\mathbb{L}^p(\mu) \to \mathbb{L}^{p'}(\mu)$ típusú lineáris leképezésekre, ahol $p, p' \in \{1, 2, \infty\}$.

$\to$ **5.20. Feladat [9].** Határozzuk meg a két dimenziós euklidészi tér azon operátorának normáját, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.21. Feladat [7]. Határozzuk meg a

$$T\colon (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mapsto (x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)$$

összefüggéssel definiált $T\colon \mathbb{l}^2 \to \mathbb{l}^2$ operátor normáját, ahol $x_j \in \mathbb{R}$.

$*$ **5.22. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy a konvergens sorozatok terének duális tere, és a nullsorozatok terének duális tere is $\mathbb{l}^1$-el izomorf. (Lásd Losonczi [104], 162. o., vagy Royden [138], 123. o.)

$*$ **5.23. Feladat [12].** Igazoljuk, hogy egy egységelemes algebrában

(1) ha x-nek és xy-nak van multiplikatív inverze, akkor y-nak is;

(2) ha xy-nak és yx-nek van multiplikatív inverze, akkor x-nek és y-nak is;

(3) ha $xy = e$, az egységelem, akkor $(yx)^2 = yx$;

(4) ha $e-xy$-nak van multiplikatív inverze, akkor $e-yx$-nek is.

Megoldás.

(1) $y^{-1}=(xy)^{-1}x$. $(xy)^{-1}xy=e$ és $y(xy)^{-1}x=(x^{-1}x)y(xy)^{-1}x=x^{-1}(xy)(xy)^{-1}x=e$.

(2) $y^{-1}=(xy)^{-1}x$, $x^{-1}=y(xy)^{-1}$.

(3) $(yx)(yx)=y(xy)x=yx$. Ha $yx=0$ lenne, akkor $0=(yx)y=y(xy)=y$ lenne, ami ellentmondás.

(4) Ha $(xy-e)^{-1}=z$, akkor $yzx-e$ éppen $yx-e$ inverze.

$$(yx-e)(yzx-e)=yxyzx-yzx-yx+e=y(xy-e)zx-yx+e=yx-yx+e=e$$

és

$$(yzx-e)(yx-e)=yzxyx-yzx-yx+e=yz(xy-e)x-yx+e=yx-yx+e=e.$$

5.24. Feladat [10]. Legyen X a $[0,1]$ intervallumon definált k-szor folytonosan differenciálható komplex értékű függvények $\mathbb{C}$ feletti algebrája. Mutassuk meg, hogy

$$\|x\|=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\sup_{0\le t\le 1}\left|x^{(j)}(t)\right|$$

norma, amellyel X egységelemes komplex Banach-algebra.

Megoldás. A $\|x\|_j=\sup_0\left|x^{(j)}(t)\right|$ jelöléssel

$$\|x\|_j(xy)\le\sum_{i=0}^{j}\|x\|_i\|y\|_{j-i},$$

amiből $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$.

5.25. Feladat [12]. Legyen X egységelemes normált algebra. Mutassuk meg, hogy ha $x,y\in X$, akkor $xy-yx\neq e$.

Megoldás. Az indirekt feltevésből indukcióval $x^ny-yx^n=nx^{n-1}\neq 0$ következne: $x^{n+1}y-yx^{n+1}=x^n(xy-yx)+(x^ny-yx^n)x=(n+1)x^n$. Ebből azonban $n\|x^{n-1}\|=\|x^ny-yx^n\|\le 2\|x^n\|\|y\|\le 2\|x^{n-1}\|\|x\|\|y\|$, azaz $n\le 2\|x\|\|y\|$ minden n-re, ami lehetetlen.

$***$ **5.26. Feladat [17].** Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra. Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha\in\mathbb{C}$, $x\in X$-re

(1) $\sigma(\alpha x)=\alpha\sigma(x)$;

(2) $r(\alpha x)=|\alpha|r(x)$;

(3) $r(x)\le\|x\|$;

(4) $\sigma(x)$ zárt halmaz;

(5) $\sigma(x)$ nem üres;

(6) $r(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=\inf_n\|x^n\|^{1/n}$;

(7) $r(x^n)=r(x)^n$;

(8) $r(x) < 1$ pontosan akkor, ha $x^n \to 0$;

(9) ha x invertálható, $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$, akkor $\sigma(x) \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$;

(10) ha p polinom, akkor $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$; ha $0 \notin p(\sigma(x))$ és q egy másik polinom, akkor $p(x)^{-1}q(x) = q(x)p(x)^{-1}$ létezik és $t(x)$-szel jelölve $t(\sigma(x)) = \sigma(t(x))$.

Mutassuk meg, hogy bármely $x, y \in X$-re

(11) ha x-nek van multiplikatív inverze, akkor $\sigma(xy) = \sigma(yx)$;

(12) $\sigma(xy)$ és $\sigma(yx)$ egybeesnek $\{0\}$ komplementerén;

(13) $r(xy) = r(yx)$;

(14) ha $xy = yx$, akkor $r(x + y) = r(x) + r(y)$ és $r(xy) = r(x)r(y)$.

Mutassuk meg, hogy ha X kommutatív, akkor $x \mapsto r(x)$ folytonos.

5.27. Feladat [8]. Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra és

$$b = \inf_{x \neq 0} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}.$$

Mutassuk meg, hogy bármely $x \in X$-re

$$b \leq \inf_{x \neq 0} \frac{r(x)}{\|x\|} \leq \sqrt{b}.$$

5.28. Feladat [8]. Legyen X egységelemes komplex Banach-algebra. Mutassuk meg, hogy

(1) ha $x \in X$-nek van y jobbinverze, akkor minden $x' \in X$-nek, amelyre $\|x' - x\| < 1/\|y\|$, szintén van jobbinverze;

(2) ha $x_n \in X$-nek van y_n jobbinverze, $x_n \to x$ és y_n korlátos, akkor x-nek is van jobbinverze.

5.29. Feladat [8]. Legyen Y az X egységelemes komplex Banach-algebra egy zárt részalgebrája ugyanazzal az egységelemmel. Mutassuk meg, hogy ha $x \in Y$, akkor $\sigma_X(x) \subset \sigma_Y(x)$ és $\sigma_X(x)$ tartalmazza $\sigma_Y(x)$ minden határpontját.

Megoldás. A tartalmazás triviális. Ha $\lambda \in \partial\sigma_Y(x)$ de $\lambda \notin \sigma_X(x)$ lenne, akkor létezne olyan $\lambda_n \notin \sigma_Y(x)$, amelyre $\lambda_n \to \lambda$. Mivel $x - \lambda_n e$ invertálható Y-ban (és így X-ben is), és a rezolvens függvény folytonos, $(x - \lambda_n e)^{-1} \to (x - \lambda e)^{-1}$ az X-ben, így Y zártsága miatt $(x - \lambda e)^{-1} \in Y$.

$**$ **5.30. Feladat [15].** Legyen X normált algebra. Mutassuk meg, hogy van olyan Y Banach-tér, amelyre X algebra-izomorf $\mathcal{L}(Y; Y)$ egy részalgebrájával, és a két norma ekvivalens.

Megoldás. Útmutatás: Ha X nem teljes, tegyük teljessé. Ha nem egységelemes, ágyazzuk be az (x, α) párok lineáris normált terébe, ahol α skalár, és legyen $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$. Végül tekintsük az $x \mapsto M_x$ leképezést, ahol M_x az x-el való baloldali szorzás operátora. (Lásd Losonczi [104], 229–233. o.)

∗∗∗ **5.31. Feladat: Riesz-tétel [20].** Legyen X kompakt metrikus tér, $k\colon X \to \mathbb{K}$ Borel-függvény, amelyre $|k| = 1$, és μ egy véges mérték X Borel-halmazain. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \int x(t)k(t)\,d\mu(t)$ egy korlátos lineáris funkcionál $\mathcal{C}(X)$-en, és határozzuk meg a normáját. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}(X)$ minden korlátos lineáris funkcionálja előáll ilyen alakban. Mutassuk meg, hogy ha az f lineáris funkcionál monoton, azaz ha x valós értékű és $x \geq 0$, akkor $f(x)$ valós és $f(x) \geq 0$, akkor f automatikusan korlátos. (Lásd Járai [71], illetve Dini tétele.)

∗∗∗ **5.32. Feladat: Riesz-tétel [19].** Legyen μ mérték, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $y \in \mathbb{L}^q$ rögzített, és $f(x) = \int x(t)y(t)\,d\mu(t)$, ha $x \in \mathbb{L}^p$. Mutassuk meg, hogy f korlátos lineáris funkcionál $\mathbb{L}^p$-n, amelynek normája $\|y\|_q$. Mutassuk meg, hogy minden korlátos lineáris funkcionál előáll ilyen alakban. Mi a helyzet, ha $p = 1$ vagy $p = \infty$? (Lásd Járai [71].)

∗ **5.33. Definíció.** Legyen X metrikus tér. Egy $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$-et önmagába képező L lineáris operátort *monoton operátor*nak nevezünk, ha $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, $f \geq g$ esetén $L(f) \geq L(g)$.

∗ **5.34. Bohman–Korovkin-tétel.** *$\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$-et önmagába képező lineáris és monoton operátorok egy L_n sorozatára az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *$L_n f \to f$ minden $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$-re;*

(2) *$L_n f \to f$, ha f az $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ függvények valamelyike;*

(3) *$L_n f \to f$, ha $f \equiv 1$ és $(L_n f_t)(t) \to 0$ a t-ben egyenletesen, ahol $f_t(x) = (t - x)^2$.*

Bizonyítás. (1)-ből nyilván következik (2). Annak bizonyításához, hogy (2)-ből következik (3), legyen $g_i(x) = x^i$. Mivel $f_t(x) = t^2 g_0(x) - 2tg_1(x) + g_2(x)$, azt kapjuk, hogy $L_n f_t = t^2 L_n g_0 - 2tL_n g_1 + L_n g_2$. Így

$$\begin{aligned}(L_n f_t)(t) &= t^2((L_n g_0)(t) - 1) - 2t((L_n g_1)(t) - t) + ((L_n g_2)(t) - t^2)\\ &\leq t^2\|L_n g_0 - g_0\| + |2t|\|L_n g_1 - g_1\| + \|L_n g_2 - g_2\|.\end{aligned}$$

Mivel t^2 és $|2t|$ korlátosak $[a, b]$-n, kapjuk (3)-at.

Végül tegyük fel, hogy (3) teljesül, és legyen f tetszőleges. Adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - y| < \delta$, akkor $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$. Legyen $\alpha = 2\|f\|/\delta^2$, és legyen t teszőleges, de rögzített pontja $[a, b]$-nek. Ha $|t - x| < \delta$, akkor $\big|f(t) - f(x)\big| < \varepsilon$, ha viszont $|t - x| \geq \delta$, akkor $\big|f(t) - f(x)\big| \leq 2\|f\| \leq 2\|f\|(t - x)^2/\delta^2 = \alpha f_t(x)$. Így minden x-re teljesül, hogy

$$-\varepsilon - \alpha f_t(x) \leq f(t) - f(x) \leq \varepsilon + \alpha f_t(x).$$

Ha $g_0 \equiv 1$, akkor ez úgy is írható, hogy

$$-\varepsilon g_0 - \alpha f_t \leq f(t)g_0 - f \leq \varepsilon g_0 + \alpha f_t.$$

Az L_n linearitását és monotonitását felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$-\varepsilon(L_n g_0)(t) - \alpha(L_n f_t)(t) \leq f(t)(L_n g_0)(t) - (L_n f)(t) \leq \varepsilon(L_n)(t) + \alpha(L_n f_t)(t).$$

Innen $\big|f(t)(L_n g_0)(t) - (L_n f)(t)\big| \leq \varepsilon\|L_n g_0\| + \alpha(L_n f_t)(t)$. Mivel $L_n g_0 \to g_0$ és $(L_n f_t)(t) \to 0$, kapjuk (1)-et.

$*$ **5.35. Weierstrass első approximációs tétele.** *A polinomok sűrű halmazt alkotnak $\mathcal{C}[a,b]$-ben, ha $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $[a,b] = [0,1]$. Legyen $f \in \mathcal{C}[0,1]$ és

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k/n) x^k (1-x)^{n-k},$$

az úgynevezett *Bernstein-operátor*. Nyilván minden B_n egy, a $\mathcal{C}[0,1]$-et a legfeljebb n-ed fokú polinomok halmazába képező monoton lineáris leképezés. Megmutatjuk, hogy (valós értékű függvényekre) az előző tétel alkalmazható. Ha $f(x) = 1$ minden x-re, akkor

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Ha $f(x) = x$ minden x-re, akkor

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = x.$$

Végül ha $f(x) = x^2$ minden x-re, akkor

$$\begin{aligned}(B_n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \to x^2.\end{aligned}$$

Ha f komplex értékű, és p_1 legfeljebb ε hibával közelíti a valós, p_2 pedig a képzetes részét, akkor $p_1 + ip_2$ legfeljebb 2ε hibával közelíti f-et.

5.36. Megjegyzés. Weierstrass tételére közvetlen, a Bohman–Korovkin-tételt nem használó bizonyítás is adható a $B_n f$ Bernstein-polinomok segítségével. Kulcslépésként azt bizonyítjuk, hogy $n > 1$, $0 \le x \le 1$, $\delta > 0$ esetén

$$\sum_{|x-k/n| \ge \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}. \tag{1}$$

Valóban,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad=n^2x^2-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad=n^2x^2-2n^2x^2\sum_{k=1}^{n}k\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&\quad+nx\sum_{k=1}^{n}((k-1)+1)\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&\quad=-n^2x^2+nx+(n-1)nx^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\\
&\quad=nx(1-x),
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
nx(1-x)&\geq\sum_{|x-k/n|\geq\delta}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\geq\delta^2n^2\sum_{|x-k/n|\geq\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},
\end{aligned}$$

amiből következik (1).

Most válasszunk $\varepsilon>0$-hoz olyan $\delta>0$-t, hogy $x,y\in[0,1]$, $|x-y|\leq\delta$ esetén $\big|f(x)-f(y)\big|\leq\varepsilon/2$ teljesüljön, és legyen $\big|f(x)\big|\leq K$ minden $x\in[0,1]$-re. Ekkor

$$\begin{aligned}
\big|f(x)-(B_nf)(x)\big|&=\Big|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big|\\
&=\Big|\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(k/n))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big|\\
&\leq\sum_{|x-k/n|\geq\delta}2K\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&+\sum_{|x-k/n|<\delta}\big|f(x)-f(k/n)\big|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{K}{2n\delta^2}.
\end{aligned}$$

Ha n elég nagy, a jobb oldal kisebb, mint ε.

Az alábbiakban Weierstrass tételét akarjuk tetszőleges kompakt metrikus térre általánosítani. Szükségünk lesz egy definícióra.

$*$ **5.37. Definíció.** Legyenek X és Y halmazok és $\mathcal{H}$ az X-et Y-ba képező függvények egy rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ *szétválasztja* X *pontjait*, ha bármely különböző pontokból álló x,y párhoz van olyan $h\in\mathcal{H}$, amelyre $h(x)\neq h(y)$.

∗ **5.38. Stone tétele.** *Legyen X kompakt metrikus tér és $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ olyan lineáris altere, amelyre*

(1) *a konstans függvények $\mathcal{H}$-ban vannak;*

(2) *ha $u \in \mathcal{H}$, akkor $|u| \in \mathcal{H}$;*

(3) *$\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait.*

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$-ben.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy $\mathcal{H}$ zárt a maximum és minimum képzésére. Valóban, $\max(u,v) = (u+v+|u-v|)/2$ és $\min(u,v) = (u+v-|u-v|)/2$. Másrészt, bármilyen $x, y \in X$, $x \neq y$-hoz és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $u \in \mathcal{H}$ függvény, hogy $u(x) = \alpha$ és $u(y) = \beta$. Valóban, (3) szerint létezik olyan $h \in \mathcal{H}$ függvény, amelyre $h(x) \neq h(y)$. Legyen

$$u(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)}, \quad \text{ha} \quad z \in X.$$

Most legyen $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ és $\varepsilon > 0$. Minden $x, y \in X$ párhoz válasszunk egy olyan $u_{x,y} \in \mathcal{H}$ függvényt, amelyre $\big|f(x) - u_{x,y}(x)\big| < \varepsilon$ és $\big|f(y) - u_{x,y}(y)\big| < \varepsilon$. Bármely rögzített $y \in X$-re az

$$U_{x,y} = \big\{z\colon u_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\big\}, \quad x \in X$$

nyílt halmazok lefedik X-et, így léteznek $x_1, \dots, x_n$ pontok, amelyekre

$$\cup_{i=1}^{n} U_{x_i,y} = X.$$

Legyen

$$v_y = \min(u_{x_1,y}, \dots, u_{x_n,y}) \in \mathcal{H}.$$

Ekkor $v_y(z) < f(z) + \varepsilon$ minden $z \in X$-re és $v_y(y) > f(y) - \varepsilon$. Most a

$$V_y = \big\{z\colon v_y(z) > f(z) - \varepsilon\big\}, \quad y \in X$$

nyílt halmazok lefedik X-et, így léteznek $y_1, \dots, y_m$, hogy $\cup_{j=1}^{m} V_{y_j} = X$. Legyen $g = \max(v_{y_1}, \dots, v_{y_m}) \in \mathcal{H}$. Ekkor $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$, és ezt kellett bizonyítani.

∗ **5.39. Weierstrass–Stone-tétel.** *Legyen X kompakt metrikus tér. Ha egy $\mathcal{H}$ részalgebrája $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$-nek tartalmazza a konstans függvényeket és szétválasztja X pontjait, akkor sűrű.*

Bizonyítás. Tekintsük $\mathcal{H}$ lezártját. Ha megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{\mathcal{H}}$-ra $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$, akkor Stone tétele szerint készen vagyunk. Bármely $\varepsilon > 0$-ra és $c = \|f\|_u$-ra Weierstrass első approximációs tétele szerint választható olyan p polinom, amelyre $\big|p(t) - |t|\big| \leq \varepsilon$, ha $t \in [-c, c]$. De ekkor $\big\|p \circ f - |f|\big\|_u \leq \varepsilon$ és mivel $\overline{\mathcal{H}}$ maga is algebra, $p \circ f \in \overline{\mathcal{H}}$, azaz $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$.

∗ **5.40. Megjegyzés.** A Weierstrass–Stone-tétel speciális esetének, Weierstrass első approximációs tételének a felhasználása nélkül is bebizonyítható. Vegyük észre, hogy Weierstrass tételét csak annak bizonyítására használtuk, hogy létezik olyan P_n polinomsorozat, amely egyenletesen konvergál $[-c,c]$-en $t \mapsto \sqrt{t}$-hez. Ez közvetlenül is belátható. Mivel t helyébe ct-t írhatunk, elég a $c = 1$ esetre szorítkozni. Mivel $|t| = \sqrt{t^2}$, elég megmutatni, hogy $\sqrt{t}$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen approximálható polinomokkal.

Legyen $p_0(t) \equiv 0$ és indukcióval legyen

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n^2(t)), \tag{1}$$

ha $n \geq 0$. Megmutatjuk, hogy

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}, \quad \text{ha} \quad t \in [0,1], \tag{2}$$

amiből következik, hogy

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad t \in [0,1].$$

$n = 0$-ra (2) triviális. Tegyük fel, hogy n-re teljesül (2), akkor

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t},$$

amiből $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$. Az (1) képlet szerint innen

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + p_n(t)\right)\right),$$

ahonnan $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0$ és (2) szerint

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

∗ **5.41. Weierstrass–Stone-tétel, komplex változat.** *Legyen X kompakt metrikus tér. Ha $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ egy $\mathcal{H}$ részalgebrája tartalmazza a konstans függvényeket, elválasztja X pontjait, és minden $f \in \mathcal{H}$-ra $\overline{f} \in \mathcal{H}$, akkor $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$-ben.*

Bizonyítás. Az $f \in \mathcal{H}$-val együtt $\Re f = (f + \overline{f})/2$ és $\Im f = (f - \overline{f})/(2i)$ is $\mathcal{H}$-ban vannak. Ha $\mathcal{H}_0$ az $\mathcal{H}$-beli valós értékű függvényekből álló algebra, akkor $\mathcal{H}_0$ sűrű $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$-ben. Ebből $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}_0$ is sűrű $\mathcal{C}(X;\mathbb{C}) = \mathcal{C}(X;\mathbb{R}) + i\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$-ben.

∗∗∗ **5.42. Feladat [8].** Általánosítsuk az előző három tételt kompakt Hausdorff-térre.

∗ **5.43. Trigonometrikus polinomok.** Az 1 szerint periodikus

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)),$$

$a_k, b_k \in \mathbb{K}$, függvényeket *legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinom*oknak nevezzük. Ha egy trigonometrikus polinom legfeljebb n-ed fokú, de nem legfeljebb $n-1$-ed fokú, azaz ha $a_n \neq 0$ vagy $b_n \neq 0$, akkor *n-ed fokú*nak nevezzük.

∗ **5.44. Weierstrass második approximációs tétele.** *Legyen $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{K})$ az 1 szerint periodikus folytonos függvények tere. A trigonometrikus polinomok sűrű halmazt alkotnak ebben a térben.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{T} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ a komplex egységkör. Minden $\mathbb{T}$-n értelmezett f függvénynek megfelel egy 1 szerint periodikus $t \mapsto f(e^{2\pi it})$ valós változós függvény. Egy $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$ hatványfüggvénynek a $t \mapsto e^{2\pi ikt}$ függvény felel meg, ezek komplex együtthatós lineáris kombinációinak pedig a komplex együtthatós trigonometrikus polinomok. A Weierstrass–Stone-tétel komplex változata szerint a hatványfüggvények lineáris kombinációi sűrűek $\mathcal{C}(\mathbb{T};\mathbb{C})$-ben, így a komplex együtthatós trigonometrikus polinomok a komplex esetben sűrűek X-ben. A valós esetet valós részre áttérve kapjuk.

∗ **5.45. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy a $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{N}$ függvények komplex együtthatós lineáris kombinációi nem sűrűek $\mathcal{C}(\mathbb{T};\mathbb{C})$-ben, bár olyan részalgebrát alkotnak, amely tartalmazza a konstans függvényeket és szétválasztja $\mathbb{T}$ pontjait.

Megoldás. Integráljuk nulla, míg $z \mapsto \overline{z}$ integrálja nem.

A Hahn–Banach-tétel bizonyításához szükségünk lesz a Zorn-lemmára, amely a kiválasztási axiómával ekvivalens. A Zorn-lemma megfogalmazásához szükségünk lesz néhány fogalomra.

∗ **5.46. Definíció.** Egy $(X, \preceq)$ féligrendezett halmaz egy Y részhalmazát *felülről korlátos*nak nevezzük, ha van olyan $x \in X$, hogy $y \preceq x$ minden $y \in Y$-ra. Azt mondjuk, hogy x az Y egy *felső korlát*ja. Az X egy *maximális elem*e egy olyan $x \in X$, amelyre nincs olyan $y \in X$, amelyre $y \succ x$. Az X féligrendezett halmaz egy Y részhalmazát *lánc*nak nevezzük, ha teljesen rendezett, azaz bármely két eleme összehasonlítható.

∗ **5.47. Zorn-lemma.** *Ha egy féligrendezett halmaz minden lánca felülről korlátos, akkor a féligrendezett halmaznak van maximális eleme.*

Bizonyítás. Lásd a Halmos–Sigler [63] könyvet.

∗ **5.48. Hahn–Banach-tétel.** *Legyen X egy valós lineáris tér, és $p : X \to [0,\infty]$ egy szubadditív és pozitív homogén függvény X-en, azaz $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ és $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, ha $x, y \in X$ és $\alpha \geq 0$. (Itt $0 \cdot \infty = 0$.) Tegyük fel, hogy f_0 az X egy X_0 alterén értelmezett lineáris funkcionál, amelyre $f_0(x) \leq p(x)$, ha $x \in X_0$. Ekkor létezik egy f lineáris funkcionál X-en, amely kiterjesztése f_0-nak, és amelyre $f(x) \leq p(x)$, ha $x \in X$.*

∗ **Bizonyítás.** Első lépésként azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges $x_1 \in X$ esetén létezik egy, az $X_0 \cup \{x_1\}$ halmaz X_1 lineáris burkán értelmezett f_1 lineáris funkcionál, amely kiterjesztése f_0-nak, és amelyre $f_1(x) \leq p(x)$, ha $x \in X_1$.

Ha $x_1 \in X_0$, nincs mit bizonyítani. Egyébként bármely $y \in X_1$ egyértelműen előállítható $y = \alpha x_1 + x$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in X_0$. Világos, hogy az f_0 bármely f_1 lineáris kiterjesztése $f_1(y) = f_0(x) + c\alpha$ alakú, ahol $c = f_1(x_1)$. Meg kell mutatnunk, hogy $c \in \mathbb{R}$ megválasztható úgy, hogy $f_1(y) \le p(y)$ teljesüljön. Ha $\alpha = 0$, akkor ez teljesül. Ha $\alpha > 0$, akkor ez pontosan akkor teljesül, ha $f_0(x/\alpha) + c \le p(x/\alpha + x_1)$, vagyis ha $c \le p(u + x_1) - f_0(u)$ minden $u \in X_0$-ra. Ha $\alpha < 0$, azaz $-\alpha > 0$, akkor $f_1(y) \le p(y)$ pontosan akkor teljesül, ha $f_0(-x/\alpha) - c \le p(-x/\alpha - x_1)$, azaz ha $f_0(v) - p(v - x_1) \le c$ minden $v \in X_0$-ra. Tehát az eseteket összefoglalva, annak kell fennállnia, hogy

$$f_0(v) - p(v - x_1) \le c \le p(u + x_1) - f_0(u),$$

ha $u, v \in X_0$. Mivel bármely $u, v \in X_0$ esetén

$$f_0(u) + f_0(v) = f_0(u + v) \le p(u + v) = p(u + x_1 + v - x_1) \le p(u + x_1) + p(v - x_1),$$

amiből $f_0(v) - p(v - x_1) \le p(u + x_1) - f_0(u)$, ha c-t a bal oldalon álló számok szuprémuma és a jobb oldalon álló számok infimuma közé választjuk, megkapjuk a szükséges kiterjesztést.

Az általános eset bizonyításához, legyen F az f_0 összes olyan f kiterjesztéseinek halmaza, amelyekre $f(x) \le p(x)$, ha $x \in \operatorname{dmn} f$. Ha $f_1, f_2 \in F$, legyen $f_1 \preceq f_2$, ha f_2 kiterjesztése f_1-nek. Ha $G \subset F$ egy lánc, akkor G felülről korlátos, mert $f = \cup_{g \in G} g$ is F-beli és felső korlátja G-nek. A Zorn-lemma szerint létezik F-nek egy f maximális eleme. f az egész X-en van értelmezve, mert egyébként az első lépésben bizonyítottakat alkalmazva ellentmondásra jutnánk.

∗ **5.49. Bohnenblust–Sobczyk-tétel.** *Legyen X komplex lineáris tér és $p\colon X \mapsto [0, \infty]$ egy félnorma X-en. Tegyük fel, hogy f_0 az X egy X_0 alterén értelmezett lineáris funkcionál, amelyre $\big|f_0(x)\big| \le p(x)$, ha $x \in X_0$. Ekkor létezik egy f lineáris funkcionál X-en, amely kiterjesztése f_0-nak, és amelyre $\big|f(x)\big| \le p(x)$, ha $x \in X$.*

Bizonyítás. Legyenek g_0 és h_0 az f_0 funkcionál valós, illetve képzetes részei. Ekkor g_0 és h_0 valós lineáris funkcionálok. Megmutatjuk, hogy kifejezhetők egymással. Valóban,

$$\begin{aligned} -ig_0(ix) &= -i\frac{f_0(ix) + \overline{f_0(ix)}}{2} = -i\frac{if_0(x) - i\overline{f_0(x)}}{2} \\ &= \frac{f_0(x) - \overline{f_0(x)}}{2} = ih_0(x), \end{aligned}$$

és így

$$f_0(x) = g_0(x) + ih_0(x) = g_0(x) - ig_0(ix)$$

minden $x \in X_0$-ra. A g_0-at X_0-on a p félnorma majorálja, mert $g_0(x) = \Re f_0(x) \le \big|f_0(x)\big| \le p(x)$, így alkalmazható a Hahn–Banach-tétel. Legyen g a g_0 kiterjesztése, és legyen $f(x) = g(x) - ig(ix)$, ha $x \in X$. Megmutatjuk, hogy f teljesíti a tétel követelményeit. Az f nyilván kiterjesztése f_0-nak, és additív. Megmutatjuk, hogy komplex homogén is. Ha α, β valósak, $x \in X$, akkor

$$\begin{aligned} f((\alpha + i\beta)x) &= g((\alpha + i\beta)x) - ig(i(\alpha + i\beta)x) \\ &= \alpha g(x) + \beta g(ix) - i\alpha g(ix) - i\beta g(-x) \\ &= \alpha(g(x) - ig(ix)) + i\beta(g(x) - ig(ix)) = (\alpha + i\beta)f(x). \end{aligned}$$

Mivel $f(x) = \big|f(x)\big|e^{i\varphi(x)}$ valamilyen $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ függvénnyel,

$$\begin{aligned}\big|f(x)\big| &= e^{-i\varphi(x)}f(x) = f(e^{-i\varphi(x)}x) = \Re f(e^{-i\varphi(x)}x)\\ &= g(e^{-i\varphi(x)}x) \le p(e^{-i\varphi(x)}x) = p(x).\end{aligned}$$

5.50. Hahn–Banach-tétel normált térre. *Lineáris normált tér egy alterén értelmezett lineáris és korlátos funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a norma megtartásával.*

A Hahn–Banach-tétel fontos szerepet játszik a normált terek elméletében. Ha X Hilbert-tér, akkor könnyen kapható, ha a funkcionált kiterjesztjük az altér lezártjára, és előállítjuk belső szorzatként. Durván azt mondhatjuk, hogy a normált terek elméletében a Hahn–Banach-tétel veszi át azt a szerepet, amit a Riesz-féle reprezentációs tétel a Hilbert-terek elméletében játszik. Itt egy általánosabb alakból vezetjük le, de bizonyítása mindenképpen felhasználja a kiválasztási axiómát. Számos alkalmazását illetően lásd Zeidler [179] könyvét.

∗ **Bizonyítás.** Legyen f a szóban forgó funkcionál, és legyen $p(x) = \|f\|\|x\|$. Nyilván p félnorma, amely majorálja f-et. Ha X valós, alkalmazva a Hahn–Banach-tételt, terjesszük ki f-et egy, az egész X-en értelmezett F lineáris funkcionállá a majorálás megtartásával. Az $F(-x) \le p(-x)$ összefüggésből azt kapjuk, hogy $-p(-x) \le F(x) \le p(x)$, azaz $\big|F(x)\big| \le \|f\|\|x\|$, ha $x \in X$. Ebből következik, hogy $\|F\| = \|f\|$. A komplex eset a Bohnenblust–Sobczyk-tételből adódik.

5.51. Következmény. *Ha X normált tér, $x \in X$, akkor van olyan f lineáris funkcionál X-en, amelyre $f(x) = \|x\|$ és $\|f\| \le 1$, így X^* szétválasztja X pontjait.*

Bizonyítás. Legyen $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, és alkalmazzuk a tételt.

∗ **5.52. Hahn–Banach-tétel, elválasztási alak.** *Legyenek A, B nem üres diszjunkt konvex halmazok az X valós normált térben. Ha A-nak van belső pontja, akkor létezik olyan f nem nulla folytonos lineáris funkcionál X-en és $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $f(a) \le c \le f(b)$, ha $a \in A$, $b \in B$. Ha A kompakt, B pedig zárt, akkor van olyan f nem nulla folytonos lineáris funkcionál X-en és $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $f(a) \le c < d \le f(b)$, ha $a \in A$ és $b \in B$.*

Bizonyítás. Legyen a_0 belső pontja A-nak, $b_0 \in B$, $C = A - a_0 - (B - b_0) = A - B + x_0$, ahol $x_0 = b_0 - a_0$. Mivel A és B konvexek, $A - B$ is konvex, így C is, mert $A - B$ eltoltja. A nulla a C-nek belső pontja, mert belső pontja $A - a_0$-nak és pontja $B - b_0$-nak.

Legyen

$$p(x) = \inf\{\alpha\colon \alpha > 0, x/\alpha \in C\}$$

a C halmaz úgynevezett *Minkowski-funkcionál*ja. Megmutatjuk, hogy p szubadditív és pozitív homogén. Mivel 0 belső pontja C-nek, bármely $x \in X$ esetén elég nagy α-ra $x/\alpha \in C$, így $0 \le p(x) < \infty$. Legyen $x, y \in X$ és $\varepsilon > 0$. Mivel $x/(p(x) + \varepsilon) \in C$, $y/(p(y) + \varepsilon) \in C$, a C konvexitása miatt $\beta = (p(x) + \varepsilon)/(p(x) + p(y) + 2\varepsilon)$ választással

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} = \beta\frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - \beta)\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C,$$

így $p(x+y) \le p(x)+p(y)+2\varepsilon$, amiből $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk a szubadditivitást. A $p(\beta x) = \beta p(x)$ összefüggés $\beta = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha $\beta > 0$, bámely $\varepsilon > 0$-ra $(\beta x)/(\beta p(x) + \beta\varepsilon) \in C$, így $p(\beta x) \le \beta p(x) + \beta\varepsilon$, amiből $\varepsilon \downarrow 0$ esetén következik, hogy $p(\beta x) \le \beta p(x)$. Most x helyére βx-et, β helyére $1/\beta$-t írva, $p(x) = p((\beta/\beta)x) \le (1/\beta)p(\beta x)$, ami a másik irányú egyenlőtlenség.

Nyilván $x_0 \notin C$, mivel $A \cap B = \emptyset$. Így a definícióból $p(x_0) \ge 1$. Legyen $f_0(tx_0) = t$, ha $t \in \mathbb{R}$. Az f_0-at p majorálja. A Hahn–Banach-tétel szerint f_0 kiterjeszthető egy, az egész X-en értelmezett f lineáris funkcionállá a majorálás megtartásával. Mivel $f(x) \le p(x) \le 1$, ha $x \in C$, azt kapjuk, hogy $\big|f(x)\big| \le 1$, ha $x \in C \cap (-C)$. Mivel $C \cap (-C)$ tartalmaz egy nulla körüli gömböt, f korlátos.

Tetszőleges $a \in A$, $b \in B$ esetén

$$f(a) - f(b) + 1 = f(a) - f(b) + f(x_0) = f(a - b + x_0) \le p(a - b + x_0) \le 1,$$

amiből $f(a) \le f(b)$. Ebből következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$, amellyel a tétel állítása teljesül.

A tétel második állításának bizonyításához vegyük észre, hogy mivel $x \mapsto d(x, B)$ folytonos, felveszi ε minimumát az A kompakt halmazon. Mivel $A \cap B$ üres és B zárt, ez a minimum csak pozitív lehet. Nyilván $A + \mathcal{U}_\varepsilon(0)$ nyílt, konvex, és diszjunkt B-től, így alkalmazható a tétel első fele. Legyen $f(x) \le d \le f(b)$, ha $x \in A + \mathcal{U}_\varepsilon(0)$, $b \in B$. Nyilván $\sup_{a\in A} f(a) = c \le d$. Ha $c = d$ lenne, akkor választva olyan $a \in A$-t, amelyre $f(a) = d$, azt kapnánk, hogy $x = tx_0 + a$-ra $t > 0$ esetén $f(x) > d$, holott $|t| < \varepsilon$ esetén $x \in A + \mathcal{U}_\varepsilon(0)$.

∗ **5.53. Definíció.** Ha X normált tér, akkor $Y \subset X$ *annullátor*a az

$$^{\perp}Y = \{f \in X^*\colon f(y) = 0 \text{ minden } x \in Y\text{-ra}\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér. Ha $Y \subset X^*$, akkor Y *annullált*ja az

$$Y^{\perp} = \{x \in X\colon f(x) = 0 \text{ minden } f \in Y\text{-ra}\}$$

halmaz, ami nyilván zárt lineáris altér.

∗ **5.54. Tétel.** *Ha X normált tér, $Y \subset X$, akkor $^{\perp}(X^{\perp})$ az Y lineáris burkának a lezártja.*

Bizonyítás. Minden $f \in X^{\perp}$ nulltere zárt és tartalmazza Y-t, tehát Y lineáris burkának a lezártja része a metszetüknek. Így csak azt kell észrevennünk, hogy ha x nincs az Y lineáris burkának Z lezártjában, akkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan $c \in \mathbb{R}$ és f valós lineáris folytonos funkcionál, hogy $f(Z) \le c < f(x)$; mivel $f(Z)$ az $\mathbb{R}$ altere, $f(Z) = \{0\}$ és $0 < f(x) \ne 0$, így $x \notin {}^{\perp}(Y^{\perp})$. Ha X komplex tér, tekintsük az $f(x) - if(ix)$ funkcionált.

∗ **5.55. Tétel.** *Ha X normált tér és X^* szeparábilis, akkor X is.*

Bizonyítás. Legyen $f_n \in X^*$ egy megszámlálható sűrű halmaz, és válasszunk minden n-re egy $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ elemet, amelyre $|f_n(x_n)| > \|f_n\|/2$. Megmutatjuk, hogy az x_n-ek lineáris burka sűrű X-ben. Az előző tétel szerint elég azt megmutatnunk, hogy ha egy $f \in X^*$ lineáris funkcionál nulla minden x_n-en, akkor nulla mindenütt. Tegyük fel, hogy nem, és van olyan $f \in X^*$, amelyre $f(x_n) = 0$ minden n-re, de $\|f\| = 1$. Mivel az f_n-ek sűrű halmazt alkotnak, van olyan f_n, amelyre $\|f - f_n\| < 1/3$. De ekkor $1/3 > \big|(f - f_n)(x_n)\big| = \big|(f_n(x_n)\big| > 1/2$.

∗ **5.56. Második konjugált tér.** Bármely X normált térre X^* Banach-tér. Képezhetjük a további konjugált tereket is: $X^{**} = (X^*)^*$, $X^{***} = (X^{**})^*$, stb. Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van: ha $x \in X$ rögzített, legyen $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$. A definícióból azonnal adódik, hogy F_x lineáris funkcionál X^*-on. F_x korlátos is, mert $\big|F_x(f)\big| = \big|f(x)\big| \le \|f\|\|x\|$, amiből következik, hogy $\|F_x\| \le \|x\|$. Továbbá a Hahn–Banach-tétel következménye miatt van olyan $f \in X^*$, amelyre $\|f\| = 1$, és $f(x) = \|x\|$. Erre az f-re $\big|F_x(f)\big| = \|x\|$, így $\|F_x\| = \|x\|$. Így az $F\colon x \mapsto F_x$ leképezése X-nek X^{**}-ba normatartó, tehát izometria. Ezt az F leképezést az X normált tér X^{**}-ba való *természetes leképezés*ének nevezzük. A definíció alapján azonnal következik, hogy a természetes leképezés lineáris. Ha a természetes leképezés X^{**}-ra képez, akkor X-et *reflexív*nek nevezzük. Természetesen ekkor X Banach-tér kell legyen. Egy reflexív tér konjugált tere is reflexív: ha $G\colon f \mapsto G_f$ az X^* természetes leképezése X^{***}-ba, akkor tetszőleges $g \in X^{***}$ az értékkészletben van, mert az $f(x) = g(F_x)$ funkcionálra $G_f(F_x) = F_x(f) = f(x)$. Nyilvánvaló példák reflexív terekre a Hilbert-terek. Feladatként szerepelt az is, hogy az $\mathbb{L}^p$-terek reflexívek $1 < p < \infty$ esetén, konjugált terük $\mathbb{L}^q$, ahol $1/p + 1/q = 1$. Példa nem reflexív térre $\mathcal{C}[0,1]$: minden $x \in [0,1]$-re az $f \mapsto f(x)$ funkcionálok a konjugált térben vannak, és távolságuk páronként 2, így a konjugált tér nem szeparábilis, tehát az előző tétel szerint a tér nem lehet reflexív. Az $\mathbf{l}^1$ tér sem reflexív, mert konjugált tere $\mathbf{l}^\infty$, ami nem szeparábilis. Ugyancsak nem reflexívek a $\mathbf{c}_0$ és $\mathbf{c}$ terek, mert konjugált terük $\mathbf{l}^1$, amint azt nemsokára belátjuk.

∗ **5.57. Tétel.** *Ha Y az X reflexív Banach-tér zárt lineáris altere, akkor Y is reflexív.*

Bizonyítás. Az $f \mapsto f|_Y$ leképezés a Hahn–Banach-tétel szerint X^*-ot Y^*-ra képezi. Tetszőleges $\alpha \in Y^{**}$-ra legyen $\beta(f) = \alpha(f|_Y)$. Mivel X reflexív, ez az eleme X^{**}-nak előáll F_x alakban valamely $x \in X$-re, ahol F a természetes leképezése X-nek X^{**}-ra, azaz $\beta(f) = f(x)$. Megmutatjuk, hogy $x \in Y$. Mivel minden $f \in Y^\perp$-re $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy x az Y lineáris burkának a lezártjában van.

∗ **5.58. Következmény.** *Ha X Banach-tér és X^* reflexív, akkor X is.*

Bizonyítás. Mivel X^* reflexív, X^{**} is. A $J\colon X \to X^{**}$ természetes beágyazás izometria, így $J(X)$ zárt altere a reflexív X^{**} térnek, így reflexív, azaz X is reflexív.

5.59. Az egyenletes korlátosság tétele. *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, $T_n \in \mathcal{L}(X;Y)$ operátorok egy tetszőleges halmaza. Ekkor vagy*

(1) *van olyan M konstans, hogy $\|T_n\| \le M$ minden n-re,*

vagy

(2) $\sup_n \|T_n x\| = \infty$ *egy sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz pontjaiban.*

Bizonyítás. Világos, hogy (1) és (2) egyszerre nem teljesülhet. Legyen $\varphi(x) = \sup_n \|T_n x\|$, és

$$V_k = \big\{x\colon x \in X, \varphi(x) > k\big\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A V_k halmazok nyíltak, mert ha $x \in V_k$, akkor $\varphi(x) > k$, tehát valamely n-re $\|T_n x\| > k$. A $\|\ \|$ és T_n folytonossága miatt x egy környezetéből vett y elemekre is $\|T_n y\| > k$. Ha minden V_k sűrű, akkor metszetük a Baire-tétel szerint sűrű, és a metszeten

$$\sup_n \|T_n x\| = \varphi(x) = \infty.$$

Ha van olyan k, hogy V_k nem sűrű X-ben, akkor (1) teljesül. Ekkor ugyanis van olyan $\mathbb{B}_\varepsilon(x)$ gömb, amely nem metsz bele V_k-ba, azaz $\|y-x\| \le \varepsilon$ esetén $\varphi(y) \le k$, amiből $\|T_n y\| \le k$ minden n-re. Innen $u = y - x$ jelöléssel

$$\|T_n u\| \le \|T_n y\| + \|T_n x\| \le 2k, \quad \text{ha} \quad \|u\| \le \varepsilon.$$

Most tetszőleges $v \neq 0$-ra

$$\frac{\|T_n v\|}{\|v\|} = \frac{1}{\varepsilon}\left\|T_n\left(\frac{\varepsilon v}{\|v\|}\right)\right\| \le \frac{2k}{\varepsilon}.$$

5.60. Következmény. *Ha $T_n \in \mathcal{L}(X;Y)$ operátorok egy pontonként konvergens sorozata, akkor $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ is korlátos lineáris operátor és $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

Bizonyítás. T nyilván lineáris. Mivel a $T_n x$ sorozat minden x-re korlátos, van olyan K, hogy $\|T_n\| \le K$ minden n-re. Nyilván $\|T_n x\| \le \|T_n\|\|x\|$. Mindkét oldal limesz inferiorját véve, $\|Tx\| \le \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \le \|x\|K$. Ebből T korlátos és $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

$\to$ **5.61. Feladat [8].** Az előző következmény feltételei mellett, igaz-e, hogy $\|T_n - T\| \to 0$?

$*$ **5.62. Feladat [10].** Legyen X Banach-tér, $T, T_n \in \mathcal{L}(X;X)$, és tegyük fel, hogy $T_n x \to Tx$ minden x-re. Mutassuk meg, hogy $T_n^2 x \to T^2 x$ minden x-re.

Megoldás. A T_n sorozat egyenletesen korlátos. Felhasználva $T_n x$ illetve $T_n(Tx)$ konvergenciáját,

$$\begin{aligned}\|T_n T_n x - TTx\| &\le \|T_n T_n x - T_n Tx\| + \|T_n Tx - TTx\| \\ &\le \|T_n\|\|T_n x - Tx\| + \|T_n(Tx) - T(Tx)\| \to 0\,,\end{aligned}$$

ha $n \to \infty$.

5.63. Banach–Steinhaus-tétel. *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, és $T, T_n \in \mathcal{L}(X;Y)$ operátorok. Ahhoz, hogy a T_n operátorsorozat pontonként konvergáljon T-hez, szükséges és elégséges, hogy az alábbi két feltétel teljesüljön:*

(1) *van olyan K konstans, hogy $\|T_n\| \le K$ minden n-re;*

(2) *valamely $S \subset X$ halmazra, amelynek lineáris burka sűrű X-ben, $T_n x \to Tx$ minden $x \in S$-re.*

Bizonyítás. Szükségesség: (1) következik az egyenletes korlátosság tételéből, (2) pedig nyilvánvaló. Elegendőség: könnyű belátni, hogy (2)-ből következik, hogy $T_n x \to Tx$ fennáll az S lineáris burkának minden x elemére is. Ha $\varepsilon > 0$ és $y \in X$ adottak, válasszunk olyan x elemet S lineáris burkából, amelyre $\|x - y\| < \varepsilon$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|T_n y - Ty\| &\le \|T_n y - T_n x\| + \|T_n x - Tx\| + \|Tx - Ty\| \\ &\le (K + \|T\|)\varepsilon + \|T_n x - Tx\|,\end{aligned}$$

amiből következik az állítás.

∗ **5.64. Gyenge és gyenge* topológia.** Ha X tetszőleges halmaz, Y metrikus tér, (vagy általánosabban, ha topologikus tér), az Y^X függvénytérben és ennek altereiben értelmezve van a függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája. (Ez a konvergencia származik a szorzattopológiából.) Ha $Y = \mathbb{K}$ és X normált tér $\mathbb{K}$ felett (általánosabban, ha topologikus vektortér), akkor a folytonos lineáris funkcionálok terén ezt a konvergenciát – tehát a pontonkénti konvergenciát – *gyenge* konvergenciá*nak (egyes szerzők gyenge konvergenciának) szokták nevezni. A szorzattopológia megszorítása X^*-ra úgy is megadható, mint az összes olyan topológiák metszete, amelyekre minden $f \mapsto f(x)$, $x \in X$ függvény folytonos; ezt *gyenge* topológiá*nak nevezzük. Ebből a topológiából a gyenge* konvergencia származik. Jelentőségét a *Banach–Alaoglu-tétel* adja: egy X Banach-tér X^* konjugált terének egységgömbjét ebben a topológiában tekintve az kompakt (megmutatható, hogy ha X szeparábilis volt, akkor metrizálható is). Ezt a konvergenciát használva a normából származó konvergencia helyett, elkerülhető azoknak a nehézségeknek egy része, amelyek a variációszámításban és a parciális differenciálegyenleteknél az egységgömb kompaktságának hiánya okoz. Ezért vezette be Hilbert ezt a konvergenciát.

Ha X Hilbert-tér, akkor a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján X^* elemeit X elemeivel azonosíthatjuk, és így a gyenge* topológiát átmásolhatjuk X-re. Általánosabban, ha X normált tér, akkor X-nek X^{**}-ba való F természetes leképezése izometria, amely minden $x \in X$-hez hozzárendel egy $F_x \in X^{**}$ lineáris funkcionált az $F_x(f) = f(x)$, ha $f \in X^*$ összefüggéssel. Így X minden eleme egy X^*-on értelmezett funkcionálnak tekinthető, és X^{**} elemeinek pontonkénti konvergenciája (és a topológia, amiből származik) átmásolható X-re. Ezt a konvergenciát *gyenge konvergenciá*nak, a topológiát, amiből származik, *gyenge topológiá*nak szokás nevezni. Nyilván reflexív terek esetén (speciálisan Hilbert-tereknél) a gyenge és gyenge* topológia megegyezik.

A gyenge és gyenge* topológiák vizsgálatával a topologikus vektorterek elmélete foglalkozik. A legegyszerűbb tényeket illetően lásd Losonczi [104] jegyzetét. Részletes hivatkozások találhatók Zeidler [179] könyvében. Megjegyezzük, hogy a lineáris operátorok terében is fontos a pontonkénti konvergencia, amelyet néha erős konvergenciának szokás nevezni.

∗ **5.65. Feladat [9].** Bizonyítsuk be a *Banach–Alaoglu-tétel*t: egy X normált tér X^* konjugált terének egységgömbje a gyenge* topológiában kompakt.

∗ **5.66. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy egy X szeparábilis normált térre X^* egységgömbjén a gyenge* topológia metrizálható.

∗ **5.67. Gyenge és gyenge* konvergencia.** Ha X normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor a gyenge és gyenge* topológiáról mondottak szerint egy $x_n \in X$ sorozat *gyengén konvergál* $x \in X$-hez, jelölésben $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$, ha $f(x_n) \to f(x)$ minden $f \in X^*$-ra, és egy $f_n \in X^*$ sorozat *gyenge* konvergál* $f \in X^*$-hoz, jelölésben $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, ha $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re. Egy példa: Hilbert-térben egy végtelen ortonormált sorozat gyengén konvergál nullához. A gyenge és gyenge* konvergencia jelentőségét a kiválasztási tételek adják.

5.68. Feladat: kiválasztási tétel gyenge* konvergenciára [9]. Bizonyítsuk be, hogy ha X szeparábilis normált tér, akkor minden korlátos $f_n \in X^*$ sorozatnak van gyenge* konvergens részsorozata.

∗ **5.69. Kiválasztási tétel gyenge konvergenciára.** *Ha x_n egy korlátos sorozat egy X reflexív Banach-térben, akkor van olyan részsorozata, amely gyengén konvergál.*

Ez a tulajdonság jellemzi is a reflexív Banach-tereket, ez Eberlein (1947) és Šmuljam (1940) tétele; lásd Yosida [176], V. fejezet.

Bizonyítás. Legyen Y az x_n-ek lineáris burkának a lezártja. Mivel X reflexív, Y is, és mivel Y szeparábilis, Y^* is. Legyen f_n az Y^* egy megszámlálható sűrű részhalmaza. A diagonális eljárással kiválasztható olyan $z_n = x_{j_n}$ részsorozata az x_n sorozatnak, amelyre minden k-ra $f_k(z_n)$ konvergál valamely $\alpha_k \in \mathbb{K}$-hoz, ha $n \to \infty$. Innen bármely $f \in Y^*$-ra $f(z_n) - f(z_m)$ kicsi, ha n, m elég nagyok, azaz $f(z_n)$ Cauchy-sorozat, tehát konvergál valamely $\alpha(f) \in \mathbb{K}$-hoz. Az α funkcionál nyilván lineáris és $\big|\alpha(f)\big| \le \|f\| \sup_n \|x_n\|$. Mivel Y reflexív, van olyan $x \in Y$, hogy $\alpha(f) = f(x)$ minden $f \in Y^*$-ra, azaz $f(x_n) \to f(x)$. Mivel minden $f \in X^*$ megszorítása Y-ra az Y^* egy eleme, ez minden $f \in X^*$-ra is teljesül.

∗ **5.70. Egyenletes konvexség.** Az X normált teret *lokálisan egyenletesen konvex*nek nevezzük, ha minden $x \in X$, $\|x\| \le 1$ eleméhez és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $y \in X$-re, amelyre $\|y\| \le 1$ és $\|x+y\| \ge 2-\delta$, teljesül, hogy $\|x-y\| \le \varepsilon$. Ha δ az x-től függetlennek választható, akkor azt mondjuk, hogy a tér *egyenletesen konvex*. A Hilbert-terek nyilván egyenletesen konvexek a paralelogramma-azonosság miatt. Megmutatható, hogy $1 < p < \infty$ esetén az $\mathbb{L}^p$ tér is egyenletesen konvex. A lokálisan egyenletes konvexségből következik a szigorú konvexség. Megmutatható, hogy egy reflexív Banach-térben mindig bevezethető egy, az eredeti normával ekvivalens norma, amelyre X és X^* már lokálisan egyenletesen konvexek. (Kadec (1959) és Troyanski (1971) tétele.)

∗ **5.71. A gyenge konvergencia alaptulajdonságai.** *Legyen X Banach-tér, $x_n \in X$. Ekkor*

(1) *ha $x_n \to x$, akkor $x_n \rightharpoonup x$;*

(2) *ha X véges dimenziós és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $x_n \to x$;*

(3) *ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x_n korlátos és $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} x_n$;*

(4) *ha X lokálisan egyenletesen konvex, $x_n \rightharpoonup x$ és $\|x_n\| \to \|x\|$, akkor $x_n \to x$ (Radon–Riesz-tulajdonság);*

(5) *ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van olyan y_n sorozat, hogy $y_n \to x$ (Mazur tétele);*

(6) *ha $x_n \rightharpoonup x$, akkor x a $\{x_n\}$ halmaz zárt konvex burkában van;*

(7) *ha x_n korlátos és van olyan $D \subset X^*$ sűrű halmaz, hogy $f(x_n) \to f(x)$ minden $f \in D$-re, akkor $x_n \rightharpoonup x$;*

(8) *ha X reflexív és $f(x_n)$ konvergál minden $f \in X^*$-ra, akkor van olyan x, hogy $x_n \rightharpoonup x$;*

(9) *ha x_n minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely egy adott x-hez konvergál gyengén, akkor $x_n \rightharpoonup x$;*

(10) *ha $x_n \rightharpoonup x$ és $f_n \to f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$;*

(11) *ha X reflexív, $x_n \to x$ és $f_n \rightharpoonup f$ az X^*-ban, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Bizonyítás. (1) és (2) triviálisak, (3) az egyenletes korlátosság tétele következményének speciális esete. (4) Nyilvánvaló, ha $x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $y = x/\|x\|$ és

$y_n = y_n/\|y_n\|$ valahonnan kezdve. Ekkor $\|y\| = \|y_n\| = 1$, $y_n \rightharpoonup y$, és (3) szerint, mivel $y_n + y \rightharpoonup 2y$,

$$2 = \|2y\| \le \liminf_{n\to\infty} \|y_n + y\| \le \limsup_{n\to\infty} \|y_n + y\| \le 2,$$

így $\|y_n + y\| \to 2$, ahonnan következik az állítás. (5)-höz legyen C az x_n-ek zárt konvex burka. Tegyük fel indirekt, hogy $d(x, C) > 0$. Ekkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan f valós folytonos lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(C) \le c < f(x)$, ami ellentmondás; a komplex esetben használjuk az $f(x) - if(ix)$ funkcionált. (6) nyilván következik (5)-ből. (7) következik a Banach–Steinhaus-tételből. (8)-hoz legyen $\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, ha $f \in X^*$; α nyilván lineáris és az egyenletes korlátosság tételének következménye szerint korlátos is, azaz $\alpha \in X^{**}$. Mivel X reflexív, $\alpha(f) = f(x)$ valamely $x \in X$-re, és $x_n \rightharpoonup x$. (9)-et indirekt bizonyítjuk: ha nem lenne igaz, akkor létezne olyan $f \in X^*$ és $\varepsilon > 0$, amelyre $\big|f(x_{n_k}) - f(x)\big| \ge \varepsilon$ teljesülne valamely részsorozatra. (10) és (11) nyilvánvalóak, mivel a gyenge konvergenciából következik a korlátosság.

∗ **5.72. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy reflexív Banach-téren zárt konvex halmaztól való távolság felvétetik.

∗ **5.73. A gyenge* konvergencia alaptulajdonságai.** *Legyen X Banach-tér, $f_n \in X^*$. Ekkor*

(1) *ha $f_n \to f$, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;*

(2) *ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor f_n korlátos és $\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} f_n$;*

(3) *ha f_n korlátos és van olyan $D \subset X$ sűrű halmaz, hogy $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in D$-re, akkor $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;*

(4) *ha minden $x \in X$-re $f_n(x)$ konvergál minden, akkor van olyan f, hogy $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;*

(5) *ha $x_n \rightharpoonup x$ az X-ben és $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, akkor $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Bizonyítás. Minden úgy bizonyítható, mint a gyenge konvergencia esetében.

∗ **5.74. Tétel.** *Ha az $y = (y_1, y_2, \dots)$ számsorozatra bármely $x = (x_1, x_2, \dots)$ nullsorozat esetén a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ sor konvergens, akkor $y \in \mathbb{1}^1$, azaz $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$, és $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ korlátos lineáris funkcionál a $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{l}^\infty$ tereken, amelynek normája $\|f\| = \|y\|_1$.*

Bizonyítás. Legyen $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Könnyen belátható, hogy f_n korlátos lineáris funkcionál, és normája $\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n} |y_k|$. A feltétel szerint $f_n(x)$ minden x-re konvergens, így az egyenletes korlátosság tétele szerint van olyan K konstans, hogy $\|f_n\| \le K$, $n = 1, 2, \dots$, azaz $\sum_{k=1}^{n} |y_k| \le K$. Ebből következik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty$. Mivel $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ minden x-re, $\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\| = \|y\|_1$. A másik irányú egyenlőtlenség triviális.

∗ **5.75. Limitálási eljárások.** Legyen $A = (a_{jk})$, $1 \le j, k < \infty$ egy végtelen mátrix. Azt mondjuk, hogy az x_n, $n = 1, 2, \dots$ számsorozat az *A mátrixszal limitálható*, ha

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$ bármely j esetén konvergens;

(2) az $y_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$, $j = 1, 2, \dots$ sorozat $j \to \infty$ esetén konvergens.

Az $y = \lim_{j\to\infty} y_j$ számot az x_n sorozat *A-limesz*ének nevezzük. Például, ha $a_{jk} = 1/j$, ha $1 \le k \le j$, egyébként nulla, akkor $y_j = (x_1 + x_2 + \cdots + x_j)/j$. Ezen A mátrixhoz tartozó limitálási eljárást *Cesaro-féle limitálási eljárás*nak nevezzük. Például az $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozat Cesaro-limesze $1/2$. Ez az $r = 1$ speciális esete az r-ed rendű Cesaro-limesznek $(r > -1)$, ahol

$$a_{j,k} = \frac{\binom{j-k+r-1}{j-k}}{\binom{r}{j}}.$$

Az r-ed rendű Hölder-limesz mátrixa a Casaro-limesz márixának r-edik hatványa $(r \in \mathbb{N})$.

Egy A mátrixszal megadott limitálási eljárással szemben természetes elvárás, hogy konvergens sorozat A-limesze létezzen, és megegyezzen a közönséges határértékével. Ekkor a limitálási eljárást *permanens*nek nevezzük. Az alábbi tétel jellemzi a permanens limitálási eljárást megadó mátrixokat.

$*$ **5.76. Töplitz tétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, az A mátrixszal megadott limitálási eljárás akkor és csak akkor permanens, ha a következő három feltétel teljesül:*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \le K$ *valamely K konstanssal minden j-re;*

(2) $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 1$*;*

(3) $\lim_{j\to\infty} a_{jk} = 0$ *minden k-ra.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{c}$ a konvergens sorozatok terét. Az A-val megadott limitálási eljárás akkor és csak akkor permanens, ha minden $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{c}$ esetén

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k$ minden j-re konvergens;

(5) $y_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k \to y = \lim_{n\to\infty} x_n$, ha $j \to \infty$.

Az előző tétel alapján (4) pontosan azt jelenti, hogy tetszőleges j-re

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty,$$

és ekkor $y_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k$ lineáris korlátos funkcionál $\mathbf{c}$-n

$$\|y_j\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|$$

normával. Legyen $y(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Az (5) feltétel éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{j\to\infty} y_j(x) = y(x), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbf{c},$$

azaz y_j pontonként konvergál y-hoz. A Banach–Steinhaus-tétel szerint ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely K konstanssal $\|y_j\| \le K$ teljesüljön minden j-re, valamint $y_j(x) \to y(x)$ teljesüljön valamely S halmazból vett x-ekre, ahol S lineáris burkának a lezártja $\mathbf{c}$. Legyen $S = \{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$, ahol $e_0 = (1, 1, 1, \ldots)$, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, …. Az $\|y_j\| \le K$ feltétel éppen (1)-et, az $y_j(e_0) \to y(e_0)$ feltétel éppen (2)-t, míg az $y_j(e_k) \to y(e_k)$, $k > 0$ feltételek éppen (3)-at adják.

5.77. Feladat [9]. Alkalmazzunk Cesaro- és Hölder-féle limitálási eljárásokat az alábbi sorok részletösszegeire. Hasonlítsuk össze az eredményeket az Abel folytonossági tétele segítségével kapott határértékekkel.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$.

5.78. Feladat: Tauber tétele [11]. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei Cesaro-limitálhatók és $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, akkor a sor konvergens.

∗ **5.79. Szegő tétele.** *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum és $\varrho\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ integrálható függvény. Ahhoz, hogy a*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \qquad a_k^{(n)} \in \mathbb{K}, \quad a \le t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \le b, \quad n = 0,1,\ldots \tag{1}$$

sorozat minden $x \in \mathcal{C}[a,b]$ esetén $\int_a^b \varrho(t)x(t)\,dt$-hez konvergáljon, ha $n \to \infty$, szükséges és elégséges, hogy az alábbi két feltétel teljesüljön:

(2) *van olyan K konstans, hogy $\sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}| \le K$ minden n-re;*

(3) *minden $x(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$ hatványfüggvény esetén (1) konvergál az*

$$\int_a^b \varrho(t)x(t)\,dt$$

integrálhoz.

Bizonyítás. Tekintsük $\mathcal{C}[a,b]$-n az

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad n = 0,1,\ldots$$

és

$$f(x) = \int_a^b \varrho(t)x(t)\,dt$$

korlátos lineáris funkcionálokat. Nyilván $\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}|$. A Banach–Steinhaus-tétel szerint $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pontosan akkor teljesül, ha valamely K-val $\|f_n\| \le K$ minden n-re és $f_n(x) \to f(x)$ valamely S halmaz minden x elemére, ahol S lináris burkának a lezártja $\mathcal{C}[a,b]$. Mivel Weierstrass első approximáxiós tétele szerint a hatványfüggvények halmaza lineáris burkának a lezártja $\mathcal{C}[a,b]$, éppen (2)-t és (3)-at kapjuk.

∗ **5.80. Megjegyzések.** Ha az előző tételben az összes $a_k^{(n)}$ együtthatók nemnegatívak, akkor (2) következik (3)-ból $x(t) \equiv 1$-re alkalmazva azt. Ha az (1) formulákat Lagrange interpolációs formulák integrálásával kaptuk, akkor (3) automatikusan teljesül.

$*$ **5.81. Lebesgue-konstansok.** Jelölje X a $\mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{K})$ tér 1 szerint periodikus függvényekből álló alterét, S_n pedig azt az operátort, amely egy $f\in X$ függvényhez a Fourier-sorának n-edik részletösszegét rendeli. Az $S_n\colon X\to X$ operátor normáját L_n-el szokás jelölni, és *n-edik Lebesgue-konstans*nak nevezik. Megmutatjuk, hogy $L_n=2\int_0^{1/2}\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt$, ahol D_n a Dirichlet-féle magfüggvény,

$$D_n(t)=\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin\pi t},\quad\text{ha}\quad\sin\pi t\neq 0$$

A felső becsléshez vegyük észre, hogy az f Fourier-sorának s_n részletösszegét előállító

$$s_n(x)=\int_0^{1/2}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt=\int_{-1/2}^{1/2}f(x+t)D_n(t)\,dt$$

összefüggésből

$$\bigl|s_n(x)\bigr|\le\|f\|\int_{-1/2}^{1/2}\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt.$$

Felhasználva, hogy a D_n függvény 1 szerint periodikus és páros, valamint szuprémumot véve x-ben, kapjuk, hogy $L_n\le 2\int_0^{1/2}\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt$.

Az alsó becsléshez jelölje F_n azt a lineáris funkcionált X-en, amely f-hez az s_n nulla helyen felvett értéket rendeli. Világos, hogy $\|S_n\|\ge\|F_n\|$, így elég megmutatnunk, hogy $\|F_n\|\ge\int_0^1\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt$. Az $s_n(0)=\int_{-1/2}^{1/2}f(t)D_n(t)\,dt$ összefüggésben az integrált $\|f\|=1$ feltétel mellett $f=\operatorname{sgn}D_n$ választással tehetnénk maximálissá. A $\operatorname{sgn}D_n$ függvény nem folytonos, de választhatunk olyan folytonos függvényekből álló f_m sorozatot, amely pontonként konvergál $\operatorname{sgn}D_n$-hez, és amelyre $\|f_m\|=1$. Mivel $\bigl|D_n(t)\bigr|\le 2n+1$ mindenütt, Lebesgue tétele szerint $\int_{-1/2}^{1/2}f_m(t)D_n(t)\,dt\to\int_{-1/2}^{1/2}\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt$. Így az kaptuk, hogy $\|S_n\|=\|F_n\|=2\int_0^{1/2}\bigl|D_n(t)\bigr|\,dt$. Mivel az f_m függvények választhatók valós értékűnek, ha $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, akkor is ez az eredmény adódik. Sőt, mivel az f_m függvények párosaknak is választhatók, hiszen D_n páros, ha csak a folytonos, 1 szerint periodikus és páros függvények terét tekintjük, akkor is ez a norma adódik.

Megjegyezzük, hogy az L_n Lebesgue-konstans megfelel az általános Fourier-sorok elméletében, a 6.65 pontban definiált $L_n(x)$ Lebesgue-függvénynek, amely a klasszikus Fourier-sorok speciális esetében nem függ x-től.

Az L_n Lebesgue-konstans nagyságrendje $\ln n$. Pontosabban, ha $n>0$, akkor van olyan C valós szám, hogy

$$\frac{4}{\pi^2}\ln n\le L_n\le\frac{4}{\pi^2}\ln n+C.$$

Az alsó becslés teljesül, mert

$$\begin{aligned}
L_n &= 2\int_0^{1/2} \big|D_n(t)\big|\,dt \geq 2\int_0^{1/2} \frac{\big|\sin(2n+1)\pi t\big|}{\pi t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{n+1/2} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt > \frac{2}{\pi}\int_0^{n} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\cdots+\frac{1}{t+n-1}\right)\sin \pi t\,dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\int_0^{1} \sin \pi t\,dt = \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&\geq \frac{4}{\pi^2}\int_0^{n} \frac{1}{t+1}\,dt \geq \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) > \frac{4}{\pi^2}\ln n.
\end{aligned}$$

A felső becsléshez vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
L_n = 2\int_0^{1/2} \big|D_n(t)\big|\,dt &= 2\int_0^{1/2} \frac{\big|\sin(2n+1)\pi t\big|}{\pi t}\,dt \\
&+ 2\int_0^{1/2} \big|\sin(2n+1)\pi t\big|\left(\frac{1}{\sin \pi t}-\frac{1}{\pi t}\right)\,dt.
\end{aligned}$$

A második integrálban a zárójelben szereplő függvény határértéke a nullában nulla, így korlátos, tehát az integrál is korlátos, elég tehát az első integrál felső becslésével foglalkozni. Ebből $s=(2n+1)t$ helyettesítéssel a $2/\pi\int_0^{n+1/2}|\sin \pi s|/s\,ds$ integrált kapjuk. Mivel az integrandusz $[0,2]$-n korlátos, elég az integrált a $[2,n+1/2]$ szakaszon becsülni. Itt

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_2^{n+1/2} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt &< \frac{2}{\pi}\int_2^{n+1} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \left(\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+3}+\cdots+\frac{1}{t+n}\right)\sin \pi t\,dt \\
&\leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\int_0^{1} \sin \pi t\,dt \\
&\leq \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&\leq \frac{4}{\pi^2}\int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt = \frac{4}{\pi^2}\ln n.
\end{aligned}$$

$*$ **5.82. Tétel.** *Van olyan 1 szerint periodikus folytonos valós értékű függvény, amelynek Fourier-sora a nulla pontban nem konvergens.*

Bizonyítás. Az előző pont jelöléseivel, az F_n funkcionálokra $\|F_n\|$, $n=0,1,\ldots$ nem korlátos. Így az egyenletes korlátosság tétele szerint van olyan $f\in X$, amelyre $\big|F_n(f)\big|=\big|s_n(0)\big|$, $n=0,1,2,\ldots$ nem korlátos.

∗ **5.83. Tétel.** *A Lebesgue-konstansnál használt jelölésekkel, legyen P tetszőleges, az 1 szerint periodikus folytonos függvények $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{K})$ terét a legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinomok terére képező korlátos projekció. Ekkor $\|S_n\| \le \|P\|$.*

Bizonyítás. Jelölje T_y az y-nal való eltolás operátorát, azaz legyen $(T_y f)(x) = f(x+y)$, és legyen

$$(Ff)(x) = \int_0^1 (T_{-y} P T_y f)(x)\, dy.$$

Megmutatjuk, hogy $F = S_n$, amiből már következik az állítás, mivel

$$\|S_n f\| = \|Ff\| = \sup_{0\le x\le 1} \left| \int_0^1 (T_{-y} P T_y f)(x)\, dy \right| \le \|T_{-y} P T_y f\| \le \|P\|\|f\|.$$

Elég azt bizonyítani, hogy $Ff = S_n f$, ahol f trigonometrikus polinom, mivel ezen függvények sűrű halmazt alkotnak X-ben, F és S_n pedig folytonosak. Ha f legfeljebb n-ed fokú, akkor $S_n f = f$. Másrészt, $T_y f$ is legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinom, így $PT_y f = T_y f$ és $T_{-y} P T_y f = f$. Az integrálban az integrandus tehát nem függ y-tól, és így $Ff = f$. Most tegyük fel, hogy $f(x) = \cos(2k\pi x)$, és $g(x) = \sin(2\pi kx)$, ahol $k > n$. Ekkor $S_n f = 0$. Mivel $(T_y f)(x) = \cos(2\pi ky)\cos(2\pi kx) - \sin(2\pi ky)\sin(2\pi kx)$, azt kapjuk, hogy

$$(PT_y f)(x) = \cos(2\pi ky)(Pf)(x) - \sin(2\pi ky)(Pg)(x),$$

és így

$$(T_{-y} P T_y f)(x) = \cos(2\pi ky)(Pf)(x-y) - \sin(2\pi ky)(Pg)(x-y).$$

De $y \mapsto (Pf)(x-y)$ és $y \mapsto (Pg)(x-y)$ legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinomok, amelyek ortogonálisak f-re, illetve g-re, így $Ff = 0$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $Fg = 0$. Mivel F és S_n lineárisak, megegyeznek a trigonometrikus polinomokon.

∗ **5.84. Harsiladze–Lozinszkij-tétel, trigonometrikus változat.** *Ha minden $n \in \mathbb{N}$-re P_n a 1 szerint periodikus folytonos függvények $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R};\mathbb{K})$ terének folytonos projekciója a legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinomok terére, akkor van olyan $f \in X$, amelyre $\|P_n f\|$, $n = 0, 1, \ldots$ nem korlátos.*

Bizonyítás. Következik az előző tételből, az S_n normájára adott alsó becslésből, és az egyenletes korlátosság tételéből.

∗ **5.85. Tétel.** *Legyen $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a folytonos, 1 szerint periodikus páros függvények tere, P pedig egy folytonos projekciója X-nek a legfeljebb n-ed fokú páros trigonometrikus polinomok alterére. Ekkor $\|\mathbb{1} - P\| \ge \|\mathbb{1} - S_n\|/2$.*

Bizonyítás. Definiáljuk az F operátort az

$$(Ff)(x) = \int_0^1 (T_y(\mathbb{1} - P)(T_{-y} + T_y) f)(x)\, dy$$

összefüggéssel, ahol T_y az y-al való eltolás operátora, $(T_y f)(x) = f(x+y)$. A bizonyítás kulcsa, hogy megmutatjuk, az F operátor megegyezik az $\mathbb{1} - S_n$ operátorral. Az világos, hogy F értékei korlátos folytonos függvények, F lineáris és folytonos. Megmutatjuk, hogy

$F = \mathbb{I} - S_n$, ebből $\|(\mathbb{I} - S_n)f\| = \|Ff\| \le 2\|\mathbb{I} - P\|\|f\|$ miatt már következik az állítás. Elég megmutatnunk, hogy F és $\mathbb{I} - S_n$ megegyeznek az $f_k(x) = \cos(2\pi kx)$, $k \in \mathbb{N}$ függvényeken, mivel ezek lineáris kombinációi, a páros trigonometrikus polinomok sűrű halmazt alkotnak X-ben. Így azt kell megmutatnunk, hogy $Ff_k = 0$, ha $k \le n$ és $Ff_k = f_k$, ha $k > n$. Mivel

$$(T_y f_k)(x) = \cos(2\pi ky)\cos(2\pi kx) - \sin(2\pi ky)\sin(2\pi kx),$$

$(T_{-y} + T_y)f_k = 2\cos(2\pi ky)f_k$ és $T_y(\mathbb{I} - P)(T_{-y} + T_y)f_k = 2\cos(2\pi ky)T_y(f_k - Pf_k)$. Most ha $k \le n$, akkor $Pf_k = f_k$, így $Ff_k = 0$. Ha $k > n$, akkor $(Ff_k)(x)$

$$2\int_0^1 \cos(2\pi ky)\Big(\cos(2\pi ky)\cos(2\pi kx) - \sin(2\pi ky)\sin(2\pi kx) - (Pf_k)(x+y)\Big)\,dy.$$

Mivel $(Pf_k)(x+y)$ legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinom y-ban, az ezen tagot tartalmazó integrál nulla. Az ortogonalitási összefüggések szerint a megmaradó integrál értéke $f_k(x) = \cos(2\pi kx)$.

∗ **5.86. Összefüggés polinomok és trigonometrikus polinomok között.** Definiáljunk egy M leképezést $\mathcal{C}[a,b]$-ből az 1 szerint periodikus folytonos és páros függvények $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ terére az

$$(Mf)(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos 2\pi t\right)$$

összefüggéssel. Az M leképezés izometrikus izomorfizmus, azaz lineáris és $\|Mf\| = \|f\|$. Ha f legfeljebb n-ed fokú polinom, akkor Mf legfeljebb n-ed fokú páros trigonometrikus polinom; $n = 1$ esetén ez világos, az általános eset pedig teljes indukcióval következik, felhasználva a $\cos k\vartheta \cos\vartheta = (\cos(k+1)\vartheta - \cos(k-1)\vartheta)/2$ összefüggést. Mivel a legfeljebb n-ed fokú páros trigonometrikus polinomok legfeljebb $n+1$ dimenziós alteret alkotnak, M pedig lineáris izometria, ez az altér pontosan $n+1$ dimenziós, és minden páros trigonometrikus polinom fellép képként. Az indukciós lépésből az is látszik, hogy ha f fokszáma $n > 0$, akkor Mf főegyüttható f főegyütthatójának 2^{1-n}-szerese. Mivel a polinomok sűrű alteret alkotnak $\mathcal{C}[a,b]$-ben, a páros trigonometrikus polinomok sűrű alteret alkotnak X-ben. A $t \mapsto \cos(2\pi nt)$ függvény ősképe egy T_n polinom, amelyet az $a = -1$, $b = 1$ esetben az *n-edik elsőfajú Csebisev-polinom*nak neveznek.

∗ **5.87. Harsiladze–Lozinszkij-tétel.** *Ha $n \in \mathbb{N}$, legyen P_n korlátos lineáris projekciója $\mathcal{C}[a,b]$-nek a legfeljebb n-ed fokú polinomok által alkotott altérre. Ekkor van olyan $f \in \mathcal{C}[a,b]$, amelyre $\|P_n f - f\|$, $n = 0, 1, \ldots$ nem korlátos.*

Bizonyítás. Az előző két pont jelöléseivel az $P_n^* = MP_nM^{-1}$ operátorok korlátos lineáris projekciói X-nek a legfeljebb n-ed fokú páros trigonometrikus polinomok alterére. Mivel az előző tételek szerint $\|\mathbb{I} - P_n^*\| \to \infty$, így $\|\mathbb{I} - P_n\| \to \infty$. Az egyenletes korlátosság tétele szerint van olyan f, hogy $\|f - P_n f\|$, $n = 0, 1, \ldots$ nem korlátos.

∗ **5.88. Faber tétele.** *Minden $n \in \mathbb{N}$-re, legyen*

$$a \le \xi_0^{(n)} < \ldots < \xi_n^{(n)} \le b,$$

és ha $f \in \mathcal{C}[a,b]$, jelölje $P_n f$ az adott pontokon f-et interpoláló polinomot. Van olyan $f \in \mathcal{C}[a,b]$, amelyre $\|P_n f - f\|$, $n = 0, 1, \ldots$ nem korlátos.

Bizonyítás. Mivel $P_n f = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i^{(n)}) l_i^{(n)}$ valamely f-től független $l_i^{(n)}$ legfeljebb n-ed fokú polinomokkal, P_n korlátos lineáris operátor. Az, hogy P_n projekció, azaz hogy $P_n f = f$, ha f legfeljebb n-ed fokú polinom, következik az interpoláció egyértelműségéből. Alkalmazva a Harsiladze–Lozinszkij-tételt, kapjuk az állítást.

$*$ **5.89. Lebesgue tétele.** *Legyenek $\{0\} \neq X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ zárt alterek az X normált térben és P_n korlátos lineáris projekciója X-nek X_n-re. Ha d a távolság X-en, $x \in X$ és $\|P_n\| d(x, X_n) \to 0$, akkor $P_n x \to x$.*

Bizonyítás. Legyen x_n az X_n valamely eleme, amelynek távolsága x-től legfeljebb $2d(x, X_n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|P_n x - x\| &= \big\|P_n(x - x_n) + (x_n - x)\big\| \leq \|P_n\|\|x - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq 2\|P_n\|\|x - x_n\| \to 0.\end{aligned}$$

5.90. A nyílt leképezések tétele. *Legyenek X és Y Banach-terek, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ az X-et Y-ra képező leképezés. Ekkor T nyílt leképezés, azaz nyílt halmaz képe nyílt.*

Bizonyítás. Jelölje X-ben G_r, Y-ban H_r az origó középpontú, r sugarú nyílt gömböt. Első lépésként megmutatjuk, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $H_\varepsilon \subset \overline{T(G_1)}$. Mivel

$$\begin{aligned}X &= \cup_{n=1}^{\infty} G_n = \cup_{n=1}^{\infty} nG_1, \\ Y &= T(X) = T(\cup_{n=1}^{\infty} nG_1) = \cup_{n=1}^{\infty} T(nG_1) = \cup_{n=1}^{\infty} nT(G_1).\end{aligned}$$

Ha $\overline{T(G_1)}$ nem tartalmazna belső pontot, akkor az $\overline{nT(G_1)}$ halmazok komplementerei sűrű nyílt halmazok lennének üres metszettel, ami lehetetlen. Így van olyan y és $\delta > 0$, hogy $\mathbb{U}_\delta(y) \subset \overline{T(G_1)}$. Ebből

$$\begin{aligned}H_\delta &= \mathbb{U}_\delta(y) - y \subset \mathbb{U}_\delta(y) - \mathbb{U}_\delta(y) \subset \overline{T(G_1)} - \overline{T(G_1)} \\ &\subset \overline{T(G_1) - T(G_1)} \subset \overline{T(G_1 - G_1)} \subset \overline{T(G_2)} = 2\overline{T(G_1)},\end{aligned}$$

ahonnan $\varepsilon = \delta/2$ jelöléssel $H_\varepsilon \subset \overline{T(G_1)}$.

Második lépésként megmutatjuk, hogy $H_{\varepsilon/2} \subset T(G_1)$. Legyen $y \in H_{\varepsilon/2}$. A homogenitás miatt $y \in H_{\varepsilon/2} \subset \overline{T(G_{1/2})}$, így van olyan $x_1 \in G_{1/2}$, hogy $\|y - Tx_1\| < \varepsilon/2^2$. Most $y - Tx_1 \in H_{\varepsilon/2^2} \subset \overline{T(G_{1/2^2})}$, így van olyan $x_2 \in G_{1/2^2}$, hogy $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon/2^3$. Hasonlóan folytatva olyan x_n sorozatot konstruálunk, amelyre $x_n \in G_{1/2^n}$, és

$$\left\|y - T\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\right\| < \varepsilon/2^{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abszolút konvergens sor összege legyen x, ekkor

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1,$$

azaz $x \in G_1$, és (1)-ből határátmenettel $\|y - Tx\| = 0$, azaz $y = Tx \in T(G_1)$.

Végül megmutatjuk, hogy egy V nyílt halmaz képe nyílt. Ha $y \in T(V)$, akkor $y = Tx$ valamely $x \in V$-re. Mivel V nyílt, van olyan $\eta > 0$, hogy $x \in \mathbb{U}_\eta(x) \subset V$. Ebből

$$H_{\varepsilon\eta/2} \subset T(G_\eta) = T(\mathbb{U}_\eta(x) - x) = T(\mathbb{U}_\eta(x)) - Tx,$$

ahonnan

$$\mathbb{U}_{\varepsilon\eta/2}(y) = H_{\varepsilon\eta/2} + y = H_{\varepsilon\eta/2} + Tx \subset T(\mathbb{U}_\eta(x)) \subset T(V).$$

5.91. Banach tétele a korlátos inverzről. *Legyenek X, Y Banach-terek, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ az X-et Y-ra kölcsönösen egyértelműen leképező operátor. Ekkor $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X)$.*

Bizonyítás. T^{-1} korlátos, mert a nyílt leképezések tétele szerint folytonos.

5.92. Következmény. *Ha X a $|\ |$ és $\|\ \|$ normákkal is Banach-tér, és van olyan C valós szám, hogy $|x| \le C\|x\|$ minden x-re, akkor a két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Az $(X, \|\ \|)$ térnek az $(X, |\ |)$ térre való identikus leképezése korlátos, így az inverze is korlátos, ami a másik irányú egyenlőtlenséget adja.

5.93. Zárt operátorok. Az X metrikus tér egy részhalmazát az Y metrikus térbe képező T operátort *zárt operátor*nak nevezzük, ha T zárt részhalmaza az $X \times Y$ metrikus térnek. Nyilván ha egy zárt operátor kölcsönösen egyértelmű, akkor az inverze is zárt operátor. A T operátor pontosan akkor zárt, ha bármely $(x,y) \in \overline{T}$ esetén $(x,y) \in T$. Az $(x,y) \in \overline{T}$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha van olyan $(x_n, y_n) \in T$ sorozat, amely (x,y)-hoz konvergál, azaz amelyre $x_n \in \operatorname{dmn}(T)$, $x_n \to x$, $y_n = Tx_n \to y$, ha $n \to \infty$. Az $(x,y) \in T$ feltétel pontosan azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{dmn}(T)$ és $y = Tx$. Így beláttuk, hogy T pontosan akkor zárt operátor, ha tetszőleges $x_n \in \operatorname{dmn}(T)$ sorozatot véve, melyre $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, következik, hogy $x \in \operatorname{dmn}(T)$ és $y = Tx$.

5.94. Zárt gráf tétel. *Banach-teret Banach-térbe képező zárt lineáris operátor korlátos.*

Bizonyítás. Ha $T\colon X \to Y$ zárt, akkor $T \subset X \times Y$ Banach-tér. Mivel $(x, Tx) \mapsto x$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezése ennek a Banach-térnek X-re, inverze, az $x \mapsto (x, Tx)$ leképezés is folytonos, amiből $x \mapsto Tx$ is folytonos.

5.95. Következmény. *Ha $X = Y \oplus Z$ az X Banach-tér zárt alterekre való direkt felbontása, akkor a Z mentén Y-ra való P projekció folytonos.*

Bizonyítás. P gráfja zárt.

→ **5.96. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy zárt altéren értelmezett folytonos lineáris operátor zárt.

→ **5.97. Feladat [7].** Adjunk példát folytonos lineáris, de nem zárt operátorra.

5.98. Feladat [9]. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}[0,1]$ folytonosan differenciálható függvényein a differenciálás operátora zárt operátor, de nem folytonos.

5.99. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy a

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(t)\,dt$$

összefüggés zárt lineáris operátort definiál $\mathcal{C}[0,1]$-en.

5.100. Feladat [2]. Adjunk meg $\mathbb{I}^2$-n olyan normát, amely nem ekvivalens az eredetivel.

6
Hilbert-terek

A Riesz–Fischer-tétel felfedezése óta a sorozatok $\mathbb{l}^2$ terének, és $\mathbb{R}^n$ valamely G részhalmazán négyzetesen integrálható függvények $\mathbb{L}^2(G)$ terének izomorfizmusa jól ismert volt az analízissel foglalkozók számára, de „Hilbert-tér" alatt mindig ezen „konkrét" terek egyikét értették, amelyen így az „operátorok" vagy „mátrixok" vagy valamilyen fajta „integrál operátorok" voltak. Von Neumann volt az első, aki egy „absztrakt" Hilbert-térre gondolt, és definiálta axiomatikusan mint egy komplex vektorteret Hermite-féle skalár szorzattal, amely szeparábilis és teljes a megfelelő normára nézve, úgyhogy a szokásos „konkrét" Hilbert-terek úgyszólván „reinkarnációi" az „absztrakt" térnek. Bármilyen nyilvánvalónak látszik ez most számunkra, hatalmas lépés volt, és megnyitotta az utat a Hilbert-tér normális és Hermite-féle operátorai spektrálelméletének teljes megértéséhez, amelyet von Neumann fejlesztett ki és publikált 3 alapvető dolgozatában 1929 és 1932 között, és amely (a spektrum leírásának kivételével) még ma is, lényegében, a végleges tárgyalása a tárgykörnek. Elvetve bármely „konkrét" Hilbert-tér tárgyalását, von Neumann kénytelen volt belsőleg *dolgozni, csak olyan fogalmakat felhasználva, amelyeket közvetlenül az axiómák között felsorolt fogalmak segítségével lehetett definiálni, bármi más kizárásával. Ez vezette őt teljesen új gondolatok és módszerek meglepő sorának felfedezésére.*

Jean Dieudonné [28]

6.1. Definíció. Ha H lineáris tér $\mathbb{K}$ felett és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezése $H \times H$-nak $\mathbb{K}$-ba úgy, hogy minden $x, y, z \in H$-ra és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(5) ha $\langle x, x\rangle = 0$, akkor $x = 0$,

akkor H-t *belső szorzat tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Az x és y elemek $\langle x, y\rangle$ *belső szorzat*ának jelölésére az (x, y), $(x|y)$ $x \cdot y$ és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak. A belső szorzat terek izomorfizmusai a lineáris és belső szorzat tartó leképezések. (1), (2), és (3)-ból, a belső szorzás additív a második változóban is, és onnan a skalár konjugáltja emelhető ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában $\langle x|y\rangle$ a szokásos jelölés, és a második változóban való linearitást szokás feltenni, ekkor az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja.

6.2. Tétel. *Ha H belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az x elem* normáját *az $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ összefüggéssel definiálva*

(1) $$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\| \qquad \text{minden } x, y \in H\text{-ra}$$

(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség), *és H normált tér.*

Bizonyítás.

$$0 \le \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

amiből ha $\|x\| = 0$ és $\|y\| = 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle$ helyettesítéssel $\langle x, y\rangle = 0$. Ha ez nem áll fenn, mondjuk $\|y\| \neq 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle/\|y\|^2$ helyettesítéssel

$$0 \le \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség. Minden más triviális.

6.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző tétel állításainak bizonyításakor csak annak bizonyításához kellett kihasználnunk a definíció (5) feltételét, hogy $\|x\| = 0$ esetén $x = 0$. Ebből következik, hogy ha az $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezés (5)-nek nem tesz eleget, akkor ezen segíthetünk, ha $\|x - y\| = 0$ esetén az x és y elemeket azonosítjuk.

6.4. Definíció. Egy belső szorzat teret *Hilbert-tér*nek nevezünk, ha teljes.

→ **6.5. Feladat [6].** Legyenek $(H_j, \langle\ .\ \rangle_j)$, $1 \le j \le n$ belső szorzat terek, $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$, és ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$, akkor legyen $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j\rangle_j$. Mutassuk meg, hogy H belső szorzat tér, a $H_1, \ldots, H_n$ *belső szorzat terek szorzata*, a belső szorzatból a normált terek szorzatánál definiált normával ekvivalens norma származik, és H pontosan akkor Hilbert-tér, ha minden H_j Hilbert-tér.

6.6. Feladat [6]. Legyenek $(H_j, \langle\ .\ \rangle_j)$, $j \in J$ belső szorzat terek,

$$H = \Big\{x \in \times_{j\in J} H_j \colon \sum_{j\in J} \|x_j\|^2 < \infty\Big\}$$

és legyen $\langle x, y\rangle = \sum_{j\in J}\langle x_j, y_j\rangle_j$. Mutassuk meg, hogy H belső szorzat tér, a *belső szorzat terek szorzata*, és H pontosan akkor Hilbert-tér, ha minden H_j Hilbert-tér.

→ **6.7. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy a belső szorzat, mint kétváltozós függvény, folytonos.

→ **6.8. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy egy belső szorzat térben teljesül az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{ha} \quad x, y \in H$$

paralelogramma-azonosság.

∗ **6.9. Feladat [14].** Bizonyítsuk be, hogy egy normált tér pontosan akkor belső szorzat tér, ha teljesül a paralelogramma-azonosság. (Lásd Losonczi [104], 202. o.)

6.10. Feladat: [11]. Legyen H belső szorzat tér. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\tilde{H}$ Hilbert-tér, a H *teljes burka*, amelynek H sűrű lineáris altere. Mutassuk meg, hogy a teljes burok lényegében egyértelmű: ha $\tilde{\tilde{H}}$ egy másik teljes burok, akkor H identikus leképezése egy és csak egyféleképpen terjeszthető ki egy $\tilde{H}$-ot $\tilde{\tilde{H}}$-ra képező lineáris és belső szorzat tartó leképezéssé.

Megoldás. Polarizáció vagy beágyazás H^*-ba vagy H^{**}-ba. Lásd Losonczi [104], 202–205. o.

6.11. $\mathbb{L}^2$-tér. Legyen μ mérték. Ha $f, g \in \mathbb{L}^2(\mu)$, akkor

$$4f\overline{g} = (f+\overline{g})^2 - (f-\overline{g})^2$$

miatt $f\overline{g}$ integrálható. Legyen

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Ezzel a belső szorzattal $\mathbb{L}^2$ belső szorzat tér, ha a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítjuk. A belső szorzatból $\mathbb{L}^2$ szokásos normája származik, így $\mathbb{L}^2$ Hilbert-tér.

Néha előfordul, hogy egy pozitív valós értékű integrálható ϱ függvény, a *súlyfüggvény* segítségével értelmezzük a belső szorzatot:

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\varrho\, d\mu.$$

(Ilyenkor az $\mathbb{L}^2(\varrho\mu;\mathbb{K})$, illetve ha μ a természetes mérték, akkor az $\mathbb{L}^2(\varrho;\mathbb{K})$ jelölést használjuk.) Ez ugyanazt adja, mint ha a μ helyett a

$$\nu(A) = \int_A \varrho\, d\mu, \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A}$$

mérték szerint integrálnánk, vagy ha az f függvény helyett az $f\sqrt{\varrho}$ függvényt tekintenénk, azaz nincs szó valódi általánosításról.

6.12. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy egy $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumon az $(f,g) \mapsto \int_a^b f\overline{g}$ belső szorzattal a folytonos függvények, illetve a Riemann-integrálható függvények belső szorzat teret alkotnak, de az nem teljes. Mi a helyzet, ha egy monoton növekedő függvény szerinti Riemann–Stieltjes-integrált használunk?

6.13. Definíció. Legyen H belső szorzat tér. Ha $x, y \in H$, és $\langle x, y\rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *ortogonális*ak. Jelölése: $x \perp y$. Az $M, N \subset H$ halmazokat *ortogonális*aknak nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M$, $y \in N$-re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset H$ halmaz *ortogonális komplementer*én a H összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: $M^\perp$. Egy x_γ, $\gamma \in \Gamma$ rendszert *ortogonális rendszer*nek nevezünk, ha bármely két különböző eleme egymásra ortogonális, azaz ha $\gamma, \delta \in \Gamma$, $\gamma \neq \delta$, akkor $x_\gamma \perp x_\delta$. Ha egy ortogonális rendszer minden eleme normált, akkor *ortonormált rendszer*ről beszélünk.

6.14. Legjobb approximáció Hilbert-térben. *Legyen H egy Hilbert-tér, és K egy zárt konvex részhalmaza H-nak. Ekkor minden $x \in H$-hoz létezik egy és csak egy legjobban approximáló elem K-ban.*

Bizonyítás. Legyen d a távolság H-n, $x \in H$, és $D = d(x, K)$. Legyen $\varepsilon \geq 0$, $y, z \in K$ és tegyük fel, hogy $\|x-y\|^2 \leq d^2+\varepsilon^2$, $\|x-z\|^2 \leq d^2+\varepsilon^2$. Ekkor $(y+z)/2 \in K$ és

$$d^2+\varepsilon^2 \geq \frac{\|y-x\|^2+\|z-x\|^2}{2} = \frac{\|y+z-2x\|^2+\|y-z\|^2}{4} \geq d^2+\frac{\|y-z\|^2}{4},$$

amiből $\|y-z\| \leq 2\varepsilon$. Legyen y_n egy olyan K-beli sorozat, amelyre $\|x-y_n\| \to D$. Ekkor az előző egyenlőtlenségből y_n Cauchy-sorozat. Ezért $y_n \to y$, és K zártsága miatt $y \in K$. Innen $D = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \|x-y\|$. Az egyértelműség ugyancsak a fenti egyenlőtlenségből következik.

6.15. Ortogonális felbontási tétel. *Legyen H egy Hilbert-tér, és M egy zárt lineáris altere H-nak. Ekkor minden $x \in H$ egyértelműen felírható $x = y+z$ alakban, ahol $y \in M$ és $z \in M^\perp$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint létezik x-et legjobban approximáló $y \in M$. Legyen $D = \|x-y\|$. Megmutatjuk, hogy $x = y+(x-y)$ a keresett felbontás, azaz $z = x-y$ ortogonális M-re. Legyen $u \neq 0$ az M tetszőleges eleme, akkor

$$\begin{aligned} D^2 &= \|x-y\|^2 \leq \|x-y+\alpha u\|^2 = \|z+\alpha u\|^2 \\ &= \langle z+\alpha u, z+\alpha u\rangle = D^2 + \alpha\langle u, z\rangle + \overline{\alpha}(\langle z, u\rangle + \alpha\|u\|^2). \end{aligned}$$

Legyen $\alpha = -\langle z, u\rangle/\|u\|^2$, azaz válasszuk α-t úgy, hogy a zárójelben lévő kifejezés eltűnjön. Ekkor $D^2 \leq D^2 - \big|\langle z, u\rangle\big|^2/\|u\|^2$, ami csak úgy lehetséges, hogy $\langle z, u\rangle = 0$, $z \in M^\perp$.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x = y+z = y'+z'$, $(y, y' \in M,\ z, z' \in M^\perp)$, akkor $M \ni y-y' = z'-z \in M^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle y-y', z'-z\rangle = \langle y-y', y-y'\rangle = \|y-y'\|^2,$$

amiből $y = y'$, $z = z'$.

6.16. Riesz reprezentációs tétele. *Legyen f korlátos lineáris funkcionál a H Hilbert-téren. Ekkor egy és csak egy olyan $v \in H$ létezik, amelyre*

$$f(x) = \langle x, v\rangle \quad \textit{minden } x \in H\textit{-ra.}$$

Bizonyítás. $M = \ker(f)$ zárt lineáris altere H-nak. Ha $M = H$, akkor $v = 0$ választható. Ha $M \neq H$, akkor $M^\perp \neq \{0\}$. Legyen u egy nem nulla eleme $M^\perp$-nek. Ekkor bármely $x \in H$ esetén $f(x)u - f(u)x \in M$, mert

$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0.$$

Így

$$0 = \langle f(x)u - f(u)x, u\rangle = f(x)\|u\|^2 - f(u)\langle x, u\rangle,$$

ahonnan $f(x)$-et kifejezve, $v = \overline{f(u)}u/\|u\|^2$ jelöléssel kapjuk az állítást.

Az egyértelműséghez, ha $f(x) = \langle x, v\rangle = \langle x, v'\rangle$, akkor $\langle x, v-v'\rangle = 0$ mindenütt, amiből $x = v-v'$ helyettesítéssel $v = v'$.

$*$ **6.17. Megjegyzés.** Az előző tétel jelöléseivel, a $\sigma\colon f \mapsto v$ leképezés konjugált lineáris. Az $\langle f, g\rangle := \langle \sigma(g), \sigma(f)\rangle$ definícióval belső szorzatot kapunk H^*-on, amelyből H^* normája származik. Továbbá H reflexív: ha $x \mapsto F_x \in H^{**}$ a természetes leképezés, és $F \in H^{**}$, akkor Riesz tétele szerint pontosan egy olyan $g \in H^*$ létezik, amelyre $F(f) = \langle f, g\rangle$ minden $f \in H^*$-ra. Innen $F(f) = \langle \sigma(g), \sigma(f)\rangle$, azaz $x = \sigma(g)$-re $F_x(f) = f(x) = \langle x, \sigma(f)\rangle = \langle \sigma(g), \sigma(f)\rangle = F(f)$ minden $f \in H^*$-ra, azaz $F = F_x$, tehát a természetes leképezés H^{**}-ra képez.

6.18. Püthagoras-tétel. *Legyen x_n egy (véges vagy megszámlálható végtelen) ortogonális sorozat egy H belső szorzat térben. Ha $x = \sum_n x_n$, akkor $\langle x, x_n\rangle = \|x_n\|^2$ és $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$, így $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$. Ha H Hilbert-tér, akkor a $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$ feltétel elégséges is $\sum_n x_n$ konvergenciájához.*

Bizonyítás. Véges rendszerre $\langle x, x\rangle$ illetve $\langle x, x_n\rangle$ kiszámolásával adódik az állítás. Egyébként, ha $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ és $n > m$, akkor

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2,$$

így $\sum_{n=1}^\infty x_n$ és $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ részletösszegei egyszerre alkotnak Cauchy-sorozatot. Mivel $\big|\|x\| - \|s_n\|\big| \le \|x - s_n\|$,

$$\big|\|x\|^2 - \|s_n\|^2\big| = \big(\|x\| + \|s_n\|\big)\big|\|x\| - \|s_n\|\big| \to 0,$$

azaz

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Végül, ha $n < m$, akkor

$$\begin{aligned}\big|\langle x, x_n\rangle - \|x_n\|^2\big| &= \big|\langle x, x_n\rangle - \langle s_m, x_n\rangle\big| = \big|\langle x - s_m, x_n\rangle\big| \\ &\le \|x - s_m\|\|x_n\| \to 0, \quad \text{ha} \quad m \to \infty.\end{aligned}$$

6.19. Fourier-együtthatók. Legyen x_n egy ortonormált sorozat egy H belső szorzat térben, és $x \in H$. Az x-nek a x_n sorozatra vonatkozó *Fourier-együtthatói*n az $\langle x, x_n\rangle$ számokat értjük. A $\sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ sor az x *Fourier-sor*a.

6.20. Legjobb lineáris approximáció belső szorzat térben. *Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ egy ortonormált rendszer a H belső szorzat térben, $x \in H$. Ekkor*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|^2 \ge \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \big|\langle x, x_k\rangle\big|^2,$$

bármilyen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ skalárokra, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_k = \langle x, x_k\rangle$ fennáll $k = 1, 2, \dots, n$-re.

Bizonyítás.

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\Big\|^2 = \|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_k}\langle x,x_k\rangle-\alpha_k\langle x_k,x\rangle)$$
$$= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\big|\langle x,x_k\rangle\big|^2+\sum_{k=1}^{n}\big|\alpha_k-\langle x,x_k\rangle\big|^2.$$

6.21. Bessel-egyenlőtlenség. *Legyen x_n egy (véges vagy végtelen) ortonormált sorozat egy H belső szorzat térben, és $x\in H$. Ekkor*

$$\sum_n\big|\langle x,x_n\rangle\big|^2\le\|x\|^2.$$

Bizonyítás. Az előző tételből $\sum_{k=1}^{n}\big|\langle x,x_k\rangle\big|\le\|x\|^2$ bármely n-re.

6.22. Tétel. *Legyen x_n egy ortonormált sorozat a H Hilbert-térben. Minden $x\in H$-ra a $\sum_k\langle x,x_k\rangle x_k$ sor konvergál H-ban egy $y\in H$ elemhez, és $x-y$ ortogonális minden x_k-ra.*

Bizonyítás. A Bessel-egyenlőtlenségből és a Pythagoras-tételből következik a sor konvergenciája. Ha s_n az n-edik részletösszeg, akkor $n\ge k$ esetén

$$\big|\langle x-y,x_k\rangle\big|\le\big|\langle x-s_n,x_k\rangle\big|+\big|\langle s_n-y,x_k\rangle\big|$$
$$\le\Big|\langle x,x_k\rangle-\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x_k\rangle\Big|+\|s_n-y\|\|x_k\|=\|s_n-y\|\|x_k\|\to 0.$$

6.23. Tétel. *Legyen H belső szorzat tér. Egy x_n ortonormált sorozatra a következők ekvivalensek:*

(1) *minden $x\in H$-ra $x=\sum_n\langle x,x_n\rangle x_n$;*

(2) *minden $x\in H$-ra $\|x\|^2=\sum_n\big|\langle x,x_n\rangle\big|^2$ (ez a* Parseval-egyenlőség*);*

(3) *minden $x,y\in H$-ra*
$$\langle x,y\rangle=\sum_n\langle x,x_n\rangle\overline{\langle y,x_n\rangle}$$
(ez az általánosított Parseval-egyenlőség*);*

(4) *x_n bázis H-ban;*

(5) *az x_n-ek véges lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak H-ban.*

Ha ezek a tulajdonságok fennállnak, akkor az ortonormált sorozatot *zárt*nak nevezzük.

Bizonyítás. Ha (1) teljesül, legyen s_n az x, az r_n pedig az y Fourier-sorának n-edik részletösszege. Ekkor

$$\Big|\langle x,y\rangle-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle\overline{\langle y,x_k\rangle}\Big|=\big|\langle x,y\rangle-\langle s_n,r_n\rangle\big|$$
$$\le\big|\langle x,y\rangle-\langle s_n,y\rangle\big|+\big|\langle s_n,y\rangle-\langle s_n,r_n\rangle\big|$$
$$\le\|x-s_n\|\|y\|+\|s_n\|\|r_n-y\|\to 0,$$

azaz teljesül (3). (3)-nak speciális esete (2). Ha (2) teljesül, vegyük észre, hogy

$$\langle x, s_n\rangle = \langle x, \textstyle\sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle x_k\rangle = \sum_{k=1}^{n}\overline{\langle x, x_k\rangle}\langle x, x_k\rangle = \|s_n\|^2,$$

így

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, s_n\rangle - \overline{\langle x, s_n\rangle} + \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n\|^2 \to 0.$$

(1)-ből nyilván következik, hogy minden x előállítható $\sum_n \alpha_n x_n$ alakban, a Pythagoras-tételt alkalmazva két előállítás különbségére pedig kapjuk, hogy az előállítás egyértelmű, így teljesül (4). Triviális, hogy (4)-ből következik (5). Ha (5) teljesül, választva egy olyan y-t, amelyre $\|x - y\| < \varepsilon$, ha y az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lineáris kombinációja és $n \geq m$, azt kapjuk, hogy $\|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$.

6.24. Definíció. Egy H belső szorzat tér egy x_n sorozatát *teljes*nek nevezzük, ha nem bővíthető minden eddigire ortogonális normált elemmel, azaz ha egyedül a 0 elem ortogonális minden x_n-re. Ha az x_n ortonormált sorozat zárt, akkor az előző tétel (1) pontja szerint teljes. A megfordítás nem minden belső szorzat térben igaz, de Hilbert-térben igen, mivel $x - \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ egy előző tétel szerint ortogonális minden x_k-ra.

6.25. Gram–Schmidt-ortogonalizálás. Legyen H egy belső szorzat tér, és y_k egy véges vagy végtelen sorozat H-ban, amelynek minden tagja lineárisan független az előtte állóktól. Egy olyan x_k ortonormált sorozatot fogunk megkonstruálni, amelyre

$$\{y_k : k \leq n\} \quad \text{és} \quad \{x_k : k \leq n\}$$

ugyanazt az alteret feszítik ki minden n-re.

Legyen $u_1 = y_1$ és $x_1 = u_1/\|u_1\|$. Legyen $u_2 = y_2 - \langle y_2, x_1\rangle x_1$ és $x_2 = u_2/\|u_2\|$. Folytassuk teljes indukcióval ezt az eljárást. Legyen

$$u_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle y_n, x_k\rangle x_k \quad \text{és} \quad x_n = u_n/\|u_n\|.$$

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$\langle x_n, x_k\rangle = \frac{1}{\|u_n\|}\left\langle \Big(y_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle y_n, x_j\rangle x_j\Big), x_k\right\rangle = 0.$$

Mivel u_n benne van az $u_1, \ldots, u_{n-1}, y_n$ rendszer által kifeszített altérben, mindkét rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki.

6.26. Tétel. *Egy Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha van ortonormált bázisa.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha van bázis, akkor a tér szeparábilis. Megfordítva, ha $\{x_n\}$ egy megszámlálható sűrű halmaz, akkor elhagyva minden olyan tagot, amely az előzőek lineáris kombinációja, majd a maradékot a Gram–Schmidt-eljárással ortogonalizálva, egy teljes ortonormált rendszert kapunk.

6.27. Megjegyzés. Tételeink szerint, ha x_n, illetve y_n ugyanannyi tagú teljes ortonormált sorozatok az X, illetve Y Hilbert-térben, akkor azokat az elemeket megfeleltetve egymásnak, amelyeknek ugyanazok a Fourier-együtthatóik, X-nek egy Y-ra való lineáris és belső szorzat tartó leképezését kapjuk. Így bármely két szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert-tér izomorf.

$*$ **6.28. Fourier-sorok nem szeparábilis Hilbert-térben.** Ha H egy tetszőleges Hilbert-tér, és x_γ, $\gamma \in \Gamma$ egy ortonormált rendszer, képezhetők egy $x \in H$ elem $c_\gamma = \langle x, x_\gamma \rangle$ *Fourier-együtthatói*. Mivel a Bessel-egyenlőtlenség szerint minden $\Gamma_0 \subset \Gamma$ véges indexhalmazra $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} |c_\gamma|^2 \le \|x\|^2$, bármely $n > 0$ természetes számra csak véges sok olyan $\gamma \in \Gamma$ létezik, amelyre $|c_\gamma| > 1/n$. Ebből azt kapjuk, hogy a $\{\gamma \in \Gamma : c_\gamma \neq 0\}$ halmaz megszámlálható, így képezhető az x elem $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma x_\gamma$ *Fourier-sora*, mert az összeg csak megszámlálható sok nem nulla tagot tartalmaz, és a sor abszolút konvergens. Az általános esetben is érvényes a Bessel-egyenlőtlenség, értelmezhető a zárt és a teljes ortonormált rendszer fogalma, és ezek Hilbert-térben egybeesnek. A kiválasztási axióma segítségével megmutatható, hogy minden Hilbert-térben létezik teljes ortonormált rendszer, és bármely két ilyen rendszer számossága egyenlő. Megmutatható továbbá, hogy ha x_γ, $\gamma \in \Gamma$ egy teljes ortonormált rendszer egy H Hilbert-térben, akkor az a leképezés, amely egy $x \in H$ elemhez egy rögzített x_γ, $\gamma \in \Gamma$ teljes ortonormált rendszerben vett Fourier-együtthatóinak rendszerét rendeli, lineáris és belső szorzat tartó leképezése H-nak a Γ-n a számláló mértékre nézve négyzetesen integrálható $\mathbb{K}$-beli értékű függvények $\mathbb{l}^2(\Gamma;\mathbb{K})$ terére.

6.29. Feladat: az 1-trükk [5]. A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva úgy, hogy az egyik függvény azonosan 1, mutassuk meg, hogy $\mathbb{L}^2(\mu) \subset \mathbb{L}^1(\mu)$, ha μ véges mérték.

→ **6.30. Feladat [6].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben a páros függvények halmazának ortogonális komplementerét.

→ **6.31. Feladat [5].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben a $t \mapsto e^t$ függvényt legjobban approximáló elsőfokú polinomot.

→ **6.32. Feladat [7].** Határozzuk meg $\mathbb{l}^2$-ben az

$$M = \{(\xi_1, 2\xi_2, 0, \xi_1 + \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots) \in \mathbb{l}^2\}$$

halmaz ortogonális komplementerét.

→ **6.33. Feladat [7].** Ortogonalizáljuk $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben az 1, x, x^2 függvényrendszert.

6.34. Feladat [8]. Ortonormáljuk $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

6.35. Feladat [9]. Ortonormáljuk a megadott függvényrendszert a megadott súlyfüggvényre a megadott intervallumon:

(1) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty[$;

(2) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = x^2$, $x \in [0,1]$;

(3) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = \sin \pi x$, $x \in [0,1]$.

6.36. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi távolságokat:

(1) x távolsága x^2, x^3 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;

(2) 1 távolsága $\sin x, \cos x$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[-\pi,\pi]$-ben;

(3) x^3 távolsága $1, x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;

(4) x^3 távolsága x, x^2 lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben.

6.37. Feladat [9]. Fejtsük sorba a Legendre-polinomok szerint a $\sin \pi x$ függvényt $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben.

$*$ **6.38. Feladat [17].** Legyen φ_n, $n = 1, 2, \dots$ egy teljes ortonormált rendszer egy H Hilbert-térben, és ψ_n egy ortonormált rendszer H-ban. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|^2 < \infty$. Mutassuk meg, hogy ψ_n is teljes.

Megoldás. Legyen $c_{i,j} = \langle \psi_i, \varphi_j \rangle$. Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} |c_{i,j}|^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Legyen $\varepsilon > 0$ és N olyan nagy, hogy $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|^2 < \varepsilon$ teljesüljön. A ψ_n-et előállítva $\psi_n = c_{n,n}\varphi_n + (\psi_n - c_{n,n}\varphi_n)$ alakban,

$$1 = \|\psi_n\|^2 = |c_{n,n}|^2 + \|\psi_n - c_{n,n}\varphi_n\|^2 \le |c_{n,n}|^2 + \|\psi_n - \varphi_n\|^2,$$

ahonnan

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (1 - |c_{n,n}|^2) < \varepsilon.$$

Mivel $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,j}|^2 \le 1$, kapjuk, hogy

$$\sum_{i \ne j > N}^{\infty} |c_{i,j}|^2 < \varepsilon,$$

tehát

$$\sum_{i \le N < j}^{\infty} |c_{i,j}|^2 < \varepsilon,$$

amiből

$$\sum_{i,j \le N}^{\infty} |c_{i,j}|^2 > N - \varepsilon,$$

tehát $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,j}|^2 > 1 - \varepsilon$. Ez $|c_{n,n}|^2 > 1 - \varepsilon$ miatt $n > N$-re is teljesül. Mivel ε tetszőleges volt, $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{i,j}|^2 = 1$ minden j-re, a Parseval-egyenlőség teljesül egy teljes ortonormált rendszeren.

$\rightarrow$ **6.39. Feladat [8].** Legyenek μ és ν is mértékek, $\{\varphi_k\}$ teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben, és minden k-ra $\{\psi_{k,l}\}$ teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\nu)$-ben. Bizonyítsuk be, hogy $\{(x,y) \mapsto \varphi_k(x)\psi_{k,l}(y)\}$ teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\mu \times \nu)$-ben.

$\rightarrow$ **6.40. Feladat [8].** Legyen H egy Hilbert-tér, $M, N \subset H$. Igazoljuk, hogy ha $M \subset N$, akkor $N^\perp \subset M^\perp$, $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$, és $M^{\perp\perp}$ az M lineáris burkának a lezártja.

6.41. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy ha M és N a H Hilbert-tér zárt, ortogonális alterei, akkor $M + N$ is zárt altér.

6.42. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy az $M = \{x = (\xi_1, 0, \xi_2, 0, \dots) \in \mathbb{l}^2\}$ és $N = \{y = (\eta_1, \eta_1, \eta_3, \eta_3/3, \dots) \in \mathbb{l}^2\}$ alterek összege nem $\mathbb{l}^2$, de sűrű $\mathbb{l}^2$-ben.

6.43. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha M_γ, $\gamma \in \Gamma$ zárt alterek egy rendszere egy H Hilbert-térben, akkor

$$\left(\cap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma\right)^\perp = \overline{\cup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma^\perp}$$

és

$$\left(\cup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma\right)^\perp = \cap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma^p erp$$

→ **6.44. Feladat [7].** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi funkcionálok az egész $\mathbb{L}^2[0,1]$-en értelmezhetők-e, folytonosak-e, lineárisak-e, és határozzuk meg a normájukat:

(1) $f(x) = \int_0^1 x(t)\sin t\,dt$;

(2) $f(x) = \int_0^{1/2} tx(t^2)\,dt$;

(3) $f(x) = |x(1/2)|$;

(4) $f(x) = x'(1/2)$;

(5) $f(x) = \int_0^1 x(t)(t-1/2)\,dt$;

(6) $f(x) = \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}x(e^{-t})\,dt$.

→ **6.45. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi funkcionálok az egész $\mathbb{l}^2$-n értelmezhetők-e, folytonosak-e, lineárisak-e, és határozzuk meg a normájukat (itt $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathbb{l}^2$):

(1) $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \sin k$;

(2) $f(x) = \sup_k |\xi_k|$;

(3) $f(x) = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|$;

(4) $f_n(x) = \xi_n$;

(5) $f_n(x) = \xi_{n+1} - \xi_n$;

(6) $f_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \operatorname{sgn}(k-n)$;

(7) $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_{k^2}$;

(8) $f(x) = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2$.

6.46. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy ha φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ zárt rendszer $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben, akkor

$$\Phi_0 \equiv 1, \quad \Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$$

lineáris burka sűrű $\mathcal{C}[0,1]$-ben.

6.47. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy ha $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mérhető, $f(t+1) = f(t)$, ha $t \geq 0$, $f(t) = -f(t+1/2)$, ha $0 < t < 1/2$, és $\int_0^1 f^2(t)\,dt < \infty$, akkor $\varphi_n(t) = f(2^n t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ortogonális rendszer $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben.

∗ **6.48. Megjegyzés: konvergenciafajták kapcsolata.** Ha μ véges mérték X-en, akkor az X-en értelmezett $\mathbb{K}$-beli értékű mérhető függvények esetén a majdnem mindenütti konvergenciából következik a mértékben való konvergencia, és Riesz kiválasztási tétele szerint mértékben konvergens függvénysorozatból kiválasztható majdnem mindenütt konvergens függvénysorozat. Nyilván a pontonkénti konvergenciából következik bármely adott pontban a konvergencia, és majdnem mindenütt is. Mindezeknél erősebb az egyenletes konvergencia. Másrészt, az egyenletes konvergenciából nyilván következik a $\| \ \|_\infty$ normában való konvergencia. Ha $1 \le p < q \le \infty$, akkor a $\| \ \|_q$ normában való konvergenciából következik $\| \ \|_p$ normában való konvergencia; ez $q = \infty$ esetén az $\|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu \le \|f\|_\infty^p \mu(X)$ egyenlőtlenségből, $q < \infty$ esetén pedig a minden $\sigma > 0$ esetén teljesülő

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int |f|^p \, d\mu \le \sigma^{p-q} \int_{\{|f| \ge \sigma\}} |f|^q \, d\mu + \int_{\{|f| < \sigma\}} |f|^p \, d\mu \\ &\le \sigma^{p-q} \|f\|_q^q + \sigma^p \mu(X)\end{aligned}$$

egyenlőtlenségből következik. Továbbá a $\| \ \|_1$ normában való konvergenciából következik a mértékben való konvergencia, mert a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mu\{|f| \ge \sigma\} \le \frac{\|f\|_1}{\sigma}$$

minden $\sigma > 0$-ra.

6.49. Mertens tétele. *Ha φ_n, $n = 1, 2, \dots$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben, és a φ_n függvények abszolút értékben egy közös korlát alatt maradnak, akkor minden $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ függvényre a $c_n = \int f\overline{\varphi}_n \, d\mu$ számok léteznek, végesek, és $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan K konstanst, amelyre $|\varphi_n| < K$ minden n-re. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan g egyszerű függvényt, amelyre

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon/(2K).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}|c_n| &= \left| \int (f-g)\overline{\varphi}_n \, d\mu + \int g\overline{\varphi}_n \, d\mu \right| \\ &\le \int |f-g||\varphi_n| \, d\mu + \left| \int g\overline{\varphi}_n \, d\mu \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int g\overline{\varphi}_n \, d\mu \right|.\end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő integrál nullához tart, mivel g korlátos és egy véges mértékű halmazon kívül nulla, így $g \in \mathbb{L}^2$.

6.50. Példa: a trigonometrikus rendszer. Az $\mathbb{L}^2[0,1]$ térben az

$$x \mapsto e^{2\pi i k x} = \cos 2\pi k x + i \sin 2\pi k x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvények ortonormált rendszert alkotnak. Weierstrass második approximációs tételéből (vagy az általánosabb Weierstrass–Stone-tétel komplex változatából) és abból, hogy a kompakt tartójú folytonos függvények sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{L}^2]0,1[$-ben, következik, hogy ez a rendszer zárt, így teljes. Az ezen rendszer szerinti sorfejtésekkel, a klasszikus Fourier-sorokkal részletesen fogunk foglalkozni, és más úton is bebizonyítjuk a rendszer teljességét. Megjegyezzük, hogy Mertens tétele szerint $\mathbb{L}^1[0,1]$-beli függvény Fourier-sora is képezhető, és ekkor is $c_k \to 0$, ha $|k| \to \infty$.

6.51. Példa: Legendre-polinomok. Az $\mathbb{L}^2[-1,1]$ térben az

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

hatványfüggvények lineárisan függetlenek, így ortonormalizálásukkal egy ortonormált sorozatot kapunk. Weierstrass első approximációs tételéből (vagy az általánosabb Weierstrass–Stone-tételből) és abból, hogy a folytonos függvények sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben, következik, hogy ez a rendszer zárt, így teljes. Ezen és más hasonló ortogonális polinomrendszerek szerinti sorfejtésekkel részletesen fogunk foglalkozni, és más úton is bebizonyítjuk a rendszer teljességét.

6.52. Példa: Többváltozós polinomok. Legyen X kompakt, pozitív Lebesgue mértékű részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak. Az

$$1, x_1, x_2, \dots, x_k, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \dots$$

függvényrendszer ortogonalizálásával nyert ortonormált sorozat teljes $\mathbb{L}^2(X)$-ben. A Weierstrass–Stone-tételt felhasználva ez az egydimenziós esethez hasonlóan kapható.

6.53. Példa: A Rademacher- és a Walsh-rendszer. Az

$$r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n\pi x), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Rademacher-rendszer ortonormált $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben, de nem teljes; a Rademacher-rendszerből kaphatjuk a Walsh-féle ortonormált sorozatot, amelynek n-edik tagja:

$$w_n(x) = r_{\alpha_1+1}(x)r_{\alpha_2+1}(x)\cdots r_{\alpha_k+1}(x),$$

ahol n diadikus előállítása $n = 2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_k}$. (A Walsh-függvények között előfordulnak a Rademacher-függvények is.) Ez a függvényrendszer teljes: a $0 \le n < 2^j$-hez tartozó Walsh-függvények egy 2^j dimenziós alteret feszítenek ki $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben (mint az ekvivalenciaosztályok terében), amelyben csupa olyan függvény van, amely a $]k/2^j, (k+1)/2^j[$, $0 \le k < 2^j$ intervallumokon (majdnem mindenütt) konstans. Mivel ezen függvények tere 2^j dimenziós, minden ilyen függvény benne van az altérben. Viszont $j = 0, 1, \dots$-re ezen alterek egyesítése a $\|\ \|_\infty$ normában sűrű $\mathcal{C}[0,1]$-ben, így a Walsh-rendszer teljes.

6.54. Példa: A Haar-féle rendszer. A $\chi_0^{(0)} \equiv 1$, és ha $n \ge 0$, $1 \le k \le 2^n$, akkor

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{ha } (k-1)/2^n \le x < (k-1/2)/2^n, \\ -\sqrt{2^n}, & \text{ha } (k-1/2)/2^n < x \le k/2^n, \\ 0 & \text{a } [0,1] \text{ többi pontjában} \end{cases}$$

ortonormált sorozat a *Haar-féle ortonormált rendszer*. Ez is teljes, mert adott j-re az összes $\chi_n^{(k)}$, $n \le j$ függvények lineáris kombinációi a $k/2^j$, $0 \le k \le 2^j$ pontokat kivéve megegyeznek a w_k, $0 \le k < 2^j$ függvények lineáris kombinációival, így $j = 0, 1, \dots$-re ezen alterek egyesítése is a $\|\ \|_\infty$ normában sűrű $\mathcal{C}[0,1]$-ben.

6.55. Feladat [12]. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in \mathbb{L}^2[0,1]$ folytonos egy $x \in [0,1]$ pontban, akkor a Haar-függvények szerinti sorfejtése x-ben konvergál $f(x)$-hez. Bizonyítsuk be, hogy ha f az $[a,b] \subset [0,1]$ intervallum minden pontjában folytonos, akkor a Haar-függvények szerinti sorfejtése az $[a,b]$-n egyenletesen konvergál f-hez. Igaz-e hasonló állítás Walsh-sorokra?

∗ **6.56. Feladat [12].** Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in \mathbb{L}^1[0,1]$, akkor a függvény Haar-függvények szerinti sorfejtése értelmezve van, és az f függvény minden $x \in]0,1[$-beli Lebesgue-pontjában konvergál $f(x)$-hez.

6.57. Tétel. *Legyen μ véges mérték X-en, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben, és $c_1, c_2, \dots$ olyan együtthatósorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ sor majdnem mindenütt konvergens.*

Bizonyítás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |c_n \varphi_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \int |1 \varphi_n| \, d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\int |\varphi_n|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \mu(X)^{1/2}$$
$$= \mu(X)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Beppo Levi tétele szerint ebből következik, hogy a függvénysor majdnem mindenütt konvergens.

6.58. Kolmogorov–Rademacher-tétel. *Ha $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n$ Rademacher-sor majdnem mindenütt konvergens, ha pedig divergens, akkor a Rademacher-sor majdnem mindenütt divergens.*

Az állítás első fele származik Rademachertől, a második fele pedig Kolmogorovtól. Valós és képzetes részt véve, elég az állítást valós c_n-ekre belátni. A bizonyítást itt nem végezzük el, az állítás lényegében a valószínűségszámításban ismert Kolmogorov-féle három sor tételből következik: lásd Rényi [135], 351. o.

6.59. Megjegyzés. Érezhető, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ elegendő feltétel egy $\mathbb{L}^2$-beli ortogonális sor majdnem mindenütti konvergenciájához túl sokat kíván. Kolmogorov tétele mutatja, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ feltétel az ortogonális sor konvergenciájához szükséges; később látni fogjuk, hogy nem elégséges. Mindenesetre a Riesz-féle kiválasztási tétel szerint e mellett a feltétel mellett kiválasztható a részletösszegek olyan részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergens. A részsorozat indexei azonban $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergenciájának sebességétől függnek. Kicsit erősebb együtthatófeltétel mellett egyetemlegesen választható a részsorozat, mint az alábbi tétel mutatja.

6.60. Tétel. *Legyen μ véges mérték és $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben. Ha γ_n olyan nemnegatív számsorozat, amely monoton növekedve ∞-hez tart, és $c_1, c_2, \dots$ olyan számsorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \gamma_n < \infty$, akkor minden olyan ν_k, $k = 1, 2, \dots$ indexrészsorozatra, amelyre $\gamma_{\nu_k} \ge k$, az $s_{\nu_k} = \sum_{n=1}^{\nu_k} c_n \varphi_n$ részletösszeg-részsorozat majdnem mindenütt konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $\gamma_n \to \infty$, kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, így van olyan $g \in \mathbb{L}^2$ függvény, amelyre

$$r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j|^2 = \int |g - s_n|^2 \, d\mu = \|g - s_n\|_2^2 \to 0.$$

Megmutatjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} r_{\nu_k}$ sor konvergens, azaz részletösszegei korlátosak. Valóban, Abel-féle átrendezéssel,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} r_{\nu_k} &= \sum_{k=1}^{m}(k-(k-1))r_{\nu_k} = \sum_{k=1}^{m-1} k(r_{\nu_k}-r_{\nu_{k+1}}) + m r_{\nu_m} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} k \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |c_j|^2 + m \sum_{j=\nu_m+1}^{\infty} |c_j|^2 \\ &\le \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_{\nu_k} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |c_j|^2 + \gamma_{\nu_m} \sum_{j=\nu_m+1}^{\infty} |c_j|^2 \\ &\le \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |c_j|^2\gamma_j + \sum_{j=\nu_m+1}^{\infty} |c_j|^2\gamma_j \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\gamma_n < \infty.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}\int |g-s_{\nu_k}|^2\,d\mu$ sor konvergens, így $\sum_{k=1}^{\infty}|g-s_{\nu_k}|^2$ tagjai majdnem mindenütt nullához tartanak.

6.61. Megjegyzés. Az előző tételből $\gamma_n = n$ választással kapjuk, hogy a $\gamma_k = k$ indexrészsorozatra, azaz az eredeti részletösszegekre majdnem mindenütti konvergenciát biztosít a $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 n < \infty$ együtthatófeltétellel. Ezt fokozatosan egyre kevesebbet kívánó feltétellel helyettesítették, míg eljutottak az optimális Rademacher–Mensov-feltételhez: $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\ln^2 n < \infty$.

6.62. Mensov-lemma. *Legyen μ véges mérték, $N \ge 2$, és $\psi_1,\dots,\psi_N$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben, $c_1,\dots,c_N \in \mathbb{K}$. Ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{L}^2$ függvény, amelyre*

$$\left|\sum_{k=i}^{j} c_k\psi_k(x)\right| \le \delta(x) \tag{1}$$

minden x-re és $1 \le i \le j \le N$-re, továbbá

$$\int \delta^2\,d\mu \le 36\log^2 N \sum_{k=1}^{N}|c_k|^2. \tag{2}$$

(A logaritmus kettes alapú.)

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy van olyan δ függvény, amelyre (1) teljesül $i = 1$ esetén, és (2) teljesül, de 36 helyett 9-el. Ekkor ugyanis $2\delta = \delta^*$ eleget tesz a tétel állításának. Legyen r az a legkisebb természetes szám, amelyre $N \le 2^r$. Legyen $\psi_{N+1} = \dots = \psi_{2^r} \equiv 0$ és $c_{N+1} = \dots = c_{2^r} = 0$. Csoportosítsuk a $\sum_{k=1}^{2^r} c_k\psi_k$ összeg tagjait kettesével, négyesével, stb., azaz legyen

$$p_q^l = \sum_{k=(l-1)2^q+1}^{l2^q} c_k\psi_k \qquad q = 0,1,\dots,r, \quad l = 1,2,\dots 2^{r-q}.$$

Tekintsünk egy $s_j = \sum_{k=1}^{j} c_k\psi_k$ részletösszeget. A j kettes alapú $j = \sum_{q=0}^{r}\delta_q 2^q$ előállítása segítségével s_j egyértelműen felírható $s_j = \sum_{q=0}^{r}\delta_q p_q^{l_j}$ alakban. Az

$$A_q = \sum_{l=1}^{2^{r-q}} |p_q^l|^2, \qquad \delta = \sqrt{(r+1)\sum_{q=0}^{r} A_q}$$

jelölésekkel,

$$\left|s_j(x)\right|^2 \le \sum_{q=0}^{r} 1^2 \sum_{q=0}^{r} \left|p_q^{l_j}(x)\right|^2 \le (r+1)\sum_{q=0}^{r} A_q(x) = \delta^2(x).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\int \delta^2\,d\mu &= (r+1)\sum_{q=0}^{r}\int A_q\,d\mu \le (r+1)\sum_{q=0}^{r}\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\\ &= (r+1)^2\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2 = \left(\frac{r+1}{\log N}\right)^2 \log^2 N\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\\ &\le 9\log^2 N\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2.\end{aligned}$$

6.63. Rademacher–Mensov-tétel. *Legyen μ véges mérték,*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \mathbb{L}^2(\mu)$$

ortonormált sorozat, és $c_1, c_2, \ldots$ olyan számsorozat, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\log^2 n < \infty.$$

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ sor majdnem mindenütt konvergens.

Bizonyítás. Az (1) feltételből $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\log n < \infty$, így $\gamma_n = \log n$ választással a $\nu_k = 2^k$ indexsorozatra $\gamma_{\nu_k} = \log 2^k = k$ teljesül, így az $s_{\nu_k} = \sum_{n=1}^{2^k} c_n\varphi_n$ részletösszegek sorozata majdnem mindenütt konvergens. Tekintsük a

$$\varphi_{2^k+1}, \varphi_{2^k+2}, \ldots, \varphi_{2^{k+1}}$$

függvényeket, és a hozzájuk tartozó együtthatókat, és alkalmazzuk a Mensov-lemmát. Azt kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_k \in \mathbb{L}^2$ függvény, hogy

$$\left|\sum_{n=2^k+1}^{m} c_n\varphi_n(x)\right| = \left|s_m(x) - s_{2^k}(x)\right| \le \delta_k(x), \tag{2}$$

ha $2^k \le m \le 2^{k+1}$, továbbá

$$\int \delta_k^2\,d\mu \le 36\log^2 2^k \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|c_n|^2 \le 36\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|c_n|^2\log^2 n.$$

Ebből

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int \delta_k^2\,d\mu \le 36\sum_{n=3}^{\infty}|c_n|^2\log^2 n < \infty,$$

azaz Beppo Levi tétele szerint a δ_k^2, és így a δ_k függvénysorozat tagjai majdnem mindenütt nullához tartanak. Ez (2) miatt azt jelenti, hogy $s_m(x)$ majdnem mindenütt egyszerre konvergens $s_{2^k}(x)$-el.

6.64. Tandori tétele. *Ha c_n olyan pozitív csökkenő és nullához tartó számsorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \infty$, akkor mindig megadható olyan $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum és $\psi_n \in \mathbb{L}^2([a,b];\mathbb{R})$ ortonormált sorozat, amelyre a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$ sor mindenütt divergens $[a,b]$-ben.*

A bizonyítás megtalálható a Pál [121] jegyzetben, 246. oldal.

6.65. Definíció. Legyen φ_n, $n = 0, 1, \ldots$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben. A sorozathoz tartozó *n-edik magfüggvényt* a

$$K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k}(t)\varphi_k(x)$$

összefüggéssel definiáljuk. Ezzel egy f függvény Fourier-sorának részletösszegei

$$s_n(f,x) = \int f(t) K_n(t,x)\, d\mu(t)$$

alakba írhatók, mivel

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int f(t)\overline{\varphi_k}(t)\, d\mu(t) \right) \varphi_k(x) \\ &= \int f(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k}(t)\varphi_k(x) \right) d\mu(t).\end{aligned}$$

Az *n-edik Lebesgue-függvény* az

$$L_n(x) = \int \left| K_n(t,x) \right| d\mu(t)$$

függvény.

6.66. Tétel. *Legyen μ véges mérték és φ_n, $n = 0, 1, \ldots$ ortonormált sorozat $\mathbb{L}^2(\mu;\mathbb{R})$-ben. Ha γ_n egy monoton növekedő pozitív számsorozat, és van olyan K konstans, hogy egy E pozitív mértékű mérhető halmazon a Lebesgue-függvényekre $L_n(x) \le K\gamma_n$, ha $x \in E$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \gamma_n < \infty$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ majdnem minden $x \in E$-re konvergens.*

A bizonyítás megtalálható a Pál [121] jegyzetben, 305. oldal.

7
Spektrálelmélet

Fizikus nóta

...

Harmonikus oszcillátor, hidrogénatom,
Van-e más is a világon, én nem tudhatom.
De ha netán volna más is – rúgja meg a ló –,
Az csak perturbáció.

Részecske vagyok, vagy hullám?
Élek-e vagy ez a hullám?
Megmondanám, hogyha tudnám,
De mindent én sem tudhatok!

Lett légyen az gólyatúra, joghurt, vagy kefír,
Schrödingernek egyenlete az mindent leír.
(S) Bár Feynman szerint kimaradt az erkölcs és a ló,
– (De) ez csak perturbáció.

...

ΜΑΦΗΕ

A kvantummechanika iránti érdeklődéstől hajtva kezdett dolgozni Neumann János az operátorelméletben, és egész életében foglalkozott ezzel a témakörrel. A fogalmak nagy részét, amelyek egy absztrakt elmélethez fontosak, már létrehozta Riesz Frigyes (1880–1956) magyar matematikus, aki megalapozta a korlátos szimmetrikus operátorok spektrálelméletét, nagyon hasonló módon ahhoz, amit ma klasszikusnak tekintünk. Von Neumann látta, hogy Riesz tárgyalásmódját ki kell terjeszteni nemkorlátos operátorokra is, és a kulcsot ehhez Carleman szinguláris integráloperátorokkal foglalkozó, igen eredeti munkájában találta meg. Az eredmény egy dolgozat volt, melyet von Neumann a Mathematische Zeitschrift*hez küldött el publikálásra, de később visszavont. Ennek a visszavonásnak az oka az volt, hogy 1928-ban Erhard Schmidt (1876–1959) és én, egymástól függetlenül, észrevettük, milyen szerepet játszhat az elméletben az adjungált operátor fogalma, és milyen fontosak az önadjungált operátorok. Amikor von Neumann Schmidt professzortól hallott erről a megfigyelésről, egyből képes volt sokkal teljesebb és kielégítőbb formában újraírni dolgozatát, megadva a zárt szimmetrikus operátorok és önadjungált operátorok teljes spektrálelméletét. Ezt úgy tette, hogy felhagyott Carleman módszerével, melyet csak transzfinit indukció felhasználásával tudott alkalmazni, és bevezette a Cayley-transzformációt, amely a nemkorlátos szimmetrikus operátorok elméletének a korlátos izometrikus operátorok elméletére történő*

visszavezetésére szolgál. Mellesleg, a már kiszedett dolgozat büntetés nélküli visszavonásáért cserébe, a kiadó kizsarolt von Neumann professzortól egy ígéretet, hogy ír egy könyvet a kvantummechanikáról. A könyv rövidesen meg is jelent, és egyike lett a modern fizika klasszikusainak, különösen értékes a kvantumstatisztika analízise. (Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer–Verlag, 1932).

M. H. Stone (1970)

7.1. Szuperpozíció, komplexifikálás. Ha X és Y lineáris terek $\mathbb{K}$ felett, $T \in X \to Y$ egy lineáris operátor, $c \in Y$, akkor a $Tx = c$ típusú lineáris egyenletek tanulmányozásánál igen hasznos a *szuperpozíció* elve: ha $c_1, c_2 \in Y$, az x_1 a $Tx = c_1$ az x_2 pedig a $Tx = c_2$ egyenlet egy megoldása, α_1, α_2 skalárok, akkor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ a $Tx = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ egyenlet egy megoldása. Speciálisan, a $Tx = c$ *inhomogén egyenlet* egy x_0 megoldásához hozzáadva az $Tx = 0$ *homogén egyenlet* megoldásait, az inhomogén egyenlet összes megoldását megkapjuk.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor a komplex számtest algebrai teljessége miatt gyakran hasznos komplex lineáris térre áttérni. Az X tér $X_{\mathbb{C}}$ *komplexifikáltja* $X \times X$, amelyben az $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ komplex skalárral való szorzást $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ esetén az

$$(\alpha, \beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$$

összefüggés definiálja. Vegyük észre a hasonlóságot $\mathbb{C}$ definíciójával. Ugyanúgy, mint ott, az $(x, 0)$ párt x-el azonosítva $X_{\mathbb{C}}$ elemei $x + iy$, $x, y \in X$ alakban, a fenti szorzás pedig a természetes

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

alakban írható. Ha X normált tér, akkor $X_{\mathbb{C}}$ normált térré tehető az

$$\|x + iy\| = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}} \big\|\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y\big\|$$

definícióval. Ha X belső szorzat tér, akkor $X_{\mathbb{C}}$ is belső szorzat térré tehető az

$$\langle x + iy, u + iv \rangle_{X_{\mathbb{C}}} = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle)$$

belső szorzattal, amiből a fenti normával ekvivalens norma származik.

A T *lineáris leképezés komplexifikáltját* a

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$$

összefüggés definiálja. Ha $z = x + iy$ az inhomogén egyenlet egy komplex térbeli megoldása, akkor $\overline{z} = x - iy$ is a komplex térbeli megoldása az egyenletnek, és $(z + \overline{z})/2$ az inhomogén, $(z - \overline{z})/(2i)$ pedig a homogén egyenletnek a valós térbeli megoldása. Látni fogjuk, hogy a spektrálelméletben több fogalmat csak komplex terek operátoraira tudunk közvetlenül definiálni. Ha egy ilyen fogalmat valós tér egy operátora esetében használunk, akkor mindig az operátor komplexifikáltjára értendő.

Másrészt, minden komplex lineáris tér valós lineáris térnek is tekinthető, kétszer akkora dimenzióval, így a komplex eset sokszor visszavezethető a valósra. Ezért sok tételt elég a valós esetben bebizonyítani.

7.2. Definíció. Legyen X egy normált tér. X egy *lineáris operátor*án egy $T \in X \to X$ lineáris leképezést értünk. Ha T inverze X-en értelmezett korlátos lineáris operátor, akkor T-t *reguláris*nak nevezzük, egyébként pedig *szinguláris*nak. A $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárt T *sajátértékének*, az $0 \neq x \in \operatorname{dmn}(T)$ vektort pedig T *sajátvektor*ának nevezzük, ha $Tx = \lambda x$. Egy λ sajátérték esetén ennek az egyenletnek a megoldásai alkotják a λ-hoz tartozó *sajátalter*et. A sajátérték *multiplicitás*a ennek az altérnek a dimenziója.

7.3. Definíció. Legyen T az X komplex Banach-tér lineáris operátora. A *rezolvens halmaz* azon $\lambda \in \mathbb{C}$ számok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ reguláris. A rezolvens halmaz komplementere T *spektrum*a, $\sigma(T)$. Azon λ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű, a T *pontspektrum*a, $\sigma_p(T)$; ez a sajátértékek halmaza. Azon λ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ kölcsönösen egyértelmű és képtere sűrű X-ben, de az inverz nem korlátos, T *folytonos spektrum*a, $\sigma_c(T)$. A $\sigma(T)$ többi eleme alkotja T *reziduális spektrum*át, $\sigma_r(T)$-t. Az $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ szám T *spektrálsugara*.

7.4. A spektrálleképezés elve. Az operátor spektruma fontos információt ad az operátorról. Nagyon fontos összefüggést fejez ki a spektrum és az operátor között a spektrálleképezés elve: ha T az X komplex Banach-tér egy operátora, f egy komplex változós, komplex értékű függvény, akkor $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$. Ha $T \in \mathcal{L}(X;X)$ és $f = g/h$ racionális törtfüggvény, a g és h közös gyök nélküli komplex polinomok hányadosa, akkor a bizonyítás nem nehéz. A későbbiekben általánosabban is bebizonyítjuk ezt az elvet, miután értelmezzük operátorok függvényeit.

7.5. Spektrálleképezés-lemma. *Legyen X komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$, és legyenek g, h közös gyök nélküli komplex polinomok. Ha h nem nulla a $\sigma(T)$-n, akkor $h(T)^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)$ és az $f = g/h$ racionális törtfüggvényre $f(T) = g(T)h(T)^{-1}$ spektruma $f(\sigma(T))$.*

∗ **Bizonyítás.** Írjuk f-et

$$f(x) = c\prod_{j=1}^{m}(x-\alpha_j)\prod_{k=1}^{n}(x-\beta_k)^{-1}$$

alakba, ekkor

$$f(T) = c\prod_{j=1}^{m}(T-\alpha_j\mathbb{I})\prod_{k=1}^{n}(T-\beta_k\mathbb{I})^{-1}.$$

Legyen $\lambda \in \sigma(T)$ és $\mu = f(\lambda)$. Mivel az $f(x) - \mu$ racionális függvény az $x = \lambda$ pontban nulla, a számlálójának λ gyöke, és így tartalmazza az $x - \lambda$ tényezőt. Ezért az $f(T) - \mu\mathbb{I}$ operátor tartalmazza tényezőként a nem reguláris $T - \lambda\mathbb{I}$ operátort, tehát nem lehet reguláris. Valóban, $T - \lambda\mathbb{I}$ vagy nem kölcsönösen egyértelmű, vagy nem X-re képez. Ha valamelyik tényező nem kölcsönösen egyértelmű, akkor a szorzat sem az. Ha minden tényező kölcsönösen egyértelmű, de valamelyik nem X-re képez, akkor a szorzat sem. Így $\mu \in \sigma(f(T))$, és ezzel beláttuk, hogy $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$.

Megfordítva, legyen $\mu \in \sigma(f(T))$. Állítsuk elő az $f(x) - \mu$ racionális törtfüggvényt

$$c\prod_{j=1}^{m}(x-\alpha_j)\prod_{k=1}^{n}(x-\beta_k)^{-1}$$

alakban. Ha az összes α_j a $\sigma(T)$-n kívül lenne, akkor az $f(T)-\mu\mathbb{1}$ operátor reguláris lenne, ami lehetetlen. Tehát valamelyik α_j a spektrumban van, de $f(\alpha_j)-\mu=0$, azaz $\mu\in f(\sigma(T))$.

7.6. Neumann-sor. *Legyen $T\in\mathcal{L}(X;X)$, ahol X Banach-tér, és tegyük fel, hogy $\|T\|<1$. Ekkor $\mathbb{1}-T$ reguláris és*

$$(\mathbb{1}-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k\qquad(T^0=\mathbb{1}).$$

Figyeljük meg a kapcsolatot $1/(1-t)$ Taylor-sorával.

Bizonyítás. A jobb oldali sor abszolút konvergens, mert a $\sum_{k=0}^{\infty}\|T^k\|$ sort a $\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k$ konvergens mértani sor majorálja. Legyen S_n a sor n-edik részletösszege, ekkor

$$(\mathbb{1}-T)S_n=S_n(\mathbb{1}-T)=\mathbb{1}-T^{n+1}.$$

Ebből $n\to\infty$ esetén $S_n\to S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k$, így a szorzás folytonosságát felhasználva $(\mathbb{1}-T)S=S(\mathbb{1}-T)=\mathbb{1}$, ezt kellett bizonyítanunk.

7.7. Tétel. *Ha X egy Banach-tér, akkor $\mathcal{L}(X;X)$ reguláris elemeinek halmaza nyílt halmaz, és ezen a $T\mapsto T^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen T reguláris, és $\|S-T\|<1/\|T^{-1}\|$. Ekkor

$$S=T-(T-S)=T(\mathbb{1}-T^{-1}(T-S))=T(\mathbb{1}-R),$$

ahol $R=T^{-1}(T-S)$. Mivel $\|R\|\le\|T^{-1}\|\|T-S\|<1$, az előző tétel szerint $\mathbb{1}-R$ reguláris, és $(\mathbb{1}-R)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}R^k$. De ekkor $S=T(\mathbb{1}-R)$ is reguláris, és

$$S^{-1}=(\mathbb{1}-R)^{-1}T^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\big(T^{-1}(T-S)\big)^kT^{-1}.$$

Ebből

$$\begin{aligned}\|S^{-1}-T^{-1}\|&=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\big(T^{-1}(T-S)\big)^kT^{-1}\right\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\|T^{-1}\|^k\|T-S\|^k\|T^{-1}\|\\&=\|T-S\|\|T^{-1}\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\big(\|T^{-1}\|\|T-S\|\big)^{k-1}\\&=\frac{\|T-S\|\|T^{-1}\|^2}{1-\|T-S\|\|T^{-1}\|}.\end{aligned}$$

$*$ **7.8. Megjegyzés.** A $T\mapsto T^{-1}$ leképezés differenciálható is a reguláris elemek halmazán és deriváltja a T pontban az $R\mapsto -T^{-1}RT^{-1}$ leképezés. Valóban, a fenti bizonyításhoz hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\big\|S^{-1}-T^{-1}-T^{-1}(T-S)T^{-1}\big\|\le\frac{\|T-S\|^2\|T^{-1}\|^3}{1-\|T-S\|\|T^{-1}\|}.$$

7.9. Tétel. *Egy komplex Banach-tér bármely lineáris operátorának a spektruma zárt halmaz.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha T inverze $S \in \mathcal{L}(X;X)$, azaz $ST \subset TS = \mathbb{I}$, akkor $S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)$ a $T - \lambda\mathbb{I}$ inverze elég kis $|\lambda|$ esetén. Tegyük fel, hogy $|\lambda| < 1/\|S\|$. Ekkor $\mathbb{I} - \lambda S$ reguláris, és

$$(T - \lambda\mathbb{I})Sx = TSx - \lambda Sx = x - \lambda Sx = (\mathbb{I} - \lambda S)x$$

minden $x \in X$-re, így

$$(T - \lambda\mathbb{I})S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}y = (\mathbb{I} - \lambda S)(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}y = y$$

minden $y \in X$-re, azaz $S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}$ a $T - \lambda\mathbb{I}$ inverze.

7.10. Tétel. *Legyen $X \neq \{0\}$ komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$. Ekkor $\sigma(T)$ nem üres kompakt halmaz.*

$*$ **Bizonyítás.** Ha $\sigma(T)$ üres, akkor a $\lambda \mapsto (\lambda\mathbb{I} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)$ leképezés holomorf az egész síkon. Mivel $|\lambda| > \|T\|$ esetén $(\lambda\mathbb{I} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k/\lambda^{k+1}$,

$$\left\|(\lambda\mathbb{I} - T)^{-1}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k/|\lambda|^{k+1} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \to 0,$$

ha $|\lambda| \to \infty$, így ez a leképezés korlátos. A Liouville-tétel szerint konstans, de becslésünk szerint csak nulla lehet, ami ellentmondás.

$*$ **7.11. Definíció.** Legyen X komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$ és f a $\sigma(T)$ valamely G környezetén holomorf függvény. Legyen

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(z\mathbb{I} - T)^{-1}\,dz,$$

ahol Γ egy $G \setminus \sigma(T)$-beli ciklus, amelyre $\mathrm{ind}(\Gamma, x) = 1$, ha $x \in \sigma(T)$ és $\mathrm{ind}(\Gamma, x) = 0$, ha $x \notin G$. Ha Δ egy másik ilyen ciklus, akkor $\Gamma \vee \check{\Delta}$-ra alkalmazva a Cauchy-tétel homológ változatát, kapjuk, hogy a két integrál megegyezik, és így $f(T)$ nem függ a Γ választásától.

$*$ **7.12. Tétel.** *Ha X egy komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$ és G a $\sigma(T)$ egy környezete, $f, g, f_1, f_2, \ldots$ a G-n holomorf komplex értékű függvények, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, akkor*

(1) $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$;

(2) $(fg)(T) = f(T)g(T)$;

(3) *ha $f_n \to f$ egyenletesen, akkor $f_n(T) \to f(T)$ normában;*

(4) *ha $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ a G-n, akkor $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k$.*

Bizonyítás. (1) és (3) triviálisak. (2) bizonyításához válasszunk a definícióban leírtak szerint egy Γ ciklust $G \setminus \sigma(T)$-ben, legyen H a G azon pontjainak halmaza, amelyekre $\mathrm{ind}(\Gamma, x) = 0$, és válasszunk egy Δ ciklust H-ban, amelyre $\mathrm{ind}(\Delta, x) = 0$, ha $x \notin G$ és

$\operatorname{ind}(\Delta, x) = 1$, ha $x \in G \setminus H$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma f(z)(z\mathbb{1}-T)^{-1}\,dz \int_\Delta g(w)(w\mathbb{1}-T)^{-1}\,dw \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Delta f(z)g(w)(z\mathbb{1}-T)^{-1}(w\mathbb{1}-T)^{-1}\,dw\,dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Delta f(z)g(w)\frac{(z\mathbb{1}-T)^{-1}-(w\mathbb{1}-T)^{-1}}{w-z}\,dw\,dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma f(z)(z\mathbb{1}-T)^{-1}\int_\Delta \frac{g(w)}{(w-z)}\,dw\,dz \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\int_\Delta g(w)(w\mathbb{1}-T)^{-1}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(w-z)}\,dz\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)g(z)(z\mathbb{1}-T)^{-1}\,dz = (fg)(T). \end{aligned}$$

(3) miatt (4)-et elég $f(z) = z^k$-ra belátni. Ekkor alkalmas ciklusra áttérve

$$\begin{aligned} f(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^k(z\mathbb{1}-T)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^k\sum_{j=0}^{\infty}-\frac{T^j}{z^{j+1}}\,dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}T^j\int_\Gamma z^{k-j-1}\,dz = T^k. \end{aligned}$$

∗ **7.13. Spektrálleképezés-tétel.** *Az előző tétel feltételei mellett,*

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)).$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \sigma(T)$ és legyen

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}, & \text{ha } z \neq \lambda, \\ f'(\lambda), & \text{ha } z = \lambda. \end{cases}$$

Az előző tétel szerint $f(T) - f(\lambda)\mathbb{1} = (T - \lambda\mathbb{1})g(T)$. Innen, ha $f(T) - f(\lambda)\mathbb{1}$ reguláris, akkor $T - \lambda\mathbb{1}$ is, tehát $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$. Megfordítva, legyen $\mu \notin f(\sigma(T))$. Ekkor a $h(z) = 1/(f(z) - \mu)$ függvény holomorf a $\sigma(T)$ egy környezetében. Az előző tétel szerint $h(T)(f(T) - \mu\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\mu \in \sigma(f(T))$.

∗ **7.14. Tétel.** *Legyen f holomorf a $\sigma(T)$ egy környezetében, g pedig holomorf a $\sigma(f(T))$ egy környezetében. Ekkor $g\circ f$ holomorf a $\sigma(T)$ egy környezetében, és $(g\circ f)(T) = g(f(T))$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f holomorf a $\sigma(T)$ egy G környezetében, g pedig holomorf a $\sigma(f(T))$ egy H környezetében. Az előző tételből következik, hogy $g\circ f$ holomorf a $\sigma(T)$ egy környezetében. Válasszunk egy megfelelő Γ ciklust H-ban. Az $\{x\colon \operatorname{ind}(\Gamma, x) = 1\}$ nyílt halmaz f általi teljes inverz képe tartalmazza $\sigma(T)$-t. Válasszunk egy megfelelő Δ ciklust ebben a nyílt halmazban. Az

$$S(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{(z\mathbb{1}-T)^{-1}}{w-f(z)}\,dz$$

operátorra $(w\mathbb{1}-f(T))S(w)=S(w)(f(T)-w\mathbb{1})=\mathbb{1}$, így $S(w)=\big(w\mathbb{1}-f(T)\big)^{-1}$. Ebből

$$\begin{aligned} g(f(T)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(w)\big(w\mathbb{1}-f(T)\big)^{-1}\,dw \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Delta \frac{g(w)(z\mathbb{1}-T)^{-1}}{w-f(z)}\,dz\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(f(z))(z\mathbb{1}-T)^{-1}\,dz = (g\circ f)(T). \end{aligned}$$

7.15. Spektrálsugár-formula. *Ha $T\in\mathcal{L}(X;X)$, ahol X komplex Banach-tér, akkor az $r(T)$ spektrálsugárra*

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\inf_{n\ge1}\sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

∗ **Bizonyítás.** A spektrálleképezés-lemmából ha $\lambda\in\sigma(T)$, akkor $\lambda^n\in\sigma(T^n)$, így $r(T)\le\inf_n\|T^n\|^{1/n}$. Másrészt, mivel a $\lambda\mapsto(\lambda\mathbb{1}-T)^{-1}$ leképezésre $|\lambda|>\|T\|$ esetén

$$(\lambda\mathbb{1}-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n/\lambda^{n+1},$$

a jobb oldali sor ezen függvény Laurent-sora. Mivel a fenti függvény $|\lambda|>r(T)$ esetén holomorf, a Laurent-sor is ebben az esetben konvergens, így van olyan $K<\infty$, hogy $\|T^n\|/|\lambda|^{n+1}\le K$ minden n-re. Ebből $\|T^n\|^{1/n}\le|\lambda|(K|\lambda|)^{1/n}$, amiből $\limsup_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}\le|\lambda|$. Ha $|\lambda|\downarrow r(T)$, kapjuk az állítást.

7.16. Tétel. *Ha X komplex Banach-tér, $T\in\mathcal{L}(X;X)$, és $r(T)$ az T spektrálsugara, továbbá $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$ egy komplex hatványsor R konvergenciasugárral, akkor az $f(T)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT^k$ sor $r(T)<R$ esetén abszolút konvergens, $r(T)>R$ esetén divergens.*

Bizonyítás. Mivel

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|c_nT^n\|} &= \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\sqrt[n]{\|T^n\|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \\ &= r(T)/R, \end{aligned}$$

$r(T)<R$ esetén a sor abszolút konvergens, $r(T)>R$ esetén viszont az általános tagja nem tart nullához.

7.17. Tétel. *Legyen X komplex Banach-tér, $T\in\mathcal{L}(X;X)$, és*

$$p(z)=(z-\lambda_1)^{\alpha_1}(z-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(z-\lambda_n)^{\alpha_n}\quad(\lambda_j\ne\lambda_k,\text{ ha }j\ne k)$$

egy polinom, amelyre $p(T)=0$. Ekkor léteznek olyan, p-nél alacsonyabb fokú $h_{j,k}$ polinomok, hogy minden $f\colon G\to\mathbb{C}$, $G\subset\mathbb{C}$ analitikus függvényre, amelyre $f(T)$ értelmezve van és $\lambda_j\in G$, ha $j=1,2,\dots,n$, teljesül, hogy

$$f(T)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}f^{(k)}(\lambda_j)h_{j,k}(T).$$

$*$ **Bizonyítás.** Jelölje $h_{j,k}$ a

$$h_{j,k}^{(l)}(\lambda_m) = \delta_{j,m}\delta_{k,l}, \quad (m = 1, \dots, n, l = 0, 1, \dots, \alpha_m - 1)$$

feltételrendszernek eleget tevő Hermite interpolációs polinomot. Ekkor az

$$f(z) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) h_{j,k}(z)$$

analitikus függvénynek λ_j legalább α_j-szeres zérushelye, így ez a függvény felírható $p(z)q(z)$ alakban, ahol q analitikus G-n. Ebből

$$f(T) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) h_{j,k}(T) = p(T)q(T) = 0.$$

7.18. Megjegyzés. Az előző tételt leggyakrabban véges dimenziós terek lineáris operátoraira alkalmazzuk. Ekkor a Cayley–Hamilton-tétel szerint a $p(z) = \det(T - z\mathbb{I})$ karakterisztikus polinomra $p(T) = 0$. Bár a $h_{j,k}$ polinomokat is meghatározhatnánk, egyszerűbb felhasználni, hogy a $h_{j,k}(T)$ operátorok nem függnek f-től. f helyére alkalmas függvényeket, például $(z - \lambda_j)^k$ alakú polinomokat írva, az ismeretlen operátorokra egyszerű egyenletrendszert kapunk.

→ **7.19. Feladat [8].** Határozzuk meg a T operátor spektrumát, ha mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

→ **7.20. Feladat [10].** Határozzuk meg a T^{1000}, e^T, $\cos T$ és e^{tT} $(t \in \mathbb{C})$ operátorokat, ha T mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

7.21. Feladat [8]. Adjunk példát Banach-téren olyan $T, S \in \mathcal{L}(X; X)$ operátorokra, amelyekre TS reguláris, de ST szinguláris. Mutassuk meg, hogy X nem lehet véges dimenziós.

→ **7.22. Feladat [5].** Két $T, S \in \mathcal{L}(H; H)$ operátort *hasonló*nak nevezünk, ha létezik olyan reguláris $P \in \mathcal{L}(H; H)$ hogy $P^{-1}TP = S$. Mutassuk meg, hogy hasonló operátoroknak ugyanaz a spektruma.

7.23. Feladat [9]. Legyen X komplex Banach-tér. Bizonyítsuk be, hogy minden $T \in \mathcal{L}(X; X)$ operátorhoz és minden $\sigma(T)$-t tartalmazó V nyílt halmazhoz található olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $S \in \mathcal{L}(H; H)$ és $\|T - S\| < \varepsilon$, akkor $\sigma(S) \subset V$.

Megoldás. Legyen $\varphi(\lambda) = \|(T - \lambda I)^{-1}\|$. Ekkor φ definiált és folytonos $\mathbb{C} \setminus V$-en. Minthogy $\varphi(\lambda)$ eltűnik a végtelenben, így korlátos. Tegyük fel, hogy $\varphi(\lambda) < \alpha$ a $\mathbb{C} \setminus V$-n és legyen $\varepsilon = 1/\alpha$. Most ha $\|T - S\| < \varepsilon$ és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus V$, akkor

$$\|(T - \lambda I) - (S - \lambda I)\| = \|T - S\| < \varepsilon < \frac{1}{\|(T - \lambda I)^{-1}\|},$$

amiből $S - \lambda I$ invertálható.

$*$ **7.24. Feladat [13].** Legyen X komplex Banach-tér, $T, S \in \mathcal{L}(X;X)$. Bizonyítsuk be, hogy

(1) $r(T^k) = \big(r(T)\big)^k$, ha $k \in \mathbb{N}$;

(2) $r(\alpha T) = |\alpha| r(T)$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$;

(3) $r(TS) = r(ST)$;

(4) $r(T+S) \le r(T) + r(S)$, ha $TS = ST$;

(5) $r(TS) \le r(T)r(S)$, ha $TS = ST$.

$*$ **7.25. Feladat [10].** Legyen X Banach-tér, $T, S \in \mathcal{L}(X;X)$. Bizonyítsuk be, hogy ha T reguláris, akkor $\sigma(TS) = \sigma(ST)$.

Megoldás. Minden algebrában igaz, hogy ha $e - xy$-nak van multiplikatív inverze, akkor $e - yx$-nek is.

7.26. Hilbert-terek korlátos operátorai. Legyenek X és Y Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Egy korlátos $T \in X \to Y$ operátor mindig kiterjeszthető az egész X-re: egyértelműen terjeszthető ki az értelmezési tartománya lezártjára, ennek ortogonális komplementerén pedig tetszőlegesen definiálhatjuk, például választhatjuk nullának. Így a korlátos operátorok $\mathcal{L}(X;Y)$ elemeinek megszorításai.

7.27. Adjungált operátor. Legyenek X és Y Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Ha $T \in X \to Y$ lineáris, nem feltétlenül korlátos, de sűrű halmazon van definiálva, akkor azon $y \in Y$ elemekre, amelyekre $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ folytonos $\mathrm{dmn}(T)$-n, ez a funkcionál egyértelműen kiterjeszthető X-re, és így van olyan $T^*y \in X$, amelyre

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

(A kiterjesztés egyértelműségéhez az szükséges, hogy $\mathrm{dmn}(T)$ sűrű legyen X-ben.) Könnyű kiszámolni, hogy $T^* \in Y \to X$ lineáris operátor; T^* a T *adjungált*ja. Nyilvánvaló, hogy ha T korlátos, akkor T^* mindenütt értelmezve van. Az is nyilvánvaló, hogy ha $T \subset S$, akkor $S^* \subset T^*$. Ha $T^*T = \mathbb{I}_X$ és $TT^* = \mathbb{I}_Y$, akkor T-t *unitér*nek nevezzük.

7.28. Definíció. Egy Hilbert-tér egy T lineáris operátorát *szimmetrikus*nak vagy *Hermite-félé*nek nevezzük, ha $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ minden $x, y \in \mathrm{dmn}(T)$-ra. Vegyük észre, hogy egy szimmetrikus operátorra $\langle Tx, x\rangle$ mindig valós. Egy sűrűn definiált operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $T \subset T^*$. Ha $T = T^*$, akkor T-t *önadjungált*nak nevezzük. Ha $\overline{T}$ önadjungált operátor, akkor T-t *lényegében önadjungált*nak nevezzük. (Felhívjuk rá a figyelmet, hogy $\overline{T}$ nem feltétlenül függvény!) Egy sűrűn definiált zárt operátort *normális*nak nevezünk, ha $T^*T = TT^*$.

A T lineáris operátort *alulról korlátos*nak nevezünk, ha van olyan c valós szám, hogy $\langle Tx, x\rangle \ge c\|x\|^2$ teljesül minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re. Ha c választható nullának, akkor T-t *nemnegatív*nak, ha pedig c választható pozitívnak is, akkor T-t *pozitív*nak nevezzük. Ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén a *felülről korlátos operátor* fogalmát kapjuk.

7.29. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, T egy sűrűn definiált lineáris operátor H-n, $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, ha $x_1, x_2 \in H$. Ekkor $T^* = V(T)^\perp$.*

Vegyük észre, hogy ha $H = \mathbb{R}$, akkor V a sík egy derékszöggel való elforgatása.

Bizonyítás. $(y,z) \in T^*$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re. Ez azzal ekvivalens, hogy $\langle(-Tx, x), (y,z)\rangle = 0$ minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re, az utóbbi azonban pontosan akkor teljesül, ha (y,z) a $V(T)$ ortogonális komplementerében van.

7.30. Következmény. *T^* zárt operátor. Önadjungált operátor zárt, így normális. $\overline{T}$ pontosan akkor függvény, ha T^* sűrűn definiált, és ekkor $\overline{T} = T^{**}$.*

Bizonyítás. Ha T^* sűrűn definiált, akkor $T^{**} = V(V(T)^\perp)^\perp = T^{\perp\perp} = \overline{T}$ függvény. Ha T^* nem sűrűn definiált, akkor van olyan $0 \neq z \in H$, amely ortogonális $\overline{\mathrm{dmn}(T^*)}$-ra. Ekkor $(z,0)$ ortogonális T^*-ra, tehát $(0,-z)$ benne van $\overline{T}$-ban.

7.31. Tétel. *Legyenek X, Y és Z Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett, $T, S \in \mathcal{L}(X;Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, $(RS)^* = S^* R^*$, $\|T^*\| = \|T\|$, $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$, $\mathrm{rng}(T)^\perp = \ker(T^*)$ és $\ker(T)^\perp = \overline{\mathrm{rng}(T^*)}$.*

Bizonyítás. A $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ és $(RS)^* = S^* R^*$ összefüggések könnyen bizonyíthatók a definíció alapján. Az

$$\big|\langle x, T^* y\rangle\big| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

egyenlőtlenségből $x = T^* y$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\|T^* y\| \leq \|T\|\|y\|$, amiből $\|T^*\| \leq \|T\|$, ebből pedig T helyére T^*-ot írva $\|T\| \leq \|T^*\|$. A normára vonatkozó másik egyenlőség igazolásához vegyük észre hogy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2,$$

ahonnan következik, hogy $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$, a másik irányú egyenlőtlenség pedig triviális. Ha $y \perp \mathrm{rng}(T)$, akkor $0 = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ minden $x \in X$-re, így mivel x tetszőleges, $y \in \ker(T^*)$. Megfordítva, ha $y \in \ker(T^*)$, akkor bármely $x \in X$-re $0 = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$, és így $y \perp \mathrm{rng}(T)$. A másik összefüggés ebből már következik, ha figyelembe vesszük, hogy $\mathrm{rng}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{rng}(T)}$ és T helyére T^*-ot írunk.

7.32. Következmény. *Ha H komplex Hilbert-tér és $T \in \mathcal{L}(H;H)$ önadjungált, akkor $r(T) = \|T\|$.*

Bizonyítás. $\|T^2\| = \|T\|^2$, amiből indukcióval $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, így az állítás következik a spektrálsugár-formulából.

7.33. $*$-algebrák. Ha egy komplex X algebrában adva van egy $x \mapsto x^*$ leképezése X-nek önmagába úgy, hogy $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, $(xy)^* = y^* x^*$, és $(x^*)^* = x$, akkor ezt a leképezést *involúció*nak, X-et *$*-algebrá*nak nevezzük. Ha X Banach-algebra is, és $x \in X$ esetén $\|xx^*\| = \|x\|^2$, akkor X-et B**-algebrá*nak nevezzük. Kommutatív B*-algebrára példa $\mathcal{B}(X;\mathbb{C})$ a komplex konjugált képzéssel vagy egy tetszőleges halmaz korlátos komplex értékű függvényei a konjugált képzéssel és a szuprémum normával. Nemkommutatív B*-algebrára az előző tétel szerint példa $\mathcal{L}(H;H)$, ahol H egy komplex Hilbert-tér, az adjungáltképzéssel. Ha egy $*$-algebra egy x elemére $x = x^*$ illetve $xx^* = x^*x$, akkor x-et *önadjungált*nak illetve *normális*nak nevezzük. Ha egy egységelemes $*$-algebra egy x elemére $xx^* = x^*x = e$, akkor azt mondjuk, hogy x *unitér*. Csak az egységelemes B*-algebrák fontosak.

A korlátos operátorok elméletét a Banach-algebrák és B*-algebrák elmélete segítségével szokás tárgyalni. Mivel mi itt a hangsúlyt a nemkorlátos operátorokra helyezzük, ez a megoldás számunkra csak kitérő lenne. Banach-algebrákkal és B*-algebrákkal kapcsolatban lásd például Losonczi [104] jegyzetének utolsó fejezetét.

∗ **7.34. Feladat [7].** Legyen X egy egységelemes B*-algebra. Mutassuk meg, hogy

(1) $e^* = e$;

(2) tetszőleges $x \in X$-re $\|x^*\| = \|x\|$;

(3) tetszőleges $x \in X$-re $x_r = (x + x^*)/2$ és $x_i = (x - x^*)/(2i)$ önadjungáltak és $x = x_r + ix_i$;

(4) ha x invertálható, akkor x^* is és $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$;

(5) ha x normális, akkor $r(x) = \|x\|$.

7.35. Projekcióoperátorok és zárt alterek. Legyen H Hilbert-tér. Emlékeztetünk rá, hogy a $P\colon H \to H$ lineáris operátor pontosan akkor projekció, ha $P^2 = P$, ekkor $H = \ker(P) \oplus \operatorname{rng}(P)$, és ha P folytonos, akkor $\ker(P)$ és $\operatorname{rng}(P) = \ker(\mathbb{I} - P)$ zártak. Ha P önadjungált, akkor $\operatorname{rng}(P)$ és $\ker(P)$ egymás ortogonális komplementerei. Megfordítva, ha M a H egy zárt lineáris altere, akkor az $M^\perp$ mentén M-re való projekció P operátora önadjungált, mivel $y = Py + (y - Py)$ az y ortogonális felbontása, így $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle x, P^2y\rangle = \langle x, Py\rangle$. Ez azt mutatja, hogy a $P \mapsto \operatorname{rng}(P)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít $\mathcal{L}(H;H)$ önadjungált projekcióoperátorai és H zárt lineáris alterei között. A legegyszerűbb önadjungált folytonos projekciók az $\mathbb{I}$ identikus operátor és a nulloperátor.

∗ **7.36. Feladat [8].** Legyen H Hilbert-tér és $P, Q \in \mathcal{L}(H;H)$ önadjungált projekció. Mutassuk meg, hogy

(1) PQ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = QP$;

(2) $P + Q$ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = 0$;

(3) az előző feltétel azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rng}(P) \perp \operatorname{rng}(Q)$;

(4) $P - Q$ pontosan akkor önadjungált projekció, ha $PQ = Q$;

(5) az előző feltétel azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rng}(Q) \subset \operatorname{rng}(P)$.

Megoldás. (1), (3),(5) valamint (2) és (4) egyik fele triviális. Ha $P + Q$ projekció, akkor a négyzetét kiszámolva $PQ + QP = 0$. Ezt balról illetve jobbról szorozva Q-val, kapjuk, hogy PQ és QP különbsége is nulla. (4) hasonlóan adódik.

7.37. Polarizáció. *Legyen H Hilbert-tér, $T \in H \to H$ lineáris operátor. Ha H komplex, akkor*

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle, \quad x, y \in \operatorname{dmn}(T).$$

Ha T szimmetrikus, akkor

$$4\Re\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle, \quad x, y \in \operatorname{dmn}(T).$$

Ez a *polarizációs formula*. Speciálisan, a belső szorzat kifejezhető a normával.

Bizonyítás. Kiszámoljuk.

7.38. Tétel. *Legyenek X, Y komplex Hilbert-terek, $U \in X \to Y$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *U unitér operátor;*

(2) $\operatorname{dmn}(U) = X$, $\operatorname{rng}(U) = Y$, *$U$ lineáris és $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ bármely $x, y \in H$-ra;*

(3) $\operatorname{dmn}(U) = X$, $\operatorname{rng}(U) = Y$, *$U$ lineáris és $\|Ux\| = \|x\|$ bármely $x \in H$-ra.*

Bizonyítás. Ha U unitér, akkor Y-ra képez, az egész X-en van értelmezve, kölcsönösen egyértelmű, és az inverze U^*. Mivel

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle UU^*y, y\rangle = \langle U^*y, U^*y\rangle = \|U^*y\|^2,$$

U^{-1} izometria, és így U korlátos is. Másrészt

$$\langle x, y\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle,$$

azaz (1)-ből következik (2). Hogy (2)-ből következik (3), nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy (3) teljesül. Ekkor

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

bármely $x \in X$-re, így polarizációval kapjuk, hogy $U^*U = \mathbb{1}$. Mivel U lineáris izometria X-ről Y-ra, ezért létezik korlátos inverze, tehát $U^* = U^{-1}$.

$*$ **7.39. Feladat [14].** Mutassuk meg, hogy az előző tétel feltételei akkor is ekvivalensek, ha X, Y valós Hilbert-terek, valamint ekkor (és csak ekkor) ekvivalensek az alábbi feltétellel:

(4) $\operatorname{dmn}(U) = X$, $\operatorname{rng}(U) = Y$, $U(0) = 0$ és U távolságtartó.

7.40. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér. Ha a $T \in \mathcal{L}(H; H)$ operátor önadjungált, akkor a spektruma valós. Ha $T \in \mathcal{L}(H; H)$ nemnegatív operátor, akkor önadjungált és spektruma nemnegatív valós számokból áll.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy T önadjungált. Ha λ nem valós szám, akkor a $T - \lambda\mathbb{1}$ operátor magja $\{0\}$, mert egyébként a mag egy x egységvektorára $\lambda = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}$. A $T - \lambda\mathbb{1}$ operátor értékkészlete sűrű H-ban, hiszen $\operatorname{rng}(T - \lambda\mathbb{1})^\perp = \ker((T - \lambda\mathbb{1})^*) = \ker(T - \overline{\lambda}\mathbb{1}) = \{0\}$. Megmutatjuk, hogy a $\operatorname{rng}(T - \lambda\mathbb{1})$ halmazon értelmezett $(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ operátor korlátos is. Ha $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\big\|(T - \lambda\mathbb{1})x\big\|^2 &= \big\langle (T - \alpha\mathbb{1})x - i\beta x, (T - \alpha\mathbb{1})x + i\beta x\big\rangle \\ &= \big\|(T - \alpha\mathbb{1})x\big\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

A becslés miatt, ha $(T - \lambda\mathbb{1})x_n \to y$, akkor x_n Cauchy-sorozat, így $x_n \to x$ és $(T - \lambda\mathbb{1})x = y$, azaz $T - \lambda\mathbb{1}$ értékkészlete H, és a becslésből következik, hogy az inverze korlátos.

Ha T nemnegatív, akkor a polarizációs formula szerint

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(x + i^j y), x + i^j y\rangle.$$

Hasonlóan,

$$\langle Ty, x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^{-j}\langle T(y+i^{-j}x), y+i^{-j}x\rangle.$$

Mivel

$$\langle T(x+i^j y), x+i^j y\rangle = \langle T(y+i^{-j}x), y+i^{-j}x\rangle,$$

azt kapjuk, hogy $\langle Tx, y\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle$. Így T önadjungált, és a spektrum valós. Ha $\lambda < 0$, akkor $\ker(T-\lambda\mathbb{I}) = \{0\}$, hiszen egyébként egy egységvektorára $\langle Tx, x\rangle = \lambda$. Ugyanúgy, mint fent, kapjuk, hogy $\operatorname{rng}(T-\lambda\mathbb{I})$ sűrű H-ban, a

$$\big\|(T-\lambda\mathbb{I})x\big\|^2 = \big\langle (T-\lambda\mathbb{I})x, (T-\lambda\mathbb{I})x\big\rangle = \|Tx\|^2 - 2\lambda\langle Tx, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$$

becslésből pedig, hogy inverze mindenütt értelmezett korlátos operátor.

→ **7.41. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, akkor $T \in \mathcal{L}(H;H)$ pontosan akkor önadjungált, ha $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ minden $x \in H$-ra.

Megoldás. Polarizáció.

7.42. Példák. Példáinkban tekintsük a számegyenest a Lebesgue-mértékkel, és legyen a Hilbert-tér a megfelelő komplex $\mathbb{L}^2$-tér.

(1) Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény, és M_g a g-vel való szorzás operátora, azaz

$$M_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad \text{ha} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ekkor M_g korlátos lineáris operátor. Az M_g adjungáltja $M_{\overline{g}}$. Ha g valós értékű, akkor M_g önadjungált. Ha g egy halmaz karakterisztikus függvénye, akkor M_g önadjungált projekcióoperátor.

(2) Legyen

$$(Mf)(t) = tf(t), \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^2 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|f(t)\big|^2\,dt < \infty.$$

Megmutatható, hogy ekkor M nemkorlátos önadjungált operátor.

(3) Legyen $\hbar > 0$ egy valós szám, és definiáljuk a D operátort a kompakt tartójú, szakaszonként folytonosan differenciálható függvényeken úgy, hogy $Df = -i\hbar f'$. Ekkor D sűrűn definiált operátor, és

$$\langle Df, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar f'\overline{g} = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar f\overline{g'} = \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{(-i\hbar g')} = \langle f, Dg\rangle,$$

ha $f, g \in \operatorname{dmn}(D)$, azaz D szimmetrikus. Megmutatható, hogy D nem önadjungált, de lényegében önadjungált, $\overline{D}$ azon $f \in \mathbb{L}^2$ függvényekre van értelmezve, amelyek minden kompakt intervallumon abszolút folytonosak, és deriváltjuk is négyzetesen integrálható, és ezekre $\overline{D}f = -i\hbar f'$.

(4) Legyen M a (2)-ben definiált operátor, D pedig a (3)-ban definiált operátor. Az M és D operátorok kommutátora, $DM - MD$ az értelmezési tartományán megegyezik az $-i\hbar\mathbb{I}$ operátorral:

$$-i\hbar(tf(t))' + ti\hbar f'(t) = -i\hbar f(t)$$

(Heisenberg-féle felcserélési összefüggés).

→ **7.43. Feladat [10].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0,1]$ alábbi operátorainak normáját:

(1) $(Tx)(s) = \int_0^1 x(t)\cos(s-t)\,dt$;

(2) $(Tx)(s) = x(s)$, ha $0 \le s \le \frac{1}{2}$, 0, ha $\frac{1}{2} < s \le 1$;

(3) $(Tx)(s) = x(s)\sin s$;

(4) $(Tx)(s) = x(s)e^{is}$.

→ **7.44. Feladat [10].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alábbi operátorainak normáját, ha $c \in \mathbb{R}$ és a korlátos mérhető függvény:

(1) $(Tx)(s) = x(s+c)$;

(2) $(Tx)(s) = a(s)x(s)$;

(3) $(Tx)(s) = (x(s) + x(-s))/2$.

→ **7.45. Feladat [8].** Legyen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathbb{l}^2$. Határozzuk meg az alábbi operátorok normáját:

(1) $S_r x = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$;

(2) $S_l x = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$;

(3) $T_n x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$.

→ **7.46. Feladat [11].** Határozzuk meg az előző három feladatban szereplő operátorok adjungáltját.

→ **7.47. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha a H Hilbert-tér operátoraira T önadjungált, S szimmetrikus, és $T \subset S$, akkor $T = S$.

Megoldás. $T \subset S \subset S^* \subset T^* = T$.

→ **7.48. Feladat [7].** Hogyan használható az a tény, hogy ha H komplex Hilbert-tér, akkor $\mathcal{L}(H;H)$ B*-algebra, a véges dimenziós esetben operátorok normájának kiszámítására?

Megoldás. T^*T önadjungált, így spektrálsugara a normája.

→ **7.49. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy $(T_{\mathbb{C}})^* = (T^*)_{\mathbb{C}}$.

Megoldás. Definíció szerint, $\langle T_{\mathbb{C}} z, w\rangle = \langle z, (T_{\mathbb{C}})^* w\rangle$. Most legyen z valós vagy képzetes része nulla.

→ **7.50. Feladat [4].** Igazoljuk, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ és $\langle Tx, x\rangle = 0$ minden $x \in H$-ra, akkor $T = 0$.

Megoldás. Következik a polarizációs formulából.

→ **7.51. Feladat [10].** Tegyük fel, hogy H Hilbert-tér, T a H egy sűrűn definiált szimmetrikus operátora és T értékkészlete sűrű. Mutassuk meg, hogy az alábbi operátorok léteznek és $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Speciálisan, ha T önadjungált, akkor az inverze is.

Megoldás. T injektív, mivel $Tx = 0$ esetén $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$. Hasonlóan adódik, hogy T^* is injektív. Mivel T értékkészlete sűrű, $S = (T^{-1})^*$ létezik. Ekkor

$$\langle x, y\rangle = \langle T^{-1}Tx, y\rangle = \langle Tx, Sy\rangle, \quad \text{ha} \quad x \in \operatorname{dmn}(T), y \in \operatorname{dmn}(S),$$

$$\langle z, w\rangle = \langle TT^{-1}z, w\rangle = \langle T^{-1}z, T^*w\rangle, \quad \text{ha} \quad w \in \operatorname{dmn}(T^*), z \in \operatorname{dmn}(T^{-1}).$$

Innen $T^*Sx = x$ és $ST^*z = z$, azaz $S = (T^*)^{-1}$.

→ **7.52. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy egy szimmetrikus operátor sajátértékei valósak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak. Mutassuk meg, hogy ha x_n egy sajátvektorokból álló teljes ortonormált rendszer, akkor a megfelelő sajátértékek között az összes sajátérték előfordul.

→ **7.53. Feladat [8].** Tekintsük az $\mathbb{l}^2$ tér

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \mapsto (\textstyle\sum_{j=1}^{n} j x_j, 0, 0, \dots)$$

lineáris operátorát. Mutassuk meg, hogy a lezártja nem függvény. Mutassuk meg, hogy az adjungáltjának értelmezési tartománya nem sűrű.

7.54. Feladat: Hellinger–Töplitz-tétel [9]. Bizonyítsuk be, hogy ha H Hilbert-tér, és $T\colon H \to H$ lineáris és szimmetrikus, akkor korlátos.

Megoldás. Következik a zárt gráf tételből.

7.55. Feladat [10]. Milyen α_n számsorozat esetén értelmez a

$$Tx = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{l}^2$$

összefüggés $\mathbb{l}^2$-t önmagába képező lineáris operátort? Mikor lesz T önadjungált? Mikor lesz invertálható?

7.56. Feladat [10]. Legyen H komplex Hilbert-tér, $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ortonormált bázis H-ban és $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ korlátos komplex számsorozat. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan $T \in \mathcal{L}(H; H)$ operátor létezik, amelyre $Te_n = \alpha_n e_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Határozzuk meg T normáját és spektrálsugarát.

7.57. Feladat [14]. Bizonyítsuk be az előző példa állításait.

Megoldás. (2)-ben M sűrűn definiált, mert $\operatorname{dmn}(M)$ tartalmazza az $\mathbb{L}^2$ egyszerű függvényeit. Legyen $y \in \operatorname{dmn}(M^*)$ és $M^*y = y^*$. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}\,dt \quad \text{minden } x \in \operatorname{dmn}(T)\text{-re.}$$

Ha $x = \xi_{[a,b]}$, akkor

$$\int_a^b t\overline{y(t)}\,dt = \int_a^b \overline{y^*(t)}\,dt,$$

így differenciálással

$$b\overline{y(b)} = \overline{y^*(b)} \quad \text{majdnem minden } b\text{-re.}$$

Innen $y \in \operatorname{dmn}(M)$ és $M^*y(t) = ty(t)$. Fordítva, $y \in \operatorname{dmn}(M)$-ből következik, hogy $y \in \operatorname{dmn}(M^*)$ és $M^*y(t) = ty(t)$.

(3)-nál feltehetjük, hogy $\hbar = -1$. Ha $a < b$, definiáljuk az $x_{a,b,n}(t)$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvényeket a következőképpen:

$$x_{a,b,n}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + 1/n \le t \le b - 1/n, \\ 0, & \text{ha } t \le a - 1/n \text{ vagy } t \ge b + 1/n, \\ \text{lineáris} & \text{az } [a - 1/n, a + 1/n] \text{ és } [b - 1/n, b + 1/n] \text{ intervallumokon.} \end{cases}$$

Ha $a < b$, akkor elég nagy n-re $x_{a,b,n}$ értelmezve van, és L^2-ben tart az $]a,b[$ intervallum karakterisztikus függvényéhez. Mivel tetszőleges véges mértékű halmaz karakterisztikus függvénye közelíthető véges sok diszjunkt nyílt intervallum uniójának karakterisztikus függvényével, a karakterisztikus függvények kombinációi pedig sűrűek $\mathbb{L}^2$-ben, D értelmezési tartománya sűrű $\mathbb{L}^2$-ben. Legyen $y \in \operatorname{dmn}(D^*)$ és $y^* = D^*y$. Ekkor bármely $x \in \operatorname{dmn}(D)$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} ix'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

Az $x(t)$ helyére $x_{a,b,n}(t)$-t írva,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{a,b,n}(t)\overline{y^*(t)}\,dt = \frac{n}{2}\int_{a-1/n}^{a+1/n} i\overline{y(t)}\,dt - \frac{n}{2}\int_{b-1/n}^{b+1/n} i\overline{y(t)}\,dt.$$

Ha a és b Lebesgue-pontjai y-nak, akkor $n \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy

$$i(\overline{y(a)} - \overline{y(b)}) = \int_a^b \overline{y^*(t)}\,dt.$$

Az 1-trükk felhasználásával látható, hogy $y^*(t)$ integrálható minden véges intervallumon, így y abszolút folytonos és

$$iy'(b) = y^*(b) \qquad \text{majdnem minden } b\text{-re.}$$

Innen $\operatorname{dmn}(D^*)$ minden y eleme minden kompakt intervallumon abszolút folytonos, a deriváltja négyzetesen integrálható, és $D^*y(t) = y^*(t) = iy'(t)$ majdnem mindenütt.

Fordítva, megmutatjuk, hogy $\operatorname{dmn}(D^*)$ elemei pontosan azok a négyzetesen integrálható y függvények, amelyek minden kompakt intervallumon abszolút folytonosak, és a deriváltjuk négyzetesen integrálható. Parciális integrálással adódik, hogy

$$\int_a^b ix'(t)\overline{y(t)}\,dt = i\big[x(t)\overline{y(t)}\big]_a^b + \int_a^b x(t)\overline{(iy'(t))}\,dt.$$

Meg kell mutatnunk, hogy a kiintegrált rész nullához tart. Minthogy $x(t)\overline{y(t)}$ deriváltja integrálható $\mathbb{R}$-en, léteznek a

$$\lim_{a\downarrow-\infty}\big[x(t)\overline{y(t)}\big]_a^b \qquad \text{és} \qquad \lim_{b\uparrow\infty}\big[x(t)\overline{y(t)}\big]_a^b$$

határértékek. De $x(t)\overline{y(t)}$ is integrálható $\mathbb{R}$-en, így a határértékek csak nullák lehetnek. Így $y \in \operatorname{dmn}(D^*)$ és $D^*y(t) = iy'(t)$. Ugyanígy folytatva tovább, kapjuk, hogy $D^{**} = D^*$. Mivel D^{**} a D lezártja, D lényegében önadjungált.

7.58. Feladat [14]. Tekintsük az $\mathbb{L}^2([0,1];\mathbb{C})$ téren az $i\,d/dt$ differenciáloperátort. Értelmezési tartománya legyen a $[0,1]$-en szakaszonként folytonosan differenciálható komplex értékű függvények osztálya, illetve ennek az $x(0) = x(1) = 0$, vagy az $x(0) = x(1)$, végül az $x(0) = \lambda x(1)$ (λ rögzített komplex szám) peremfeltételt kielégítő függvényei.

Minden esetben vizsgáljuk meg, hogy az operátor szimmetrikus-e, határozzuk meg a lezártját, az adjungáltját, és annak az adjungáltját.

Megoldás. Jelölje a peremfeltételeknek megfelelő operátorokat T, T_0, T_1 és T_λ. Ugyanúgy, mint az előző feladat megoldásában, következik, hogy az értelmezési tartományok sűrűek, az adjungált operátorok értelmezési tartamányában lévő függvények abszolút folytonosak, deriváltjaik négyzetesen integrálhatóak, és az adjungált operátor ezeken a függvényeken i-szer a differenciálás. Meg kell állapítanunk, hogy ezek közül melyek vannak az értelmezési tartományban az egyes esetekben. Parciális integrálással

$$\int_0^1 ix'(t)\overline{y(t)}\,dt = i\Big[x(t)\overline{y}(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 x(t)\overline{iy'(t)}\,dt.$$

Ez azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dmn}(T_j^*)$ pontosan akkor, ha

$$\Big[x(t)\overline{y}(t)\Big]_0^1 = 0 \tag{1}$$

minden $x \in \operatorname{dmn}(T_j)$-re. A $T_j = T$ esetben ez azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dmn}(T^*)$ esetén $0 = y(0) = y(1)$ kell legyen, és T nem is szimmetrikus, mint könnyen látható. Hasonlóan kapjuk, hogy $\operatorname{dmn}(T^{**})$ elemei a végpontokban tetszőlegesek lehetnek, T^{**} a T lezártja.

Nyilván T_0 szimmetrikus és hasonlóan az előző esethez kapjuk, hogy $T_0^* = T^{**}$, $T_0^{**} = T^*$.

A T_1 operátor szimmetrikus, és hasonlóan az előző esetekhez, kapjuk, hogy $y \in \operatorname{dmn}(T_1^*)$ pontosan akkor, ha bármely x-re, amelyre $x(0) = x(1)$, (1) teljesül. Ez azt jelenti, hogy pontosan akkor, ha $y(0) = y(1)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $T_1^{**} = T_1^*$. Tehát T_1 nem zárt, és lényegében önadjungált.

Végül a T_λ operátornál a $x(1)\overline{y(1)} - \lambda x(1)\overline{y(0)} = 0$ feltétel adódik. Mivel $x(1)$ tetszőleges lehet, ez pontosan akkor teljesül, ha $y(1) = \overline{\lambda}y(0)$. Hasonlóan, T_λ^{**} értelmezési tartományának elemeire a $z(0) = \lambda z(1)$ feltételnek kell teljesülnie. Látjuk, hogy T_λ nem zárt A két utóbbi feltétel pontosan akkor ekvivalens, ha $|\lambda| = 1$; ebben az esetben lesz T_λ lényegében önadjungált.

→ **7.59. Feladat [8].** Egy H Hilbert-tér egy M zárt altere *invariáns* egy $T \in \mathcal{L}(H;H)$-ra, ha $T(M) \subset M$. Az M *redukálja* T-t, ha M és $M^\perp$ is invariáns T-re. Bizonyítsuk be, hogy

(1) M pontosan akkor invariáns T-re, ha $M^\perp$ invariáns T^*-ra;

(2) M pontosan akkor redukálja T-t, ha invariáns T-re és T^*-ra is;

(3) ha zárt alterek egy M_γ, $\gamma \in \Gamma$ rendszere invariáns T-re illetve redukálja T-t, akkor

$$\cap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \quad \text{és} \quad \overline{\cup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma}$$

is invariáns T-re illetve redukálja T-t.

7.60. Tipikus példa. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Azt fogjuk mondani, hogy egy mérhető halmaz *lényegében nulla* halmaz, ha minden véges mértékű részhalmaza nulla mértékű. Megjegyezzük, hogy ha minden A mérhető halmazra

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\},$$

akkor a lényegében nulla halmazok pontosan a nulla mértékű halmazok, és a

$$\nu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\},$$

ha $A \in \mathcal{A}$ definícióval ilyen tulajdonságú ν mértéket kapunk, amely a σ-véges halmazokon megegyezik μ-vel. Ha két függvény egy lényegében nulla halmaztól eltekintve megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy *lényegében megegyeznek*. Ha t mérhető, komplex értékű függvény, legyen M_t a t-vel való *szorzás operátora*:

$$(M_t x)(s) = t(s)x(s), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{L}^2(\mu),\ tx \in \mathbb{L}^2(\mu).$$

Ha $\tilde{t}$ egy másik mérhető függvény, amely lényegében egyenlő t-vel, akkor $M_t = M_{\tilde{t}}$, mivel az $\{x \neq 0\}$ halmaz σ-véges, és megfordítva, ha $M_t = M_{\tilde{t}}$, akkor t és $\tilde{t}$ lényegében megegyeznek, mert ha az A véges mértékű mérhető halmazon nem egyenlőek, akkor $A \cap \{\Re\tilde{t} > \Re t\}$, $A \cap \{\Re\tilde{t} < \Re t\}$, $A \cap \{\Im\tilde{t} > \Im t\}$, $A \cap \{\Im\tilde{t} < \Im t\}$ halmazok valamelyikének karakterisztikus függvényén M_t és $M_{\tilde{t}}$ különböznek. M_t sűrűn definiált, mert ha A egy véges mértékű mérhető halmaz, akkor az $A_n = A \cap \{|t| \leq n\}$ halmazok karakterisztikus függvényeire M_t definiálva van, így $\operatorname{dmn}(M_t)$ lezártja tartalmazza az $\mathbb{L}^2$ egyszerű függvényeit, tehát sűrű $\mathbb{L}^2$-ben. Megmutatjuk, hogy $M_t^* = M_{\overline{t}}$. Ha $y \in \mathbb{L}^2$ esetén $x \mapsto \langle M_t x, y\rangle = \int tx\overline{y}\,d\mu$ korlátos lineáris funkcionál $\operatorname{dmn}(M_t)$-n, akkor előáll belső szorzat alakban, azaz van olyan $z \in \mathbb{L}^2$, hogy $\int xt\overline{y}\,d\mu = \int x\overline{z}\,d\mu$, ha $x \in \operatorname{dmn}(M_t)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $t\overline{y}$ és $\overline{z}$ majdnem mindenütt megegyeznek. Ha $\mu\{t\overline{y} \neq \overline{z}\} > 0$ lenne, akkor felhasználva, hogy az $\{y \neq 0\}$ és $\{z \neq 0\}$ halmazok σ-végesek, választhatnánk olyan A mérhető halmazt, amelyen $t\overline{y} \neq \overline{z}$ és $0 < \mu(A) < \infty$. Feltehetjük, hogy t korlátos A-n; valóban, alkalmazzuk az $A \cap \{|t| < n\}$ halmazokra a mérték folytonosságát. Ha most $x = \xi_A \overline{\operatorname{sgn}(t\overline{y} - \overline{z})}$, akkor $x \in \operatorname{dmn}(M_t)$ és $\int x(t\overline{y} - \overline{z})\,d\mu = \int_A |t\overline{y} - \overline{z}|\,d\mu \neq 0$. Vegyük észre, hogy M_t normális, ha t valós értékű, akkor M_t önadjungált, ha t korlátos, akkor M_t is korlátos ugyanazzal a korláttal, ha t karakterisztikus függvény, akkor M_t önadjungált projekció, és ha $|t| \equiv 1$, akkor M_t unitér.

A t függvény *lényeges értékkészlet*e azon $\lambda \in \mathbb{C}$-k halmaza, amelyeknek bármely V környezetére $t^{-1}(V)$ nem lényegében nulla halmaz. Először vegyük észre, hogy λ pontosan akkor sajátértéke M_t-nek, ha $t^{-1}\{\lambda\}$ nem lényegében nulla halmaz. Egyébként az $1/(t-\lambda)$ függvény lényegében mindenütt értelmezve van, továbbá $M_{1/(t-\lambda)}$ az $M_{t-\lambda} = M_t - \lambda\mathbb{I}$ operátor inverze, hiszen ha $x \in \mathbb{L}^2$ és $y = x(t-\lambda) \in \mathbb{L}^2$, akkor $x = y/(t-\lambda)$. Vegyük észre, hogy ha λ nem sajátérték, akkor az inverz, mivel maga is szorzásoperátor, sűrű halmazon van értelmezve. Megmutatjuk, hogy $\sigma(M_t)$ a t lényeges értékkészlete. Ha λ nincs a lényeges értékkészletben, akkor $1/|t-\lambda| \leq 1/r$ valamely pozitív r-re egy lényegében nulla halmazt kivéve. Így $M_{1/(t-\lambda)}$ mindenütt értelmezve van és korlátos, de ez az $M_t - \lambda\mathbb{I}$ inverze. Ha λ a lényeges értékkészletben van, akkor létezik A_n, amelyre $0 < \mu(A_n) < \infty$, hogy $|t-\lambda| \leq 1/n$ az A_n-en, és így ξ_{A_n}-re $\|(M_t - \lambda\mathbb{I})\xi_{A_n}\| \leq \|\xi_{A_n}\|/n$, tehát $M_t - \lambda\mathbb{I}$ nem

lehet invertálható korlátos inverzzel. Vegyük észre, hogy $\sigma_r(M_t)$ üres, mert ha $\lambda \in \sigma(M_t)$ és $\lambda \notin \sigma_p(M_t)$, akkor $M_{t-\lambda}$ inverze sűrű halmazon van értelmezve, de nem korlátos, azaz $\lambda \in \sigma_c(M_t)$. Megjegyezzük, hogy t lényegében egyenlő egy olyan függvénnyel, amelynek értékkészlete része $\sigma(M_t)$-nek, mert $\mathbb{C} \setminus \sigma(M_t)$ előállítható megszámlálható sok V nyílt halmaz egyesítéseként, amelyek mindegyikére $t^{-1}(V)$ lényegében nulla halmaz. Tehát a t függvényt egy lényegében nulla halmazon megváltoztatva, feltehetjük, hogy $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(M_t)$. Ebből ha $r(M_t) < \infty$, akkor $\|M_t\| \leq r(M_t)$. Mivel a másik irányú egyenlőtlenség mindig teljesül,

$$\|M_t\| = r(M_t) = \inf\Big\{r\colon r \geq 0,\ \{|t| > r\} \text{ lényegében nulla halmaz.}\Big\}$$

7.61. Mit állít a spektráltétel? A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha T egy normális lineáris operátor egy véges dimenziós komplex H Hilbert-téren, akkor – alkalmas bázisban – Tf koordinátái $(t_1f_1, t_2f_2, \dots, t_nf_n)$ alakba írhatók, ahol f koordinátái $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n$ a T sajátértékei. A T operátor tehát ekvivalens egy adott $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ függvénnyel való szorzással.

Mivel ha μ tetszőleges mérték, akkor az $\mathbb{L}^2(\mu)$ téren egy mérhető t függvénnyel való szorzás M_t operátora, amelyre

$$(M_tf)(s) = t(s)f(s),$$

normális operátor, amelynek adjungáltja a $\bar{t}$ függvénnyel való szorzás operátora, azt várhatjuk, hogy tetszőleges normális operátort ilyen alakban lehet előállítani. Valóban, a spektráltétel szorzat alakja azt állítja, hogy ha T egy normális operátor egy H komplex Hilbert-téren, akkor van olyan lineáris izometria H és egy $\mathbb{L}^2(\mu)$ tér között, amely T-t egy t mérhető függvénnyel való szorzásba viszi át, továbbá t választható úgy, hogy $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$ teljesüljön.

Approximáljuk a t függvényt egyszerű függvényekkel. Egy $\sum t_j\xi_j \approx t$ egyszerű függvénnyel való szorzás H-ban egy $\sum t_jP_j \approx T$ operátornak felel meg: a ξ_j karakterisztikus függvénnyel való szorzás egy P_j önadjungált projekcióoperátorba megy át, amely azt „méri”, t_j-nek mekkora „súlya” van a $\sigma(T)$ spektrumban. Ha a közelítést finomítjuk, az összeg egy $\int_{\mathbb{C}} t\,dP(t) = T$ integrálhoz tart, ez a T spekrálelőállítása. Itt P egy, a $\mathbb{C}$-n értelmezett, T-től függő, önadjungált projekcióoperátor értékű mérték, a T úgynevezett spektrálfelbontása. A spektrálmértékkel való munkánál gondot okoz, hogy a fellépő sorozatok nem konvergensek $\mathcal{L}(H;H)$ normájában. Ezt a problémát úgy lehet megkerülni, hogy az $A \mapsto P(A)$ spektrálmérték helyett annak „árnyékaival”, az $A \mapsto \langle P(A)x, x\rangle$, $x \in H$ közönséges mértékekkel dolgozunk.

∗ **7.62. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a H Hilbert-tér a H_γ, $\gamma \in \Gamma$ zárt altereinek *Hilbert-összege*, ha a H_γ alterek páronként ortogonálisak, és egyesítésük lineáris burka sűrű H-ban.

∗ **7.63. Lemma.** *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, $\mathcal{X}$ egy $\mathbb{I}$-t tartalmazó rész ∗-algebrája $\mathcal{L}(H;H)$-nak. Ekkor léteznek olyan $H_\gamma, \gamma \in \Gamma$ zárt alterek, amelyek Hilbert-összege H, és amelyekre*

(1) *$TH_\gamma \subset H_\gamma$ minden $T \in \mathcal{X}$ és $\gamma \in \Gamma$ esetén;*

(2) *minden $\gamma \in \Gamma$-ra létezik olyan $0 \neq x_\gamma \in H_\gamma$, hogy $\{Tx_\gamma\colon T \in \mathcal{X}\}$ sűrű H_γ-ban.*

Bizonyítás. Tekintsük az összes, az (1) és (2) feltételeknek eleget tévő, páronként ortogonális zárt alterekből álló H_γ, $\gamma\in\Gamma$ rendszereket. Ezek a tartalmazásra nézve féligrendezett halmazt alkotnak, amelyre teljesülnek a Zorn-lemma feltételei, így van maximális eleme. Megmutatjuk, hogy erre $\cup_{\gamma\in\Gamma}H_\gamma$ lineáris burka sűrű H-ban. Legyen erre a maximális elemre H' az $\cup_{\gamma\in\Gamma}H_\gamma$ halmaz lineáris burkának a lezártja. Nyilván $TH'\subset H'$ minden $T\in\mathcal{X}$-re. Ha $H\neq H'$, válasszunk egy $x''\neq 0$ elemet H' ortogonális komplementeréből, és tekintsük a $\{Tx'':T\in\mathcal{X}\}$ halmazt. Ez altér, mert $\mathcal{X}$ részalgebra. Legyen H'' ennek a lezártja. Ekkor $TH''\subset H''$ minden $T\in\mathcal{X}$-re. Ha $x'\in H'$, akkor $\langle x',Tx''\rangle=\langle T^*x',x''\rangle=0$ minden $T\in\mathcal{X}$-re, így a belső szorzat folytonosságából következik, hogy $H'\perp H''$. A $H_\gamma,\gamma\in\Gamma$ rendszert kiegészítve H''-vel, ellentmondásra jutunk.

$*$ **7.64. Lemma.** *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T\in\mathcal{L}(H;H)$ önadjungált operator. Ekkor létezik egy φ egységelemtartó $*$-homomorfizmusa $\mathcal{C}[-\|T\|,\|T\|]$-nak $\mathcal{L}(H;H)$-ba, amelyre $\|\varphi\|\le 1$ és $\varphi(\mathbb{1})=T$.*

Bizonyítás. Ha f polinom, legyen $\varphi(f)=f(T)$. Ez egységelemtartó $*$-homomorfizmus, $\varphi(\mathbb{1})=T$, és $g=|f|^2$ jelöléssel, mivel $g(T)$ önadjungált,

$$\begin{aligned}\big\|f(T)\big\|^2&=\big\|f(T)^*f(T)\big\|=\big\|g(T)\big\|=r(g(T))\\&=\sup_{\mu\in\sigma(g(T))}|\mu|=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}\big|g(\lambda)\big|\le\|f\|^2.\end{aligned}$$

Mivel a Weierstrass–Stone-tétel szerint a polinomok sűrűek $\mathcal{C}[-\|T\|,\|T\|]$-ban, φ (egyértelműen) kiterjeszthető erre a térre, és a kiterjesztés $*$-homomorfizmus.

$*$ **7.65. A spektráltétel szorzat alakja korlátos önadjungált operátorra.** *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és $T\in\mathcal{L}(H;H)$ egy önadjungált operátor. Ekkor létezik olyan μ mérték, $U\colon H\to\mathbb{L}^2(\mu)$ unitér operátor és t mérhető függvény, hogy $U\circ T\circ U^{-1}=M_t$, a t-vel való szorzás operátora, és $\operatorname{rng}(t)\subset\sigma(T)$, továbbá μ választható úgy, hogy $\mu(A)=\sup\{\mu(B)\colon B\subset A,B\in\mathcal{A},\mu(B)<\infty\}$ teljesüljön minden $A\in\mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. Az előző lemmát fogjuk használni. Legyen

$$X=[-\|T\|,\|T\|].$$

Először tegyük fel, hogy van olyan $h\in H$, amelyre $\{\varphi(f)h\colon f\in\mathcal{C}(X)\}$ sűrű H-ban. Rögzítve egy ilyen h-t, az $f\mapsto\langle\varphi(f)h,h\rangle$ leképezés lineáris funkcionál $\mathcal{C}(X)$-n. Ha $f\ge 0$ és $g\ge 0$ úgy, hogy $g^2=f$, akkor

$$\langle\varphi(f)h,h\rangle=\langle\varphi(|g|^2)h,h\rangle=\langle\varphi(g)^*\varphi(g)h,h\rangle=\langle\varphi(g)h,\varphi(g)h\rangle\ge 0,$$

amiből ez a funkcionál monoton lineáris funcionál. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint van olyan μ teljes Radon-mérték X-en, amellyel

$$\langle\varphi(f)h,h\rangle=\int_X f\,d\mu\quad\text{minden } f\in\mathcal{C}(X)\text{-re.}$$

Legyen $U(\varphi(f)h) = f$. Ekkor

$$\|\varphi(f)h\|^2 = \langle \varphi(f)^*\varphi(t)h, h\rangle = \Big\langle \varphi(|f|^2)h, h\Big\rangle = \int |f|^2\, d\mu,$$

azaz $\Big\|U(\varphi(f)h)\Big\|^2 = \|f\|^2$. Mivel $\{\varphi(f)h\colon f \in \mathcal{C}(X)\}$ sűrű H-ban, U egyértelműen kiterjeszthető egy H-t $\mathbb{L}^2(\mu)$-be képező függvénnyé. Ezt is U-val fogjuk jelölni. Mivel $\mathcal{C}(X)$ sűrű $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben, U pedig izometria, az U értékkészlete $\mathbb{L}^2(\mu)$, az U inverze is izometria.

Tegyük fel, hogy $\varphi(t) = T$. Minden $f \in \mathcal{C}(X)$-re

$$(U \circ T \circ U^{-1})(f) = U\Big(T(\varphi(f)h)\Big) = U(\varphi(t)\varphi(f)h) = U(\varphi(tf)h) = tf,$$

így az $U \circ T \circ U^{-1}$ operátor megegyezik az $M_t\colon f \mapsto tf$ operátorral egy sűrű halmazon, így mindenütt.

Az általános esetben tekintsük H-nak az előző lemma szerint egy alterekre való direkt felbontását. A H_γ zárt alterekre alkalmazva az előző lépést, kapunk egy μ_γ teljes Radon-mértéket az $X_\gamma = X$ kompakt téren és egy $U_\gamma\colon H_\gamma \to \mathbb{L}^2(\mu_\gamma)$ izometriát. Az X_γ tereket diszjunkttá téve, $\cup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ mértéktérré tehető: egy A részhalmaz legyen mérhető, ha $A \cap X_\gamma$ mérhető minden $\gamma \in \Gamma$-ra, és legyen $\mu(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma(A \cap X_\gamma)$. Ha $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, akkor az $U^{-1}f = \sum_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma^{-1}(f|_{X_\gamma})$ összeg csak megszámlálható sok nem nulla tagot tartalmaz, és nem függ az összegzés sorrendjétől, továbbá U^{-1} lineáris izometrikus leképezése $\mathbb{L}^2(\mu)$-nek H-ra, és $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, az az operátor, amely minden X_γ-n a t-vel való szorzás operátora. A 7.60 példa szerint $\mathrm{rng}(t) \subset \sigma(T)$ feltehető.

∗ **7.66. Következmény.** *A $\varphi\colon f \mapsto U^{-1} \circ M_{f\circ t} \circ U$ leképezés egységelemtartó $*$-homomorfizmusa a $\sigma(T)$ halmazon értelmezett korlátos Borel-függvények egységelemes $*$-algebrájának $\mathcal{L}(H;H)$-ba, $\varphi(\mathbb{1}_{\sigma(T)}) = T$ és*

$$\|\varphi(f)\| \le \sup_{\sigma(T)} |f|.$$

7.67. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T_k \in \mathcal{L}(H;H)$ normális operátorok egy (véges vagy végtelen) sorozata úgy, hogy a T_k operátorok és adjungáltjaik közül bármely kettő felcserélhető. Ekkor létezik olyan X kompakt metrikus tér, és olyan $\varphi\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{L}(H;H)$ egységelemtartó $*$-homomorfizmus, amelyre $\|\varphi\| \le 1$ és φ értékkészlete tartalmazza a T_k operátorokat.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy végtelen sok T_k van. Azt is feltehetjük, hogy a T_k operátorok önadjungáltak, mert egyébként a $(T_k + T_k^*)/2$ és $(T_k - T_k^*)/(2i)$ önadjungált operátorokra végezhetjük a bizonyítást. Legyen $X = \prod_k \sigma(T_k)$ a szorzat-metrikával. Jelölje φ_k az előző következményben adott, T_k-hoz tartozó $*$-homomorfizmust. Ha $t = (t_1, t_2, \ldots) \in X$, és $1 \le j \le n$ esetén E_{j,k_j}, $1 \le k_j \le n_j$ egy diszjunkt Borel-halmazokra való felosztása $\sigma(T_j)$-nek, akkor

$$f(t) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} c_{k_1,\ldots,k_n} \prod_{j=1}^{n} \xi_{E_{j,k_j}}(t_j)$$

esetén legyen

$$\varphi(f) = \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1,\dots,k_n} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(\xi_{E_{j,k_j}}).$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi(f)$ nem függ az f függvény előállításától. Tegyük fel, hogy $1 \le j \le n'$ esetén E'_{j,k'_j}, $1 \le k'_j \le n'_j$ egy diszjunkt Borel-halmazokra való felosztása $\sigma(T_j)$-nek és

$$f(t) = \sum_{k'_1,\dots,k'_n} c'_{k'_1,\dots,k'_n} \prod_{j=1}^{n'} \xi_{E'_{j,k'_j}}(t_j).$$

Feltehetjük, hogy $n' \le n$. Az $n'_j = 1$ választással $E'_{j,1} = \sigma(T_j)$ és $\varphi_j(\xi_{E'_{j,1}}) = \mathbb{1}$, ha $n' < j \le n$, így feltehetjük, hogy $n' = n$. Mivel φ homomorfizmus,

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1,\dots,k_n} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j\Big(\sum_{k'_j} \xi_{E_{j,k_j}} \xi_{E'_{j,k'_j}}\Big) \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_n} \sum_{k'_1,\dots,k'_n} c_{k_1,\dots,k_n} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(\xi_{E_{j,k_j} \cap E'_{j,k'_j}}).\end{aligned}$$

Ez megegyezik az $E_{j,k_j} \cap E'_{j,k'_j}$, $1 \le k_j \le n_j$, $1 \le k'_j \le n'_j$ felosztáshoz tartozó összeggel, és ugyanez adódik a másik felosztásból.

Hasonló számolásokkal adódik, hogy φ az X korlátos Borel-függvényeinek egy $*$-részalgebráján van értelmezve és egységelemtartó $*$-homomorfizmus. Megmutatjuk, hogy

$$\big\|\varphi(f)\big\| \le \|f\| = \sup_t \big|f(t)\big|.$$

Nyilván $\varphi(|f|^2) = \varphi(f)^*\varphi(f)$ pozitív operátor, így spektruma $[0,\infty[$ része. Másrészt az $\|f\|^2 - |f|^2$ függvény nemnegatív, így egy nemnegatív g függvényre $|g|^2 = \|f\|^2 - |f|^2$, amiből $\varphi(\|f\|^2 - |f|^2) = \|f\|^2\mathbb{1} - \varphi(|f|^2)$ spektruma is $[0,\infty[$ része. Ebből $\varphi(|f|^2)$ spektruma $[0, \|f\|^2]$ része, és mivel önadjungált operátor, $\Big\|\varphi(|f|^2)\Big\| \le \|f\|^2$. De $\big\|\varphi(f)\big\|^2 = \big\|\varphi(f)^*\varphi(f)\big\|$.

Terjesszük ki φ-t az értelmezési tartománya lezártjára, ami a korlátos Borel-függvények $*$-algebrájának egy zárt $*$-részalgebrája. Az így kiterjesztett φ is $*$-homomorfizmus. Ha $t_k \mapsto f_k(t_k)$ egy egyszerű Borel-függvény a $\sigma(T_k)$ halmazon, és ha $f(t) = f_k(t_k)$, akkor $\varphi(f) = \varphi_k(t_k)$. Mivel minden korlátos Borel-függvény egyszerű Borel-függvények egyenletes határértéke, az $f(t) = t_k$ függvény φ értelmezési tartományában van és erre a függvényre $\varphi(f) = T_k$. A véges sok $t_1, \dots, t_n$ változótól függő polinomok tehát benne vannak φ értelmezési tartományában, és mivel ezek szétválasztják X pontjait, a Weierstrass–Stone-tétel szerint sűrűek $\mathcal{C}(X)$-ben, így φ értelmezve van $\mathcal{C}(X)$-en. A megszorítását véve $\mathcal{C}(X)$-re, kapjuk a tétel állítását.

7.68. A spektráltétel szorzat alakja korlátos normális operátorokra. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, $T_k \in \mathcal{L}(H;H)$ korlátos normális operátorok (véges vagy végtelen) sorozata úgy, hogy a T_k-k és adjungáltjaik bármelyike felcserélhető. Ekkor létezik olyan μ mérték egy mértéktéren, $U\colon H \to \mathbb{L}^2(\mu)$ unitér operátor és olyan $t_k \in \mathbb{L}^\infty(\mu)$ függvények, hogy $U \circ T_k \circ U^{-1} = M_{t_k}$, ahol M_{t_k} a t_k függvényel való szorzás operátora, és $\operatorname{rng}(t_k) \subset \sigma(T_k)$. A μ mérték választható úgy, hogy $\mu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\}$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. Az előző tétel felhasználásával a korlátos önadjungált operátorra vonatkozó változathoz hasonlóan bizonyítható.

∗ **7.69. Neumann tétele.** *Legyen T egy sűrűn definiált zárt operátor a H Hilbert-téren. Ekkor* $\mathrm{dmn}(T^*T)$ *sűrű H-ban, a T^*T operátor zárt, és az $\mathbb{I} + T^*T$ operátor kölcsönösen egyértelmű leképezése* $\mathrm{dmn}(T^*T)$*-nek H-ra. A $B = (\mathbb{I} + T^*T)^{-1}$ operátor korlátos és önadjungált, spektruma része $[0,1]$-nek. Az $(x,y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ leképezés egy belső szorzat, és $C = TB$ egy H-n definiált folytonos lineáris operátor, amelyre $C(H) \subset \mathrm{dmn}(T^*)$ teljesül. Végül $(T^*T)^* = T^*T$.*

Bizonyítás. A 7.29 tétel jelöléseivel, T és $V(T^*)$ egymás ortogonális komplementerei $H \times H$-ban. Ezért minden $x \in H$-hoz pontosan egy $y \in \mathrm{dmn}(T)$ és $z \in \mathrm{dmn}(T^*)$ létezik, hogy

$$(x,0) = (y,Ty) + (T^*z, -z). \tag{1}$$

Legyen $y = Bx$ és $z = Cx$. Nyilván B és C az egész H-n definiált lineáris operátorok, és $B(H) \subset \mathrm{dmn}(T)$ valamint $C(H) \subset \mathrm{dmn}(T^*)$, továbbá

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|Ty\|^2 + \|z\|^2 + \|T^*z\|^2,$$

amiből $\|Bx\| \le \|x\|$ és $\|Cx\| \le \|x\|$. Az (1) összefüggés ekvivalens az

$$x = Bx + T^*Cx \quad \text{és} \quad 0 = -Cx + TBx$$

összefüggésekkel. Ebből $C = TB$ és $T(B(H)) \subset \mathrm{dmn}(T^*)$, azaz $B(H) \subset \mathrm{dmn}(T^*T)$. Következésképpen T^*TB az egész H-n definiálva van, és teljesül, hogy

$$\mathbb{I} = B + T^*TB = (\mathbb{I} + T^*T)B;$$

ezzel megmutattuk, hogy B kölcsönösen egyértelmű, $\mathbb{I} + T^*T$ pedig H-ra képez. Minden $w \in \mathrm{dmn}(T^*T)$-re teljesül, hogy

$$\langle w + T^*Tw, w\rangle = \|w\|^2 + \langle T^*Tw, w\rangle = \|w\|^2 + \|Tw\|^2; \tag{2}$$

mivel $T = T^{**}$, ez az összefüggés azt mutatja, hogy $w + T^*Tw = 0$-ból $w = 0$ következik, tehát $\mathbb{I} + T^*T$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel B zárt, $\mathbb{I} + T^*T$ is zárt, amiből következik, hogy T^*T is zárt. Továbbá, minden $u, v \in H$-ra

$$\begin{aligned}\langle Bu, v\rangle &= \langle Bu, Bv + T^*TBv\rangle = \langle Bu, Bv\rangle + \langle Bu, T^*TBv\rangle \\ &= \langle Bu, Bv\rangle + \langle TBu, TBv\rangle = \langle Bu, Bv\rangle + \langle T^*TBu, Bv\rangle \\ &= \langle (\mathbb{I} + T^*T)Bu, Bv\rangle = \langle u, Bv\rangle,\end{aligned}$$

azaz B önadjungált. Ha (2)-ben w helyére Bx-et teszünk, akkor azt kapjuk, hogy minden $x \in H$-ra $\langle x, Bx\rangle = \|Bx\|^2 + \|TBx\|^2 \ge 0$. Mivel $\|Bx\| \le \|x\|$, következik, hogy $\sigma(B) \subset [0,1]$. Továbbá $\langle x, Bx\rangle = 0$ esetén $Bx = 0$ tehát $x = 0$, így az $(x,y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ leképezés belső szorzat.

Most megmutatjuk, hogy $\mathrm{dmn}(T^*T)$ sűrű. Jelölje a T megszorítását $\mathrm{dmn}(T^*T)$-re T'. Elég megmutatni, hogy T' sűrű T-ben, mivel $\mathrm{dmn}(T^*T)$ a T' képe az $(x,y)\mapsto x$ projekciónál, és $\mathrm{dmn}(T)$ sűrű H-ban. Annak bizonyítására, hogy a $T'\subset T$ altér a T Hilbert-térben sűrű, elég azt megmutatni, hogy egy T'-re ortogonális $(u,Tu)\in T$ vektor szükségképpen nulla. Ez azonban azt jelenti, hogy $\langle (u,Tu),(v,Tv)\rangle = 0$ minden $v\in\mathrm{dmn}(T^*T)$-re, azaz $\langle u,v\rangle + \langle Tu,Tv\rangle = 0$; mivel azonban $Tv\in\mathrm{dmn}(T^*)$ teljesül, következik, hogy $\langle u,v\rangle + \langle u,T^*Tv\rangle = 0$, és így $\langle u,(\mathbb{I}+T^*T)v\rangle = 0$. Azonban $\mathbb{I}+T^*T$ a $\mathrm{dmn}(T^*T)$ halmazt H-ra képezi le, így $u=0$, ami bizonyítandó volt.

Mivel B önadjungált, B a $V(B)$ ortogonális komplementere. Ebből $\mathbb{I}+T^*T$ a $V(\mathbb{I}+T^*T)$ ortogonális komplementere. Más szóval, $(\mathbb{I}+T^*T)^* = \mathbb{I}+T^*T$, tehát $(T^*T)^* = T^*T$.

∗ **7.70. Tétel.** *Legyen H egy Hilbert-tér. Ha T egy normális operátor, akkor* $\mathrm{dmn}(T) = \mathrm{dmn}(T^*)$ *és* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *minden* $x\in\mathrm{dmn}(T)$ *esetén.*

Bizonyítás. Mint Neumann tételének bizonyításában láttuk, a T operátornak a $\mathrm{dmn}(T^*T)$-re való megszorítása sűrű T-ben; létezik tehát minden $x\in\mathrm{dmn}(T)$-hez $\mathrm{dmn}(T^*T)$-beli pontoknak olyan y_n sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} Ty_n = Tx$. Minden $z\in\mathrm{dmn}(T^*T)$-re teljesül azonban, hogy

$$\|Tz\|^2 = \langle z, T^*Tz\rangle = \langle z, TT^*z\rangle = \|T^*z\|^2,$$

mivel $T^*T = TT^*$. Ha ezt az összefüggést alkalmazzuk $z = y_n - y_m$-re, akkor azt mutatja, hogy a T^*y_n sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Mivel T^* zárt, ebből következik, hogy $x\in\mathrm{dmn}(T^*)$ és $T^*x = \lim_{n\to\infty} T^*y_n$ teljesül; ebből következik, hogy $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Beláttuk tehát, hogy $\mathrm{dmn}(T)\subset\mathrm{dmn}(T^*)$. Mivel $T^{**} = T$, a T^* operátor is normális, és $\mathrm{dmn}(T^*)\subset\mathrm{dmn}(T)$.

∗ **7.71. Lemma.** *Legyen a H Hilbert-tér a megszámlálható sok H_n zárt altér Hilbert-összege, és minden n-re T_n a H_n egy korlátos operátora. Ekkor pontosan egy olyan T zárt operátora létezik H-nak, amelyre $H_n\subset\mathrm{dmn}(T)$, $T|_{H_n} = T_n$ és $P_nTx = TP_nx$ minden n és minden $x\in\mathrm{dmn}(T)$ esetén, ahol P_n a H-nak H_n-re való ortogonális projekciója. Továbbá* $\mathrm{dmn}(T)$ *azon $x=\sum_n x_n$, $x_n\in H_n$ elemek halmaza, amelyekre $\sum_n \|T_nx_n\|^2 < \infty$, és $Tx = \sum_n T_nx_n$. Ha T_n minden n-re egy korlátos normális operátor H_n-en, akkor T normális operátor, és $T^*x = \sum_n T_n^*x_n$.*

Bizonyítás. Jelölje X az összes olyan $x=\sum_n x_n$, $x_n\in H_n$ alakú elemek halmazát, amelyekre $\sum_n \|T_nx_n\|^2<\infty$. Mivel

$$\sum_n \|P_nTx\|^2 = \|Tx\|^2 < \infty$$

kell, hogy teljesüljön, feltételeinkből következik, hogy $\mathrm{dmn}(T)\subset X$. A minden Hilbert-térben érvényes $\|z+z'\|^2\le 2\|z\|^2+2\|z'\|^2$ egyenlőtlenségből következik, hogy X altere H-nak. Minden $x=\sum_n x_n\in X$ esetén legyen $T'x = \sum_n T_nx_n$. Megmutatjuk, hogy az így definiált T' operátor zárt. Mivel T nyilván tartalmazza a $\sum_n (x_n, T_nx_n)$ véges összegeket, T sűrű T'-ben, és mivel T zárt, ebből következik, hogy $T=T'$. Nyilvánvaló, hogy T' lineáris. Legyen továbbá $x_m\in X$ egy sorozat, amely egy $x\in H$ elemhez konvergál úgy, hogy Tx_m egy $y\in H$ elemhez konvergál. Ekkor $P_nT'x_m = T_nP_nx_m$ a T_n folytonossága miatt T_nP_nx-hez konvergál, tehát $x\in X$ és $y=T'x$.

A második állítás bizonyításához először megmutatjuk, hogy $T^*(H_n) \subset H_n$. Ha $m \neq n$, bármely $y_n \in H_n$ és $x_m \in H_m$ esetén, $\langle x_m, T^*y_n\rangle = \langle Tx_m, y_n\rangle = 0$, mivel $T(H_m) \subset H_m$. Ezért T^*y_n minden H_m, $m \neq n$ altérre ortogonális, tehát H_n-ben van. Következő lépésként megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re $P_nTx = TP_nx = T_nP_nx$, ahol P_n a H_n altérre történő ortogonális projekció. Valóban, minden $y_n \in H_n$ esetén

$$\langle P_nTx, y_n\rangle = \langle Tx, P_ny_n\rangle = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, T^*y_n\rangle,$$

és mivel az előzőek szerint $T^*y_n = P_nT^*y_n$, azt kapjuk, hogy

$$\langle P_nTx, y_n\rangle = \langle P_nx, T^*y_n\rangle = \langle TP_nx, y_n\rangle = \langle T_nP_nx, y_n\rangle.$$

Mivel ez minden $y_n \in H_n$-re teljesül, a P_nTx és a T_nP_nx elemek egybeesnek.

Csak annak bizonyítása van hátra, hogy T normális. Azonban minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re teljesül, hogy $\|T_n^*P_nx\| = \|T_nP_nx\|$; alkalmazva az eddig bizonyítottakat a T_n^* operátorokra, azt kapjuk, hogy pontosan egy T' zárt operátor létezik, amely minden n-re a $H_n \subset \mathrm{dmn}(T')$, $T'|_{H_n} = T_n^*$ és $P_nT'x = T'P_nx$, ha $x \in \mathrm{dmn}(T')$ feltételeket teljesíti, továbbá $\mathrm{dmn}(T') = \mathrm{dmn}(T)$, és $x = \sum_n x_n \in \mathrm{dmn}(T')$ esetén $T'x = \sum_n T_n^*x_n$. Ebből a formulából közvetlenül következik, hogy minden $x, y \in \mathrm{dmn}(T)$-re a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ összefüggés teljesül; más szavakkal, $T' \subset T^*$. Az is teljesül azonban, hogy $P_nT^*y = T^*P_ny$ minden n-re és minden $y \in \mathrm{dmn}(T')$-re; valóban, minden $x_n \in H_n$ esetén $\langle x_n, P_nT^*y\rangle = \langle x_n, T^*y\rangle$, és mivel $x_n \in \mathrm{dmn}(T)$, kapjuk, hogy $\langle x_n, T^*y\rangle = \langle Tx_n, y\rangle = \langle Tx_n, P_ny\rangle$, mivel $Tx_n = T_nx_n \in H_n$. Felhasználva, hogy $H_n \subset \mathrm{dmn}(T^*)$, kapjuk, hogy $\langle x_n, P_nT^*y\rangle = \langle x_n, T^*P_ny\rangle$, ami állításunkat bizonyítja. Mivel T^* zárt, az előző lemmából következik, hogy $T' = T^*$. Az eddig bizonyítottakból következik, hogy minden $x, y \in \mathrm{dmn}(T) = \mathrm{dmn}(T^*)$ esetén $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ teljesül. Ha $z \in \mathrm{dmn}(TT^*)$, akkor ebből minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*z\rangle = \langle x, TT^*z\rangle$; ez az adjungált operátor definíciója szerint azt jelenti, hogy $Tz \in \mathrm{dmn}(T^*)$ teljesül, és hogy $T^*Tz = TT^*z$. Megmutattuk tehát, hogy $TT^* \subset T^*T$. A bizonyítás teljes lesz, ha T és T^* szerepét felcseréljük, mivel $T^{**} = T$.

7.72. Spektrálmérték. Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája. Egy, az $\mathcal{A}$ elemeihez $\mathcal{L}(H; H)$ önadjungált projekcióoperátorait rendelő P leképezést *spektrálmérték*nek nevezünk, ha $P(X) = \mathbb{I}$ és $P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle$ jelöléssel P_x mérték minden $x \in H$-ra. Vegyük észre, hogy minden P_x véges mérték, mert $P_x(X) = \langle \mathbb{I}x, x\rangle = \|x\|^2$, és

$$P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle = \langle P(A)x, P(A)x\rangle = \big\|P(A)x\big\|^2.$$

Ebből következik, hogy $P(\emptyset) = 0$. Általában P nem σ-additív a norma topológiában, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ nem Cauchy-sorozat, hiszen a projekciók normája csak nulla vagy egy lehet; azonban, ha $P(A_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Valóban, $P_x(A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $P_x(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra, azaz $\big\|P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x\big\|^2 = 0$ minden $x \in H$-ra, így $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. A következő tétel a spektrálmértékek további vizsgálatával foglalkozik.

7.73. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, *akkor* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(2) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, *ha* $A, B \in \mathcal{A}$;

(3) *bármely két* $P(A)$, $P(B)$ *projekció felcserélhető egymással és ha* $A \cap B = \emptyset$, *akkor* $P(A)$ *és* $P(B)$ *képtere ortogonális;*

(4) *ha* A_n *diszjunkt, mérhető halmazok egy sorozata, és* $x \in H$, *akkor*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x.$$

∗ **Bizonyítás.** Ha A és B diszjunkt mérhető halmazok, akkor

$$\langle P(A \cup B)x, x\rangle = \Big\langle (P(A) + P(B))x, x \Big\rangle$$

minden $x \in H$-ra. Ebből polarizációval $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, azaz teljesül (1). Ha $A \subset B$, akkor $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Ebből $P(A)x = x$ esetén

$$\|x\|^2 = \big\|P(A)x\big\|^2 \le \big\|P(A)x\big\|^2 + \big\|P(B \setminus A)x\big\|^2 = \big\|P(B)x\big\|^2 \le \|x\|^2,$$

azaz $\big\|P(B)x\big\| = \|x\|$. Ez azt jelenti, hogy $x \in \mathrm{rng}(P(B))$, azaz $P(B)x = x$. Így azt kaptuk, hogy $P(B)P(A) = P(A)$. Adjungálással adódik, hogy ez a $P(A)P(B) = P(A)$ összefüggéssel ekvivalens. A tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén fennálló

$$P(A \cup B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B) + P(A \setminus B)$$

összefüggés mindkét oldalához hozzáadva $P(A \cap B)$-t, azt kapjuk, hogy

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Mindkét oldalt megszorozva $P(A)$-val, ebből azt kapjuk, hogy

$$P(A) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)P(A),$$

amiből adódik (2), abból pedig (3). Végül, (4)-ben a jobb oldalon ortogonális sor összege áll, amely a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\|P(A_n)x\big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = P_x(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \big\|P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x\big\|^2 \le \|x\|^2$$

összefüggés szerint konvergens. Világos, hogy az $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x$ hozzárendelés egy Q lineáris operátor, amelynek normája nem nagyobb, mint 1. Mivel

$$\begin{aligned}\langle Qx, x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \sum_{k=1}^{n} P(A_k)x, x \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle P(A_k)x, x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = \langle P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x, x\rangle\end{aligned}$$

minden x-re, polarizációval kapjuk, hogy $Q = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$, tehát teljesül (4).

7.74. Spektrálintegrál. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér és P egy spektrálmérték X-en $\mathcal{L}(H;H)$-beli értékekkel. Ekkor létezik egy és csak egy, az X-en értelmezett mérhető komplex értékű függvényeket H lineáris operátoraiba képező*

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_X f(t)\, dP(t)$$

*leképezés (*spektrálintegrál*), amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) $\operatorname{dmn}\varphi(f) = \left\{x\colon x \in H, \int_X |f|^2\, dP_x < \infty\right\}$;

(2) $\langle\varphi(f)x, x\rangle = \int_X f\, dP_x$ *minden* $x \in \operatorname{dmn}\varphi(f)$*-re.*

Teljesül továbbá, hogy minden $\varphi(f)$ sűrűn definiált zárt lineáris operátor, és

(3) $\|\varphi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2\, dP_x$, *ha* $x \in \operatorname{dmn}\varphi(f)$;

(4) *ha* $S \in \mathcal{L}(H;H)$ *és* $SP(A) = P(A)S$ *minden* A *mérhető halmazra, akkor* $S\varphi(f) \subset \varphi(f)S$.

Ha $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ *mérhető függvények,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *pedig skalárok, akkor*

(5) *ha* $P\{f \neq g\} = 0$, *akkor* $\varphi(f) = \varphi(g)$;

(6) $\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \subset \varphi(\alpha f + \beta g)$;

(7) $\varphi(f)\varphi(g) \subset \varphi(fg)$ *és* $\operatorname{dmn}(\varphi(f)\varphi(g)) = \operatorname{dmn}\varphi(g) \cap \operatorname{dmn}\varphi(fg)$;

(8) $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$ *és* $\varphi(f)\varphi(f)^* = \varphi(|f|^2) = \varphi(f)^*\varphi(f)$.

$*$ **Bizonyítás.** Ha f egyszerű mérhető függvény $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ értékekkel, akkor definiáljuk $\varphi(f) \in \mathcal{L}(H;H)$-t a $\varphi(f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j P\{f = \alpha_j\}$ összefüggéssel. Mivel P értékei önadjungált projekciók, $\varphi(f)^* = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} P\{f = y_j\} = \varphi(\overline{f})$. Ha a g egyszerű függvény a β_k értékeket veszi fel, akkor

$$\begin{aligned}\varphi(f)\varphi(g) &= \sum_{j,k} \alpha_j\beta_k P\{f = \alpha_j\}P\{g = \beta_k\} \\ &= \sum_l \sum_{\alpha_j\beta_k = \gamma_l} \gamma_l P\{fg = \gamma_l\} = \varphi(fg).\end{aligned}$$

Hasonlóan belátható, hogy $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$. Ha $x \in H$, akkor definíció szerint

$$\langle\varphi(f)x, x\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle P\{f = \alpha_j\}x, x\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j P_x\{f = \alpha_j\} = \int_X f\, dP_x.$$

A fentiekből következik, hogy

$$\varphi(f)^*\varphi(f) = \varphi(\overline{f})\varphi(f) = \varphi(\overline{f}f) = \varphi(|f|^2).$$

Ezért

$$\|\varphi(f)x\|^2 = \langle\varphi(f)^*\varphi(f)x, x\rangle = \left\langle\varphi(|f|^2)x, x\right\rangle = \int_X |f|^2\, dP_x,$$

amiből következik, hogy $\|\varphi(f)\| \le K$, ha $|f| \le K$. Legyen most f korlátos mérhető függvény. Léteznek olyan f_k egyszerű mérhető függvények, amelyek konvergálnak f-hez egyenletesen. Az előző egyenlőtlenség szerint, a $\varphi(f_k)$ operátorok Cauchy-sorozatot alkotnak $\mathcal{L}(H;H)$-ban. Ez konvergál egy operátorhoz, amelyet $\varphi(f)$-el fogunk jelölni. Könnyű látni, hogy $\varphi(f)$ nem függ az f_k megválasztásától. Nyilvánvaló, hogy az előző egyenlőtlenségből következik az általánosabb

$$\|\varphi(f)\| \le K, \quad \text{ha} \quad |f| \le K$$

összefüggés. Az egyszerű függvényekre eddig bizonyítottakból a tétel minden állítása következik a korlátos mérhető függvények esetére.

Az általános esetben osszuk fel X-et megszámlálható sok diszjunkt, mérhető X_n halmazra, úgy, hogy $f|_{X_n}$ korlátos legyen; például tekintsük az $X_n = \{n \le |f| < n+1\}$ halmazokat. Tekintsük az f_n függvényeket, amelyek X_n-en f-el egyeznek meg, egyébként nullák. Mivel $\varphi(f_n)$ felcserélhető $P(X_m)$-el, a $H_n = \operatorname{rng}(P(X_n))$ zárt altér ortogonális komplementerén nulla, ezt pedig önmagába leképezi le. Legyen $T_n = \varphi(f_n)|_{H_n}$, és legyen $\varphi(f)$ az előző lemma szerint a T_n operátorokhoz tartozó T zárt lineáris operátor. Az előző tétel és az integrál σ-additivitása miatt $\varphi(f)$ sűrűn definiált, és eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. Mivel az (1) jobb oldalán szereplő halmaz f és P által egyértelműen meghatározott, kapjuk, hogy sűrű altér, és polarizációval adódik, hogy (1) és (2) egyértelműen meghatározza $\varphi(f)$-et. Az előző lemma felhasználásával a (3)–(8) állítások is könnyen beláthatók, ha az X_n mérhető halmazokat úgy választjuk, hogy g is korlátos legyen X_n-en. Ez könnyen elérhető, ha a $\{j \le |f| < j+1\} \cap \{k \le |g| < k+1\}$ halmazokat rendezzük sorozatba.

7.75. A spektráltétel korlátos normális operátorokra. *Legyen H komplex Hilbert-tér. Ha $T \in \mathcal{L}(H;H)$ egy normális operátor, akkor pontosan egy P spektrálmérték létezik $\sigma(T)$ Borel-halmazain, a T* spektrálfelbontása, *amelyre $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dP(\lambda)$.*

∗ **Bizonyítás.** A spektráltétel szorzat alakját felhasználva, legyen

$$P(A) = U^{-1} \circ M_{\xi_A \circ t} \circ U,$$

ha A Borel-halmaz $\sigma(T)$-ben. Mivel $\xi_A \circ t$ csak 0 és 1 értékeket vehet fel, $M_{\xi_A \circ t}$ önadjungált projekció. Bármely $x \in H$-ra

$$\begin{aligned} P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle &= \int \xi_A(t(s)) \big|(Ux)(s)\big|^2 \, d\mu(s) \\ &= \int_{t^{-1}(A)} \big|(Ux)(s)\big|^2 \, d\mu(s), \end{aligned}$$

amiből látszik, hogy P_x véges mérték $\sigma(T)$ Borel-halmazain, és így P spektrálmérték. Az előző összefüggés úgy is írható, hogy

$$\int_{\sigma(T)} \xi_A(\lambda) \, dP_x(\lambda) = \int \xi_A(t(s)) \big|(Ux)(s)\big|^2 \, d\mu(s),$$

és hasonló összefüggés teljesül ξ_A helyett minden egyszerű Borel-függvényre, és tetszőleges $\sigma(T)$-n értelmezett korlátos, komplex értékű Borel-függvényre is, speciálisan $\varphi(\lambda)=\lambda$-ra is. Ebből

$$\int_{\sigma(T)} \lambda\, dP_x(\lambda) = \int t(s)\big|(Ux)(s)\big|^2\, d\mu(s) = \langle Tx, x\rangle.$$

Másrészt, a spektrálintegrál tulajdonságai szerint, ha p egy kétváltozós komplex polinom, akkor

$$\big\langle p(T,T^*)x, x\big\rangle = \int_{\sigma(T)} p(\lambda,\overline{\lambda})\, dP_x(\lambda).$$

A Weierstrass–Stone-tétel komplex változata szerint a $\lambda\mapsto p(\lambda,\overline{\lambda})$ függvények sűrűek $\mathcal{C}\big(\sigma(T)\big)$-ben. Így a T operátor egyértelműen meghatározza az $\int_{\sigma(T)}\varphi(\lambda)\, dP_x(\lambda)$ értékeket, ha $\varphi\in\mathcal{C}\big(\sigma(T)\big)$ és $x\in H$. Mivel $\mathbb{C}$ Borel-halmazain minden véges mérték Radon-mérték, a Riesz-féle reprezentációs tétel unicitás része szerint a P_x mértékek, így az P spektrálmérték is, egyértelműen meghatározott.

7.76. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér, $T\in\mathcal{L}(H;H)$ egy normális operátor, és P a T spektrálfelbontása. Ha $f\colon\sigma(T)\to\mathbb{C}$ Borel-függvény, legyen $f(T)=\int_{\sigma(T)} f\, dP$.

$*$ **7.77. Tétel.** *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T\in\mathcal{L}(H;H)$ normális operátor, S a H sűrűn definiált, zárt lineáris operátora. Ha $TS\subset ST$ és $T^*S\subset ST^*$, akkor $f(T)S\subset Sf(T)$ minden $f\colon\sigma(T)\to\mathbb{C}$ korlátos Borel-függvényre.*

Bizonyítás. Legyen $x\in\operatorname{dmn}(S)$, $y\in\operatorname{dmn}(S^*)$. Ha p tetszőleges kétváltozós komplex polinom, akkor

$$\big\langle p(T,T^*)Sx, yr\big\rangle = \big\langle Sp(T,T^*)x, y\big\rangle = \big\langle p(T,T^*)x, S^*y\big\rangle.$$

Legyen μ, t és U a spektráltétel szorzat alakjában szereplő, T-hez tartozó mérték, függvény, illetve unitér operátor. Ekkor a fenti összefüggés $g_x=Ux$, $g_{Sx}=USx$, $g_y=Uy$, $g_{S^*y}=US^*y$ jelölésekkel

$$\int p(t(v),\overline{t}(v))g_{Sx}(v)\overline{g_y(v)}\, d\mu(v) = \int p(t(v),\overline{t}(v))g_y(v)\overline{g_{S^*y}(v)}\, d\mu(v)$$

alakba írható. Ez azt jelenti, hogy $g=g_{Sx}\overline{g_y}-g_y(v)\overline{g_{S^*y}}$ jelöléssel

$$\int f(t(v))g(v)\, d\mu(v)=0 \tag{1}$$

teljesül, ha $\lambda\mapsto f(\lambda)$ egy p kétváltozós polinommal $\lambda\mapsto p(\lambda,\overline{\lambda})$ alakba írható. Először azt akarjuk megmutatni, hogy (1) minden $f\colon\sigma(T)\to\mathbb{C}$ korlátos Borel-függvényre teljesül. Vegyük észre, hogy $g\in\mathbb{L}^1(\mu)$, így ha az f_n Borel-függvényekre teljesül (1), közös korlát alatt maradnak, és pontonként konvergálnak az f függvényhez, akkor f-re is teljesül (1) Lebesgue tétele szerint. Azok a korlátos Borel-függvények, amelyekre (1) teljesül, nyilván lineáris teret alkotnak. A Weierstrass–Stone-tételből következik, hogy (1) minden folytonos f függvényre teljesül. Legyen $g=\sum_{j=0}^3 i^j g_j$, $g_j\ge 0$. Legyen

$$\nu_j(B)=\int_{f^{-1}(B)} g_j(v)\, d\mu(v), \quad \text{ha} \quad B\subset\sigma(T) \text{ Borel-halmaz.}$$

A ν_j mértékek véges Radon-mértékek $\sigma(T)$ Borel-halmazain. Ha $\nu_0 \neq \nu_2$ vagy $\nu_1 \neq \nu_3$, akkor van olyan $C \subset \sigma(T)$ kompakt halmaz, amelyre $\nu_0(C) \neq \nu_2(C)$ vagy $\nu_1(C) \neq \nu_3(C)$. Legyen d a távolság $\mathbb{C}$-n és $f_n(\lambda) = \max\{0, 1 - nd(\lambda, C)\}$, ha $\lambda \in \sigma(T)$. Az $f_n\colon \sigma(T) \to [0,1]$ függvények folytonosak és pontonként C karakterisztikus függvényéhez konvergálnak, így

$$0 = \int f_n(t(v))g(v)\,d\mu(v) \to \int_{t^{-1}(C)} g(v)\,d\mu(v) = \sum_{j=0}^{3} i^j \nu_j(C) \neq 0,$$

ami ellentmondás. Innen (1) teljesül, ha f egy Borel-halmaz karakterisztikus függvénye, és a szokásos approximációs eljárással kapjuk, hogy minden korlátos Borel-függvényre is. Ez azt jelenti, hogy $\langle f(T)Sx, y\rangle = \langle f(T)x, S^*y\rangle$, ha $x \in \operatorname{dmn}(S)$ és $y \in \operatorname{dmn}(S^*)$, amiből $f(T)x \in \operatorname{dmn}(S^{**}) = \operatorname{dmn}(S)$ és $\langle f(T)Sx, y\rangle = \langle Sf(T)x, y\rangle$. Mivel $\operatorname{dmn}(S^*)$ sűrű, $f(T)Sx = Sf(T)x$, ha $x \in \operatorname{dmn}(S)$, azaz ha a bal oldal értelmezve van.

∗ **7.78. Tétel.** *Legyen T a H komplex Hilbert-tér egy normális operátora. Ekkor a H Hilbert-tér megszámlálható sok $H_n \subset \operatorname{dmn}(T)$ zárt altér Hilbert-összege, amelyek T-vel és T^*-gal szemben invariánsak, és a T_n megszorítása T-nek H_n-re korlátos normális operátor.*

Bizonyítás. Tekintsük a $B = (\mathbb{1}+T^*T)^{-1}$ folytonos szimmetrikus operátort, amelynek spektruma része $I = [0,1]$-nek. Ha $x \in \operatorname{dmn}(T)$, akkor $TB(H) \subset \operatorname{dmn}(T^*)$ és $T^*TBx = x - Bx \in \operatorname{dmn}(T)$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$BTx = BT(\mathbb{1} + T^*T)Bx = B(T + TT^*T)Bx,$$

mivel $B(H) \subset \operatorname{dmn}(T)$ teljesül Neumann tétele szerint. Mivel azonban $TT^* = T^*T$, kapjuk hogy

$$BTx = B(T + TT^*T)Bx = B(\mathbb{1} + T^*T)TBx = TBx,$$

más szavakkal, hogy $BT \subset TB$. Ebből az előző tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $f(B)T \subset Tf(B)$ bármely $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ korlátos Borel-függvényre. Jelölje f_0 a $\{0\}$ halmaz karakterisztikus függvényét, f_n pedig a $\left]1/(n+1), 1/n\right]$ halmaz karakterisztikus függvényét. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$-re H_n a $P_n = f_n(B)$ önadjungált projekcióoperátor értékkészlete. Ekkor H a H_n zárt alterek Hilbert-összege. Vegyük észre, hogy H_0 a B operátor magja, így mivel $(x, y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ belső szorzat, tehát $\langle Bx, x\rangle = 0$-ból $x = 0$ következik, $H_0 = \{0\}$.

A fentiek szerint $P_nT \subset TP_n$. Másrészt, f_n, $n > 0$ definíciója miatt a $g_n(\lambda) = f_n(\lambda)/\lambda$ (és $g_n(0) = 0$) összefüggéssel definiált függvények korlátos Borel-függvények, így $P_n = Bg_n(B)$ írható, amiből $TP_n = TBg_n(B)$. Láttuk azonban, hogy TB az egész H-n definiált korlátos operátor. Ezért a T_n megszorítása T-nek $H_n \cap \operatorname{dmn}(T)$-re folytonos leképezése a H_n altérnek önmagába. $P_n\big(\operatorname{dmn}(T)\big) \subset H_n \cap \operatorname{dmn}(T)$ miatt $H_n \cap \operatorname{dmn}(T)$ sűrű H_n-ben; mivel T_n nyilván zárt operátor H_n-en, kapjuk, hogy $H_n \subset \operatorname{dmn}(T)$. Végül $T^*T = TT^*$ miatt az eddig mondottakban T és T^* szerepét felcserélhetjük, anélkül, hogy B megváltozna; tehát a T_n' megszorítása T^*-nak H_n-re ennek az altérnek egy folytonos lineáris operátora, és nyilván megegyezik a T_n operátor T_n^* adjungáltjával. Így T_n normális, és a bizonyítás kész.

7.79. A spektráltétel szorzat alakja nemkorlátos operátorokra. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és T egy normális operátor H-n. Ekkor létezik olyan μ mérték, $U\colon H \to \mathbb{L}^2(\mu)$ unitér operátor és μ-mérhető komplex értékű t függvény, hogy $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, a t-vel való szorzás operátora, és $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$, továbbá μ választható úgy, hogy*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, \mu(B) < \infty\}$$

teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$-ra.

$*$ **Bizonyítás.** Az előző tételt fogjuk felhasználni. Az ottani jelölésekkel, tekintsük a T_n korlátos normális operátorokat (H_n ortogonális komplementerén nullának definiálva) és a P_n projekciókat. Ezek az operátorok és adjungáltjaik páronként felcserélhetőek. Alkalmazzuk ezekre a spektráltétel szorzat alakjának normális operátorokra vonatkozó változatát. t_n-el, illetve p_n-el jelölve a T_n-hez, illetve P_n-hez tartozó függvényt, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy p_n egy $A_n \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, az A_n halmazok diszjunktak, egyesítésük X, és a t_n függvény az A_n-en kívül nulla. Legyen $t = \sum_n t_n$. Az előző tételből, és az integrál σ-additivitásából következik, hogy t a T-nek megfelelő függvény.

$*$ **7.80. Tétel.** *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T, N, M \in \mathcal{L}(H;H)$, és tegyük fel, hogy N és M normális operátorok. Ha $MT = TN$, akkor $M^*T = TN^*$.*

Bizonyítás. Legyen $S \in \mathcal{L}(H;H)$ tetszőleges operátor. Ha $R = S - S^*$ és $Q = \exp(R)$, akkor $R^* = -R$ miatt

$$Q^* = \exp(R^*) = \exp(-R) = Q^{-1},$$

azaz Q unitér. Így $\|\exp(S - S^*)\| = 1$ minden S-re. Most a tétel feltételéből teljes indukcióval $M^kT = TN^k$ minden k természetes számra, így $\exp(M)T = T\exp(N)$, vagyis $T = \exp(-M)T\exp(N)$. Legyen $U = \exp(M^* - M)$, $V = \exp(N - N^*)$. Mivel az M és N operátorok normálisak, az előző összefüggésből azt kapjuk, hogy $\exp(M^*)T\exp(-N^*) = UTV$, amiből következik, hogy $\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\| \leq \|T\|$. Ha M, illetve N helyére $\overline{\lambda}M$-et, illetve $\overline{\lambda}N$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy a

$$\lambda \mapsto \exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*)$$

leképezés korlátos az egész komplex síkon. A Liouville-tételből következik, hogy ez a leképezés konstans, így, mivel az origóban értéke T, azt kapjuk, hogy $\exp(\lambda M^*)T = T\exp(\lambda N^*)$, ha $\lambda \in \mathbb{C}$. A deriváltak egyenlőségéből az origóban kapjuk az állítást.

7.81. Spektráltétel. *Egy H komplex Hilbert-tér bármely T normális operátorához létezik egy és csak egy P spektrálmérték $\mathbb{C}$ Borel-halmazain, a T spektrálfelbontása, amelyre $T = \int_{\mathbb{C}} t\,dP(t)$. Erre a spektrálmértékre $P(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$, így az integrálás $\sigma(T)$ felett is végezhető. Továbbá, $P(A)S = SP(A)$ minden $A \subset \mathbb{C}$ Borel-halmazra, és minden olyan $S \in \mathcal{L}(H;H)$-ra, amelyre $ST \subset TS$.*

A bizonyítás a spektráltétel szorzat alakját használja. A spektrálfelbontás a

$$P(A) = U^{-1} \circ M_{\xi_A \circ t} \circ U$$

összefüggéssel definiálható. Egy másik bizonyítás található Rudin [140] könyvében.

$*$ **Bizonyítás.** A fenti összefüggés egy $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(H;H)$ leképezését definiálja $\mathbb{C}$ Borel halmazainak H önadjungált projekcióoperátoraiba. Nyilván $P(\mathbb{C}) = \mathbb{I}$. Vegyük észre, hogy

$$\langle P(A)x, x\rangle = \int_{t^{-1}(A)} |Ux|^2\, d\mu,$$

amiből következik, hogy P_x mérték minden $x \in H$-ra. Általánosan, azt fogjuk megmutatni, hogy minden $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Borel-függvényre

$$\int_{\mathbb{C}} \bigl|f(\lambda)\bigr|^2\, dP_x(\lambda) = \int |f\circ t|^2 |Ux|^2\, d\mu,$$

így $\int f\,dP$ és $U^{-1}\circ M_{f\circ t}\circ U$ értelmezési tartománya megegyeznek, és ha ez az integrál véges, akkor

$$\int f(\lambda)\, dP_x(\lambda) = \int (f\circ t)|Ux|^2\, d\mu, \tag{1}$$

mert ebből következik, hogy $\int f\,dP = U^{-1}\circ M_{f\circ t}\circ U$ minden $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Borel-függvényre, speciálisan az identikus leképezésre is. Ez azonban egyszerű függvényre triviális, és ha f korlátos függvény, akkor határátmenettel következik (ilyenkor az integrálok mind végesek). Az általános esetben osszuk fel a komplex síkot megszámlálható sok diszjunkt Borel-halmazra úgy, hogy az f mindegyiken korlátos legyen, például legyen $A_n = f^{-1}\{n \le |f| < n+1\}$. Legyen $f_n = f\xi_{A_n}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \bigl|f(\lambda)\bigr|^2\, dP_x(\lambda) &= \sum_n \int_{A_n} \bigl|f(\lambda)\bigr|^2\, dP_x(\lambda) = \sum_n \int_{\mathbb{C}} \bigl|f_n(\lambda)\bigr|^2\, dP_x(\lambda)\\ &= \sum_n \int_X |f_n\circ t|^2 |Ux|\, d\mu = \sum_n \int_{t^{-1}(A_n)} |f\circ t|^2 |Ux|\, d\mu\\ &= \int_X |f\circ t|^2 |Ux|^2\, d\mu,\end{aligned}$$

azaz ez a két integrál egyszerre véges. Ha ez a két integrál véges, akkor a minden $z \in \mathbb{C}$-re teljesülő $|z| \le 1 + |z|^2$ becslés szerint az (1)-ben szereplő integrálok is végesek, és egyszerű függvényekkel közelítve f-et, kapjuk, hogy fennáll (1).

Tegyük fel, hogy $S \in \mathcal{L}(H;H)$ és $ST \subset TS$. Legyen $Q = Q_n = P(A_n)$, ahol $A_n = \{\lambda\colon |\lambda| < n\}$, n természetes szám. Ekkor a TQ operátor előállítása $TQ = \int f\,dP$, ahol $f(\lambda) = \lambda$, ha $|\lambda| < n$, és $f(\lambda) = 0$ egyébként. Így ez az operátor korlátos normális operátor. A TQ operátor spektrálfelbontása $P'(A) = P\bigl(f^{-1}(A)\bigr)$, azaz

$$\begin{aligned}P'(A) &= P(A\cap A_n) = QP(A), \quad \text{ha} \quad 0 \notin A,\\ P'(\{0\}) &= P\bigl(\{0\}\cup(\mathbb{C}\setminus A_n)\bigr) = P(\{0\}) + \mathbb{I} - Q.\end{aligned}$$

Ebből

$$P(A) = QP(A) = QP'(A), \quad \text{ha} \quad A \subset A_n.$$

A spektrálintegrál tulajdonságaiból következik, hogy $QT \subset TQ = QTQ$, továbbá

$$(QSQ)(TQ) = QSTQ \subset QTSQ \subset (TQ)(QSQ).$$

Mivel $(QSQ)(TQ) \in \mathcal{L}(H;H)$, ez a tartalmazás azt jelenti, hogy egyenlőség teljesül. Ezért a 7.77 tételből és az előző tételből következik, hogy QSQ felcserélhető a $P'(A)$ projekciók mindegyikével.

Most tetszőleges A korlátos Borel-halmazra van olyan n, hogy $A \subset A_n$; ekkor

$$QSP(A) = QSQP'(A) = P'(A)QSQ = P(A)SQ,$$

így $Q_nSP(A) = P(A)SQ_n$ minden elég nagy n-re. Ha n tart végtelenhez, kapjuk a felcserélhetőséget minden korlátos Borel-halmazra, így tetszőleges Borel-halmazra is.

Legyen P' egy másik spektrálmérték, amelyre $T = \int \lambda\, dP'(\lambda)$. Ekkor $P'(A')T \subset TP'(A')$ minden A' Borel-halmazra. Mivel a $P(A)$ projekciók minden olyan $S \in \mathcal{L}(H;H)$ transzformációval felcserélhetők, amelyre $ST \subset TS$, azt kapjuk, hogy $P'(A')P(A) = P(A)P'(A')$. Legyen A_n korlátos Borel-halmazok egy sorozata, amelyek egyesítése $\mathbb{C}$. A $H_n = P(A_n)(H)$ altérre megszorítva $P(A)$-t és $P'(A)$-t, két olyan spektrálsereget kapunk, amelyek mindegyike a $TP(A_n)$ operátor H_n-re való megszorításának spektrálfelbontása. Így ez a két spektrálsereg megegyezik H_n-en, és mivel H a H_n-ek Hilbert-összege, a 7.71 lemmából következik, hogy mindenütt.

7.82. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér, T a H egy normális operátora, és P a T spektrálfelbontása. Ha f Borel-függvény $\sigma(T)$-n, legyen

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f\, dP.$$

Megjegyezzük, hogy $f(T)$ az előző bizonyítás szerint T szorzat alakjával is kifejezhető: $f(T) = U^{-1} \circ M_{f\circ t} \circ U$.

$*$ **7.83. Felcserélhetőség.** Ha T és S az X normált tér operátorai, és csak $T \in \mathcal{L}(X;X)$, akkor a $TS \subset ST$ összefüggés veszi át azt a szerepet, amit korlátos operátorok esetén a $TS = ST$ *felcserélhető*ség játszik (hiszen a nemkorlátos esetben $TS = ST$ még akkor sem teljesül, ha S a T inverze). Ha X Hilbert-tér, T és S pedig nemkorlátos normális operátorok, akkor spektrálfelbontásaik projekcióinak felcserélhetősége játszik hasonló szerepet.

Egy szeparábilis Hilbert-térben páronként felcserélhető spektrálfelbontású önadjungált operátorok tetszőleges rendszeréhez van olyan korlátos önadjungált operátor, amelynek Borel-függvényeként mindegyik előállítható. Megfordítva, ha egy szeparábilis Hilbert-tér egy T zárt és S önadjungált operátorára $RT \subset TR$ minden olyan $R \in \mathcal{L}(X;X)$-re, amelyre $RS \subset SR$, akkor T az S függvénye. Ezen (normális operátorokra is átvihető) eredmények tárgyalását lásd Riesz–Szőkefalvi-Nagy [137] könyvében.

$\rightarrow$ **7.84. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy egy $T \in H \to H$ normális operátor pontosan akkor önadjungált, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\Im(\lambda) = r > 0$ és λ benne van t lényeges értékkészletében. Ekkor van olyan pozitív, de véges mértékű A mérhető halmaz, hogy $\Im t(A) > r/2$. Mivel $\int t|\xi_A|^2$ nem valós, ellentmondást kapunk.

→ **7.85. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy önadjungált és nemnegatív operátor spektruma nemnegatív.

Megoldás. Önadjungált, tehát a spektrum valós. Ha $\lambda < 0$ a spektrumban van, akkor a lényeges értékkészletében t-nek. Van olyan B, amelyre $0 < \mu(B) < \infty$ és $t(B)$ elemei kisebbek, mint $\lambda/2$. Az $x = U^{-1}\xi_B$-re

$$\langle Tx, x\rangle = \int t\xi_B^2 \, d\mu \le \lambda\mu(B)^2/2 < 0.$$

→ **7.86. Feladat [8].** A λ skalárt az X Banach-tér T lineáris operátora *közelítő sajátértékének* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan normált vektor, amelyre $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy minden közelítő sajátérték benne van a spektrumban, és ha T egy komplex Hilbert-tér egy normális operátora, akkor a spektrum minden eleme közelítő sajátérték.

Megoldás. Az első triviális, a második a spektráltétel szorzat alakjából következik.

7.87. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy komplex Hilbert-téren egy $T \in \mathcal{L}(H;H)$ operátor akkor és csak akkor nemnegatív, ha önadjungált és $\sigma(T) \subset [0,\infty)$.

Megoldás. Mivel $\langle Tx, x\rangle$ valós, $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle T^*x, x\rangle$ minden x-re, így polarizációval $T = T^*$. A többit már láttuk.

7.88. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális és $T^2 = T$, akkor T önadjungált.

7.89. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális, akkor T pontosan akkor invertálható, ha van olyan $c > 0$, hogy $\|Tx\| \ge c\|x\|$ minden $x \in H$-ra.

7.90. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy egy H komplex Hilbert-tér minden nemnegatív $T \in \mathcal{L}(H;H)$ operátorához létezik egy és csak egy olyan $S \in \mathcal{L}(H;H)$ nemnegatív operátor, amelyre $S^2 = T$.

Megoldás. Mivel T önadjungált, használhatjuk a spektráltételt.

7.91. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy egy $T \in H \to H$ normális operátorra $r(T) = \|T\|$.

Megoldás. A spektráltétel szorzat alakja és a standard példa.

→ **7.92. Feladat [8].** A spektrálintegrálnál használt jelölésekkel, mutassuk meg, hogy $\sigma(\varphi(f)) \subset \overline{\operatorname{rng}(f)}$.

7.93. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy egy H komplex Hilbert-tér egy $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális operátora pontosan akkor önadjungált, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ és pontosan akkor unitér, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Megoldás. Használjuk a spektráltétel szorzat alakját.

7.94. Feladat [6]. A spektráltétel jelöléseivel, mutassuk meg, hogy $\sigma(T)$ a legszűkebb zárt halmaz, amelynek komplementerén P nulla.

Megoldás. Ha a t pont egy környezetén P nulla, akkor $S = \int(\lambda - t)\, dP(\lambda)$ korlátos operátor, amely $T - t\mathbb{1}$ inverze.

$*$ **7.95. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy ha T egy korlátos normális operátor, g pedig $\sigma(T)$ egy környezetén értelmezett holomorf függvény, akkor $g(T)$ két értelmezése egybeesik.

$\rightarrow$ **7.96. Feladat [11].** Bizonyítsuk be, hogy ha $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális, akkor $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\big|\langle Tx, x\rangle\big|$.

Megoldás. Lásd Zeidler [179], II. 179. o., vagy a spektráltétel szorzat alakja.

$*$ **7.97. Feladat [13].** Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a spektrálleképezés-tételt normális operátorokra.

$\rightarrow$ **7.98. Feladat [6].** Adjuk meg egy normális operátor szorzat alakját, ha létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázis.

7.99. Feladat [19]. Próbáljuk meg meghatározni ezen paragrafus eddigi példáiban és feladataiban szereplő operátorok sajátértékeit, folytonos és reziduális spektrumát.

7.100. Feladat [19]. Próbáljuk meg meghatározni ezen paragrafus eddigi példáiban és feladataiban szereplő normális operátorok szorzat alakját és spektrálfelbontását.

7.101. Feladat [10]. Legyen H komplex Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy ha $P \in \mathcal{L}(H;H)$ projekció, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(1) P önadjungált;

(2) P normális;

(3) $\mathrm{rng}(P) = \ker(P)^{\perp}$;

(4) $\langle Px, x\rangle = \big\|P(x)\big\|^2$ minden $x \in H$-ra.

Megoldás. (1) $\Rightarrow$ (2): Triviális. (2) $\Rightarrow$ (3): Ha P normális, akkor $\ker(P) = \ker(P^*) = \overline{\mathrm{rng}(P)}^{\perp}$, de $\mathrm{rng}(P) = \ker(I-P)$, így zárt. (3) $\Rightarrow$ (4): Ha (3) teljesül, úgy $H = \ker(P) \oplus \mathrm{rng}(P)$, azaz bármely $x \in H$ $x = x_1 + x_2$ alakban írható, ahol $Px_1 = 0$, $Px_2 = = x_2$ és $x_1 \perp x_2$. Ekkor

$$\langle Px, x\rangle = \langle x_2, x_1 + x_2\rangle = \langle x_2, x_2\rangle = \|Px\|^2$$

(4) $\Rightarrow$ (1): Ha $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$, akkor

$$\langle Px, x\rangle = \langle x, P^*x\rangle = \langle P^*x, x\rangle$$

bármely $x \in H$-ra, így $P = P^*$.

7.102. Feladat [7]. Legyen H_1 egy H Hilbert-tér valamely zárt altere, $H_2 = H_1^{\perp}$ és P a H_1-re való ortogonális projekció, végül T egy H-n értelmezett operátor. Fejezzük ki T és P közötti algebrai összefüggésekkel a következő állításokat:

(1) $T(H_1) \subset H_1$;

(2) $T(H_1) \subset H_1$ és $T(H_2) \subset H_2$.

Megoldás. $AP = PAP$, illetve $AP = PA$.

7.103. Feladat [5]. Legyen H egy komplex Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{L}(H;H)$-ban az unitér elemek multiplikatív csoportot alkotnak.

7.104. Feladat [5]. Legyen H komplex szeparábilis Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy egy $U \in \mathcal{L}(H;H)$ akkor és csak akkor unitér operátor, ha ortonormált bázist ortonormált bázisra képez.

7.105. Feladat [7]. Igaz-e, hogy egy H komplex Hilbert-tér önmagára való, a nullát fixen hagyó izometriája unitér operátor?

Megoldás. Nem, ellenpélda $\mathbb{C}$-n a komplex konjugálás.

7.106. Feladat [8]. Legyen $T \in \mathcal{L}(H;H)$, ahol H komplex Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy

(1) T egyértelműen felírható $T = R + iS$ alakban, ahol R és S önadjungált operátorok;

(2) T pontosan akkor normális, ha R és S felcserélhetőek;

(3) T pontosan akkor unitér, ha normális és $R^2 + S^2 = \mathbb{I}$.

Megoldás. (1) $R = \frac{T+T^*}{2}, S = \frac{T-T^*}{2i}$. (2) $TT^* - T^*T = 2i(SR - RS)$. (3) $TT^* = R^2 + i(SR - RS) + S^2$.

7.107. Feladat [8]. Legyen H komplex Hilbert-tér, és legyen $T \in \mathcal{L}(H;H)$ önadjungált operátor. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, akkor a $(T - \lambda\mathbb{I})(T - \bar{\lambda}\mathbb{I})^{-1}$ operátor unitér.

Megoldás. Ha $U = (T + \lambda I)(T + \bar{\lambda}I)^{-1}$, akkor $U^* = (T + \lambda I)^{-1}(T + \bar{\lambda}I)$ és $U^{-1} = (T + \bar{\lambda}I)(T + \lambda I)^{-1}$, $T + \bar{\lambda}I$ és $(T + \lambda I)^{-1}$ pedig felcserélhetők.

7.108. Feladat [8]. Legyen H komplex Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy ha $T \in \mathcal{L}(H;H)$, a $T - i\mathbb{I}$ reguláris és $(T + i\mathbb{I})(T - i\mathbb{I})^{-1}$ unitér, akkor T önadjungált.

Megoldás. Ha $U = (T + iI)(T - iI)^{-1}$, akkor

$$U^* = (T^* + iI)^{-1}(T^* - iI) = (T - iI)(T + iI)^{-1} = U^{-1}.$$

Ebből $(T^* - iI)(T + iI) = (T^* + iI)(T - iI)$, azaz $T^*T - iT + iT^* + I = T^*T + iT - iT^* + I$, $2iT^* = 2iT$, $T^* = T$.

7.109. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $U \in \mathcal{L}(H;H)$ unitér és $U - \mathbb{I}$ invertálható, akkor a $T = i(U + \mathbb{I})(U - \mathbb{I})^{-1}$ operátor önadjungált.

7.110. Feladat [5]. Bizonyítsuk be, hogy egy Hilbert-tér T és S korlátos önadjungált operátorainak szorzata akkor és csak akkor önadjungált, ha T és S felcserélhetőek.

Megoldás. $(TS)^* = S^*T^* = ST$, ha T és S önadjungáltak. Így $(TS)^* = TS$ pontosan akkor teljesül, ha $ST = TS$.

7.111. Feladat [7]. Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és $T \in \mathcal{L}(H;H)$. Igazoljuk a következő állításokat:

(1) T pontosan akkor reguláris, ha T^* reguláris, és ekkor $(T^*)^{-1} = = (T^{-1})^*$;

(2) $\lambda \in \sigma(T)$ pontosan akkor teljesül, ha $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Megoldás.

(1) $e = e^* = (x^{-1}x)^* = x^*(x^{-1})^*$.

(2) (1)-et használva: $x - \lambda e$ reguláris, tehát $x^* - \bar{\lambda}e$ reguláris.

7.112. Feladat [13]. Legyen H komplex Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy ha $T \in \mathcal{L}(H;H)$, akkor

(1) T pontosan akkor normális, ha $\|Tx\| = \|T^*x\|$ bármely $x \in H$-ra;

(2) ha T normális, akkor $\ker(T) = \ker(T^*)$;

(3) ha T normális, $\alpha \in \mathbb{C}$ és $Tx = \alpha x$ valamilyen $x \in H$-ra, akkor $T^*x = \overline{\alpha}x$;

(4) ha T normális, α és β különböző sajátértékei T-nek, akkor a megfelelő sajátalterek ortogonálisak egymásra.

Megoldás. (1)-hez $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$, tehát $\langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle$ amiből $\langle x, (T^*T - TT^*)x\rangle = 0$. Így $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$ pontosan akkor teljesül bármely $x \in H$-ra, ha $T^*T - TT^* = 0$, azaz T normális.

(2) következik (1)-ből. $\|Tx\| = 0$ esetén $\|T^*x\| = 0$.

(3) Alkalmazzuk (2)-t $T - \alpha I$-re.

(4) Ha $Tx = \alpha x$ és $Ty = \beta y$, akkor

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\beta}y\rangle = \beta\langle x, y\rangle,$$

így ha $\alpha \neq \beta$, akkor $\langle x, y\rangle = 0$.

7.113. Feladat [7]. Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}$ bármely nem üres kompakt halmaza valamely $T \in \mathcal{L}(H;H)$ operátor spektruma.

Megoldás. Legyen K nemüres kompakt halmaz $\mathbb{C}$-ben. Válasszunk K-ban egy $\{\alpha_n\}$ sorozatot, mely sűrű K-ban, és legyen $Te_j = \alpha_j e_j$ $(j = 1, 2, ...)$, ahol e_n ortonormált bázis H-ban.

7.114. Feladat [5]. Egy T lineáris operátort *maximális szimmetrikus*nak nevezünk, ha T szimmetrikus és nincs szimmetrikus kiterjesztése. Mutassuk meg, hogy ha T önadjungált, akkor maximális szimmetrikus.

Megoldás. Legyen S szimmetrikus operátor, azaz $S \subset S^*$ és $T \subset S$. Ekkor $S^* \subset T^*$ így $S \subset S^* \subset T^* = T \subset S$, amiből $S = T$.

7.115. Feladat [9]. Legyen T szimmetrikus operátor egy H Hilbert-téren. Igazoljuk a következő állításokat:

(1) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$ bármely $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re;

(2) T pontosan akkor zárt, ha $\mathrm{rng}(T + i\mathbb{1})$ zárt;

(3) $T + i\mathbb{1}$ kölcsönösen egyértelmű.

Megoldás. (1)

$$\begin{aligned}\|Tx + ix\|^2 &= \|Tx\|^2 + \|x\|/2 - i\langle Tx, x\rangle + i\langle x, Tx\rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 - i\langle Tx, x\rangle + i\langle Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 + \|x\|^2,\end{aligned}$$

ha $x \in \mathrm{dmn}(T)$. (2) (1) szerint a $(T+iI)x \longleftrightarrow \langle x, Tx\rangle$ kölcsönösen egyértelmű izometrikus megfeleltetés $\mathcal{R}(T+iI)$ és $\mathcal{G}(T)$ között. (3) Következik (1)-ből, ugyanis ha $(T+iI)x = 0$, akkor $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = 0$, amiből $x = 0$.

$*$ **7.116. Feladat [9].** Legyen $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Ekkor az $(S_f)g = f * g$, $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *konvolúcióoperátor* korlátos lineáris operátor $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-en. Hozzuk függvénnyel való szorzás alakra.

Megoldás. A Fourier-transzformáció $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-et önmagára képező izometrikus izomorfizmus (Plancherel-tétel) és

$$(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}, \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}).$$

Legyen most $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Mivel $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sűrű $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-ben, választható olyan $g_n \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sorozat, melyre $\|g_n - g\|_2 \to 0$, így $\|\hat{g_n} - \hat{g}\|_2 \to 0$, ha $n \to \infty$ és

$$(f * g_n)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}_n. \tag{1}$$

A konvolúcióoperátor folytonosságából következik, hogy (1) bal oldala $(f*g)\hat{}$-höz konvergál $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ normájában. Másrészt $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ miatt $\hat{f}$ korlátos, és egy korlátos függvénnyel való szorzás operátora szintén folytonos. Vehetjük tehát (1) határértékét, amiből

$$(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g} \text{ minden } g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})\text{-re.}$$

Így a Fourier-transzformáció az S_f operátort az $\hat{f}$-vel való szorzás operátorába viszi át.

7.117. Fizikai alkalmazások. A kvantumelméletben a fizikai rendszer állapotait egy szeparábilis Hilbert-tér normált elemeivel reprezentáljuk, a fizikai mennyiségeket pedig önadjungált operátorokkal. Ha valamely fizikai mennyiséget egy T önadjungált operátor reprezentál, a rendszer állapotát pedig a ψ normált vektor írja le, és T spektrálfelbontása

$$T = \int_{\sigma(T)} t \, dP(t),$$

akkor egy $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz esetén $\|P(A)\psi\|^2$ adja meg annak valószínűségét, hogy a rendszeren mérést végezve, az illető fizikai mennyiségre olyan értéket kapunk, amely A-ba esik.

7.118. Kvantálási szabályok, Schrödinger-egyenlet. Egyszerűbb fizikai rendszerek esetén a különböző mechanikai mennyiségek operátorát egyszerű kvantálási szabályok segítségével kaphatjuk meg az úgynevezett Schrödinger-reprezentációban. Fejezzük ki az egyes mechanikai mennyiségeket a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ általános koordináták és a megfelelő $p_1, p_2, \ldots, p_n$ általános impulzusok segítségével, majd alkalmazzuk a $q_j \bar{t} q_j \cdot$ és $p_j \bar{t} - i\hbar\partial_{q_j}$ helyettesítéseket, azaz q_j-t a q_j-vel való szorzás operátorával, p_j-t pedig a q_j szerinti differenciálás operátorának egy konstansszorosával helyettesítjük; itt $\hbar = h/(2\pi)$, ahol h a *Planck-állandó*, $\approx 6{,}62696 \cdot 10^{-34}$Js. Így a $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ vektorok $Q \subset \mathbb{R}^n$ terén, a konfigurációs téren értelmezett függvényekre ható operátorokat kapunk. A rendszer állapotait az $\mathbb{L}^2(Q; \mathbb{C})$ tér ψ normált elemeivel, az állapotfüggvényekkel vagy hullámfüggvényekkel, a mechanikai mennyiségeket pedig az így kapott operátorokkal reprezentáljuk. Nem világos, hogy az így fellépő operátorok hol vannak értelmezve. Értelmezhetjük őket például $\mathcal{D}(Q; \mathbb{C})$-n, de így nem kapunk önadjungált, csak szimmetrikus operátort. Azonban a fizikailag fontos esetekben a kapott operátor lényegében önadjungált (Kato tétele),

így tekinthetjük a lezártját, ami már önadjungált. Fontos szerepet játszik a rendszer Hamilton-operátora. Az összes (mozgási+helyzeti) energiát mint $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ és $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ függvényét a *H Hamilton-függvény* adja meg:

$$E = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(q, p).$$

A kvantálási szabályok alapján tehát H-ból megkapjuk a rendszer energiaoperátorát, amit ugyancsak H-val fogunk jelölni, és *Hamilton-operátor*nak is nevezünk. Ha a másik oldalon $E\bar{\imath}i\hbar\partial_t$ helyettesítést alkalmazunk, és a ψ hullámfüggvényt a t időtől is függőnek tekintjük, megkapjuk a rendszer dinamikáját leíró

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(q,t) = H\psi(q,t)$$

*Schrödinger-egyenlet*et. Ez az egyenlet írja le, hogy a rendszer $(q,t) \mapsto \psi(q,t)$ hullámfüggvénye hogyan függ az időtől (ha a rendszeren nem végzünk mérést). Bármely rögzített t-re, a $\psi(.,t)$ függvény és egy adott fizikai mennyiséghez tartozó operátor segítségével megkaphatjuk, hogy a megfelelő fizikai mennyiséget mérve, annak mi a valószínűségeloszlása. A Schrödinger-egyenlet megoldásával később foglalkozunk, és megmutatjuk, hogy a

$$\psi(.,t) = e^{-\frac{it}{\hbar}H}\psi(.,0)$$

úgynevezett „gyenge megoldásai" pontosan leírják a rendszer dinamikáját.

Megjegyezzük, hogy az itt megadott kvantálási szabályok egyrészt nem teljesek (például több azonos részecskét is tartalmazó rendszer esetén más-más pótlólagos szabály lép be attól függően, hogy azok fermionok vagy bozonok; nem veszik figyelembe a relativisztikus effektusokat, így a spint sem; stb.), másrészt ellentmondásosak (egy adott q_j-vel való szorzás operátora és szerinte vett differenciálás operátora nem felcserélhetőek, így nem mindegy, milyen sorrendben alkalmazzuk őket; stb.), mégis, lehetővé teszik a legegyszerűbb mechanikai rendszerek „megkvantálását".

A legegyszerűbb „tankönyvi" példa az egydimenziós harmonikus oszcillátor m tömeggel és k direkciós állandóval. Itt $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, a helyoperátor a $(Q\psi)(q) = q\psi(q)$ operátor, az impulzus operátora a $(P\psi)(q) = -i\hbar\psi'(q)$ operátor, és mivel

$$E = H(q,p) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2,$$

a Hamilton-operátor a

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \frac{k}{2}q^2\psi(q)$$

operátor, a Schrödinger-egyenlet pedig

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(q,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}(q,t) + \frac{k}{2}q^2\psi(q,t).$$

A legegyszerűbb „valódi" példa a hidrogénatom. Itt $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$,

$$E = H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) = \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} - 4\pi\varepsilon_0\frac{Q_e^2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}},$$

ahol Q_e az elektron töltése, $\approx 1{,}602177 \cdot 10^{-19}$C, ε_0 a vákuum dielektromos állandója és $m = m_e$ az elektron tömege, $\approx 9,10939 \cdot 10^{-28}$g. (Ha a mag mozgását is figyelembe akarjuk venni, akkor $m = m_e m_p/(m_e + m_p)$, a redukált tömeg, ahol m_p a proton tömege, $\approx 1{,}672623 \cdot 10^{-24}$g.) Így azt kapjuk, hogy a Hamilton-operátor a

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(q) - 4\pi\varepsilon_0\frac{Q_e^2}{|q|}\psi(q)$$

operátor, a Schrödinger-egyenlet pedig

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(q,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q\psi(q,t) - 4\pi\varepsilon_0\frac{Q_e^2}{|q|}\psi(q,t).$$

A koordináták operátorai szorzat alakban vannak, így vizsgálatuk egyszerű. Az impulzusoperátorok Fourier-transzformációval hozhatók szorzat alakra. A legfontosabb feladat legtöbbször az energiaoperátor szorzat alakra hozása. A hidrogénatommal később foglalkozunk, most mint legegyszerűbb példát csak a harmonikus oszcillátort tekintjük.

∗ **7.119. Példa: harmonikus oszcillátor.** Az előző pont jelöléseivel, az (egydimenziós) harmonikus oszcillátor

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \frac{k}{2}q^2\psi(q)$$

Hamilton-operátorát $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$-en értelmezve, H az $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ sűrűn definiált, lineáris szimmetrikus operátora, mivel parciális integrálással

$$\begin{aligned}
\langle H\psi,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \frac{k}{2}q^2\psi(q)\right)\overline{\varphi}(q)\,dq \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(q)\overline{\varphi}'(q)\,dq + \frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}q^2\psi(q)\overline{\varphi}(q)\,dq \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(q)\overline{\varphi}''(q)\,dq + \frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(q)\overline{q^2\varphi(q)}\,dq \\
&= \langle\psi, H\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Egyébként hasonlóan adódik az is, hogy H nemnegatív.

Határozzuk meg H sajátértékeit. A $H\psi = \lambda\psi$ egyenlet megoldását

$$c = \sqrt[4]{km}/\sqrt{\hbar}, \quad x = cq$$

jelöléssel $\psi(q) = e^{-x^2/2}y(x)$ alakban keresve a

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \left(\frac{k}{2}q^2 - \lambda\right)\psi(q) \\
&= -\frac{\hbar^2c^2}{2m}e^{-x^2/2}\left(y''(x) - 2xy'(x) + (x^2-1)y(x)\right) \\
&+ \left(\frac{k}{2c^2}x^2 - \lambda\right)e^{-x^2/2}y(x) \\
&= \frac{\hbar\sqrt{k}}{2\sqrt{m}}e^{-x^2/2}(-y''(x) + 2xy'(x) + (1-\lambda)y(x))
\end{aligned}$$

egyenletet kapjuk. A zárójelben álló kifejezést összevetve a Hermite-polinomok differenciálegyenletével (lásd a mellékletet), kapjuk, hogy a

$$h_n(q) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

összefüggéssel definiált függvények a $\lambda_n = \hbar\sqrt{k/m}(n + 1/2)$ sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei a H operátornak, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mivel a H_n Hermite-polinomok teljes ortonormált rendszert alkotnak az e^{-x^2} súlyfüggvényre nézve, a h_n függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$-ben. Ha ψ Fourier-együtthatói erre a rendszerre nézve $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty$, akkor $\psi_k = \sum_{n=0}^{k} c_n h_n$-re $\psi_k \to \psi$ és $H\psi_k = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n c_n h_n \to \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n h_n$ így $\overline{H}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n h_n$. Mivel az $U\colon \psi \mapsto (c_0, c_1, c_2, \ldots)$, $U\colon \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{l}^2$ unitér operátorral és $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$-vel $U^{-1} \circ M_\lambda \circ U$ éppen a $\psi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n h_n$ leképezés, ez az önadjungált operátor $\overline{H}$, és így H lényegében önadjungált, $U^{-1} \circ M_\lambda \circ U$ pedig a szorzat-előállítása. Megjegyezzük, hogy ha H-t csak $\mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ elemeire értelmezzük, akkor is ugyanez a lezártja, és hogy $\overline{H}$ a H Friedrichs-kiterjesztése: lásd Triebel [168], 471. o.

7.120. Feladat [6]. Egy részecske állapotát egy adott időpontban a

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{-x^2/4}$$

$\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-beli állapotfüggvény írja le. Helyét meghatározva, milyen valószínűséggel fogjuk a $[-1, 1]$ intervallumban találni?

7.121. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha $\psi_2 = c\psi_1$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, akkor a ψ_1 és ψ_2 állapotok esetén bármely fizikai mennyiség mérésekor bármely Borel-halmaz esetén annak valószínűsége, hogy a mért érték az adott Borel-halmazba esik, megegyezik.

7.122. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy ha a ψ állapotú fizikai rendszeren a T operátorral reprezentált fizikai mennyiséget mérjük, a mérés várható értéke $\langle T\psi, \psi\rangle$.

7.123. Feladat [10]. Tegyük fel, hogy a fizikai mennyiségeket reprezentáló T és S önadjungált operátorokra teljesül a $TS - ST \subset i\hbar\mathbb{l}$ *Heisenberg-féle felcserélési összefüggés*. Mutassuk meg, hogy ekkor bármilyen ψ állapot esetén, a fizikai mennyiségek mért értékeinek szórását $\mathbb{D}_\psi(T)$, illetve $\mathbb{D}_\psi(S)$-vel jelölve, teljesül a $\mathbb{D}_\psi(T)\mathbb{D}_\psi(S) \geq \hbar/2$ *Heisenberg-féle határozatlansági reláció*.

7.124. Feladat [11]. Mutassuk meg, hogy korlátos operátorokra nem teljesülhet a Heisenberg-féle felcserélési összefüggés.

Megoldás. Feltéve, hogy $TS - ST$ az identikus operátor, számoljuk ki $T^n S - ST^n$-et, majd vegyük mindkét oldal normáját.

$*$ **7.125. Lineáris iteráció.** Lineáris operátoregyenletek megoldására *lineáris iteráció*t is használhatunk. Legyen X Banach-tér, $A \in \mathcal{L}(X;X)$, $b \in X$ és $T(x) = Ax + b$. A T fixpontját megkaphatjuk iterációval. Mutassuk meg, hogy

(1) T pontosan akkor kontrakció, ha $\|A\| < 1$;

(2) pontosan akkor létezik olyan n, hogy T^n kontrakció, ha $r(A) < 1$;

(3) ha $r(A) < 1$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan C_ε, hogy

$$\|x - x_n\| \le C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^n \|x_1 - x_0\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

(4) ha $r(A) > 1$, akkor azon b pontok, amelyekre az $x_0 = 0$ kezdőértékkel indított iteráció divergál, sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmazt alkotnak X-ben.

∗ **7.126. Gauss-féle kiküszöbölés.** Egy $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldására, ahol $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris transzformáció, $b \in \mathbb{K}^n$ rögzített, általában legjobban a *Gauss-elimináció* használható. Ez az eljárás a középiskolából ismert módszer (az egyik egyenlet valahányszorosait hozzáadjuk a többi egyenlethez, a szorzó tényezőket úgy választva, hogy a többi egyenletben egy adott ismeretlen együtthatója eltűnjön) algoritmus formájába öntött változata. Felfogható úgy is, hogy az A-nak egy $LU = A$ felbontását hozzuk létre, ahol L mátrixa alsó háromszögmátrix, azaz $l_{i,j} = 0$, ha $j > i$, továbbá $l_{j,j} = 1$ minden j-re, U mátrixa pedig felső háromszögmátrix, azaz $u_{i,j} = 0$, ha $j < i$. Valóban, az a lépés, amelyben a j-edik oszlop elemeit nullázzuk, felfogható úgy, mint egy bal oldali L_j tényező leválasztása, ahol L_j főátlójának elemei egyesek, és a j-edik oszlop $i > j$ sorindexű elemei kivételével minden más elem nulla. Az L_j tényezők szorzata L, a tényezők leválasztása után visszamaradó transzformáció pedig U. Természetesen számos numerikus probléma merül fel. Például az eljárás megkezdése előtt célszerű az egyenleteket úgy skálázni (konstanssal szorozni), hogy a legnagyobb együttható nagyságrendje minden egyenletben azonos legyen, minden lépésben célszerű azt az egyenletet kiválasztani, amelyben a kiküszöbölendő ismeretlen együtthatója a legnagyobb abszolút értékű, stb.

Az $A = LU$ felbontás birtokában a megoldás könnyen meghatározható. Valóban, elég az $Ly = b$ és $Ux = y$ egyenleteket megoldani, ezek viszont könnyen megoldhatók, mert háromszögmátrixú transzformációk esetén az egyenletek csatolása gyenge: van egy egyenlet, amelyben csak egy ismeretlen szerepel, ennek megoldása után újra van ilyen egyenlet, stb. Könnyen meghatározható A inverze és determinánsa is.

A gyakorlatban természetesen csak egy $\tilde{L}\tilde{U} \approx A$ közelítő felbontást kapunk. A közelítő megoldás az $\tilde{L}\tilde{U}\delta_n = Ax_n - b$, $x_{n+1} = x_n - \delta_n$ iteráció segítségével javítható. Az iteráció a $T(x) = x - \tilde{U}^{-1}\tilde{L}^{-1}(Ax - b)$ kontrakció fixpontja meghatározásának felel meg, és általában igen gyorsan konvergál. Úgy is tekinthető, mint a relaxáció egy esete. A részleteket illetően lásd a Forsythe–Moler [42] könyvet.

∗ **7.127. Lineáris egyenletrendszer megoldása iterációval.** Legyen $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$, $b \in \mathbb{K}^n$. Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer gyakran iterációval is megoldható. Ez különösen akkor célszerű, ha A mátrixában sok a nulla, mivel ilyenkor az iteráltak könnyen számíthatók. Ilyen „ritka” mátrixú egyenletek lépnek fel például parciális differenciálegyenletek differenciamódszerrel való megoldásakor. A nullákat legtöbbször nem is tároljuk a számítógépben, csak a nem nulla elemek helyét és értékét. Néha a mátrix szerkezete olyan egyszerű, hogy a számítás során mindig újra generáljuk az eredeti problémából. Ha Gauss-féle kiküszöbölést használnánk, akkor a mátrix „ritka” jellege megváltozna a kiküszöbölés során.

Tekintsük a triviális $A = D - L - U$ felbontást, ahol D mátrixának főátlón kívüli elemei mind nullák, L mátrixának főátlójában és a felett, U mátrixának főátlójában és az alatt pedig nullák állnak. Tegyük fel, hogy D invertálható. Ez mindig elérhető az

egyenletek alkalmas sorrendbe állításával, ha A invertálható. Célszerű úgy eljárni, hogy D mátrixának átlójába a lehető legnagyobb elemek kerüljenek. A *Jacobi-módszer*, vagy *szimultán közelítés módszere* a $T(x) = D^{-1}(Lx + Ux + b)$ leképezés iterálásának felel meg. Gyakran gyorsabban konvergál a *Gauss–Seidel-iteráció*, vagy másnéven a *fokozatos közelítések módszere*, amely a $T(x) = (D - L)^{-1}(Ux + b)$ leképezésnek felel meg. Ez az $Dx_{n+1} = Lx_{n+1} + Ux_n + b$ iterációt adja. A trükk az, hogy x_{n+1} koordinátáit sorba számítva, Lx_{n+1} kiszámításához csak az előző koordinátákra van szükség. Így ez a módszer az előzőnek az a változata, amelyben minden iterációnál a már kiszámított új koordinátákat felhasználjuk a régiek helyett. Végül az utolsó módszert a lineáris relaxációval kombinálva, a $T(x) = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)x + \omega b$ leképezés iterálásához jutunk. Alkalmas $0 < \omega < 2$ konstans választása esetén ez hatékonyabb lehet, mint az előzőek.

∗ **7.128. Feladat [8].** Határozzuk meg a $2\xi + \eta = 6$, $\xi + 2\eta = 6$ rendszer megoldását a fenti módszerekkel, az origóból indulva. Legyen $\omega = 1.072$. Ábrázoljuk az iteráció lineáris operátorának spektrálsugarát és a 10^{-10} pontosság eléréséhez szükséges iterációs lépések számát, ω függvényében.

∗ **7.129. Feladat [10].** Tekintsük az

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

végtelen egyenletrendszert, legyen

$$b = (b_1, b_2, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots).$$

Mutassuk meg, hogy

(1) ha $\sup_j \sum_i |a_{i,j}| < 1$, akkor minden $b \in \mathbb{l}^1$ esetén az egyenletrendszernek pontosan egy $x \in \mathbb{l}^1$ megoldása van;

(2) ha $\sup_i \sum_j |a_{i,j}| < 1$, akkor minden $b \in \mathbb{l}^\infty$ esetén az egyenletrendszernek pontosan egy $x \in \mathbb{l}^\infty$ megoldása van;

(3) ha $\sum_j \sum_i |a_{i,j}|^2 < 1$, akkor minden $b \in \mathbb{l}^2$ esetén az egyenletrendszernek pontosan egy $x \in \mathbb{l}^2$ megoldása van.

8
Kompakt operátorok

A „Fredholm-alternatíva" megfelelt a „végtelen dimenziós lineáris algebrában" egy $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós vektortér önmagába történő lineáris leképezése képtere és nulltere közötti klasszikus összefüggésnek. De ilyen lineáris leképezésekre sokkal több volt ismert, nevezetesen a Jordan-normálalak, amely „hasonlóság" erejéig jellemezte azokat, így természetes volt megvizsgálni a Fredholm-operátorok hasonló tulajdonságait. Azonban csak részeredményeket kaptak, mielőtt Riesz Frigyes 1918-ban ... teljes választ adott a kérdésre, és megtalálta a megfelelő általános környezetet Fredholm eredményeihez, melyet ma a kompakt operátorok Riesz–Fredholm-elmélete *néven ismerünk. ... Riesz Frigyes a $\mathcal{C}(I)$ térre szorítkozik, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy kompakt intervallum, de kifejezetten kiemeli, hogy ezt az esetet csak „próbakőnek" tekinti egy általánosabb elmélethez. Valóban, miután definiálja a normát $\mathcal{C}(I)$-n, sohasem ... használ semmit a norma axiomatikus definícióját kivéve (emlékeztetünk rá, hogy ez a definíció nyomtatásban csak két évvel később fordult elő!) Véleményem szerint Riesz Frigyes 1918-as dolgozata egyike a legszebbeknek, amelyet valaha is írtak; nyelvében és szellemében teljesen geometriai, és oly teljesen megfelel a céljának, hogy sohasem múlták felül és Riesz bizonyításai most is szó szerint másolhatók.*

Jean Dieudonné [28]

8.1. Operátoregyenletek, korrekt kitűzésű feladatok. A legkülönbözőbb egyenleteket – egyenletrendszereket, közönséges és parciális differenciálegyenleteket, integrálegyenleteket, stb. – általában felírhatjuk egy $Tx = y$ *operátoregyenlet* alakjában, ahol X és Y metrikus terek, $T \in X \to Y$ egy operátor, $y \in Y$. A differenciálegyenleteknél fellépő mellékfeltételeket is bevehetjük az operátoregyenletbe. Például, ha a differenciálegyenlet $Lx = f$ alakú, ahol L egy differenciáloperátor, f adott függvény, a mellékfeltétel pedig $Bx = g$ alakú, ahol g egy adott érték vagy függvény, B pedig az x ismeretlen függvényhez egy adott pontban, vagy egy tartomány határának egy részén felvett értékeket rendelő operátor, akkor $y = (f, g)$, $Tx = (Lx, Bx)$ jelöléssel a probléma $Tx = y$ alakú. Az operátoregyenletekkel kapcsolatban általában az alábbi három természetes követelményt támasztjuk:

(1) minden $y \in Y$-ra létezzen megoldás;

(2) a megoldás egyértelmű legyen;

(3) a megoldás valamilyen értelemben folytonosan függjön a feladat adataitól (y-tól és esetleg T-től).

Az ezeknek a feltételeknek eleget tévő feladatokat szokás *korrekt kitűzésű*nek nevezni. (1) egyszerűen a $\operatorname{rng}(T) = Y$ feltétellel ekvivalens. (2) azt jelenti, hogy T kölcsönösen egyértelmű, így ha T lineáris, akkor a $\ker(T) = \{0\}$ feltétellel ekvivalens. Láthatóan az, hogy egy feladat korrekt kitűzésű-e, függ az Y választásától, a T értelmezési tartománya megválasztásától, a normák megválasztásától, stb. Gyakran az a fő nehézség, hogy X-et, Y-t és T-t úgy válasszuk meg, hogy a feladat korrekt kitűzésű legyen.

Egy példa korrekt kitűzésű feladatra: ha X és Y Banach-terek, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése X-nek Y-ra, akkor az operátoregyenlet korrekt kitűzésű, mert $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X)$ és $\|S^{-1} - T^{-1}\|$ kicsi, ha $\|S - T\|$ kicsi.

Ha X, Y Banach-terek, $T \in X \to Y$ nem feltétlenül lineáris zárt operátor, és van olyan $c > 0$, hogy $\|Tx_1 - Tx_2\| \geq c\|x_1 - x_2\|$, ha $x_1, x_2 \in \mathrm{dmn}(T)$, akkor T kölcsönösen egyértelmű, $\mathrm{rng}(T)$ zárt, és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|y_1 - y_2\| < \delta$, akkor az $Tx = y_1$ és $Tx = y_2$ egyenletek x_1, x_2 megoldásaira $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$, így Y-t $\mathrm{rng}(T)$-re cserélve, a kapott feladat korrekt kitűzésű.

8.2. A sajátértékek módszere. Lineáris differenciál- és integrálegyenletek, általánosabban $Tx = y$ alakú operátoregyenletek tanulmányozásánál, ahol T egy Hilbert-tér lineáris operátora, nagyon fontos a *sajátértékek módszere*. Először megkeressük a $Tx = \lambda x$ *sajátérték-probléma* (ami egy homogén lineáris egyenlet) nem nulla megoldásainak egy $\{x_k\}$ ortogonális rendszerét. Ha az y vektor $\{x_k\}$ szerinti Fourier-sora konvergál y-hoz, akkor a megoldást $x = \sum_k c_k x_k$ alakban keresve, a $\langle Tx, x_k\rangle = \langle y, x_k\rangle$ összefüggésekből az x_k sajátvektorokhoz tartozó λ_k sajátértékek ismeretében a c_k Fourier-együtthatók meghatározhatók. Ezzel a módszerrel a $Tx = \lambda x + y$ *inhomogén sajátértékprobléma* is kezelhető. Természetesen a módszer használatánál sok matematikai probléma merül fel, például, hogy milyen Hilbert-teret válasszunk, valósak-e a sajátértékek, ortogonálisak-e a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, választhatunk-e valós sajátvektorokat, a sajátvektorokból képezhető-e teljes ortonormált rendszer, a $\sum_k c_k x_k$ sor milyen értelemben konvergens, igaz-e, hogy $T(\sum_k c_k x_k) = \sum_k c_k T x_k$, stb.

Megjegyezzük, hogy néha T helyett más, vele kapcsolatban álló operátorhoz tartozó sajátérték-probléma sajátvektorai is jól használhatók.

A kompakt operátorok elmélete lineáris integrálegyenletek esetén közvetlenül lehetővé teszi, hogy a sajátértékek módszerét használjuk. Mivel a differenciáloperátorok inverze gyakran egy integráloperátor, a kompakt operátorok elmélete közvetve használható lineáris differenciálegyenletek vizsgálatára is. Az inverz operátor sajátértékei az eredeti operátor sajátértékeinek reciprokai, ugyanazokkal a sajátvektorokkal.

→ **8.3. Feladat [6].** Ha T normális operátor, hogyan használható a szorzat előállítása a $Tx = \lambda x + y$ egyenlet megoldására?

8.4. Definíció. Legyenek X és Y normált terek. Egy $T \in X \to Y$ operátort *kompakt*nak nevezünk, ha korlátos halmaz képének a lezártja kompakt. Másként fogalmazva, ha minden korlátos sorozat képéből kiválasztható konvergens részsorozat. Nyilván egy lineáris operátor pontosan akkor kompakt, ha a (zárt vagy nyílt) egységgömb képének lezártja kompakt, és kompakt lineáris operátor korlátos. A kompakt operátorokat szokás teljesen folytonosnak is nevezni.

A kompakt operátorok tulajdonságai állnak a legközelebb a véges dimenziós terek operátorainak tulajdonságaihoz. Látni fogjuk, hogy a kompakt operátorok „kicsik": ha $T \in \mathcal{L}(X;X)$ kompakt operátor, akkor az $S = \mathbb{I} - T$ operátor viselkedése csak egy véges dimenziós altéren tér el lényegesen az identikus operátortól. S vizsgálata segít T spektrumának vizsgálatában, ugyanis ha $\lambda \neq 0$, akkor $T - \lambda\mathbb{I} = -\lambda(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}T)$, és a zárójelben $\mathbb{I}$ és egy kompakt operátor különbsége áll. A legegyszerűbb tulajdonságok összefoglalása után ennek az operátornak a vizsgálatára térünk rá.

8.5. Tétel. *Legyenek X, Y és Z normált terek. Ekkor*

(1) *ha* $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ *és* $\operatorname{rng}(T)$ *véges dimenziós, akkor* T *kompakt;*

(2) *ha* $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ *kompakt és* $S \in \mathcal{L}(Y;Z)$*, illetve* $S \in \mathcal{L}(Z;X)$*, akkor* ST *illetve* TS *kompakt;*

(3) *ha* X *nem véges dimenziós,* $T \in \mathcal{L}(X;X)$ *és* T *kompakt, akkor* $0 \in \sigma(T)$*;*

(4) *ha* Y *teljes, akkor a kompakt operátorok zárt alteret alkotnak* $\mathcal{L}(X;Y)$*-ban.*

Bizonyítás. (1) és (2) nyilvánvaló. (3) abból következik, hogy $0 \notin \sigma(T)$ esetén TT^{-1} kompaktsága miatt a zárt egységgömb kompakt lenne. (4)-hez könnyű látni, hogy a kompakt operátorok köréből nem vezet ki a skalárral való szorzás. Ha T és S kompakt operátorok, akkor egy korlátos x_n sorozatnak kiválasztva egy részsorozatát, amelynek T általi képe konvergens, majd az így kapott részsorozatnak egy olyan részsorozatát, amelynek S általi képe konvergens, kapjuk, hogy $T+S$ kompakt, így a kompakt operátorok alteret alkotnak. Legyen $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ ennek az altérnek a lezártjában, válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t, és legyen U a nyílt egységgömb X-ben. Van olyan $S \in \mathcal{L}(X;Y)$ kompakt operátor, amelyre $\|S-T\| < \varepsilon$. Mivel $S(U)$ teljesen korlátos, léteznek $x_1, \dots, x_n$ pontok úgy, hogy $S(U)$-t lefedik az Sx_i középpontú ε sugarú zárt gömbök. Ebből $T(U)$-t lefedik a 3ε sugarú Tx_i középpontú zárt gömbök, tehát $T(U)$ teljesen korlátos.

→ **8.6. Feladat [5].** Kompakt-e egy Banach-téren az $\mathbb{I}$ identikus operátor?

8.7. Feladat [8]. Legyen X szeparábilis Hilbert-tér, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormált bázis X-ben, Y Banach-tér, $T\colon X \to Y$ lineáris operátor. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 < \infty$. Mutassuk meg, hogy T kompakt operátor.

8.8. Feladat [6]. Legyen $T \in \mathcal{L}(X;X)$ az X végtelen dimenziós Banach-tér egy kompakt operátora. Mutassuk meg, hogy nem reguláris.

8.9. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy a $(Tx)(t) = tx(t)$ összefüggéssel definiált operátor nem kompakt $\mathcal{C}[0,1]$-en.

8.10. Feladat [10]. Legyen $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ az X végtelen dimenziós Banach-tér egy kompakt leképezése az Y normált térbe. Mutassuk meg, hogy van olyan normált x_n sorozat X-ben, amelyre $Tx_n \to 0$.

Megoldás. Legyen y_n egy majdnem ortogonális sorozat. Részsorozatra áttérve feltehető, hogy Ty_n konvergens, amiből $T(y_{n+1} - y_n) \to 0$. Legyen alkalmas α_n-re $x_n = \alpha_n(y_{n+1} - y_n)$.

8.11. Feladat [10]. Legyen X szeparábilis Hilbert-tér az x_n teljes ortonormált rendszerrel, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ az X egy kompakt leképezése az Y normált térbe. Mutassuk meg, hogy $Tx_n \to 0$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $Tx_{n_j} \to y \neq 0$. Legyen $y_k = \sum_{j=1}^{k} x_{n_j}/j$. Az y_k sorozat korlátos, de

$$\|Ty_k\| = \Big\|T\Big(\sum_{j=1}^{k} x_{n_j}/j\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{j=1}^{k} y/j - \sum_{j=1}^{k}(y - Tx_{n_j})/j\Big\| \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(\|b\| - \|b - Tx_{n_j}\| \to \infty,$$

ha $k \to \infty$.

∗ **8.12. Riesz-lemma.** *Legyen X Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$ kompakt operátor, $S = \mathbb{I} - T$. Ekkor S nulltere véges dimenziós,* $\operatorname{rng}(S)$ *zárt és véges kodimenziós.*

Emlékeztetünk rá, hogy egy lineáris altér kodimenziója a minimális elemszáma egy olyan vektorrendszernek, amellyel együtt az egész teret kifeszíti, ∞, ha nincs ilyen véges vektorrendszer.

Bizonyítás. Az $N = \ker(S)$ nulltéren $Tx = x$, így N zárt egységgömbjének T általi képe önmaga. Mivel N zárt, zárt egységgömbje zárt X-ben is. Mivel T kompakt, N egységgömbje kompakt, így N véges dimenziós.

Legyen $y \in \overline{S(X)}$. Ekkor létezik olyan $x_n \in X$ sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = y.$$

Megmutatjuk, hogy $d(x,y) = \|x-y\|$ jelöléssel $d(x_n, N)$ korlátos sorozat. Ha nem így lenne, akkor részsorozatra áttérve feltehetnénk, hogy $d(x_n,N) \to \infty$. Legyen $z_n = x_n/d(x_n,N)$; nyilván $d(z_n,N) = 1$, tehát van olyan $t_n \in N$, hogy $\|z_n - t_n\| \le 2$. Legyen $s_n = z_n - t_n$, és vegyük észre, hogy definíció szerint $S(s_n) = S(z_n) = S(x_n)/d(x_n,N) \to 0$, de $d(s_n,N) = 1$. A T kompaktsága miatt létezik olyan s_{n_k} részsorozat, amelyre $T(s_{n_k})$ egy $a \in X$ elemhez konvergál. De $s_n - T(s_n) \to 0$ miatt ekkor $s_{n_k} \to a$, és így $d(a,N) = 1$. Másrészt $S(a) = \lim_{k\to\infty} S(s_{n_k}) = 0$, és ez ellentmond N definíciójának.

Megmutattuk tehát, hogy $d(x_n,N)$ korlátos valamely K korláttal. Létezik olyan x'_n sorozat, hogy $x_n - x'_n \in N$ és $\|x'_n\| \le K+1$. Mivel $S(x_n) = S(x'_n)$, feltehetjük, hogy x_n korlátos. Mivel T kompakt, van olyan x_{n_k} részsorozat, amelyre $T(x_{n_k})$ konvergál egy $b \in X$ elemhez. Mivel $x_{n_k} - T(x_{n_k}) = S(x_{n_k})$ az y-hoz konvergál, x_{n_k} konvergál $y+b \in X$-hez, és így S folytonossága miatt $S(y+b) = y$, tehát $y \in S(X)$.

Ha $S(X)$ végtelen kodimenziós volna, akkor teljes indukcióval választhatnánk olyan $y_1, y_2, \dots$ sorozatot, amelyre y_n ortogonális majdnem ortogonális az $S(X)$ és $y_1,\dots,y_{n-1}$ által kifeszített Y_{n-1} zárt altérre, azaz $\|y_n\| = 1$ és $d(y_n, Y_{n-1}) \ge 1/2$. De ebből $\|T(y_n) - T(y_k)\| = \|y_n - S(y_n) - y_k + S(y_k)\| \ge d(y_n, Y_{n-1}) \ge 1/2$, ha $n > k > 0$, ami ellentmond T kompaktságának.

∗ **8.13. Tétel.** *Legyen X Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$ kompakt operátor, $S = \mathbb{I} - T$, és indukcióval $N_1 = S^{-1}(0)$, $X_1 = S(X)$, $N_k = S^{-1}(N_{k-1})$, $X_k = S(X_{k-1})$, ha $k > 1$. Ekkor*

(1) *N_k véges dimenziós alterek növekvő sorozata, X_k pedig véges kodimenziós alterek csökkenő sorozata;*

(2) *létezik egy olyan legkisebb n természetes szám, hogy $N_{k+1} = N_k$, ha $k \ge n$;*

(3) *$k \ge n$ esetén $X_{k+1} = X_k$ is teljesül, és $N_n + X_n = X$, $N_n \cap X_n = \{0\}$, valamint S megszorítása X_n-re lineáris homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval kapjuk, hogy S^k felírható $\mathbb{I} - T_k$ alakban, ahol T_k kompakt operátor. Mivel $N_k = \ker(S^k)$ és $X_k = \operatorname{rng}(S^k)$, (1) a Riesz-lemmából következik. (2) bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy $N_k \ne N_{k+1}$ minden k-ra. Ekkor választhatunk olyan x_k, $k > 1$ ortogonális majdnem ortogonális sorozatot, amelyre $x_k \in N_k$, $\|x_k\| = 1$, de d-vel jelölve a távolságot, $d(x_k, N_{k-1}) \ge 1/2$. Ebből viszont $\|T(x_k) - T(x_j)\| = \|x_k - S(x_k) - x_j + S(x_j)\| \ge d(x_k, N_{k-1}) \ge 1/2$, ha $k > j > 1$, ami ellentmond T kompaktságának. Hasonlóan, ha $X_k \ne X_{k+1}$ minden k-ra, akkor választhatunk olyan x_k sorozatot, amelyre $x_k \in X_k$, $\|x_k\| = 1$, és $d(x_k, X_{k+1}) \ge 1/2$. Ebből

$\|T(x_k) - T(x_j)\| = \|x_k - S(x_k) - x_j + S(x_j)\| \geq d(x_k, X_{k+1}) \geq 1/2$, ha $j > k > 0$, ami ellentmond T kompaktságának. Így létezik egy legkisebb m, hogy $k \geq m$ esetén $X_{k+1} = X_k$.

Megmutatjuk, hogy $N_n \cap X_n = \{0\}$. Ha y a metszetben van, akkor van olyan x, hogy $S^n(x) = y$. Másrészt, $S^n(y) = 0$, tehát $S^{2n}(x) = 0$, azaz $x \in N_{2n} = N_n$, amiből $y = S^n(x) = 0$.

Térjünk vissza annak bizonyítására, hogy $m \leq n$. Ha $m > n$ lenne, akkor választhatnánk olyan $y \in X_{m-1} \subset X_n$ elemet, amelyre $y \notin X_m$. Mivel $S(y) \in X_m = S(X_m)$, van olyan $x \in X_m$, amelyre $S(x) = S(y)$, más szóval $x - y \in N_1 \subset N_n$. Mivel azonban $x - y \in X_n$ is teljesül, $x = y$, ami ellentmondás.

Végül, ha $x \in X$, akkor $S^n(x) \in X_n$, így van olyan $y \in X_n$, amire $S^n(y) = S^n(x)$, tehát $x - y \in N_n$. Mivel $N_1 \subset N_n$, az S megszorítása X_n-re kölcsönösen egyértelmű, és a Riesz-lemma szerint X_n zárt, így Banach tétele szerint a megszorítás inverze korlátos.

8.14. A Riesz-elmélet főtétele. *Legyen $T \in \mathcal{L}(X;X)$ kompakt operátor, ahol X komplex Banach-tér. Ekkor $\sigma(T)$ megszámlálható, minden nem nulla eleme sajátérték, és legfeljebb egy torlódási pontja van, a nulla. Minden $\lambda \neq 0$ sajátértékre X egyértelműen előállítható $X = N_\lambda + X_\lambda$ alakban, ahol*

(1) *X_λ zárt, N_λ véges dimenziós, $N_\lambda \cap X_\lambda = \{0\}$;*

(2) *$T(X_\lambda) \subset X_\lambda$ és $T - \lambda\mathbb{I}$ megszorítása X_λ-ra lineáris homeomorfizmusa X_λ-nak önmagára;*

(3) *$T(N_\lambda) \subset N_\lambda$ és van olyan n természetes szám, hogy $(T - \lambda\mathbb{I})^n$ megszorítása N_λ-ra 0.*

A λ sajátértékhez tartozó sajátaltér része N_λ-nak. Ha λ és μ két, egymástól és nullától különböző sajátérték, akkor $N_\mu \subset X_\lambda$.

$*$ **Bizonyítás.** Ha $\lambda \neq 0$, akkor $T - \lambda\mathbb{I} = -\lambda(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}T)$, és $\frac{1}{\lambda}T$ kompakt, így alkalmazhatjuk az előző tételt a zárójelben álló operátorra. Ha λ nem sajátérték, akkor $n = 0$, így $T - \lambda\mathbb{I}$ homeomorfizmus, azaz $\lambda \notin \sigma(T)$. Ha λ sajátérték, akkor az előző tétel jelöléseivel, $N_\lambda = N_n$ és $X_\lambda = X_n$ adja a megfelelő felbontást, és az itteni n ugyanaz, mint az ottani. Az is világos, hogy a λ-hoz tartozó sajátaltér része N_λ-nak. Meg kell mutatnunk, hogy a felbontás egyértelmű. Legyen $X = N' + X'$ egy másik felbontás, és $S = T - \lambda\mathbb{I}$. Minden $x \in N'$ felírható $x = y + z$ alakban, ahol $y \in N_\lambda$ és $z \in X_\lambda$. Létezik olyan $k > 0$, amelyre $S^k(x) = 0$ és $S^k(y) = 0$, tehát $S^k(z) = 0$. Mivel S^k megszorítása X_λ-ra lineáris homeomorfizmus, $z = 0$, és így $x \in N_\lambda$. Hasonlóan adódik, hogy $N_\lambda \subset N'$. Ha most $y + z = x \in X'$, és $y \in N_\lambda$, $z \in X_\lambda$, akkor $S^k(x) = S^k(z)$, tehát $S^k(X') \subset X_\lambda$. Mivel $S(X') = X'$, következik, hogy $X' \subset X_\lambda$, és hasonlóan kapjuk, hogy $X_\lambda \subset X'$.

Az előző tétel jelöléseivel, N_1 egy bázisát kiegészítve N_2 egy bázisává, majd ezt N_3 egy bázisává, stb., az $N_\lambda = N_n$ egy olyan $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bázisát kapjuk, amelyre $Tb_j = \lambda b_j + \sum_{i<j} \alpha_{j,i} b_i$, így a $T - \mu\mathbb{I}$ operátor N_λ-ra való megszorításának mátrixa ebben a bázisban háromszög alakú, és a főátlóban mindenütt $\lambda - \mu$ áll, így determinánsa $(\lambda - \mu)^m$, tehát pontosan akkor nulla, ha $\mu = \lambda$. Így $\mu \neq \lambda$ esetén $T - \mu\mathbb{I}$ megszorítása N_λ-ra invertálható. Mivel $T - \mu\mathbb{I}$ megszorítása X_λ-ra invertálható $\mu = \lambda$ esetén, így annak egy kis környezetében is. Így azt kapjuk, hogy λ izolált pontja a spektrumnak. Ebből következik, hogy a spektrum megszámlálható, és mivel zárt, az is, hogy a sajátértékek csak a nullában torlódhatnak.

8.15. Következmény. *Ha $\lambda \neq 0$, akkor* $\ker(T-\lambda\mathbb{1})$ *véges dimenziós,* $\operatorname{rng}(T-\lambda\mathbb{1})$ *pedig véges kodimenziós, és kodimenziója megegyezik* $\ker(T-\lambda\mathbb{1})$ *dimenziójával.*

∗ **Bizonyítás.** N_λ-ban és X_λ-ban igaz az állítás.

∗ **8.16. Feladat [12].** Legyen X komplex Banach-tér. Bizonyítsuk be, hogy ha a $T \in \mathcal{L}(X;X)$ kompakt operátor $\mu \neq 0$ sajátértékének rendje n, akkor a $\lambda \mapsto (T-\lambda\mathbb{1})^{-1}$ leképezésnek n-ed rendű pólusa van a μ pontban.

∗ **8.17. Feladat: Jordan-normálalak [13].** Bizonyítsuk be, hogy az X véges dimenziós komplex lineáris tér bármely T lineáris operátorához van olyan bázis, amelyben mátrixa *Jordan-normálalak*ú, azaz a főátlóra felfűzött Jordan-blokkokból áll (mindenütt másutt nulla van). Egy *Jordan-blokk*ban a főátlóban ugyanaz a szám áll mindenütt, a főátló elemei felett közvetlenül egyesek állnak, mindenütt másutt nulla. Bizonyítsuk be, hogy a Jordan-normálalak a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

8.18. Tétel. *Legyenek X és Y Hilbert-terek. Egy $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ operátor pontosan akkor kompakt, ha T^* kompakt.*

Bizonyítás. Legyen x_n egy sorozat Y egységgömbjéből. Mivel TT^* kompakt, van olyan x_{n_k} részsorozat, amelyre $TT^*x_{n_k}$ konvergens.

$$\begin{aligned}\|T^*x_n - T^*x_m\|^2 &= \langle T^*(x_n-x_m), T^*(x_n-x_m)\rangle \\ &= \langle TT^*(x_n-x_m), x_n-x_m\rangle \le 2\|TT^*(x_n-x_m)\|\end{aligned}$$

miatt $T^*x_{n_k}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens.

8.19. Fredholm-alternatíva tétel. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ egy kompakt operátor. Ekkor $\lambda \neq 0$ esetén* $\ker(T^*-\overline{\lambda}\mathbb{1})^\perp = \operatorname{rng}(T-\lambda\mathbb{1})$, *és*

(1) *ha $\lambda \notin \sigma(T)$, akkor a $Tx = \lambda x + y$ egyenletnek minden $y \in H$-ra pontosan egy megoldása van;*

(2) *ha $\lambda \in \sigma(T)$, akkor a $Tx = \lambda x + y$ egyenletnek egy $y \in H$-ra pontosan akkor van megoldása, ha y a $T^*x = \overline{\lambda}x$ egyenlet minden megoldására ortogonális.*

Bizonyítás. A tétel a Riesz-lemmából következik. $S = T-\lambda\mathbb{1}$ jelöléssel, az első esetben S invertálható. A második esetben azt kell megmutatnunk, hogy $\operatorname{rng}(S) = \ker(S^*)^\perp$. Mivel mindkettő zárt, ez következik a $\operatorname{rng}(S)^\perp = \ker(S^*)$ összefüggésből.

8.20. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy egy H Hilbert-téren egy $T \in \mathcal{L}(H;H)$ operátor pontosan akkor kompakt, ha véges dimenziós értékkészletű (véges rangú) operátorok sorozatának a határértéke.

8.21. Hilbert–Schmidt-tétel. *Ha H egy komplex szeparábilis Hilbert-tér, és $T \in \mathcal{L}(H;H)$ egy önadjungált kompakt operátor, akkor létezik H-ban a T sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás. Ha λ, μ a T különböző sajátértékei, x és y pedig a λ-hoz, illetve μ-höz tartozó sajátvektorok, akkor

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle = \mu\langle x,y\rangle,$$

ahonnan $\langle x, y\rangle = 0$, így a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek ortogonálisak. Legyen

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots > 0$$

a T nem nulla sajátértékeinek egy sorozatba rendezése. Jelölje G_n a $T - \lambda_n \mathbb{I}$ operátor nullterét, és legyen F_n a $G_1 + \cdots + G_n$ altér ortogonális komplementere. Mivel minden i-re $T(G_i) \subset G_i$, $T(F_n^\perp) \subset F_n^\perp$. Ebből $x \in F_n$, $y \in F_n^\perp$ esetén $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$, így $T(F_n) \subset F_n$. Most legyen $F_\infty = \cap_n F_n$. Nyilván $T(F_\infty) \subset F_\infty$. Jelölje T_∞ a T megszorítását F_∞-re. Ha T_∞ kompakt önadjungált operátornak létezne nem nulla sajátértéke, az ahhoz tartozó sajátvektor benne lenne valamelyik G_n-ben, ami ellentmond F_∞ választásának. Így a spektráltétel, vagy egyszerűbben az $r(T_\infty) = \|T_\infty\|$ összefüggés szerint $T_\infty = 0$. Válasszunk minden n-re egy teljes ortonormált rendszert G_n-ben, és egy teljes ortonormált rendszert F_∞-ben. Ezek egyesítése teljes ortonormált rendszer lesz H-ban, és minden tagja sajátvektor.

Közvetlen bizonyítás is adható, amely nem használja fel a Riesz-elméletet és a spektráltételnél tanultakat: Először megmutatjuk, hogy ha

$$c = \sup_{\|x\|\leq 1} \big|\langle Tx, x\rangle\big|,$$

akkor $c = \|T\|$ és vagy c, vagy $-c$ a T sajátértéke. A $c \leq \|T\|$ egyenlőtlenség triviális, és polarizációval $4\Re\langle Tx, y\rangle \leq c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, amiből $\|x\| = 1$, $y = Tx/\|Tx\|$ helyettesítéssel $\|Tx\| \leq c$ adódik. Válasszunk egy olyan normált elemekből álló x_n sorozatot, amelyre $\big|\langle Tx_n, x_n\rangle\big| \to \|T\|$. Részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$, ahol $\lambda = \|T\|$ vagy $\lambda = -\|T\|$. Innen $0 \leq \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \to 0$. Ismét részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy Tx_n konvergens, amiből a fenti összefüggés szerint $\lambda \neq 0$ esetén x_n is konvergens, $x_n \to x$, és $Tx = \lambda x$. A továbbiakban hasonlóan haladunk, mint az előző bizonyításban. Ha $\lambda_1 = \lambda \neq 0$, $x_1 = x$ és $F_1 = \{x_1\}^\perp$, akkor $T(F_1) \subset F_1$, így a T operátor F_1-re vett T_1 megszorítására ismét alkalmazhatjuk az eddig bizonyítottakat, vesszük az $F_2 = \{x_1, x_2\}^\perp$ alteret, stb. A T kompaktsága miatt bármely $\varepsilon > 0$-ra van olyan n, hogy $\|T_n\| < \varepsilon$. Véges vagy végtelen sok lépés után egy T_∞ operátorhoz jutunk, amelyre $\|T_\infty\| = 0$.

8.22. Fredholm-féle integráloperátorok. A

$$(T_K f)(s) = \int_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

összefüggéssel definiált *Fredholm-féle integráloperátor*okat szeretnénk tanulmányozni. Vizsgáljuk az $\mathbb{L}^2$-tér esetét. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy σ-véges mértéktér, amelyre $\mathbb{L}^2(\mu)$ szeparábilis. *Hilbert–Schmidt-magfüggvény* alatt egy $K \in \mathbb{L}^2(\mu \times \mu)$ függvényt értünk.

8.23. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *T_K minden $f \in \mathbb{L}^2$-re értelmezve van, és $\mathbb{L}^2$-t önmagába leképező kompakt operátor, amelyre*

$$\|T_K\|^2 \leq \int_{X\times X} |K|^2\, d(\mu \times \mu);$$

(2) *$T_K = 0$ pontosan akkor, ha $K = 0$ majdnem mindenütt;*

(3) $T_K^* = T_{K^*}$, *ahol* $K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}$;

(4) T_K *pontosan akkor önadjungált, ha* $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ *majdnem mindenütt;*

(5) *ha* K_1 *és* K_2 *Hilbert–Schmidt-magfüggvények, és*

$$K(s,t) = \int_X K_1(s,r)K_2(r,t)\,d\mu(r),$$

akkor $T_{K_1}T_{K_2} = T_K$.

Bizonyítás. Majdnem minden s-re $t \mapsto K(s,t)$ négyzetesen integrálható, így $t \mapsto K(s,t)f(t)$ integrálható. A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség szerint

$$\left|(T_K f)(s)\right| = \left|\int_X K(s,t)f(t)\,d\mu(t)\right| \le \left(\int_X \left|K(s,t)\right|^2 d\mu(t)\right)^{1/2} \|f\|_2.$$

A Fubini-tétel szerint $T_K f$ mérhető és

$$\int_X \left|(T_K f)(s)\right|^2 d\mu(s) \le \int_X \int_X \left|K(s,t)\right|^2 d\mu(s)\,d\mu(t)\|f\|_2^2.$$

Ebből adódik a becslés T_K normájára.

T_K kompaktságához megmutatjuk, hogy véges dimenziós értékkészletű operátorokkal approximálható. Legyen $\{\varphi_n\}$ egy teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\mu)$-ben. Ekkor $\psi_{n,m}(s,t) = \varphi_n(s)\varphi_m(t)$ egy teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\mu \times \mu)$-ben. Legyen $\varepsilon > 0$. A $K \sim \sum_{n,m} c_{n,m}\psi_{n,m}$ Fourier-sorfejtés egy véges részletösszege olyan $\tilde{K}$ magfüggvényt ad, amelyre $T_{\tilde{K}}$ véges dimenziós értékkészletű, és $\|K - \tilde{K}\|_2 < \varepsilon$, így $\|T_K - T_{\tilde{K}}\| < \varepsilon$.

(2) abból következik, hogy a Fubini-tétel szerint $\langle K, \psi_{n,m}\rangle = 0$ minden n-re és m-re. (3) triviális számolással adódik. (4) a (3)-ból következik. (5) a Fubini-tétel segítségével kiszámolható.

→ **8.24. Feladat [8].** Ha a Fredholm-féle integráloperátor magfüggvénye

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(s)Q_j(t)$$

alakú, akkor *szinguláris magfüggvény*ről beszélünk. Négyzetesen integrálható függvényekből felépülő szinguláris magfüggvény esetén mutassuk meg, hogy az $x = T_K x + y$ egyenlet megoldása $x = \sum_{j=1}^n q_j P_j + y$ alakú, ahol az együtthatók egy $q_j = \sum_{k=1}^n a_{kj}q_k + b_j$ alakú egyenletrendszer megoldásaiként kaphatók.

→ **8.25. Feladat [8].** Bizonyítsuk be az előző feladat megfelelőjét $\mathcal{C}[a,b]$-beli függvényekre.

→ **8.26. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi integrálegyenletek folytonos megoldásait:

(1) $x(t) = t + \lambda \int_0^1 t^2 s x(s)\,ds$;

(2) $x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 ts^2 x(s)\,ds$;

(3) $x(t) = t^3 + \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s)\,ds$;

(4) $x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds$;

(5) $x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \cos \pi(t-s) x(s)\,ds$.

→ **8.27. Feladat [7].** Határozzuk meg az

$$f(t) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(t-s) f(s)\,ds$$

integrálegyenlet összes $f \in \mathcal{C}[0, \pi/2]$ megoldását.

→ **8.28. Feladat [7].** Milyen $g \in \mathcal{C}[0, \pi]$ függvény esetén lesz az

$$f(t) - \int_0^{\pi} \sin(t+s) f(s)\,ds = g(t)$$

integrálegyenlet megoldható a $\mathcal{C}[0, \pi]$ térben?

→ **8.29. Feladat [8].** Milyen $\lambda \in \mathbb{R}$ számokra lesz az

$$f(t) - \lambda \int_a^b e^{t-s} f(s)\,ds = 1$$

integrálegyenlet megoldható az $\mathbb{L}^p[a, b]$, $1 \le p < \infty$ térben?

8.30. Feladat [9]. Adjunk példát $\mathbb{l}^2$ olyan kompakt operátorára, amelynek értékkészlete nem véges dimenziós.

Megoldás. Válasszuk úgy a leképezést, hogy az egységgömb képe a

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \colon |\xi_n| \le 1/n\}$$

Hilbert-kocka részhalmaza legyen.)

8.31. Feladat [9]. Legyen T a $\mathbb{l}^p$, $1 \le p \le \infty$ téren a $t = (t_1, t_2, \ldots)$ korlátos sorozattal való szorzás operátora. Bizonyítsuk be, hogy T pontosan akkor kompakt, ha t nullsorozat.

8.32. Feladat [7]. Mikor lesz az előző feladatban szereplő operátor képtere zárt?

8.33. Feladat [9]. Legyen $\Delta = \{(s,t) \colon a \le t \le s \le b\}$, $K \in \mathcal{C}(\Delta)$ és

$$(T_K f)(s) = \int_a^s K(s,t) f(t)\,dt, \qquad f \in \mathcal{C}[a, b]$$

a K-hoz tartozó *Volterra-féle integráloperátor*. Mutassuk meg, hogy T_K spektrálsugara nulla. Mit mondhatunk az inhomogén sajátértékprobléma megoldhatóságáról?

8.34. Feladat [10]. Bizonyítsuk be az előző feladat megfelelőjét a $K \in \mathbb{L}^2(\Delta)$, $f \in \mathbb{L}^2[a,b]$ esetre, azaz négyzetesen integrálható magú Volterra-féle integráloperátor esetére.

Megoldás. Lásd Losonczi [105], 27. o.

8.35. Feladat [9]. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{C}[a,b]$ téren a $K \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$ magfüggvényhez tartozó Fredholm-féle integráloperátor kompakt.

$*$ **8.36. Feladat [10].** Legyen G az $\mathbb{R}^n$ tér egy korlátos tartománya. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathcal{C}^{m+1}(\overline{G})$ tér beágyazása a $\mathcal{C}^m(\overline{G})$ térbe kompakt.

$*$ **8.37. Tétel.** *Legyen $K\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény úgy, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|K(x,y)\bigr|\,dx \le C \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \bigl|K(x,y)\bigr|\,dy \le C_*$$

valamely $C, C_* \in \mathbb{R}$-re. Ha $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), és $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$, akkor a

$$(T_K f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\,dy$$

integrál minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik és $T_K f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$, továbbá $\|T_K f\|_p \le C^{1/p} C_*^{1/q} \|f\|_p$.

Bizonyítás. A $p = \infty$ eset triviális. Ha $1 < p < \infty$, a Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva az

$$y \mapsto \bigl|K(x,y)\bigr|^{1/q} \quad \text{és} \quad y \mapsto \bigl|K(x,y)\bigr|^{1/p} \bigl|f(y)\bigr|$$

függvényekre,

$$\begin{aligned} \bigl|(T_K f)(x)\bigr| &\le \left(\int \bigl|K(x,y)\bigr|\,dy\right)^{1/q} \left(\int \bigl|K(x,y)\bigr| \bigl|f(y)\bigr|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &\le C_*^{1/q} \left(\int \bigl|K(x,y)\bigr| \bigl|f(y)\bigr|^p\,dy\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Innen a Fubini-tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \bigl|(T_K f)(x)\bigr|^p\,dx &\le \int C_*^{p/q} \int \bigl|K(x,y)\bigr| \bigl|f(y)\bigr|^p\,dy\,dx \\ &\le C C_*^{p/q} \int \bigl|f(y)\bigr|^p\,dy = C C_*^{p/q} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Végül a $p = 1$ eset közvetlenül következik a Fubini-tételből.

$*$ **8.38. Feladat [13].** Bizonyítsuk be a Fredholm-operátorokra Hilbert–Schmidt-magfüggvény esetén bizonyított tétel megfelelőjét $\|T_K\|^2 \le C C_*$ becsléssel, ha K olyan mérhető magfüggvény, amelyre véges C, C_* konstansokkal

$$\int_X \bigl|K(s,t)\bigr|\,d\mu(t) \le C, \quad \text{ha} \quad s \in X$$

és

$$\int_X \big|K(s,t)\big|\,d\mu(s) \le C_*, \quad \text{ha} \quad t \in X.$$

∗ **8.39. Feladat [13].** Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $H \in \mathcal{C}(\overline{G} \times \overline{G})$ és

$$K(s,t) = \frac{H(s,t)}{|s-t|^\alpha}, \quad \text{ha} \quad s,t \in G$$

egy *gyenge szingularitású magfüggvény.* Milyen α esetén lesz K Hilbert–Schmidt-magfüggvény? Milyen α esetén tesz eleget K az előző feladat feltételeinek?

∗ **8.40. Lemma.** *Legyen X egy metrikus tér, T pedig X egy zárt részhalmazának folytonos leképezése X egy kompakt részhalmazába. Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan x_ε, hogy*

$$d(T(x_\varepsilon), x_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

Ekkor T-nek van fixpontja.

Az (1) feltételnek eleget tévő x_ε pontokat a T leképezés *ε-fixpont*jainak nevezzük.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T az F zárt részhalmazt a K kompakt halmazba képezi le. Mivel $T(x_\varepsilon) \in K$, feltehetjük, hogy valamely $\varepsilon_n \to 0$ sorozatra $T(x_{\varepsilon_n}) \to x \in K$. Az (1) feltétel szerint $x_{\varepsilon_n} \to x$, így $x \in F$. Tehát $T(x)$ definiálva van, és $T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_n}) = \lim_{n\to\infty} T(x_{\varepsilon_n}) = x$.

∗ **8.41. Lemma: Schauder-projekció.** *Ha K az X normált tér kompakt részhalmaza és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan Y véges részhalmaza K-nak és P folytonos leképezése K-nak Y konvex burkába, hogy $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$ minden $x \in K$-ra.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $\{y_1, \dots, y_n\} = Y$ véges ε-hálót K-ban. Legyen

$$f_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - y_i\|\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nyilván $f_i(x) \neq 0$ pontosan akkor, ha $\|x - y_i\| < \varepsilon$. Így minden $x \in K$-ra valamelyik $f_i(x)$ nem nulla. Legyen

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(x) y_i}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in K.$$

Nyilván P folytonos, és mivel $P(x)$ az x-hez ε-nál közelebb lévő pontok konvex kombinációja, $\big\|P(x) - x\big\| < \varepsilon$.

∗ **8.42. Schauder második fixponttétele.** *Legyen C az X normált tér egy nem üres konvex részhalmaza. Legyen T a C egy folytonos leképezése egy $K \subset C$ kompakt halmazba. Ekkor T-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. Tekintsük $n = 1, 2, \dots$-re a $P_n \circ T$ leképezést, ahol P_n az előző lemma szerint $\varepsilon = 1/n$-hez tartozó leképezés. Mivel $Y \subset K \subset C$, az Y halmaz konvex burka is része C-nek. Mivel Y konvex burka véges dimenziós kompakt konvex halmaz és $P_n \circ T$ ezt folytonosan képezi le önmagába, a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik egy x_n fixpontja. A $P_n(T(x_n)) = x_n$ összefüggésből $\big\|T(x_n) - x_n\big\| < 1/n$. Így T-nek van fixpontja.

∗ **8.43. Következmény: Schauder első fixponttétele.** *Egy normált tér bármely nem üres kompakt konvex részhalmaza fixpont-tulajdonságú.*

∗ **8.44. Feladat [9].** Bizonyítsuk be Peano tételét Schauder második fixponttétele segítségével.

III. Vektoranalízis

Mintegy négy éve azt vettem észre, hogy a modern matematika több tétele és konstrukciója az alábbi fejlődésen ment keresztül, és talán egy általános elvről beszélhetünk. Történetileg először bizonyos természetes objektumokat (például tereket) ismertünk meg, majd bizonyos „absztrakt objektumokat" fedeztünk fel, vagy kényszerültünk bevezetni. Végül, nagy erőfeszítések árán ragyogó elmék bebizonyították, hogy ezek az absztrakt objektumok „egyszerű" alterei a jól ismert tereknek, sőt néhány esetben izomorfak a klasszikus objektumokkal. Minél természetesebbek voltak ezek a terek, annál nehezebbnek bizonyult a beágyazási tétel bizonyítása.

Krysztof Maurin (1982)

Ez a fejezet négy paragrafusból áll. Az első a differenciálszámítással foglalkozik. A második a differenciálgeometria legelemibb kérdéseit tárgyalja. A haramdik a görbe menti integrálást tárgyalja a Stieltjes-integrálra alapozva, és egyúttal alapokat szolgáltatva a komplex függvénytan tárgyalásához is. A negyedik a vektoranalízis klasszikus eredményeinek, a divergencia-tételnek, Green és Stokes tételének bizonyítása után differenciálformák integrálásával foglalkozik, és a Poincaré–Stokes-tételig jut el. Néhány megjegyzésben igyekszem utalni a kapcsolódó differenciálgeometriai és algebrai topológiai fogalmakra.

9
Differenciálszámítás

A differenciálás linearizálás.

Népköltészet

Figyelemre méltó, hogy a jelölés megkönnyíti a felfedezést: a legcsodálatosabban csökkenti az értelem munkáját.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

9.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek $\mathbb{K}$ felett, $G \subset X$, $f\colon G \to Y$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható* vagy *Fréchet-differenciálható* vagy *F-differenciálható* az x pontban, ha x belső pontja G-nek, és van olyan $T\colon X \to Y$ folytonos lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

Világos, hogy ha f differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is.

Ha $h \in X$, akkor f-et az x pontban a h *irány mentén differenciálható*nak nevezzük, ha $t \mapsto f(x+th)$ értelmezve van a 0 egy környezetében, és létezik a

$$\delta f(x;h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

határérték, az f függvény x pontbeli h *iránymenti deriváltja* vagy *variációja*. Ha $h \mapsto \delta f(x;h)$ folytonos lineáris leképezés, amely az egész X-en értelmezve van, akkor f-et az x pontban *gyengén differenciálható*nak vagy *Gâteaux-differenciálható*nak vagy *G-differenciálható*nak nevezzük, ezt a leképezést pedig $f'(x)$-el jelöljük, és az f függvény x pontbeli *gyenge differenciál*jának vagy *Gâteaux-differenciál*jának nevezzük.

Világos, hogy a gyenge differenciál egyértelmű, mert az iránymenti deriváltak egyértelműek. A definícióból közvetlenül következik, hogy ha f differenciálható x-ben, akkor

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = Th$$

minden $h \in X$-re, így T egyértelműen meghatározott, f gyengén differenciálható x-ben, és $T = f'(x)$. Ekkor $f'(x)$-et az f függvény x-beli *differenciál*jának nevezzük.

Ha $X = \mathbb{K}$, akkor az f függvény x-beli differenciálhatósága ekvivalens a

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték, az f függvény x pontbeli *derivált*jának létezésével, és

$$f'(x)h = hc \quad \text{minden } h \in \mathbb{K}\text{-ra.}$$

A deriváltat is $f'(x)$-el szokás jelölni. Valós változós függvények esetén a

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{illetve} \quad \lim_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határértékekkel értelmezett *jobb oldali derivált* és *bal oldali derivált* is használatosak. Ha zárt intervallumon differenciálható függvényről beszélünk, akkor a végpontokban mindig féloldali deriváltakat értünk.

Ha $Y=\mathbb{K}$, és X Hilbert-tér, akkor van olyan

$$\operatorname{grad} f(x)\in X,$$

az f *gradiens*e, amelyre

$$f'(x)h=\langle h, \operatorname{grad} f(x)\rangle \quad \text{minden } h\in X\text{-re.}$$

Az iránymenti deriváltak, és így a gyenge differenciál, általában könnyen számíthatók. A gyenge differenciál jelentősége az, hogy folytonosságából – mint látni fogjuk – a differenciálhatóságra következtethetünk.

Az itt definiált fogalmak nem változnak, ha a normákat ekvivalens normákkal helyettesítjük.

Ha f differenciálható G-n és $f'(x)=g(x)$ minden $x\in G$-re, akkor azt is mondjuk, hogy f a g *primitív függvény*e G-n. (Az $f=\int g$ jelölés is használatos, ezt mi nem használjuk.)

A legegyszerűbb példa differenciálható függvényre egy konstans függvény, amelynek differenciálja nulla, vagy egy $f\colon X\to Y$ folytonos lineáris függvény, amelynek differenciálfüggvénye konstans: $f'(x)=f$ minden $x\in X$-re.

9.2. Középérték-tételek valós függvényekre. A valós változós, valós értékű függvényekre tanult tételek közül az egyik legfontosabb *Cauchy középérték tétel*e: ha $-\infty<a<b<\infty$, $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek $]a,b[$-n differenciálhatóak, akkor van olyan $\xi\in]a,b[$, amelyre

$$(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi).$$

A bizonyítás abban áll, hogy észrevesszük, a

$$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$$

függvény az a és b pontokban ugyanazt az értéket veszi fel, és így van olyan $\xi\in]a,b[$ pont, ahol lokális szélsőértéke van, és itt $h'(\xi)=0$. (Mi itt a lokális szélsőértékekkel később foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy hasonlóan bizonyítható *Darboux tétele*, mely szerint ha $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ differenciálható, akkor a derivált minden $f'(a)$ és $f'(b)$ közötti értéket felvesz: itt egy α-ra $g(x)=f(x)-\alpha x$ lokális szélsőértékhelyén lesz $f'(\xi)=\alpha$.)

A Cauchy-féle középérték-tétel következményeit is gyakran használjuk: *Lagrange középérték tétel*e a $g(x)=x$ eset, a *Rolle-tétel* pedig a Lagrange-tétel azon speciális esete, amikor $f(a)=f(b)$. A középérték-tételekre támaszkodik a valós analízis számos fontos eredményének bizonyítása, például, hogy egy $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor

és csak akkor monoton növekedő, illetve csökkenő, ha $f' \geq 0$, illetve $f' \leq 0$; akkor és csak akkor konvex, illetve konkáv, ha f' monoton növekedő, illetve monoton csökkenő. Talán a legfontosabb alkalmazás a *L'Hospital-szabály*: ha $f, g:]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálhatóak, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$, $\lim_{x \downarrow a} f'(x)/g'(x) = A$, továbbá $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \downarrow a} g(x)$ vagy $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \infty$, akkor $\lim_{x \downarrow a} f(x)/g(x) = A$.

A középérték-tételek nem maradnak érvényben már valós változós, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$-beli értékű függvényekre sem, például az $x \mapsto \exp(ix)$ függvényre $[0, 2\pi]$-n nem teljesül a Rolle-tétel állítása. Általánosabb esetben egy egyenlőtlenség veszi át a középérték-tételek szerepét:

9.3. Középérték-egyenlőtlenség. *Legyenek X és Y normált terek $\mathbb{K}$ felett. Ha f az X normált tér egy, az x és $x + h$ pontokat összekötő $\{x + th : 0 \leq t \leq 1\}$ zárt szakaszt tartalmazó részhalmazának a leképezése az Y normált térbe, amelynek a zárt szakaszra vett megszorítása folytonos, az $\{x + th : 0 < t < 1\}$ nyílt szakasz minden pontjában létezik a h irány menti derivált, $c \in Y$ tetszőleges, akkor*

$$\big\|f(x + h) - f(x) - c\big\| \leq \sup_{0<t<1} \big\|\delta f(x + th; h) - c\big\|.$$

A tételt gyakran $c = 0$ vagy $c = \delta f(x; h)$ választással alkalmazzuk, gyakran a $\big\|\delta f(y; h)\big\| \leq \big\|f'(y)\big\|\|h\|$ illetve $\big\|\delta f(y; h) - \delta f(x; h)\big\| \leq \big\|f'(y) - f'(x)\big\|\|h\|$ becsléssel együtt.

Bizonyítás. A $g(t) = f(x + th) - tc$ jelöléssel, $g'(t) = \delta f(x + th; h) - c$, így a jobb oldali szuprémum $m = \sup_{0<t<1} \big\|g'(t)\big\|$, és azt kell megmutatnunk, hogy $\big\|g(1) - g(0)\big\| \leq m$, ha $m < \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $M > m$. Ha τ az

$$S = \Big\{0 \leq t \leq 1 : \big\|g(t) - g(0)\big\| \leq \varepsilon + Mt\Big\}$$

halmaz szuprémuma, akkor g folytonossága miatt $\tau > 0$ és $\tau \in S$. Ha $\tau < 1$ lenne, akkor a τ egy környezetéből vett $t > \tau$-ra $\big\|g(t) - g(\tau)\big\| < M(t - \tau)$, ami ellentmond τ maximális voltának. Így $\tau = 1$. Végül $\varepsilon \downarrow 0$, $M \downarrow m$ határátmenettel kapjuk az állítást.

9.4. Következmény. *Ha egy tartományon F_1 és F_2 az f primitív függvényei, akkor $F_1 - F_2$ állandó.*

Bizonyítás. $F = F_1 - F_2$ deriváltja nulla, így a középérték-egyenlőtlenség szerint lokálisan állandó. Azon pontok halmaza, ahol egy adott értéket vesz fel, nyílt és zárt.

$*$ **9.5. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy ha H Hilbert-tér, $f : [a, b] \to H$ folytonos, és $]a, b[$-n differenciálható, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, hogy $\big\|f(b) - f(a)\big\|^2 = \big\langle f(b) - f(a), f'(\xi)(b - a)\big\rangle$.

$*$ **9.6. Feladat [8].** Vezessük le a középérték-egyenlőtlenséget a Lagrange-féle középérték-tételből a Hahn–Banach-tétel segítségével.

9.7. Tétel. *Legyenek X és Y normált terek, $G \subset X$, $f : G \to Y$, és tegyük fel, hogy az x pont valamely környezetében f gyengén differenciálható, és f' folytonos az x pontban. Ekkor f differenciálható az x pontban.*

Bizonyítás. A középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\big\|f(x+h)-f(x)-f'(x)h\big\| \le \sup_{0\le t\le 1}\big\|f'(x+th)-f'(x)\big\|\|h\| = r(h)\|h\|,$$

és $r(h)\to 0$, ha $h\to 0$.

9.8. A differenciálás linearitása. *Ha az f és g függvények az X normált tér x pontjának egy-egy környezetét egy másik normált térbe leképező függvények, amelyek differenciálhatóak x-ben, α és β skalárok, akkor $\alpha f+\beta g$ is differenciálható x-ben, és*

$$(\alpha f+\beta g)'(x) = \alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

Bizonyítás. Következik a definícióból.

9.9. Láncszabály. *Ha f az X normált tér x pontjának egy környezetét képezi le az Y normált tér $y=f(x)$ pontjának egy környezetébe, g ezen környezetet egy harmadik normált térbe leképező függvény, f differenciálható x-ben és g differenciálható y-ban, akkor*

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Bizonyítás. Feltevésünk szerint

$$g(y+k)-g(y) = g'(y)k+\|k\|s(k),$$

ahol $s(0)=0$ és s folytonos a nullában. Legyen

$$k = f(x+h)-f(x) = f'(x)h+\|h\|r(h),$$

ahol $r(0)=0$ és r folytonos a nullában. Ekkor

$$g(f(x+h))-g(f(x)) = g(y+k)-g(y) = g'(y)f'(x)h+\|h\|t(h),$$

ahol $t(0)=0$ és egyébként

$$t(h) = g'(y)r(h)+\frac{\|k\|}{\|h\|}s(k).$$

Mivel $h\to 0$ esetén $k\to 0$ és

$$\frac{\|k\|}{\|h\|} \le \big\|f'(x)\big\|+\big\|r(h)\big\|,$$

kapjuk, hogy $t(h)\to 0$, ha $h\to 0$.

9.10. Koordináta-függvények. *Ha $f=(f_1,\dots,f_n)$ az X normált tér x pontjának egy környezetét az $Y=Y_1\times\cdots\times Y_n$ szorzattérbe képező függvény, akkor f pontosan akkor differenciálható az x pontban, ha az f_i koordináta-függvények differenciálhatóak x-ben, és*

$$f'(x)h = (f_1'(x)h,\dots,f_n'(x)h), \quad \text{ha} \quad h\in X.$$

Bizonyítás. A $p_i\colon (y_1,\dots,y_n)\mapsto y_i$ projekció linearitásából és a láncszabályból következik, hogy ha f differenciálható, akkor $f_i=p_i\circ f$ is. Az állítás többi része a definícióból következik.

9.11. Függvénysorozat tagonkénti differenciálása. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér, $G \subset X$ tartomány, $f_n\colon G \to Y$ differenciálható függvények egy sorozata. Ha legalább egy pontban f_n konvergens, és f_n' lokálisan egyenletesen konvergens, akkor az f_n sorozat lokálisan egyenletesen konvergens, és $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ jelöléssel f differenciálható és $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.*

A bizonyítás a valós függvényekre jól ismert mintát követi.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\mathbb{B}_r(a) \subset G$ gömbön az f_n' sorozat konvergenciája egyenletes. Ekkor a középérték-egyenlőtlenségből

$$\begin{aligned}\Big\|f_m(x) - f_n(x) - \big(f_m(a) - f_n(a)\big)\Big\| &\le \|x-a\| \sup_{y\in\mathbb{B}_r(a)} \big\|f_m'(y) - f_n'(y)\big\| \\ &\le r \sup_{y\in\mathbb{B}_r(a)} \big\|f_m'(y) - f_n'(y)\big\|.\end{aligned} \tag{1}$$

Ez azt mutatja, hogy ha f_n a $\mathbb{B}_r(a)$ gömb valamely pontjában konvergens, akkor a középpontban is, és viszont, ha a középpontban konvergens, akkor egyenletesen konvergens $\mathbb{B}_r(a)$-n. Így egyrészt azon $x \in G$ pontok halmaza, ahol f_n konvergens, nyílt és zárt, tehát az egész G, másrészt a konvergencia lokálisan egyenletes. Legyen $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Meg kell mutatnunk, hogy f differenciálható, és $f' = g$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $n, m \ge N$ esetén minden $y \in \mathbb{B}_r(a)$-ra $\big\|f_m'(y) - f_n'(y)\big\| \le \varepsilon$ és $\big\|g(a) - f_n'(a)\big\| \le \varepsilon$ teljesül. Az (1) egyenlőtlenségben $m \to \infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy $n \ge N$ és $x \in \mathbb{B}_r(a)$ esetén

$$\Big\|f(x) - f(a) - \big(f_n(x) - f_n(a)\big)\Big\| \le \varepsilon\|x-a\|.$$

Másrészt minden $n \ge N$-hez van olyan $r' \le r$, hogy $\|x-a\| \le r'$ esetén

$$\big\|f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a)(x-a)\big\| \le \varepsilon\|x-a\|$$

teljesül. Rögzítve egy n-et, azt kapjuk, hogy $\|x-a\| \le r'$ esetén

$$\big\|f(x) - f(a) - g(a)(x-a)\big\| \le 3\varepsilon\|x-a\|.$$

→ **9.12. Feladat [5].** Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$, ha $x \in \mathbb{R}$ függvénysorozatra f_n és f_n' konvergenciáját.

9.13. Parciális deriváltak. Legyen $G \subset X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$, és tegyük fel, hogy X_i és Y normált terek. Az $f\colon G \to Y$ leképezés $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontbeli x_i szerinti *parciális differenciálját*, *parciális gyenge differenciálját*, stb. a

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

parciális leképezés x_i pontban vett differenciáljaként, gyenge differenciáljaként, stb. definiáljuk. A parciális gyenge differenciált $f_{x_i}(x)$-el, $\partial_{x_i} f(x)$-el, vagy $\partial_i f(x)$-el jelöljük.

Világos, hogy ha az X_i-k normált terek, és f differenciálható, gyengén differenciálható, stb. az x pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható, gyengén differenciálható, stb., mert f_{x_i} az $f \circ j_i$ függvény deriváltja, ahol $j_i\colon X_i \to X$ a $j_i(t) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ összefüggéssel definiált injekció.

9.14. Tétel. *Legyenek $X_1, \dots, X_n$ és Y normált terek, $G \subset X_1 \times \dots \times X_n$, $f: G \to Y$. Ha az f_{x_i}, $i = 1, \dots, n$ parciális deriváltak léteznek az $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ pont egy környezetében, és folytonosak x-ben, akkor f differenciálható x-ben, és $h = (h_1, \dots, h_n)$ jelöléssel*

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i.$$

Bizonyítás. Legyen $r(h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i$. Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|h\| \le \delta$, akkor

$$\big\|\partial_i r(h)\big\| = \big\|\partial_i f(x+h) - \partial_i f(x)\big\| \le \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ebből $\|h\| \le \delta$ esetén a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\big\|r(h)\big\| &\le \sum_{i=1}^{n} \big\|r(h_1, \dots, h_i, 0, \dots, 0) - r(h_1, \dots, h_{i-1}, 0, \dots, 0)\big\| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \|h_i\| \le \varepsilon n \|h\|.\end{aligned}$$

9.15. Multilineáris leképezések. Legyenek $X_1, \dots, X_m$ és Y normált terek, és $T: X_1 \times \dots \times X_m \to Y$ egy *m-lineáris* vagy *multilineáris*, azaz minden változójában lineáris leképezés. $T(x_1, x_2, \dots, x_m)$ helyett gyakran csak $Tx_1x_2 \dots x_m$-et írunk. A T *normája*

$$\|T\| = \sup_{\|x_1\| \le 1, \dots, \|x_m\| \le 1} \|Tx_1 \dots x_m\|.$$

Ha az $X_, \dots, X_m$ terek egyike sem $\{0\}$, akkor

$$\|T\| = \sup_{x_1, \dots, x_m \ne 0} \frac{\|Tx_1 \dots x_m\|}{\|x_1\| \cdots \|x_m\|} = \sup_{\|x_1\| = \dots = \|x_m\| = 1} \|Tx_1 \dots x_m\|.$$

Ha $\|T\| < \infty$, akkor T-t *korlátos*nak nevezzük. Nyilván

$$\|Tx_1 \dots x_m\| \le \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_m\|, \quad \text{ha} \quad x_1 \in X_1, \dots x_m \in X_m,$$

és $\|T\|$ a legkisebb ilyen konstans. Az összes korlátos multilineáris leképezések nyilván normált teret alkotnak, amelyet $\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$-nal jelölünk. Egyszerű számolás mutatja, hogy a

$$T \mapsto S, \quad T(x_1, x_2, \dots, x_m) = S(x_1)(x_2, \dots, x_m)$$

összefüggéssel definiált leképezés lineáris izometrikus leképezése az

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$$

térnek az

$$\mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$$

térre.

9.16. Példa. Egy folytonos és multilineáris leképezés differenciálható is, mint az az előző tételből következik.

9.17. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, egy T multilineáris leképezésre a folytonosság, a folytonosság az origóban és a korlátosság ekvivalensek.*

Bizonyítás. Ha T korlátos, akkor a

$$\|Tx_1 \dots x_m - Ty_1 \dots y_m\| \le \|T\| \sum_{i=1}^{m} \|x_i - y_i\| \prod_{j \ne i} \max\{\|x_j\|, \|y_j\|\}$$

egyenlőtlenségből következik T folytonossága. Ha T folytonos az origóban, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $\|x_i\| \le \delta$ esetén $\|Tx_1 \dots x_m\| \le 1$, amiből $\|T\| \le 1/\delta^m$.

9.18. Magasabb deriváltak. Az f'', f''', … *magasabb differenciál*okat és *gyenge differenciál*okat, $f_{xy} = (f_x)_y$, …vagy $\partial_y \partial_x f = \partial_y(\partial_x f)$, …*magasabb parciális differenciál*okat és *gyenge parciális differenciál*okat, valamint a *magasabb derivált*akat indukcióval értelmezzük. Például az X normált tér egy részhalmazát az Y normált térbe képező f függvényt *m-szer differenciálható*nak nevezünk az x pontban, ha az f függvény $m-1$-szer differenciálható az x egy környezetében, és az $f^{(m-1)}$ függvény differenciálható x-ben. Megjegyezzük, hogy az f függvény *m-edik differenciál*ja, illetve *gyenge differenciál*ja az x pontban azzal az $f^{(m)}(x)\colon X^m \to Y$ m-lineáris leképezéssel azonosítható, amelyre

$$f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \cdots h_1 = (f^{(m-1)})'(x) h_m (h_{m-1}, \dots, h_1).$$

Az *m-edik variáció*t is indukcióval, a

$$\delta^m f(x; h_m, h_{m-1}, \dots, h_1) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

határértékként értelmezzük, ha a

$$g(t) = \delta^{m-1} f(x + t h_m; h_{m-1}, \dots, h_1)$$

függvény értelmezve van a nulla egy környezetében.

Megjegyezzük, hogy ha $f^{(m)}(x)$ létezik, akkor $\partial_{h_m} \partial_{h_{m-1}} \dots \partial_{h_1} f(x)$ is és megegyezik $f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \dots h_1$-el, mert felhasználva a határértékképzés linearitását

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(x) h_m h_{m-1} \dots h_1 &= (f^{(m)}(x) h_m) h_{m-1} \dots h_1 \\
&= (\delta f^{(m-1)}(x; h_m)) h_{m-1} \dots h_1 \\
&= \left(\lim_{t \to 0} \frac{f^{(m-1)}(x + t h_m) - f^{(m-1)}(x)}{t} \right) h_{m-1} \dots h_1 \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f^{(m-1)}(x + t h_m) h_{m-1} \dots h_1 - f^{(m-1)}(x) h_{m-1} \dots h_1}{t} \\
&= \delta^m f(x; h_m, h_{m-1} \dots h_1).
\end{aligned}$$

Használni fogjuk az

$$f^{(m)}(x) h^m = f^{(m)}(x) \overbrace{h \cdots h}^{m} \quad \text{és} \quad \delta^m f(x; h) = \delta^m f(x; \overbrace{h, \dots, h}^{m})$$

rövidítéseket és az $f^{(0)}(x) = f(x)$, $\delta^0 f(x; h) = f(x)$ jelölést.

∗ **9.19. Schwarz-tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha az f függvény m-szer differenciálható az x pontban, akkor $f^{(m)}(x)$ szimmetrikus, azaz $h_m, h_{m-1}, \dots, h_1$ bármely permutációjára ugyanazt az értéket veszi fel.*

Bizonyítás. Mivel $f^{(m)}$ és $(f^{(m-2)})''$ azonosíthatók, az $m = 2$ esetből az általános eset teljes indukcióval megkapható. Megmutatjuk, hogy $h, k \to 0$ esetén

$$\frac{\big\|f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - f''(x)hk\big\|}{\big(\|h\| + \|k\|\big)^2}$$

tart nullához. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\big\|f'(y) - f'(0) - f''(0)y\big\| \le \varepsilon\|y\|, \quad \text{ha} \quad \|y\| < 2\delta.$$

Ha $\|h\|, \|k\| \le \delta$, legyen

$$g_k(h) = f(h+k) - f(h) - f(k) + f(0) - f''(0)kh,$$

és vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} g_k'(h) &= f'(h+k) - f'(h) - f''(0)k \\ &= \big(f'(h+k) - f'(0) - f''(0)(h+k)\big) - \big(f'(h) - f'(0) - f''(0)h\big), \end{aligned}$$

amiből

$$\big\|g_k'(h)\big\| \le \varepsilon\|h+k\| + \varepsilon\|h\| \le 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|).$$

Mivel $g_k(0) = 0$, a középérték-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\big\|g_k(h)\big\| \le 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|)\|h\| \le 2\varepsilon\big(\|h\| + \|k\|\big)^2,$$

tehát a határérték nulla. A h és k szerepét felcserélve,

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{\big\|f''(x)kh - f''(x)hk\big\|}{\big(\|h\| + \|k\|\big)^2} = 0,$$

azaz a két bilineáris leképezés különbsége nulla.

9.20. $\mathcal{C}^m$-leképezések. Ha $0 \le m \le \infty$, az f-et $\mathcal{C}^m$*-leképezés*nek nevezzük, ha egy X normált tér egy nyílt részhalmazán van értelmezve, értékei egy Y normált térben vannak, és minden pontban léteznek és folytonosak a differenciálfüggvényei m-ed rendig bezárólag. Ha f kölcsönösen egyértelmű és f^{-1} is $\mathcal{C}^m$-leképezés, akkor f-et $\mathcal{C}^m$*-diffeomorfizmus*nak nevezzük. Ha $G \subset X$ nem üres halmaz, jelölje $\mathcal{C}^m(G;Y)$ azon függvények osztályát, amelyek $\mathcal{C}^m$-leképezései G belsejének Y-ba, és minden, legfeljebb m-edrendű differenciálfüggvényük egyértelműen kiterjeszthető egy G-n értelmezett folytonos függvénnyé. Ha $m < \infty$ és $f \in \mathcal{C}^m(G;Y)$, legyen

$$\|f\|_m = \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in G} \|f^{(k)}(x)\|.$$

$\mathcal{C}^m(G;Y)$ azon f függvényei, amelyekre $\|f\|_m < \infty$, egy normált teret alkotnak. Ennek egy altere $\mathcal{K}^m(G;Y)$, azon $\mathcal{C}^m(G;Y)$-beli függvények osztálya, amelyeknek minden legfeljebb m-edrendű differenciálfüggvénye egy kompakt halmazon kívül eltűnik. Az egyszerűbb jelölések kedvéért $\mathcal{C}^\infty(G;Y)$ helyett $\mathcal{E}(G;Y)$-t, $\mathcal{K}^\infty(G;Y)$ helyett pedig $\mathcal{D}(G;Y)$-t szokás írni.

9.21. $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-leképezések. Az előző definíció jelöléseivel, ha $f \in \mathcal{C}^m(G)$, egy $0 < \alpha \leq 1$ kitevőre legyen

$$\|f\|_{m,\alpha} = \|f\| + \sum_{|j|=m} H_\alpha(\partial^j f),$$

ahol H_α a Hölder-konstans G-n. Legyen

$$\mathcal{C}^{m,\alpha}(G;Y) = \{f \in \mathcal{C}^m(G;Y) \colon \|f\|_{m,\alpha} < \infty\}$$

az $\|f\|_{m,\alpha}$ normával. Legyen $\mathcal{C}^{m,0} = \mathcal{C}^m$, a szokásos normával.

→ **9.22. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}^{m,\alpha}$ Banach-tér.

→ **9.23. Feladat [8].** Milyen β, γ esetén terjeszthető ki az $x \mapsto |x|^\beta \sin |x|^\gamma$ leképezés egy $\mathcal{C}^{m,\alpha}[-1,1]$ térbeli függvénnyé?

9.24. Taylor-formula maradéktag nélkül. *Legyen f az X normált tér egy részhalmazát az Y normált térbe képező függvény. Ha f az a pontban n-szer differenciálható, akkor a*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \text{ha} \quad x \in X$$

összefüggéssel definiált n-ed fokú Taylor-polinomra

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{\|x-a\|^n} = 0.$$

A Taylor-formulának ez a „maradéktag nélküli” alakja használható a legkönnyebben függvényvizsgálatra.

Bizonyítás. Teljes indukcióval: $n = 1$-re a derivált definíciójából következik az állítás. Ha $n > 1$, akkor vegyük észre, hogy T' az f'-höz tartozó $n-1$-ed fokú Taylor-polinom, és $T(a) = f(a)$, így a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\|f(x) - T(x)\|}{\|x-a\|^n} \leq \sup_{0<\tau<1} \frac{\big\|(f-T)'(a+\tau(x-a))\big\|}{\|x-a\|^{n-1}} \to 0,$$

ha $x \to a$.

∗ **9.25. Taylor-formula valós értékű függvényekre.** *Legyen X valós normált tér, $f \in X \to \mathbb{R}$, $x, h \in X$, és tegyük fel, hogy $f(y)$ értelmezve van és folytonos az $\{x+th \colon 0 \leq t \leq 1\}$ zárt szakaszon, $\delta^k f(y;h)$ értelmezve van és folytonos a $\{x+th \colon 0 \leq t < 1\}$ félig zárt szakaszon $0 < k < n$-re, valamint $\delta^n f(y;h)$ értelmezve van a $\{x+th \colon 0 < t < 1\}$ nyílt szakaszon. Ekkor van olyan $0 < \tau < 1$, hogy*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\,\delta^k f(x;h) + \frac{1}{n!}\,\delta^n f(x+\tau h;h).$$

Bizonyítás. Legyen $g(t) = f(x+th)$, ekkor $g^{(k)}(t) = \delta^k f(x+th;h)$, így formulánk a g-re felírt szokásos Taylor-formula megfelelője. Bizonyításához legyen $M = g(1) - \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0)$ és $h(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0)t^k/k! - Mt^n$. Mivel $0 = h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0)$ és $h(1) = 0$, a Rolle-tételt felhasználva teljes indukcióval kapjuk, hogy $1 \leq k \leq n$-re létezik olyan $0 < \tau_k < 1$, hogy $h^{(k)}(\tau_k) = 0$. Legyen $\tau = \tau_n$.

∗ **9.26. Taylor-formula integrál maradéktaggal.** *Legyen f egy X normált tér egy részhalmazát az Y Banach-térbe leképező függvény. Tegyük fel, hogy $x, h \in X$, az f értelmezve van és folytonos az $\{x + th\colon 0 \le t \le 1\}$ zárt szakaszon, $\delta^k f(y; h)$ értelmezve van és folytonos a $\{x+th\colon 0 \le t < 1\}$ félig zárt szakaszon $0 < k < n$-re, valamint $\delta^n f(y; h)$ értelmezve van és korlátos a $\{x + th\colon 0 < t < 1\}$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\,\delta^k f(x; h) + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^n f(x+\tau h; h)\,d\tau.$$

Figyeljük meg, hogy az $n = 1$ eset a Newton–Leibniz-formula, más feltételekkel.

Bizonyítás. A $g(t) = f(x + th)$ jelöléssel azt kell megmutatnunk, hogy

$$g(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)\,dt.$$

Ha $n = 1$, vegyük észre, hogy $g(t) = g(1)$, ha $t > 1$ kiterjesztéssel

$$\frac{g(t + 1/k) - g(t)}{1/k} \to g'(t), \quad \text{ha} \quad k \to \infty, \quad t \in \,]0, 1[,$$

így g' mérhető, értékkészlete szeparábilis, és a középérték-egyenlőtlenség szerint a bal oldali függvénysorozat is korlátos g' korlátjával, tehát alkalmazható Lebesgue tétele. Mivel

$$k\int_0^1 g(t + 1/k)\,dt - k\int_0^1 g(t)\,dt = k\int_1^{1+1/k} g(t)\,dt - k\int_0^{1/k} g(t)\,dt \to g(1) - g(0),$$

kapjuk az állítást $n = 1$-re. Az általános esetet teljes indukcióval bizonyítjuk. Mivel $g^{(n-1)}$ differenciálható a $]0, 1[$ pontjaiban és a deriváltja korlátos, a középérték-egyenlőtlenség szerint Lipschitz-függvény. Innen következik, hogy létezik a határértéke 1-ben. Definiáljuk 1-ben ezzel a határértékkel. Ha most az $n = 1$ esetet alkalmazzuk a

$$t \mapsto (1-t)^{n-1} g^{(n-1)}(t)/(n-1)!$$

függvényre, kapunk egy parciális integrálási formulát, az indukciós lépést $n-1$-ről n-re.

∗ **9.27. Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal.** *Legyen f egy X normált tér egy részhalmazát az Y normált térbe leképező függvény. Tegyük fel, hogy $x, h \in X$, az f értelmezve van és folytonos az $\{x + th\colon 0 \le t \le 1\}$ zárt szakaszon, ha $0 < k < n$, akkor $\delta^k f(y; h)$ értelmezve van és folytonos a $\{x + th\colon 0 \le t < 1\}$ félig zárt szakaszon, valamint $\delta^n f(y; h)$ értelmezve van a $\{x + th\colon 0 < t < 1\}$ nyílt szakaszon. Ekkor*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\,\delta^k f(x; h) + R_n(x, h),$$

ahol

$$\|R_n(x, h)\| \le \frac{1}{n!} \sup_{0<\tau<1} \|\delta^n f(x + \tau h; h)\|.$$

Ha még $\delta^n f(x;h)$ is értelmezve van, akkor

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\,\delta^k f(x;h) + r_n(x,h),$$

ahol

$$\|r_n(x,h)\| \le \frac{1}{n!}\|\delta^n f(x+\tau h;h) - \delta^n f(x;h)\|.$$

Bizonyítás. Ha Y Banach-tér, akkor mindkét változat az előző Taylor-formulából következik, de a második esetben át kell írnunk azt az

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\,\delta^k f(x;h) + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\delta^n f(x+\tau h;h) - \delta^n f(x;h)\right) d\tau$$

alakba. Ha Y nem Banach-tér, akkor vehetjük a teljes burkát.

∗ **9.28. Megjegyzés.** A Taylor-formula mindegyik maradéktagos alakjában az a feltétel, hogy $\delta^k f(y;h)$ értelmezve van és folytonos a $\{x+th\colon 0 \le t < 1\}$ félig zárt szakaszon, helyettesíthető azzal a feltétellel, hogy $\delta^k f(y;h)$ értelmezve van a $\{x+th\colon 0 < t < 1\}$ nyílt szakaszon, és létezik a $\lim_{t\downarrow 0} \delta^k f(x+th;h)$ határérték, ha az állításban $\delta^k f(x;h)$-t ezzel a határértékkel helyettesítjük.

9.29. Lemma. *Legyen X Banach-tér. A $T \mapsto T^{-1}$, $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)$ leképezés végtelen sokszor differenciálható értelmezési tartománya minden pontjában.*

Megjegyezzük, hogy ha X véges dimenziós, az állítás következik az inverz előállításából determinánsokkal.

Bizonyítás. Az inverzképzés folytonosságáról szóló tétel bizonyítását felhasználva,

$$\|(T+S)^{-1} - T^{-1} + T^{-1}ST^{-1}\| \le \left\|\sum_{k=2}^{\infty}(-T^{-1}S)^k T^{-1}\right\| \le \frac{\|S\|^2\|T^{-1}\|^3}{1-\|S\|\|T^{-1}\|},$$

így az inverzképzés deriváltja a T pontban az $S \mapsto -T^{-1}ST^{-1}$ lineáris leképezés. Ha $A, B \in Y = \mathcal{L}(X;X)$, jelölje $F(A,B)$ az $S \mapsto -ASB$ leképezést, amely $\mathcal{L}(Y;Y)$ egy eleme. F nyilván bilineáris leképezése $Y\times Y$-nak $\mathcal{L}(Y;Y)$-ba, így végtelen sokszor differenciálható. Mint láttuk, a $T \mapsto T^{-1}$ leképezés differenciálfüggvénye a $T \mapsto F(T^{-1}, T^{-1})$ leképezés. Teljes indukcióval, ha a $T \mapsto T^{-1}$ leképezés m-szer differenciálható, akkor $m+1$-szer is.

9.30. Implicit függvény tétel. *Legyenek X, Y és Z Banach-terek, $(a,b) \in X \times Y$, és F az (a,b) egy környezetét Z-be képező folytonos függvény, amelyre $F(a,b) = 0$. Ha F_y létezik és folytonos az (a,b) egy környezetében, továbbá $F_y(a,b)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése Y-nak Z-re, akkor*

(1) *léteznek olyan ε és δ pozitív számok, hogy minden $x \in X$-re, amelyre $\|x-a\| \le \varepsilon$, pontosan egy $y(x) \in Y$ létezik, amelyre $\|y(x)-b\| \le \delta$ és $F(x,y(x)) = 0$;*

(2) *$x \mapsto y(x)$ folytonos;*

(3) *ha F az (a,b) egy környezetében egy $\mathcal{C}^m$-leképezés, $(1 \le m \le \infty)$, akkor az a egy környezetében $x \mapsto y(x)$ is egy $\mathcal{C}^m$-leképezés és*

$$y'(x) = -F_y(x,y(x))^{-1} F_x(x,y(x)).$$

A bizonyítás a Banach-féle fixponttétel segítségével történik.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$ és $b = 0$, és helyettesíthetjük F-et az $F_y(0,0)^{-1}F(x,y)$ függvénnyel, azaz feltehetjük, hogy $Z = Y$ és $F_y(0,0) = \mathbb{1}$. Legyen $G(x,y) = T_x y = y - F(x,y)$, ekkor az $F(x,y) = 0$ egyenlet az $y = T_x y$ egyenlettel ekvivalens. Vizsgáljuk G-t. Mivel $G_y = \mathbb{1} - F_y$, a középérték-egyenlőtlenség szerint elég kicsiny ε és δ esetén, ha $\|x\| \le \varepsilon$, $M = \{y\colon \|y\| \le \delta\}$ és $y, z \in M$, akkor $\|G(x,y) - G(x,z)\| \le r(\varepsilon,\delta)\|y - z\|$ ahol $r(\varepsilon,\delta) = \sup_{\|x\|\le\varepsilon, u\in M}\|G_y(x,u)\|$, és így

$$\|G(x,y)\| \le \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| \le r(\varepsilon,\delta)\|y\| + \|G(x,0)\|.$$

Mivel F és F_y, és így G és G_y is folytonosak, továbbá $G(0,0) = 0$ és $G_y(0,0) = 0$, az ε és δ csökkentésével elérhető, hogy $\|x\| \le \varepsilon$, $y, z \in M$ esetén

$$\|T_x y - T_x z\| \le \|y - z\|/2 \quad \text{és} \quad \|T_x y\| \le \delta$$

teljesüljön. A Banach-féle fixponttételből következik (1).

Ha $\|x\|, \|x_0\| \le \varepsilon$, akkor $y_0 = y(x_0)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\|y(x) - y_0\| = \|T_x y(x) - T_{x_0} y_0\| &\le \|T_x y(x) - T_x y_0\| + \|T_x y_0 - T_{x_0} y_0\| \\ &\le \|y(x) - y_0\|/2 + \|T_x y_0 - T_{x_0} y_0\|,\end{aligned}$$

amiből

$$\|y(x) - y_0\| \le 2\|T_x y_0 - T_{x_0} y_0\| = 2\|G(x,y_0) - G(x_0,y_0)\| \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to x_0,$$

azaz beláttuk (2)-t.

Legyen $m = 1$. Ekkor $k = y(x+h) - y(x)$ jelöléssel a

$$0 = F(x+h, y(x)+k) - F(x,y(x))$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$0 = F_x(x,y(x))h + F_y(x,y(x))k + s(h,k),$$

ahol $\|s(h,k)\|/(\|h\| + \|k\|) \to 0$, amint $\|h\| + \|k\| \to 0$. Innen

$$k = -F_y(x,y(x))^{-1} F_x(x,y(x))h + q(h,k),$$

ahol $\|q(h,k)\|/(\|h\| + \|k\|) \to 0$, amint $\|h\| + \|k\| \to 0$. (Az $F_y(x,y(x))$ inverzének létezése az F_y, az y és az inverzképzés folytonosságából következik.) Mivel $h \to 0$ esetén $k \to 0$, ebből következik, hogy valamely c konstanssal $\|k\| \le c\|h\| + \|k\|/2$, ha $\|h\|$ elég kicsi. Így $\|k\| \le 2c\|h\|$, amiből y deriválható, és

$$y'(x) = -F_y(x,y(x))^{-1} F_x(x,y(x)).$$

Mivel F', y és az inverzképzés folytonosak, a derivált folytonos.

Az $m > 1$ eset ebből az összefüggésből az előző lemmát felhasználva következik.

9.31. Inverz függvény tétel. *Legyen f az X Banach-tér egy a pontjának egy környezetét az Y Banach-térbe képező $\mathcal{C}^m$-leképezés, ahol $1 \le m \le \infty$. Az f pontosan akkor $\mathcal{C}^m$-diffeomorfizmus lokálisan, ha $f'(a)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése X-nek Y-ra. Ekkor az a egy környezetében*

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

Bizonyítás. Ha f egy $\mathcal{C}^m$-diffeomorfizmus lokálisan, akkor $f \circ f^{-1}$ és $f^{-1} \circ f$ lokálisan identitások, és differenciálásukkal kapjuk, hogy minden, az a elég kis környezetéből vett x-re $f'(x)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése X-nek Y-ra. A megfordításhoz legyen $b = f(a)$, $F(x, y) = y - f(x)$, és alkalmazzuk az implicit függvény tételt, x és y szerepét felcserélve.

9.32. Következmény. *$\mathcal{C}^m$-diffeomorfizmusok összetétele is $\mathcal{C}^m$-diffeomorfizmus.*

Bizonyítás. A láncszabály szerint az összetett leképezés deriváltja bijekció.

9.33. Függvények lokális ekvivalenciája. Legyenek $f\colon U \to V$ és $g\colon W \to Y$ is $\mathcal{C}^p$-leképezések, ahol a halmazok $\mathbb{K}$ feletti Banach-terek nyílt részhalmazai, $0 \le p \le \infty$. Legyen $u_0 \in U$ és $w_0 \in W$. Azt mondjuk, hogy f az u_0-ban *lokálisan ekvivalens* g-vel a w_0-ban, ha léteznek olyan u_0-at w_0-ba vivő φ és $f(u_0)$-at $g(w_0)$-ba vivő ψ diffeomorfizmusok, hogy a w_0 valamely környezetében $\psi \circ f \circ \varphi = g$. Ez úgy is kifejezhető, hogy $v = f(u)$-ban lokálisan új $u = \varphi(w)$ és $y = \psi(v)$ koordinátákat bevezetve $y = g(w)$-t kapjuk a w_0 egy környezetében. Azt írjuk, hogy

$$f \overset{p}{\sim} g \quad \text{az } (u_0, w_0)\text{-ban.}$$

Nyilvánvaló, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. A definíció hátterében az az elképzelés áll, hogy ekvivalens leképezések lokálisan ugyanolyan szerkezetűek.

9.34. Példa. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy $\mathcal{C}^p$-leképezés az u_0 egy környezetében, $1 \le p \le \infty$. Ha $f'(u_0) \neq 0$, akkor az inverz függvény tétel szerint f az u_0-ban lokálisan ekvivalens az $\mathbb{R}$ identikus leképezésével a u_0-ban vagy az $f(u_0)$-ban. Az identikus leképezés bármely helyen ekvivalens az identikus leképezéssel a 0-ban, ez pedig $u \mapsto f'(u_0)u$-val a nullában, illetve $u \mapsto f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0)$-lal u_0-ban, azaz az f linearizáltjával ekvivalens. Ha $f'(u_0) = 0$, akkor nem biztos, hogy ez a helyzet, például $u \mapsto u^2$ a nullában nem ekvivalens a linearizáltjával, ami konstans függvény.

A következő tétel azt mutatja, hogy magasabb dimenzióban, ha a derivált rangja lokálisan konstans, akkor a függvény ekvivalens a linearizáltjával. Általában az ekvivalenciaosztályokkal, pontosabban paraméteres függvényseregek ekvivalenciaosztályaival foglalkozik a katasztrófaelmélet: lásd Zeidler [179], 73. fejezet.

9.35. Rang tétel. *Legyen $x_0 \in \mathbb{K}^n$ és f az x_0 egy U nyílt környezetén értelmezett $\mathcal{C}^p$-függvény $\mathbb{K}^m$-beli értékekkel, ahol $1 \le p \le \infty$. Ha $f'(x)$ rangja q minden $x \in U$-ra, akkor f az x_0-ban lokálisan $\mathcal{C}^p$-ekvivalens $f'(x_0)$-al, illetve egy*

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_q, 0, \dots, 0) + G(h_1, h_2, \dots, h_q)$$

alakú leképezéssel a nullában, ahol

$$G(h_1, h_2, \dots, h_q) \in \mathbb{K}^m$$

merőleges a

$$(h_1, h_2, \dots, h_q, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^m$$

vektorra, valamint a

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_q, 0, \dots, 0)$$

leképezéssel a nullában.

A tétel általánosítható Banach-terekre is, de új fogalmakat kell bevezetni és a bizonyítás nehezebb. Ha $f'(x_0)$ kölcsönösen egyértelmű, akkor a rang feltétel teljesül, mivel $f'(x_0)$ rangja n, egy rangmeghatározó aldeterminánsa nem nulla, így $f'(x)$ ugyanezen rangmeghatározó aldeterminánsa sem nulla, ha x elég közel van x_0-hoz, másrészt $f'(x)$ rangja nem lehet nagyobb mint n. Ilyenkor f kölcsönösen egyértelmű az x_0 valamely környezetében, mert a linearizáltja kölcsönösen egyértelmű. Hasonlóan, ha $f'(x_0)$ az $\mathbb{R}^m$-re képez, akkor is teljesül a rang feltétel. Ilyenkor f az x_0 bármely környezetét az $f(x_0)$ egy környezetére képezi le.

Bizonyítás. Nyilván feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $f(x_0) = 0$. Jelölje Z az $f'(0)$ nullterét (magját), R pedig az értékkészletét.

I. Első lépésként az fogjuk megmutatni, hogy van olyan, $Z \times R$-ben az origó egy nyílt környezetén értelmezett $\mathbb{K}^n$-beli értékű $\mathcal{C}^p$-diffeomorfizmus, amelyre $\varphi(0,0) = x_0 = 0$, hogy

$$f(\varphi(z,r)) = r + g(z,r)$$

az origó egy nyílt környezetében, ahol $g(z,r) \in R^\perp$ és $g'(0,0) = 0$. Ennek bizonyításához vegyük észre, hogy $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ ortogonális felbontásai az $x = x_1 + x_2$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z^\perp$, $f_1(x) \in R$, $f_2(x) \in R^\perp$ felbontást eredményezik. Mivel $f(0) = 0$ és $f'(0)h = f_1'(0)h + f_2'(0)h$ minden $h \in \mathbb{K}^n$-re, azt kapjuk, hogy $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$ és $f_2'(0) = 0$. Az $F\colon U \to Z \times R$, $F(u) := (u_1, f_1(u))$ leképezés $\mathcal{C}^p$-beli, $F(0) = (0,0)$ és

$$F'(0)h = (h_1, f_1'(0)h) = (h_1, f'(0)h) \qquad \text{minden } h \in \mathbb{K}^n\text{-re.}$$

Mivel $f'(0)\colon Z^\perp \to R$ bijektív, $F'(0)h = 0$-ból $h_1 = 0$ és így $h_2 = 0$, azaz $h = 0$ következik. Így $F'(0)\colon \mathbb{K}^n \to Z \times R$ bijektív, és az inverz függvény tétel szerint F lokálisan $\mathcal{C}^p$-diffeomorfizmus az $x_0 = 0$-ban. Legyen $\varphi := F^{-1}$, ekkor $\varphi(z,r) = u$, ahol $z = u_1$ és $r = f_1(u)$. Így

$$f(\varphi(z,r)) = f_1(u) + f_2(u) = r + f_2(\varphi(z,r)),$$

azaz a megadott előállítás lokálisan fennáll $g(n,r) := f_2(\varphi(n,r))$ választással. Az $f_2'(0) = 0$ összefüggésből $g'(0,0) = 0$.

II. Legyen $H(z,r) = f(\varphi(z,r))$. Második lépésként megmutatjuk, hogy az origó valamely környezetében $H_z(z,r) = 0$. Minden $(h,k) \in Z \times R$-re

$$H'(z,r) = f'(\varphi(z,r))\varphi'(z,r) \quad \text{és} \quad H'(z,r)(h,k) = k + g'(z,r)(h,k).$$

Mivel $k \in R$ és $g'(z,r)(h,k) \in R^\perp$, azt kapjuk, hogy ha

$$H'(z,r)(h_1,k_1) = H'(z,r)(h_2,k_2), \quad (h_1,k_1),(h_2,k_2) \in Z \times R,$$

akkor $k_1 = k_2$. Így a $H'(z,r)\colon \{0\} \times R \to H'(z,r)(Z \times R)$ leképezés injektív. Meg akarjuk mutatni, hogy ez a leképezés szürjektív is, ha (z,r) elég közel van az origóhoz. Mivel φ lokálisan $\mathcal{C}^p$-diffeomorfizmus, a $\varphi'(z,r)\colon Z \times R \to \mathbb{K}^n$ linearizáció bijektív az inverz függvény tétel szerint. Így $H'(z,r)(Z \times R) = \operatorname{rng}\Big(f'(\varphi(z,r))\Big)$. Mivel a $\operatorname{rng}\Big(f'(\varphi(z,r))\Big)$ lineáris tér dimenziója megegyezik R dimenziójával, $H'(z,r)(Z \times R)$ dimenziójára is ez igaz. Így az injektivitásból következik a szürjektivitás. A második lépés bizonyításának befejezéséhez, legyen $(h,k) \in Z \times R$ adott. A szürjektivitás miatt van olyan $\overline{k} \in R$, hogy $H'(z,r)(0,\overline{k}) = H'(z,r)(h,k)$. De innen $H_r(z,r)k = H_z(z,r)h + H_r(z,r)k$ minden $h \in Z$-re, és így $H_z(z,r) = 0$. Ezzel a második lépés bizonyítását befejeztük.

III. Harmadik lépésként befejezzük a tétel bizonyítását. Ha az origó egy elég kis konvex környezetét vesszük, a középérték-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy $H(z,r)$ független z-től. Legyen $G(r) := H(z,r)$. Ekkor $G(r) = r + g(0,r)$, és ezzel megkaptuk a tétel második alakját. Vegyük észre, hogy $G'(0)h = h + g_r(0,0)h = h$ minden $h \in R$-re. Legyen $\psi(y) := G(y_1) + y_2$, ahol $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R$, $y_2 \in R^\perp$. Mivel $\psi'(0)k = k_1 + k_2 = k$ minden $k \in \mathbb{R}^m$-re, az inverz függvény tétel szerint ψ a nulla egy környezetében $\mathcal{C}^p$-diffeomorfizmus. Mivel $G'(0)r = r \in R$, azt kapjuk, hogy $\psi(G'(0)r) = G(r)$ minden $r \in R$-re a nulla egy környezetében, amiből $G'(0) = \psi^{-1} \circ G$ a nulla egy környezetében. Így azt kaptuk, hogy $(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(n,r) = r$ a nulla egy környezetében. Ez nyilván ekvivalens a tétel harmadik állításával. Az első állítás bizonyításához vegyük észre, hogy az $L(x) := (z,r)$, $z := x_1$, $r := f'(0)x$ lineáris leképezéssel $f'(0)L^{-1}(z,r) = r$ minden $(z,r) \in Z \times R$-re, ami adja az első állítás bizonyítását.

9.36. Szélsőértékszámítás. *Legyen f egy valós normált tér egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Ha f-nek minimuma van az x pontban, és $\delta f(x;h)$ létezik, akkor $\delta f(x;h) = 0$. Ha még $\delta^2 f(x;h)$ is létezik, akkor $\delta^2 f(x;h) \geq 0$.*

A tételt legtöbbször lokálisan alkalmazzuk. Maximumkeresésre is használható, ha f helyett $-f$-re alkalmazzuk. Ha $f'(x)$ létezik, akkor az első állítás azzal ekvivalens, hogy $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. A $g(t) = f(x + th)$ függvényre kell megmutatnunk, hogy $g'(0) = 0$ és $g''(0) \geq 0$. Ha $g'(0) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g(t) - g(0) < 0$, ami ellentmondás. A $g'(0) > 0$ eset negatív t-re ad ellentmondást. Ha $g''(t) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g'(t)/t < 0$. Ebből a középérték-tétel szerint $g(t) - g(0) < 0$, ami ellentmondás.

9.37. Lokális szélsőérték elégséges feltétele erősen definit második deriválttal. *Legyen f az X valós normált tér egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Ha $f'(x) = 0$, továbbá $f''(x)$ létezik és erősen pozitív definit, azaz van olyan $c > 0$, hogy $f''(x)hh \geq c\|h\|^2$ minden $h \in X$-re, akkor x-nek van olyan környezete, amelyen f-nek szigorú minimuma van x-ben.*

Ha X véges dimenziós, akkor elég azt feltenni, hogy $f''(x)$ pozitív definit, azaz $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén $f''(x)hh > 0$, mert a $h \mapsto f''(x)hh$ leképezés folytonos és pozitív a $\big\{h\colon \|h\| = 1\big\}$ kompakt halmazon, így valamely $c > 0$ alsó korlátja, ahonnan $f''(x)hh = \|h\|^2 f''(x)(h/\|h\|, h/\|h\|) \geq c\|h\|^2$.

Bizonyítás. A Taylor-formula maradéktag nélküli alakjából van olyan $\delta > 0$-t,

hogy $0 < \|y-x\| \le \delta$ esetén

$$\frac{\left|f(y)-f(x)-\frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2\right|}{\|y-x\|^2} \le \frac{c}{4}.$$

Innen $f(y)-f(x) \ge c\|y-x\|^2/4 > 0$.

9.38. Lokális szélsőérték elégséges feltétele szemidefinit második deriválttal. *Legyen f az X valós normált tér egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Ha $f'(x)=0$, továbbá $f''(y)$ létezik és pozitív szemidefinit az x egy $\mathcal{U}_\delta(x)$ környezetében, azaz $f''(y)hh \ge 0$ minden $h \in X$-re, ha $y \in \mathcal{U}_\delta(x)$, akkor f-nek minimuma van $\mathcal{U}_\delta(x)$-ben.*

Bizonyítás. Ha $y \in \mathcal{U}_\delta(x)$, $y \ne x$, akkor $h = y-x$ jelöléssel alkalmazzuk a valós értékű függvényekre vonatkozó Taylor formulát:

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{2}f''(x+th)hh \ge 0.$$

9.39. Lagrange-elv. *Legyenek X és Y valós Banach-terek, G nyílt részhalmaza X-nek, $f\colon G \to \mathbb{R}$ és $g\colon G \to Y$ folytonosan differenciálhatóak. Ha f-nek az x pontban minimuma van a $g^{-1}(0)$ halmazon, és $g'(x)$ képtere Y, akkor létezik $y^* \in Y^*$, hogy*

$$f'(x) + y^*g'(x) = 0.$$

A tételt gyakran lokálisan alkalmazzuk. Maximumkeresésre is használható. Itt csak azt az esetet bizonyítjuk, amikor X és Y véges dimenziósak. Az általánosabb változatot később bizonyítjuk.

Bizonyítás. A koordinátákat alkalmasan csoportosítva, elérhetjük hogy az $(x,y) \mapsto g(x,y)$, $c=(a,b)$ jelöléssel $g_y(a,b)$ invertálható. Alkalmazva az implicit függvény tételt g-re, egy olyan U környezetét kapjuk a-nak és egy azon értelmezett $x \mapsto y(x)$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre $g(x,y(x))=0$, ha $x \in U$. Az $x \mapsto f(x,y(x))$ függvénynek szélsőértéke van a-ban, így

$$0 = f_x(a,b) + f_y(a,b)y'(a).$$

Innen felhasználva y' előállítását, $y^* = -f_y(a,b)g_y(a,b)^{-1}$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$0 = f_x(a,b) - f_y(a,b)g_y(a,b)^{-1}g_x(a,b) = f_x(a,b) + y^*g_x(a,b).$$

Az y^* definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$f_y(a,b) + y^*g_y(a,b) = 0.$$

A két utolsó összefüggés ekvivalens az állítással.

→ **9.40. Feladat.** Határozzuk meg egy Hilbert-téren az $x \mapsto \|x\|^2$ leképezés differenciálját és gradiensét.

→ **9.41. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ csavarvonalra $f(2\pi) - f(0) \neq 2\pi f'(t)$, ha $t \in \mathbb{R}$.

→ **9.42. Feladat.** Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy f iránymenti deriváltjai mindenütt léteznek, de a gyenge derivált nem.

→ **9.43. Feladat.** Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = x^3y/(x^4 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy f gyengén differenciálható, de nem differenciálható.

→ **9.44. Feladat.** Legyen az f függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy az összes második parciális derivált létezik, de a vegyes parciális deriváltak nem egyeznek meg.

9.45. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x)(s) = \int_a^b K(s,t)F(t, x(t))\,dt$$

összefüggéssel definiált $f\colon \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ leképezés első és második deriváltját, ha $K \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$ és $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

9.46. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $G \subset \mathbb{K}^n$ egy korlátos tartomány lezártja, Y Banach-tér, akkor $\mathcal{C}^m(G;Y)$ Banach-tér.

9.47. Feladat. Legyen $I = [a,b]$, $a < b$ egy intervallum, Y Banach-tér. Mutassuk meg, hogy $f \in \mathcal{C}^m(I;Y)$ pontosan akkor, ha f valamely I-nél bővebb nyílt intervallumon értelmezett $\mathcal{C}^m$-függvény megszorítása I-re.

∗ **9.48. A Newton-módszer.** Egy $f(x) = 0$ operátoregyenletre kívánjuk alkalmazni a Newton-módszert. A módszer természetes módon adódik, ha egy adott x_n érték közelében f-et a lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből a következő közelítésre az

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

egyenlet adódik, így x_{n+1} meghatározásához egy lineáris egyenletet kell megoldani. Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens.

Gyakran használatos a *módosított Newton-módszer* is, ennél a derivált kiszámítására és invertálására csak egyszer van szükség:

$$x_{n+1} = x_n - \left(f'(x_0)\right)^{-1} f(x_n).$$

Időnként újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A *fékezett Newton-módszer*nél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletből meghatározzuk Δx_n-et, de $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \Delta x_n$, ahol az $0 < \alpha_n \leq 1$ *relaxációs paramétert* úgy választjuk,

hogy $\|f(x_{n+1})\|^2 < \|f(x_n)\|^2$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha az egyenlet megoldható és a norma belső szorzatból származik: Az $\|f\|^2$-nek a Δx_n irány menti deriváltja az x_n helyen

$$2\langle f(x_n), f'(x_n)\Delta x_n\rangle = -2\|f(x_n)\|^2,$$

így

$$\frac{\|f(x_n+\alpha\Delta x_n)\|^2 - \|f(x_n)\|^2}{\alpha\|f(x_n)\|^2} \to -2,$$

ha $\alpha \to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1-\sigma$ valamely $0<\sigma<1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \le \sigma \le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük α_n-et, rendszerint szorozzuk ϱ-val, ahol $0<\varrho<1$, általában $0{,}3 \le \varrho \le 0{,}8$.

A módosított Newton-módszerből is képezhető fékezett változat, de itt már nem biztos, hogy a feltétel teljesíthető, esetleg újra kell számolni a deriváltat.

A Newton-módszer másodrendben, a módosított változat pedig elsőrendben konvergál operátoregyenletek esetében is, mint a következő tétel, illetve feladat mutatja. Az elsőrendű konvergenciát, ugyanúgy, mint az iterációs módszernél, a Δ^2-eljárással próbálhatjuk meg gyorsítani. A módszer számos elméleti és gyakorlati alkalmazását illetően lásd Zeidler [179] könyvét, I., 5. fejezet. Ugyanitt található a tétel egy másik, ugyancsak Kantorovicstól származó változata, amelyben a gyök létezését nem kell feltenni.

∗ **9.49. Kantorovics tétele.** *Tegyük fel, hogy f az X Banach-tér egy G nyílt részhalmazát X-be képező függvény, és*

(1) $f(x^*) = 0$;

(2) *f differenciálható és a deriváltja Lipschitz-függvény L Lipschitz-konstanssal;*

(3) $f'(x^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)$.

Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy az

$$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) = -f(x_n)$$

összefüggéssel értelmezett x_n iterációs sorozat konvergál az x^* megoldáshoz bármely x_0 kezdőértékre, amelyre $|x_0 - x^*| \le \delta$. Továbbá van olyan, x_0-tól nem függő M konstans, hogy

$$|x_{n+1}-x^*| \le M|x_n-x^*|^2 \quad \text{és} \quad |x_n-x^*| \le (M\delta)^{2^n}/M.$$

Bizonyítás. Van olyan x^* középpontú U nyílt gömb, hogy $x \in U$ esetén $S(x) = f'(x)^{-1} \in \mathcal{L}(X;Y)$ létezik és $\alpha = \sup_{x\in U}\|S(x)\| < \infty$. Legyen $Tx = x - S(x)f(x)$. Ekkor a Newton-módszer az $x_{n+1} = Tx_n$ iteráció. A középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\big|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)\big| \le L|x-y|^2/2, \quad \text{ha} \quad x,y \in U.$$

Az f' Lipschitz-folytonosságát és az előző egyenlőtlenséget felhasználva, a

$$Tx - Tx^* = S(x)(f'(x^*)(x-x^*) - f(x) + f(x^*)) + S(x)(f'(x)-f'(x^*))(x-x^*)$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$|Tx - Tx^*| \le \alpha \left(\frac{L}{2} + L \right) |x - x^*|^2,$$

úgy hogy

$$|x_{n+1} - x^*| = |Tx_n - Tx^*| \le M|x_n - x^*|^2,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &\le M|x_{n-1} - x^*|^2 \le M \cdot M^2 |x_{n-2} - x^*|^4 \le \dots \\ &\le M^{1+2+\dots+2^{n-1}} |x_0 - x^*|^{2^n} = \left(M|x_0 - x^*|\right)^{2^n} / M. \end{aligned}$$

Ha $|x_0 - x^*| \le \delta$ egy elég kicsiny $\delta > 0$-ra, akkor x_n az U környezetben marad, és $x_n \to x^*$ amint $n \to \infty$.

∗ **9.50. Feladat: módosított Newton-módszer [10].** Az előző tétel bizonyításának módszerét használva, mutassuk meg, hogy ha f az X Banach-tér egy G nyílt részhalmazát X-be képező függvény, és

(1) $f(x^*) = 0$;

(2) f differenciálható és a deriváltja Lipschitz-függvény;

(3) $f'(x^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X; X)$;

akkor van olyan $\delta > 0$, hogy az

$$f'(x_0)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

összefüggéssel értelmezett x_n iterációs sorozat konvergál az x^* megoldáshoz bármely x_0 kezdőértékre, amelyre $|x_0 - x^*| \le \delta$. Továbbá van olyan, x_0-tól nem függő M konstans, hogy

$$|x_{n+1} - x^*| \le M\delta |x_n - x^*| \quad \text{és} \quad |x_n - x^*| \le \left(M\delta\right)^n.$$

∗ **9.51. Kapcsolat minimumfeladatokkal.** Ismeretes, hogy egy valós értékű Φ függvény minimumának megkeresését visszavezethetjük a $\Phi'(x) = 0$ egyenlet megoldására. Megfordítva, egy $f(x) = 0$ operátoregyenlet megoldásait meghatározhatjuk úgy is, hogy megkeressük a $\Phi(x) = \left\|f(x)\right\|^2$ függvény minimumait. A $\|\ \|^2$ választás (például a $\|\ \|$ helyett) azért előnyös, mert a $\|\ \|^2$ függvény valós Hilbert-tér esetén differenciálható. Néha előnyösebb egy másik normát használni, például ha $\mathbb{R}^k$-ban dolgozunk, akkor a $\Phi(x) = \sum_{i=1}^k w_i \left(f_i(x)\right)^2$ függvény minimumait keresni, ahol az f_i függvények az f függvény koordinátái. A pozitív w_i súlyok tetszés szerint választhatók, de alkalmas megválasztásuk a minimumfeladat megoldását megkönnyítheti.

∗ **9.52. Az iránymenti csökkentés módszere.** Lényege, hogy a valós értékű $x \mapsto \Phi(x)$ függvény minimumát úgy keressük, hogy minden x_n közelítéshez meghatározunk egy e_n irányt, amerre a függvény értéke tovább csökken, és a közelítést ebben az irányban eltoljuk. Ha Φ egy X valós Hilbert-tér egy nyílt részhalmazán van értelmezve, és minden lépésben $e_n = -\nabla\Phi(x_n)$, a legmeredekebb csökkenés iránya, akkor a *gradiens módszer*t kapjuk, ha pedig X véges dimenziós, és e_n-nek egy bázis vektorait választjuk ciklikusan, akkor a *ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszere* adódik.

Az eltolás mértékének meghatározásához az egyváltozós $g(t) = \Phi(x_n + te_n)$ függvényt kell minimalizálnunk. Ez történhet a következőképpen. A $t_0 = 0$, t_1 és t_2 pontokban meghatározzuk a g függvény értékét, majd meghatározzuk azt a $p(t)$ másodfokú polinomot, amely ezekben a pontokban megegyezik $g(t)$-vel. (Lásd az interpolációnál.) A t_3 közelítést úgy kapjuk, hogy vesszük p minimumhelyét. Ha sikerült csökkenést elérni, akkor a t_0, t_1, t_2 és t_3 pontok egyikét elhagyjuk, és a többivel folytatjuk az eljárást. Ha nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell; t_1 értékének jó megválasztásához az előző lépések adhatnak útmutatást, t_2 választása pedig függhet $g(t_1)$-től is. Általában nem érdemes g minimumhelyét túl pontosan meghatározni, hanem egy elég jó t^* közelítés meghatározása után áttérhetünk az $x_{n+1} = x_n + t^*e_n$ pontra. Az alulrelaxálás, azaz az adott lépésben optimális t-nél kisebb érték választása általában növeli a módszer hatékonyságát, mert a cikcakk pálya kisimul. A gradiens módszer konvergenciájával kapcsolatban Φ konvexségével kapcsolatos feltételek mellett találunk tételeket Zeidler [179] könyvének II. és III. kötetében. Ugyanott részletes irodalmi hivatkozás és más módszerekre történő utalások is találhatók.

A konvergencia általában elég lassú, és semmilyen garancia nincs arra, hogy a leírt módszer egy abszolút minimumhoz konvergál, bár konvergenciatartománya általában bővebb, mint a Newton-módszeré. Ezért szokás a közelítés kezdetén az iránymenti csökkentések módszerét alkalmazni, majd áttérni a gyorsabb Newton-módszerre.

∗ **9.53. Algebrai egyenletek megoldása.** A fékezett Newton-módszer minden további nélkül alkalmazható komplex változós, komplex értékű f függvényre is. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n) = 0$.

Polinomokra alkalmazva ezt az eljárást, meghatározhatjuk a polinom egy gyökét. Megjegyezzük, hogy még ha a polinom valós együtthatós is, akkor is ajánlatos egy véletlen komplex kezdőértékből indítani az iterációt, mert így nagyon kicsi a valószínűsége, hogy megszakad, és újra kell indítani. Ezzel az eljárással megkaphatjuk a polinom egy zérushelyét. A polinomot elosztva a gyöktényezővel, eggyel alacsonyabb fokú polinomot kapunk, amit ugyanúgy kezelhetünk. Az osztást, valamint a polinom és deriváltja értékének kiszámítását a Horner-elrendezéssel érdemes elvégezni. A talált közelítő értékek pontosságát érdemes az eredeti polinom felhasználásával növelni. A gyökökre korlátot a Rouché-tétel segítségével nyerhetünk, ha azt alkalmazzuk a legmagasabb fokú tagra és a polinom többi részére.

∗ **9.54. Feladat.** Oldjuk meg az $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $10x^2 - x^3 + xy - 10y + 1 = 0$ egyenletrendszert a Newton-módszerrel, a módosított Newton-módszerrel, a ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszerével, és a gradiens módszerrel.

∗ **9.55. Feladat.** Határozzuk meg a $z^3 - 2z^2 + z - 1 - i = 0$ komplex algebrai egyenlet megoldásait.

∗ **9.56. Feladat.** Határozzuk meg 1 mól CO_2 térfogatát 50 C°-on és 2 MPa nyomáson a van der Waals állapotegyenlet felhasználásával.

10
A differenciálgeometria alapjai

Riemann habilitációs előadása két részből áll: Az első részben egy adott távolsággal ellátott n-dimenziós tér definíciójának tisztán matematikai problémáját tekintette, és egy ilyen, általa Mannigfaltigkeit*nak (sokaságnak) nevezett objektumot tanulmányozott. ... Riemann-térre a legegyszerűbb példa egy felület. Tulajdonképpen Euler volt, aki észrevette, hogy egy teret nemcsak annak a térnek a koordinátáival írhatunk le, amelyben fekszik, hanem közvetlenül magában az eredeti térben is bevezethetünk koordinátákat. Gauss volt azonban, aki javasolta felületek benső tulajdonságainak tanulmányozását, azaz olyan tulajdonságokét, amelyek függetlenek attól, hogyan van a felület egy adott térbe beágyazva. Érdekes, hogy a differenciálgeometriával kapcsolatos figyelemreméltó eredményeit 1816-ban érte el, miközben aktív gyakorlati munkát végzett, állami megbízásként a hannoveri hercegség térképészeti felmérését vezette. ... Előadásának második részében Riemann a valódi tér tulajdonságaival foglalkozott, azzal, hogyan lehet eldönteni, hogy a végtelen sok lehetséges távolság közül melyik áll fenn a valóságban, azaz lényegében a geometria és a valóság kapcsolatát tárgyalta.... Riemann habilitációs előadását ma az egyik legjelentősebb munkának tekintjük a tudományok történetében. Érdekes végigkövetni, hogy gondolatai hogyan jutottak el az elismeréshez. Riemann hallgatóságában csak Gauss volt képes arra, hogy felismerje Riemann gondolatainak mélységét. Dedekind, a jól ismert matematikus, aki nemcsak Riemann jó barátja volt, hanem első életrajzírója is, leírja Gauss benyomásait: az előadás minden várakozását felülmúlta, és nagyon meglepte. Az intézeti ülésre visszatérőben a legnagyobb dicsérettel és ritka lelkesedéssel beszélt Wilhelm Webernek Riemann gondolatainak mélységéről. Mindazonáltal Riemann dolgozata csak halála után jelent meg, és lényegében ismeretlen maradt kora vezető matematikusainak többsége előtt.*

Mihail Iljics Monasztriszkij (1999)

A differenciálgeometria kezdetét a sima görbék és felületek tanulmányozása jelentette. Ezekkel az alapokkal ismerkedünk meg.

10.1. Görbék. Legyen X metrikus tér. Egy X-beli *görbe* alatt egy γ folytonos leképezését értjük egy nem csak egy pontból álló $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumnak X-be. A $\gamma(a)$ illetve $\gamma(b)$ pontokat a görbe *kezdő-* illetve *végpontja*inak nevezzük. Ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, akkor azt mondjuk, hogy γ *zárt görbe*. A

$$\check{\gamma}(t) = \gamma(-t), \quad \text{ha} \quad t \in [-b, -a]$$

görbét a γ *megfordítás*ának nevezzük. Ha γ_1 az $[a, b]$-n, γ_2 a $[b, c]$-n definiált görbék, és $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, akkor definiálhatjuk a γ_1 és γ_2 *egymás utáni bejárás*át, a $\gamma_1 \vee \gamma_2 = \gamma$ görbét, a

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{ha } a \le t \le b, \\ \gamma_2(t), & \text{ha } b \le t \le c \end{cases}$$

összefüggéssel. Legegyszerűbb görbe a *konstans görbe*, amelynek értékkészlete egyetlen pont.

Az I_1 intervallumon értelmezett γ_1 és az I_2 intervallumon értelmezett γ_2 *görbéket ekvivalens*eknek nevezzük, ha van olyan φ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, amely I_1-et I_2-re képezi le, és amelyre $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Könnyű látni, hogy görbék ekvivalenciája ekvivalencia-reláció.

10.2. Pályák. Egy normált térbeli görbét *sima görbé*nek nevezünk, ha értelmezési tartományán folytonosan differenciálható (a végpontokban féloldali deriváltakat tekintünk). Ha egy görbe véges sok sima görbe egymás utáni bejárása, akkor *szakaszonként sima*nak nevezzük.

A γ görbe *hossz*án a görbe $\mathbb{V}(\gamma)$ változását értjük. Ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, akkor γ-t *pálya*ának nevezzük. Ha egy zárt görbe pálya, akkor *zárt pálya*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ekvivalens görbéknek, illetve egy görbének és a megfordításának ugyanaz a hossza. Egy abszolút folytonos görbe vagy egy szakaszonként sima görbe mindig pálya.

10.3. Példák. Normált térben a legegyszerűbb sima pálya a *lineáris pálya*. Gyakran fogunk *szakaszonként lineáris pálya*kat használni. Legegyszerűbb zárt pályák a három lineáris szakaszból álló *háromszögpálya* és a komplex síkban a

$$\gamma(t) = c + re^{2\pi int}, \qquad t \in [0,1], \quad c \in \mathbb{C}, \quad r > 0, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}$$

*körpálya*k.

10.4. Sima pályák természetes paraméterezése. Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima (azaz folytonosan differenciálható) görbe, deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |f'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye t-nek. A $g(s) = f(\varphi^{-1}(s))$ összefüggéssel definiált függvény egy, az f-el ekvivalens görbe. Erre

$$\left|\frac{dg}{ds}\right| = \left|\frac{df}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|f'(\varphi^{-1}(s))\right|\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Megfordítva, ha egy paraméterezésben az $s \mapsto g(s) \in \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható görbe deriváltja minden pontban létezik és egységvektor, akkor

$$\int_{s_0}^{s} |g'| = s - s_0,$$

azaz ez a paraméterezés csak konstansban különbözik az ívhossztól. Ilyen paraméterezéseket a görbe *természetes paraméterezés*ének fogunk nevezni. Természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűsíti a számolásokat.

10.5. Vektori szorzat. Legyen e_1, e_2, e_3 a standard bázis $\mathbb{R}^3$-ban. Az $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ és $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ vektorok *vektori szorzat*át az

$$x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3)e_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3$$

összefüggéssel definiáljuk. A kifejezést úgy lehet megjegyezni, hogy formálisan az

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

determináns kifejtésével adódik. A vektori szorzat gyakran használt segédeszköz $\mathbb{R}^3$-ban. A definícióból látszik, hogy a vektori szorzat mindkét változójában lineáris és alternáló: $x \times y = -(y \times x)$ minden $x, y \in \mathbb{R}^3$-ra. Triviális számolás mutatja, hogy $x \times y$ ortogonális x-re és y-ra, és ha $x \times y \neq 0$, akkor $(x, y, x \times y)$ pozitív irányítású bázist alkotnak, valamint

$$|x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}.$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva, az integráltranszformációs formula szerint a jobb oldal éppen az $\{\alpha x + \beta y \colon 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$ paralelogramma χ^2-mértéke lesz; ez mutatja $x \times y$ geometriai jelentését.

10.6. Feladat [4]. Határozzuk meg a szokásos bázis vektoraiból alkotott párok vektori szorzatait.

10.7. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, akkor a

$$\langle a, b \times c\rangle, \quad \langle b, c \times a\rangle, \quad \langle c, a \times b\rangle$$

úgynevezett *vegyes szorzat*ok megegyeznek, és mutassuk meg, hogy értékük $\det(a, b, c)$.

10.8. Feladat [8]. Igazoljuk, hogy $a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$, $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$, és $(a \times b) \times (c \times d) = b\langle a, c \times d\rangle - a\langle b, c \times d\rangle$, ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$.

10.9. Görbület, torzió, kísérő triéder. Legyen $r \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ egy görbe természetes paraméterezéssel. Ha r folytonosan differenciálható, akkor bármely $s \in [a, b]$ pontra az $e(s) = r'(s)$ vektort az r görbe s pontbeli *érintő egységvektor*ának nevezzük. $e(s)$ egységvektor minden $s \in [a, b]$-re. (Tetszőleges paraméterezésben adott görbe deriváltját is érintővektornak nevezzük, ez nem feltétlenül egységvektor.) Ha r kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\langle e(s), e(s)\rangle = 1$ differenciálásával kapjuk, hogy $e'(s)$ merőleges $e(s)$-re. A $\kappa(s) = |e'(s)|$ számot az s-beli *görbület*nek nevezzük. Ha $\kappa \equiv 0$, akkor e konstans, és r egyenes, $r(s) = r(s_0) + (s - s_0)e$. Ha $\kappa(s) \neq 0$, akkor az $n(s) = e'(s)/\kappa(s)$ vektort az s-beli *főnormális*nak nevezzük. Legyen $b(s) = e(s) \times n(s)$, az úgynevezett *binormális*. Az $e(s), n(s), b(s)$ ortonormált bázist *kísérő triéder*nek nevezzük. Az $r(s)$ ponton átmenő síkok közül az $e(s)$ és $n(s)$ által kifeszített síkot *simulósík*nak, az $n(s)$ és $b(s)$ által kifeszített síkot *normálsík*nak, az $e(s)$ és $b(s)$ által kifeszített síkot *rektifikálósík*nak nevezzük. Ha r háromszor folytonosan differenciálható és $\kappa(s) \neq 0$, akkor $\langle n(s), n(s)\rangle = 1$ differenciálásával kapjuk, hogy $n'(s)$ merőleges $n(s)$-re, $\langle e(s), n(s)\rangle = 0$ differenciálásával pedig, hogy $\langle n'(s), e(s)\rangle = -\kappa(s)$. Legyen $\tau(s) = \langle n'(s), b(s)\rangle$. Ekkor $n'(s) = -\kappa(s)e(s) + \tau(s)b(s)$. A $\tau(s)$ számot az s-beli *torzió*nak nevezzük. Geometriai jelentésének megértéséhez differenciáljuk a $b(s)$ függvényt. Azt kapjuk, hogy $b'(s) = e'(s) \times n(s) + e(s) \times n'(s) = -\tau(s)n(s)$. A torzió tehát a simulósík forgássebességét méri, a görbe érintője irányából nézve. A kísérő triéder vektorai és deriváltjaik között kapott összefüggések szerint fennáll az

$$\begin{array}{lrcl} e' = & & \kappa n & \\ n' = & -\kappa e & & +\tau b \\ b' = & & -\tau n & \end{array}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ezek az úgynevezett *Frenet-formulák*. Bevezetve a $g(s) = \tau(s)e(s) + \kappa(s)b(s)$ úgynevezett *Darboux-vektor*t, a Frenet-képletek $e' = g \times e$,

$n' = g \times n$, $b' = g \times b$ alakba írhatók. A Frenet-képletek jelentősége az, hogy mutatják (megfelelő feltételek mellett, a kezdeti feltételekkel együtt), a $\kappa(s) \geq 0$ és $\tau(s)$ valós értékű függvények már meghatározzák a görbe alakját. Ezért szokás a görbület és torzió függvényt együtt a görbe *természetes egyenlet*ének nevezni. Pontosabban megfogalmazva, az alábbi tétel áll fenn:

10.10. Tétel. *Ha a természetes paraméterezéssel adott $r_1, r_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbék háromszor folytonosan differenciálhatóak és görbületüket, illetve torziójukat ugyanaz a κ, illetve τ függvény írja le, akkor a két görbe mozgással (forgatás+eltolás) átvihető egymásba.*

Bizonyítás. A két görbét mozgassuk el úgy, hogy kezdőpontjuk és a kezdőponthoz tartozó kísérő triéderük egybeessen. Ekkor a

$$\varphi(s) = \langle e_1(s), e_2(s) \rangle + \langle n_1(s), n_2(s) \rangle + \langle b_1(s), b_2(s) \rangle$$

függvény deriváltját a Frenet-formulák segítségével kiszámolva, azt kapjuk, hogy nulla, tehát a függvény mindenütt 3. Mivel egységvektorok skaláris szorzatának összege, ez csak úgy lehet, ha $e_1 \equiv e_2$, $n_1 \equiv n_2$, $b_1 \equiv b_2$. Az első összefüggésből $r_1 - r_2$ deriváltja nulla, tehát $r_1 \equiv r_2$.

10.11. Simulókör. Legyenek az s_0 és $\kappa_0 > 0$ számok, az $\mathbb{R}^3$-beli e_0 és n_0 egymásra merőleges egységvektorok, valamint az r_0 vektor adottak. Legyen $R = 1/\kappa_0$. Tekintsük az

$$r(s) = (r_0 + Rn_0) - R\cos((s-s_0)/R)n_0 + R\sin((s-s_0)/R)e_0,$$
$$s_0 - \pi R \leq s \leq s_0 + \pi R$$

kört. Mivel $|r'(s)| = \left|-\sin((s-s_0)/R)n_0 + \cos((s-s_0)/R)e_0\right| = 1$, a paraméter természetes paraméter. Továbbá $r(s_0) = r_0$, $e(s_0) = e_0$, $\kappa(s_0) = \kappa_0$ és $n(s_0) = n_0$, így

$$r(s) = r_0 + (s-s_0)e_0 + \frac{\kappa_0}{2}(s-s_0)^2 n_0 + \omega(s-s_0),$$

ahol $\omega(s-s_0)$ még $(s-s_0)^2$-el osztva is nullához tart. Ha most $\tilde{r}$ tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható görbe természetes paraméterezéssel, amelynek az s_0 pontban az értéke r_0, érintője e_0, görbülete κ_0 és főnormálisa n_0, akkor $\tilde{r}(s) - r(s)$ még $(s-s_0)^2$-el osztva is nullához tart. Ezért szokás a fenti kört a görbe s_0 ponthoz tartozó *simulókör*ének nevezni. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett a simulókör lényegében egyértelmű.

→ **10.12. Feladat [10].** Számoljuk ki az alábbi görbékre a $t = 0$ helyen a görbületet, torziót és kísérő triédert. Itt e_1, e_2, e_3 a szokásos bázis.

(1) $e^t(\cos(t)e_1 + \sin(t)e_2 + e_3)$;

(2) $(1/3)t^3 e_1 + 2te_2 + (2/t)e_3$;

(3) $te_1 + (3/2)t^2 e_2 + (3/2)t^3 e_3$.

→ **10.13. Feladat [9].** Számítsuk ki egy csavarvonal görbületét és torzióját.

→ **10.14. Feladat [10].** Számoljuk ki a kísérő triédert, görbületet és a torziót a természetestől eltérő paraméterezésben.

10.15. Feladat [10]. Írjuk fel egy görbe Taylor-polinomját harmadrendű tagokig bezárólag a kísérő triéder által adott koordinátarendszerben. Mi a simulókör Taylor-polinomja ugyanebben a koordinátarendszerben?

10.16. Feladat [10]. Általánosítsuk a görbék vizsgálatát $\mathbb{R}^n$-beli értékű görbékre: $e(s)$, $\kappa(s)$ és $n(s)$ bevezetése után mutassuk meg, hogy $n'(s)+\kappa(s)e(s)$ merőleges $n(s)$-re és $e(s)$-re, hossza legyen $\kappa_2(s)$, és ha $\kappa_2(s)\neq 0$, legyen $n_2(s)=(n'(s)+\kappa(s)e(s))/\kappa_2(s)$, stb.

10.17. Felületek. *Elemi felületdarab* alatt $\mathbb{R}^2$ valamely D tartományának egy olyan kölcsönösen egyértelmű és folytonosan differenciálható $r\colon D\to\mathbb{R}^3$ leképezését fogjuk érteni, amelyre minden $u\in D$ pontban a $\partial_1 r(u)$ és $\partial_2 r(u)$ parciális derivált vektorok nem párhuzamosak (speciálisan, egyik sem nulla.) Ez a *Gauss-féle előállítás*. A feltétel úgy is kifejezhető, hogy a $(\partial_1 r(u), \partial_2 r(u))$ mátrix rangja 2. Ez azt jelenti, hogy lokálisan $r=(r_1,r_2,r_3)$ valamelyik koordinátája kifejezhető a másik kettővel (*Euler–Monge-féle* vagy *explicit előállítás*). Ha például r_3 kifejezhető r_1, r_2-vel, akkor lokálisan egy $r_3=f(r_1,r_2)$ alakú explicit előállításra térhetünk át. Természetesen egy explicit előállításról mindig könnyen visszatérhetünk a Gauss-féle előállításra. Az implicit függvény tétel szerint megfelelő feltételek mellett (ha nem minden parciális derivált nulla) egy $F(x,y,z)=0$ alakú egyenlet, ahol $x,y,z\in\mathbb{R}$ és F valós értékű, lokálisan egy elemi felületdarabot ad meg; az implicit függvény tétel szerint lokálisan áttérhetünk explicit előállításra.

Ha $G\subset\mathbb{R}^2$ egy másik tartomány, $u\colon G\to D$ pedig egy kölcsönösen egyértelmű, folytonosan differenciálható leképezése G-nek D-re amelynek az inverze is folytonosan differenciálható, akkor az $r\circ u$ függvényt az elemi felületdarab egy *ekvivalens előállítás*ának nevezzük.

A $\partial_1 r(u)\times\partial_2 r(u)$ vektort *felületi normális*nak, az

$$m(u)=\frac{\partial_1 r(u)\times\partial_2 r(u)}{\left|\partial_1 r(u)\times\partial_2 r(u)\right|}$$

vektort pedig *felületi normális egységvektor*nak fogjuk nevezni. Legtöbbször nem írjuk ki a változótól való függést. Világos, hogy $\partial_1 r$, $\partial_2 r$ és m egy (pozitív irányítású) bázist alkotnak. Az r ponton átmenő, $\langle p-r, m\rangle=0$, $p\in\mathbb{R}^3$ egyenletű síkot *r-beli érintősík*nak nevezzük. Ez az r pont körül elsőrendben közelíti a felületdarabot.

*Felületi görbé*n egy $r\circ u$ alakban előállítható görbét fogunk érteni, ahol $u\colon[a,b]\to D$ egy görbe. Ha $u=(u_1,u_2)$ folytonosan differenciálható, akkor a felületi görbe is, és érintővektora

$$(r\circ u)'=u_1'\partial_1 r+u_2'\partial_2 r,$$

azaz egy, az $r(u(t))$ pontból kiinduló, az érintősíkban haladó vektornak tekinthető. (Megjegyezzük, hogy gyakran a nem ívhossz paraméter szerinti deriváltat ponttal jelölik.) Felületi görbék például az úgynevezett paramétervonalak, amelyeknek egyenlete $u_1(t)=t$, u_2 konstans, illetve u_1 konstans, $u_2(t)=t$.

→ **10.18. Feladat [9].** Határozzuk meg egy explicit, illetve egy implicit alakban adott felület normálvektorát.

10.19. Első alapmennyiségek. Az előző definíció jelöléseivel, legyen $g_{ij} = \langle \partial_i r, \partial_j r \rangle$, $1 \le i, j \le 2$. A g_{ij} számokat *első alapmennyiségek*nek nevezzük. Hagyományos (Gauss-tól származó) jelölésük

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22}.$$

Jelentőségük az, hogy segítségükkel kifejezhetők különböző, a felület metrikáját jellemző mennyiségek. Például egy felületi görbe ívhossza:

$$s(t) = \int_a^t \big|(r \circ u)'\big| = \int_a^t \sqrt{\textstyle\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'}, \tag{1}$$

azaz az első alapmennyiségekkel képzett kvadratikus forma, az *első alapforma* segítségével fejezhető ki. Ez egyébként pozitív definit, mert $g_{11} > 0$ és $\det(g_{ij}) = |\partial_1 r \times \partial_2 r| > 0$. Az (1) összefüggésből

$$\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j',$$

amit gyakran

$$(ds)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j$$

alakban írnak. Egy másik példa egy adott ponton átmenő két, a folytonosan differenciálható $u\colon [a,b] \to D$ illetve $v\colon [c,d] \to D$ függvények segítségével megadott felületi görbe által bezár szög, ami alatt az érintővektoraik által bezárt α szöget értjük. Erre

$$\cos\alpha = \frac{\big\langle (r\circ u)', (r\circ v)' \big\rangle}{\big|(r\circ u)'\big|\big|(r\circ v)'\big|} = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' v_j'}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'}\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} v_i' v_j'}}.$$

Harmadik példa egy $r(A)$ felületdarab felszíne, ahol $A \subset D$ mérhető halmaz. Ez az integráltranszformációs formula szerint

$$\chi^2(r(A)) = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

A fenti formulákban mindenütt az összegzés egytől kettőig megy, de ezt nem írtuk ki, és a továbbiakban is így teszünk. Tovább egyszerűsítené a jelöléseket a differenciálgeometriában és fizikában elterjedten használt *Einstein-konvenció*: nem írjuk ki a szumma jeleket, de minden indexre, amely kétszer fordul elő, összegezni kell. Mivel ez a megállapodás nem áll összhangban a többi paragrafus jelöléseivel, nem használjuk.

10.20. Második alapmennyiségek. Legyen egy felületet előállító $u \mapsto r(u)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható. Az $r_0 = r(u_0)$ pontban legyen a felület normál egységvektora m_0. A felületet elsőrendben az r_0 pont közelében a $\langle p - r_0, m_0 \rangle = 0$ egyenletű ($p \in \mathbb{R}^3$) sík közelíti. Tekintsük az r függvény másodrendű Taylor-kifejtését:

$$\begin{aligned} r(u_0 + h) &= r_0 + \partial_1 r(u_0) h_1 + \partial_2 r(u_0) h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\partial_1^2 r(u_0) h_1^2 + 2\partial_1\partial_2 r(u_0) h_1 h_2 + \partial_2^2 r(u_0) h_2^2\Big) + \omega(h), \end{aligned}$$

ahol $\omega(h)/|h|^2 \to 0$, ha $h \to 0$. Ha elhagyjuk a maradéktagot, egy, az r felületet másodrendben közelítő $h \mapsto \tilde{r}(h)$ felületet kapunk, az r_0-*beli oszkuláló paraboloid*ot. Az oszkuláló paraboloid pontjainak az r_0-beli érintősíktól vett előjeles távolságát, bevezetve a $h_{ij} = \langle \partial_i \partial_j r, m \rangle$ mennyiségeket,

$$\langle \tilde{r}(h) - r_0, m_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}(u_0) h_i h_j$$

adja. A h_{ij} mennyiségeket a felület *második alapmennyiség*einek nevezzük. Hagyományos, Gauss által bevezetett jelölésük: $L = h_{11}$, $M = h_{12} = h_{21}$ és $N = h_{22}$. A fenti összefüggés azt mutatja, hogy az oszkuláló paraboloidnak az érintősíktól vett előjeles távolsága egy olyan kvadratikus alakkal fejezhető ki, amelynek együtthatói a második alapmennyiségek. Az oszkuláló paraboloid hagyományos felírása, a $\partial_1 r(u_0)$, $\partial_2 r(u_0)$, m_0 bázisvektorok által meghatározott koordinátarendszerben, ha a koordináták ξ, η, ζ:

$$\zeta = \frac{1}{2}(L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2).$$

Az első alapmennyiségek csak a felület metrikáját határozzák meg: egymástól különböző felületeknek lehet azonos metrikájuk, például egy sík lapot hengerré csavarhatunk. A második alapmennyiségek a felület térbeli alakját adják meg.

10.21. Meusnier tétele. *Legyen egy felületet előállító $u \mapsto r(u)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható, és tekintsük a $t \mapsto u(t)$ leképezéssel adott kétszer folytonosan differenciálható felületi görbét, amelynek érintője sehol sem nulla. Ha ennek görbülete κ, főnormálisa n, a felület normál egységvektora pedig m, akkor*

$$\kappa \langle n, m \rangle = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j'}{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'}.$$

A tétel geometriai jelentése, hogy a felületi görbe görbülete – legalábbis, ha n nem merőleges m-re – csak a görbe e érintő egységvektorától, valamint a főnormális vektor és a felületi normális $\langle n, m \rangle$ belső szorzatától függ. Megegyezik például az adott ponton átmenő, az érintő és a főnormális által meghatározott sík és a felület metszeteként előálló síkgörbe görbületével. Vezessük be a *normálgörbület*nek nevezett

$$\kappa_n = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j'}{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'}$$

számot, amely csak az érintő egységvektortól függ. A felületi görbe görbülete akkor minimális, ha n benne van az e és m által meghatározott síkban, az úgynevezett *normálsík*ban, és értéke ekkor $|\kappa_n|$, megegyezik a normálsík és a felület metszeteként előálló *normálmetszet* görbületével. Ha a tételt alkalmazzuk egy, az adott ponton átmenő, $1/|\kappa_n|$ sugarú gömbre is, amelynek szintén m a normál egységvektora, akkor látjuk, hogy a felületi görbe görbülete ugyanannyi, mint az e és n által meghatározott sík által ebből a gömbből kimetszett körnek a görbülete, így ez a görbe simulóköre.

Bizonyítás. Jelölje $t \mapsto s(t)$ az ívhosszt, és tekintsük a felületi görbét az ívhossz függvényeként. Ekkor

$$e = \sum_i u_i' \frac{dt}{ds} \partial_i r,$$
$$\frac{de}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \sum_{i,j} u_i' u_j' \partial_i \partial_j r + \sum_i \alpha_i \partial_i r,$$

ahol α_i valamilyen skalár értékű függvény. Belsőleg szorozva m-mel, felhasználva a második alapmennyiségek definícióját, valamint, hogy

$$\frac{1}{\frac{dt}{ds}} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'},$$

kapjuk az állítást.

10.22. Főnormálgörbületek, összeg- és szorzatgörbület. Az előző pont jelöléseit használva, vizsgáljuk meg egy adott pontban a normálgörbületnek az érintővektortól való függését. Az u' derivált vektor egyértelműen meghatározza az $r' \circ u'$ érintővektort, így vizsgálatainkat u' segítségével végezhetjük. Mivel

$$\kappa_n = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j'}{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'},$$

látjuk, hogy κ_n értéke nem függ u' hosszától, csak az irányától.

Az egységkörön κ_n felveszi maximumát és minimumát. Jelölje κ_1 a maximumot, κ_2 pedig a minimumot. A

$$\kappa_n - \kappa_k = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j'}{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'} - \kappa_k = \frac{\sum_{i,j} (h_{ij} - \kappa_k g_{ij}) u_i' u_j'}{\sum_{i,j} g_{ij} u_i' u_j'}$$

függvény $k = 1$-re ≤ 0, $k = 2$-re pedig ≥ 0, és mindkét esetben felveszi a nulla értéket is. Mivel a nevező pozitív definit, a számláló szemidefinit kell legyen, azaz azt kapjuk, hogy a

$$\sum_{i,j} (h_{ij} - \kappa_k g_{ij}) u_i' u_j' \tag{1}$$

kvadratikus alak szemidefinit. Ez csak akkor teljesülhet, ha a diszkriminánsa nulla, azaz

$$\det(h_{ij} - \kappa_k g_{ij}) = 0.$$

A κ_n függvény szélsőértékei tehát ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei. Mivel csak két gyök van, ezek a keresett szélsőértékek. Beszorozva a g_{ij} mátrix g^{kl} inverzével, és felhasználva a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

ez a *Gauss-féle görbület* vagy *szorzatgörbület*, és

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \sum_{i,j} g^{ij} h_{ij},$$

ez az *összeggörbület*. A szorzatgörbülettel kapcsolatban nevezetes eredmény Gauss *Theorema egregium*a, amely szerint elég sima felületekre a szorzatgörbület csak az első alapmennyiségektől függ, pontosabban az első alapmennyiségeknek és bizonyos deriváltjaiknak egy adott függvénye.

Ha a két gyök egybeesik, akkor κ_n nem függ u'-től, azaz valamely c konstans, és

$$\sum_{i,j} (h_{ij} - c g_{ij}) u'_i u'_j = 0$$

minden u'-re, ami csak úgy lehetséges, ha $h_{ij} = c g_{ij}$, $1 \le i, j \le 2$. Ekkor a pontot *gömbi pont*nak nevezzük. Ha speciálisan $c = 0$, akkor *síkpont*ról beszélünk.

Ha a pont nem gömbi pont, akkor κ_1 és κ_2 a ponthoz tartozó *főgörbület*ek, a megfelelő irányok pedig a *főirány*ok. Ezeket az (1) függvény szélsőértékhelyeit meghatározva kaphatjuk meg, ha megoldjuk a deriválás után kapott

$$\sum_i (h_{ij} - \kappa_k g_{ij}) u'_i = 0, \qquad j = 1, 2$$

homogén lineáris egyenletrendszer. Azokat a felületi görbéket, amelyeknek érintője minden pontban főirány, *görbületi vonal*aknak nevezzük. A fenti egyenletrendszer differenciálegyenlet-rendszernek tekintve és megoldva kaphatjuk meg őket.

10.23. Áttérés más paraméterekre. További vizsgálatainkhoz szükségünk lesz arra, hogy kiszámoljuk, az m, g_{ij}, h_{ij} és κ_n mennyiségek hogyan függnek a paraméterezés megválasztásától. Tekintsünk egy inverzével együtt kétszer folytonosan differenciálható u leképezését a sík egy tartományának egy másik tartományra, az r kétszer folytonosan differenciálható elemi felületdarabot, amely az utóbbi tartományon van definiálva, és ennek az $\tilde{r} = r \circ u$ ekvivalens előállítását. Ekkor $\partial_i \tilde{r} = \sum_j \partial_i u_j \partial_j r$. Bevezetve az $a_{ij} = \partial_i u_j$ jelölést, ez az összefüggés $\partial_i \tilde{r} = \sum_j a_{ij} \partial_j r$ alakba írható. Innen

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \partial_i \tilde{r}, \partial_j \tilde{r} \rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g_{kl},$$

azaz a g_{ij} mennyiségek egy kvadratikus forma együtthatóinak megfelelően transzformálódnak. Definíció szerint

$$\begin{aligned} \partial_1 \tilde{r} \times \partial_2 \tilde{r} &= (a_{11} \partial_1 r + a_{12} \partial_2 r) \times (a_{21} \partial_1 r + a_{22} \partial_2 r) \\ &= \det(a_{ij}) \partial_1 r \times \partial_2 r. \end{aligned}$$

Ebből $a = \det(a_{ij})$ jelöléssel

$$\tilde{m} = \frac{\partial_1 \tilde{r} \times \partial_2 \tilde{r}}{|\partial_1 \tilde{r} \times \partial_2 \tilde{r}|} = \operatorname{sgn}(a) m,$$

azaz m attól függően vált előjelet, hogy u' irányítástartó vagy sem. Számoljuk ki h_{ij} transzformációs formuláját is:

$$\partial_i\partial_j\tilde{r} = \sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}\partial_k\partial_l r + \sum_k \alpha_{ijk}\partial_k r$$

valamely α_{ijk} számokkal. Belsőleg szorozva $\tilde{m}$-mal, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{h}_{ij} = \operatorname{sgn}(a)\sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}h_{kl},$$

azaz a h_{ij} mennyiségek hasonlóan transzformálódnak, mint egy kvadratikus forma együtthatói, de ha u' irányításváltó, akkor még előjelet is váltanak. Ennek megfelelően κ_n is előjelet vált, ha u' irányításváltó.

10.24. Euler tétele. *Legyen egy elemi felületdarabot előállító $u \mapsto r(u)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható. Tetszőleges nem gömbi felületi pontban bármely normálgörbület kifejezhető*

$$\kappa_n = \kappa_1\cos^2\vartheta + \kappa_2\sin^2\vartheta$$

alakban, ahol ϑ az érintőirány és a κ_1-nek megfelelő főirány által bezárt szög. A főirányok merőlegesek.

Bizonyítás. Alkalmas, irányítást nem váltó lineáris transzformációval az első alapmennyiségekkel képzett pozitív definit kvadratikus forma együtthatói +1-ek lesznek. Ekkor a paramétervonalak érintői merőlegesek és egységnyi hosszúak. Ezután egy alkalmas forgatással elérhető, hogy a második alapmennyiségekkel képzett kvadratikus forma is diagonális alakú legyen. Így megfelelő új v_i koordinátákra térve át,

$$\kappa_n = \frac{\alpha_1(v_1')^2 + \alpha_2(v_2')^2}{(v_1')^2 + (v_2')^2}.$$

Az α_1, α_2 együtthatók κ_1 és κ_2 kell legyenek, de esetleg fordított sorrendben. Ekkor a két paramétert megcseréljük, és az egyik helyett az ellentettjét vesszük, így $\alpha_1 = \kappa_1$ és $\alpha_2 = \kappa_2$. Most a paramétervonalak érintői merőlegesek és egységnyi hosszúak, és ezek a főirányok, a normálgörbület kifejezése pedig a kívánt alakú.

10.25. Dupin-féle indikátrix. Tekintsük az oszkuláló paraboloid metszetét az érintősíktól $\pm 1/2$ távolságban lévő párhuzamos síkokkal. Ez a *Dupin-féle indikátrix*. Ennek a görbének az egyenlete $\sum_{i,j} h_{ij}\xi_i\xi_j = \pm 1$. Az előző bizonyításban alkalmazott koordinátatranszformációval ez az egyenlet $\kappa_1\eta_1^2 + \kappa_2\eta_2^2 = \pm 1$ alakú lesz, és a koordinátarendszer ortonormált. Ez az egyenlet attól függően, hogy a szorzatgörbület előjele pozitív, negatív, vagy nulla, egy ellipszis, hiperbolapár vagy párhuzamos egyenespár egyenlete. A pontot ettől függően elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus pontnak nevezzük. A Dupin-féle indikátrix szemléletesen mutatja a felület alakját a ponthoz közel: megmutatható, hogy ha a felületet az érintősíkkal párhuzamos $\pm d/2$ távolságú síkokkal elmetszük, majd a kapott alakzatot $1/\sqrt{d}$-szeresre nagyítjuk, akkor $d \to 0$ esetén a kapott alakzat tart a Dupin-féle indikátrixhoz.

10.26. Kitekintés: Riemann-terek. Mint láttuk, a felület elég sok tulajdonságát, például a szög- és hosszmérést, a felszínt, de a Theorema egregium miatt a szorzatgörbületet is, meghatározzák az első alapmennyiségek. A sor tovább folytatható, például az egyenesek szerepét a geodetikusok veszik át: ezek olyan felületi görbék, amelyek bármely két (nem túl távoli) pontjuk között minimális hosszúságúak. Differenciálegyenletük variációszámítás segítségével meghatározható. Ez a minimális távolság egyébként egy metrikát definiál. Az első alapmennyiségek viszont a paramétertartományon definiált függvények, lényegében a paramétertartomány minden pontjához megadnak egy belső szorzatot. Ha tehát egy nyílt halmaz minden pontjához megadunk egy (a ponttól simán függő) belső szorzatot, akkor az elemi felületdarab egy általánosítását kapjuk. Ezt magasabb dimenzióban is megtehetjük. Bonyolultabb alakzatokat ilyen elemi darabok alkalmas módon történő „összeragasztásával" kaphatunk, és így jutunk a Riemann-terek fogalmához. (Nash egy mély tétele szerint az „elég sima" szeparábilis Riemann-terek mind beágyazhatóak valamely euklidészi térbe.)

Egyszerű példaként tekinthetjük a *Bolyai–Lobacsevszkij-sík Poincaré-modell*jét. Itt a felső félsík minden (u_1, u_2), $u_2 > 0$ pontjához $g_{11}(u_1, u_2) = g_{22}(u_1, u_2) = 1/u_2^2$ és $g_{12}(u_1, u_2) = g_{21}(u_1, u_2) = 0$. Megmutatható, hogy a geodetikusok olyan körök lesznek, amelyeknek a középpontja az $u_2 = 0$ egyenesen van.

→ **10.27. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi elemi felületdarabok érintősíkját az adott pontban:

(1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ az (x_1, y_1, z_1) pontban;

(2) $x^2 + y^2 = z^2$ az (x_1, y_1, z_1) pontban;

(3) $xy^2 + z^3 = 12$ az $(1, 2, 2)$ pontban;

(4) $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ a $(2, 2, 2)$ pontban.

→ **10.28. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi elemi felületdarabok főgörbületi sugarait az adott pontban:

(1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ a $(0, 0, c)$ pontban;

(2) $x^2/p + y^2/q = 2z$ az $(0, 0, 0)$ pontban;

(3) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = mv$ tetszőleges pontban;

(4) $xy = az$ tetszőleges pontban.

→ **10.29. Feladat [10].** Határozzuk meg az $x^2/p + y^2/q = 2z$ felület Gauss-görbületét.

→ **10.30. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy a $z = \ln\cos x - \ln\cos y$ felület összeggörbülete nulla.

Az alábbi néhány pontban bevezetjük a differenciálható sokaságok elméletének legalapvetőbb fogalmait.

∗ **10.31. Térkép, atlasz, sokaság.** Egy m-dimenziós *térkép* vagy *koordinátarendszer* egy X metrikus tér egy nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$ egy nyílt részhalmazára képező φ homeomorfizmus. A φ és ψ m-dimenziós térképek $\mathcal{C}^r$-*összeférhető*ek $(0 \le r \le \infty)$, ha $\varphi \circ \psi^{-1}$ és $\psi \circ \varphi^{-1}$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések (ezek a φ és ψ értelmezési tartománya metszetének φ és ψ általi képeit képezik le egymásra). Egy *m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz* az X m-dimenziós térképeinek egy $\mathcal{C}^r$-összeférhető φ_i, $i \in I$ családja úgy, hogy a φ_i térképek értelmezési tartományai lefedik X-et. Egy m-dimenziós *$\mathcal{C}^r$-sokaság* egy M szeparábilis metrikus tér

amelyen meg van adva egy m-dimenziós $\mathcal{C}^r$-atlasz. A $\mathcal{C}^r$-atlaszhoz M akárhány további m-dimenziós térképét hozzávehetjük, ha azok $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek az eredeti atlasz térképeivel, mert ekkor egymással is $\mathcal{C}^r$-összeférhetőek lesznek. Gyakran érdemes technikai okokból egy atlaszhoz hozzávenni az összes vele $\mathcal{C}^r$-összeférhető térképet; az így kapott atlaszt az adott atlaszhoz tartozó *telített atlasz*nak nevezzük. A $\mathcal{C}^\infty$-sokaságokat *sima sokaság*oknak is nevezzük.

∗ **10.32. Példa.** Bármely nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek az identikus leképezés által megadott egyetlen térképből álló atlasszal egy sima sokaság. Ha mást nem mondunk, $\mathbb{R}^m$ nyílt részhalmazain mindig erre a sokaság-struktúrára gondolunk.

∗ **10.33. Példa.** Az identikus leképezés által megadott térkép valamint a $\varphi(x) = \sin(x)$ leképezés által megadott térkép $\mathcal{C}^\infty$-összeférhetőek $]-\pi/2, \pi/2[$-n.

∗ **10.34. Példa.** Az identikus leképezés $\mathbb{R}$-en, az $\varphi(x) = x$, ha $x \leq 0$ és $\varphi(x) = 2x$, ha $x > 0$, valamint a $\psi(x) = x^3$, ha $x \in \mathbb{R}$ leképezések által megadott térképek páronként nem összeférhetőek, bár külön-külön mindegyik egy-egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{R}$-en.

∗ **10.35. Feladat [7].** Tekintsük az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ halmazba képező

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

és

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

függvények (polár koordináták) inverzeit. Mutassuk meg, hogy az eredeti atlasszal $\mathcal{C}^\infty$-összeférhető atlaszt alkotnak.

∗ **10.36. Feladat [7].** Milyen térképeket kapunk $\mathbb{R}^3$-ban a henger, illetve gömbi koordinátákból?

∗ **10.37. Példa.** Legyen $\mathbb{R}^{m+1}$ szokásos ortonormált bázisa $e_0, e_1, \ldots, e_m$. Tekintsük az $\mathbb{S}_m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ gömbfelületet. Az $e_1, \ldots, e_m$ által kifeszített alteret $\mathbb{R}^m$-mel azonosítva, ha $x \in \mathbb{S}_m$ koordinátái $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^m$, legyen $y = \varphi_1(x) = (x - \xi^0 e_0)/(1 - \xi^0)$, ha $x \neq e_0$ (sztereografikus projekció e_0-ból). A leképezés inverze

$$x = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1}.$$

Hasonlóan, legyen $\varphi_2(x) = (x + \xi^0 e_0)/(1 + \xi^0)$, ha $x \neq -e_0$ (sztereografikus projekció $-e_0$-ból). Ekkor $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(y) = y/\|y\|^2$ egy $\mathcal{C}^\infty$-leképezés, és az inverze is, így φ_1, φ_2 egy sima sokaság struktúrát definiál $\mathbb{S}_m$-en.

∗ **10.38. Példák.** Möbius-szalag, Klein-féle kancsó.

∗ **10.39. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{S}_m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával semmilyen n-re sem.

∗ **10.40. Sima leképezések.** Legyenek M és N sima sokaságok. Egy $f\colon M \to N$ leképezést $\mathcal{C}^r$-*leképezés*nek $(0 \le r \le \infty)$ nevezünk, ha az M atlaszának bármely φ és az N atlaszának bármely ψ térképére $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés. Az ilyen leképezések osztályát $\mathcal{C}^r(M;N)$ jelöli. A $\mathcal{C}^\infty$-leképezéseket *sima leképezés*eknek is nevezzük. Ha mást nem mondunk, $\mathcal{C}^r$-*függvény*, illetve *sima függvény* alatt $\mathcal{C}^r(M;\mathbb{R})$ illetve $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ elemeit értjük. Az M és N sima sokaságok *diffeomorf*ak, ha létezik olyan $f\colon M \to N$ kölcsönösen egyértelmű leképezése M-nek N-re, amelyre f és f^{-1} is sima; egy ilyen f-et *diffeomorfizmus*nak nevezünk.

∗ **10.41. Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok és $f\colon K \to M$ valamint $g\colon M \to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezések, akkor $g \circ f\colon K \to N$ is $\mathcal{C}^r$-leképezés.*

Bizonyítás. Bármely φ, ψ térképekre K-ban illetve N-ben, ha x a $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezés értelmezési tartományának tetszőleges pontja és χ az M atlaszának egy olyan térképe, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza $y = f(x)$-et, a $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezés a $\varphi(x)$ pont valamely környezetében megegyezik a $\psi \circ g \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ f \circ \varphi^{-1}$ leképezéssel, így $\mathcal{C}^r$-leképezés. Mivel ez $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ értelmezési tartományának bármely pontjára teljesül, $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ egy $\mathcal{C}^r$-leképezés.

∗ **10.42. Példák.** (1) Az $f\colon x \mapsto 2x/(1 - \|x\|^2)$ leképezés sima diffeomorfizmusa $\mathbb{R}^m$ nyílt $K_1(0)$ egységgömbjének $\mathbb{R}^m$-re, az inverze $y \mapsto y/(1 + \sqrt{1 + \|y\|^2})$.

(2) A $g\colon x \mapsto x/\|x\|^2$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0)\setminus\{0\}$-nak $K_1(0)$ külsejére, inverze saját maga.

(3) A $g \circ f$ leképezés sima diffeomorfizmusa $K_1(0)$ külsejének $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$-ra.

∗ **10.43. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy a 10.34 példában megadott sokaságok diffeomorfak.

∗ **10.44. Görbék érintkezése.** Legyen M egy sima sokaság. A $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to M$ $\mathcal{C}^1$-görbékre azt mondjuk, hogy a $t_0 \in \mathbb{R}$ pontban *érintkeznek*, ha $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ és van olyan φ térkép, amelynek értelmezési tartományában benne van $x = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ és

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(t_0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(t_0).$$

Legyen N egy másik sima sokaság, és $f\colon M \to N$ egy $\mathcal{C}^1$-leképezés. Ekkor az $f \circ \gamma_1$ és $f \circ \gamma_2$ görbék $\mathcal{C}^1$-görbék és érintkeznek t_0-ban: az $y = f(x)$ jelöléssel $f \circ \gamma_1(t_0) = y = f \circ \gamma_2(t_0)$ és az y-t tartalmazó értelmezési tartományú bármely ψ térképre

$$\frac{d(\psi \circ f \circ \gamma_i)}{dt}(t_0) = \frac{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_i)}{dt}(t_0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))\frac{d(\varphi \circ \gamma_i)}{dt}(t_0),$$

ha $i = 1, 2$, így megegyeznek.

Speciálisan, $N = M$-et f-nek pedig az identikus leképezést választva, kapjuk, hogy a görbék érintkezése t_0-ban nem függ a térkép választásától: ha van olyan térkép, amelyre érintkeznek, akkor minden x-et tartalmazó térképre érintkeznek, és így az is teljesül, hogy ha t_0-ban γ_1 érintkezik γ_2-vel, továbbá γ_2 érintkezik γ_3-mal, akkor γ_1 is érintkezik γ_3-mal.

∗ **10.45. Érintővektorok.** Egy M sima sokaság egy *érintővektora az $x \in M$ pontban* azon $\mathcal{C}^1$-beli $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ görbék osztálya, amelyekre $\gamma(0) = x$ és érintkeznek a 0-ban. Az M sokaság x-beli érintővektorainak halmazát T_xM-mel jelöljük, azt az érintővektort pedig, amelyhez egy adott γ tartozik, $\gamma'(0)$-val. A

$$\mathrm{th}_\varphi\colon \gamma'(0) \mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le T_xM-et $\mathbb{R}^n$-re. Az inverz leképezés a $h \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz a

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + th)$$

sima görbével érintkező görbék osztályát rendeli, mert

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(\varphi(x) + th)|_{t=0} = h.$$

A

$$\mathrm{th}_\varphi^{-1}(h_1) + \mathrm{th}_\varphi^{-1}(h_2) = \mathrm{th}_\varphi^{-1}(h_1 + h_2), \quad \alpha\,\mathrm{th}_\varphi^{-1}(h) = \mathrm{th}_\varphi^{-1}(\alpha h)$$

definícióval elláthatjuk T_xM-et egy vektortér-struktúrával. Ha ψ egy másik térkép, amelynek értelmezési tartományában szintén benne van x, akkor

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + th)$$

jelöléssel

$$\mathrm{th}_\psi \circ \mathrm{th}_\varphi^{-1}\colon h \mapsto \frac{d(\psi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))h.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{th}_\psi \circ \mathrm{th}_\varphi^{-1}$ bijektív lineáris leképezés, így a vektortér-struktúra nem függ a térkép választásától.

∗ **10.46. Az érintőleképezés.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f\colon M \to N$ egy sima leképezés, $x \in M$ és $y = f(x) \in N$. Egy $\gamma'(0) \in T_xM$ érintővektorhoz rendeljük hozzá a $(f \circ \gamma)'(0)$ érintővektort; mint a 10.44 pontban megmutattuk, ez nem függ az érintővektor reprezentánsának választásától. Jelölje ezt a $T_xM \to T_yN$ leképezést T_xf. Ez az *f érintőleképezése* az x pontban. Megmutatjuk, hogy lineáris. Valóban, mint a 10.44 pontban már kiszámoltuk, ha φ az x-ben, a ψ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jelöléssel

$$\frac{d(\psi \circ f \circ \gamma)}{dt}(0) = F'(\varphi(x))\frac{d(\varphi \circ \gamma_i)}{dt}(0),$$

így mivel a th_ψ és th_φ leképezések lineáris bijekciók, a $T_xf = \mathrm{th}_\psi^{-1} \circ F'(\varphi(x)) \circ \mathrm{th}_\varphi$ leképezés is lineáris, sőt, rangja megegyezik $F'(\varphi(x))$ rangjával. Így definiálhatjuk a T_xf érintőleképezés rangját. Ezt a rangot $\mathrm{rg}_x f$-fel is fogjuk jelölni.

∗ **10.47. Tétel.** *Ha K, M, N sima sokaságok, $f\colon K \to M$ és $g\colon M \to N$ sima leképezések, $x \in K$ és $y = f(x)$, akkor $T_x(g \circ f) = T_yg \circ T_xf$.*

∗ **10.48. Az érintővektorok mint funkcionálok.** Legyen M egy sima sokaság és $X = \gamma'(0) \in T_xM$. Minden M-en értelmezett sima f függvényhez az

$$f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés egy számot rendel, amely csak az $X = \gamma'(0)$ érintővektortól függ. Ezt a számot Xf-fel is jelöljük. Nyilván ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és f, g sima függvények, akkor $X(\alpha f + \beta g) = \alpha Xf + \beta Xg$, azaz a funkcionál lineáris, és a szorzás differenciálási szabálya alapján $X(fg) = f(x)Xg + g(x)Xf$. Az érintővektorokat ezen tulajdonságok segítségével is be lehet vezetni. Meg lehet mutatni, hogy két érintővektor pontosan akkor egyenlő, ha minden sima függvényre ugyanúgy hatnak.

Legyen most $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ egy x-ben értelmezett térkép, és

$$X^1, X^2, \dots, X^m$$

az X érintővektor koordinátái a $\mathrm{th}_\varphi^{-1}(e_i)$, $i = 1, 2, \dots m$ bázisban, ahol $e_1, e_2, \dots, e_m$ az $\mathbb{R}^m$ szokásos bázisa. (Ez a bázis a T_xM érintőtérnek a φ térképhez tartozó természetes bázisa.) Ekkor

$$\begin{aligned} Xf &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(\varphi(x)) \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően X hagyományos felírása ebben a koordinátarendszerben

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

∗ **10.49. Az érintőleképezés lokális koordinátákban.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f\colon M \to N$ egy sima leképezés, $x \in M$ és $y = f(x)$. Ha $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m)$ az x-ben $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ pedig az y-ban értelmezett térkép, akkor az

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

érintővektorra

$$Y = (T_x f)(X) = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial \psi^j},$$

ahol

$$Y^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}(\varphi(x)) X^i,$$

mivel az $F = \psi \circ f \circ \varphi$ jelöléssel az $F\colon (\varphi^1 \varphi^2, \dots \varphi^m) \to (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n)$ leképezés deriváltjának mátrixa

$$\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i}(\varphi(x)).$$

Speciálisan, ha $N = M$ és f az identikus leképezés, azt kapjuk, hogy térképcserénél X koordinátái a fenti módon transzformálódnak.

∗ **10.50. Feladat [8].** Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \text{ha}\quad \frac{-\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2},$$

és nulla egyébként. Számoljuk át az $(1,0,0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba.

∗ **10.51. Érintőnyaláb.** Egy M sima sokaság érintőtereinek (diszjunkt) unióját a sokaság *érintőnyalábj*ának nevezzük. Ez is sima sokasággá tehető egy természetes módon, de ezzel nem foglalkozunk.

∗ **10.52. Példa.** Egy csavarvonal egy darabja.

∗ **10.53. Immerzió, szubmerzió, szubimmerzió és beágyazás.** Legyenek M és N sima sokaságok, $f\colon M\to N$ egy sima leképezés. Ha T_xf kölcsönösen egyértelmű minden $x\in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *immerzió*. Ha T_xf a $T_{f(x)}N$-re képez minden $x\in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubmerzió*. Ha T_xf rangja ugyanannyi $x\in M$-re, akkor azt mondjuk, hogy f *szubimmerzió*. Ha f immerzió, kölcsönösen egyértelmű és homeomorfizmus M és $f(M)$ között, akkor azt mondjuk, hogy *beágyazás*.

∗ **10.54. Példák.** $x\mapsto(x,0)$, $(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto(x,0,0)$, $]0,2\pi[\ni t\mapsto(\sin t,\sin 2t)$, $x\mapsto x^3$, $x\mapsto(\cos x,\sin x)$.

∗ **10.55. Részsokaság.** Egy M egy sokaság egy K részhalmaza az M egy k-dimenziós *részsokaság*a, ha minden $x\in K$-hoz van olyan $\varphi=(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^m)$ térkép az M atlaszához tartozó telített atlaszban, amelynek U értelmezési tartományában benne van x és amelyre

$$\varphi(U\cap K)=\{(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^m)\in\varphi(U)\colon\varphi^{k+1}=\dots=\varphi^m=0\}.$$

Egy nyílt részhalmaz nyilván mindig részsokaság.

∗ **10.56. Tétel.** *Egy részsokaságon egyetlen olyan sima telített atlasz létezik, amelyre az identikus leképezése K-nak M-be beágyazás. Megfordítva, ha $f\colon K\to M$ egy beágyazás, akkor $f(K)$ egy részsokaság, amely diffeomorf K-val.*

∗ **10.57. Whitney tétele.** *Minden m-dimenziós sima sokaság beágyazható $\mathbb{R}^{2m+1}$-be sima részsokaságként.*

∗ **10.58. Tétel.** *Legyen $f\colon M\to N$ egy szubmerzió, $x\in M$ és $y=f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y)$ egy zárt részsokasága M-nek és $T_xf^{-1}(y)$ a T_xf magja.*

∗ **10.59. Példa.** Az $\mathbb{S}_m$ gömb mint az $x\mapsto\|x\|$, $x\in\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$ leképezésnél az 1 ősképe.

∗ **10.60. Vektormező.** Egy m-dimenziós M sima sokaságon értelmezett $X\colon x\mapsto X(x)\in T_xM$ leképezést *vektormező*nek nevezünk. Nyilván ha X, Y vektormezők, $\alpha\in\mathbb{R}$ és f sima függvény M-en, akkor $X+Y$, αX és fX is vektormezők. Az X vektormezőt *sima vektormező*nek nevezzük, ha minden f sima függvényre $x\mapsto X(x)f$ sima függvény; ezt a függvényt Xf-fel jelöljük. Megmutatható, hogy X pontosan akkor sima vektormező, ha bármely φ térképre az

$$X(x)=\sum_{i=1}^{m}X^i(x)\frac{\partial}{\partial\varphi^i}$$

előállításában szereplő X^i koordinátafüggvények simák.

∗ **10.61. Sima vektormezők Lie-zárójele.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság, X Y pedig sima vektormezők M-en. Megmutatható, hogy létezik (és csak egy) $[X,Y]$ vektormező amelyre bármely f sima függvényre

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Mivel Xf és Yf, és így $X(Yf)$ valamint $Y(Xf)$ is sima függvények, $[X,Y]$ sima vektormező.

Legyen a φ térkép az x-ben értelmezve. Ekkor

$$X(x)f = \sum_{j=1}^{m} X^j(x)\frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

így

$$\begin{aligned} Y(Xf) &= \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i}\frac{\partial f}{\partial \varphi^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j}, \end{aligned}$$

tehát

$$[X,Y]f = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i}\Big)\frac{\partial f}{\partial \varphi^j},$$

amiből

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i}\Big)\frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

∗ **10.62. Feladat [6].** Mutassuk meg, ha X, Y sima vektormezők és f sima függvény, akkor

$$[X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y.$$

∗ **10.63. Feladat [8].** Az $\mathbb{S}_2$ gömbfelületen gömbi koordinátákban legyen egy vektormező

$$\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

egy másik pedig

$$\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Számoljuk ki a Lie-zárójelüket.

Megoldás.

$$\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \text{ha} \quad \frac{-\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

∗ **10.64. Feladat [11].** Az előző feladatban szereplő vektormezőket számoljuk át az $(1,0,0)$ pontból való vetítés által adott koordinátákba, majd számoljuk ki a Lie-zárójelüket. Ellenőrizzük eredményünket a Lie-zárójel transzformálásával.

Megoldás. A transzformáltak

$$\frac{2\|y\|}{1+\|y\|^2}\Big(-y_2\frac{\partial}{\partial y_1}+y_1\frac{\partial}{\partial y_2}\Big),$$

illetve

$$y_2 1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$

a Lie-zárójel pedig

$$\frac{2\|y\|(\|y\|^2-1)}{\big(1+\|y\|^2\big)^2}\Big(-y_2\frac{\partial}{\partial y_1}+y_1\frac{\partial}{\partial y_2}\Big).$$

∗ **10.65. Lie-algebra.** Egy V vektorteret $\mathbb{K}$ felett egy olyan $(x,y)\mapsto[x,y]$ kétváltozós művelettel *Lie-algebrá*nak nevezünk, ha

(1) $[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]$ minden $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ és $x,y,z\in V$-re;

(2) $[x,y]=-[y,x]$ minden $x,y\in V$-re;

(3) $[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x]=0$ minden $x,y,z\in V$-re (*Jacobi-azonosság*).

∗ **10.66. Tétel.** *Egy M sima sokaság sima vektormezői a vektormezők Lie-zárójelével Lie-algebrát alkotnak $\mathbb{R}$ felett.*

Bizonyítás. Kiszámoljuk.

∗ **10.67. Iránymező, teljes integrál.** Legyen M egy m-dimenziós sima sokaság és $0\le k\le m$. Egy $S\colon x\mapsto S_x$ hozzárendelést, ahol S_x a T_xM egy k-dimenziós altere, *k-iránymező*nek nevezünk. (A k-dimenziós *disztribúció* elnevezés is szokásos; mi ez utóbbit nem használjuk, mert a disztribúció szó másik értelme sokkal elterjedtebb.) Egy k-iránymezőre azt mondjuk, hogy *sima iránymező*, ha bármely $x\in M$-hez léteznek olyan $X_1,X_2,\dots,X_k$ sima vektormezők, hogy valamely U környezetére x-nek $X_1(y),X_2(y),\dots,X_k(y)$ bázisa T_yM-nek, ha $y\in U$.

Egy S sima k-iránymezőre legyen $\mathcal{E}(S)$ az összes olyan sima vektormezők halmaza, amelyekre $X(x)\in S(x)$, ha $x\in M$; ez az S-hez tartozó *differenciálrendszer*. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{E}(S)$-ből nem vezet ki a sima függvényekkel való szorzás és az összeadás, sőt, még a lokálisan véges vektormező-rendszerek összeadása sem. Egy sima k-iránymezőt *involutív*nak nevezünk, ha $\mathcal{E}(S)$-re $X,Y\in\mathcal{E}(S)$ esetén $[X,Y]\in\mathcal{E}(S)$.

Ha egy k-dimenziós K sima sokaság egy $f\colon K\to M$ immerziójára $(T_xf)(T_xK)=S_{f(x)}$ minden $x\in K$-ra, akkor azt mondjuk, hogy a (K,f) pár az S egy *teljes integrál*ja; az $f(K)$ halmazt a *teljes integrál képé*nek nevezzük. Ha az M sokaság minden pontja rajta van valamely teljes integrál képén, akkor azt mondjuk, hogy S *teljesen integrálható*.

∗ **10.68. Frobenius tétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, egy S iránymező pontosan akkor teljesen integrálható, ha involutív.*

∗ **10.69. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy 1-iránymező mindig teljesen integrálható.

∗ **10.70. Feladat [9].** Legyen az $\mathbb{R}^3$ sokaságon a szokásos koordinátákban

$$X=X^1\frac{\partial}{\partial\varphi^1}+X^2\frac{\partial}{\partial\varphi^2}+X^3\frac{\partial}{\partial\varphi^3}$$

egy sima vektormező, amely sehol sem tűnik el, és $S(x)=X(x)^\perp$ a szokásos belső szorzatban. Mutassuk meg, hogy S pontosan akkor involutív, ha $X\perp\operatorname{rot}X$.

11
Stieltjes-integrál és görbe menti integrál

Mindenki tudja, mi egy görbe, amíg elég matematikát nem tanul, hogy zavarba hozza a számtalan kivétel.

Felix Klein

Ez a paragrafus függvények primitív függvénye meghatározásának problémájával foglalkozik, pontosabban azzal, mikor létezik primitív függvény, és ha létezik, hogyan határozhatjuk meg. Az általános eset lényegesen bonyolultabb, mint a valós változós függvények esete. Eszközünk a görbe menti integrál lesz, ezt viszont Stieltjes-integrál segítségével definiáljuk.

11.1. Definíció: Stieltjes-integrál. Legyenek X, Y és Z normált terek $\mathbb{R}$ felett, és legyen adott egy $(x,y)\mapsto xy$ mindkét változójában lineáris leképezése $X\times Y$-nak Z-be, amelyre valamely K konstanssal $|xy|\le K|x||y|$, ha $x\in X$ és $y\in Y$, azaz korlátos; ezt a leképezés gyakran (kissé pontatlanul) *szorzás*nak fogjuk nevezni. Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ és $f\colon[a,b]\to X$, $g\colon[a,b]\to Y$ függvények. Ha létezik olyan $z\in Z$, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha

$$a=t_0\le\tau_1\le t_1\le\tau_2\le t_2\ldots\le t_{n-1}\le\tau_n\le t_n=b,$$

és a felosztás δ-nál finomabb, azaz $t_j-t_{j-1}<\delta$ minden $1\le j\le n$-re, akkor

$$\Big|z-\sum_{j=1}^{n}f(\tau_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\Big|<\varepsilon,$$

azt mondjuk, hogy z az f függvénynek a g-re vonatkozó *Stieltjes-integrál*ja $[a,b]$-n. Jelölése:

$$\int_a^b f\,dg\quad\text{vagy}\quad\int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Legyen $\int_b^a f\,dg=-\int_a^b f\,dg$.

11.2. Megjegyzés. Különböző szorzásokkal különböző Stieltjes-integrálokat kapunk. Például lehet $X=Y=Z$ egy normált algebra $\mathbb{R}$ felett ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, a kvaterniók illetve oktávok, egy operátoralgebra, stb.) és a szorzás a normált algebra szorzása. Lehet $X=Y$ egy belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, $Z=\mathbb{K}$, és a szorzás a belső szorzás. Lehet $X=Y=Z=\mathbb{R}^3$, és a szorzás a vektori szorzás. Fontos speciális eset, amikor $X=\mathcal{L}(Y;Z)$, és a szorzás az x operátor alkalmazása y-ra. Tulajdonképpen ez a legáltalánosabb eset, mert ha adott egy $X\times Y\to Z$ szorzás, akkor minden x-hez tekinthetjük $\mathcal{L}(Y;Z)$-nek az $M_x\colon y\mapsto xy$ összefüggéssel definiált korlátos lineáris operátorát. Megjegyezzük, hogy a terek némelyikén ekvivalens normát bevezetve, mindig elérhetjük, hogy $|xy|\le|x||y|$ teljesüljön. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektori szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$-ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_a^b f\times dg$. Az egyik legfontosabb speciális eset az, amikor a szorzás a szokásos szorzás $\mathbb{R}$-ben, és $g(t)=t$, ha $t\in[a,b]$, akkor a Riemann-integrált kapjuk.

11.3. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, legyenek $f, f_n\colon [a,b] \to X$ és $g, g_n\colon [a,b] \to Y$ függvények. Ekkor*

(1) *ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f\,dg = c(g(b) - g(a))$;*

(2) *ha $g \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f\,dg = 0$;*

(3) *ha $\int_a^b f\,dg$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\int_a^b (cf)\,dg = c\int_a^b f\,dg \quad \text{és} \quad \int_a^b f\,d(cg) = c\int_a^b f\,dg$$

teljesül; $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha X és Z komplex normált terek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris az első változóban, akkor $\int_a^b (cf)\,dg = c\int_a^b f\,dg$ illetve $\int_a^b (cf)\,dg = \overline{c}\int_a^b f\,dg$, ha pedig Y és Z komplex normált terek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris a második változóban, akkor $\int_a^b f\,d(cg) = c\int_a^b f\,dg$ illetve $\int_a^b f\,d(cg) = \overline{c}\int_a^b f\,dg$;

(4) *ha $\int_a^b f_1\,dg$ és $\int_a^b f_2\,dg$ léteznek, akkor $\int_a^b (f_1+f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg + \int_a^b f_2\,dg$; ha $\int_a^b f\,dg_1$ és $\int_a^b f\,dg_2$ léteznek, akkor $\int_a^b f\,d(g_1+g_2) = \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2$;*

(5) *ha $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, $(x^{(j)}, y) \mapsto x^{(j)}y \in Z_j$ $(j = 1, \dots, n)$ szorzások, $xy = (x^{(1)}y, \dots, x^{(n)}y)$, és $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$, akkor $\int_a^b f\,dg$ pontosan akkor létezik, ha az $\int_a^b f^{(j)}\,dg$ integrálok léteznek, és $\int_a^b f\,dg = (\int_a^b f^{(1)}\,dg, \dots, \int_a^b f^{(n)}\,dg)$;*

(6) *ha $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$, $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$, $(x, y^{(j)}) \mapsto xy^{(j)} \in Z_j$ $(j = 1, \dots, n)$ szorzások, $xy = (xy^{(1)}, \dots, xy^{(n)})$, és $g = (g^{(1)}, \dots, g^{(n)})$, akkor $\int_a^b f\,dg$ pontosan akkor létezik, ha az $\int_a^b f\,dg^{(j)}$ integrálok léteznek, és $\int_a^b f\,dg = (\int_a^b f\,dg^{(1)}, \dots, \int_a^b f\,dg^{(n)})$;*

(7) *ha W normált tér, $T\colon Z \to W$ egy korlátos lineáris leképezés, $\int_a^b f\,dg$ létezik és $x * y = T(xy)$, akkor $\int_a^b f * dg = T\Big(\int_a^b f\,dg\Big)$;*

(8) *$\Big|\int_a^b f\,dg\Big| \le K \cdot \mathbb{V}(g) \cdot \sup_{a\le t\le b}|f(t)|$;*

(9) *ha Z Banach-tér, f folytonos, g pedig korlátos változású $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f\,dg$ létezik;*

(10) *ha $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton és folytonos függvény, $\int_a^b f\,dg$ létezik, akkor $\int_a^b f\,dg = \int_{h(a)}^{h(b)} (f \circ h^{-1})\,d(g \circ h^{-1})$ (helyettesítéses integrálás);*

(11) *ha $\int_a^b f\,dg$ létezik, és $y * x = xy$, akkor $\int_a^b f\,dg + \int_a^b g * df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ (parciális integrálás);*

(12) *ha Z Banach-tér, $\int_a^b f\,dg$ létezik és $a \le c \le b$, akkor $\int_a^c f\,dg$ és $\int_c^b f\,dg$ is léteznek és összegük $\int_a^b f\,dg$;*

(13) *ha* $a \le c \le b$, *valamint* $\int_a^c f\,dg$ *és* $\int_c^b f\,dg$ *léteznek, és az egyik függvény folytonos* c*-ben, a másik függvény pedig korlátos* c *egy környezetében, akkor* $\int_a^b f\,dg$ *is létezik és megegyezik* $\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$*-vel;*

(14) *ha* $\mathbb{V}_a^b g < \infty$ *és* $f_n \to f$ *az* $[a,b]$*-n egyenletesen,* $\int_a^b f_n\,dg$, $\int_a^b f\,dg$ *léteznek, akkor* $\int_a^b f_n\,dg \to \int_a^b f\,dg$*;*

(15) *ha* $\mathbb{V}_a^b g < \infty$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, *a sor az* $[a,b]$*-n egyenletesen konvergál, és* $\int_a^b f_n\,dg$, $\int_a^b f\,dg$ *léteznek, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,dg = \int_a^b f\,dg$*;*

(16) *ha* Z *Banach-tér,* f *folytonos és* g*-re* $a \le c \le d \le b$ *esetén teljesül az* $\int_c^d g' = g(d) - g(c)$ *Newton–Leibniz-formula, akkor* $\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg'$*.*

Vegyük észre, hogy az utolsó állítás lényegében egy integráltranszformációs formula.

Bizonyítás. (1)–(8) a közelítő összegek segítségével azonnal adódnak.

(9) bizonyításához vegyük észre, hogy két, δ-nál finomabb felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg távolsága nem nagyobb, mint

$$K \cdot \mathbb{V}(g) \cdot \sup\Big\{\big|f(u) - f(v)\big| \colon |u - v| \le 2\delta\Big\}.$$

Valóban, két integrálközelítő összeg különbsége

$$(f(\tau_{j'}) - f(\tau_{j''}))(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

alakú tagok összegeként írható, ahol $|\tau_{j'} - \tau_{j''}| < 2\delta$, a t_j pontok pedig a két felosztás egyesítésének pontjait futják be, így a fenti becslést kapjuk. Jelölje I_δ az összes δ-nál finomabb boesztásokhoz tartozó integrálközelítő összegek halmazát. Nyilván ha $0 < \delta' < \delta$, akkor $I_{\delta'} \subset I_\delta$. Ha f folytonos és g korlátos változású, akkor a fenti becslésből következik, hogy I_δ átmérője nullához tart, ha $\delta \downarrow 0$. Így az összes I_δ halmazok lezártjainak metszete egyetlen $z \in Z$ elem, ez az integrál.

(10) következik abból, hogy h^{-1} egyenletesen folytonos. (11) bizonyításához, legyen $z = \int_a^b f\,dg$, $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta > 0$-t, hogy minden 2δ-nál finomabb $a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \tau_2 \le t_2 \ldots \le t_{n-1} \le \tau_n \le t_n = b$ felosztásra z és az integrálközelítő összeg különbsége kisebb legyen, mint ε. Legyen $\tau_0 = a$, $\tau_{n+1} = b$. Ekkor parciális összegzéssel

$$\begin{aligned}
&\Big|f(b)g(b) - f(a)g(a) - z - \sum_{j=1}^{n} g(\tau_j) * (f(t_j) - f(t_{j-1}))\Big| \\
&\quad = \Big|-z - f(t_0)g(\tau_0) + f(t_n)g(\tau_{n+1}) - \sum_{j=1}^{n} (f(t_j)g(\tau_j) - f(t_{j-1})g(\tau_j))\Big| \\
&\quad = \Big|z - \sum_{j=0}^{n} f(t_j)(g(\tau_{j+1}) - g(\tau_j))\Big| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(12) bizonyításához vegyük észre, hogy ha adott $\varepsilon > 0$-hoz δ az $[a,b]$-n megfelelel, akkor két $[a,c]$-n vett δ-nál finomabb felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg távolsága

kisebb, mint 2ε, és hasonló állítás teljesül $[c,b]$-n is. Innen az integrálok létezését ugyanúgy kapjuk, mint (9) bizonyításában, az állítás többi része triviális. (13) bizonyításához tegyük fel, hogy g folytonos c-ben, f pedig korlátos a c egy környezetében. Legyen $\varepsilon > 0$, és $\delta > 0$ az $[a,c]$-n illetve $[c,b]$-n megfelelő értékek mindegyikénél kisebb. Tekintsük $\int_a^b f\,dg$ egy δ-nál finomabb felosztását és tegyük fel, hogy $t_{j-1} \le c \le t_j$. Mivel ha δ elég kicsi, akkor tetszőleges $t_{j-1} \le \tau_j' \le c$ és $c \le \tau_j'' \le t_j$ esetén

$$f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})) = f(\tau_j)(g(t_j) - g(c)) + f(\tau_j)(g(c) - g(t_{j-1}))$$

és

$$f(\tau_j')(g(t_j - g(c)) + f(\tau_j'')(g(c) - g(t_{j-1}))$$

távolsága kisebb mint ε, az adott integrálközelítő összeg és $\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$ távolsága legfeljebb 3ε. A másik eset parciális integrálással adódik.

(8)-ból és a linearitásból következik (14) és (15).

(16) bizonyításához, f egyenletes folytonossága miatt, minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha

$$a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \tau_2 \le t_2 \ldots \le t_{n-1} \le \tau_n \le t_n = b,$$

és $t_j - t_{j-1} < \delta$ minden j-re, akkor $j = 1, 2, \ldots, n$, $t_{j-1} \le t \le t_j$ esetén $\big|f(t) - f(\tau_j)\big| \le \varepsilon$. Ebből

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)g'(t)\,dt - \sum_{j=1}^n f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)g'(t)\,dt - f(\tau_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} g'(t)\,dt\right)\right| \\
&\le \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} K\big|f(t) - f(\tau_j)\big|\big|g'(t)\big|\,dt \le K\varepsilon\int_a^b \big|g'(t)\big|\,dt,
\end{aligned}$$

amiből következik (16).

11.4. Megjegyzés. Stieltjes-integrálok kiszámítása gyakran valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljainak kiszámítására vezethető vissza (5), (6) és (7) segítségével . Például (5) és (6) szerint, ha $X = Y = \mathbb{R}^3$, a szorzás az úgynevezett diadikus szorzás, $xy = (x_i y_j)_{i,j=1}^3$, akkor $\int_a^b f\,dg = (\int_a^b f_i\,dg_j)_{i,j=1}^3$. Ezt felhasználva (7) szerint, ha a szorzás a belső szorzás, akkor $\int_a^b \langle f,\, dg\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_a^b f_i\,dg_i$, ha pedig a külső szorzás, akkor $\int_a^b f\,dg$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2\,dg_3 - \int_a^b f_3\,dg_2$, $\int_a^b f_3\,dg_1 - \int_a^b f_1\,dg_3$ és $\int_a^b f_1\,dg_2 - \int_a^b f_2\,dg_1$.

11.5. Feladat [5]. Az előző tétel jelöléseivel mutassuk meg, hogy ha $\int_a^b f\,dg$ létezik és $h = f$ véges sok pont kivételével, amelyek mindegyikében g folytonos, akkor $\int_a^b h\,dg = \int_a^b f\,dg$.

∗ **11.6. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha Z Banach-tér, f korlátos és λ-majdnem mindenütt folytonos, g-re $a \le c \le d \le b$ esetén teljesül az $\int_c^d g' = g(d) - g(c)$ Newton–Leibniz-formula, akkor az alábbi integrálok léteznek és $\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg'$.*

A tétel nyilván 11.3 (16) élesítése, és lényegében egy integráltranszformációs formula.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$. Jelölje ω_f az f oszcillációs függvényét. Az $\{x\colon x \in [a,b], \omega_f(x) \ge \sigma\}$ halmaz nullmértékű, ezért van olyan U nyílt halmaz, amely lefedi, és amelyre $\lambda(U) < \varepsilon$. Az $[a,b] \setminus U$ halmaz kompakt, és minden pontja benne van egy nyílt intervallumban, amelynek f általi képe σ-nál kisebb átmerőjű. Legyen δ ezen lefedés Lebesgue-száma. Jelölje C az f folytonossági pontjainak halmazát, ez az oszcillációs függvény tulajdonságai miatt $\mathcal{G}_\delta$-halmaz. Ha V nyílt, akkor $f^{-1}(V) \cap C$ nyílt C-ben, így Borel-halmaz. Innen $f^{-1}(V)$ mérhető. Mivel $f(C)$ szeparábilis, f értékkészlete majdnem mindenütt egy szeparábilis altérben van. Így fg' mérhető. Tegyük fel, hogy $\big|f(t)\big| \le M$, ha $t \in [a,b]$. Mivel $|fg'| \le KM|g'|$, kapjuk, hogy fg' integrálható. Ha

$$a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \tau_2 \le t_2 \ldots \le t_{n-1} \le \tau_n \le t_n = b,$$

és $t_j - t_{j-1} < \delta$ minden j-re, akkor

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)g'(t)\,dt - \sum_{j=1}^n f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)g'(t)\,dt - f(\tau_j)\int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(t)\,dt\right)\right| \\
&\le \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} K\big|f(t) - f(\tau_j)\big|\big|g'(t)\big|\,dt \le K\sigma\int_a^b |g'| + 2KM\int_U \big|g'(t)\big|\,dt.
\end{aligned}$$

Ebből az integrál abszolút folytonosságát felhasználva következik az állítás.

∗ **11.7. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy Z Banach-tér és $\mathbb{V}(g) < \infty$. Legyen $s(t) = \mathbb{V}_a^t g$, ha $a \le t \le b$, $s(t) = 0$, ha $t < a$ és $s(t) = s(b)$, ha $t > b$, és tegyük fel, hogy f korlátos és λ_s-majdnem mindenütt folytonos. Ekkor $\int_a^b f\,dg$ létezik.*

A tétel nyilván 11.3 (9) élesítése.

Bizonyítás. Hasonlóan fogunk eljárni, mint az előző tétel bizonyításában. Tegyük fel, hogy $\big|f(t)\big| \le M$, ha $t \in [a,b]$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$, jelölje ω_f az f oszcillációs függvényét. Az $\{\omega_f \ge \sigma\}$ halmazhoz választható olyan U nyílt halmaz, amely lefedi, és amelyre $\lambda_s(U) < \varepsilon$. Az $[a,b] \setminus U$ halmaz kompakt, és minden pontja benne van egy nyílt intervallumban, amelynek f általi képe σ-nál kisebb átmerőjű. Legyen 3δ ezen lefedés Lebesgue-száma. Ekkor bármely δ-nál finomabb felosztás olyan részintervallumainak, amelyek nyílt δ-környezetének f általi képe σ-nál nem kisebb átmérőjű, együtt legfeljebb ε a λ_s-mértéke.

Vegyünk két δ-nál finomabb felosztást, és tekintsük az egyesítésüket. Az integrálközelítő összegek különbsége

$$\sum_{j=1}^n (f(\tau_{j'}) - f(\tau_{j''}))(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

alakú, ahol $\tau_{j'}$ és $\tau_{j''}$ a $[t_{j-1}, t_j]$ nyílt δ-környezetében vannak. Azokra a $[t_{j-1}, t_j]$ intervallumokra, amelyek nyílt δ-környezetének f általi képe σ-nál kisebb átmérőjű, az

$$\Big|(f(\tau_{j'}) - f(\tau_{j''}))(g(t_j) - g(t_{j-1}))\Big| \le K\sigma|g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

becslés alkalmazható, így az összeg megfelelő részének normája legfeljebb $K\sigma\lambda_s[a,b]$. A többi esetben a

$$\Big|(f(\tau_{j'}) - f(\tau_{j''}))(g(t_j) - g(t_{j-1}))\Big| \le 2KM\sigma|g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

becslés alkalmazható. A megfelelő $[t_{j-1}, t_j]$ intervallumok részei U-nak, egyesítésük véges sok $[t_{j_k}, t_{j_l}]$ alakú diszjunkt, zárt intervallum egyesítése, és

$$\sum_{j=j_k+1}^{j_l} |g(t_j) - g(t_{j-1})| \le \bigvee_{t_{j_k}}^{t_{j_l}} g \le \lambda_s[t_{j_k}, t_{j_l}],$$

így az összeg ezen részének normája legfeljebb $2KM\sigma\lambda_s(U) < 2KM\varepsilon$. Mivel σ és ε tetszőleges volt, kapjuk az állítást.

Az egyik legfontosabb speciális esetben a megfordítás is teljesül.

∗ **11.8. Tétel.** *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ valós értékű függvények, f korlátos, g pedig monoton növekedő, a szorzás a valós számok szorzása. Legyen $g(t) = g(a)$, ha $t < a$ és $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha létezik az $\int_a^b f\,dg$ Stieltjes-integrál, akkor az f függvény λ_g-majdnem mindenütt folytonos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|f(t)| \le M$, ha $t \in [a,b]$. Legyen $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, és válasszunk olyan $\delta > 0$-t, amelyre bármely δ-nál finomabb felosztásra az integrálközelítő összegek $\sigma\varepsilon/2$-nél közelebb vannak az integrálhoz. Könnyű látni, hogy ha valamelyik osztópont λ_g-mértéke pozitív, akkor ott f folytonos. Vegyünk egy δ-nál finomabb felosztást, amelynek osztópontjai mind folytonossági pontjai g-nek, kivéve esetleg a végpontokat, és két ehhez tartozó integrálközelítő összeget. Ezek különbsége

$$\sum_{j=1}^{n} (f(\tau_j') - f(\tau_j''))(g(t_j) - g(t_{j-1})) \tag{1}$$

alakú, ahol τ_j' és τ_j'' a $[t_{j-1}, t_j]$ intervallumban vannak. (1) abszolút értéke kisebb, mint $\varepsilon\sigma$. Jelölje J azon $1 \le j \le n$ indexek halmazát, amelyekre

$$\sup\Big\{|f(\tau_j') - f(\tau_j'')|\colon \tau_j', \tau_j'' \in [t_{j-1}, t_j]\Big\} \ge 2\sigma.$$

Ha $j \in J$, a τ_j' és τ_j'' pontok megválaszthatók úgy, különbségük abszolút értéke legalább σ legyen. τ_j' és τ_j'' esetleges felcserélésével elérhető, hogy az (1) összeg minden tagja nemnegatív legyen. Így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j \in J} g(t_j) - g(t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Az $\{\omega_f \ge 2\sigma\}$ halmazt lefedi a $[t_{j-1}, t_j]$, $j \in J$ intervallumok és az osztópontok halmazának egyesítése. Mivel könnyű látni, hogy ha valamelyik végpont λ_g-mértéke pozitív, akkor ott f folytonos, a lefedéshez feltétlenül szükséges osztópontok halmazának λ_g-mértéke nulla. Így azt kapjuk, hogy $\{\omega_f \ge 2\sigma\}$ λ_g-mértéke nulla. $\sigma = 1/k$ választással ebből adódik, hogy f λ_g-majdnem mindenütt folytonos.

∗ **11.9. Tétel.** *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ valós értékű függvények, f korlátos, g pedig monoton növekedő, a szorzás a valós számok szorzása. Legyen $g(t) = g(a)$, ha $t < a$ és $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha létezik az $\int_a^b f\,dg$ Stieltjes-integrál, akkor $\int_a^b f\,dg = \int_{[a,b]} f\,d\lambda_g$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|f(t)| \le M$, ha $t \in [a,b]$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$, jelölje ω_f az f oszcillációs függvényét. Az előző tétel szerint az $\{\omega_f \ge \sigma\}$ halmaz λ_g-mértéke nulla, található olyan U nyílt halmaz, amely lefedi, és amelyre $\lambda_s(U) < \varepsilon$. Az $[a,b]\setminus U$ halmaz kompakt, és minden pontja benne van egy nyílt intervallumban, amelynek f általi képe σ-nál kisebb átmerőjű. Legyen δ ezen lefedés Lebesgue-száma. Ekkor bármely δ-nál finomabb felosztás olyan $[t_{j-1}, t_j]$ részintervallumainak, amelyek f általi képe σ-nál nem kisebb átmérőjű, együtt legfeljebb ε a λ_s-mértéke.

Vegyünk δ-nál finomabb

$$a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \tau_2 \le t_2 \ldots \le t_{n-1} \le \tau_n \le t_n = b$$

felosztást, amelyre $t_1, \ldots, t_{n-1}$ a g-nek folytonossági pontjai. Erre

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{[a,b]} f(t)\,d\lambda_g(t) - \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{[t_{j-1},t_j]} f(t)\,d\lambda_g(t) - \int_{[t_{j-1},t_j]} f(\tau_j)\,d\lambda_g(t) \right) \right| \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \int_{[t_{j-1},t_j]} \big|f(t) - f(\tau_j)\big|\,d\lambda_g(t) \le \sigma\lambda_g[a,b] + 2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

mivel azokra a $[t_{j-1}, t_j]$ intervallumokra, amelyek f általi képe σ-nál kisebb átmérőjű, az összeg megfelelő része legfeljebb $\sigma\lambda_s[a,b]$, a többi $[t_{j-1}, t_j]$ intervallumok pedig részei U-nak. Mivel σ és ε tetszőleges volt, kapjuk az állítást.

∗ **11.10. Többváltozós függvények Riemann-integrálja.** Bár ezen jegyzetben többváltozós függvények Riemann-integrálját nem használjuk (a Lebesgue-integrál sokkal általánosabb és jobban használható), az alábbi néhány definícióban és feladatban összefoglaljuk a többváltozós függvények Riemann-integrálja és a Jordan-mérték tulajdonságait. A részletes tárgyalás megtalálható a Pál–Schipp–Simon [122] jegyzetben.

Legyen I egy *k-dimenziós tégla*, azaz egydimenziós I_j intervallumok

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$$

Descartes-szorzata. Az I mértékét, azaz az oldalhosszak $\prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j)$ szorzatát, ahol $a_j \le b_j$ az I_j végpontjai, jelölje $|I|$. Az I zárt tégla egy *felosztásán* az I_j intervallumok egy-egy $\tau_j = \{a_j = x_{j,1} < x_{j,2} < \ldots < x_{j,n_j} = b_j\}$ felosztásának a $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_k$ Descartes-szorzatát értjük. Az I összes felosztásának halmazát jelölje $\mathcal{F}(I)$. A τ felosztáshoz tartozó *részintervallumok* az egyes τ_j felosztásokhoz tartozó részintervallumok

$$I_{i_1,i_2,\cdots i_k} = [x_{1,i_1-1}, x_{1,i_1}] \times [x_{2,i_2-1}, x_{2,i_2}] \times \cdots \times [x_{k,i_k-1}, x_{k,i_k}]$$

Descartes-szorzatai ($1 \le i_j \le n_j$, ha $1 \le j \le k$). A $\tau' = \tau'_1 \times \tau'_2 \times \cdots \times \tau'_k$ felosztás a $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_k$ felosztás *finomítás*a ha $\tau_i \subset \tau'_i$ teljesül $i = 1, 2, \ldots, k$-ra. Egy felosztás *finomság*án a részintervallumai átmérőinek maximumát értjük.

Tegyük fel, hogy $f\colon I \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény. Az I minden τ felosztásához hozzárendeljük az

$$\begin{aligned} M_{i_1,i_2,\ldots,i_k} &= \sup_{x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}} f(x) \\ m_{i_1,i_2,\ldots,i_k} &= \inf_{x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}} f(x) \\ S(f,\tau) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_k=1}^{n_k} M_{i_1,i_2,\ldots,i_k} |I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}| \\ s(f,\tau) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_k=1}^{n_k} m_{i_1,i_2,\ldots,i_k} |I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}| \end{aligned}$$

valós számokat. Végül legyen

$$\overline{\int}_I f = \inf_{\tau \in \mathcal{F}(I)} S(f,\tau) \quad \text{és} \quad \underline{\int}_I f = \sup_{\tau \in \mathcal{F}(I)} s(f,\tau).$$

Ezeket a számokat az f függvény I-n vett *felső* illetve *alsó* Riemann-integráljának nevezzük. Ha a kettő megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható I-n*, és a közös értéket f *Riemann-integrál*jának nevezzük és úgy jelöljük, hogy

$$\int_I f \quad \text{vagy} \quad \int_I f(x)\,dx.$$

A komplex illetve vektor értékű függvények integrálját a koordináták integráljainak segítségével definiáljuk:

$$\int_I f = \int_I \Re f + i \int_I \Im f, \quad \text{illetve} \quad \int_I f = \left(\int_I f_1, \ldots, \int_I f_n \right)$$

∗ **11.11. Feladat [6].** Az előző definíció feltételei mellett, mutassuk meg, hogy a beosztás finomításával az alsó közelítő összegek csak nőhetnek, a felső közelítő összegek pedig csak csökkenhetnek. Vezessük le ebből, hogy a felső integrál soha nem kisebb, mint az alsó integrál.

∗ **11.12. Feladat: az integrál linearitása és monotonitása [6].** Mutassuk meg, hogy ha $I \subset \mathbb{R}^k$ zárt intervallum, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $c \in \mathbb{R}$, akkor $cf + g$ is Riemann-integrálható I-n és $\int_I (cf + g) = c \int_I f + \int_I g$, továbbá ha $f \le g$, akkor $\int_I f \le \int_I g$.

∗ **11.13. Feladat [3].** Adjunk példát nem Riemann-integrálható függvényre.

∗ **11.14. Feladat: a Riemann-integrál intervallum additivitása [7].** Tegyük fel, hogy az I_1 és I_2 zárt intervallumait $\mathbb{R}^k$-nak az I zárt intervallum valamelyik oldalának kettéosztásával kaptuk. Mutassuk meg, hogy egy $f\colon I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$\underline{\int_I} f = \underline{\int_{I_1}} f + \underline{\int_{I_2}} f,$$
$$\overline{\int_I} f = \overline{\int_{I_1}} f + \overline{\int_{I_2}} f,$$

továbbá f pontosan akkor Riemann-integrálható I-n, ha Riemann-integrálható I_1-en és I_2-n, és ekkor

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

∗ **11.15. Feladat: Lebesgue-kritérium Riemann-integrálra [12].** Legyen I egy zárt tégla $\mathbb{R}^k$-ban, és $f\colon I \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Bizonyítsuk be, hogy f pontosan akkor Riemann-integrálható I-n, ha majdnem mindenütt folytonos.

Megoldás. Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható I-n. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\sigma > 0$ rögzített. Válasszunk egy olyan τ felosztását I-nek, amelyre $\Omega(f, \tau) < \sigma\varepsilon$. Tekintsük azon részintervallumait τ-nak, amelyeken $M_{i_1,\dots,i_k} - m_{i_1,\dots,i_k} \geq \sigma$. Ezek összmértéke legfeljebb ε. Minden olyan x pont, amelyre $\omega_f(x) \geq \sigma$, vagy benne van ezen részintervallumok valamelyikében, vagy a felosztás valamely részintervallumának határpontja. Mivel a határpontok halmaza nullahalmaz, és ε tetszőleges volt, a $\{x\colon \omega_f(x) \geq \sigma\}$ halmaz nullahalmaz. Ezt alkalmazva $\sigma_n = 1/n$-re, azt kapjuk, hogy a $\{x\colon \omega_f(x) > 0\}$ halmaz megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése, azaz nullahalmaz. Ez azt jelenti, hogy f majdnem mindenütt folytonos. Most tegyük fel, hogy f majdnem mindenütt folytonos és $|f| \leq K$. Legyen $\sigma > 0$ és $\varepsilon > 0$. Mivel a $\{x \in I\colon \omega_f(x) \geq \sigma\}$ halmaz nullahalmaz, lefedhető megszámlálható sok $\mathbb{R}^k$-beli intervallummal, amelyek összmértéke kisebb, mint $\varepsilon/2$. Minden intervallumot kicsit megnövelve középpontos nagyítással, olyan nyílt intervallumrendszer kaphatunk, amelynek összmértéke még mindig kisebb mint ε, és lefedi a $\{x \in I\colon \omega_f(x) \geq \sigma\}$ kompakt halmazt. Kiválasztva ebből a lefedésből egy véges V_i, $i = 1, 2, \dots, n$ lefedést, a lefedés komplementere metszve I-vel egy K kompakt halmaz. A K halmaz minden pontja benne van egy olyan nyílt környezetben, amelynek f általi képe σ-nál kisebb átmérőjű. Válasszunk ezen lefedés Lebesgue-számánál finomabb τ felosztást. A felosztás azon részintervallumai, amelyeken $M_{i_1,\dots,i_k} - m_{i_1,\dots,i_k} \geq \sigma$, valamely V_i-ben vannak, így összmértékük kisebb, mint ε. Innen

$$\Omega(f, \tau) \leq 2K\varepsilon + \sigma|I|.$$

Mivel σ és ε tetszőleges volt, kapjuk az állítást.

∗ **11.16. Definíció.** Legyen H egy korlátos részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nak, és $f\colon H \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Válasszunk olyan I zárt intervallumot, amelyre $H \subset I$. Legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in H$ és legyen $g(x) = 0$, ha $x \in I \setminus H$. Ha g Riemann-integrálható I-n, akkor azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható H-n, és Riemann-integrálját az $\int_H f = \int_I g$ összefüggéssel definiáljuk. A Riemann-integrál intervallum additivitásából következik, hogy f Riemann-integrálhatósága és Riemann-integrálja H-n nem függ az I megválasztásától.

∗ **11.17. Jordan-mérték.** Egy $H \subset \mathbb{R}^k$ korlátos halmazt *Jordan-mérhető*nek nevezünk, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható H-n. Ekkor a H halmaz $|H|$ *Jordan-mérték*ét a konstans 1 függvény H felett vett integráljaként definiáljuk. Ez a jelölés intervallumokra összhangban van az eddigivel. Vegyük észre, hogy a Lebesgue-kritérium szerint H pontosan akkor Jordan-mérhető, ha ∂H Lebesgue-mértéke nulla.

∗ **11.18. Feladat: ismételt integrálás Riemann-integrálokra [9].** Legyen I zárt tégla az $\mathbb{R}^i$ térben, J pedig zárt tégla az $\mathbb{R}^j$ térben. Mutassuk meg, hogy ha $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, amely Riemann-integrálható $I \times J$-n, akkor az alábbi integrálok mind léteznek és

$$\int_{I\times J} f = \overline{\int_J}\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\int_J}\underline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \underline{\int_J}\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\int_J}\underline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az egyenlőség első tagja megegyezik a másodikkal. Az, hogy az első tag a többi taggal is megegyezik, hasonlóan mutatható meg. Mivel f korlátos, y bármely rögzített értéke mellett léteznek a

$$\varphi(y) = \overline{\int_I} f(x,y)\,dx$$

felső integrálok, és ezek az értékek y-tól független korlátok között maradnak. Ezért létezik az

$$\overline{\int_J}\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\int_J} \varphi(y)\,dy$$

integrál is. Megmutatjuk, hogy ez megegyezik az $I \times J$-n vett integrállal. Legyen $\varepsilon > 0$, és tekintsük $I \times J$ egy olyan $\tau \times \sigma$ felosztását, ahol τ az I, σ pedig a J egy felosztása, amelyre az oszcillációs összeg kisebb, mint ε. Ha I' az I-nek egy, a τ felosztáshoz tartozó részintervalluma, J' pedig a J-nek egy, a σ felosztáshoz tartozó részintervalluma, $m_{I',J'}$ és $M_{I',J'}$ pedig az infímum illetve szuprémum $I' \times J'$-n akkor

$$m_{I',J'} \le f(x,y) \le M_{I',J'},$$

ha $x \in I'$ és $y \in J'$. Ebből

$$m_{I',J'}|I'| \le \overline{\int_{I'}} f(x,y)\,dx \le M_{I',J'}|I'|,$$

ha $y \in J'$. Összegezve I'-re, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{I'} m_{I',J'}|I'| \le \overline{\int_I} f(x,y)\,dx \le \sum_{I'} M_{I',J'}|I'|,$$

ha $y \in J'$. Most ugyanígy kapjuk, hogy

$$|J'| \sum_{I'} m_{I',J'}|I'| \le \int_{J'}^{-} \int_{I}^{-} f(x,y)\,dx\,dy \le |J'| \sum_{I'} M_{I',J'}|I'|,$$

és összegezve J'-re,

$$\sum_{I',J'} m_{I',J'}|I'||J'| \le \overline{\int_J} \overline{\int_I} f(x,y)\,dx\,dy \le \sum_{I',J'} M_{I',J'}|I'||J'|.$$

Innen következik az állítás.

∗ **11.19. Feladat: integráltranszformációs formula Riemann-integrálokra [15].** Legyenek $\tilde{U}$ és U nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^k$-nak, $g\colon \tilde{U} \to U$ olyan kölcsönösen egyértelmű folytonosan differenciálható leképezés, amelynek az inverze is folytonosan differenciálható. Legyenek $\tilde{H} \subset \tilde{U}$, $H \subset U$ korlátos halmazok, és tegyük fel, hogy $g(\tilde{H}) = H$. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Mutassuk meg, hogy ha az alábbi két Riemann-integrál létezik, akkor

$$\int_H f(x)\,dx = \int_{\tilde{H}} f(g(y))\big|\det g'(y)\big|\,dy.$$

Megoldás. Lásd Pál–Schipp–Simon [122].

∗ **11.20. Feladat: paraméteres Riemann-integrálok differenciálása [9].** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és $H \subset \mathbb{R}^k$ egy kompakt Jordan-mérhető halmaz. Tegyük fel, hogy az $f\colon I \times H \to \mathbb{R}$ függvényre minden $t \in I$-re létezik a

$$\varphi(t) = \int_H f(t,x)\,dx$$

integrál, továbbá – a végpontokban bal illetve jobb oldali deriváltat értve – mindenütt létezik és folytonos az f_t parciális derivált. Mutassuk meg, hogy ekkor φ differenciálható I-n és

$$\varphi'(t) = \int_H f_t(t,x)\,dx,$$

ha $t \in I$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f_t folytonos az $I \times H$ kompakt halmazon, ott egyenletesen is folytonos, így van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in H$, $t, u \in I$ és $|t-u| < \delta$, akkor $|f_t(t,x) - f_t(u,x)| < \varepsilon$. Legyen $s \in I$ úgy, hogy $0 < |t-s| < \delta$ teljesüljön. A középérték tétel szerint

$$\frac{f(s,x) - f(t,x)}{s-t} = f_t(u,x),$$

ahol u a t és s között van és függ t-n és s-en kívül x-től is. Integrálva x szerint, azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s-t} - \int_H f_t(t,x)\,dx\right| \le \varepsilon|H|.$$

Itt f_t azért integrálható H-n, mert folytonos és H Jordan mérhető. Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk, hogy φ differenciálható t-ben, és deriváltja $\int_H f_t(t,x)\,dx$.

$*$ **11.21. Darboux tétele [10].** A többváltozós Riemann-integrál definíciójában szereplő feltételek mellett, egy $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztáshoz tartozó $\sigma(f,\tau,\xi)$ *közelítő összeg*en egy

$$\sigma(f,\tau,\xi) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} f(\xi_{i_1,i_2,\dots,i_k}) |I_{i_1,i_2,\dots,i_k}|$$

alakú összeget értünk, ahol $\xi_{i_1,i_2,\dots,i_k} \in I_{i_1,i_2,\dots,i_k}$. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor Riemann-integrálható I-n, ha valamely A számra minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\tau \in \mathcal{F}(I)$ finomsága kisebb, mint δ, akkor minden, a τ-hoz tartozó integrálközelítő összegre $\big|\sigma(f,\tau,\xi) - A\big| < \varepsilon$, és hogy ekkor $A = \int_I f$.

11.22. Megjegyzés. Darboux tétele mutatja, hogy ha $g(x) = x$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, akkor az $\int_a^b f\,dg$ Stieltjes-integrál egyszerre létezik és megegyezik az $\int_{[a,b]} f$ Riemann-integrállal, azaz a Stieltjes-integrál speciális eseteként megkapjuk az (egydimenziós) Riemann-integrált. Darboux tétele nem általánosítható Stieltjes-integrálokra: legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x \le 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

ekkor $\int_{-1}^1 f\,dg$ nem létezik, de

$$\sup_{-1=x_0<x_1<\dots<x_n=1} \sum_{j=1}^n \inf_{x_{j-1}\le\xi_j\le x_j} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})$$
$$= \inf_{-1=x_0<x_1<\dots<x_n=1} \sum_{j=1}^n \sup_{x_{j-1}\le\xi_j\le x_j} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}).$$

Így a Stieltjes-integrál alsó és felső közelítő összegek segítségével adott definíciója (lásd például Rudin [139] könyvét) nem ekvivalens az itt adott definícióval. Lásd még Rudin [139], 148. o., 3. feladat.

11.23. Definíció: görbe menti integrál. Legyenek X, Y és Z normált terek $\mathbb{R}$ felett, $(y,x) \mapsto yx$ pedig egy szorzás, azaz egy mindkét változójában lineáris leképezése $Y \times X$-nek Z-be, amelyre valamely K konstanssal $|yx| \le K|x||y|$, ha $x \in X$ és $y \in Y$. Legyen $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ és $\gamma\colon [a,b] \to X$ egy görbe, $f\colon \gamma([a,b]) \to Y$ pedig egy függvény. Ha létezik az $\int_a^b f \circ \gamma\, d\gamma$ Stieltjes-integrál, akkor az az f függvény γ *görbe menti integrál*ja. Jelölése: $\int_\gamma f$ vagy $\int_\gamma f(x)\,dx$. Zárt görbe esetén az $\oint_\gamma f$ vagy $\oint_\gamma f(x)\,dx$ jelölés is szokásos. Különböző szorzásokkal különböző görbe menti integrálokat kapunk. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektori szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$-ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_\gamma f(x) \times dx$.

11.24. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, legyenek $f, f_n, g\colon \gamma(I) \to Y$ folytonos függvények. Ekkor*

(1) *ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_\gamma f = c(\gamma(b) - \gamma(a))$; ha γ konstans, akkor $\int_\gamma f = 0$;*

(2) *$\int_\gamma f$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_\gamma cf = c\int_\gamma f$, továbbá $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha X és Z komplex normált terek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris az első változóban, akkor $\int_\gamma cf = c\int_\gamma f$ illetve $\int_\gamma cf = \overline{c}\int_\gamma f$;*

(3) *ha $\int_\gamma f$ és $\int_\gamma g$ léteznek akkor $\int_\gamma (f+g)$ is és $\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$;*

(4) *ha γ_1 a γ-val ekvivalens görbe, akkor $\int_\gamma f$ és $\int_{\gamma_1} f$ egyszerre léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$;*

(5) *$\int_\gamma f$ és $\int_{\tilde{\gamma}} f$ egyszerre léteznek és $\int_{\tilde{\gamma}} f = -\int_\gamma f$;*

(6) *ha Z Banach-tér, $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, akkor $\int_\gamma f$ akkor és csak akkor létezik, ha $\int_{\gamma_1} f$ és $\int_{\gamma_2} f$ léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$;*

(7) *ha $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$, $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$, $(y^{(j)}, x) \mapsto y^{(j)}x \in Z_j$ $(j = 1, \dots, n)$ szorzások, $yx = (y^{(1)}x, \dots, y^{(n)}x)$, és $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$, akkor $\int_\gamma f$ pontosan akkor létezik, ha az $\int_\gamma f^{(j)}$ integrálok léteznek, és $\int_\gamma f = (\int_\gamma f^{(1)}, \dots, \int_\gamma f^{(n)})$;*

(8) *ha $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, $(y, x^{(j)}) \mapsto yx^{(j)} \in Z_j$ $(j = 1, \dots, n)$ szorzások, $yx = (yx^{(1)}, \dots, yx^{(n)})$, és $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, ga^{(n)})$, akkor $\int_\gamma f(x)\,dx$ pontosan akkor létezik, ha az*

$$\int_a^b f \circ \gamma \, d\gamma^{(j)}$$

Stieltjes-integrálok léteznek, és

$$\int_\gamma f(x)\,dx = \Big(\int_a^b f \circ \gamma \, d\gamma^{(1)}, \dots, \int_a^b f \circ \gamma \, d\gamma^{(n)}\Big);$$

(9) *ha W normált tér, $T\colon Z \to W$ egy korlátos lineáris leképezés, $\int_\gamma f(x)\,dx$ létezik és $y * x = T(yx)$, akkor $\int_\gamma f(x) * dx = T\Big(\int_\gamma f(x)\,dx\Big)$;*

(10) *ha Z Banach-tér, g pedig korlátos változású $[a, b]$-n, akkor*

$$\left|\int_\gamma f\right| \le K \cdot \sup\Big\{|f(x)|\colon x \in \gamma(I)\Big\} \cdot \mathbb{V}(\gamma);$$

(11) *ha Z Banach-tér, $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$ és $f_n \to f$ egyenletesen a $\gamma(I)$-n, akkor $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$;*

(12) *ha Z Banach-tér, $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$ és $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ egyenletesen a $\gamma(I)$-n, akkor*

$$\sum_{n=0}^\infty \int_\gamma f_n = \int_\gamma f;$$

(13) *ha Z Banach-tér és γ-ra $a \le x \le y \le b$ esetén teljesül a $\gamma(y) - \gamma(x) = \int_x^y \gamma'$ Newton–Leibniz-formula, akkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Vegyük észre, hogy az utolsó állítás lényegében egy integráltranszformációs formula.

Bizonyítás. Minden állítás következik a Stieltjes-integrál tulajdonságaira vonatkozó tétel állításaiból.

11.25. Megjegyzés. A (7), (8) és (9) összefüggések segítségével – hasonlóan, mint a Stieltjes-integrálnál – görbe menti integrálok kiszámítása gyakran valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljainak kiszámítására vezethető vissza. Például ha $X = Y = \mathbb{R}^3$, a szorzás a belső szorzás, akkor $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_a^b f_i \circ \gamma\, d\gamma_i$, ha pedig a külső szorzás, akkor $\int_\gamma f(x) \times dx$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2 \circ \gamma\, d\gamma_3 - \int_a^b f_3 \circ \gamma\, d\gamma_2$, $\int_a^b f_3 \circ \gamma\, d\gamma_1 - \int_a^b f_1 \circ d\gamma_3$ és $\int_a^b f_1 \circ \gamma\, d\gamma_2 - \int_a^b f_2 \circ \gamma\, d\gamma_1$. Az $\int_a^b f_i \circ \gamma\, d\gamma_j$ integrálra a klasszikus jelölés $\int_\gamma f_i(x)\,dx_j$, ezt is használni fogjuk. Ennek az észrevételnek a felhasználásával a görbe menti integrálokat véges dimenziós terek esetén valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljai segítségével is definiálhatjuk. Még egyszerűbb lehetőség a (13) összefüggést használni definíciónak; ennek a hátránya, hogy nem minden pályára alkalmazható.

11.26. Zárt görbék homotópiája. Az I-n definiált γ_0 és γ_1 zárt görbéket *homotóp*oknak nevezzük X-ben, ha van olyan $\varphi\colon I \times [0,1] \to X$ folytonos függvény, amelyre $\varphi(t,0) = \gamma_0(t)$ és $\varphi(t,1) = \gamma_1(t)$ minden $t \in I$-re, továbbá minden $\xi \in [0,1]$-re $t \mapsto \varphi(t,\xi)$ zárt görbe. A homotópia szemléletes tartalma: a görbék „folytonosan átdeformálhatók egymásba". Zárt görbék X-beli homotópiája ekvivalencia-reláció. Az X-ben konstans görbével homotóp görbét X-ben *összehúzható*nak nevezzük.

Az X metrikus teret *ívszerűen összefüggő*nek fogjuk nevezni, ha bármely két X-beli ponthoz van olyan X-beli görbe, amelynek az egyik pont a kezdő, a másik a végpontja. Ívszerűen összefüggő tér mindig összefüggő is. Egy halmazt *egyszeresen összefüggő halmaz*nak nevezünk, ha benne minden zárt görbe összehúzható.

Felhívjuk rá a figyelmet, hogy zárt görbék homotópiájánál lényeges különbség, hogy a görbék egy $D \subset X$ részhalmazban homotópok vagy X-ben. Például ha X normált tér, akkor X-ben bármely két $\gamma_0, \gamma_1\colon I \to X$ zárt görbe között létezik egy $\varphi(t,\xi) = \xi\gamma_1(t) + (1-\xi)\gamma_0(t)$ *triviális homotópia*.

→ **11.27. Feladat [6].** Legyen X normált tér. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $D \subset X$ halmaz *csillagszerű*, azaz van benne olyan c pont, úgynevezett *csillagpont*, hogy minden $z \in D$-re, a c és z pontokat összekötő szakasz D-ben van, akkor D egyszeresen összefüggő. Speciálisan, minden konvex halmaz egyszeresen összefüggő.

11.28. Tétel. *Legyen X normált tér. Egy $D \subset X$ tartomány bármely két u és v pontjához van olyan D-beli szakaszonként lineáris pálya, amelynek u a kezdő, v a végpontja. Speciálisan, normált térben tartomány mindig ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatnunk, hogy az összes olyan szakaszonként lineáris pályák végpontjainak B halmaza, amelyeknek kezdőpontja u, nyílt és zárt D-ben. Legyen x egy D-beli érintkezési pontja B-nek. Ekkor létezik egy x középpontú D-beli nyílt S gömb, amely tartalmaz olyan v pontot, amely egy u kezdőpontú D-beli γ_1 szakaszonként lineáris pálya végpontja. Ha $y \in S$, akkor v-t S-ben y-nal egy alkalmas lineáris γ_2 pályával összekötve, $\gamma_1 \vee \gamma_2$ egy u kezdőpontú, y végpontú D-beli szakaszonként lineáris pálya, azaz $S \subset B$.

11.29. Tétel. *Ha X normált tér, Y Banach-tér, $D \subset X$ nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathcal{L}(X;Y)$ folytonos függvény D-n, és F az f-nek primitív függvénye D-n, akkor minden $\gamma\colon [a,b] \to D$ pályára $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

Bizonyítás. Fedjük le a $\gamma([a,b])$ kompakt halmazt véges sok D-beli nyílt gömbbel, amelyek mindegyikén bármely két függvényérték különbsége legfeljebb ε normájú. Jelölje ϱ a lefedés Lebesgue-számát. A γ függvény egyenletes folytonossága miatt $\eta > 0$ megválasztható úgy, hogy $|t - t'| \le \eta$ esetén $\big|\gamma(t) - \gamma(t')\big| \le \varrho$ teljesüljön. Választva egy η-nál finomabb $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = b$ felosztást, a középérték-egyenlőtlenségből

$$\Big|F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})) - f(\gamma(t_{j-1}))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Big| \le \varepsilon\big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big|.$$

Összegezve $1 \le j \le n$-re,

$$\Big|F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) - \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_{j-1}))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Big| \le \varepsilon\, \mathbb{V}(\gamma).$$

Mivel a fenti összeg tetszőleges közel lehet az integrálhoz, kapjuk az állítást.

11.30. Tétel. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér, $D \subset X$ tartomány, $f\colon D \to \mathcal{L}(X;Y)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *f-nek létezik primitív függvénye D-n;*

(2) *bármely D-beli zárt γ pályára $\int_\gamma f = 0$;*

(3) *bármely D-beli γ, δ pályákra, amelyeknek kezdő- és végpontja megegyezik, $\int_\gamma f = \int_\delta f$.*

Az utolsó feltételt szokás úgy kifejezni, hogy a görbe menti integrál független az úttól.

Bizonyítás. Ha f-nek létezik F primitív függvénye, akkor bármely zárt pályára

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Ha (2) teljesül, és a γ, δ pályák kezdő- és végpontja megegyezik, akkor $\gamma \vee \check{\delta}$ zárt pálya, így

$$0 = \int_{\gamma \vee \check{\delta}} f = \int_\gamma f - \int_\delta f.$$

Végül, ha (3) teljesül, legyen $u \in D$ rögzített, és $F(v) = \int_\gamma f$, ahol $\gamma\colon [a,b] \to D$ olyan pálya, amelynek u a kezdőpontja, v a végpontja. A fenti integrál nem függ a pálya megválasztásától. A γ pályát egy

$$\gamma_1(t) = v + (t-b)(w-v), \quad \text{ha} \quad t \in [b, b+1]$$

pályával meghosszabbítva,

$$F(w) - F(v) = \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_1} f(v)\,dx + \int_{\gamma_1} (f(x) - f(v))\,dx,$$

ahonnan

$$F(w) - F(v) = f(v)(w-v) + \omega(w,v),$$

ahol

$$\omega(w,v) = \int_{\gamma_1} (f(x) - f(v)r)\,dx, \quad \text{tehát} \quad \frac{|\omega(w,v)|}{|w-v|} \to 0, \quad \text{ha } w \to v.$$

11.31. Tétel. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér, $D \subset X$ nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathcal{L}(X;Y)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *f-nek lokálisan létezik primitív függvénye;*

(2) *ha a γ_0 és γ_1 zárt pályák homotópok, akkor $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$;*

(3) *ha γ egy háromszögpálya, amely az általa határolt háromszöglappal együtt D-ben van, akkor $\int_\gamma f = 0$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy (1)-ből következik (2). Legyenek γ_0 és γ_1 az $I = [a,b]$-n definiálva, és legyen $\varphi\colon I \times [0,1] \to D$ egy homotópiája γ_0-nak γ_1-be. Azt nem tesszük fel, hogy minden $\xi \in [0,1]$-re a $t \mapsto \varphi(t,\xi)$ zárt görbe pálya. Mivel φ folytonos, $C = \varphi(I \times [0,1])$ kompakt részhalmaza D-nek. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk C-nek olyan D-beli nyílt gömbökből álló véges lefedését, amelyeken f-nek van primitív függvénye, és jelölje ϱ ennek a lefedésnek a Lebesgue-számát. Mivel φ egyenletesen folytonos, létezik $\eta > 0$, hogy $|t-t'| \le \eta$, $|\xi - \xi'| \le \eta$ esetén $\big|\varphi(t,\xi) - \varphi(t',\xi')\big| \le \varrho$. Most legyen

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

egy η-nál finomabb felosztása I-nek, és

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = 1$$

egy η-nál finomabb felosztása $[0,1]$-nek. Legyen

$$\delta_j(t) = \varphi(t_{i-1}, \xi_j) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(\varphi(t_i,\xi_j) - \varphi(t_{i-1},\xi_j)),$$

ha $t_{i-1} \le t \le t_i$, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le m$. Minden δ_j, $0 \le j \le m$ egy zárt pálya D-ben. Jelölje $\delta_{j,i}$ a δ_j, $\gamma_{j,i}$ pedig a γ_j megszorítását $[x_{i-1}, x_i]$-re. Mivel $\gamma_{0,i} \vee \check{\delta}_{0,i}$ zárt pálya D egy olyan nyílt részhalmazában, ahol f-nek van primitív függvénye, az előző tétel szerint

$$\int_{\gamma_{0,i}} f = \int_{\delta_{0,i}} f.$$

Összegezve i-re kapjuk, hogy $\int_{\gamma_0} f = \int_{\delta_0} f$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\int_{\gamma_1} f = \int_{\delta_m} f$. Elég tehát azt megmutatnunk, hogy

$$\int_{\delta_{j-1}} f = \int_{\delta_j} f \quad \text{ha} \quad 1 \le j \le m. \tag{4}$$

Rögzítsük j-t. Legyen $\alpha_{j,i}$ egy lineáris pálya, $\delta_{j-1}(t_i)$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal, $\beta_{j,i}$ pedig egy lineáris pálya $\delta_{j-1}(t_{i-1})$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{i} \left(\int_{\delta_{j-1,k}} f - \int_{\delta j,k} f \right) + \int_{\alpha_{j,i}} f - \int_{\alpha_{j,0}} f = 0, \tag{5}$$

ha $0 \le i \le m$. Ha $i = 0$, az állítás triviális. Tegyük fel, hogy i-re igaz. Nyilván

$$\int_{\beta_{j,i+1}} f - \int_{\delta_{j,i+1}} f - \int_{\alpha_{j,i}} f = 0$$

és

$$\int_{\delta_{j-1,i+1}} f + \int_{\alpha_{j,i+1}} f - \int_{\beta_{j,i+1}} f = 0,$$

mivel a megfelelő háromszögpályák egy olyan gömbben vannak, amelyen f-nek van primitív függvénye. Ezt a két összefüggést hozzáadva (5)-höz, éppen az indukciós lépést kapjuk. $i = m$-re alkalmazva (5)-öt, kapjuk (4)-et.

(2)-ből nyilván következik (3), mert γ homotóp egy konstans pályával D-ben. Végül, ha (3) teljesül, és a c középpontú G nyílt gömb D-ben van, v ennek egy pontja, legyen γ egy lineáris pálya c kezdőponttal és v végponttal, és $F(v) = \int_\gamma f$. Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, kapjuk, hogy F a f primitív függvénye a G gömbön.

11.32. Tétel. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér, $D \subset X$ nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathcal{L}(X;Y)$ differenciálható függvény. Az f-nek pontosan akkor van lokálisan primitív függvénye, ha $f'(x)hk = f'(x)kh$ minden $x \in D$, $h, k \in X$-re, azaz ha $f'(x)$ szimmetrikus bilineáris függvény minden $x \in X$-re.*

Bizonyítás. Ha F a f primitív függvénye x egy környezetében, akkor $F''(x) = f'(x)$ szimmetrikus, így a feltétel szükséges. Az elégségesség bizonyításához elég belátnunk, hogy ha γ egy háromszögpálya, amely az általa határolt B háromszöglappal együtt D-ben van, akkor $\int_\gamma f = 0$. A $\gamma_0 = \gamma$ jelöléssel, a szomszédos töréspontok számtani közepeit lineáris pályákkal összekötve, olyan γ_0^1, γ_0^2, γ_0^3 és γ_0^4 háromszögpályákat kaphatunk, amelyekre

$$\int_{\gamma_0} f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_0^j} f.$$

Jelöljünk ezek közül egyet γ_1-el, úgy választva meg, hogy $\left|\int_{\gamma_1} f\right| \ge M/4$ legyen, ahol $M = \left|\int_\gamma f\right|$. Nyilván $\mathbb{V}(\gamma_1) = \mathbb{V}(\gamma_0)/2$. Teljes indukcióval folytatva ezt az eljárást, háromszögpályáknak olyan $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ sorozatát kapjuk, amelyekre $\left|\int_{\gamma_n} f\right| \ge M/4^n$,

$\mathbb{V}(\gamma_n) = \mathbb{V}(\gamma)/2^n$, és minden pálya értékkészlete tartalmazza a következő kezdőpontját. A két utolsó feltételből a kezdőpontok B-beli Cauchy-sorozatot alkotnak, legyen ennek határértéke x. Mivel $x \in B$, és f differenciálható x-ben, $\varepsilon > 0$-hoz elég nagy n-re $z \in \operatorname{rng}(\gamma_n)$ esetén $f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \omega(z,x)$ és $\big|\omega(z,x)\big| \le \varepsilon|z-x|$. Mivel $h \mapsto \frac{1}{2}f'(x)hh$ deriváltja a h pontban $k \mapsto \frac{1}{2}f'(x)hk + \frac{1}{2}f'(x)kh = f'(x)hk$, a $h \mapsto f'(x)h$ függvénynek van primitív függvénye. Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned} M &\le 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z)\,dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(x)\,dz + \int_{\gamma_n} f'(x)(z-x)\,dz + \int_{\gamma_n} \omega(z,x)\,dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\gamma_n} \omega(z,x)\,dz \right| \le \varepsilon 4^n\, \mathbb{V}(\gamma_n) \frac{\mathbb{V}(\gamma_n)}{2} = \frac{\varepsilon\big(\mathbb{V}(\gamma)\big)^2}{2}. \end{aligned}$$

Így csak $M = 0$ lehetséges.

11.33. Következmény. *A primitív függvény létezésének differenciálható f-re az $f'(x)$-ek szimmetriája szükséges feltétele, és ha D egyszeresen összefüggő tartomány, akkor ez a feltétel elégséges is.*

12
Differenciálformák integrálása

A Stokes-tétel különös sajátsága, hogy az egyedüli vele kapcsolatos nehézség a kimondásához szükséges fogalmak definícióinak bonyolultsága. E definíciók differenciálformákra, ezek deriváltjaira, integrációs tartományok határaira és irányítására vonatkoznak. Ha ezek a fogalmak már tisztázottak, akkor a tétel kimondása nagyon rövid és tömör, és bizonyítása kevés nehézséget okoz.

Walter Rudin (1978)

Ez a klasszikus témakör a klasszikus fizika talán legszebb részének, a Maxwell-elméletnek az alapját képezi, de alkalmazásai átszövik a fizika különböző ágait, és fontos szerepet játszanak a matematika különböző ágaiban (például parcialis differenciálegyenletek, numerikus analízis, topológia, stb.) is. Elkerültem az egyszerűbb, de lényegében formális tárgyalásmódot, amely geometriai szempontból keveset mond, és lényegében a Potter–Morrey [132] könyv tárgyalásmódját követem, de nem Riemann-integrált használok, mert így az eredmények általánosabbak, az integrációs tartományok határára vonatkozó feltételek pedig könnyen ellenőrizhető és szemléletes lokális feltételek. Más változatokat például a Pál–Schipp–Simon [122] jegyzetből vagy Rudin [139] könyvéből ismerhet meg az olvasó. A divergenciatétel bizonyítása után részletesen tárgyaljuk a két- és háromdimenziós esetet, és csak ez után fogalmazzuk meg a Stokes-tétel általánosabb alakját.

12.1. Skalár- és vektormező. A továbbiakban gyakran fogunk használni $\mathbb{R}^n$ valamely részhalmazán értelmezett, valós értékű, illetve $\mathbb{R}^n$-beli értékű függvényeket. A szóhasználat egyszerűsítésére az előbbieket *skalármező*nek, az utóbbiakat *vektormező*nek fogjuk nevezni.

12.2. Lokálisan Lipschitz határú halmazok. Tételeinket olyan halmazokra tudjuk majd bizonyítani, amelyeknek a határa „elég jó”. Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ halmazra azt mondjuk, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^{m,\alpha}$, ha a ∂G határ lefedhető véges sok $n-1$ dimenziós F_i felülettel, úgy, hogy egy megfelelően választott (ortonormált bázishoz tartozó) $\xi_1, \dots, \xi_n$ lokális koordinátarendszerben mindegyik F_i felület előállítható egy $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-beli függvénnyel. Az F_i párhuzamos eltoltjainak G-ben, illetve G-n kívül kell feküdnie. Pontosabban fogalmazva, van olyan $x \in \partial G$ pont, hogy ha $b_1, \dots, b_n$ a megfelelő ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, és ebben a bázisban x koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_n$, akkor az $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ pontnak $\mathbb{R}^{n-1}$-ben létezik olyan $U_r(x')$ környezete, egy azon értelmezett valós értékű $\varphi \in \mathcal{C}^{m,\alpha}$ függvény, és egy $\varepsilon > 0$ szám, hogy az

$$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_{n-1} b_{n-1} + (\gamma + \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}))b_n$$

vektor $\gamma = 0$ esetén G határán, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén G külsejében, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén pedig G belsejében van minden $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in U_r(x')$-re.

Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra, mivel a határa kompakt, a fenti feltétel azzal ekvivalens, hogy ∂G minden x pontjához létezik olyan ortonormált bázis, hogy ebben a bázisban a határ x egy környezetében egy $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-függvénnyel állítható elő.

Egy, a ∂G határon értelmezett g függvényre azt mondjuk, hogy $g \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\partial G)$, ha g a $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-ban van minden $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ lokális koordináta-rendszerre vonatkozóan.

Számos tételben a $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$ feltétel fog szerepelni, ez felel meg annak, hogy G határa „elfogadhatóan jó". Korlátos halmaz esetén ez annak felel meg, hogy a határ lokálisan egy Lipschitz-függvénnyel állítható elő. Ezért ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy G *határa lokálisan Lipschitz.*

12.3. Külső normális. Legyen A egy részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és u egy egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben, azt mondjuk, hogy u a *külső normális*a A-nak x-ben, ha az

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y \notin A, \langle y - x, u\rangle < 0\} \quad \text{és} \quad \{y \in \mathbb{R}^n : y \in A, \langle y - x, u\rangle > 0\}$$

halmazok Lebesgue-sűrűsége x-ben nulla. Ha az A halmaznak az x pontban létezik külső normálisa, akkor az egyértelmű. Valóban, ha u és v két különböző külső normális lenne, akkor $u - v$ benne lenne a

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u\rangle > 0 \quad \text{és} \quad \langle y, v\rangle < 0\}$$

nyílt kúpban. Így az $x + C$ halmaz nem üres, Lebesgue-sűrűsége x-ben pozitív, de

$$x + C \subset \{y \in \mathbb{R}^n : y \in A, \langle y - x, u\rangle > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n : y \notin A, \langle y - x, v\rangle < 0\},$$

ami ellentmondás. Ha létezik külső normálisa A-nak az x pontban, akkor azt $\mathbf{n}(x, A)$-val jelöljük. Világos, hogy A-nak sem a belső, sem a külső pontjaiban nem létezhet külső normális, csak az A határpontjaiban. Gyakran $\mathbf{n}(x, A)$ helyett csak $\mathbf{n}(x)$-et, esetleg csak $\mathbf{n}$-et írunk.

12.4. Lemma. *Legyen valamely $b_1, b_2, \dots, b_n$ ortonormált bázisban a $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz határának egy darabja a φ Lipschitz-leképezéssel megadva, pontosabban, tegyük fel, hogy φ az $\mathbb{R}^{n-1}$ egy nyílt D részhalmazát képezi $\mathbb{R}$-be úgy, hogy valamely $\varepsilon > 0$-ra*

$$\psi_\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + (\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) + \gamma) b_n$$

$\gamma = 0$ esetén D-t ∂G-ba, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén G belsejébe, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén pedig G külsejébe képezi. Ekkor minden olyan $x' \in D$ pontra, amelyben φ differenciálható, $x = \psi_0(x')$-ben létezik a G külső normálisa és $v(x') = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}(x') b_i$ jelöléssel, $\mathbf{n}(x) = v(x')/|v(x')|$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy legfeljebb egy olyan $\mathbf{n}$ egységvektor létezik amelyre a

$$\{y : y \notin A, \langle y - x, \mathbf{n}\rangle < 0\} \quad \text{és} \quad \{y : y \in A, \langle y - x, \mathbf{n}\rangle > 0\}$$

halmazok sűrűsége nulla x-ben. Megmutatjuk, hogy $v(x')/|v(x')|$ ilyen, ahol $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ és $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Írjuk fel φ-t

$$\varphi(y') = \varphi(x') + \varphi'(x')(y' - x') + \omega(y', x')$$

alakban, ahol $\omega(y',x')/|y'-x'| \to 0$, ha $y' \to x'$. Egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}^n$-re, legyen $y_i = \langle y, b_i\rangle$ $(i = 1,2,\dots,n)$, és $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$. Ekkor

$$\big\langle y-x, v(x')\big\rangle = y_n - \varphi(x') - \varphi'(x')(y'-x'),$$

így ez a belső szorzat pontosan akkor pozitív, ha

$$y_n > \varphi(x') + \varphi'(x')(y'-x').$$

Nyilván ugyanez a feltétel adódik, ha v helyett $v/|v|$-t írunk. Vegyük észre, hogy ha $y' \in D$, akkor $0 < y_n - \varphi(y') < \varepsilon$ esetén y a G komplementerében, $-\varepsilon < y_n - \varphi(y') < 0$ esetén pedig G-ben van. Így elég kis $r > 0$-ra $\mathbb{B}_r(x)$ azon y pontjai, amelyek G-ben vannak és amelyekre $\Big\langle y-x, v(x')/\big|v(x')\big|\Big\rangle > 0$, eleget tesznek a

$$0 < y_n - \varphi(x') - \varphi'(x')(y'-x') \le \omega(y',x')$$

feltételnek, így ezek halmazának a mértéke legfeljebb

$$\boldsymbol{\alpha}(n-1)r^{n-1} \sup_{|y'-x'|\le r} \big|\omega(y',x')\big|,$$

ami $\lambda^n\mathbb{B}_r(x) = \boldsymbol{\alpha}(n)r^n$-nel osztva nullához tart. Hasonlóan adódik, hogy

$$\left\{y\colon y \in G, \Big\langle y-x, v(x')/\big|v(x')\big|\Big\rangle < 0\right\}$$

sűrűsége nulla x-ben, így $\mathbf{n}(x) = v(x')/\big|v(x')\big|$.

12.5. Divergencia. Ha f egy vektormező $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán, amely differenciálható az x pontban, akkor f *divergenciáját* az x pontban a

$$\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Tr} f'(x)$$

összefüggéssel értelmezzük.

Emlékeztetünk rá, hogy egy $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációra $\operatorname{Tr} A$ a $\lambda \mapsto \det(A - \lambda\mathbb{1})$ karakterisztikus polinom gyökeinek multiplicitással vett összege. Akármilyen bázisban felírva A mátrixát, a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből adódik, hogy $\operatorname{Tr} A$ az A mátrixának főátlójában álló számok összege, és nem függ a bázis választásától.

Ebből következik, hogy ha f és g is vektormező és mindkettő differenciálható x-ben, akkor $\operatorname{div}(f+g)(x) = \operatorname{div} f(x) + \operatorname{div} g(x)$.

A divergencia fizikai jelentésének megértéséhez, tekintsünk egy $T = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ téglát. Ha $f = (f_1,f_2,\dots,f_n)$ folytonosan differenciálható vektormező valamely, a téglát tartalmazó nyílt halmazon, akkor $x = (x_1,x')$, $x' = (x_2,x_3,\dots,x_n)$ jelöléssel,

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 f_1(x_1,x')\,dx_1 = f_1(b_1,x') - f_1(a_1,x').$$

Jelölje $\mathbf{n}(x)$ a T tégla oldallapjának egy pontjában a külső normálist, és $n_i(x)$ ennek i-edik koordinátáját. Ennek segítségével a jobb oldal

$$n_1(b_1, x')f_1(b_1, x') + n_1(a_1, x')f_1(a_1, x')$$

alakba írható. Mindkét oldalt integrálva x' szerint, azt kapjuk, hogy

$$\int_T \partial_1 f_1(x)\,dx = \int_{\partial T} n_1(x) f_1(x)\,dx;$$

az integrálást az $\{x\colon x_1 = a_1\}$ és $\{x\colon x_1 = b_1\}$ oldalakról azért terjeszthetjük ki a tégla határára, mert a többi lapon $n_1(x)$ nulla. Hasonlóan járva el $\partial_i f_i$-vel is, és összegezve i-re, azt kapjuk, hogy

$$\int_T \operatorname{div} f(x)\,dx = \int_{\partial T} \langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle\,dx.$$

Formulánk a divergenciatétel (Gauss–Green–Osztrodgraszkij-tétel) speciális esete. A nehezebben bizonyítható általános változatot lásd később.

Az f vektormezőre $\langle f, \mathbf{n}\rangle$ az f normális irányú komponense. Ennek felületi integrálja a vektormező által jellemzett áramlásban a felületen időegység alatt átáramló mennyiség, a vektormezőnek az adott felületre vonatkozó *fluxus*a. A jobb oldal fizikai jelentése tehát a T téglából időegység alatt kiáramló mennyiség. Összehúzva T-t egy pontra, azt kapjuk, hogy div f fizikai jelentése az f vektormező forrásintenzitása.

12.6. Lemma. *Legyen $T =]a_1, b_1[\times\cdots]a_n, b_n[$ egy nyílt tégla $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor létezik olyan $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvény, amely T minden pontjában pozitív, és T-n kívül mindenütt nulla.*

Bizonyítás. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-1/x}$, ha $x > 0$, $f(x) = 0$, ha $x \le 0$ összefüggéssel definiált függvény monoton növekedő és akárhányszor differenciálható. Ennek igazolásához csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x\downarrow 0} f^{(k)}(x)/x = 0, \quad \text{ha} \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)e^{1/x}}.$$

Ha $y = 1/x$ helyettesítést alkalmazunk, akkor azt kell megmutatnunk, hogy ha P^*, Q^* nem nulla polinomok, akkor

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{P^*(y)}{Q^*(y)e^y} = 0,$$

ami a L'Hospital-szabállyal könnyen adódik.

Most legyen $g(x) = f(x)f(1-x)$. A g függvény akárhányszor differenciálható, és pozitív, ha $0 < x < 1$, egyébként nulla. Legyen

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n g\left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}\right).$$

12.7. Divergenciatétel. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-vektormező. Ekkor*

$$\int_G \operatorname{div} f = \int_{\partial G} \langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle \, dx. \tag{1}$$

Ha $g\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ egy Lipschitz-skalármező, e pedig egy rögzített vektor, akkor

$$\int_G g_e(x)\, dx = \int_{\partial G} g(x)\langle e, \mathbf{n}(x)\rangle \, dx, \tag{2}$$

ahol g_e a g-nek az e irány menti deriváltja.

Megmutatható, hogy ha nem tesszük fel, hogy ∂G lokálisan Lipschitz, csak azt, hogy azon $\mathbb{R}^n$-beli pontok B halmaza, amelyekben G Lebesgue-sűrűsége nem létezik, vagy létezik, de nullától és egytől különbözik, véges χ^{n-1} külső mértékű, akkor χ^{n-1}-majdnem minden $x \in B$ pontban létezik a külső normális, és a tétel állítása igaz marad, ha ∂G feletti integrál helyett B feletti integrált írunk. Ennek az általánosabb változatnak a bizonyítása igen nehéz, Federer [37] könyve 4.5.6, 4.5.5, 2.10.43, 4.5.11 és 3.3.13 pontjainak eredményeit kombinálva adódik.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a tétel fenti két alakja ekvivalens. Tegyük fel, hogy (1) teljesül, és legyen $f(x) = g(x)e$, ahol g egy skalármező, e pedig egy rögzített vektor. (1)-ből azonnal adódik (2). Megfordítva, tegyük fel, hogy (2) teljesül minden g Lipschitz-skalármezőre, és egy bázis $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektoraira. Irjuk fel $f(x)$-et skalár értékű függvényekkel $\sum_i f_i(x)e_i$ alakban. Ha $\partial_{e_j} f_i$ jelöli az f_i függvény e_j irány menti deriváltját, akkor (2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\int_G \partial_{e_j} f_i(x)\, dx = \int_{\partial G} f_i(x)\langle e_j, \mathbf{n}(x)\rangle \, dx$$

teljesül, minden $1 \le i, j \le n$-re. A $\partial_{e_j} f_i(x)$ számok $f'(x)$ mátrixának elemei az $e_1, \dots, e_n$ bázisban. A $j = i$ választással, összegezve i-re, a bal oldalon $\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f_i(x)$ integrálja áll, ami nem más, mint $(\operatorname{div} f)(x)$ integrálja, míg a jobb oldalon álló integrál integrandusza $\langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle$.

A (2) alaknak az az előnye, hogy közvetlenül világos, mindkét oldal invariáns lineáris és belső szorzat tartó transzformációkkal szemben: Ha T egy ilyen transzformáció, akkor a $h(T(x)) = g(x)$, azaz $h(y) = g(T^{-1}(y))$ összefüggéssel definiált h skalármező $T(e)$ irány menti deriváltjára

$$h_{T(e)}(y) = \Big(g'(T^{-1}(y)) \circ T^{-1}\Big)(T(e)) = g'(T^{-1}(y))(e) = g_e(T^{-1}(y))$$

majdnem mindenütt, így az integráltranszformációs formula szerint

$$\int_{T(G)} h_{T(e)} = \int_G g_e.$$

Vegyük észre, hogy a külső normális definíciójából közvetlenül következik, hogy a $T(G)$ halmaz külső normálisa egy $T(x)$ pontban akkor és csak akkor létezik, ha a G külső normálisa létezik az x pontban, és $\mathbf{n}\big(T(x),T(G)\big) = T\big(\mathbf{n}(x,G)\big)$. Ebből következik, hogy a G határán az $x \mapsto g(x)\langle e, \mathbf{n}(x,G)\rangle$ függvény eloszlásfüggvénye ugyanaz, mint az $y \mapsto h(y)\Big\langle T(e), \mathbf{n}\big(y,T(G)\big)\Big\rangle$ függvény eloszlásfüggvénye $T(G)$ határán, így integráljaik megegyeznek, azaz

$$\int_{\partial G} g(x)\langle e, \mathbf{n}(x,G)\rangle\,dx = \int_{\partial T(G)} h(y)\Big\langle T(e), \mathbf{n}\big(y,T(G)\big)\Big\rangle\,dy.$$

Első lépésként a (2) alakot arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor e az e_n pozitív konstansszorosa, ahol $e_1,\dots,e_n$ a standard bázis $\mathbb{R}^n$-ben, és léteznek olyan, a $T = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$ téglán értelmezett $\varphi,\psi\colon T\to\mathbb{R}$ Lipschitz-függvények, amelyekre $\psi\le\varphi$ úgy, hogy a $T' = \{x'\in T\colon \psi(x') < \varphi(x')\}$ halmaz határának λ^{n-1}-mértéke nulla, és a G halmaz azon $x=(x_1,\dots,x_n)$ pontok halmaza, amelyekre $a_i < x_i < b_i$, ha $1\le i<n$ és $\psi(x_1,\dots,x_{i-1}) < x_n < \varphi(x_1,\dots,x_{i-1})$. (Megjegyezzük, hogy egy ilyen G halmazra ∂G nem feltétlenül lokálisan Lipschitz.) Az $\int_{\partial G} g(x)\langle e,\mathbf{n}(x)\rangle\,dx$ integrál a G „tetején”, „alján” és „oldalán” vett integrálokra osztható. Az utóbbi nulla, mert itt $\langle e,\mathbf{n}(x)\rangle = 0$. Meg fogjuk mutatni, hogy a G „tetején” vett integrál $|e|\int_{T'} g(x',\varphi(x'))\,dx'$, a G „alján” vett integrál pedig $-|e|\int_{T'} g(x',\psi(x'))\,dx'$. Vegyük észre, hogy ha $x'\in T$ a T' külső pontja, akkor $(x',\psi(x')) = (x',\varphi(x'))$ nincs ∂G-ben. A $\partial T'$ halmaz λ^{n-1}-mértéke nulla, és így a megfelelő $(x',\psi(x')) = (x',\varphi(x'))$ pontok halmazának χ^{n-1}-mértéke is nulla.

Ha G „tetején” és „alján” vett integrálokra fent megadott összefüggéseket bebizonyítjuk, akkor ezekből a Newton–Leibniz-formula és a Fubini-tétel felhasználásával már adódik az állítás, mivel

$$\begin{aligned}\int_G g_e(x)\,dx &= \int_G |e|\partial_n g(x)\,dx = \int_{T'} |e| \int_{\psi(x')}^{\varphi(x')} \partial_n g(x',x_n)\,dx_n\,dx' \\ &= \int_{T'} |e|\Big(g(x',\varphi(x')) - g(x',\psi(x'))\Big)\,dx'.\end{aligned}$$

Ha $x'\in T'$ és φ differenciálható x'-ben, legyen $v_i(x')$ a $\Psi\colon x'\mapsto(x',\varphi(x'))$ függvény e_i irány mentén vett irány menti deriváltja, azaz $e_i + \varphi_{x_i}(x')e_n$, ha $1\le i<n$. Legyen $v_n(x') = e_n - \sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}(x')e_i$. Világos, hogy $v_n(x')$ merőleges a $v_i(x')$ vektorokra, és hossza $\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}^2(x')}$. Az 12.4 lemmában megmutattuk, hogy G „tetején” $v_n/|v_n|$ a külső normális. Az integráltranszformációs formula szerint a felületi integrál G „tetején”

$$\int_{T'} g(\Psi(x'))J\Psi(x')\frac{|e|}{|v_n(x')|}\,dx',$$

tehát elég azt megmutatnunk, hogy $J\Psi(x') = |v_n(x')|$, vagy, ami ezzel ekvivalens, hogy $\det(\Psi'^{*}\circ\Psi') = |v_n(x')|^2$. Az egyszerűbb jelölések kedvéért rögzítünk egy x' értéket, és a további számolásban nem írjuk ki az x' változót. A bal oldalon a $\big(\langle v_i,v_j\rangle\big)_{i,j=1}^{n-1}$ mátrix

determinánsa áll. A nagyobb $\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{i,j=1}^{n}$ mátrix utolsó sora és oszlopa nulla a sarokelem kivételével, ami $|v_n|^2$, így elég ennek determinánsáról megmutatnunk hogy $|v_n|^4$. Ha A a szokásos bázist $v_1, v_2, \dots, v_n$-be vivő transzformáció mátrixa, akkor A^*A a fenti bővített mátrix, így azt kell megmutatnunk, hogy

$$|v_n|^2 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_{x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \varphi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varphi_{x_{n-1}} \\ -\varphi_{x_1} & -\varphi_{x_2} & \dots & -\varphi_{x_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Az első $n-1$ oszlop alkalmas többszörösét levonva az utolsó oszlopból, elérhető, hogy az a sarokelem kivételével eltűnjön, a sarokelem pedig $1+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}^2$ lesz. Mivel a megfelelő adjungált aldeterminánsa 1, kapjuk a bizonyítandó állítást.

Második lépésként a tételt bebizonyítjuk a fenti tartományra tetszőleges e-re. Elég a (2) alakot bizonyítani egy bázis vektoraira. Az összes $e_n + \varepsilon e_i$, $1 \le i < n$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ alakú vektorokból bármilyen $\varepsilon_0 > 0$ esetén kiválasztható bázis, így elég az állítást ilyen vektorokra bebizonyítani elég kicsi ε_0 esetén. Mivel a tétel második alakja invariáns lineáris és belső szorzat tartó leképezésekkel szemben, az $e_n + \varepsilon e_i$ vektort az e_n irányba forgathatjuk az e_n és e_i által kifeszített síkban, és V átmegy egy olyan tartományba, amely ugyancsak megfelel az első lépésben leírt feltételeknek. (A ψ, φ függvények grafikonját „toldjuk ki" $T \times \mathbb{R}$ oldalaival.) Ez adja a második lépés bizonyítását.

Végül az általános esetet az „egység felbontásának" nevezett fontos trükk segítségével kapjuk meg. Válasszunk ∂G minden pontjához egy olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmazt, amely egy tégla elforgatásával kapható, és amelynek a G-vel való metszete (visszaforgatva) eleget tesz az első lépésben leírt feltételeknek. A G belső pontjaihoz válasszunk olyan U nyílt téglát, amely teljesen G belsejében van. Ezen U nyílt halmazok közül véges sok, mondjuk $U_1, U_2, \dots, U_k$ lefedi $\overline{G}$-at. Minden U_i halmazhoz van olyan φ_i függvény, amely pozitív U_i-n de a komplementerén nulla, és végtelen sokszor differenciálható. Így a $\varphi = \sum_i \varphi_i$ függvény mindenütt pozitív $\overline{G}$-on. Legyen $\psi_i = \varphi_i/\varphi$. Ekkor ψ_i akárhányszor differenciálható $\overline{G}$ egy környezetén, nulla az U_i-n kívül, és $\sum_i \psi_i(x) = 1$, ha $x \in \overline{G}$. Alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat a $\psi_i f$ függvényre $U_i \cap G$-n. Észrevéve, hogy $\psi_i f$ eltűnik $\partial(U_i \cap G)$ minden olyan pontjában, amely nem ∂G-ben van, azt kapjuk, hogy

$$\int_{U_i \cap G} \operatorname{div} \psi_i f = \int_{\partial G \cap U_i} \langle \psi_i f, \mathbf{n}\rangle.$$

Mindkét integrált kiterjeszthetjük:

$$\int_{G} \operatorname{div} \psi_i f = \int_{\partial G} \langle \psi_i f, \mathbf{n}\rangle.$$

Összegezve i-re kapjuk a tételt.

12.8. Feladat [8]. A divergencia-tétel alkalmazásával alakítsuk át a következő integrálokat. Itt a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, és a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

(1)
$$\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS;$$

(2)
$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\,dS;$$

(3)
$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\gamma\,dS.$$

→ **12.9. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, akkor a $|V|$ térfogatra

$$|V| = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

ahol $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái).

→ **12.10. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, akkor tetszőleges rögzített $\mathbf{l}$ irányra

$$\iint_S \cos(\mathbf{n},\mathbf{l})\,dS = 0.$$

→ **12.11. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az S lokálisan Lipschitz felület, $\mathbf{r}$ a rögzített (x,y,z) pontból a (ξ,η,ζ) pontba mutató vektor, amelynek hosszát r jelöli, akkor

$$\iiint_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\,dV = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\mathbf{r},\mathbf{n})\,dS.$$

→ **12.12. Feladat [8].** A jelölések megegyeznek az előző feladat jelöléseivel. Számítsuk ki az alábbi Gauss-integrált, ha (x,y,z) a V halmaz belsejében, illetve külsejében van:

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,dS.$$

→ **12.13. Feladat [8].** A V testet teljesen folyadékba mártjuk. Pascal törvényéből kiindulva bizonyítsuk be Arkhimédész törvényét.

12.14. Irányítás. Az egyváltozós integráltranszformációs formulánál láttuk, hogy az irányításra is érdemes tekintettel lenni. A számegyenes irányítása annyit jelent, hogy kijelöljük egy nem nulla elemét. Mindazok a számok, amelyek egymás pozitív konstansszorosai, ugyanazt az irányítást jelölik ki. Nyilván kétféle irányítás van, pozitív és negatív.

A sík esetén az irányítás egy (b_1, b_2) rendezett vektorpár kijelölését jelenti, amelyek bázist alkotnak. Egy másik (b_1', b_2') bázis akkor definiálja ugyanazt az irányítást, ha az egyik bázis folytonosan átdeformálható a másikba bázisokon keresztül. Itt is két irányítás

van, amelyeket a sík esetén is szokás pozitívnak és negatívnak nevezni, éspedig a standard (e_1, e_2) bázissal ekvivalens irányítást nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. Nem nehéz megmutatni, hogy a (b_1, b_2) irányítás $\det(b_1, b_2)$ előjele.

Hasonló a fogalom háromdimenziós térben, itt szokás jobb- illetve balsodrású koordináta-rendszerről beszélni. Itt is megmutatható, hogy kétféle irányítás van. Az egyik a standard bázissal ekvivalens irányítás, ezt nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. A (b_1, b_2, b_3) bázis által defininált irányítás itt is $\det(b_1, b_2, b_3)$ előjele.

Ennek megfelelően, $\mathbb{R}^n$-ben egy $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázis *irányítását* úgy definiáljuk, hogy legyen $\operatorname{sgn}(\det(b_1, b_2, \dots, b_n))$. Világos, hogy a standard bázis irányítása pozitív, és bármely bázis irányítása az ellentettjére változik, ha két bázisvektort felcserélünk, illetve ha valamelyik bázisvektort az ellentettjével helyettesítjük.

→ **12.15. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}^3$ és $a \times b \neq 0$, akkor $a, b, a \times b$ pozitív irányítású bázist alkotnak.

12.16. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy bázisa akkor és csak akkor pozitív irányítású, ha folytonosan átdeformálható a standard bázisba bázisokon keresztül. (Definiáljuk pontosan bázisok folytonos deformációját egymásba.)

12.17. Green-tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor létezik egyszerű zárt Lipschitz-pályák egy $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sorozata, amelyek értékkészlete ∂D egy diszjunkt lefedése úgy, hogy $1 \leq k \leq m$-re és majdnem minden t-re $\mathbf{n}(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)$ pozitív irányítású ortogonális bázisa $\mathbb{R}^2$-nek, azaz „a γ_k pályán haladva, D belseje balra esik". Bármely ilyen pályasorozatra és $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ Lipschitz-vektormezőre*

$$\int_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \langle f(x), dx \rangle.$$

A tétel második része lényegében a divergenciatétel kétdimenziós változatának átfogalmazása.

Bizonyítás. A pályák létezésének a bizonyítása a nehezebb. Abból, hogy ∂D lokálisan Lipschitz, következik, hogy minden $x \in \partial D$-hez létezik olyan x-et tartalmazó $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és olyan Lipschitz-függvény, hogy $U \cap \partial D$ a függvény értékkészlete. Pontosabban, választható olyan φ valós értékű Lipschitz-függvény, amely eleget tesz a 12.4 lemma feltételeinek; ekkor $U \cap \partial D$ az ottani jelölésekkel ψ_0 értékkészlete. A b_1, b_2 bázist válasszuk negatív irányításúnak. Mivel $\psi_0' = b_1 + \varphi' b_2$ és $\mathbf{n} = b_2 - \varphi' b_1$, az $(\mathbf{n}, \psi_0')$ ortogonális bázis pozitív irányítású. Mivel ∂D kompakt, véges sok fent leírt U halmaz lefedi. A megfelelő ψ_0 Lipschitz-függvények halmazát jelölje Ψ_0. Jelölje L az összes $\operatorname{Lip}(\psi_0)$, $\psi_0 \in \Psi_0$ értékek maximumát. Ekkor L Lipschitz-konstans minden ψ_0-hoz. A $\operatorname{rng} \psi_0$, $\psi_0 \in \Psi_0$ halmazok nyílt lefedését alkotják ∂D-nek mint altérnek. Legyen δ ennek a lefedésnek egy Lebesgue-száma, azaz válasszunk olyan $\delta > 0$-t, amelyre bármely $x \in \partial D$ pontnak a ∂D-beli δ sugarú környezete benne van valamely $\psi_0 \in \Psi_0$ értékkészletében. Legyen $\varepsilon = \delta / L$. Ha ψ_0 értelmezési tartománya $]a, b[$ és $b - a \geq 2\varepsilon$, fedjük le az $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ zárt intervallumot véges sok ε-nál rövidebb zárt részintervallumával $]a, b[$-nek. Véve a ψ_0 megszorításait ezekre a részintervallumokra, az összes $\psi_0 \in \Psi_0$ függvényből véges sok olyan ψ Lispchitz-pályát kapunk, amelyek értékkészlete δ-nál nem nagyobb átmérőjű. Jelölje ezek halmazát Ψ. Feltehetjük, hogy a pályák kezdő- és végpontjai mind különböznek;

ellenkező esetben valamelyiket válasszuk kicsit hosszabbnak. A $\operatorname{rng}\psi$, $\psi \in \Psi$ halmazok együtt lefedik ∂D-t. Valóban, akármelyik $x \in \partial D$ pont ∂D-beli δ sugarú környezete benne van valamely $\psi_0 \in \Psi_0$ értékkészletében. Ha erre a ψ_0-ra $\psi_0^{-1}(x)$ az ε-nál közelebb lenne $\operatorname{dmn}\psi_0$ valamelyik végpontjához, akkor az ebben a végpontban vett határértéke ψ_0-nak δ-nál közelebb lenne x-hez ∂D-ben, de nem lenne ψ_0 értékkészletében. Feltehetjük, hogy ez a lefedés minimális, mert egyébként elhagyunk pályákat, amíg ezt el nem érjük. Megmutatjuk, hogy ∂D bármely pontja legfeljebb két $\psi \in \Psi$ értékkészletében lehet benne. Megmutatjuk, hogy ψ_i és ψ_j, $i \neq j$ értékkészletének a közös része, ha nem üres, akkor egy kölcsönösen egyértelmű pálya értékkészlete, amelynek az egyik pálya kezdőpontja a kezdete, a másik pálya végpontja a vége, és a két pálya által adott paraméterezése ekvivalens. Megmutatjuk továbbá, hogy minden ψ_i kezdőpontja és végpontja pontosan egy másik ψ_j-nek pontja.

Az első állítás bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $x \in \partial D$, amely három pálya értékkészletében is benne van. Mindhárom pálya értékkészlete δ-nál kisebb átmérőjű részhalmaza ∂D-nek, így benne van valamely $\psi_0 \in \Psi_0$ értékkészletében. A három pálya értékkészletének teljes inverz képe ψ_0-nál három kompakt összefüggő részhalmaza, azaz zárt részintervalluma az ψ_0 értelmezési tartományának egy közös ponttal. Ekkor azonban valamelyiket lefedi a másik kettő, ami ellentmond a $\operatorname{rng}\psi$, $\psi \in \Psi$ lefedés minimális voltának.

A második állítás bizonyításához legyen $\psi \in \Psi$ és válasszunk olyan $\psi_0 \in \Psi_0$ függvényt, amelyre $\operatorname{rng}\psi \subset \operatorname{rng}\psi_0$, és legyen $\alpha = \psi_0^{-1} \circ \psi$. Megmutatjuk, hogy α szigorúan monoton növekedő. Világos, hogy α Lipschitz-függvény, és az inverze is Lipschitz-függvény, valamint, mivel kölcsönösen egyértelmű és folytonos, szigorúan monoton. Ha egyetlen pontban megmutatjuk, hogy a deriváltja pozitív, akkor csak növekedő lehet. Válasszunk olyan t belső pontot α értelmezési tartományából, amelyben α differenciálható, ψ_0 pedig differenciálható a $t' = \alpha(t)$ pontban. Ekkor $\psi = \psi_0 \circ \alpha$ is differenciálható a t pontban, és $\psi'(t) = \psi_0'(t')\alpha'(t)$. A $\psi(t) = \psi_0(t')$ pontban létezik az $\mathbf{n}$ külső normális. A $\psi'(t)$ vektor merőleges a külső normálisra, és $(\mathbf{n}, \psi'(t))$ pozitív irányítású. Hasonlóan, $(\mathbf{n}, \psi_0'(t'))$ is pozitív irányítású ortogonális bázis. Ez azt jelenti, hogy $\psi'(t)/|\psi'(t)| = \psi_0'(t')/|\psi_0'(t')|$, azaz $\alpha'(t) = |\psi'(t)|/|\psi_0'(t')| > 0$.

Tegyük fel most, hogy két Ψ-beli pálya értékkészletének van közös pontja. Választva olyan $\psi_0 \in \Psi_0$ függvényt, amelynek értékkészlete mindkét pálya értékkészletét tartalmazza, a közös résznek az ősképe ψ_0-nál egy zárt I intervallum nem nulla hosszal, és az előző bekezdésben bizonyítottak szerint a két pálya ekvivalens $\psi_0|I$-vel I-n. Így I kezdőpontjának képe az egyik pálya kezdőpontja, végpontjának képe pedig a másik pálya végpontja.

Végül, a harmadik állítás bizonyításához, ha egy $x \in \partial D$ pont valamely $\psi \in \Psi$ pálya kezdő- vagy végpontja, akkor van olyan $\psi_0 \in \Psi_0$, amelynek értékkészlete tartalmazza ψ értékkészletét. Ha másik pálya nem tartalmazná a kezdő- vagy a végpontot, akkor $\operatorname{rng}\psi_0$ nem lenne lefedve.

Az első állítás bizonyításához induljunk ki tetszőleges $\psi_{i_1} \in \Psi$ görbéből. Egyetlen olyan $\psi_{i_2} \neq \psi_{i_1}$ létezik Ψ-ben, amelynek értékkészlete tartalmazza ψ_{i_1} végpontját. Legyen δ_{i_1} a ψ_{i_1} megszorítása $[a_{i_1}, c_{i_1}]$-re, ahol $[a_{i_j}, b_{i_j}]$ jelöli a ψ_{i_j} értelmezési tartományát és $c_{i_1} = \psi_{i_1}^{-1}(\psi_{i_2}(a_{i_2}))$. Folytassuk ezt az eljárást egészen addig, amíg valamely $\psi_{i_m} \in \Psi$ végpontját valamelyik már előzőleg kiválasztott ψ_{i_j} értékkészlete tartalmazza.

Csak $i_j = i_1$ lehetséges, mert egyébként ψ_{i_j} kezdőpontját $\psi_{i_{j-1}}$ és ψ_{i_m} is tartalmazná. Legyen $c_{i_m} = \psi_{i_m}^{-1}(\psi_{i_1}(a_{i_1}))$ és δ_{i_m} a ψ_{i_m} megszorítása $[a_{i_m}, c_{i_m}]$-re. Lineáris helyettesítésekkel elérhetjük, hogy $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_m}$ egymás utáni befutása értelmezve legyen; jelölje ezt γ_1. Nyilván $\operatorname{rng}\gamma_1 = \cup_{j=1}^{m} \operatorname{rng}\psi_{i_j}$.

Folytassuk ezt az eljárást, amíg minden $\psi \in \Psi$ el nem fogy. Csak azt kell észrevennünk, hogy a $\psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \dots, \psi_{i_m}$ eltávolítása után maradó ψ-k rendszere továbbra is rendelkezik a fenti három tulajdonsággal. Világos, hogy a megkonstruált pályasorozat rendelkezik az előírt tulajdonságokkal.

A tétel második részének bizonyításához definiáljuk a $g\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ vektormezőt a $g = (f_2, -f_1)$ összefüggéssel. A divergenciatétel szerint

$$\int_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \int_D \operatorname{div} g = \int_{\partial D} \langle g, \mathbf{n}\rangle.$$

Mivel a feltételek szerint $1 \le k \le n$ esetén majdnem minden t-re $\mathbf{n}(\gamma_k(t))$ és $\gamma_k'(t)$ létezik, ortogonálisak és pozitív irányítású bázist alkotnak, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ jelöléssel majdnem minden t-re

$$\gamma_k'(t) = |\gamma_k'(t)|\Big(-n_2(\gamma_k(t)), n_1(\gamma_k(t))\Big).$$

Ebből

$$\begin{aligned}\Big\langle f(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)\Big\rangle &= |\gamma_k'(t)|\Big(-f_1(\gamma_k(t))n_2(\gamma_k(t)) + f_2(\gamma_k(t))n_1(\gamma_k(t))\Big)\\ &= \Big\langle g(\gamma_k(t)), \mathbf{n}(\gamma_k(t))\Big\rangle |\gamma_k'(t)|.\end{aligned}$$

Jelölje $[a_k, b_k]$ a γ_k értelmezési tartományát. Az integráltranszformációs formulát felhasználva,

$$\int_{\partial D} \langle g, \mathbf{n}\rangle = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} \Big\langle g(\gamma_k(t)), \mathbf{n}(\gamma_k(t))\Big\rangle |\gamma_k'(t)|\, dt = \sum_k \int_{\gamma_k} \langle f(x), dx\rangle.$$

→ **12.18. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével alakítsuk át az

$$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\, dx + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})\right)\, dy$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya az S korlátos tartományt határolja.

→ **12.19. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_K (x+y)^2\, dx - (x^2+y^2)\, dy$$

integrált, ahol a K háromszögpálya az $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$ csúcsú háromszöget határolja.

→ **12.20. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_C xy^2\, dy - x^2 y\, dx$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya értékkészlete az $x^2 + y^2 = a^2$ körvonal.

→ **12.21. Feladat [8].** Számítsuk ki az

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

integrált, ahol a C egyszerű zárt sima pálya értékkészlete egy tartomány határa, amelynek az origó nincs a határán.

12.22. Rotáció. Legyen v az $\mathbb{R}^3$ valamely részhalmazán értelmezett vektormező. Ha v differenciálható értelmezési tartománya valamely x pontjában, akkor értelmezzük v *rotációját* az x pontban. Legyenek v_1, v_2, v_3 a v koordinátafüggvényei a standard e_1, e_2, e_3 bázisban. Legyen

$$(\operatorname{rot} v)(x) = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2)\, e_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3)\, e_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\, e_3.$$

A rotáció definíciója könnyebben megjegyezhető a $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$ formális felírás segítségével, ahol a ∇ szimbólum a $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ „differenciáloperátort" jelenti. Ez a szimbolikus jelölés egyébként $\mathbb{R}^n$-re is kiterjeszthető: $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$. Ezzel a szimbolikus jelöléssel $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$, és ha f egy skalármező, akkor a gradiense $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$, valamint a Δ Laplace-operátor szimbolikusan $\langle \nabla, \nabla \rangle$, röviden ∇^2 alakba írható. (Definíció szerint, $(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f(x)$, ha f kétszer differenciálható x-ben. Vektor értékű függvényre a Laplace-operátort koordinátánként alkalmazzuk.) Ezek a szimbolikus összefüggések megkönnyítik a definíciók és tételek megjegyzését.

12.23. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett elég sima a és b skalár, illetve c és d vektormezőkre teljesülnek az alábbi összefüggések. Írjuk fel mindegyiket a ∇ operátor segítségével is.

(1) $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$;

(2) $\operatorname{div}(ac) = \langle \nabla a, c \rangle + a \operatorname{div} c$;

(3) $\operatorname{rot}(ac) = \nabla a \times c + a \operatorname{rot} c$;

(4) $\operatorname{div}(c \times d) = \langle d, \operatorname{rot} c \rangle - \langle c, \operatorname{rot} d \rangle$;

(5) $\operatorname{rot} \nabla a = 0$;

(6) $\operatorname{div} \operatorname{rot} c = 0$;

(7) $\operatorname{div} \nabla a = \Delta a$;

(8) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} c = \nabla \operatorname{div} c - \Delta c$;

(9) $\operatorname{grad} \operatorname{div} c = \Delta c + \operatorname{rot} \operatorname{rot} c$.

12.24. Feladat [8]. Az előző feladat jelöléseivel, számoljuk ki az alábbi kifejezéseket:

(1) $\nabla \langle c, d \rangle$;

(2) $\operatorname{rot}(c \times d)$.

12.25. Stokes tétele. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ és $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ ugyanaz, mint a Green-tételben, és x egy $\overline{G}$-at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}^3$-beli értékű kölcsönösen egyértelmű folytonosan differenciálható függvény, f pedig egy $x(\overline{G})$-at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható vektormező. Legyen n a x értékkészletén az*

$$n(x(s)) = \frac{\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s)}{\left|\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s)\right|},$$

ha $\partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s) \neq 0$, *egyébként* $n(x(s)) = 0$ *összefüggéssel értelmezett normál vektormező. Ekkor*

$$\int_{x(G)} \langle \operatorname{rot} f, n \rangle = \sum_i \int_{x \circ \gamma_i} \langle f(y),\, dy \rangle.$$

Bizonyítás. Az integráltranszformációs formula felhasználásával a bal oldalt átírhatjuk G feletti integrállá. Ehhez ki kell számolnunk $Jx(s)$ értékét. Ez

$$\det \begin{pmatrix} \langle \partial_1 x, \partial_1 x \rangle & \langle \partial_1 x, \partial_2 x \rangle \\ \langle \partial_2 x, \partial_1 x \rangle & \langle \partial_2 x, \partial_2 x \rangle \end{pmatrix}$$

négyzetgyöke, azaz

$$\sqrt{|\partial_1 x|^2 |\partial_2 x|^2 - \langle \partial_1 x, \partial_2 x \rangle^2} = |\partial_1 x \times \partial_2 x|.$$

A jobb oldali integrálok felírhatók a γ_i görbék $[a_i, b_i]$ értelmezési tartománya felett vett integrálként, így azt kell megmutatnunk, hogy

$$\int_G \Big\langle (\operatorname{rot} f)(x(s)), \partial_1 x(s) \times \partial_2 x(s) \Big\rangle \, ds$$
$$= \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \Big\langle f\Big(x(\gamma_i(t))\Big), x'(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) \Big\rangle \, dt.$$

Első lépésként a tételt arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor x kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor a tételt a Green-tételre vezetjük vissza. Definiáljuk a $g_1(s) = \Big\langle f(x(s)), \partial_1 x(s) \Big\rangle$ és $g_2(s) = \Big\langle f(x(s)), \partial_2 x(s) \Big\rangle$ függvényeket. Az $s \mapsto g(s) = (g_1(s), g_2(s))$ leképezés folytonosan differenciálható vektormező $\overline{G}$ egy környezetén, és a jobb oldal $\sum_i \int_{\gamma_i} \langle g(s), ds \rangle$, mert ha $\gamma_i = (\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2})$, akkor

$$x'(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) = \partial_1 x(\gamma_i(t)) \gamma_{i,1}'(t) + \partial_2 x(\gamma_i(t)) \gamma_{i,2}'(t),$$

így

$$\Big\langle f\Big(x(\gamma_i(t))\Big), x'(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) \Big\rangle = \Big\langle f\Big(x(\gamma_i(t))\Big), \partial_1 x(\gamma_i(t)) \Big\rangle \gamma_{i,1}'(t)$$
$$+ \Big\langle f\Big(x(\gamma_i(t))\Big), \partial_2 x(\gamma_i(t)) \Big\rangle \gamma_{i,2}'(t)$$
$$= g_1(\gamma_i(t)) \gamma_{i,1}' + g_2(\gamma_i(t)) \gamma_{i,2}'(t) = \Big\langle g(\gamma_i(t)), \gamma_i'(t) \Big\rangle.$$

Ha megmutatjuk, hogy a bal oldali integrandus

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} - \frac{\partial g_1}{\partial s_2},$$

akkor a Green-tételből kapjuk az egyenlőséget. Számoljuk ki a fenti kifejezést, $f = (f_1, f_2, f_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ jelöléssel, nem feledve, hogy f-et az $x(s)$ helyen kell venni:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial x_i}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial x_i}{\partial s_1}\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{3}\left(f_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_1 \partial s_2} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}\frac{\partial x_i}{\partial s_2}\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{3}\left(f_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_2 \partial s_1} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\right).
\end{aligned}$$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt a második parciális deriváltakat tartalmazó tagok kiesnek. A második tagban felcserélve az i és j indexeket az eredmény

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial s_1}\frac{\partial x_i}{\partial s_2},$$

ami rot f, $\partial_1 x$ és $\partial_2 x$ vegyes szorzata.

Az általános esetet simítással kapjuk. Legyen

$$x_\varepsilon(s) = \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(s_1 + t_1, s_2 + t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

A paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint

$$\partial_i x_\varepsilon(s) = \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_i x(s_1 + t_1, s_2 + t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$(i = 1, 2)$, amiből következik, hogy ezek a parciális deriváltak folytonosak, tehát x_ε folytonosan differenciálható az értelmezési tartományán. Továbbá, ha $\varepsilon \downarrow 0$, akkor $x_\varepsilon \to x$ és $\partial_i x_\varepsilon(s) \to \partial_i x(s)$ $(i = 1, 2)$ valamely $\overline{G}$-at tartalmazó nyílt halmazon egyenletesen. Helyettesítéssel

$$\partial_i x_\varepsilon(s) = \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{s_2-\varepsilon}^{s_2+\varepsilon}\int_{s_1-\varepsilon}^{s_2+\varepsilon} \partial_i x(u_1, u_2)\, du_1\, du_2,$$

amiből látjuk, hogy $\partial_i x_\varepsilon$ folytonosan parciálisan differenciálható mindkét változója szerint, azaz x_ε kétszer folytonosan differenciálható. Az eddig bizonyítottakból tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_G \Big\langle (\operatorname{rot} f)(x_\varepsilon(s)), \partial_1 x_\varepsilon(s) \times \partial_2 x_\varepsilon(s)\Big\rangle\, ds \\
&\quad = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \Big\langle f\Big(x_\varepsilon(\gamma_i(t))\Big), x'_\varepsilon(\gamma_i(t))\gamma'_i(t)\Big\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Ha $\varepsilon \downarrow 0$, akkor kapjuk a bizonyítandó állítást.

→ **12.26. Feladat [9].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ körpálya az x tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal. Eredményünket ellenőrizzük az integrál közvetlen kiszámításával.

→ **12.27. Feladat [8].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le \pi$ ellipszis.

→ **12.28. Feladat [8].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$$

pálya menti integrált, ahol C az $x^2 + y^2 = a^2$, $x/a + z/h = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$ ellipszis az x tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal.

12.29. Differenciálformák. Az alábbi séma a vektoranalízis klasszikus tételeit foglalja össze, a teljesség kedvéért az egydimenziós esettel kezdve:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \dim = 1 & & \\
 & & \overset{\frac{d}{dx}}{\longrightarrow} & & \\
\text{skalár „mező”} & & & & \text{skalár „mező”} \\
 & & \int_a^b f' = f(b) - f(a) & & \\
 & & \overset{\vec{\partial}}{\longleftarrow} & & \\
\text{pontok} & & & & \text{szakaszok}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \dim = 2 & & & \\
\text{skalár-} & & & & & f \mapsto \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} & \text{skalár-} \\
\text{mező} & \overset{\nabla}{\longrightarrow} & \text{vektor-} & & \text{vektor-} & \longrightarrow & \text{mező} \\
 & & \text{mező} & & & & \\
 & & \int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle & & & & \\
 & & = f(\gamma(b)) & & & & \\
 & & -f(\gamma(a)) & & \text{Green-} & & \\
 & & & & \text{tétel} & & \\
 & & \overset{\vec{\partial}}{\longleftarrow} & & \overset{\vec{\partial}}{\longleftarrow} & & \text{2-dim.} \\
\text{pontok} & & \text{görbék} & & & & \text{halmaz}
\end{array}$$

$\dim = 3$

skalár-mező	$\xrightarrow{\nabla}$	vektor-mező	$\xrightarrow{\text{rot}}$	vektor-mező	$\xrightarrow{\text{div}}$	skalár-mező
	$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$		Stokes-tétel		Gauss-tétel	
pontok	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	görbék	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	irányított felületek	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	3-dim. halmaz

$\dim = n$

skalár-mező	$\xrightarrow{\nabla}$	vektor-mező	$\xrightarrow{?}$	$\dots$	$\xrightarrow{?}$	vektor-mező	$\xrightarrow{\text{div}}$	skalár-mező
	$\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$		?	$\dots$	?		Gauss-tétel	
pontok	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	görbék	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	$\dots$	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	$n-1$-dim. ir. fel.	$\xleftarrow{\vec{\partial}}$	n-dim. halmaz

Mint látjuk, az egész történet a Newton–Leibniz-formulával kezdődik, mely szerint egy szakaszon integrálva egy függvény deriváltját, az eredmény a felső és alsó végpontokban vett függvényértékek különbsége.

Vegyük észre, hogy a felső sorokban mezők, és közötttük ható differenciáloperátorok állnak. Az alsó sorban mindig irányított határt képezünk. A középső sorban álló tételek sémája: ha a tétel felett álló differenciáloperátor hat egy mezőre, és a kapott mezőt integráljuk az alatta álló irányított alakzat felett, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az alakzat irányított határa felett integrálnánk az eredeti mezőt. Ezt az általános sémát szeretnénk átvinni tetszőleges dimenzióra.

Az alsó sor általánosításával könnyű dolgunk van. A görbék fogalmát véve alapul, k-dimenziós felület, vagy röviden k-felület alatt egy k-dimenziós G nyílt halmazon értelmezett ψ folytonos függvénynek egy $D \subset G$ korlátos mérhető halmazra vett megszorítását fogjuk érteni. Ugyanúgy, mint a görbéknél, itt is magát a leképezést fogjuk felületnek nevezni, nem az értékkészletét, mert az irányításra is szükség van, és ezt a leképezés adja, átvive az értelmezési tartomány természetes irányítását. Mint a görbéknél, itt is legtöbbször feltesszük, hogy ψ differenciálható, vagy legalábbis Lipschitz, és D-ről is gyakran feltesszük, hogy ∂D lokálisan Lipschitz. Az irányított határt úgy fogjuk képezni, mint a Stokes-tételnél tettük: a D határát irányítja a külső normális, és az irányított határ képzésénél olyan $k-1$ felületet keresünk, amelynek irányítása ezzel összhangban van.

Nehezebb megtalálni, hogy mit integráljunk a k-felületeinken. A kiindulópontot a görbe menti integrál adhatja. Itt láttuk, hogy vektormező helyett jobb kovektormezőt

integrálni, azaz lineáris funkcionál (vagy operátor) értékű függvényt. Egy vektormezőhöz aztán a belső szorzat vagy a vektori szorzat segítségével, vagy más módon hozzárendelhetünk egy kovektor-mezőt. A görbe menti integrál definiálásakor (a felosztások használatánál) kihasználtuk a valós számok rendezését. A k-felület feletti integráloknál ezt nem tehetjük meg, ezért hasznosabb a görbe menti integrál kiszámítására szolgáló

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

ha $\operatorname{dmn}\gamma = [a,b]$ összefüggés jobb oldalát alapul venni. Ez ugyan csak akkor tehető meg, ha γ abszolút folytonos, amit k-felületeknél a Lipschitz-feltétel fog helyettesíteni, de integrálfogalmunk így is elég általános lesz. A jobb oldalon az $f(\gamma(t))$ lineáris funkcionált (vagy operátort) alkalmazzuk a $\gamma'(t)$ vektorra, és az így kapott értéket, ami t függvénye, integráljuk.

Vegyük közelebbről szemügyre a háromdimenziós esetet. A Stokes-tételben egy

$$\int_F \langle g, n\rangle$$

típusú integrál szerepel, ahol F egy kétdimenziós alakzat, amit az n normálvektor irányít, g pedig egy vektormező. Mint a Stokes-tétel bizonyításában láttuk, F-et egy $\gamma\colon D \to \mathbb{R}^3$ 2-felület értékkészleteként előállítva, a fenti integrál

$$\int_D \Big\langle g(\gamma(s)), \partial_1\gamma(s) \times \partial_2\gamma(s)\Big\rangle\, ds$$

alakba írható. Így tulajdonképpen a g vektormezőhöz a vegyes szorzat segítségével egy bilineáris funkcionált rendeltünk, és ezt alkalmazzuk a $\partial_1\gamma(s)$ és $\partial_2\gamma(s)$ vektorokra. A bilineáris funkcionál alternáló, a vegyes szorzat tulajdonságai miatt. Ennek megfelelően, egy k-felületen egy értékként k-lineáris alternáló formákat felvevő függvényt kell integrálnunk. A differenciáloperátor az úgynevezett külső deriválás lesz: értéke egy pontban a differenciálból képzett alternáló forma.

12.30. Lemma. *Tegyük fel, hogy $n > 1$ és $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor van olyan $\mathbb{R}^{n-1}$ valamely D korlátos nyílt részhalmazán értelmezett Lipschitz-függvény, és olyan $B \subset D$ Borel-halmaz, hogy $\psi|B$ kölcsönösen egyértelmű, értékkészlete ∂G, majdnem minden $y \in \operatorname{dmn}\psi$-re*

$$\mathbf{n}(\psi(y)),\ \partial_1\psi(y),\ \partial_2\psi(y),\ \ldots,\ \partial_{n-1}\psi(y)$$

pozitív irányítású bázisa $\mathbb{R}^n$-nek és $\mathbf{n}(\psi(y))$ merőleges a

$$\partial_i\psi(y), \quad i = 1,\ldots,n-1$$

érintővektorokra. Minden ilyen ψ-re és B-re, és minden χ^{n-1}-integrálható $f\colon \partial G \to \mathbb{R}^n$ függvényre

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle = \int_B \det\Big(f(\psi(y)), \partial_1\psi(y), \ldots, \partial_{n-1}\psi(y)\Big)\, dy.$$

Bizonyítás. Abból, hogy G határa lokálisan Lipschitz, következik hogy minden $x \in \partial G$-hez létezik olyan x-et tartalmazó $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és az $\mathbb{R}^{n-1}$ valamely D_0 nyílt részhalmazán értelmezett ψ_0 Lipschitz-felület, hogy $U_0 \cap \partial G$ a ψ_0 értékkészlete. Pontosabban, választható olyan $\varphi\colon D_0 \to \mathbb{R}$ valós értékű Lipschitz-függvény, amely eleget tesz a 12.4 lemma feltételeinek; ekkor a megfelelő Lipschitz-felület az ottani jelölésekkel ψ_0. A $b_1, b_2, \dots, b_n$ ortonormált bázist válasszuk páratlan n esetén pozitív irányításúnak, páros n esetén pedig negatív irányításúnak. Ekkor

$$(-1)^{n-1}\det(\partial_1\psi_0, \dots, \partial_{n-1}\psi_0, \mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{m-1}(\partial_i\varphi)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \partial_1\varphi \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \partial_2\varphi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \partial_{n-1}\varphi \\ -\partial_1\varphi & -\partial_2\varphi & \dots & -\partial_{n-1}\varphi & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

A determinánsban $n-1$ cserével $\mathbf{n}$-et előre hozhatjuk, és kapjuk, hogy

$$\mathbf{n}, \partial_1\psi_0, \dots, \partial_{n-1}\psi_0$$

pozitív irányítású. Mivel ∂G kompakt, véges sok fent leírt $U_1, \dots, U_k$ halmaz lefedi. A megfelelő $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ Lipschitz-felületek értékkészletének egyesítése ∂G. Legyen D a megfelelő $D_1, \dots, D_k$ nyílt halmazok egyesítése. Lineáris helyettesítéssel könnyen elérhetjük, hogy $i \neq j$ esetén $D_i = \operatorname{dmn}\psi_i$ és $D_j = \operatorname{dmn}\psi_j$ távolsága legalább 1 legyen, így $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ a $\psi = \cup_{i=1}^k \psi_i$ Lipschitz-függvény megszorításai. Legyen B a $D_i \setminus \psi_i^{-1}(\cup_{j<i} U_j)$ halmazok egyesítése.

Ha ψ és B a tételben leírt tulajdonságú, akkor az integráltranszformációs formula szerint a tételben szereplő egyenlőség bal oldalára

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle = \int_B \Big\langle f(\psi(x)), \mathbf{n}(\psi(x))\Big\rangle J\psi(x)\,dx.$$

Másrészt f értéke felírható $f = \langle f, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\partial_i\psi$ lineáris kombinációként. Ezt beírva a tételben a jobb oldalon szereplő determinánsba, az integrandusra azt kapjuk, hogy az

$$\langle f, \mathbf{n}\rangle \det(\mathbf{n}, \partial_1\psi, \dots, \partial_{n-1}\psi).$$

Mivel ez a determináns pozitív, a négyzetének a négyzetgyöke, ami viszont $J\psi$, mivel $\mathbf{n}$ egységvektor, és minden $\partial_i\psi$-re merőleges.

12.31. Multilineáris formák. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett. Egy $f\colon V^m \to \mathbb{R}$, minden változójában lineáris (multilineáris, m-lineáris) leképezést *m-lineáris funkcionál*nak, vagy *m-lineáris formá*nak, röviden *m-formá*nak nevezünk. Az összes m-formák lineáris teret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Az 1-formák a $f\colon V \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, a V^* duális tér elemei. (A V^* jelölés nem korrekt, mert normált tér duális terére is ezt használtuk, de nem okoz félreértést, mert V-n nincs norma értelmezve.) A 0-formák definíció szerint $\mathbb{R}$ elemei. Egy példa m-formára a következő: Legyen $\omega_1, \dots, \omega_m \in V^*$. Ekkor az

$$(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_m)(v_1, v_2, \dots, v_m) = \prod_{i=1}^m \omega_i(v_i)$$

összefüggés egy m-formát definiál V-n. (Nem minden m-forma áll elő ilyen alakban.)

Legyen V egy n-dimenziós vektortér. Bármely $e_1, \dots, e_n$ bázisára V-nek, egy f m-formát egyértelműen meghatároznak az

$$(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}), \quad 1 \le j_1, \dots, j_m \le n$$

vektor m-eseken felvett értékei. Valóban, ha $v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j$, akkor

$$f(v_1, \dots, v_m) = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \left(\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j_i} \right) f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}).$$

Megfordítva, ha tetszőlegesen választjuk az $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \in \mathbb{R}$ skalárokat, akkor az előző összefüggés egy m-formát definiál.

Megmutatjuk, hogy az m-formák tere n^m-dimenziós. Pontosabban, megmutatjuk, hogy ha $\omega_1, \dots, \omega_n$ a V^* egy bázisa, akkor az

$$\omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}, \qquad 1 \le j_1, \dots, j_m \le n$$

m-formák bázist alkotnak. Válasszunk olyan $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázist V-ben, amelyre $\omega_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-delta). Ekkor

$$f = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}.$$

Ez az előző bekezdés állításából következik: a bal és jobb oldal egybeesnek az $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor m-eseken. Másrészt, ha egy

$$\sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \alpha_{j_1, \dots, j_m} \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}$$

lineáris kombináció nulla, akkor minden $\alpha_{j_1, \dots, j_m}$ együttható nulla. Valóban, ha valamelyik $\alpha_{k_1, \dots, k_m}$ nem lenne nulla, akkor a lineáris kombináció az $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor m-esen nem nulla értéket venne fel.

Az m-formák két speciális fajtája különösen fontos: a szimmetrikus és az alternáló formák.

Jelölje S_m az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz összes permutációinak csoportját. Egy f m-formát *szimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$-re és $\sigma \in S_m$-re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = f(v_1, \dots, v_m).$$

A szimmetrikus m-formák egy alterét alkotják az m-formák terének. Bármely f m-formából képezhetünk egy $S(f)$ szimmetrikus m-formát az

$$S(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $S(f)$ szimmetrikus m-forma. Az S leképezés lineáris. Emlékeztetünk rá, hogy egy skalár értékű függvény m-edik deriváltja egy szimmetrikus m-forma.

Számunkra most még fontosabbak lesznek az alternáló formák. Egy f m-formát *alternáló*nak vagy *antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$ és $\sigma \in S_m$ esetén

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = (\operatorname{sgn}\sigma) f(v_1, \dots, v_m);$$

itt $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, ahol $\varepsilon(\sigma)$ az inverziók száma a σ permutációban. (Ismert, hogy $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$ az S_m csoport homomorfizmusa a $\{-1, 1\}$ multiplikatív csoportba.) Egy alternáló forma előjelet vált, ha bármely két változóját megcseréljük, ugyanis a megfelelő σ permutációra $\operatorname{sgn}\sigma = -1$. Megfordítva, ha egy m-forma bármely két szomszédos változóját megcserélve, előjelet vált, akkor alternáló, mert ilyen cserékkel bármely permutáció felépíthető. Ha f alternáló forma, és $v_i = v_j$ valamely $i \neq j$-re, akkor $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, mert ezt a két változót megcserélve, az érték ugyanaz marad, de előjelet is kell váltania. Az alternáló m-formák is egy alterét alkotják az m-formák terének. Itt is bármely f m-formából képezhető egy $A(f)$ alternáló m-forma az

$$A(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (\operatorname{sgn}\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $A(f)$ alternáló m-forma. Az A leképezés lineáris. Ha f alternáló volt, akkor $A(f) = m!f$.

Ha $\omega_1, \dots, \omega_m \in V^*$, akkor legyen

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m = A(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m).$$

Ezeknek az úgynevezett *külső szorzat*oknak az értékei kifejezhetők determinánsok segítségével: Ha $v_1, \dots, v_m \in V$ egy tetszőleges vektorrendszer, akkor

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m)(v_1, \dots, v_m) &= \sum_{\sigma \in S_m} (\operatorname{sgn}\sigma) \omega_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \omega_{\sigma(m)}(v_m) \\ &= \det\Big((\omega_j(v_i))_{i,j=1}^m \Big).\end{aligned}$$

Véges dimenziós V esetén megadjuk az alternáló formák terének egy bázisát. Legyen $\omega_1, \dots, \omega_n$ a V^* egy bázisa. Bármely $1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n$ indexrendszer esetén képezhetjük az $\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_m}$ alternáló m-formákat. Ezek kifeszítik az alternáló m-formák alterét, de nyilván nem függetlenek, hiszen egyrészt a $j_1, j_2, \dots, j_m$ bármely permutációjához, előjeltől eltekintve, ugyanaz az m-forma tartozik, másrészt ha két index megegyezik, akkor a megfelelő m-forma nulla. Ha azonban az összes

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_m}, \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$$

alternáló m-formákat tekintjük, akkor ezek bázist alkotnak. Csak a lineáris függetlenséget kell megmutatnunk. Ez hasonlóan adódik, mint a nem alternáló esetben.

→ **12.32. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy minden 2-forma egyértelműen előállítható egy alternáló és egy szimmetrikus forma összegeként. Igaz-e ez m-formákra?

→ **12.33. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy egy f m-forma akkor és csak akkor alternáló, ha

(1) minden páratlan σ permutációra és $v_1, \dots, v_m$-re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = -f(v_1, \dots, v_m);$$

(2) $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, hacsak a v_i-k közül legalább kettő megegyezik.

→ **12.34. Feladat [5].** Legyen f alternáló m-forma. Mutassuk meg, hogy ha $v_1, \dots, v_m$ lineárisan függőek, akkor $f(v_1, \dots, v_m) = 0$.

→ **12.35. Feladat [6].** Ha V valós n-dimenziós vektortér, hány dimenziós a V feletti alternáló m-lineáris formák tere?

12.36. Feladat[6]. Ha V valós n-dimenziós vektortér, hány dimenziós a V feletti szimmetrikus m-lineáris formák tere?

∗ **12.37. Tenzorszorzat, külső szorzat.** Ha V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $f\colon V^k \to \mathbb{R}$, $g\colon V^l \to \mathbb{R}$ multilineáris leképezések, akkor az $f \otimes g$ *tenzorszorzat*ukat az

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

összefüggéssel értelmezzük. Világos, hogy a tenzorszorzás asszociatív, és mindkét oldalról disztributív. Speciális esetként kapjuk az 1-formák fentebb már definiált tenzorszorzatát.

Egy (k,l)-*keverés* alatt az $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$ halmaz egy olyan permutációját értjük, amely monoton növekedő az

$$\{1, \dots, k\} \quad \text{és} \quad \{k+1, \dots, k+l\}$$

részhalmazokon. Az összes (k,l)-keverések halmazát jelölje $S(k,l)$. Ha most f és g alternáló formák, akkor az $f \wedge g$ *külső szorzat*ukat az

$$\begin{aligned}(f \wedge g)&(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})\end{aligned}$$

összefüggéssel definiáljuk. Vegyük észre, hogy

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g),$$

így $f \wedge g$ egy alternáló $(k+l)$-forma. Ebből az összefüggésből következik, hogy a külső szorzás mindkét oldalról disztributív. Megmutatjuk, hogy asszociatív is. Ehhez azt kell először belátnunk, hogy ha f egy k-forma, g pedig egy l-forma, akkor $A\big(A(f) \otimes g\big) = k! A(f \otimes g)$ és $A\big(f \otimes A(g)\big) = l! A(f \otimes g)$. Definíció szerint

$$\begin{aligned}&A\big(A(f) \otimes g\big) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \sigma) \Big(\sum_{\tau \in S_k} (\operatorname{sgn} \tau) f(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(k))}) \Big) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).\end{aligned}$$

Jelölje $\tau' \in S_{k+l}$ azt a permutációt, amelyre $\tau'(i) = \tau(i)$, ha $1 \le i \le k$ és $\tau'(i) = i$, ha $k < i \le k+l$. Ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned} &A(A(f) \otimes g) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau') f(v_{\sigma\circ\tau'(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau'(k)}) g(v_{\sigma\circ\tau'(k+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau'(k+l)}). \end{aligned}$$

Mivel S_{k+l} minden permutációja pontosan $k!$-féleképpen áll elő $\sigma \circ \tau'$, $\sigma \in S_{k+l}$, $\tau \in S_k$ alakban, a jobb oldal $k!A(f \otimes g)$. A másik összefüggés hasonlóan látható be.

Ezt felhasználva, a külső szorzás asszociativitása adódik a tenzorszorzás asszociativitásából, mivel ha h meg egy m-forma, akkor

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{m!(k+l)!} A((f \wedge g) \otimes h) = \frac{1}{m!(k+l)!} A\Big(\frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \otimes h\Big) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h) = f \wedge (g \wedge h). \end{aligned}$$

12.38. Definíció. Valamely $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett, értékként $\mathbb{R}^n$ feletti alternáló m-formákat felvevő függvényt *m-edrendű differenciálforma*nak nevezünk. Mivel az alternáló m-formák tere (véges dimenziós) normált tér, beszélhetünk a differenciálformák mérhetőségéről, folytonosságáról, differenciálhatóságáról, stb. Hogy a differenciálforma elnevezést megértsük, tekintsünk az $\mathbb{R}^n$ egy D nyílt részhalmazán egy $x\colon D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelynek deriváltja minden pontban invertálható. Az x úgy tekinthető, mint egy görbevonalú koordinátázás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$, azaz x_i az x függvény i-edik koordinátafüggvénye, akkor az x_i differenciáljának hagyományos jelölése dx_i. Bármely $y \in D$ pontra a $dx_1(y), \dots, dx_n(y)$ 1-formák egy bázis alkotnak az 1-formák terében, így bármely $y \in D$-re a

$$dx_{j_1}(y) \wedge \ldots \wedge dx_{j_m}(y), \qquad 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le m$$

m-formák bázist alkotnak az m-formák terében. Bármely m-edrendű ω differenciálforma D-n felírható

$$\omega(y) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_m \le m} \omega_{j_1,\dots,j_m}(y) dx_{j_1}(y) \wedge \ldots \wedge dx_{j_m}(y)$$

alakban $\omega_{j_1,\dots,j_m}$ valós értékű együttható-függvényekkel. Innen ered a differenciálforma elnevezés. Leggyakrabban a szokásos koordinátázást használjuk, ekkor dx_i nem függ y-tól.

Legyen $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, és tegyük fel, hogy G nyílt, D pedig korlátos mérhető halmaz. Legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ egy Lipschitz-függvény, f pedig egy m-edrendű korlátos Borel-differenciálforma $\gamma(D)$-n. Legyen

$$\int_{\gamma|D} f = \int_D f(\gamma(t)) \partial_1\gamma(t) \partial_2\gamma(t) \dots \partial_m\gamma(t)\, dt.$$

Differenciálformák integráljának egyszerű tulajdonságai (pl. additív, homogén, stb.) azonnal következnek a definícióból. Az alábbi tétel mutatja, hogy az integrál nem függ a paraméterezéstől.

12.39. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq m > 0$, $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, G nyílt, D pedig korlátos és mérhető. Legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény. Tegyük fel, hogy adott egy másik, $H \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, ennek egy $E \subset H$ korlátos mérhető részhalmaza, és egy $\psi\colon H \to G$ Lipschitz-függvény, amely E-t D-re képezi le kölcsönösen egyértelműen. Legyen f korlátos m-edrendű Borel-differenciálforma $\gamma(D)$-n. Ha ψ' determinánsa majdnem mindenütt pozitív, akkor $\int_{\gamma\circ\psi|E} f = \int_{\gamma|D} f$, ha pedig majdnem mindenütt negatív, akkor $\int_{\gamma\circ\psi|E} f = -\int_{\gamma|D} f$.*

Bizonyítás. Számoljuk ki az

$$\int_{\gamma\circ\psi|E} f = \int_E f(\gamma(\psi(t)))\partial_1(\gamma\circ\psi)(t)\cdots\partial_m(\gamma\circ\psi)(t)\,dt$$

integrált. Legyenek ψ koordinátai $(\psi_1,\dots,\psi_m)$. Mivel

$$\partial_i(\gamma\circ\psi)(t) = \sum_{j=1}^m \partial_j\gamma(\psi(t))\partial_i\psi_j(t),$$

az f értékeinek multilinearitását kihasználva,

$$\begin{aligned} &f(\gamma(\psi(t)))\partial_1(\gamma\circ\psi)(t)\cdots\partial_m(\gamma\circ\psi)(t)\\ &\quad= \sum_{1\leq j_1,\dots,j_m\leq m}\Big(\prod_{i=1}^m \partial_i\psi_{j_i}(t)\Big) f(\gamma(\psi(t))\partial_{j_1}\gamma(\psi(t))\cdots\partial_{j_m}\gamma(\psi(t)). \end{aligned}$$

Mivel f értékei alternálók, minden olyan tag nulla, amelyben a j_i indexek közül kettő megegyezik. A megmaradó tagokban $j_1,\dots,j_m$ az $1,\dots,m$ egy permutációja, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &f(\gamma(\psi(t)))\partial_1(\gamma\circ\psi)(t)\cdots\partial_m(\gamma\circ\psi)(t)\\ &\qquad= \det\psi'(t) f(\gamma(\psi(t))\partial_1\gamma(\psi(t))\cdots\partial_m\gamma(\psi(t)). \end{aligned}$$

Így az integráltranszformációs formula alapján kapjuk az állítást.

12.40. Külső derivált. Ha $m > 0$ és az $(m-1)$-edrendű f differenciálforma differenciálható az x pontban, akkor az x-beli *külső derivált*ját a

$$df(x)(v_1,\dots,v_m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f'(x)(v_i)(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_m)$$

összefüggéssel értelmezzük. Az x-beli külső derivált alternáló m-forma, mert bármely két szomszédos változóját felcserélve, előjelet vált. Így $x \mapsto df(x)$ egy m-edrendű differenciálforma.

12.41. Poincaré–Stokes-tétel. *Legyen $n \geq m-1 > 0$, $D \subset \overline{D} \subset G \subset \mathbb{R}^m$, D és G korlátos nyílt halmazok, tegyük fel, hogy D határa lokálisan Lipschitz, legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény, és legyen B és ψ az előző lemma*

szerinti halmaz és függvény, a „D irányított határa". Ekkor bármely, a $\gamma(\overline{D})$ egy nyílt környezetén értelmezett f folytonosan differenciálható $(m-1)$-formára

$$\int_{\gamma|D} df = \int_{\gamma\circ\psi|B} f.$$

Bizonyítás. A bal oldal definíció szerint

$$\int_D \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} f'(\gamma(s))\partial_i\gamma(s)\partial_1\gamma(s)\dots\partial_{i-1}\gamma(s)\partial_{i+1}\gamma(s)\dots\partial_n\gamma(s)\,ds,$$

a jobb oldal pedig

$$\int_B f\Big(\gamma(\psi(t))\Big)\partial_1(\gamma\circ\psi)(t)\partial_2(\gamma\circ\psi)(t)\dots\partial_{n-1}(\gamma\circ\psi)(t)\,dt.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ez a két integrál megegyezik. Hasonlóan fogunk eljárni, mint a Stokes-tétel bizonyításában.

Először tegyük fel, hogy γ kétszer folytonosan differenciálható. Vezessük be a

$$g_i(s) = (-1)^{i-1} f(\gamma(s))\partial_1\gamma(s)\dots\partial_{i-1}\gamma(s)\partial_{i+1}\gamma(s)\dots\partial_n\gamma(s)$$

segédfüggvényeket és legyen $g = (g_1, \dots, g_n)$ a szokásos bázisban. Megmutatjuk, hogy ezzel a jelöléssel a bal oldal $\int_D \operatorname{div} g$, a jobb oldal pedig $\int_{\partial D}\langle g, \mathbf{n}\rangle$, így a tétel következik a divergenciatételből.

Mivel – a változót nem írva ki –

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}\partial_i g_i &= f'\circ\gamma\partial_i\gamma\partial_1\gamma\partial_2\gamma\cdots\partial_{i-1}\gamma\partial_{i+1}\gamma\cdots\partial_m\gamma\\ &+\sum_{j<i} f\circ\gamma\partial_1\gamma\cdots\partial_{j-1}\gamma\partial_i\partial_j\gamma\partial_{j+1}\gamma\cdots\partial_{i-1}\gamma\partial_{i+1}\gamma\cdots\partial_m\gamma\\ &+\sum_{j>i} f\circ\gamma\partial_1\gamma\cdots\partial_{i-1}\gamma\partial_{i+1}\gamma\cdots\partial_{j-1}\gamma\partial_i\partial_j\gamma\partial_{j+1}\gamma\cdots\partial_m\gamma,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy a bal oldali integrandus $\operatorname{div} g(s) = df(\gamma(s))\partial_1\gamma(s)\cdots\partial_m\gamma(s)$, mert a γ második parciális deriváltját tartalmazó, $j<i$ esetén fellépő

$$f(\gamma(s))\partial_i\partial_j\gamma(s)\partial_1\gamma(s)\cdots\partial_{j-1}\gamma(s)\partial_{j+1}\gamma(s)\cdots\partial_{i-1}\gamma(s)\partial_{i+1}\gamma(s)\cdots\partial_m\gamma(s)$$

tag, illetve az $i<j$ esetén fellépő

$$f(\gamma(s))\partial_i\partial_j\gamma(s)\partial_1\gamma(s)\cdots\partial_{i-1}\gamma(s)\partial_{i+1}\gamma(s)\cdots\partial_{j-1}\gamma(s)\partial_{j+1}\gamma(s)\cdots\partial_m\gamma(s)$$

tag előjele ellenkező.

Számoljuk ki a másik oldalt is. Ugyanúgy eljárva, mint az előző tétel bizonyításában, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&f\Big(\gamma(\psi(t))\Big)\partial_1(\gamma\circ\psi)(t)\cdots\partial_{m-1}(\gamma\circ\psi)(t)\\ &\quad=\sum_{1\le j_1\dots,j_{m-1}\le m}\Big(\prod_{i=1}^{m-1}\partial_i\psi_{j_i}(t)\Big)f\Big(\gamma(\psi(t))\Big)pa_{j_1}\gamma(\psi(t))\cdots\partial_{j_{m-1}}\gamma(\psi(t)).\end{aligned}$$

Mivel f értékei alternálók, azok a tagok, amelyekben nem minden j különböző, nullák. Másrészt,

$$\int_{\partial D} \langle g, \mathbf{n} \rangle = \int_B \det\Big(g(\psi(t)), \partial_1\psi(t), \dots, \partial_{m-1}\psi(t)\Big)\, dt.$$

Beírva a g koordinátáit, és a determinánst kifejtve az első oszlop szerint, valamint figyelembe véve, hogy $(-1)^{i-1}g_i(\psi(t))$ szorzója $\det\Big((\partial_k\psi_{j_l}(t))_{k,l=1}^{m-1}\Big)$ alakban írható, ahol $1 \le j_1 < \ldots < j_{m-1} \le m$ az az egyetlen sorozat, amelyben nem szerepel az i, azt kapjuk, hogy az integrandus

$$\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{m-1}\le m} \det\Big((\partial_k\psi_{j_l}(t))_{k,l=1}^{m-1}\Big) f\Big(\gamma(\psi(t))\Big)\partial_{j_1}\gamma(\psi(t))\cdots\partial_{j_{m-1}}\gamma(\psi(t)).$$

Így kifejtve a determinánsokat, látjuk, hogy $\int_{\partial D}\langle g, \mathbf{n}\rangle$ megegyezik a jobb oldallal, és ezzel kétszer folytonosan differenciálható γ esetére a tételt beláttuk.

Az általános eset ebből a speciális esetből ugyanúgy kapható simítással, mint a Stokes-tételnél, a

$$\gamma_\varepsilon(s) = \frac{1}{(2\varepsilon)^m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cdots\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\gamma(s_1+t_1,\dots,s_m+t_m)\,dt_1\ldots,\,dt_m,$$

$\varepsilon > 0$ függvényekkel közelítve γ-t.

→ **12.42. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy ha

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} \omega_{i_1,\ldots,i_m}(x)\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m},$$

ahol $x_1,\dots,x_n$ a szokásos koordináták, akkor

$$d\omega(x) = \sum_{i_0=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}\partial_{i_0}\omega_{i_1,\ldots,i_m}(x)\, dx_{i_0}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m}.$$

→ **12.43. Feladat [12].** Legyen f az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett skalármező, g pedig az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett vektormező.

(1) Határozzuk meg az f külső deriváltját. Mi a kapcsolata ∇f-el?

(2) Határozzuk meg a $\tilde{g}(x)(v) = \langle g(x), v\rangle$ összefüggéssel értelmezett 1-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés g rotációjával?

(3) Határozzuk meg $\tilde{g}(x)(v,w) = \langle g(x), v\times w\rangle$ összefüggéssel értelmezett 2-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés g divergenciájával?

→ **12.44. Feladat [9].** Mi a kapcsolat a Newton–Leibniz-formula és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→ **12.45. Feladat [9].** Mi a kapcsolat az $\int_\gamma \operatorname{grad} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ összefüggés és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→ **12.46. Feladat [10].** Vezessük le a Green-tételt a Poincaré–Stokes-tételből.

→ **12.47. Feladat [10].** Vezessük le a Stokes-tételt a Poincaré–Stokes-tételből.

→ **12.48. Feladat [10].** Vezessük le a divergenciatételt a Poincaré–Stokes-tételből.

IV. Komplex függvénytan

A legrövidebb út két valós igazság között a komplexben vezet.

Jacques Hadamard

A görög matematikán, amelynek szabatossága a tudományok mintájául szolgált (Eukleidész műve 2000 évig volt tankönyv!), először a reneszánsz számolóművészeinek sikerült túllépnie, amikor del Ferro (1465–1526) és Nicolo Fontana „Tartaglia" (1500?–1557) bizonyos harmadfokú egyenleteket oldottak meg. Felfedezéseiket Cardano (1501–1576) és tanítványa, Ferro fejlesztették tovább, megtalálva az általános harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásának módját. Olyan esetekben azonban, amikor három különböző valós gyöke van egy harmadfokú egyenletnek, a Cardano-képletben a négyzetgyökjel alatt negatív szám szerepelt, és így nem adta meg a megoldást: ez a „casus irreducibilis". Észrevették azonban, hogy negatív számok négyzetgyökeire is bevezethetők megfelelő számolási szabályok. Fokozatosan tisztázódtak a „képzetes" számokkal való számolás szabályai, és a trigonometrikus függvényekkel való kapcsolat. Miután Euler felfedezi az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolatot, megkezdődik a komplex függvénytan diadalútja. Laplace a Fourier-transzformáltat a változó komplex értékeire is kiterjeszti, ezzel a komplex függvénytan erős eszköz lesz (és mindmáig az marad) a matematikusok, fizikusok és mérnökök kezében. A komplex számok fogalmát Gauss tisztázza véglegesen, és bebizonyítja az algebra alaptételét. Ruffini (1765–1822) és Abel (1802–1829) bebizonyítják a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatatlanságát. Munkájukban Euler és Lagrange ötleteit is használják, akik az egyenletek megoldóképlete és a gyökök permutációi közötti kapcsolatot felfedezték és vizsgálták. A kérdéskört Galois (1811–1832) zsenije tisztázta, akinek gondolatai századunkban is élénken hatnak. Közben Cauchy bebizonyította a komplex függvénytan legfontosabb tételeit (integráltétel, reziduumtétel, stb.). A komplex függvénytan harmóniája elbűvölte a matematikusokat. Riemann zsenije a komplex függvénytan és a matematika többi ága, például a topológia között mély kapcsolatokat tárt fel, gondolatainak hatása napjainkig tart. A komplex számok és függvények alkalmazása ma igen széleskörű. A számtalan matematikai alkalmazás mellett olyan egyszerű példáktól, mint a komplex impedanciák használata a mérnöki gyakorlatban, az első repülőgépszárny tervezésén (Zsukovszkij-profil) keresztül egészen a ma még csak születőben lévő, a komplex differenciálható sokaságok elméletének eszközeivel dolgozó twistor-elméletig (Penrose) számtalan hivatkozás lehetséges.

Itt a hangsúly az elmélet legegyszerűbb, de hatékony eszközöket nyújtó tárgyalásán van. Először tisztázzuk az analitikus függvények és az elemi függvények alapvető tulajdonságait. A görbe menti integrálnál tanult tételekből kapjuk a Cauchy-féle integráltételt, abból pedig a komplex függvénytan holomorf és meromorf függvényekkel kapcsolatos alapvető eredményeit. Mellőztem a Riemann-felületek fogalmát, de a Riemann-féle számgömb és a törtlineáris leképezések szerepelnek.

13
Analitikus függvények

Az exponenciális függvény a legfontosabb függvény a matematikában.

Walter Rudin [141]

13.1. Definíció. Emlékeztettünk a *komplex szám*ok definíciójára: a komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, a valós számpárok halmaza, az $(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v)$ összeadással és az $(x,y)\cdot(u,v) = (xu-yv, xv+yu)$ szorzással mint műveletekkel, valamint az $\big|(x,y)\big| = \sqrt{x^2+y^2}$ *abszolút érték*kel. Az abszolút érték megegyezik $\mathbb{R}^2$ normájával, és egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{C}$ (kommutatív) test a fenti műveletekkel; a nullelem a $(0,0)$ pár, az egységelem az $(1,0)$ pár, és az nullelemtől különböző (x,y) pár multiplikatív inverze az $(x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2))$ pár. Vegyük észre, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$, $(x,0)\cdot(y,0) = (xy,0)$ és $\big|(x,0)\big| = |x|$, így az összes $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ alakú komplex számok $\mathbb{R}$-el izomorf résztestét alkotják a komplex számok testének, amin a komplex abszolút érték a valós abszolút értéket adja vissza. Ennek elemeit a valós számokkal azonosítjuk.

Jelölje i a $(0,1)$ komplex számot. Vegyük észre, hogy $i^2 = -1$, az i segítségével az (x,y) komplex számot $x+iy$ alakban írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ha $z = x+iy \in \mathbb{C}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, akkor x-et a z *valós rész*ének, az y-t pedig a z *képzetes rész*ének nevezzük. Jelölésük: $\Re(z)$ illetve $\Im(z)$. A z *konjugált*ja a $\overline{z} = x - iy$ komplex szám.

A definíciók alapján azonnal következnek a $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $z+\overline{z} = 2\Re(z)$, $z-\overline{z} = 2i\Im(z)$, $z\overline{z} = |z|^2$, $|z| > 0$, ha $z \neq 0$ és $|0| = 0$, $|\overline{z}| = |z|$, $|zw| = |z||w|$, $\big|\Re(z)\big| \leq |z|$, $\big|\Im(z)\big| \leq |z|$, $|z| \leq \big|\Re(z)\big| + \big|\Im(z)\big|$ és $|z+w| \leq |z| + |w|$, ha $z, w \in \mathbb{C}$ összefüggések.

Az $\mathbb{U}_1(0) \subset \mathbb{C}$ nyílt körlapra a $\mathbb{D}$ jelölést is fogjuk használni.

13.2. Definíció. *Komplex függvény* alatt a komplex számok testének valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvényt fogunk érteni. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy halmaz, és f egy komplex függvény D-n. Ha f a D minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f *holomorf* D-n. Ha egy függvény az egész síkon holomorf, akkor *egész függvény*nek nevezzük.

13.3. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{K}$ és $c_n \in \mathbb{K}$, ha $n \in \mathbb{N}$. A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ függvénysort *hatványsor*nak nevezzük. Megjegyezzük, hogy $0^0 = 1$. Az f függvényt *analitikus*nak nevezzük az a pontban, ha előáll

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

alakban, azaz hatványsor összegfüggvényeként az a pont valamely környezetében. Az f függvényt *analitikus*nak nevezzük a $D \subset \mathbb{K}$ halmazon, ha annak minden pontjában analitikus. Vegyük észre, hogy a hatványsorok a polinomok általánosításai „végtelen fokszámra”.

A komplex függvénytan egyik legfontosabb és legmeglepőbb tétele szerint minden holomorf függvény analitikus. Bár ennek az eredménynek a bizonyításához csak később jutunk el, ismerete segít jobban megérteni a tételeket és kiválasztani a legrövidebb bizonyításokat.

→ **13.4. Feladat [5].** Legyenek f és g a $\mathbb{C}$ részhalmazain értelmezett, komplex értékű függvények, és $z \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy ha f és g differenciálhatóak z-ben, akkor fg is, és $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, valamint ha $g(z) \neq 0$, akkor f/g is differenciálható z-ben, és $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - g'(z)f(z))/g^2(z)$.

→ **13.5. Feladat [5].** Legyenek f és g a $\mathbb{C}$ részhalmazain értelmezett, komplex értékű függvények, és $z \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy ha f és g is n-szer differenciálható z-ben, akkor fg is, és

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z).$$

∗ **13.6. Vektor értékű függvények.** A komplex függvénytan legtöbb tétele érvényben marad komplex Banach-térbeli értékű függvényekre is. Az összes definíciót, tételt és bizonyítást úgy fogalmaztuk, hogy változatlanul érvényes, ha komplex függvény alatt a komplex sík valamely részhalmazát egy komplex Banach-térbe leképező függvényt értünk, és a hatványsor definíciójában azt tesszük fel, hogy a c_n együtthatók egy komplex Banach-tér elemei. A normát $|\ |$ jelöli.

13.7. Tétel. *$\Re z = x$, $\Im z = y$, $\Re c = a$, $\Im c = b$ jelölésekkel, a $z \mapsto f(z)$ komplex függvény pontosan akkor differenciálható a c pontban, ha mint kétváltozós valós függvény differenciálható az (a, b) pontban, és $f_x(a, b) + if_y(a, b) = 0$. Ekkor $f'(c) = f_x(a, b)$.*

A feltételt gyakran formálisan a $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ alakban írják, mert $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$ felhasználásával formálisan

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Az f mint komplex függvény akkor differenciálható, ha egy lineáris rész és egy maradéktag összegeként írható, úgy, hogy a maradéktag $|z|$-kel osztva is nullához tart, ha $z \to 0$. Ekkor f, mint kétváltozós valós függvény is differenciálható, mert komplex lineáris függvény valós lineáris is.

Megfordítva, ha f differenciálható, mint kétváltozós valós függvény, akkor felírható egy maradéktag, amely még $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$-kel osztva is nullához tart, és egy lineáris rész összegeként. A lineáris rész

$$(x, y) \mapsto f_x x + f_y y = (f_x - if_y)\frac{z}{2} + (f_x + if_y)\frac{\overline{z}}{2}.$$

Ennek az összegnek az első tagja komplex lineáris, de a második nem, ha $f_x + if_y \neq 0$; valóban, legyen $z = 1$ és $z = i$. Így f pontosan akkor differenciálható, mint komplex függvény, ha $f_x + if_y = 0$, és ekkor $-if_y = f_x$ miatt deriváltja $z \mapsto f_x z$.

13.8. Megjegyzés: Cauchy–Riemann-egyenletek. Ha u és v kétváltozós valós értékű valós függvények úgy, hogy

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

akkor az előző tétel úgy fogalmazható, hogy az f komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható a c pontban, ha u és v differenciálhatóak (a,b)-ben, és fennállnak az $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ Cauchy–Riemann-egyenletek, továbbá ekkor $f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b)$. Egy differenciálható kétdimenziós vektormező tehát pontosan akkor felel meg komplex differenciálható függvénynek, ha a derivált mátrixa az $f'(c)$ komplex számmal való szorzás mátrixa, azaz ha

$$\begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re f'(c) & -\Im f'(c) \\ \Im f'(c) & \Re f'(c) \end{pmatrix}.$$

13.9. Cauchy–Hadamard-tétel. *A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (valós vagy komplex) hatványsorra legyen*

$$R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \textit{(itt } 1/0 = \infty \textit{ és } 1/\infty = 0\textit{).}$$

Ekkor a hatványsor

(1) $|z-a| < R$ *esetén abszolút konvergens;*

(2) $|z-a| > R$ *esetén divergens;*

(3) *ha $R' < R$, akkor a $\{z\colon |z-a| \le R'\}$ halmazon egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. A gyökkritériumból, illetve a Weierstrass-féle majoráns kritériumból következik.

13.10. Definíció. Az előző tétel jelöléseivel R-et *konvergenciasugár*nak, a

$$\{z\colon z \in \mathbb{K}, |z-a| < R\}$$

(valós vagy komplex) számhalmazt a hatványsor *konvergenciatartomány*ának nevezzük.

13.11. Következmény. *Hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciatartományban.*

Bizonyítás. A konvergenciatartomány bármely z pontjához egy olyan R' számot választva, amelyre $|z-a| < R' < R$, alkalmazható (3), és kapjuk, hogy az összegfüggvény folytonos z-ben.

13.12. Taylor-tétel. *Az előző tétel jelöléseivel, legyen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Az f akárhányszor differenciálható a konvergenciatartományban és

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-a)^{n-1}.$$

A két sor konvergenciasurara megegyezik. Továbbá, ha a konvergenciatartomány nem üres, akkor

$$c_n = f^{(n)}(a)/n! \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

A tétel úgy is fogalmazható, hogy hatványsor tagonként differenciálható, és összegfüggvénye meghatározza az együtthatóit.

Bizonyítás. Legyen $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-a)^{n-1}$. Nyilván $g(z)(z-a)$ sorának, és így $g(z)$ sorának is ugyanaz a konvergenciasugara, mint az eredeti hatványsornak. A részletösszegek sorozatára alkalmazva a függvénysorozat differenciálására vonatkozó tételt, kapjuk, hogy $f'(z) = g(z)$. Az, hogy $c_0 = f(a)$, triviális, és teljes indukcióval kapjuk, hogy $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.

13.13. Következmény. *Hatványsor összegfüggvényének a konvergenciatartományon létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Tetszőleges c_{-1}-re

$$c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

egy primitív függvény.

13.14. Megjegyzés. Az előző tétel mutatja, hogy ha az f függvény hatványsor összegfüggvénye, akkor a függvény deriváltjai megadják a hatványsor együtthatóit. Ha egy függvény akárhányszor differenciálható az a pontban, akkor mindig felírhatjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

hatványsort, a *Taylor-sor*t (ha $a = 0$, akkor a sor *MacLaurin-sor*nak szokás nevezni). Az előző tétel szerint hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora. Azonban tetszőleges valós változós, akárhányszor differenciálható függvény esetén nem biztos, hogy a Taylor-sor konvergál a függvényhez. Például a L'Hospital-szabály alkalmazásával és $y = 1/x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

összefüggéssel definiált függvény akárhányszor differenciálható és MacLaurin-sorának együtthatói nullák, így nem konvergál a függvényhez. Komplex változós függvényeknél egészen más a helyzet, mint látni fogjuk: ha a függvény egyszer differenciálható, akkor analitikus is.

$*$ **13.15. Megjegyzés.** Az előző tételből következik, hogy analitikus függvény akárhányszor differenciálható. Azt sem nehéz igazolni, hogy, az előző tétel jelöléseivel, ha $|a-b| < R$, azaz ha b a konvergenciatartományban van, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-b)^n, \quad \text{ha} \quad |z-b| < r,$$

ahol $r = R - |b-a|$ és $d_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} c_k(b-a)^k$: a

$$(z-a)^k = \big((z-b) + (b-a)\big)^k$$

hatványt kifejtjük a binomiális tétel alapján, majd alkalmazzuk a kettős sor tételt. (Egyébként ebből a tételből is levezethető a hatványsor összegfüggvényének folytonossága és differenciálhatósága a konvergenciatartományban.) Speciálisan, hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartományban analitikus. További analitikus függvényekre vonatkozó állítások is bizonyíthatók, például, hogy analitikus függvények szorzata analitikus (hatványsorok Cauchy-szorzásával), hogy analitikus függvények hányadosa is analitikus (ha a nevező nem nulla), analitikus függvények öszetétele is analitikus, stb. Mindezekre az állításokra azonban nem lesz szükség, mert a komplex analitikus függvényekről kiderül, hogy megegyeznek a holomorf függvényekkel, a valós analitikus függvényeket pedig hatványsorukkal kiterjeszthetjük a komplex sík egy nyílt részhalmazára, és az analitikus folytatás elve szerint (lásd alább) ez a kiterjesztés lényegében egyértelmű.

13.16. Zérushelyek izoláltságának elve. *Az előző tételek jelöléseivel, ha a konvergenciatartomány nem üres, pontjaiban*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

és nem minden c_n nulla, akkor van olyan $0 < r < R$, hogy $0 < |z-a| < r$ esetén $f(z) \neq 0$.

Bizonyítás. Legyen k az a legkisebb természetes szám, amelyre $c_k \neq 0$. Ekkor $f(z) = (z-a)^k g(z)$, ahol

$$g(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + c_{k+2}(z-a)^2 + \cdots;$$

a g sora pontosan azokban az $z \neq a$ pontokban konvergens, ahol az f sora. Mivel $g(a) = c_k \neq 0$, és g folytonos, van olyan $r > 0$, hogy $g(z) \neq 0$, ha $|z-a| < r$.

13.17. Az analitikus folytatás elve. *Legyen $D \subset \mathbb{K}$ egy tartomány, f, g analitikus függvények D-n, amelyek D egy végtelen kompakt részhalmazán megegyeznek. Ekkor $f(z) = g(z)$ minden $z \in D$-re.*

Bizonyítás. Ha $z, z_n \in D$, $z_n \neq z$, $z_n \to z$ és $f(z_n) = g(z_n)$, akkor z nem izolált zérushelye $f - g$-nek, így f és g megegyeznek z egy környezetén. Az $\{f = g\}$ halmaz belseje tehát nem üres, és minden D-beli érintkezési pontját tartalmazza, azaz nyílt és zárt D-ben, így az egész D.

13.18. Az exponenciális függvény, trigonometrikus és hiperbolikus függvények. A hatványozás, azaz az $x \mapsto a^x$ függvény legjellemzőbb tulajdonsága az $a^{x+y} = a^x a^y$ összefüggés teljesülése. Ha $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hatványsor alakban keresünk olyan $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely megoldása az $f(2z) = f^2(z)$ függvényegyenletnek, akkor a

$$c_0 = c_0^2, \quad 2c_1 = 2c_0 c_1, \quad 4c_2 = 2c_0 c_2 + c_1^2,$$
$$8c_3 = 2c_0 c_3 + 2c_1 c_2, \ \ldots, \ 2^k c_k = \sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j}, \ \ldots$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenlet egyik megoldása $c_0 = 0$, ez az érdektelen $f \equiv 0$ megoldáshoz vezet. A másik megoldás $c_0 = 1$, ekkor c_1 szabadon választható.

Legtermészetesebb választásnak $c_1 = 1$ tűnik, ekkor teljes indukcióval $c_k = 1/k!$ adódik, és az *exponenciális függvény*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definíciójához jutunk. Ennek a hatványsornak a konvergencia sugara ∞, így exp az egész komplex síkon értelmezve van, és hatványsorok Cauchy-szorzásával könnyen adódik, hogy (ahogy várjuk) eleget tesz az

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2), \quad \text{ha} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

függvényegyenletnek. Nyilván $\exp(0) = 1$ és $\exp(-z) = 1/\exp(z)$, így az exponenciális függvény sohasem nulla. Mivel folytonos, a valós tengelyen mindenütt pozitív. Mivel $\exp(x) \geq 1 + x$, ha $x \geq 0$, a függvényegyenletből következik, hogy $x \mapsto \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő, $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, így $x \mapsto \exp(x)$ kölcsönösen egyértelműen képezi le $\mathbb{R}$-et $]0, \infty[$-re. Inverzét *természetes logaritmus*nak nevezzük, és ln-nel jelöljük. A „természetes" jelző a differenciálással és integrálással való egyszerű kapcsolatra utal: az exponenciális függvényre

$$\frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z)\frac{\exp(h) - 1}{h} \to \exp(z), \quad \text{ha} \quad h \to 0,$$

így az exponenciális függvény deriváltja önmaga, az inverz függvény differenciálására vonatkozó tételből pedig

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Ez utóbbi összefüggés miatt szerepel a természetes logaritmus oly gyakran az integrálásnál. Látjuk, hogy mindkét összefüggés az

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \to c_1 = 1$$

határértéken, így a $c_1 = 1$ választáson alapul, és mutatják annak célszerűségét. További indok az exponenciális függvény és a *trigonometrikus függvény*ek közötti kapcsolat:

Mivel exp sorának együtthatói valósak, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. Vizsgáljuk a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezést, azaz az exponenciális függvény viselkedését a képzetes tengelyen! Mivel $\overline{\exp(it)} = \exp(-it)$, így $\left|\exp(it)\right|^2 = \exp(it)\exp(-it) = 1$, azaz ennek a függvénynek az értékei az $\{z\colon |z| = 1\}$ egységkörön vannak. Mivel

$$\frac{\exp(i(t+h)) - \exp(it)}{h} = i\exp(it)\frac{\exp(ih) - 1}{ih} \to i\exp(it), \quad \text{ha} \quad h \to 0,$$

leképezésünk egy, az egységkörön való mozgásnak felel meg, ami $t = 0$-ban az 1 pontból felfelé indul, és sebességének abszolútértéke egységnyi. Szemléletünknek megfelelő tehát a $\cos(t)$ és $\sin(t)$ értékeket $\exp(it)$ valós illetve képzetes részeként definiálni. Mindkettő

kifejezhető $\exp(it)$ és $\exp(-it)$ segítségével, így természetes módon jutunk a *koszinusz* és *szinusz* függvény alábbi – tetszőleges komplex számra alkalmazható – definíciójához:

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C},$$
$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Természetesen a definícióból mindkettő valós, ha z valós, és az egész komplex síkon teljesülnek az alábbi hatványsor előállítások:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A két definícióból kapjuk a nagyon fontos

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}$$

*Euler-féle összefüggés*t. Ugyancsak a definícióból

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C},$$

valamint az exponenciális függvény addíciós képletét felhasználva következnek az *addíciós formulák*:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2), \quad \text{ha} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2), \quad \text{ha} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ezek speciális eseteként adódik, hogy

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1,$$
$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

A π szám szokásos geometriai jelentése a kör kerületének és átmérőjének hányadosa. Szemléletünknek megfelelő tehát, ha π-t, mint a legkisebb olyan pozitív számot definiáljuk, amelyre $\exp(2\pi i) = 1$. Természetesen meg kell mutatnunk, hogy ilyen pozitív szám létezik. Először megmutatjuk, hogy a koszinusz függvénynek van pozitív zérushelye. A szinusz függvény hatványsorából

$$\frac{\sin(z)}{z} \to 1, \quad \text{ha} \quad z \to 0,$$

ebből elég kis pozitív t-kre $\sin(t) > 0$, tehát $\cos(t) < 1$. Ha $t > 0$ esetén $\cos(t)$ mindenütt pozitív lenne, akkor teljes indukcióval $0 < \cos(2^n t) \leq \cos^{2^n}(t) \to 0$ következne, így valamely t_0-ra $0 < \cos(t_0) < 1/2$, de ekkor $\cos(2t_0) = 2\cos^2(t_0) - 1 < 0$, ami ellentmondás.

Jelölje τ a koszinusz legkisebb pozitív zérushelyét. A $\sin(2z)$-re vonatkozó összefüggésből $\sin(2\tau) = 0$ és 2τ a legkisebb pozitív szám, amelynek szinusza nulla: ha a legkisebb ilyen szám $0 < 2t < 2\tau$ lenne, akkor $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ miatt $\cos(t) = 0$ következne, ami ellentmondás.

Így $\sin(\tau) = 1$, és $\exp(\tau i) = i$, $\exp(2\tau i) = -1$, $\exp(4\tau i) = 1$. Mivel $\cos(t+\tau) = -\sin(t)$, kapjuk, hogy $\tau \le t \le 2\tau$ esetén $\cos(t) \le 0$, és mivel $\cos(t+2\tau) = -\cos(t)$, kapjuk, hogy $\cos(t) < 1$, ha $0 < t < 4\tau$, azaz $\pi = 2\tau$.

Megmutatjuk, hogy $t \mapsto \exp(it)$ a $[0, 2\pi[$ intervallumot kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\{z\colon |z| = 1\}$ egységkörre. Ha $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$, akkor $\exp(it_2)/\exp(it_1) = \exp(i(t_2 - t_1)) \neq 1$. Ebből következik, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a leképezés az egységkörre történik, rögzítsünk olyan z számot, amelyre $|z| = 1$. Legyen $z = x + iy$, ahol x és y valós. Mivel cos folytonos, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, van olyan $t \in [0, \pi]$, hogy $\cos t = x$. Ekkor $\sin t = \pm y$; ha $\sin t = y$, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor $\cos(2\pi - t) = \cos t = x$ és $\sin(2\pi - t) = -\sin t = y$.

Az exponenciális függvény addíciós képletéből $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$ periódusa exp-nek. Megfordítva, legyen c periódusa exp-nek. Ekkor $\exp(z + c) = \exp(z)$, így $\exp(c) = 1$. Mivel $\big|\exp(x + iy)\big| = \exp(x)$, c tiszta képzetes. Az $i\omega = c$ jelöléssel, ha $2k\pi < \omega < 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $0 < t = \omega - 2k\pi < 2\pi$ olyan szám, amelyre $\exp(it) = 1$, ami lehetetlen. Így exp összes periódusa $2k\pi i$ alakú.

A sin és cos függvény segítségével definiáljuk a többi *trigonometrikus függvény*t:

$$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}, \quad \operatorname{ctg} = \frac{\cos}{\sin}, \quad \sec = \frac{1}{\cos}, \quad \operatorname{csc} = \frac{1}{\sin}.$$

A trigonometrikus függvényekhez hasonlóan hasznosak a *hiperbolikus függvény*ek:

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A többi *hiperbolikus függvény*t ezek segítségével definiáljuk:

$$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}, \quad \operatorname{cth} = \frac{\cosh}{\sinh}, \quad \operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}, \quad \operatorname{csch} = \frac{1}{\sinh}.$$

Ezek tulajdonságai hasonlóan bizonyíthatók, mint a trigonometrikus függvények tulajdonságai.

A következő tétel összefoglalja a most belátott összefüggések közül a legfontosabbakat.

13.19. Tétel. *A $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$ halmaz adja* exp *összes periódusát; $t \mapsto \exp(it)$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $[0, 2\pi[$-nek $\{z\colon |z| = 1\}$-re, továbbá ha $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor*

(1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$;

(2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$;

(3) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$;

(4) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$;

(5) $\cos(z) = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$;

(6) $\sin(z) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$;

(7) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$;

(8) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$;

(9) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$;

(10) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$;

(11) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$;

(12) $\cosh(iz) = \cos(z)$, $\sinh(iz) = i\sin(z)$;

(13) $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$;

(14) $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$;

(15) $\cosh(z) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$;

(16) $\sinh(z) = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$;

(17) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$;

(18) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$;

(19) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$;

(20) $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh(z)$, $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$.

→ **13.20. Feladat [7].** Ábrázoljuk a komplex exponenciális függvényt.

13.21. Definíció. Legyen $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$, ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, és legyen $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, legyen $\arg(z)$ az a t valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\exp(it) = \operatorname{sgn}(z)$. Vegyük észre, hogy $z = |z|\exp(it) = |z|(\cos t + i\sin t)$ (ha $z = 0$, tetszőleges t választható), ez a *komplex szám trigonometrikus alakja.* A trigonometrikus alakból leolvasható a komplex számok szorzásának geometriai jelentése: az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak, mod 2π.

Mivel egy differenciálható komplex változós, komplex értékű függvény, ha nem nulla a deriváltja, akkor lokálisan egy komplex számmal való szorzással közelíthető, így lokálisan körüljárási irány- és szögtartó (*konform*).

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, azaz az exp függvény $\{z : -\pi < \Im z \leq \pi\}$-re való megszorításának inverze. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$ és $w \in \mathbb{C}$, akkor legyen $z^w = \exp(w\log(z))$.Megjegyezzük, hogy a definíció összhangban van z^k testekben szokásos definíciójával, mely szerint tetszőleges z-re $0 < k \in \mathbb{N}$ esetén z^k-t teljes indukcióval, ismételt szorzással definiáljuk, $z^0 = 1$, és $z \neq 0$ esetén $z^{-k} = 1/z^k$.

13.22. Nyílt leképezések tétele. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ha f nem konstans, akkor f nyílt leképezés, és $f(D)$ tartomány. Pontosan akkor létezik olyan környezete c-nek, amelyet f az $f(c)$ egy környezetére kölcsönösen egyértelműen képez le, ha $f'(c) \neq 0$.*

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Mivel az analitikus folytatás elve szerint f nem lehet lokálisan konstans, az origó egy környezetében felírható

$$z \mapsto z^m(c_m + c_{m+1}z + c_{m+2}z^2 + \ldots) = c_m z^m h(z)$$

alakban, ahol h egy hatványsor összege, $h(0) = 1$. Ha $C = c_m^{1/m}$, akkor az origó egy környezetében $f(z) = \left(Cz(h(z))^{1/m}\right)^m$, és $z \mapsto Cz(h(z))^{1/m}$ deriváltja az origóban $C \neq 0$. Az inverz függvény tétel szerint ez a leképezés – így f is – az origó bármely környezetét az origó egy környezetére képezi le. f pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű a 0 egy környezetében, ha $m = 1$.

13.23. Következmény: Maximumelv. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f\colon D \to \mathbb{C}$ analitikus D-n. Ha $|f|$-nek lokális maximuma van D-ben, akkor f konstans.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben f a c lokális maximumhely egy környezetét $f(c)$ egy környezetére képezné le, ami ellentmondás.

→ **13.24. Feladat [2].** Ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < k \in \mathbb{N}$, határozzuk meg mindazokat a w komplex számokat, amelyekre $w^k = z$. Mi ezek kapcsolata $z^{1/k}$-val?

→ **13.25. Feladat [6].** Határozzuk meg az e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\log z$ függvények deriváltját.

→ **13.26. Feladat [1].** A $\sin z/z$, $(1 - \cos z)/z^2$, $(e^z - 1)/z$, $\log(1 + z)/z$ függvényeket hatványsor segítségével értelmezzük ott is, ahol a nevező eltűnik.

→ **13.27. Feladat [5].** Differenciálhatóak-e a $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|$ függvények?

→ **13.28. Feladat [5].** Van-e z^k-nak primitív függvénye ($k \in \mathbb{Z}$)?

→ **13.29. Feladat [1].** Igaz-e, hogy $\log(zw) = \log z + \log w$, ha $0 \neq z, w \in \mathbb{C}$?

13.30. Feladat [6]. Írjuk fel a $z \mapsto (1 + z)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ függvény Taylor-sorát az origó körül. (Newton binomiális sora.)

→ **13.31. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi leképezések értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét:

(1) $z \mapsto az$

(2) $z \mapsto b + z$

(3) $z \mapsto 1/z$

(4) $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ (*törtlineáris leképezés*).

Adjuk meg az (1), (2), (3) típusú leképezések geometriai jelentését. Bizonyítsuk be, hogy a törtlineáris leképezések (1), (2) és (3) típusú leképezések összetevésével állíthatók elő.

13.32. Feladat [6]. A z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok *kettős viszony*a a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

szám. Bizonyítsuk be, hogy törtlineáris leképezés megőrzi a kettős viszonyt.

13.33. Feladat [7]. Az előző feladat felhasználásával, bizonyítsuk be, hogy ha z_1, z_2, z_3, valamint w_1, w_2, w_3 különböző komplex számok, akkor pontosan egy olyan törtlineáris $z \mapsto w$ leképezés van, amelynél z_1, z_2, z_3 képe rendre w_1, w_2, w_3.

13.34. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 komplex számok kettős viszonya akkor és csak akkor valós, ha egy körön, vagy egy egyenesen vannak, így törtlineáris leképezés „*körtartó*”.

13.35. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy körre vagy egyenesre szimmetrikus pontpár képe törtlineáris leképezésnél szimmetrikus a kör vagy egyenes képére.

13.36. Riemann-felületek. Törtlineáris leképezések vizsgálatánál érdemes a komplex síkot egy ∞ ponttal kiegészíteni, amelynek a környezetei a korlátos halmazok komplementerei, és úgy tekinteni, hogy a $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ leképezésnél $-d/c$ képe ∞, és a ∞ képe a/c. Az így kiegészített komplex síkot *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. Az f függvényt vizsgálatát a ∞ pontban a $z \mapsto f(1/z)$ függvény origóban való vizsgálatára vezethetjük vissza. A Riemann-féle számgömb sok más esetben is hasznos, és más, „többrétű” leképezések vizsgálatánál a komplex sík más általánosításai, úgynevezett Riemann-felületek is fontos szerepet játszanak. Ezen kérdések elegáns tárgyalása a komplex differenciálható sokaságok segítségével oldható meg. Például a komplex számgömbön a $z \mapsto z$ és $z \mapsto 1/z$ térképekből álló atlaszt vezetjük be. Itt nem foglalkozunk részletesen ezekkel a kérdésekkel.

13.37. Feladat [6]. Határozzuk meg egy törtlineáris leképezés fixpontjait.

13.38. Feladat [8]. Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek a felső félsíkot az egységkörlapra képezik le. Határozzuk meg az összes ilyen törtlineáris leképezést.

13.39. Feladat [8]. Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek az egységkörlapot önmagára képezik le. Határozzuk meg az összes ilyen törtlineáris leképezést.

→ **13.40. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket. Inverzeik rendre arcsin, arccos, arctan, arsh, arch, arth:

(1) $\sin z$, $\left|\Re(z)\right| < \pi/2$;

(2) $\cos z$, $0 < \Re(z) < \pi$;

(3) $\operatorname{tg} z$, $\left|\Re(z)\right| < \pi/2$;

(4) $\sinh z$, $\left|\Im(z)\right| < \pi/2$;

(5) $\cosh z$, $0 < \Im(z) < \pi$;

(6) $\tanh z$, $\left|\Im(z)\right| < \pi/2$.

13.41. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg a $\operatorname{cosec} = 1/\sin$ függvényt a

$$\left|\Re(z)\right| < \pi/2, \qquad z \neq 0$$

halmazon.

13.42. Feladat [10]. Vizsgáljuk a $z \mapsto z/(1-z)^2$ *Koebe-függvény*t az egységkörön.

∗ **13.43. Feladat: Bernstein tétele [10].** Tegyük fel, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható és minden deriváltja nemnegatív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \text{ha} \quad a \le x < b.$$

Megoldás. Lásd Petruska [127], 19.5.

∗ **13.44. Feladat: Newton binomiális sora [8].** Bizonyítsuk be, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Megoldás. Az $\alpha \in \mathbb{N}$ eset triviális. Egyébként x helyére $-x$-et írva, néhány differenciálás után a kitevő negatív lesz, és alkalmazható Bernstein tétele.

∗ **13.45. Alkalmazási példa: generátorfüggvények.** Sokszor célszerű egy számsorozatot egy analitikus függvénybe, úgynevezett *generátorfüggvény*be összefogni. A módszer egy példán mutatjuk be.

A *Fibonacci-szám*ok az $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval és az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ kezdőfeltételekkel adottak. Megpróbálunk zárt formulát keresni rájuk. Tekintsük az

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_k z^k$$

függvényt. Erre

$$zF(z) = F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + \dots,$$
$$z^2 F(z) = F_0 z^2 + F_1 z^3 + \dots,$$

amiből kivonással $(1 - z - z^2)F(z) = z$. Ebből parciális törtekre bontással

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1-\phi_1 z} - \frac{1}{1-\phi_2 z}\Big),$$

ahol $\phi_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $\phi_2 = 1 - \phi_1 = (1-\sqrt{5})/2$. Innen

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n) z^n,$$

azaz $F_n = (\phi_1^n - \phi_2^n)/\sqrt{5}$. A levezetés nem precíz, mert a hatványsorok konvergenciáját nem vizsgáltuk, de pontossá tehető. Erre egyébként nincs feltétlenül szükség, mert az eredményt, ha már ismerjük, könnyű teljes indukcióval bizonyítani. Ezt a módszert mindig alkalmazhatjuk, ha egy lineáris rekurzióval adott sorozatunk van, vagy akár kölcsönösen függő rekurzív sorozatok esetén is, ha a rekurziós egyenletek lineárisak.

∗ **13.46. Generátorfüggvények.** A $g_0, g_1, g_2, \ldots$ komplex számsorozat *generátorfüggvényén* a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük, ha a hatványsor konvergens a nulla egy környezetében. Ha az $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sorozat generátorfüggvénye F, akkor a hatványsorok ismert tulajdonságaiból adódnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\alpha F(z) + \beta G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n; \\
z^m G(z) &= \sum_{n \geq m} g_{n-m} z^n; \\
\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} &= \sum_{n=0} g_{n+m} z^n; \\
G(cz) &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n g_n z^n; \\
G'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} z^n; \\
F(z)G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \Big) z^n.
\end{aligned}$$

A fenti összefüggések kombinálásával könnyen kaphatunk újabb összefüggéseket, például

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^n,$$

vagy hogy ha F a G azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$, akkor

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{n-1}}{n} z^n.$$

A fenti összefüggések generátorfüggvények lineáris kombinálására, szorzására, differenciálására és integrálására, új változó bevezetésére és a sorozat eltolására vonatkoznak. Ha ismert hatványsorokat is felhasználunk (Newton binomiális sora, az exponenciális függvény sora, $1/(1-z)$ sora, stb.) újabb összefüggéseket kaphatunk, például

$$\frac{G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{0 \leq k \leq n} g_k \Big) z^n.$$

Néha más módon rendelünk egy sorozathoz egy függvényt. Például ha a generátorfüggvényt definiáló hatványsor nem konvergál a nulla egy környezetében, akkor használhatjuk a $g_n/n!$ sorozat generátorfüggvényét, ez a g_n sorozat *exponenciális generátorfüggvénye*. Egyébként a konvergenciaproblémák a formális hatványsorok elméletével is kikerülhetők. A számelméletben gyakran használják a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^z}$$

Dirichlet-féle generátorfüggvényt; az $1, 1, 1, \ldots$ sorozathoz tartozó Dirichlet-féle generátorfüggvény a nevezetes ζ függvény.

∗ **13.47. Generátorfüggvények és valószínűségszámítás.** A valószínűségszámításban gyakran használunk generátorfüggvényeket. Ha egy ξ valószínűségi változó csak az $n \geq 0$ egész értékeket veheti fel, és n-et g_n valószínűséggel veszi fel, akkor várható értéke, az $\mathbb{E}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n$ szám kifejezhető a generátorfüggvény segítségével: $\mathbb{E}(\xi) = G'(1)$. Hasonlóan, a valószínűségi változó

$$\big(\mathbb{D}(\xi)\big)^2 = \mathbb{E}(\xi^2) - \big(\mathbb{E}(\xi)\big)^2$$

szórásnégyzete is kifejezhető a generátorfüggvénnyel: $\big(\mathbb{D}(\xi)\big)^2 = G''(1) - G'(1) - G'(1)^2$. Megmutatható, hogy független valószínűségi változók összegének generátorfüggvénye a generátorfüggvények szorzata.

∗ **13.48. Példa: hash-transzformáció.** Gyakran használt technika a programozásban egy kulcs-cím leképezés, úgynevezett alkalmazása keresések gyorsítására. Tegyük fel, hogy adott egy ilyen h leképezésünk, amely minden kulcshoz egy 1 és m közötti címet rendel. Azokat a rekordokat, amelyeknek kulcsához h ugyanazt az értéket rendelte, egy-egy lineáris listában tartjuk. Az algoritmus átlagos viselkedését kívánjuk vizsgálni. Azzal a feltevéssel élünk, hogy az egymás után érkező kulcsokhoz tartozó h értékek egymástól függetlenül egyforma eséllyel vesznek fel minden lehetséges címet. Tegyük fel, hogy már n rekordot tároltunk, és a beérkező új kulcsot keressük a tárban. Jelölje ξ az új kulcshoz kiszámított címhez tartozó lista hosszát. Ennek a mennyiségnek az ismeretében meghatározható a szükséges munka, legalábbis abban az esetben, ha az új rekord még nem szerepel az adatbázisban. Ha ξ_j az a valószínűségi változó, amely 1, ha az új kulcs megegyezik a régi kulcsok közül a j-edikkel, egyébként nulla, akkor az ξ_j valószínűségi változók függetlenek, és $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$. Minden ξ_j generátorfüggvénye $(m-1+z)/m$, így ξ generátorfüggvénye

$$\Big(\frac{m-1+z}{m}\Big)^n.$$

Ebből számolással azt kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\xi) = n/m$ és $\mathbb{D}(\xi) = n(m-1)/m^2$. Annak az esetnek az analízise, amikor az új rekordot megtaláljuk az adatbázisban, bonyolultabb, de a generátorfüggvények segítségével elvégezhető. Lásd Graham–Knuth–Patashnik [56] Konkrét matematika című könyvét ezen probléma további vizsgálatát, illetve a generátorfüggvények részletesebb tanulmányozását illetően.

∗ **13.49. Feladat [9].** Néha a generátorfüggvényt használjuk fel egy számsorozat definiálására. Mutassuk meg, hogy például a b_n, $n = 0, 1, \ldots$ Bernoulli-számok sorozatát azzal is definiálhatnánk, hogy exponenciális generátorfüggvénye a $z \mapsto z/(e^z - 1)$ függvény.

∗ **13.50. Feladat [6].** Határozzuk meg az első tíz Bernoulli-számot.

Megoldás. Kiszámoljuk.

∗ **13.51. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy $z \mapsto z/2 + z/(e^z - 1)$ páros függvény, és így a b_{2k+1}, $k = 1, 2, \ldots$ Bernoulli-számok nullák.

Megoldás. Kiszámoljuk.

∗ **13.52. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy a ζ függvény sora egyenletesen konvergens minden $\Re(z) \geq \alpha$, $\alpha > 1$ félsíkon.

14
Holomorf függvények

Riemann megmutatta nekünk, hogy a bizonyításokhoz könnyebben eljuthatunk gondolatokkal, mint hosszú számításokkal.

David Hilbert (1897)

Nem árt emlékezni arra, hogy a matematika nem *csak problémák megoldásával foglalkozik, hanem az általa létrehozott objektumok és struktúrák tanulmányozásával. Az egyik legjobb példa a komplex változós függvények klasszikus elmélete. Mellékesen valóban megold problémákat is, mint Riemann leképezési tételében. De szépségének java olyan állításokban van, amelyeket aligha tekinthetünk úgy, mint bárminek a „megoldása", mint a reziduumszámítás, vagy Picard tétele, vagy a Cauchy-formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{C}$$

Az egyetlen „probléma", amit (C) megold, f meghatározása a γ pályán felvett értékeiből, ami álprobléma és általában nincs megoldása. A (C) formula nem csak rendkívül gyönyörű, hanem rendkívül hasznos is. Közvetlenül mutatja, hogy minden holomorf f függvény végtelen sokszor differenciálható és előállítható konvergens hatványsorával.

Fritz John (1984)

14.1. Cauchy-féle integráltétel. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz, f egy holomorf függvény D-n. Ha a γ_0 és γ_1 zárt pályák D-ben homotópok, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Bizonyítás. Következik a 11.31 és 11.32 tételekből.

14.2. Tétel. *Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ egy pálya, és f egy $\gamma(I)$-n folytonos komplex függvény. Ekkor a*

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

összefüggéssel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-n definiált függvény analitikus. Pontosabban, minden $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pontra a

$$c_n = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}\, dw$$

együtthatókkal képzett $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ hatványsor konvergens minden a középpontú $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-ben fekvő D nyílt körlapon, és összege g.

Bizonyítás. Ha r az a és $\gamma(I)$ távolsága, és $|z-a| \le qr$, ahol $0 < q < 1$, akkor minden $w \in \gamma(I)$-re

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)(1-(z-a)/(w-a))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

amiből

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Ha $\big|f(w)\big| \le M$ a $\gamma(I)$-n, akkor

$$\left|\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right| \le \frac{M}{r} q^n,$$

így a sor egyenletesen konvergens $\gamma(I)$-n. Tagonkénti integrálással

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

és a jobb oldali sor $|z-a| \le qr$ esetén konvergens.

14.3. Példa. Legyen $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, és $\gamma(t) = c + e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$. Ekkor

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = \int_0^1 \frac{2\pi i n e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}}\, dt = 2\pi i n.$$

14.4. Definíció. Ha egy körpályával $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben homotóp pályát, vagy egy ilyen pályával ekvivalens pályát veszünk, az is ugyanannyiszor kerüli meg a c pontot. Mivel a fenti integrál nem változik, az előző példa lehetőséget ad arra, hogy definiáljuk egy zárt pályának egy pontra vonatkozó *körüljárási szám*át, idegen szóval indexét. Legyen $c \in \mathbb{C}$ és γ egy zárt pálya $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben. A γ *pálya c pontra vonatkozó indexét* a

$$\operatorname{ind}(c,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c}$$

összefüggéssel definiáljuk. A következő tétel azt mutatja, hogy a fenti észrevételnek a megfordítása is igaz. A bizonyításhoz azonban szükségünk lesz egy lemmára.

14.5. Lemma. *Legyen X normált tér, $D \subset X$ nyílt halmaz és $\gamma\colon [a,b] \to D$ egy zárt görbe. Ekkor létezik olyan δ szakaszonként lineáris pálya, amely homotóp γ-val D-ben.*

Bizonyítás. $\gamma([a,b])$ kompakt, így van olyan $r > 0$, hogy a zárt r-környezete D-ben van. Mivel γ egyenletesen folytonos, van olyan $\eta > 0$, hogy $|t-t'| \le \eta$ esetén $\big|\gamma(t) - \gamma(t')\big| < r$. Legyen $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = b$ egy η-nál finomabb beosztása $[a,b]$-nek, és legyen

$$\delta(t) = \gamma(t_{j-1}) + \frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})), \quad \text{ha} \quad t_{j-1} \le t \le t_j,$$

továbbá $\varphi(t,\xi) = \xi\delta(t) + (1-\xi)\gamma(t)$. Ekkor $t_{j-1} \le t \le t_j$, $1 \le j \le n$, $0 \le \xi \le 1$ esetén $\varphi(t,\xi)$ a $\gamma(t_j)$ körüli r sugarú nyílt gömbben van.

14.6. Tétel. *Ha $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ egy zárt pálya és $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, akkor* $\operatorname{ind}(c,\gamma)$ *egész. Ha* $n = \operatorname{ind}(c,\gamma)$*, akkor γ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben a $t \mapsto c + e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$ körpályával homotóp pályával ekvivalens. Ha $D \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ egy tartomány, akkor $c \mapsto \operatorname{ind}(c,\gamma)$ konstans D-n. Ha $\gamma(I)$ benne van egy B egyszeresen összefüggő halmazban, akkor ez a konstans nulla $\mathbb{C} \setminus B$-n.*

Bizonyítás. Ekvivalens pályával helyettesítve γ-t, feltehetjük, hogy a $[0,1]$ intervallumon van értelmezve. Az előző lemma szerint azt is feltehetjük, hogy γ szakaszonként sima. Legyen

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - c}\, ds \quad \text{és} \quad h(t) = (\gamma(t) - c)e^{-g(t)},$$

ha $0 \le t \le 1$. Ekkor $g(1) = 2\pi i n$, a h szakaszonként sima, és véges sok pont kivételével

$$h'(t) = \gamma'(t)e^{-g(t)} + (\gamma(t) - c)e^{-g(t)}\frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - c} = 0,$$

így h konstans. Ebből, $h(0) = \gamma(0) - c$ miatt,

$$e^{g(t)} = \frac{\gamma(t) - c}{\gamma(0) - c}.$$

Mivel $\gamma(1) = \gamma(0)$, $\exp(g(1)) = 1$, amiből n egész. Vegyük észre, hogy $(t,\xi) \mapsto c + (\gamma(0) - c)e^{(1-\xi)g(t) + \xi t g(1)}$ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-beli homotópiája γ-nak a $t \mapsto c + e^{2\pi i n t}$ körpályába.

Mivel a $c \mapsto \operatorname{ind}(c,\gamma)$ leképezés analitikus, folytonos is. Mivel D összefüggő, $\operatorname{ind}(c,\gamma)$ pedig csak egész értéket vehet fel, csak konstans lehet. Végül, ha $\gamma(I)$ benne van valamely B egyszeresen összefüggő halmazban, és $c \in \mathbb{C} \setminus B$, akkor γ összehúzható $B \subset \mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben, így $\operatorname{ind}(c,\gamma) = 0$.

14.7. Feladat [7]. Adjunk meg olyan γ pályát, amelyre minden k természetes számhoz van olyan z pont, hogy $\operatorname{ind}(z,\gamma) = k$.

→ **14.8. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

integrált. (Integráljuk az $(e^{iz} - 1)/(2iz)$ függvényt a 0 középpontú, R sugarú körlap felső fele körül.)

→ **14.9. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x^2\, dx, \qquad \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin x^2\, dx$$

*Fresnel-féle integrál*okat. (Integráljuk az e^{-z^2} függvényt egy 0, R, $Re^{\pi i/4}$ csúcsú, R sugarú körcikk körül.)

∗ **14.10. Feladat [9].** Legyen γ egy pálya, g holomorf komplex értékű függvény γ értékkészletének egy környezetén, f pedig folytonos komplex függvény $g\circ\gamma$ értékkészletén. Bizonyítsuk be a helyettesítéses integrálásra vonatkozó alábbi formulát:

$$\int_\gamma f(g(z))g'(z)\,dz = \int_{g\circ\gamma} f(w)\,dw.$$

∗ **14.11. Feladat [10].** Adjunk példát $D \subset \mathbb{C}$ tartományra, amelynek a lezártja nem ívszerűen összefüggő.

14.12. Tétel. *Egy $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf f függvény analitikus D-n. Ha $a \in D$, akkor az f függvény a körüli hatványsora konvergens minden a középpontú D-beli nyílt körlapon.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $r > 0$ számot, amelyre az a középpontú r sugarú zárt körlap benne van D-ben. Legyen $|z-a| < r$ és

$$g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, \quad \text{ha} \quad w \neq z.$$

Legyen $\gamma_h(t) = ha + (1-h)z + hre^{it}$, ha $0 \le t \le 2\pi$ és $0 < h \le 1$. Megmutatjuk, hogy $\int_{\gamma_1} g(w)\,dw = 0$. Nyilván γ_h homotóp γ_1-gyel $D\setminus\{z\}$-ben, ha $0 < h \le 1$, így

$$\int_{\gamma_h} g(w)\,dw = \int_{\gamma_1} g(w)\,dw,$$

mivel g differenciálható $D\setminus\{z\}$-ben. Másrészt ha h elég kicsi, akkor

$$\left|\int_{\gamma_h} g(w)\,dw\right| \le \Big(|f'(z)|+1\Big)2\pi hr \to 0,$$

mert $g(w) \to f'(z)$, ha $w \to z$. Ebből

$$0 = \int_{\gamma_1} g(w)\,dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{w-z}\,dw,$$

azaz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \text{ha} \quad |z-a| < r,$$

amiből következik az állítás.

14.13. Morera tétele. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, f folytonos komplex függvény D-n. Ha minden γ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszöglappal együtt D-ben van, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, akkor f holomorf D-n.*

Bizonyítás. Az f-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így f is analitikus.

14.14. Weierstrass példája. *Legyen $0 < b < 1$ és a páratlan egész úgy, hogy $ab > 1 + 3\pi/2$ teljesüljön. A $\sum_{k=0}^{\infty} b^k z^{a^k}$ hatványsor egyenletesen abszolút konvergens a zárt egységkörlapon, analitikus a belsejében, de nincs olyan bővebb tartomány, amire analitikusan kiterjeszthető.*

Bizonyítás. Tekintsük a $t \mapsto e^{i\pi t}$ függvény és a hatványsor összetételével keletkező függvényt. Elég megmutatni, hogy ennek az $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos a^k \pi t$ valós része sehol sem differenciálható. Legyen $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cos a^k \pi t$. Rögzítsünk egy t-t. Bármeny n-re és $h > 0$-ra a differenciahányadosnak megfelelő összeget bontsuk két részre: a 0-tól $n-1$-ig terjedő rész legyen s_n, a többi r_n. A két koszinusz különbségét a középérték-tétellel becsülve, azt kapjuk, hogy $|s_n| < \pi a^n b^n/(ab-1)$. Legyen $a^n t = \alpha_n + \beta_n$, ahol α_n egész és $-1/2 \le \beta_n < 1/2$. Legyen $h_n = (1-\beta_n)/a^n$. Ha $k \ge n$, akkor $a^k \pi(t+h_n) = a^{k-n}\pi(1+\alpha_n)$, így mivel a páratlan, $\cos a^k \pi(t+h_n) = (-1)^{1+\alpha_n}$. Másrészt

$$\begin{aligned} -\cos a^k \pi t &= \cos a^{k-n}\pi(\alpha_n + \beta_n) = -\cos a^{k-n}\pi\alpha_n \cdot \cos a^{k-n}\pi\beta_n) \\ &= (-1)^{1+\alpha_n} \cos a^{k-n}\pi\beta_n. \end{aligned}$$

A $h = h_n$ helyettesítéssel r_n-re azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |r_n| &= \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} + (-1)^{1+\alpha_n} \cos a^{k-n}\pi\beta_n}{h_n} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1 + \cos a^{k-n}\pi\beta_n) \ge \frac{b^n}{h_n} \ge \frac{2a^n b^n}{3}, \end{aligned}$$

mivel $\cos \pi\beta_n \ge 0$. A két becslést kombinálva,

$$\left| \frac{f(t+h_n) - f(t)}{h_n} \right| \ge |r_n| - |s_n| > \frac{2a^n b^n}{3} - \frac{\pi a^n b^n}{ab-1} = a^n b^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right).$$

Mivel a zárójelben álló kifejezés pozitív konstans, a jobb oldali differenciahányadosoknak vagy a limesz szuperiorja, vagy a limesz inferiorja nem véges.

14.15. Cauchy-féle integrálformulák. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D-n. Ha $\gamma\colon I \to D$ egy zárt pálya, akkor minden $z \in D \setminus \gamma(I)$-re és $n \in \mathbb{N}$-re*

$$\operatorname{ind}(z,\gamma) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Bizonyítás. Először legyen $n = 0$. A tétel azon múlik, hogy az integrálás áthelyezhető egy, a z pont kis környezetében lévő, az eredetivel homotóp pályára, és erre az integrál $\approx f(z) \int dw/(w-z)$, de kényelmesebb ugyanúgy, mint az előző bizonyításban, egy segédfüggvénnyel dolgozni. Legyen

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \text{ha} \quad w \ne z \quad \text{és} \quad g(z) = f'(z).$$

A z-hez elég közeli w-re

$$f(w) = f(z) + (w-z)f'(z) + \frac{(w-z)^2}{2!} f''(z) + \cdots,$$

így

$$g(w) = f'(z) + \frac{w-z}{2} f''(z) + \cdots,$$

tehát g differenciálható D-n. A Cauchy-féle integráltételből

$$0 = \int_\gamma g(w)\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z},$$

amiből következik az $n = 0$ eset. Az általános eset abból következik, hogy a

$$z \mapsto \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

függvény analitikus $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-n, és egy analitikus függvény hatványsorának együtthatói kifejezhetők a deriváltakkal.

14.16. Cauchy-egyenlőtlenségek. *Tegyük fel, hogy f holomorf a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon, $w \in D$, és az w középpontú, $r > 0$ sugarú zárt B körlap D-ben van. Ekkor $\bigl|f^{(n)}(w)\bigr| \le Mn!/r^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ahol $M = \sup\Bigl\{\bigl|f(z)\bigr| : z \in \partial B\Bigr\}$.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma(t) = w + re^{it}$, ha $0 \le t \le 2\pi$. Ekkor az előző tétel szerint

$$\bigl|f^{(n)}(w)\bigr| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}.$$

14.17. Liouville tétele. *Legyen f egy egész függvény. Ha f korlátos, akkor konstans.*

Bizonyítás. Ha $|f| \le M$, $w \in \mathbb{C}$ és $r > 0$, akkor $\bigl|f'(w)\bigr| \le M/r \to 0$, ha $r \to \infty$. Így $f'(w) = 0$ mindenütt.

14.18. Az algebra alaptétele. *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben a p polinom reciproka, $1/p$ egész függvény. Mivel ha p n-ed fokú, akkor a $\lim_{|z|\to\infty}\bigl|p(z)\bigr|/|z|^n$ határérték véges, $\bigl|p(z)\bigr| \to \infty$, $1/\bigl|p(z)\bigr| \to 0$, ha $|z| \to \infty$. Így $1/p$ korlátos, tehát konstans. Mivel csak nulla lehet, ellentmondást kaptunk.

14.19. Polinom gyöktényezős alakja, Horner-elrendezés. Az n-ed fokú p polinomot elosztva $z - z_0$-lal, egy $n-1$-ed fokú hányadost, és egy konstans maradékot kapunk:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = (z - z_0)(b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1}) + b_n.$$

Vegyük észre, hogy $p(z_0) = b_n$, így az eljárás alkalmas a polinom helyettesítési értékének kiszámítására. Ha viszont $p(z_0) = 0$, akkor a polinomot elosztottuk egy gyöktényezőjével. Megismételve az eljárást, a polinomot

$$p(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

*gyöktényezős alak*ban írhatjuk fel. Ebből látszik, hogy egy n-ed fokú polinomnak legfeljebb n zérushelye lehet, és így két polinom csak akkor lehet azonos, mint függvény, ha együtthatóik megegyeznek. Az együtthatók átrendezésével és összehasonlításával azt kapjuk, hogy $b_0 = a_0$ és $b_j = a_j + z_0 b_{j-1}$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, aminek alapján a b_j számok könnyen kiszámíthatók. Ez a *Horner-elrendezés*. Megismételve az eljárást, azaz ha $c_0 = b_0$ és $c_j = b_j + z_0 c_{j-1}$, ha $j = 1, 2, \dots, n-1$, $p'(z_0) = c_{n-1}$ értékét kaphatjuk meg.

Polinomok gyöktényezős alakjának általánosítása egész függvények Weierstrass-féle előállítása végtelen szorzatként. Lásd részletesebben Szőkefalvi-Nagy [165] jegyzetét.

14.20. Feladat [9]. Határozzuk meg az alábbi függvények McLaurin-sorát:

(1) $z \mapsto \log(1-z)$;

(2) $z \mapsto \log(1+z)$;

(3) $z \mapsto \frac{1}{2}\log(1+z)/\log(1-z)$;

(4) arcsin;

(5) arctan;

(6) arsh;

(7) arth.

∗ **14.21. Feladat [18].** Tervezzünk hatékony programot az exp, sin, cos, sinh, cosh, tg, ctg komplex függvények és inverzeik tetszőleges pontosságú numerikus számolására.

∗ **14.22. Schwarz-lemma.** *Legyen $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf leképezés, amelyre $f(0) = 0$. Ekkor $|f(z)| \le |z|$, $\left|f'(0)\right| \le 1$, és ha valamely $z \neq 0$ pontban egyenlőség teljesül vagy $\left|f'(0)\right| = 1$, akkor $f(z) = cz$.*

Bizonyítás. Az f felírható $f(z) = zg(z)$ alakban, és g is analitikus. Ha $0 < r < 1$, akkor $|z| = r$ esetén $|g(z)| \le 1/r$. A maximumelv miatt $|z| \le r$ esetén is $\left|g(z)\right| \le 1/r$. Ebből $r \uparrow 1$ határátmenettel $|g| \le 1$ az egész körlapon, amiből kapjuk az egyenlőtlenséget. Ha valahol egyenlőség teljesül vagy $\left|f'(0)\right| = \left|g(0)\right| = 1$, akkor ott $|g|$-nek lokális maximuma van, így konstans.

14.23. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorf. Ha u, v valós értékűek, és $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, akkor u és v harmonikusak D-n.*

Bizonyítás. f végtelen sokszor differenciálható, így u és v is végtelen sokszor differenciálhatóak. A Cauchy–Riemann-egyenletekből

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}, \quad u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy},$$

amiből a vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt $\Delta u = \Delta v = 0$.

14.24. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Azt mondjuk, hogy v az u *harmonikus társa* D-n, ha $v\colon D \to \mathbb{R}$ és $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorf D-n. Vegyük észre, hogy $-if(x+iy) = v(x,y) - iu(x,y)$.

14.25. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Ekkor u-nak létezik D-n harmonikus társa.*

Bizonyítás. Legyen $g(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$. Ekkor g holomorf, mert fennállnak az $u_{xx} = -u_{yy}$, $u_{xy} = u_{yx}$ Cauchy–Riemann-egyenletek, tehát g-nek van primitív függvénye. Legyen G a g egy primitív függvénye, és $G(x+iy) = w(x,y) + iv(x,y)$. Ekkor v és w végtelen sokszor differenciálhatóak, és $w_x = u_x$, $w_y = u_y$, vagyis $w - u$ konstans. Így

$$f(x+iy) = G(x+iy) - (w(x,y) - u(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y)$$

holomorf.

14.26. Konform ekvivalencia. Legyenek $D, E \subset \mathbb{C}$ tartományok. Azt mondjuk, hogy f *konform leképezése* D-nek E-re, ha f homeomorfizmusa D-nek E-re, és f, f^{-1} holomorfak. Ha létezik konform leképezése D-nek E-re, akkor azt mondjuk, hogy D és E *konform ekvivalens*ek.

Tartományok konform ekvivalenciáját gyakran használjuk arra, hogy az egyik tartomány ismert harmonikus függvényeivel harmonikus függvényeket „gyártsunk" a másik tartományon. Ilyenkor fontos az is, hogy a konform leképezés folytatható-e a tartományok határára is? Erről durván azt mondhatjuk, hogy a konform leképezés „igyekszik annyira folytonos lenni a határon, amennyire csak lehet". Részletesebben lásd Petruska [126] jegyzetét.

A Liouville-tételből következik, hogy az egész komplex sík nem képezhető le konform módon egy korlátos tartományra. Riemann tétele mutatja, hogy a nem üres és $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartományok mind komform ekvivalensek. Nem egyszeresen összefüggő tartományok körében a helyzet bonyolultabb.

14.27. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy az $\ln(x^2+y^2)$ harmonikus függvénynek nincs harmonikus társa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-n.

14.28. Feladat [8]. Keressük meg az alábbi függvények harmonikus társát:

(1) $x^2 - y^2 + 2x$;

(2) $e^x \cos y$;

(3) $\sin x \cosh y$.

14.29. Feladat [12]. Bizonyítsuk be, hogy a C körre a z és w pontok pontosan akkor alkotnak inverz pontpárt, ha minden, a z-n és w-n átmenő kör merőleges C-re. Mutassuk meg, hogy törtlineáris leképezésnél a C-re inverz pontpárok C képére inverz pontpárokba mennek át.

→ **14.30. Feladat [8].** Egy síkbeli potenciálelméleti problémához tartozó *komplex potenciál*on egy olyan holomorf, komplex értékű függvényt értünk, amelynek képzetes része a potenciál. A potenciál szintvonalai az ekvipotenciális vonalak, a valós rész szintvonalai az erővonalak. Például $ki \log z$ egy ponttöltés komplex potenciálja $\mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}$-n. Ebből kiindulva, keressük meg ellenkező előjelű, egyenlő nagyságú töltések esetén a komplex potenciált az alábbi esetekben:

(1) két ponttöltés;

(2) egy körvezető és egy ponttöltés;

(3) két körvezető.

→ **14.31. Feladat [11].** Határozzuk meg a hőáramlást excentrikus csövek között, stacionárius esetben.

→ **14.32. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto z + e^z$, $\left|\Im(z)\right| \leq \pi$ függvényt. Ezen függvény felhasználásával határozzuk meg egy „félsík kondenzátor" erőterét a kondenzátor szélén.

→ **14.33. Feladat [11].** Határozzuk meg két, egy síkban lévő, párhuzamos félsíkból álló kondenzátor erőterét.

→ **14.34. Feladat [14].**

(1) Vizsgáljuk meg a $z \mapsto (z-1)/(z+1)$, $z \mapsto z^2$ leképezéseket, és a

$$z \mapsto \frac{z-2}{z+2}$$

leképezés inverzét.

(2) Mi a képe a fenti leképezések összetételénél egy, a -1 és 1 pontokon átmenő C kör külsejének?

(3) Vizsgáljuk meg egy, a C kört az 1 pontban érintő, nála nagyobb C^* kör képét. (*Zsukovszkij-profil.*)

(4) Számoljuk ki a fenti leképezések összetételét.

14.35. Feladat [10]. Képezzük le konform módon az alábbi tartományokat a nyílt egységkörre:

(1) $\{z\colon \Re z > 0, \Im z > 0\}$;

(2) $\mathbb{U}_1(0) \setminus [x,1]$, ahol $-1 < x < 1$;

(3) $\mathbb{U}_1(0) \setminus ([-1,-x] \cup [x,1])$, ahol $0 < x < 1$;

(4) $\{z\colon \Im(z) > 0\} \setminus i[0,1]$;

(5) $\mathbb{C} \setminus]-\infty, x] \cup [y, \infty[$, ahol $x < 0 < y$;

(6) $\{z\colon -\pi < \Im(z) < \pi\} \setminus]-\infty, 0]$.

∗ **14.36. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy a nyílt egységkör önmagára való konform leképezései törtlineáris leképezések. (Először az $f(0) = 0$ esetre mutassuk meg, hogy $f(z) = cz$. Az általános esetben az origó képét vigyük vissza egy törtlineáris leképezéssel az origóba.)

∗ **14.37. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy két, $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartomány között létezik olyan konform ekvivalencia, amely egy adott pontot egy adott pontba visz, és ott a derivált adott argumentumú. Mutassuk meg, hogy ilyen mellékfeltételek mellett a konform leképezés már egyértelmű. (Vezessük vissza a problémát a nyílt egységkör önmagára történő leképezéseinek vizsgálatára.)

14.38. Weierstrass tétele. *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf függvények f_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozata a D-n lokálisan egyenletesen konvergál az $f\colon D \to \mathbb{C}$ függvényhez. Ekkor f is holomorf, és $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ a D-n lokálisan egyenletesen.*

Bizonyítás. Mivel D lokálisan kompakt, a lokálisan egyenletes konvergencia ekvivalens azzal, hogy a konvergencia a kompakt halmazokon egyenletes. Legyen $c \in D$, és

válasszunk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre a c középpontú, r sugarú zárt körlap D-ben van. Legyen $\gamma(t) = c + re^{it}$, ha $0 \le t \le 2\pi$. Ekkor $|z - c| < r$ esetén

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{w - z}\, dw.$$

Rögzítve z-t, γ értékkészletén

$$\frac{f_n(w)}{w - z} \to \frac{f(w)}{w - z}$$

egyenletesen, amiből

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

azaz f analitikus.

Most legyen C kompakt részhalmaza D-nek, és válasszunk olyan $r > 0$-t és $B \subset D$ kompakt halmazt, amelyre B a C minden pontjának r sugarú zárt környezetét tartalmazza. Ha $z \in C$, a Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \le \sup\Big\{\left|f_n(w) - f(w)\right| : w \in B\Big\} \frac{k!}{r^k} \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

∗ **14.39. Vitali tétele.** *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon ugyanazzal a K korláttal korlátos komplex értékű holomorf függvények egy f_n sorozata egy C halmaz pontjaiban konvergál, és C-nek van torlódási pontja D-ben. Ekkor f_n lokálisan egyenletesen konvergens D-n.*

Bizonyítás. Legyen c a C egy torlódási pontja, és tegyük fel, hogy $r > 0$-ra $\mathbb{B}_r(c) \subset D$. Először megmutatjuk, hogy f_n egyenletesen konvergens $\mathbb{B}_{r/2}(c)$-n. Feltehetjük, hogy $c = 0$. Legyen

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots, \quad \text{ha} \quad |z| \le r. \tag{1}$$

Mivel $\left|f_n(z) - f_n(0)\right| \le 2K$, a Schwarz-lemma miatt

$$\left|f_n(z) - f_n(0)\right| \le \frac{2K|z|}{r}, \quad \text{ha} \quad |z| \le r.$$

Legyen $0 \ne w \in C$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left|f_n(0) - f_m(0)\right| &\le \left|f_n(0) - f_n(w)\right| + \left|f_n(w) - f_m(w)\right| + \left|f_m(w) - f_m(0)\right| \\ &\le 4K|w|/r + \left|f_n(w) - f_m(w)\right|.\end{aligned}$$

Először úgy választva w-t, hogy az első tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$, majd olyan N-et választva, hogy $n, m \ge N$ esetén a második tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$, kapjuk, hogy $f_n(0) = a_0^{(n)}$ konvergens.

Tekintsük most a

$$g_n(z) = a_1^{(n)} + a_2^{(n)} z + \cdots, \quad \text{ha} \quad |z| \le r$$

függvényeket. Mivel $g_n(z) = (f_n(z) - f_n(0))/z$, ha $z \neq 0$, ezek is konvergensek C pontjaiban, mert, mint megmutattuk, $f_n(0)$ konvergens. Továbbá $|g_n(z)| \le 2K/r$: ez teljesül, ha $|z| = r$, és így $|z| \le r$ esetén is. Megismételve az előző gondolatmenetet, kapjuk, hogy $a_1^{(n)}$ konvergens. Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden j-re $a_j^{(n)}$ konvergens, $a_j^{(n)} \to a_j$. Az együtthatókra jobb korlátot is kaphatunk: a Cauchy-egyenlőtlenségekből $|a_j^{(n)}| \le K/r^j$. Ha

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots,$$

akkor

$$\big|f_n(z) - f(z)\big| \le \sum_{j=0}^{k} |a_j^{(n)} - a_j| \frac{r^j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2K}{2^j}, \quad \text{ha} \quad |z| \le r/2.$$

Rögzítve egy elég nagy k-t, a második összeg kisebb, mint $\varepsilon/2$, és az első is, ha n elég nagy.

Innen már következik az állítás: a konvergenciapontok halmazának belseje nem üres nyílt halmaz, de minden torlódási pontját tartalmazza, így zárt is, tehát az egész D, és pontjaiban a konvergencia lokálisan egyenletes.

∗ **14.40. Vitali–Montel kiválasztási tétel.** *Ha a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf komplex értékű függvények egy f_n sorozata lokálisan ugyanazzal a korláttal korlátos, akkor kiválasztható belőle egy lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.*

Bizonyítás. Vegyünk egy S megszámlálható sűrű halmazt D-ben, és átlós eljárással válasszunk egy részsorozatot, amely S minden pontjában konvergens. Lokálisan alkalmazva az előző tételt, kapjuk az állítást.

∗ **14.41. Hurwitz tétele.** *Ha a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon holomorf komplex értékű függvények egy f_n sorozata lokálisan egyenletesen konvergál egy nem konstans f függvényhez és $c \in D$ az f zérushelye, akkor c bármely környezetében elég nagy n-re f_n-nek is van zérushelye.*

Bizonyítás. A zérushelyek izoláltsága miatt van olyan $r > 0$, hogy $\mathbb{B}_r(c)$-ben nincs más zérushelye f-nek. Mivel ha n nagy, akkor $f_n - f$ abszolút értéke kicsi a c középpontú r sugarú körpályán, az állítás következik a (később bizonyítandó) Rouché-tételből.

∗ **14.42. Következmény.** *Ha az f_n-ek konform leképezések és f nem konstans, akkor konform.*

Bizonyítás. Ha $f(z) = f(w)$ lenne $z \neq w$-re, akkor elég nagy n-re f_n sem lenne konform. Így f kölcsönösen egyértelmű, amiből a nyílt leképezések tétele szerint következik, hogy f' sehol sem nulla.

∗ **14.43. Tétel: holomorf függvény logaritmusa.** *Ha az f holomorf komplex értékű függvény sehol sem nulla a D egyszeresen összefüggő tartományon, akkor van olyan g holomorf függvény D-n, hogy $f(z) = \exp(g(z))$ minden $z \in D$-re.*

Bizonyítás. Mivel f'/f holomorf, minden D-beli zárt görbe mentén nulla az integrálja, így van primitív függvénye. Legyen g_0 egy primitív függvény. Ekkor

$$\Big(f(z)\exp(-g_0(z))\Big)' = f'(z)\exp(-g_0(z)) - f(z)g_0'(z)\exp(-g_0(z)) \equiv 0.$$

Innen $f(z)\exp(-g_0(z))$ egy nem nulla konstans, ami felírható $\exp(c)$ alakban, és $g = g_0 + c$-re teljesül az állítás.

14.44. Riemann tétele. Ha $D, E \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$-től különböző nem üres egyszeresen összefüggő tartományok, akkor konform ekvivalensek.

Bizonyítás. A tétel következik az alábbi, valamivel precízebb változatból.

$*$ **14.45. A konform leképezések alaptétele.** *Legyen $\emptyset \neq D \subsetneq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $c \in D$. Ekkor egyetlen olyan $f\colon D \to \mathbb{D}$ konform ráképezés létezik, amelyre $f(c) = 0$, $f'(c) > 0$.*

Bizonyítás. Az egyértelműség bizonyításával kezdjük. Ha g egy másik, D-t $\mathbb{D}$-be képező holomorf leképezés amelyre $g(c) = 0$ és $g'(c) > 0$, akkor $g \circ f^{-1}$ az egységkör önmagába való holomorf leképezése, ami a nullát nullába viszi, így a Schwarz-lemma szerint $\big|g'(c)/f'(c)\big| \leq 1$, azaz $g'(c) \leq f'(c)$. Ha g is eleget tesz a tétel állításának, akkor $f'(c) \leq g'(c)$ is teljesül, így a Schwarz-lemma szerint $(g \circ f^{-1})(z) \equiv z$, azaz $f = g$.

Ezek szerint az f függvényt az tünteti ki a D-t $\mathbb{D}$-be képező, $g(c) = 0$, $g'(c) > 0$ tulajdonságú g konform leképezések $\mathcal{F}$ halmazában, hogy a c-beli deriváltja a lehető legnagyobb. Ez a létezés bizonyításának alapja. Legyen $s = \sup_{g\in\mathcal{F}} g'(c)$.

Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ nem üres. Legyen $a \in \mathbb{C}\setminus D$, és tekintsük a $z \mapsto \sqrt{z-a}$ függvényt. Pontosabban, tekintsünk egy olyan, az előző tétel szerint létező g holomorf függvényt, amelyre $z - a = \exp(g(z))$, ha $z \in D$ és legyen $f_1(z) = \exp(\frac{1}{2}g(z))$. Ha $f_1(z_1) = \pm f_1(z_2)$, akkor $z_1 - a = f_1(z_1)^2 = f_1(z_2)^2 = z_2 - a$. Innen egyrészt f_1 kölcsönösen egyértelmű, tehát konform, másrészt ha valamilyen w értéket felvesz, akkor $-w$-t nem. Mivel nyílt leképezés, értékkészlete tartalmaz valamely $-w \neq 0$ körüli valamely $r > 0$ sugarú zárt körlapot. Az $f_2(z) = r/(f_1(z) - w)$ leképezés szintén konform, és már $\mathbb{D}$-be képez. Végül

$$f_3(z) = \frac{|f_2'(c)|}{2f_2'(c)}(f_2(z) - f_2(c)) \in \mathcal{F}.$$

Második lépésként megmutatjuk, hogy van olyan $f \in \mathcal{F}$, amelyre $f'(c) = s$. Válasszunk olyan $f_n \in \mathcal{F}$ sorozatot, amelyre $f_n'(c) \to s$. A Vitali–Montel kiválasztási tétel szerint ennek van olyan részsorozata, amely lokálisan egyenletes konvergál egy f függvényhez. Az egyszerűbb jelölések kedvéért feltehetjük, hogy ez mindjárt f_n. Weierstrass tétele szerint f holomorf és $f_n' \to f'$ lokálisan egyenletesen, így $f'(c) = s$. Nyilván $|f| \leq 1$. Ha valahol egyenlőség állna, akkor f konstans lenne, de $f'(c) > 0$. Mivel f konform leképezések lokálisan egyenletesen konvergens sorozatának a határértéke, és nem konstans, maga is konform.

Azt kell még megmutatnunk, hogy f értékkészlete $\mathbb{D}$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $d \in \mathbb{D}$, amely nincs az értékkészletben. A $t_1(z) = (z - d)/(1 - z\overline{d})$ törtlineáris leképezés a d-t 0-ba képezi, és

$$\big|t_1(z)\big|^2 = \frac{|z|^2 + |d|^2 - 2\Re(z\overline{d})}{1 + |z|^2|d|^2 - 2\Re(z\overline{d})}.$$

Mivel $|d|^2 < 1$, nyilván $0 \le (1-|d|^2)(1-|z|^2)$, ha $|z| \le 1$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|z| = 1$. Innen a számláló pontosan akkor egyenlő a nevezővel, ha $|z| = 1$, egyébként kisebb, tehát t_1 a $\mathbb{D}$-t $\mathbb{D}$-be, $\mathbb{D}$ határát pedig a $\mathbb{D}$ határába képezi. Mivel $t_1^{-1}(w) = (w+d)/(1+w\overline{d})$ is ugyanilyen tulajdonságú, a $\mathbb{D}$ és a határa is önmagára képeződik kölcsönösen egyértelműen. Tekintsük most a $t_1 \circ f$ leképezés négyzetgyökét. Pontosabban, legyen g olyan leképezés, amelyre $(t_1 \circ f)(z) = \exp(g(z))$, ha $z \in D$, és legyen $f_1(z) = \exp(\frac{1}{2}g(z))$, ha $z \in D$. Ugyanúgy mint az első lépésben adódik, hogy f_1 kölcsönösen egyértelmű. Alkalmazzunk még egy t_1-hez hasonló t_2 törtlineáris leképezést, amivel visszavisszük $f_1(c)$-t az origóba, de a törtet szorozzuk meg egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal is. Ezzel elérhetjük, hogy $f_2 = t_2 \circ f_1$-re $f_2'(c) > 0$ legyen. Ha $|w| < 1$-re $h(w) = t_1^{-1}(t_2^{-1}(w)^2)$, akkor $f = h \circ f_2$. A h holomorf függvény, $\bigl|h(w)\bigr| < 1$, ha $|w| < 1$ és $h(0) = 0$. A Schwarz-lemmából $\bigl|h'(0)\bigr| \le 1$. Egyenlőség csak akkor lehetne, ha h egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal való szorzás lenne. Ez azonban lehetetlen, mert h nem kölcsönösen egyértelmű. Így $\bigl|h'(0)\bigr| < 1$. Innen $s = f'(c) = h'(0)f_2'(c) < f_2'(c) \le s$, ami ellentmondás.

∗ **14.46. Definíció.** Komplex pályák helyett sokszor érdemes komplex pályák véges sorozataival dolgozni. Komplex pályák egy $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ véges sorozatát *lánc*nak fogjuk nevezni. Ha

$$\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad \text{és} \quad \Delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$$

láncok, akkor legyen $\Gamma \vee \Delta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ és $\check{\Gamma} = (\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_n)$. Ha $S = \cup_{j=1}^n \operatorname{rng}(\gamma_j)$, az f folytonos komplex fügvény S-en, akkor legyen

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Ha egy lánc minden pályája zárt pálya, akkor *ciklus*nak nevezzük. Ha Γ egy ciklus, és $w \notin S$, akkor legyen

$$\operatorname{ind}(w, \Gamma) = \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}(w, \gamma_j).$$

A következő lemma azt mutatja, hogy „elég sok” ciklus van, az utána következő tétel pedig a Cauchy-integráltétel és a Cauchy-integrálformulák ciklusokra való kiterjesztése, ezen tételek úgynevezett homológ változata.

∗ **14.47. Lemma.** *Legyen K egy kompakt halmaz, D pedig egy K-t tartalmazó nyílt részhalmaza a komplex síknak. Ekkor van olyan Γ ciklus $D\setminus K$-ban, amelyre $\operatorname{ind}(w, \Gamma) = 1$, ha $w \in K$ és $\operatorname{ind}(w, \Gamma) = 0$, ha $w \notin D$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, amelyre a K halmaz 3ε-környezete része D-nek. Jelölje K_ε a K halmaz ε-környezetét. Keressünk olyan háromszöget, amely belsejében tartalmazza K_ε-t, és legyen γ olyan, három lineáris szakaszból álló zárt pálya, amelynek értékkészlete a háromszög határa, úgy, hogy $w \in K_\varepsilon$ esetén $\operatorname{ind}(w, \gamma) = 1$ teljesüljön. A háromszöget osszuk négy részre, ugyanúgy, mint a 11.31 tétel bizonyításánál, és tekintsük az ott leírt pályákat. Teljes indukcióval folytatva a felosztást, olyan $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ciklushoz juthatunk, amelynek minden pályája három lineáris szakaszból áll, az egyes pályák értékkészlete ε-nál kisebb átmérőjű, és ha $S = \cup_{j=1}^n \operatorname{rng}\gamma_j$, akkor $w \notin S$ esetén

$\operatorname{ind}(w,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ind}(w,\gamma_j)$. Hagyjunk el minden olyan pályát, amelynek értékkészlete ε-nál közelebb van G komplementerének valamely pontjához. Minden elhagyott γ_j pályára $\operatorname{ind}(w,\gamma_j)=0$, ha $w\in K_\varepsilon$. A visszamaradó ciklus nem kerüli meg G komplementerének egyetlen pontját sem. A visszamaradó pályák lineáris szakaszai egyszer vagy kétszer vannak befutva. Minden egyszer befutott szakasz vagy az eredeti háromszög oldalának egy szakasza, vagy egy elhagyott pálya egy szakasza, így nem metszhet bele K_ε-ba. Egyenként hagyjunk el minden kétszer befutott szakaszt. Ha a kétszer befutott szakasz egy pálya két egymás utáni szakasza, akkor a pályát rövidíthetjük (esetleg elhagyhatjuk, ha nulla hosszú lesz), ha egy pálya két, nem egymás utáni szakasza, akkor a pályát szétvághatjuk, ha pedig két pálya egy-egy szakasza, akkor a két pályát összeragaszthatjuk úgy, hogy az S komplementerében lévő pontok indexe ne változzon. A kapott ciklus legyen Γ. Nyilván $w\notin G$ esetén $\operatorname{ind}(w,\Gamma)=0$. Mivel $w\in K_\varepsilon\setminus S$ esetén $\operatorname{ind}(w,\Gamma)=1$, és $w\mapsto\operatorname{ind}(w,\Gamma)$ folytonos, és $K_\varepsilon\setminus S$ sűrű K_ε-ban, $w\in K_\varepsilon$ esetén is $\operatorname{ind}(w,\Gamma)=1$.

$*$ **14.48. Cauchy tétele.** *Legyen f holomorf a $G\subset\mathbb{C}$ nyílt halmazon. Ha $\Gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ egy ciklus, amelyre $\operatorname{ind}(w,\Gamma)=0$, ha $w\notin G$ és $S=\cup_{j=1}^{n}\operatorname{rng}\gamma_j$, akkor minden $m\in\mathbb{N}$-re*

$$f^{(m)}(z)\operatorname{ind}(z,\Gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw,\quad \text{ha}\quad z\in G\setminus S.$$

Továbbá

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

Bizonyítás. Legyen $m=0$ és g a $G\times G$-n a

$$g(z,w)=\begin{cases}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{ha } w\neq z,\\ f'(z), & \text{ha } w=z\end{cases}$$

összefüggéssel definiálva. Megmutatjuk, hogy g folytonos $G\times G$-n. Legyen $a\in G$, $\varepsilon>0$, és válasszunk olyan $r>0$-t, amelyre $\mathbb{B}_r(a)\subset G$ és $\big|f'(\xi)-f'(a)\big|\le\varepsilon$, ha $|\xi-a|\le r$. Ha $|z-a|\le r$ és $|w-a|\le r$, akkor legyen $\gamma(t)=(1-t)z+tw$, ha $0\le t\le 1$. Ekkor

$$g(z,w)-g(a,a)=\int_0^1 f'(\gamma(t))-f'(a)\,dt,$$

így $\big|g(z,w)-g(a,a)\big|\le\varepsilon$.

Nyilván feltehetjük, hogy Γ szakaszonként sima pályákból áll. Legyen most

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw.$$

Megmutatjuk, hogy h holomorf. Ha $z_n\to z$, akkor $g(z_n,w)\to g(z,w)$ az S-en egyenletesen, így $h(z_n)\to h(z)$, tehát h folytonos. Ha γ egy háromszög-pálya, amely belsejével együtt G-ben van, akkor

$$\int_\gamma h(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\int_\gamma g(z,w)\,dz\,dw.$$

Mivel rögzített $w \in G$-re $z \mapsto g(z,w)$ holomorf G-n, a belső integrál nulla. A Morera-tételből h holomorf G-n. Vegyük észre, hogy

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad \text{ha} \quad z \in G, \quad \operatorname{ind}(z,\Gamma) = 0.$$

Ezzel az összefüggéssel kiterjeszthetjük h-t az egész komplex síkon holomorf függvénnyé. Nyilván $h(z) \to 0$, ha $|z| \to \infty$, így a Liouville-tétel szerint $h(z) \equiv 0$. Ebből következik a tétel első állítása $m = 0$-ra. Az általános eset ugyanúgy kapható, mint a Cauchy-integrálformuláknál. A második állítást úgy kapjuk, hogy rögzített $z \in G \setminus S$ mellett $f(w)$ helyére $(w-z)f(w)$-t írunk.

15
Meromorf függvények

A legtöbb magasabb matematikai fogalom, így a komplex számok, algebrák, lineáris operátorok, Borel-halmazok – e felsorolást szinte vég nélkül folytathatnánk – fogalmát úgy alkották meg, hogy azok alkalmas anyagként szolgáljanak, melyen a matematikus bemutathatja leleményességét és érzékét az elvont szépség iránt. ... A komplex számok különösen találó példát szolgáltatnak a mondottakra. Semmiféle tapasztalat nem követeli, hogy e mennyiségeket bevezessük. Valóban, ha megkérdezünk egy matematikust, hogy indokolja meg érdeklődését a komplex számok iránt, rá fog mutatni – némi méltatlankodással hangjában – az egyenletek, a hatványsorok s általában az analitikus függvények elméletének sok szép tételére, melyek megfogalmazását a komplex számok bevezetése tette lehetővé. A matematikus nem hajlandó arra, hogy feladja érdeklődését szellemének e legszebb teljesítményei iránt.

Wigner Jenő (1959)

15.1. Laurent-sor. *Legyenek r és R bővített valós számok úgy, hogy $0 \le r < R \le \infty$, $a \in \mathbb{C}$, és tegyük fel, hogy f holomorf a $D = \{z\colon r < |z-a| < R\}$ körgyűrűn. Ekkor f előállítható*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$$

alakban. Az első hatványsor konvergens $|z-a| < R$ esetén, a második függvénysor pedig $|z-a| > r$ esetén. A c_n együtthatók egyértelműen meghatározottak és minden D-beli zárt γ pályára

$$\operatorname{ind}(a,\gamma) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw. \tag{1}$$

Az előállítást, nem teljesen korrekt módon,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

alakban is szokás írni.

Bizonyítás. Legyenek $z \in D$, $r', R' \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek úgy, hogy $r < r' < |z-a| < R' < R$ teljesüljön, és legyen először

$$\gamma(t) = a + r' e^{it}, \quad \Gamma(t) = a + R' e^{it}, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Mivel γ és Γ homotópok D-ben, és a

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{ha } w \ne z, \\ f'(z), & \text{ha } w = z \end{cases}$$

függvény holomorf D-n,

$$\int_\gamma g(w)\,dw = \int_\Gamma g(w)\,dw,$$

azaz

$$\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw,$$

amiből $\operatorname{ind}(z,\gamma)=0$, $\operatorname{ind}(z,\Gamma)=1$ miatt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{2}$$

Mivel

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)(1-(z-a)/(w-a))}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},\end{aligned}$$

és a jobb oldali sor egyenletesen konvergens, ha $|w-a|=R'$, (2)-ben az első integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

alakba írható. Hasonlóan,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{(z-a)(1-(w-a)/(z-a))}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n},\end{aligned}$$

ahol a jobb oldali sor w-ben egyenletesen konvergens az $|w-a|=r'$ körön, és így (2)-ben a második integrál

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w-a)^{n-1}\,dw\\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n\end{aligned}$$

alakba írható. Az együtthatók nem függnek z-től, csak esetleg γ-tól és Γ-tól, amiből következik, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ minden $|z-a|<R'$ esetén, $\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n$ pedig minden $|z-a|>r'$ esetén konvergens.

Tegyük fel, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c'_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}c'_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{3}$$

ha $r' < |z-a| < R'$. Az első sor egy hatványsor, a második sor pedig $w = 1/(z-a)$ helyettesítéssel egy hatványsorba megy át, amely egy körlapon konvergens. Legyen most $\gamma\colon I \to D$ egy tetszőleges zárt pálya, amelyre $r' < \big|\gamma(t)-a\big| < R'$ minden $t \in I$-re. A (3)-ban szereplő sorok egyenletesen konvergensek $\gamma(I)$-n, és

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma c'_n (w-a)^{n-m-1}\,dw.$$

Mivel $(w-a)^k$-nak van primitív függvénye D-n, ha $k \neq -1$, a jobb oldali integrálok mind nullák, az $n-m-1=-1$ esetet kivéve. Így az index definíciójából kapjuk (1)-et, és a Laurent-sor egyértelműségét is. Ebből speciálisan következik, hogy a c_n-ek nem függnek r' és R' választásától sem, $r' \to r$, $R' \to R$ esetén pedig, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergens $|z-a| < R$, a $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ sor pedig konvergens $|z-a| > r$ esetén.

15.2. Függvény rendje egy pontban. Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, és tegyük fel, hogy f holomorf a

$$D = \{z\colon 0 < |z-a| < r\}$$

lyukas körlapon. Legyen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{ha} \quad z \in D$$

az f Laurent-sora. A Laurent-sor együtthatói nem függnek r választásától. Az f *rend*jét a-ban az $\omega(a,f) = \inf\{n\colon c_n \neq 0\}$összefüggéssel definiáljuk. Ha $\omega(a,f) < 0$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek a-ban *izolált szingularitás*a van. Ha $\omega(a,f) = -\infty$, akkor a-ban f-nek *lényeges szingularitás*a van, ha pedig $-\infty < \omega(a,f) = -n < 0$, akkor f-nek a-ban n-edrendű *pólus*a van. Az

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}, \quad \text{ha} \quad z \neq a$$

függvény az f *főrésze* a-ban. Ha $\omega(a,f) \geq 0$, akkor f holomorf módon kiterjeszthető a $\{z\colon |z-a| < r\}$ körlapra. Ha $\omega(a,f) = n > 0$, akkor azt mondjuk, hogy a n-edrendű *zérushely*e f-nek. Ha g egy másik, D-n analitikus függvény, akkor $\omega(a, f+g) \geq \min\{\omega(a,f), \omega(a,g)\}$ és $\omega(a,fg) = \omega(a,f) + \omega(a,g)$, ha $\omega(a,f)$ és $\omega(a,g)$ végesek. Az utóbbi állítás belátásához vegyük észre, hogy ha f véges rendű a-ban, $\omega(a,f) = n$, akkor f a D-n egyértelműen felírható $(z-a)^n g(z)$ alakban, ahol g a D-n analitikus és rendje a-ban 0. Ha f véges rendű a-ban, akkor $1/f$ is, és $\omega(a,1/f) = -\omega(a,f)$. A c_{-1} az f *reziduum*a a-ban, jelölése $\operatorname{Res}(a,f)$.

15.3. Casorati–Weierstrass-tétel. *Ha a a komplex értékű f függvény lényeges szingularitása, akkor az a bármely környezetében vett értékkészlete f-nek sűrű $\mathbb{C}$-ben.*

A tétel mutatja, hogy lényeges szingularitás környezetében a függvény sokkal csúnyábban viselkedik, mintha rendje véges a-ban. Egyébként ennél több is igaz: Picard tétele szerint a függvény az a minden környezetében legfeljebb egy érték kivételével minden $\mathbb{C}$-beli értéket felvesz.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $w \in \mathbb{C}$-re és $\delta, \varepsilon > 0$-ra $\mathbb{U}_\varepsilon(w)$ nincs az $\mathbb{U}_\delta(a) \setminus \{a\}$-n vett értékkészletben. Ekkor a $z \mapsto 1/(f(z) - w)$ függvény korlátos, így megszüntethető szingularitása van. Innen a reciproka, a $z \mapsto f(z) - w$ függvény véges rendű lenne.

15.4. Reziduumtétel. *Legyen D egy egyszeresen összefüggő tartomány, $S \subset D$ egy csupa izolált pontból álló halmaz. Ha $D \setminus S$ nyílt, f analitikus $D \setminus S$-en és γ egy zárt pálya $D \setminus S$-ben, akkor*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \operatorname{ind}(s, \gamma) \operatorname{Res}(s, f),$$

és a jobb oldali összegnek csak véges sok tagja nullától különböző.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy minden $s \in S$ nem megszüntethető szingularitása f-nek. Bármely K kompakt részhalmazára D-nek $S \cap K$ véges, mert nem lehet torlódási pontja. Legyen P az összes olyan w pontok halmaza, amelyekre $\operatorname{ind}(w, \gamma) \neq 0$. Mivel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ azon pontjainak halmaza, amelyekre $\operatorname{ind}(w, \gamma)$ egy adott értéket vesz fel, nyílt, P minden határpontja $\gamma(I)$-ben van. Így $P \subset D$ miatt $\overline{P} \subset D$, és tudjuk, hogy $\overline{P}$ kompakt. Legyen $\varphi\colon I \times [0,1] \to D$ a γ egy homotópiája egy konstans pályával, és $M = \varphi(I \times [0,1])$. Ha $S' = S \cap (M \cup \overline{P})$, akkor S' véges és $B = (D \setminus S) \cup S'$ nyílt. Jelölje u_s az f főrészét az $s \in S'$ pontban, és tekintsük a

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S'} u_s(z), \qquad z \in B$$

analitikussá tett függvényt. Mivel a Cauchy-féle integráltétel szerint

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{s \in S'} \int_\gamma u_s(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s \in S'} \operatorname{ind}(s, \gamma) \operatorname{Res}(s, f).$$

15.5. Megjegyzés. A reziduumtételt gyakran használjuk komplex és valós integrálok kiszámítására. Ha az integrandusz két holomorf függvény hányadosa a szingularitás egy környezetében, akkor a reziduumot könnyen megkaphatjuk, ha felírjuk a számláló és a nevező adott pontban vett Taylor-sorának első néhány tagját.

15.6. Meromorf függvények. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy f *meromorf* D-n, ha f a D egy nyílt B részhalmazán holomorf, és $D \setminus B$ minden pontja pólusa f-nek. Vegyük észre, hogy $D \setminus B$-nek nem lehet torlódási pontja D-ben. A torlódási pont ugyanis nem lehet B-ben, mert az nyílt, de $D \setminus B$-ben sem, mert annak a pontjai izoláltak. Meromorf függvények összege is meromorf, sőt, D-n meromorf komplex értékű függvények szorzata és hányadosa is meromorf, ha az osztó nem azonosan nulla. Az $1/f$ pólusai f zérushelyei, $1/f$ zérushelyei pedig f pólusai.

15.7. Parciális törtekre bontás. *Legyenek P és*

$$Q(z) = (z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_n)^{k_n}, \quad z_i \neq z_j, \quad \text{ha} \quad i \neq j$$

polinomok. Léteznek olyan $A_{i,j}$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,k_n$ komplex számok és S polinom, hogy

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(z-z_i)^j} + S(z).$$

Az $A_{i,j}$ számok egyértelműen meghatározottak.

Bizonyítás. Az $A_{i,j}$ számokat úgy választva, hogy

$$\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(z-z_i)^j}$$

a P/Q meromorf függvény főrésze legyen a z_i pontban,

$$S(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(z-z_i)^j}$$

olyan racionális törtfüggvény, amelynek minden szingularitása megszüntethető, így S polinom. Más $A_{i,j}$-ket választva, S-nek lenne pólusa.

$*$ **15.8. Megjegyzés.** A parciális törtekre bontás tétele végtelen sok tagra történő általánosításának tekinthető Mittag-Leffler tétele. Ennek a tételnek, valamint a Weierstrass-féle szorzat előállításnak a segítségével levezethető például a $\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{\Gamma}(1-z) = \pi/\sin\pi z$ összefüggés, és még sok más érdekes és fontos összefüggés. Részletesebben lásd Szőkefalvi-Nagy [165] jegyzetét.

15.9. Argumentum-elv. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, és f egy nem azonosan nulla komplex értékű meromorf függvény D-n. Legyen N, illetve P az f nullhelyeinek, illetve pólusainak halmaza, g pedig egy D-n holomorf függvény. Minden $D \setminus (N \cup P)$-beli γ zárt pályára*

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{w\in N\cup P}\operatorname{ind}(w,\gamma)g(w)\omega(w,f).$$

Bizonyítás. Az f a w egy környezetében felírható $f(z) = (z-w)^k f_1(z)$ alakban, ahol k az f rendje w-ben, f_1 holomorf, és $f_1(z) \neq 0$. Ebből

$$f'(z) = k(z-w)^{k-1}f_1(z) + (z-w)^k f_1'(z),$$

tehát f'/f rendje a w pontban nemnegatív, ha $k = 0$, egyébként -1, és a reziduuma k, ha $k \neq 0$. A g függvénnyel szorozva, gf'/f reziduuma $kg(w)$ lesz. Így a reziduumtételből következik az állítás.

15.10. Következmény. *Ha γ szakaszonként sima pálya $D\setminus(N\cup P)$-ben, és $\Gamma = f\circ\gamma$, akkor*

$$\operatorname{ind}(0,\Gamma) = \sum_{w\in N\cup P} \operatorname{ind}(w,\gamma)\omega(w,f).$$

Bizonyítás. Γ is szakaszonként sima pálya, és ha γ az $[a,b]$-n van értelmezve, akkor

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

15.11. Rouché tétele. *Legyen $D\subset\mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, f és g holomorf komplex értékű függvények D-n, N az f, N' pedig az $f+g$ zérushelyeinek halmaza, $\gamma\colon I\to D$ egy zárt pálya $D\setminus N$-ben. Ha $\bigl|g(z)\bigr| < \bigl|f(z)\bigr|$ a $\gamma(I)$-n, akkor $f+g$-nek nincs zérushelye $\gamma(I)$-n, és*

$$\sum_{w\in N} \operatorname{ind}(w,\gamma)\omega(w,f) = \sum_{w\in N'} \operatorname{ind}(w,\gamma)\omega(w,f+g).$$

Bizonyítás. Mivel f és $f+g$ sem azonosan nulla, N és N' izolált pontokból állnak, és megszámlálhatóak. Az első állítás nyilvánvaló. Mivel γ egy, a $\{|g|<|f|\}$ nyílt halmazban vele homotóp pályával helyettesíthető, feltehetjük, hogy szakaszonként sima. Legyen $h = (f+g)/f$. Ekkor

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h},$$

és az előző következmény szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\Gamma = h\circ\gamma$ szakaszonként sima pályára $\operatorname{ind}(0,\Gamma)=0$. Vegyük észre, hogy $\bigl|h(z)-1\bigr| = \bigl|g(z)/f(z)\bigr| < 1$, ha $z\in\gamma(I)$.

15.12. A gamma-függvény. Ha $\Re(z)>0$, legyen

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Parciális integrálással adódik a gamma-függvény *függvényegyenlete*: $\mathbf{\Gamma}(z+1) = z\mathbf{\Gamma}(z)$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{\Gamma}$ analitikus a $\{z\colon\Re(z)>0\}$ félsíkon. Legyen

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \text{ha} \quad \Re(z)>0.$$

Ha $h_m\to 0$, amint $m\to\infty$, akkor Lebesgue tétele szerint

$$\frac{f_n(z+h_m)-f_n(z)}{h_m} = \int_{1/n}^n \frac{e^{h_m\ln t}-1}{h_m\ln t}t^{z-1}e^{-t}\,dt$$
$$\to \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt, \quad \text{ha} \quad m\to\infty,$$

így f_n holomorf. Ha $C \subset \{z\colon \Re(z) > 0\}$ kompakt halmaz, $k \le \Re(z) \le K$, ha $z \in C$, akkor

$$\left|\mathbf{\Gamma}(z) - f_n(z)\right| \le \int_0^{1/n} t^{k-1}e^{-t}\,dt + \int_n^{\infty} t^{K-1}e^{-t}\,dt \to 0,$$

ha $n \to \infty$, így az f_n függvénysorozat minden kompakt halmazon egyenletesen konvergens. Weierstrass tétele szerint $\mathbf{\Gamma}$ analitikus a $\{z\colon \Re(z) > 0\}$ félsíkon. A gamma-függvény függvényegyenlete, a $\mathbf{\Gamma}(z) = \mathbf{\Gamma}(z+1)/z$ összefüggés alapján $\mathbf{\Gamma}$ analitikusan folytatható a $\{z\colon \Re(z) > -1, z \ne 0\}$ nyílt halmazra. Újra alkalmazva ezt az összefüggést, a $\{z\colon \Re(z) > -2, z \ne 0, -1\}$ halmazra folytatható $\mathbf{\Gamma}$. Teljes indukcióval ismételve az eljárást, $\mathbf{\Gamma}$ egy olyan, a $\mathbb{C}$-n meromorf függvénnyé terjeszthető ki, amelynek a $0, -1, -2, \ldots$ pontokban elsőrendű pólusai vannak,és erre a kiterjesztett függvényre $-z \notin \mathbb{N}$ esetén teljesül a $\mathbf{\Gamma}(z+1) = z\mathbf{\Gamma}(z)$ függvényegyenlet.

→ **15.13. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy $\mathbf{\Gamma}(1/2) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ és $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$.

→ **15.14. Feladat [10].** Ha P, Q polinomok, $\deg P + 2 \le \deg Q$, mutassuk meg, hogy

(1) ha Q-nak nincs valós zérushelye, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\Im(z)>0} \operatorname{Res}(z, P/Q);$$

(2) ha Q-nak nincs nemnegatív valós zérushelye, akkor

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -i \sum_{z\ne 0} \operatorname{Res}(z, f),$$

ahol

$$f(z) = \log(-z)\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

→ **15.15. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy ha $m < n$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}-1}{x^{2n}-1}\,dx = \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} - \operatorname{ctg}\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right).$$

→ **15.16. Feladat [11].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

(2) $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1};$$

(3) $$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m_1} - x^{2m_2}}{x^{2n}-1}\,dx, \qquad m_1, m_2 < n;$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,dx, \qquad m<n.$$

15.17. Feladat [10]. Az $-R$, R, $\pi i+R$, $\pi i-R$ csúcsú téglalap körül integrálva, majd $R\to\infty$-t véve, mutassuk meg, hogy

(1) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad \text{ha} \quad 0<\alpha<1;$$

(2) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t}}{1-e^t}\,dt=\pi(\operatorname{ctg}\pi\alpha_1-\operatorname{ctg}\pi\alpha_2),$$

ha $0<\alpha_1,\alpha_2<1$.

15.18. Feladat [12]. Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx, \qquad 0<\alpha<1;$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx;$$

(3) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\sin bx}{x^2}\,dx, \qquad a,b\in\mathbb{R};$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx;$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx, \qquad a>0;$$

(6) $$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos ax\,dx, \qquad a>0.$$

$*$ **15.19. Feladat [10].** Bizonyítsuk be a gamma-függvény alábbi *Gauss-féle előállítás*át:

$$\mathbf{\Gamma}(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad \text{ha} \quad z\in\mathbb{C}$$

(itt $1/0=\infty$).

Megoldás. Lásd Petruska [127], 9.6, vagy Szőkefalvi-Nagy [165].

∗ **15.20. Feladat [8].** Bizonyítsuk be a *Wallis-formulát*:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Megoldás. Használjuk $\boldsymbol{\Gamma}(1/2)$ Gauss-előállítását, lásd Frank–Mises [43].

∗ **15.21. Feladat [10].** Bizonyítsuk be a gamma-függvény alábbi *Weierstrass–féle szorzat előállítását*:

$$\frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right), \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C},$$

ahol γ az Euler-konstans (itt $1/\infty = 0$). (Lásd Petruska [127], 9.3, vagy Szőkefalvi-Nagy [165].)

∗ **15.22. Feladat [10].** Bizonyítsuk be a szinusz függvény alábbi *Euler-féle szorzat előállítását*:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}.$$

(Lásd Petruska [127], 9.7, vagy Szőkefalvi-Nagy [165].)

∗ **15.23. Feladat [9].** Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$\frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}(z)\boldsymbol{\Gamma}(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}$$

(itt $1/\infty = 0$). (Lásd Petruska [127], 9.8, vagy Szőkefalvi-Nagy [165].)

∗ **15.24. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ és $\boldsymbol{\Gamma}''(x)$ a számegyenesen mindenhol egyező előjelűek, így ha egy intervallumon $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ pozitív, akkor ott konvex, ha pedig negatív, akkor ott konkáv.

Megoldás. A szorzat-előállítás logaritmusát kétszer differenciáljuk, lásd Petruska [127], 9.9.

15.25. Feladat: $\boldsymbol{\beta}$-integrál [11]. Mutassuk meg, hogy a $p > 0$, $q > 0$ értékekre értelmezett kétparaméteres

$$\boldsymbol{\beta}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

β-integrál értéke $\boldsymbol{\Gamma}(p)\boldsymbol{\Gamma}(q)/\boldsymbol{\Gamma}(p+q)$. Határozzuk meg ennek alapján az

$$\int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

integrálok értékét.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-(\cos\varphi+\sin\varphi)r} r^{p+q-1} \cos^{p-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi\, d\varphi\, dr \\ &= \mathbf{\Gamma}(p+q) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{p-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{p+q}}\, d\varphi,\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon szereplő integrálból $\operatorname{tg}\varphi = 1/x - 1$ helyettesítéssel $\beta(p,q)$ adódik.

15.26. Feladat [12]. Mutassuk meg, hogy a Hausdorff-mérték definíciójánál használt jelölésekkel $\mathbb{R}^m$-ben $\lambda^m(\mathbb{B}_1(0)) = \boldsymbol{\alpha}(m) \to 0$, ha $m \to \infty$.

15.27. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}\, dx = \zeta(z)\mathbf{\Gamma}(z),$$

ha $\mathfrak{R}(z) > 1$.

$*$ **15.28. Elliptikus integrálok és elliptikus függvények.** A fizikában gyakran lépnek fel $\int R(z, \sqrt{P(z)})\, dz$ típusú, úgynevezett *elliptikus integrál*ok, ahol R racionális törtfüggvény, azaz két kétváltozós polinom hányadosa, P pedig polinom. A név onnan ered, hogy ellipszisív hosszának meghatározásakor is ilyen integrált kapunk. Ha P első, vagy másodfokú, akkor alkalmas helyettesítésekkel a primitív függvény megkapható. Ha P harmad- vagy negyedfokú, akkor néhány elliptikus alapintegrálra vezethető vissza az összes eset, és ezek vizsgálata olyan komplex függvényekhez vezet, amelyek két komplex szám szerint is periodikusak. Az ilyen függvényeket nevezik *elliptikus függvény*eknek. A kérdéskörnek kiterjedt irodalma van, a legfontosabb tényeket illetően lásd Frank–Mises [43], I., 206. o.

V. Fourier-elmélet

Isten volt az első, aki Fourier-analízist művelt, amikor a fülünkbe beépített egy Fourier-analizátort.

William R. Wade (1985)

Daniel Bernoulli 1750-ben azt találta, hogy egy egységnyi hosszúságú húr rezgését – megfelelő időegység választása esetén – egy

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)\cos(k\pi(t-b_k))$$

függvény írja le. A kor vezető matematikusai – Euler, d'Alembert és mások – számára ellentmondásnak tűnt, hogy egy ilyen, analitikus függvényekből álló sor a $t=0$ időpontban egy „tetszőleges" kezdőfeltételnek megfelelhet. Az általános vélemény csak akkor kezdett változni, amikor Fourier a „változók szétválasztásának" általa feltalált módszerével 1807-től kezdve számos problémát oldott meg hasonló módon. Például a hővezetés $u_t - u_{xx} = 0$ egyenletének megoldásait a

$$-\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(1) = 0$$

sajátérték-feladat $\sin k\pi x$, $k \in \mathbb{N}$ megoldásai segítségével felírt sor alakjában állította elő. Ezzel a differenciáloperátorok sajátfüggvényei szerinti sorfejtés, a „spektrálanalízis" bevonult a matematika és fizika eszköztárába, bár rengeteg kérdés tisztázásra várt. Az egyik legfontosabb az volt, hogy a Fourier módszereivel kapott sor konvergens-e? Más szóval, a Fourier-együtthatók ismeretében hogyan rekonstruálható a függvény? Ezt a problémát „spektrálszintézisnek" nevezhetjük. Például egy kristály három irányban periodikus elektroneloszlása hogyan rekonstruálható a Fourier-sorfejtés együtthatóinak ismeretében? Bár a klasszikus Fourier-sorfejtések legegyszerűbb – és legfontosabb – esetére szakaszonként monoton és folytonos függvényeknél már Dirichlet bebizonyította a pontonkénti konvergenciát, a problémakör máig élő, például a négyzetesen integrálható függvények klasszikus Fourier-sorának majdnem mindenütti konvergenciáját csak 1966-ban bizonyította be Carleson. Nem minden folytonos függvény klasszikus Fourier-sora konvergál pontonként. Fejér Lipót eredménye, hogy a részletösszegek számtani közepei viszont folytonos függvények esetén mindig egyenletesen konvergensek, az összegzési eljárások felé fordította a figyelmet.

Természetesen sok más differenciáloperátor vizsgálatánál is hasznosak a különböző sajátfüggvények – ortogonális polinomok, Bessel-függvények, gömbfüggvények, stb. – szerinti sorfejtések. Az ortogonális sorfejtések és a spektrálelmélet Fourier által elindított vizsgálata Neumann János munkája nyomán találkozott újra a Hilbert-terek elméletében, és nyerte el mai alakját.

A trigonometrikus sorfejtésekhez vezető $-d^2/dx^2$ differenciáloperátor a kvantumelméletben is felbukkanó $i\,d/dx$ differenciáloperátor „négyzete". Ha az egész számegyenesen tekintjük az utóbbi operátort, akkor a spektruma folytonos, a képzetes tengely, de a megfelelő $x \mapsto e^{2\pi itx}$ „sajátfüggvények"nem négyzetesen integrálhatóak. Ha mégis képezzük az

$$\hat{f}(t) \sim \int f(x)e^{-2\pi itx}\,dx$$

értékeket, a Fourier-transzformálthoz jutunk, ez felel meg a „*spektrálanalízis*nek", a „*spektrálszintézis*nek" pedig az

$$f(x) \sim \int \hat{f}(t)e^{2\pi itx}\,dt$$

inverz transzformáció. A folytonos spektrum a konvergenciavizsgálatokat nehezebbé teszi. Laplace a komplex függvénytan módszereit alkalmazta $\hat{f}$ vizsgálatára, annak értelmezését kiterjesztve komplex számokra is.

A klasszikus Fourier-sorok és a Fourier-transzformált ma a lokálisan kompakt csoportokon űzhető harmónikus analízis két speciális esete. Az $x \mapsto e^{2\pi itx}$ függvények szerepét az irreducibilis reprezentációk veszik át. A digitális technika és a numerikus módszerek fejlődése lehetővé teszi több ezer Fourier-együttható „real time" számítását nagy pontossággal (Lord Kelvin a múlt században még az első hét Fourier-együttható közelítésére konstruált több méteres mechanikus szerkezetet!)

Itt csak a klasszikus Fourier-sorok konvergenciájára és összegzésére vonatkozó legalapvetőbb tételek szerepelnek. Az ortogonális polinomok tulajdonságait és konvergenciáját olyan feltételek mellett vizsgáljuk, amelyek a legfontosabb ortogonális polinomrendszerek esetén teljesülnek. Sok speciális, egy-egy ortogonális polinomrendszerre vonatkozó eredményt egy táblázatba sűrítettem. Kiegészítésként szerepelnek a legfontosabb, approximációval kapcsolatos eredmények is, a numerikus analízis szemszögéből tárgyalva.

16
Klasszikus Fourier-sorok

A trigonometrikus sorok elméletének kiinduló pontjául egy mechanikai probléma körül kialakult vita tekinthető, amely a XVII. század közepén D'Alembert, Euler és Daniel Bernoulli között folyt le. Ez a probléma a rezgő húr problémája *volt: a két végén kifeszített, l hosszúságú homogén rezgő húr alakjának meghatározása egy tetszés szerinti t időpontban, feltételezve, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez. ... Bernoulli arra a következtetésre jutott, hogy a*

$$\sum_n a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\beta_n)$$

összegfüggvények szolgáltatják a rezgésprobléma általános megoldását. Bár az összegfüggvényről csak véges sok tag esetén evidens, hogy az $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ differenciálegyenlet megoldása, az akkori közfelfogás szerint nem kételkedett abban, hogy végtelen sok tag esetén is hasonló a helyzet. Euler kétségbevonta Bernoulli állítását. Ellentmondást látott ugyanis abban, hogy a $t = 0$ kezdeti pillanatban a megoldás szerint a húr alakját a

$$\sum_n \Big(a_n \cos\frac{n\pi a}{l}\beta_n\Big)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

trigonometrikus sor adja meg, holott a húr kezdeti alakja nem csak „functio continua", hanem például törtvonal-alak is lehet. Márpedig az Euler előtt lehetetlennek látszott, hogy egy ilyen „tetszőleges", „mechanikai" görbe, amelynek egyes darabjai között semmi szerves kapcsolat sincs, egész menetében ugyanazzal a trigonometrikus sorral legyen kifejezhető. ... Új lendületet kapott a probléma Fourier-nak a hővezetés elméletével foglalkozó, 1807-től kezdve közölt dolgozatai révén, amelyeket a szerző 1822-ben megjelent „Théorie analytique de la chaleur" című híres műve foglalt össze. E dolgozatokban újra felmerül tetszőleges függvények trigonometrikus sorokkal való előállításának kérdése; Fourier – hasonlóképpen mint Bernoulli – azt állítja, hogy ilyen előállítás lehetséges. ... Fourier eredményei, melyeket e feltevés alapján nyert, olyan nagyszámúak, jelentősek, és a tapasztalattal egyezőek voltak, hogy – félretéve Euler, D'Alembert és Lagrange ellenvéleményét – a század legkiválóbb matematikusai most már nem a feltevés elvetésére, hanem bizonyítására feszítették meg erejüket.

Szőkefalvi-Nagy Béla (1951)

16.1. Definíció. Tekintsük a $]0,1[$ intervallumot a Lebesgue-mértékkel. A megfelelő komplex $\mathbb{L}^2$-térben az

$$x \mapsto e^{2\pi i k x}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvények ortonormált rendszert alkotnak. Meg fogjuk mutatni, hogy ez a rendszer teljes. Egy $]0,1[$-en négyzetesen integrálható függvény *klasszikus Fourier-sor*a az

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$$

sor, ahol

$$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Részletösszegekre bevezetve az

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx}$$

jelölést, a Hilbert-tereknél tanultakból azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \big|f(x) - s_n(x)\big|^2\,dx \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A Parseval-egyenlőség megfelelője

$$\int_0^1 \big|f(x)\big|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Vegyük észre, hogy az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ függvények korlátossága miatt a c_k együtthatók és az s_n részletösszegek akkor is képezhetők, ha f csak integrálható és $|c_k| \le \|f\|_1$. Mertens tételéből, vagy a Riemann–Lebesgue-lemmából következik, hogy $c_k \to 0$, ha $|k| \to \infty$. Mivel az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ függvények 1 szerint periodikusak, a $]0,1[$ helyett bármilyen más, 1 hosszúságú intervallumot is használhatunk. Legcélszerűbb lesz olyan f függvényt tekinteni, amely 1 szerint periodikus, és $]0,1[$-en integrálható. A továbbiakban ilyen feltételek mellett fogjuk vizsgálni f klasszikus Fourier-sorát.

Ha az f függvény $2l$ szerint periodikus ($l > 0$), akkor az $x \mapsto e^{\pi ikx/l}$ teljes ortogonális, de nem feltétlenül normált függvényrendszert tekinthetjük, a Fourier-sort

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\pi ikx/l}$$

alakban írhatjuk

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\pi ikx/l}\,dx$$

együtthatókkal, és

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\pi ikx/l}$$

részletösszegekkel. Szokás az Euler-féle összefüggéssel trigonometrikus alakra áttérni:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\Big),$$
$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\Big),$$

ahol $a_0 = 2c_0$ és $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = ic_k - ic_{-k}$, ha $k > 0$. Az a_k, b_k együtthatók közvetlenül is kifejezhetők integrálokkal:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

A Parseval-egyenlőség megfelelője

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Ennek az alaknak az előnye, hogy világosan mutatja, ha f valós értékű függvény, akkor az s_n részletösszegek is valósak, ha f páros függvény, akkor a b_k, ha pedig páratlan függvény, akkor az a_k együtthatók mind nullák. A komplex alak előnye, hogy egyszerűbb, jobban mutatja a Fourier-transzformációval való kapcsolatot, és az általánosítási lehetőségeket. Ezért általában a komplex alakot fogjuk használni.

Megjegyezzük, hogy szoros kapcsolat van a klasszikus Fourier-sor komplex alakja, és a komplex függvénytanból ismert Laurent-sor között is. Tekintsünk ugyanis egy olyan komplex változós komplex értékű f függvényt, amely a $\gamma(t) = e^{2\pi it}$, $0 \le t \le 1$ görbe értékkészletét, a komplex egységkört tartalmazó nyílt halmazon holomorf. Ekkor az egységkör egy környezetében érvényes az

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

Laurent-sorfejtés, ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)z^{-k-1}\,dz = \int_0^1 f(e^{2\pi it})e^{-2\pi ikt}\,dt.$$

Az f függvény Laurent-sora tehát a $t \mapsto f(e^{2\pi it})$ periodikus függvény Fourier-sorának felel meg.

$*$ **16.2. Megjegyzés.** A Fourier-sor komplex alakja nem csak egyszerűbb, hanem jobban mutatja az általánosítási lehetőségeket is: $[0, 1[$ az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ faktorcsoporttal azonosítható, az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ leképezések a faktorcsoport folytonos homomorfizmusai a $\mathbb{T}$ komplex egységkörbe, a faktorcsoport úgynevezett karakterei. A klasszikus Fourier-sorok elméletének számos eredménye átvihető lokálisan kompakt Abel-csoportokra, illetve kompakt csoportokra. A megfelelő mérték, ami szerint az $\mathbb{L}^2$ teret vesszük, a Haar-mérték. Az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ függvények szerepét a csoport $\mathbb{T}$-be való folytonos homomorfizmusai, illetve az irreducibilis reprezentációk veszik át. Az általános elmélet részletes tárgyalása megtalálható a Hewitt–Ross [65] monográfiában.

16.3. Tétel. *Ha az f, illetve f^* függvények 1 szerint periodikusak, a $]0,1[$-en integrálhatóak, Fourier-együtthatóik c_k illetve c_k^*, és $c \in \mathbb{C}$, akkor*

(1) *a cf függvény Fourier-együtthatói cc_k;*

(2) *az $f + f^*$ függvény Fourier-együtthatói $c_k + c_k^*$;*

(3) *ha $f^* = \overline{f}$, akkor $c_k^* = \overline{c_{-k}}$;*

(4) *ha $f(x+\alpha) = f^*(x)$, akkor $c_k^* = c_k e^{2\pi i k\alpha}$;*

(5) *ha $f^*(x) = \int_0^x f$, akkor $2\pi i k c_k^* = c_k - c_0$.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

16.4. Következmény. *Ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor Fourier-sora egyenletesen konvergál.*

Bizonyítás. Legyenek f, f', f'' Fourier-együtthatói rendre c_k, c_k', c_k''. Mivel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k''|^2 \le \int_0^1 |f''|^2 < \infty,$$

a c_k'' számok abszolút értéke valamely K korlát alatt marad. Mivel

$$c_k' = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$$

és

$$c_k = \frac{c_k'}{2\pi i k} = \frac{c_k'' - c_0''}{-4\pi^2 k^2},$$

ha $k \neq 0$, azt kapjuk, hogy $|c_k e^{2\pi i k x}| \le 2K/(4\pi^2 k^2)$, ha $k \neq 0$, így a Weierstrass-kritérium alkalmazható.

16.5. Tétel. *Ha $c_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{Z})$ és az $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k x}$ függvénysor $\mathbb{L}^1[0,1]$-ben konvergál egy f függvényhez, akkor a c_k számok az f klasszikus Fourier-együtthatói.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $j \in \mathbb{Z}$-t, és vegyük észre, hogy az

$$x \mapsto (f(x) - s_n(x))e^{-2\pi i j x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

függvénysorozat nullához konvergál $\mathbb{L}^1$-ben. Mivel

$$\int_0^1 s_n(x) e^{-2\pi i j x}\, dx = c_j, \quad \text{ha} \quad n \ge |j|,$$

kapjuk az állítást.

16.6. Dirichlet-formula. *Legyen f komplex értékű, 1 szerint periodikus, $]0,1[$-en integrálható függvény. Ekkor*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k t}$$

jelöléssel

$$s_n(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)\,dt$$

és

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))D_n(t)\,dt,$$

továbbá a D_n Dirichlet-féle magfüggvényre

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}, \quad \text{ha} \quad \sin \pi t \neq 0.$$

Bizonyítás. D_n másik alakja a

$$\begin{aligned} D_n(t)\sin \pi t &= \sin \pi t \left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos 2\pi k t\right) \\ &= \sin \pi t + \sum_{k=1}^{n} (\sin(2k+1)\pi t - \sin(2k-1)\pi t) = \sin(2n+1)\pi t \end{aligned}$$

összefüggésből kapható.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(t) e^{2\pi i k(x-t)}\,dt = \int_0^1 f(t) D_n(x-t)\,dt \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+u) D_n(u)\,du = \int_0^1 f(x+u) D_n(u)\,du \\ &= \int_0^{1/2} f(x+u) D_n(u)\,du + \int_{1/2}^1 f(x+u) D_n(u)\,du \\ &= \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

Tagonkénti integrálással

$$\int_0^{1/2} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2},$$

így

$$f(x) = \int_0^{1/2} 2f(x) D_n(t)\,dt,$$

amiből

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) D_n(t)\,dt.$$

16.7. Dini-kritérium. *16.1 feltételei mellett, ha* $x \in \mathbb{R}$ *és a*

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$$

függvény a $t = 0$ *pont egy környezetében integrálható, akkor* $s_n(x) \to f(x)$*, amint* $n \to \infty$*.*

Bizonyítás.

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \frac{t}{\sin \pi t} \sin(2n+1)\pi t \, dt,$$

és a szorzat első tényezője integrálható, a második korlátos, tehát az első két tényező szorzata is integrálható. A $[0, 1/2]$ intervallumon kívül nullát integrálva, mivel a sin függvény kifejezhető a komplex exponenciális függvénnyel, alkalmazhatjuk Riemann–Lebesgue-lemmát. Másik lehetőség, hogy felhasználjuk a $\sin(2n+1)\pi t = \sin 2n\pi t \cos \pi t + \cos 2n\pi t \sin \pi t$ összefüggést és Mertens tételét alkalmazzuk.

16.8. Következmény: Lipschitz-kritérium. *Ha van olyan $c \in \mathbb{R}$ és $0 < \alpha \leq 1$, hogy $t = 0$ valamely környezetében*

$$\big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| \leq c|t|^\alpha,$$

akkor $s_n(x) \to f(x)$.

Bizonyítás. $c|t|^{\alpha-1}$ integrálható.

16.9. Következmény. *Ha léteznek és végesek az $f(x+)$ és $f(x-)$ jobb és bal oldali határértékek továbbá léteznek és végesek a*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \quad \lim_{t \uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-)}{t}$$

határértékek, azaz léteznek a jobb és bal oldali félérintők, akkor

$$s_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálisan, ha létezik $f'(x)$, akkor $s_n(x) \to f(x)$.

Bizonyítás. Legyen

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

ekkor $t = 0$ egy környezetében

$$\big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| \leq c|t|.$$

16.10. Következmény: Riemann-féle lokalizációs tétel. *Ha az f és f^* függvények 1 szerint periodikusak, $]0, 1[$-en integrálhatóak, és az x pont egy környezetében megegyeznek, s_n illetve s_n^* pedig Fourier-soraik részletösszegei, akkor $s_n(x) - s_n^*(x) \to 0$, amint $n \to \infty$.*

Bizonyítás. $f - f^* = 0$ az x egy környezetében.

16.11. Megjegyzés. A lokalizációs tétel egy erősebb változata azt állítja, hogy ha az x pont egy nyílt környezetében az f és f^* függvények megegyeznek, akkor ennek minden zárt részintervallumán $s_n - s_n^*$ egyenletesen tart nullához. A bizonyítás megtalálható Szőkefalvi-Nagy [164] könyvében, 325. o.

∗ **16.12. Marczinkiewicz tétele.** *A 16.1 definíció feltételei mellett, tegyük fel, hogy az*

$$\omega_1(f,t) = \int_0^1 \big|f(x+t) - f(x)\big|\,dx$$

jelöléssel

$$\int_0^{1/2} \frac{\omega_1(f,t)}{t}\,dt < \infty.$$

Ekkor $s_n(x) \to f(x)$ majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Legyen

$$I(x) = \int_0^{1/2} \frac{\big|f(x+t) - f(x)\big|}{t}\,dt \geq 0.$$

Fubini tétele szerint

$$\begin{aligned}\int_0^1 I(x)\,dx &= \int_0^{1/2}\int_0^1 \big|f(x+t) - f(x)\big|\,dx\,\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{1/2} \frac{\omega_1(f,t)}{t}\,dt < \infty.\end{aligned}$$

Innen $I(x) < \infty$ majdnem mindenütt a $[0,1]$-en, és így

$$\int_0^{1/2} \frac{\big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|}{t}\,dt < \infty$$

majdnem minden $x \in [0,1]$-re, azaz Dini tétele majdnem minden $x \in [0,1]$-re alkalmazható.

16.13. Dirichlet-tétel. *A 16.1 definíció feltételei mellett, ha az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon f korlátos változású, akkor minden $x \in]a,b[$-re*

$$s_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

ahol $f(x+)$ és $f(x-)$ a jobb és bal oldali határértékek x-ben. Ha f folytonos is, akkor minden $[c,d] \subset]a,b[$ intervallumon a konvergencia egyenletes.

Bizonyítás. Megtalálható Szőkefalvi-Nagy [164] könyvében, 329. o.

∗ **16.14. Lemma.** *A 16.1 definíció feltételei mellett,*

$$s_n(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t))\frac{\sin 2n\pi t}{t}\,dt \to 0,$$

amint $n \to \infty$.

Bizonyítás. A különbség

$$\int_0^{1/2} (f(x+t)+f(x-t))\left(\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} - \frac{\sin 2n\pi t}{\pi t}\right) dt$$
$$= \int_0^{1/2} (f(x+t)+f(x-t)) \sin 2n\pi t \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \pi t} - \frac{1}{\pi t}\right) dt$$
$$+ \int_0^{1/2} (f(x+t)+f(x-t)) \cos 2n\pi t \, dt \to 0$$

Mertens tétele vagy a Riemann–Lebesgue-lemma miatt, mivel $1/\operatorname{tg}(\pi t) - 1/(\pi t)$ korlátos.

∗ **16.15. Példa folytonos függvényre, amelynek a Fourier-sora divergens.** A Banach–Steinhaus-tétel felhasználásával megmutattuk, hogy van olyan 1 szerint periodikus, folytonos függvény, amelynek a Fourier-sora a nullában divergens. Most ismertetjük Lebesgue konstrukcióját ilyen függvényre. Egy másik, Fejér Lipóttól származó konstrukció található Szőkefalvi-Nagy [164] könyvében, 334. o.

Példánk páratlan függvény lesz, így elég a $]0, 1/2]$ intervallumon definiálni. Itt

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(2\pi n_k t) \xi_{I_k}(t)$$

alakú lesz, ahol $0 < c_k \le 1$, $c_k \to 0$, az N_k számok egészek, $n_0 = 2$, $n_k = N_k n_{k-1}$ és ξ_{I_k} az I_k intervallum karakterisztikus függvénye, ahol $I_k = [1/n_k, 1/n_{k-1}]$. Azt várjuk, hogy $s_{n_k}(0)$-hoz a fő hozzájárulás a

$$c_k \sin(2\pi n_k t) \xi_{I_k}(t)$$

tagból adódik. Legyen $c_1 = 1$ és $N_1 = 2$. A további c_k, N_k számokat teljes indukcióval fogjuk definiálni. Ha a c_j, N_j, $j < k$ számokat már definiáltuk, legyen

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(2\pi n_j t) \xi_{I_j}(t), & \text{ha } x \in [1/n_{k-1}, 1/2], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $\varphi_k(t)/t$ korlátos, Mertens tétele vagy a Riemann–Lebesgue-lemma szerint

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} \frac{\varphi_k(t)}{t} \sin 2\pi n t \, dt \to 0.$$

Válasszuk úgy a N_k számot, hogy $N_k \ge 2^k$ és

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{\varphi_k(t)}{t} \sin 2\pi n_k t \, dt \right| < 1$$

teljesüljön. Most alkalmasan megválasztjuk $0 < c_k < 1$-et. Az előző lemma szerint az $s_{n_k}(0)$ részletösszegek becsléséhez a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{f(t)}{t} \sin 2\pi n_k t \, dt$$

integrált kell megbecsülni. A $[0,1/2]$ intervallumot három részre osztva, három integrált kapunk. A $[0,1/n_k]$ szakaszon, mivel minden c_k legfeljebb 1, az integrál abszolút értékben legfeljebb $(2/\pi)\int_0^1 |\sin 2\pi t|/t\,dt$, egy konstans. Az N_k választása miatt az $[1/n_{k-1},1/2]$ szakaszon az integrál abszolút értékben legfeljebb 1. Az $[1/n_k,1/n_{k-1}]$ szakaszon az integrál

$$\frac{2c_k}{\pi}\int_{I_k}\frac{\sin^2 2\pi n_k t}{t}\,dt=\frac{c_k}{\pi}\int_{I_k}\frac{1-\cos 4\pi n_k t}{t}\,dt$$
$$\frac{c_k}{\pi}\int_{I_k}\frac{1}{t}\,dt-\frac{c_k}{\pi}\int_{I_k}\frac{\cos 4\pi n_k t}{t}\,dt.$$

Ha $0<\alpha<1$ rögzített és $c_k=(\ln N_k)^{-\alpha}$ együtthatót választunk, akkor $c_k\to 0$, az első integrál $(1/\pi)(\ln N_k)^{(1-\alpha)}\to\infty$, a második integrálra pedig parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\left|\int_{I_k}\frac{\cos 4\pi n_k t}{t}\,dt\right|\le\left|\int_{I_k}\frac{\sin 4\pi n_k t}{4\pi n_k t^2}\,dt\right|\le\frac{1}{4\pi n_k}\int_{1/n_k}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{4\pi},$$

tehát korlátos. Összegyűjtve a becsléseket, és felhasználva az előző lemmát, kapjuk, hogy $s_{n_k}(0)$ nem korlátos.

∗ **16.16. Steinhaus példája.** H. Steinhaus példát adott olyan 1 szerint periodikus folytonos függvényre, amelynek klasszikus Fourier-sora mindenütt konvergens, de a konvergencia egyetlen részintervallumon sem egyenletes.

16.17. Kolmogorov példája. A. N. Kolmogorov példát adott olyan 1 szerint periodikus, $[0,1]$-en integrálható függvényre, amelynek Fourier-sora mindenütt divergens.

16.18. Carleson tétele. 1966-ban Carleson bebizonyította Luzin egy igen régi sejtését: ha f egy 1 szerint periodikus, a $[0,1]$-en négyzetesen integrálható függvény, akkor a klasszikus Fourier-sor majdnem mindenütt konvergens. Nem sokkal később, 1968-ban Hunt kiterjesztette Carleson eredményét minden $f\in\mathbb{L}^p[0,1]$, $p>1$-re. Ezen eredmények bizonyítása messze meghaladja egy tankönyv lehetőségeit.

16.19. Fejér-féle közepek. *A Dirichlet-formula tárgyalásánál használt feltételek mellett, a*

$$\sigma_n(x)=\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}$$

Fejér-féle közepek*re, bevezetve a*

$$K_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)$$

Fejér-féle magfüggvény*t,*

$$\sigma_n(x)=\int_0^{1/2}(f(x+t)+f(x-t))K_n(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))K_n(t)\,dt, \tag{2}$$

továbbá

$$K_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)\pi t}{(n+1)\sin^2 \pi t} \geq 0, \quad \textit{ha} \quad \sin \pi t \neq 0. \tag{3}$$

Fejér Lipót fontos észrevétele volt, hogy a Fourier-sorok részletösszegeinek számtani közepei sokkal jobban viselkednek, mint a részletöszegek. A részletösszegekről azok számtani közepeire való áttérés nyilván a Cesaro-limitálásnak felel meg.

Bizonyítás. Az $s_k(x)$-et felírva a Dirichlet-formula segítségével, és összegezve, kapjuk (1)-et. (2) abból következik, hogy – a Dirichlet-féle magfüggvény hasonló tulajdonsága miatt –

$$\int_0^{1/2} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Végül a (3)-ban szereplő zárt alak a

$$\begin{aligned} 2K_n(t)(n+1)\sin^2 \pi t &= \sum_{k=0}^{n} 2D_k(t)\sin^2 \pi t \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin(2k+1)\pi t \sin \pi t \\ &= -\sum_{k=0}^{n} (\cos 2k\pi t - \cos(2k+2)\pi t) \\ &= 1 - \cos(2n+2)\pi t = 2\sin^2(n+1)\pi t \end{aligned}$$

összefüggésből adódik.

16.20. Fejér tétele. *Az előző pont feltételei mellett, ha egy $x \in \mathbb{R}$ pontban léteznek és végesek az $f(x+)$ és $f(x-)$ jobb és bal oldali határértékek, akkor*

$$\sigma_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad \textit{amint} \quad n \to \infty.$$

Ha az f függvény az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos, akkor ezen az intervallumon σ_n egyenletesen konvergál f-hez.

Bizonyítás. A bizonyítás azon múlik, hogy a Fejér-féle magfüggvény nemnegatív. Először is vegyük észre, hogy ha $\big|f(x)\big| \leq M$, akkor

$$\begin{aligned} &\int_0^{1/2} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|\,dt \\ &\quad \leq \big|f(x)\big| + \int_0^{1/2} \big|f(x+t)\big|\,dt + \int_0^{1/2} \big|f(x-t)\big|\,dt \\ &\quad \leq M + \int_{-1/2}^{1/2} \big|f(u)\big|\,du = M + \|f\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Az első állítás abból következik, hogy

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

feltételezéssel, alkalmas $\delta > 0$-ra,

$$\begin{aligned}
\big|\sigma_n(x) - f(x)\big| &\le \left| \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) K_n(t)\, dt \right| \\
&\quad + \left| \int_\delta^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) K_n(t)\, dt \right| \\
&\le \varepsilon \int_0^\delta K_n(t)\, dt \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^{1/2} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|\, dt \\
&\le \varepsilon \int_0^{1/2} K_n(t)\, dt + \frac{M + \|f\|_1}{(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ha n elég nagy. A második állításhoz vegyük észre, hogy alkalmas M-re és $\delta > 0$-ra minden $x \in [a,b]$-re $\big|f(x)\big| \le M$ és $|t| \le \delta$ esetén

$$\big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| \le \varepsilon,$$

így itt is a fenti becslés használható.

∗ **16.21. Megjegyzés.** A bizonyítás elemzésével azt is beláthatjuk, hogy ha f valós értékű, $m \le f(x) \le M$ az $]a,b[$-n, akkor minden $\delta > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n \ge N$, akkor $m - \delta \le \sigma_n(x) \le M + \delta$ minden $x \in [a+\delta, b-\delta]$-ra.

∗ **16.22. Megjegyzés.** Fejér tételéből azonnal adódik Weierstrass második approximációs tétele, mivel a σ_n Fejér-féle közepek trigonometrikus polinomok, és ha f folytonos, egyenletesen konvergálnak f-hez. Ebből viszont, felhasználva, hogy a kompakt tartójú folytonos függvények sűrűek $\mathbb{L}^p]0,1[$-ben, ha $1 \le p < \infty$, kapjuk, hogy a trigonometrikus polinomok sűrűek $\mathbb{L}^p]0,1[$-ben; speciálisan, a trigonometrikus rendszer teljes. A trigonometrikus polinomok és a polinomok közötti, a 5.86 pontban tanult összefüggést felhasználva Weierstrass első approximációs tételét Weierstrass második approximációs tételére vezethetjük vissza, és így annak is egy új bizonyítását kapjuk.

∗ **16.23. Következmény: Unicitási tétel.** *Ha $f \in \mathbb{L}^1[0,1]$ Fourier-együtthatói nullák, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.*

Az állítást azért nevezik unicitási tételnek, mert két függvény különbségére alkalmazva, azt kapjuk, hogy Fourier-együtthatóik csak akkor egyezhetnek meg, ha a két függvény majdnem mindenütt egyenlő.

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Ekkor F abszolút folytonos, és majdnem mindenütt f a deriváltja. Mivel $c_0 = 0$, F is 1 szerint periodikus. Alkalmas konstanst hozzáadva F-hez, elérhetjük, hogy F Fourier-együtthatói is mind nullák legyenek. Mivel a Fejér-féle közepek egyenletesen konvergálnak F-hez, $F \equiv 0$, így f majdnem mindenütt nulla.

16.24. Következmény. *A trigonometrikus rendszer teljes.*

Bizonyítás. Az előző következmény speciális esete. Egy másik lehetőség a bizonyítás befejezésére nem használja a Fejér-közepeket, csak azt, hogy a trigonometrikus rendszer zárt a folytonos függvények körében: F-re alkalmazva a Parseval-egyenlőséget, kapjuk, hogy $\|F\|_2 = 0$, amiből F folytonossága miatt $f \equiv 0$.

16.25. Megjegyzés. Az, hogy egy folytonos függvény klasszikus Fourier-sorára $\|f - s_n\|_2^2 = \int_0^1 |f - s_n|^2 \to 0$, vagyis a trigonometrikus rendszer zártsága a folytonos függvények belső szorzat terében, persze könnyen következik a Fejér-tételből, mert $\|f - s_n\|_2 \le \|f - \sigma_n\|_2 \to 0$. Az alábbiakban egy egyszerű bizonyítást adunk arra, hogy a trigonometrikus rendszer zárt a Riemann-integrálható függvények belső szorzat terében. Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy bármely, a $[0,1]$-en Riemann-integrálható f függvény tetszőlegesen megközelíthető az $x \mapsto e^{2\pi i k x}$, $k \in \mathbb{Z}$ függvények lineáris kombinációival, és ezt is elég valós értékű függvényekre belátni. Legyen $\varepsilon > 0$, legyen $K > 0$ az $|f|$ egy felső korlátja, és válasszunk olyan $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ beosztást, amelyre

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon^2}{8K},$$

ahol

$$M_j = \sup\{f(x) \colon x_{j-1} \le x \le x_j\}$$

és

$$m_j = \inf\{f(x) \colon x_{j-1} \le x \le x_j\}.$$

Legyen g olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, amelyre $g(x_j) = f(x_j)$, ha $j = 0, 1, \ldots, n$, és amely az $[x_{j-1}, x_j]$ szakaszon $f(x_{j-1})$ és $f(x_j)$ közötti értékeket vesz fel, például legyen

$$g(x) = f(x_{j-1}) + c_j \int_{x_{j-1}}^{x} (t - x_{j-1})^2 (t - x_j)^2 \, dt, \quad \text{ha } x_{j-1} \le x \le x_j,$$

alkalmas c_j-vel. Ekkor $|g| \le K$ és $\big|f(x) - g(x)\big| \le M_j - m_j$, ha $x_{j-1} \le x \le x_j$. Innen

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|^2 \, dx \le \int_0^1 2K \big|f(x) - g(x)\big| \, dx \\ &\le 2K \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

így $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$. Mivel a g függvény s_n Fourier-sora egyenletesen konvergál g-hez, elég nagy n-re $\|g - s_n\|_2 < \varepsilon/2$.

$*$ **16.26. Tétel.** *Legyen $1 \le p < \infty$ és $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy 1 szerint periodikus függvény, amelyre $f \in \mathbb{L}^p[0,1]$. Ekkor a Fejér-közepeknél bevezetett jelölésekkel* $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - f\|_p = 0$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\lim_{h\to 0}\int_0^1 \bigl|f(t+h)-f(t)\bigr|^p = 0$; valóban, ez teljesül, ha f kompakt tartójú folytonos függvény $\mathbb{L}^p]0,1[$-ben, ezek a függvények pedig sűrű halmazt alkotnak. Legyen most

$$\tilde{f}(t) = \left(\int_0^1 \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^p\,dx\right).$$

Nyilván $\tilde{f}$ periodikus 1 szerint. Másrészt

$$\int_0^1 \bigl|\tilde{f}(t)\bigr|\,dt = \int_0^1\int_0^1 \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^p\,dt\,dx = \int_0^1 \bigl\|f-f(x)\bigr\|_p^p\,dx.$$

Mivel $\|f-f(x)\|_p \le \|f\|_p + \bigl|f(x)\bigr|$, kapjuk, hogy

$$\bigl\|f-f(x)\bigr\|_p^p \le 2^p \max\Bigl\{\|f\|_p^p, \bigl|f(x)\bigr|^p\Bigr\} \le 2^p \max\Bigl(\|f\|_p^p + \bigl|f(x)\bigr|^p\Bigr),$$

így $\tilde{f}$ integrálható. Tudjuk, hogy $\tilde{f}$ folytonos a nullában, így Fejér tétele szerint $\lim_{n\to\infty}\tilde{\sigma}_n(0) = \tilde{f}(0) = 0$. Másrészt a Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva a $t\mapsto \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|K_n(t)^{1/p}$ és $t\mapsto K_n(t)^{1/q}$, $t\in[0,1]$ függvényekre

$$\begin{aligned}\bigl|\sigma_n(x)-f(x)\bigr| &= \left|\int_0^1 (f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt\right| \\ &\le \int_0^1 \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|K_n(t)\,dt \\ &\le \left(\int_0^1 K_n(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1 \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^p K_n(t)\,dt\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}\|\sigma_n - f\|_p^p &\le \int_0^1\int_0^1 \bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^p K_n(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^1 \tilde{f}(t)K_n(t)\,dt = \tilde{\sigma}_n(0),\end{aligned}$$

amiből $\|\sigma_n - f\|_p \to 0$.

∗ **16.27. Megjegyzés.** Ebből a tételből is következik az unicitási tétel: Ha $f\in\mathbb{L}^1[0,1]$ Fourier-együtthatói nullák, akkor $f=0$ majdnem mindenütt.

→ **16.28. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|$;

(2) $\sin^4 x$;

(3) $\operatorname{sgn}(\sin x)$;

(4) $\operatorname{sgn}(\cos x)$;

(5) $(1-a^2)/(1-2a\cos x+a^2)$, $|a|<1$;

(6) $(1-a\cos x)/(1-2a\cos x+a^2)$, $|a|<1$;

(7) $x-\lfloor x\rfloor$;

(8) $f(x)$ az x távolsága a legközelebbi egésztől;

(9) $\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor$;

(10) $\lfloor 4x\rfloor-3\lfloor 2x\rfloor+2\lfloor x\rfloor$;

(11) $x\mapsto\int_0^x \lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor\,dx$;

(12) $x\mapsto\int_0^x \lfloor 4x\rfloor-3\lfloor 2x\rfloor+2\lfloor x\rfloor\,dx$;

(13) $\ln\bigl|\sin(x/2)\bigr|$.

Mely pontokban konvergens a Fourier-sor, és mi az összege?

16.29. Feladat [8]. Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát $]-\pi,\pi[$-n:

(1) $\operatorname{sgn}(x)$;

(2) $|x|$;

(3) x;

(4) xe^{x^2};

(5) $\operatorname{sgn}(x)(\pi-|x|)$;

(6) x^2;

(7) $\operatorname{sgn}(x)\cos x$;

(8) $(1+\operatorname{sgn}(x))\sin x$;

(9) $\cos ax$;

(10) $\sin ax$.

Mely pontokban konvergens a Fourier-sor, és mi az összege?

16.30. Feladat [8]. Az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sora $]-\pi,\pi[$-n mely pontokban konvergens és mi az összege:

(1) $\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$;

(2) $\sin(1/x)$;

(3) $x\sin(1/x)$;

(4) $\sin(x)/x$.

16.31. Feladat [8]. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)^2$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)^4$;

(5) $\sum_{\text{lnko}(n,6)=1} 1/n^4$.

→ **16.32. Feladat [7].** Határozzuk meg az egyenáramú komponens és a harmadik felharmonikus amplitúdójának arányát egyutas egyenirányításnál.

→ **16.33. Feladat [7].** Szimmetrikus fűrészfog-feszültség integrálásával szinuszos jelalakot közelítünk. Határozzuk meg, hogy az alapharmonikus a teljes teljesítmény hanyadrészét képviseli.

16.34. Feladat [9]. Hogyan változik egy gitárhang felharmonikus tartalma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

16.35. Feladat [11]. Határozzuk meg az alábbi Fourier-sorok összegét:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1};$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1};$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n};$$

(5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

(Lásd Szőkefalvi-Nagy [164].)

16.36. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n$ részletösszegei egyenletesen korlátosak.

16.37. Feladat [8]. Bizonyítsuk be, hogy ha a b_n-ek egy $f \in \mathbb{L}^1[0, 2\pi]$ függvény Fourier-együtthatói, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)\, dx.$$

(Lásd Szőkefalvi-Nagy [164].)

16.38. Feladat [11]. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi trigonometrikus sorok mindenütt konvergensek, de nem Fourier-sorai egyetlen $f \in \mathbb{L}^1[-\pi, \pi]$ függvénynek sem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n \ln\ln n}.$$

(Lásd Szőkefalvi-Nagy [164].)

16.39. Feladat: Gibbs-féle jelenség [12]. Bizonyítsuk be, hogy az $x - \lfloor x \rfloor$ függvény Fourier-sorának részletösszegei a szakadás közelében mintegy 9% „túllövést" tartalmaznak, azaz ennyivel a függvény alá illetve fölé mennek. Igaz-e ez más szakadásos függvényekre? Van-e „túllövés" a Fejér-közepeknél?

Megoldás. A részletösszeg $1/2 + \sum_{k=1}^{n} \sin(2k\pi x)/(k\pi)$ alakú, ami $1/2 + x - \int_0^x D_n(t)\,dt$ alakban is írható, ha $0 \le x < 1$; valóban, a kettő deriváltja és az értéke a nullában megegyezik. Innen a részletösszeg és a függvény értékének különbsége $1/2 - \int_0^x D_n(t)\,dt$, ha $0 < x < 1$. Ennek lehetséges szélsőértékei az $x_k = k/(2n+1)$, $k = 1, 2, \dots, 2n$ helyeken vannak. A különbséget $1/2 - 1/\pi \int_0^{(2n+1)\pi x} \sin t/t\,dt + r_n(x)$ alakban írva azt kapjuk, hogy $r_n(x) = (1/\pi) \int_0^{(2n+1)\pi x} \sin t/t\,dt - \int_0^x D_n(t)\,dt = \int_0^x (\sin \pi t - \pi t) \sin(2n+1)\pi t/(\pi t \sin \pi t)\,dt$. Könnyű látni, hogy minden rögzített k-ra $r_n(x_k) \to 0$, és így például $k = 1$-re a különbség határértéke $1/2 - 1/\pi \int_0^{\pi} \sin t/t\,dt \approx 0{,}089$.

∗ **16.40. Feladat [15].** Figyeljük meg, hogy minél simább egy függvény, annál gyorsabban tartanak a Fourier-együtthatói nullához. Fogalmazzuk meg megfigyelésünket tétel formájában, és bizonyítsuk be.

∗ **16.41. Tétel.** *A $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$ trigonometrikus sor akkor és csak akkor egy folytonos függvény Fourier-sora, ha a számtani közepek*

$$\sigma_n(x) = \sum_{|k| \le n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e^{2\pi i k x}$$

sorozata egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Fejér tétele miatt elég megmutatni, hogy ha σ_n egyenletesen konvergens, akkor Fourier-sorból származik. Legyen f a σ_n határértéke. Vegyük észre, hogy f folytonos, és minden $n \ge |k|$-ra

$$\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k = \int_0^1 \sigma_n(t) e^{-2\pi i k t}\,dt.$$

Most $n \to \infty$ esetén a bal oldal tart c_k-hoz, a jobb oldal pedig az

$$\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t}\,dt$$

integrálhoz.

∗ **16.42. Megjegyzés.** Az $\mathbb{L}^p$-re, $1 \le p \le \infty$ vonatkozó analóg kérdéssel kapcsolatban, ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy 1 szerint periodikus függvény, amelyre $f \in \mathbb{L}^p[0,1]$, akkor a Fejér-féle közepekre $\|\sigma_n\|_p \le \|f\|_p$; ennek belátásához vegyük észre, hogy $\sigma_n(x) = \int_0^1 f(u) K_n(x-u)\,du$, és alkalmazzuk a $K(x,y) = K_n(x-y)$, ha $0 \le x, y \le 1$ magfüggvénnyel az 8.37 tételt. Megmutatjuk, hogy az így adódó szükséges feltétel, hogy a $\|\sigma_n\|_p$, $n = 0, 1, \dots$ sorozat korlátos, $1 < p \le \infty$ esetén elégséges is. A bizonyítás eszköze az alábbi tétel.

∗ **16.43. Gyenge konvergencia tétel.** *Legyen $1 < p \le \infty$, és f_n egy korlátos függvénysorozat $\mathbb{L}^p[0,1]$-ben M korláttal, $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$). Ekkor van olyan f_{n_k} részsorozat és $f \in \mathbb{L}^p[0,1]$, amelyre $\|f\|_p \le M$, hogy minden $g \in \mathbb{L}^q[0,1]$-ra*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Bizonyítás. Első lépésként azt bizonyítjuk, hogy van olyan n_k részsorozat, hogy minden racionális (vagy racionális valós és képzetes részű) együtthatós g trigonometrikus polinomra

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_{n_k}(t)g(t)\,dt \tag{1}$$

létezik. Ez abból következik, hogy ha $g_1, g_2, \dots$ az összes ilyen trigonometrikus polinomok felsorolása, akkor a $c_{n,m} = \int_0^1 f_n(t)g_m(t)\,dt$, $n = 1, 2, \dots$ számsorozat a Hölder-egyenlőtlenség szerint korlátos $M\|g_m\|_q$ korláttal. Alkalmazzuk ezekre a számsorozatokra a diagonális eljárást.

Második lépésként azt igazoljuk, hogy ha $L(g)$ az (1) határérték, akkor L kiterjeszthető az $\mathbb{L}^q[0,1]$ egy korlátos lineáris funkcionáljává (amit szintén L-el fogunk jelölni) és $\big|L(h)\big| \le M\|h\|_q$. Vegyük észre, hogy L additív, racionális-homogén és konjugálás-tartó, továbbá a Hölder-egyenlőtlenség szerint $\big|L(g)\big| \le M\|g\|_q$. Ebből következik, hogy egyértelműen kiterjeszthetjük $\mathbb{L}^q$-ra, a kiterjesztés lineáris lesz, és normája legfeljebb M.

A bizonyítás teljes lesz, ha megmutatjuk, hogy $\mathbb{L}^q$ minden L korlátos lineáris funkcionálja előállítható

$$L(h) = \int_0^1 h(t)f(t)\,dt$$

alakban valamely $f \in \mathbb{L}^p$-vel, továbbá $\|f\|_p = \|L\|$. Ez az úgynevezett *Riesz-féle reprezentációs tétel* $\mathbb{L}^q$ lineáris funkcionáljaira egy sokkal általánosabb, mértékterekre vonatkozó változat speciális esete: lásd a 5.32 feladatot. Itt csak a speciális esetet bizonyítjuk.

Tekintsük L-et a $\xi_{[0,x]}$, $x \in [0,1]$ karakterisztikus függvényeken, legyen $F(x) = L(\xi_{[0,x]})$. Megmutatjuk, hogy F abszolút folytonos $[0,1]$-en. Meg kell mutatnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $]a_j, b_j[$, $j = 1, 2, \dots, n$ diszjunkt intervallumok $[0,1]$-ben és $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$, akkor $\sum_{j=1}^n \big|F(b_j) - F(a_j)\big| < \varepsilon$. Legyen $\Phi(t) = \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(\overline{F}(b_j) - \overline{F}(a_j))\xi_{]a_j,b_j[}(t)$. Ekkor $\|\Phi\|_q^q = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j)$, továbbá

$$L(\Phi) = \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(\overline{F}(b_j) - \overline{F}(a_j))L(\xi_{]a_j,b_j[}) = \sum_{j=1}^n \big|F(b_j) - F(a_j)\big|.$$

Innen

$$\sum_{j=1}^n \big|F(b_j) - F(a_j)\big| \le M\left(\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)\right)^{1/q},$$

és $\delta = (\varepsilon/M)^q$ választás megfelelő. Legyen f a F deriváltja. Ekkor a Newton–Leibniz-formula szerint $L(\xi_{[0,x]}) = \int_0^1 \xi_{[0,x]}(t)f(t)\,dt$. Innen minden szakaszonként konstans h függvényre

$$L(h) = \int_0^1 h(t)f(t)\,dt. \tag{2}$$

Mivel $]0,1[$ egy kompakt halmazának a karakterisztikus függvénye előáll véges sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítése karakterisztikus függvényeként előálló függvények sorozatának majdnem mindenütti határértékeként, (2) kompakt halmazok karakterisztikus függvényeire is fennáll. Mivel $[0,1]$ egy mérhető részhalmazának a karakterisztikus függvénye előáll kompakt halmazok karakterisztikus függvényei monoton növekedő sorozatának a majdnem mindenütti határértékeként, (2) egyszerű mérhető függvényekre is fennáll. Végül, mivel minden korlátos mérhető függvény nála abszolút értékben nem nagyobb egyszerű mérhető függvények sorozatának a majdnem mindenütti határértéke, (2) akkor is fennáll, ha h korlátos mérhető függvény.

Most megmutatjuk, hogy ha minden h korlátos mérhető függvényre

$$\Big|\int_0^1 h(t)f(t)\,dt\Big| \le M\|h\|_q,$$

akkor $\|f\|_p \le M$. Elég a bizonyítás nemnegatív f-re elvégezni, mert h helyettesíthető $h\cdot\overline{\operatorname{sgn} f}$-al. Egy nemnegatív f-re viszont elég megmutatni, hogy ha minden nemnegatív h korlátos mérhető függvényre $\int_0^1 h(t)f(t)\,dt \le M\|h\|_q$, akkor $\|f\|_p \le M$, mert h helyettesíthető a $|h|$ függvénnyel. Az is feltehető, hogy f korlátos, mert ha valamely nemnegatív f-re az állítás nem teljesülne, akkor elég nagy n-re $f_n = \min\{f,n\}$-re sem. Végül feltehetjük, hogy f nem majdnem mindenütt nulla, mert egyébként az állítás triviális. Legyen $h = f^{p/q}$. Ekkor

$$\int_0^1 hf = \int_0^1 f^{1+p/q} = \int_0^1 f^p = \|f\|_p^p \le M\|f\|_p^{p/q},$$

mivel $\|h\|_q^q = \|f\|_p^p$. Innen $\|f\|_p^{p-p/q} = \|f\|_p \le M$.

Végül vegyük észre, hogy a Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy (2) jobb oldala minden $h \in \mathbb{L}^q$-ra értelmezett, korlátos, lineáris funkcionál, amely az eddig bizonyítottak szerint egy sűrű altéren megegyezik L-el, így mindenütt, valamint, hogy $\|L\| \le \|f\|_p$.

∗ **16.44. Fejér tétele.** *Legyen $1 < p \le \infty$. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ trigonometrikus sor egy 1 szerint periodikus $f \in \mathbb{L}^p[0,1]$ függvény Fourier-sora legyen, az, hogy a*

$$\sigma_n(x) = \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e^{2\pi ikx}$$

számtani közepek korlátosak legyenek $\mathbb{L}^p[0,1]$-ben, azaz létezzen olyan K, amelyre $\|\sigma_n\|_p \le K$ minden n-re. Ekkor $\|f\|_p \le K$.

Bizonyítás. Elég a feltétel elégségességét megmutatnunk. Az előző tétel szerint létezik olyan σ_{n_k} részsorozat és $f \in \mathbb{L}^p$, amelyre σ_{n_k} gyengén tart f-hez, amint $k \to \infty$. De

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \sigma_{n_k}(t) e^{-2\pi ijt}\, dt = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{|j|}{n_k+1}\right) c_j = c_j = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ijt}\, dt.$$

∗ **16.45. Megjegyzés.** Hasonló állítás $p = 1$-re nem igaz. Ennek oka, hogy ha például μ egy véges Radon-mérték $[0,1[$-en, és $c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx}\, d\mu(x)$, akkor a megfelelő

$$\sigma_n(x) = \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e^{2\pi ikx}$$

számtani közepek kifejezhetők

$$\sigma_n(x) = \int_0^1 K_n(x-t)\, d\mu(t)$$

alakban, ahonnan

$$\begin{aligned}\|\sigma_n\|_1 &= \int_0^1 \big|\sigma_n(x)\big|\, dx = \int_0^1 \sigma_n(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 K_n(x-t)\, d\mu(t)\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K_n(x-t)\, dx\, d\mu(t) = \mu[0,1[,\end{aligned}$$

azaz a részletösszegek számtani közepei $\mathbb{L}^1$-ben korlátosak, de belátható, hogy általában a c_k-k nem Fourier-együtthatói egyetlen $\mathbb{L}^1$-beli függvénynek sem. A megfelelő általános keret, amelyben ez a kérdés is tárgyalható, a disztribúciók Fourier-transzformáltjának vizsgálata.

∗ **16.46. Lebesgue tétele.** *A Fejér-féle közepeknél használt feltételek mellett,*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

az f minden Lebesgue-pontjában.

Bizonyítás. Nyilván

$$\begin{aligned}\big|\sigma_n(x) - f(x)\big| \le &\int_0^\eta \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| K_n(t)\, dt \\ &+ \int_\eta^{1/2} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| K_n(t)\, dt.\end{aligned}$$

A második integrál alkalmas c és c_f konstansokkal legfeljebb

$$\frac{c}{n} \int_\eta^{1/2} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big| \frac{dt}{t^2} \le \frac{cc_f}{n\eta^2}.$$

Ez kicsivé tehető, de η és n között egyensúlyt kell tartani. Legyen $\eta = 1/n^{1/4}$. Az első integrál becslése nehezebb. Az intervallumot két részre osztjuk: $[0, 1/n]$ és $[1/n, 1/n^{1/4}]$. Az első intervallumon az integrál alkalmas c_1 konstanssal legfeljebb

$$c_1 n \int_0^{1/n} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|\, dt \to 0$$

az f minden Lebesgue-pontjában. A másik intervallumon az integrál legfeljebb

$$\frac{c}{n} \int_{1/n}^{1/n^{1/4}} \big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big|\, \frac{dt}{t^2}.$$

Legyen x rögzített, és legyen

$$F(t) = \int_0^t \big|f(x+s) + f(x-s) - 2f(x)\big|\, ds.$$

Mivel F abszolút folytonos, az integrál, amit becsülnünk kell,

$$\frac{c}{n} \int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F'(t)\, \frac{dt}{t^2}.$$

Parciálisan integrálva, azt kapjuk, hogy ez legfeljebb

$$\left[\frac{c}{n}\frac{F(t)}{t^2}\right]_{1/n}^{1/n^{1/4}} + \frac{2c}{n} \int_{1/n}^{1/n^{1/4}} F(t)\, \frac{dt}{t^3}.$$

Mivel $F(t)/t \to 0$, ha x Lebesgue-pont, a kiintegrált rész nullához tart, ha $n \to \infty$. Ugyanez igaz az integrálra, mert az legfeljebb

$$\frac{2c}{n}\left(\sup_{1/n \le t \le 1/n^{1/4}} \frac{F(t)}{t}\right) \int_{1/n}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2c \sup_{1/n \le t \le 1/n^{1/4}} \frac{F(t)}{t}.$$

$*$ **16.47. Feladat: periodikus konvolúció [10].** Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mérhető, 1 szerint periodikus függvények. Az f és g *periodikus konvolúció*ját az

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x-y)g(y)\, dy$$

összefüggésel értelmezzük, ahol az integrál létezik. Mutassuk meg, hogy $f * g$ is 1 szerint periodikus, $f * g = g * f$, és ha $f \in \mathbb{L}^1[0,1]$, $g \in \mathbb{L}^p[0,1]$, ahol $1 \le p \le \infty$, akkor $f * g \in \mathbb{L}^p[0,1]$.

$*$ **16.48. Feladat [7].** Legyenek az 1 szerint periodikus $f, \tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f, \tilde{f} \in \mathbb{L}^1[0,1]$ függvények Fourier-együtthatói c_k, illetve $\tilde{c}_k$. Mutassuk meg, hogy az $f * \tilde{f}$ periodikus konvolúció Fourier-együtthatói $c_k\tilde{c}_k$. Mutassuk meg, hogy a Fejér-közepeknél használt feltételek mellett $s_n = f * D_n$ és $\sigma_n = f * K_n$.

$*$ **16.49. Feladat [13].** Legyenek az 1 szerint periodikus $f, \tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f, \tilde{f} \in \mathbb{L}^1[0,1]$ függvények Fourier-együtthatói c_k, illetve $\tilde{c}_k$. Tegyük fel, hogy $f\tilde{f} \in \mathbb{L}^1[0,1]$. Mutassuk meg, hogy az $f\tilde{f}$ függvény k-adik Fourier-együtthatója $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \tilde{c}_{k-j}$.

$*$ **16.50. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy a Lebesgue-pontokról szóló tétel egy 1 szerint periodikus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre, amelyre $f \in \mathbb{L}^1[0,1]$, azt jelenti, hogy f és

$$g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \xi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$$

periodikus folytatásának periodikus konvolúciója az f minden x Lebesgue-pontjában tart $f(x)$-hez, ha $\varepsilon \downarrow 0$. Hasonlítsuk ezt össze az előző tétellel.

16.51. Többdimenziós Fourier-sorok. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^n$-ben, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ olyan függvény, amely ezen vektorok szerint periodikus, és az ezen vektorok által kifeszített $I = \{\sum_{j=1}^n \xi_j x_j \colon 0 \le \xi_j \le 1\}$ *elemi cella* felett integrálható. Válasszuk úgy a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *reciprok vektor*okat, hogy az $\langle x_t, k_s \rangle$ belső szorzat $t = s$ esetén 1, egyébként 0 legyen. Az f *többdimenziós Fourier-sor*a ekkor

$$\sum_k c_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$$

(komplex alakban), ahol az összegzés a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ vektorok összes egész együtthatós lineáris kombinációira történik. Jelölje $|I|$ az I Lebesgue-mértékét. A Fourier-együtthatók a

$$c_k = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) e^{-2\pi i \langle k, x \rangle}\, dx$$

összefüggéssel számíthatók. Ilyen többdimenziós Fourier-sorokat használnak például kristályokon történő szóródások elemzésénél.

17
Ortogonális polinomok

Fouriernak a hővezetéssel kapcsolatos eredményeit Poisson fejlesztette tovább és terjesztette ki. Munkájuk vezette Ch. Sturmot 1836-ban, és J. Liouville-t egy évvel később arra, hogy egy általános elméletet építsenek ki, amely a Fourier és Poisson által vizsgált összes esetet tartalmazza, az explicit integrálhatóság feltételezése nélkül. Egy másodrendű $y'' - q(x)y = \lambda y$ differenciálegyenletet tekintettek, ahol q az $\mathbb{R}$ egy kompakt $[a,b]$ intervallumán folytonos, valós értékű függvény, és λ egy komplex paraméter. Az első probléma határfeltételeket tekinteni, és ... meghatározni, hogy λ mely értékeire létezik a problémának nemtriviális megoldása (a λ „sajátértékhez" tartozó „sajátfüggvény", ahogy ma mondanánk). ... Sturm eredményeire építve, Liouville a Fourier–Poisson-féle kifejtés általános megfogalmazásához kezdett.

Jean Dieudonné [28]

17.1. Ortogonális polinomok. Tekintsünk egy $]a,b[\subset \mathbb{R}$ intervallumot a Lebesgue-mértékkel, és egy ϱ súlyfüggvénnyel. Ha van olyan $r > 0$ szám, hogy

$$\int_a^b e^{r|x|}\varrho(x)\,dx < \infty,$$

(ez a feltétel véges intervallumon mindig teljesül), akkor az $r^n|x|^n/n! \le e^{r|x|}$ egyenlőtlenség miatt az

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

hatványfüggvények mind a megfelelő $\mathbb{L}^2(\varrho)$ térben vannak, és a belőlük a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással (és esetleg konstanssal való szorzással) egy ortogonális polinomrendszert kaphatunk. Ilyen ortogonális polinomrendszerek számos érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, és fontosak az ortogonális polinomrendszerek szerinti sorfejtések is.

17.2. Tétel. *Az előző pont feltételei mellett, az $1, x, x^2, x^3, \dots$ polinomrendszer ortogonalizálásával kapott polinomrendszer teljes $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.*

$*$ **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy f ortogonális az x^n függvények mindegyikére. Az f-et és ϱ-t az értelmezési tartományukon kívül nullának értelmezve, feltehetjük, hogy $a = -\infty$ és $b = \infty$. Legyen

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varrho(x)e^{-2\pi itx}\,dx, \quad \text{ha} \quad t \in \mathbb{R},$$

az $f\varrho$ Fourier-transzformáltja. Rögzített valós t_0 mellett az exponenciális függvényt sorbafejtve,

$$f(x)\varrho(x)e^{-2\pi itx} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2\pi i)^n \frac{(t-t_0)^n}{n!} f(x)\varrho(x)e^{-2\pi it_0 x}x^n. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy $|t-t_0| \le r/(4\pi)$ esetén a jobb oldalon szereplő sor tagonként integrálható. Valóban,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-2\pi i)^n\frac{(t-t_0)^n}{n!}f(x)\varrho(x)e^{-2\pi i t_0 x}x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}(2\pi)^n\frac{|t-t_0|^n}{n!}\big|f(x)\big|\varrho(x)|x|^n = \big|f(x)\big|\varrho(x)e^{2\pi|t-t_0||x|},$$

és mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|\varrho(x)e^{2\pi|t-t_0||x|}\,dx \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|^2\varrho(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{4\pi|t-t_0||x|}\varrho(x)\,dx\right)^{1/2},$$

a sor majdnem mindenütt konvergens, és részletösszegei abszolút értékben egy integrálható függvény alatt maradnak. Lebesgue tétele szerint tehát az (1) jobb oldalán álló sor tagonként integrálható, azaz $|t-t_0| \le r/(4\pi)$ esetén

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2\pi i)^n\frac{(t-t_0)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i t_0 x}\varrho(x)x^n\,dx.$$

Eszerint F minden valós t_0 körül legalább $r/(4\pi)$ sugárral hatványsorba fejthető. Mivel $f(x)$-nek az x^n függvényekre való ortogonalitása miatt $t_0 = 0$, $|t| \le r/(4\pi)$ esetén

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2\pi i)^n\frac{t^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x^n\varrho(x)\,dx = 0,$$

$F(t) = 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re. Ebből a Fourier-féle inverziós tétel szerint következik, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

17.3. Rekurzív formula. *Ha ϱ egy súlyfüggvény az $]a,b[$ intervallumon,*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

egy valós ortogonális polinomrendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban, és

$$\varphi_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \cdots,$$

akkor van olyan λ_n és δ_n számsorozat, hogy $n = 1, 2, \dots$ esetén teljesül az

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\varphi_{n+1}(x) = (x-\lambda_n)\varphi_n(x) - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\delta_n\varphi_{n-1}(x)$$

rekurzív formula, *továbbá*

$$\delta_n = \frac{\|\varphi_n\|^2}{\|\varphi_{n-1}\|^2}, \qquad \lambda_n = \frac{\langle x\varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}},$$

így λ_n nem függ a φ_n rendszertől.

Bizonyítás. Mivel az $x\varphi_n(x)$ polinom $n+1$-ed fokú,

$$x\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \varphi_k(x),$$

ahol

$$c_k = \frac{\langle x\varphi_n(x), \varphi_k(x)\rangle}{\|\varphi_k\|^2}.$$

Mivel φ_n ortogonális minden legfeljebb $n-1$-ed fokú polinomra,

$$\langle x\varphi_n(x), \varphi_k(x)\rangle = \langle \varphi_n(x), x\varphi_k(x)\rangle = 0,$$

ha $k \le n-2$, így

$$x\varphi_n(x) = c_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + c_n\varphi_n(x) + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x).$$

Az $n+1$-ed fokú tagok együtthatóinak összehasonlításából $\alpha_n = c_{n+1}\alpha_{n+1}$. Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \frac{\langle x\varphi_n(x), \varphi_{n-1}(x)\rangle}{\|\varphi_{n-1}\|^2} = \frac{\langle \varphi_n(x), x\varphi_{n-1}(x)\rangle}{\|\varphi_{n-1}\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\varphi_{n-1}\|^2}\Big\langle \varphi_n, \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\varphi_n + q\Big\rangle, \end{aligned}$$

ahol q legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinom. Így kapjuk, hogy

$$c_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\frac{\|\varphi_n\|^2}{\|\varphi_{n-1}\|^2}.$$

Végül

$$c_n = \frac{\langle x\varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle}{\|\varphi_n\|^2},$$

és az n-ed fokú tagok összehasonlításával

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\beta_{n+1} + \lambda_n\alpha_n.$$

17.4. Tétel. *Az előző tétel jelöléseivel, a φ_n polinom minden gyöke valós, egyszeres és $]a,b[$-ben van, továbbá φ_n-nek és φ_{n+1}-nek nincs közös gyöke.*

Bizonyítás. Ha φ_n-nek és φ_{n+1}-nek lenne közös gyöke, a rekurzív formulából azt kapnánk, hogy φ_0-nak is van gyöke. Legyenek φ_n páratlan rendű $]a,b[$-beli gyökei $\xi_1, \dots, \xi_k$, és tekintsük a

$$q(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)$$

polinomot. Ekkor $\varphi_n q$ előjeltartó $]a,b[$-n, amiből

$$\int_a^b \varphi_n(x)q(x)\varrho(x)\,dx \neq 0,$$

így $k = n$.

17.5. Rodrigues-formula. *17.1 jelöléseivel, tegyük fel, hogy* $]a,b[$*-n a súlyfüggvény differenciálható, és léteznek olyan*

$$L(x) = Ax + B, \quad Q(x) = Cx^2 + Dx + E$$

polinomok, hogy $A + mC \neq 0$*, ha* $m = 2, 3, \ldots$*,*

$$\frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)} = \frac{L(x)}{Q(x)},$$

és

$$\lim_{x\downarrow a} x^n Q(x)\varrho(x) = \lim_{x\uparrow b} x^n Q(x)\varrho(x) = 0,$$

ha $n = 0, 1, 2, \ldots$*. Ekkor léteznek olyan* K_n *konstansok, hogy*

$$\varphi_n(x) = K_n \frac{1}{\varrho(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\varrho(x)Q^n(x))$$

az $]a,b[$*-n. Ez a* Rodrigues-formula*.*

Bizonyítás. Jelölje ψ_n a Rodrigues-formula jobb oldalát, K_n nélkül. Először is teljes indukcióval beláthatjuk, hogy $0 \leq k \leq n$ esetén

$$\frac{d^k}{dx^k}(\varrho(x)Q^n(x)) = \varrho(x)\psi_{n,k}(x)Q^{n-k}(x),$$

ahol $\psi_{n,k}$ egy k-ad fokú polinom. Ebből $\psi_n = \psi_{n,n}$ egy n-ed fokú polinom. Most legyen $0 \leq j < n$. Ekkor n-szeri parciális integrálással

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi_j(x)\psi_n(x)\varrho(x)\,dx &= \int_a^b \psi_j(x)\frac{d^n}{dx^n}(\varrho(x)Q^n(x))\,dx \\ &= (-1)^n \int_a^b \psi_j^{(n)}(x)\varrho(x)Q^n(x)\,dx = 0,\end{aligned}$$

azaz a ψ_n polinomok ortogonális rendszert alkotnak. Ebből következik az állítás.

17.6. Megjegyzés. Az előző bizonyítás jelöléseivel, ha $j = n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\|\psi_n\|^2 = (-1)^n \int_a^b \psi_n^{(n)}\varrho(x)Q^n(x)\,dx.$$

17.7. Differenciálegyenlet. *Az előző tétel feltételei mellett* φ_n *eleget tesz a*

$$Q(x)\varphi_n'' + (Q'(x) + L(x))\varphi_n' - n(A + (n+1)C)\varphi_n = 0$$

differenciálegyenletnek.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $n = 0$-ra teljesül az állítás. Ha $n > 0$, legyen

$$r_n(x) = Q(x)\varphi_n''(x) + (Q'(x) + L(x))\varphi_n'(x).$$

Ekkor minden n-nél alacsonyabb fokú q polinomra

$$\begin{aligned}
&\int_a^b q(x)r_n(x)\varrho(x)\,dx \\
&= \int_a^b q(x)(Q(x)\varphi_n''(x) + Q'(x)\varphi_n'(x) + L(x)\varphi_n'(x))\varrho(x)\,dx \\
&= \int_a^b q(x)(\varrho(x)Q(x)\varphi_n''(x) + \varrho(x)Q'(x)\varphi_n'(x) + \varrho'(x)Q(x)\varphi_n'(x))\,dx \\
&= \int_a^b q(x)\frac{d}{dx}(\varrho(x)Q(x)\varphi_n'(x))\,dx = -\int_a^b q'(x)\varrho(x)Q(x)\varphi_n'(x)\,dx \\
&= \int_a^b (q''(x)\varrho(x)Q(x) + q'(x)\varrho'(x)Q(x) + q'(x)\varrho(x)Q'(x))\varphi_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b (q''(x)Q(x) + q'(x)L(x) + q'(x)Q'(x))\varphi_n(x)\varrho(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Mivel r_n főegyütthatója φ_n főegyütthatójának $n(A+(n+1)C)$-szerese, a bizonyítás kész.

17.8. Christoffel–Darboux-formula. *17.1 feltételeivel, tegyük fel, hogy*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

valós ortonormált polinomrendszer. Ha $f \in \mathbb{L}^2(\varrho)$ *és* $\varphi_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \cdots$, *akkor*

$$c_n = \langle f, \varphi_n\rangle, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k,$$

és

$$K_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(t),$$

jelölésekkel,

$$s_n(x) = \int_a^b f(t)K_n(t,x)\varrho(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\int_a^b K_n(t,x)\varrho(t)\,dt \equiv 1, \tag{2}$$

$$s_n(x) - f(x) = \int_a^b (f(t) - f(x))K_n(t,x)\varrho(t)\,dt. \tag{3}$$

Továbbá, $t \neq x$ *esetén*

$$K_n(t,x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\frac{\varphi_{n+1}(t)\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\varphi_n(t)}{t-x}. \tag{4}$$

Ez a Dirichlet-formula megfelelője ortogonális polinomrendszerekre.

Bizonyítás. (1)-hez,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \int_a^b f(t)\varphi_k(t)\varrho(t)\,dt = \int_a^b f(t)K_n(t,x)\varrho(t)\,dt.$$

Ebből $f \equiv 1$ helyettesítésel kapjuk (2)-t, és (2) felhasználásával (3)-at. (4) bizonyításához, a rekurzív formulából ha $k > 0$,

$$x\varphi_k(x) = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\varphi_{k+1}(x) + \lambda_k\varphi_k(x) + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\varphi_{k-1}(x).$$

Ezt az összefüggést $\varphi_k(t)$-vel végigszorozva, majd a kapott összefüggésben t és x szerepét felcserélve, és a két összefüggést kivonva egymásból,

$$\begin{aligned}(t-x)\varphi_k(x)\varphi_k(t) = &\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}(\varphi_{k+1}(t)\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\varphi_k(t)) \\ &- \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}(\varphi_k(t)\varphi_{k-1}(x) - \varphi_k(x)\varphi_{k-1}(t)).\end{aligned}$$

Összegezve k-ra 1-től n-ig,

$$\begin{aligned}(t-x)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t) = &\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}(\varphi_{n+1}(t)\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\varphi_n(t)) \\ &- \frac{\alpha_0}{\alpha_1}(\alpha_0(\alpha_1 t + \beta_1) - \alpha_0(\alpha_1 x + \beta_1)).\end{aligned}$$

Az utolsó tag $-(t-x)\varphi_0^2$, így átrendezéssel kapjuk az állítást. Végül $n = 0$-ra triviálisan teljesül az állítás.

17.9. Konvergenciatétel. *Az előző pont feltételei mellett,*

$$\psi_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

jelöléssel, ha $]a,b[$ *korlátos intervallum, és a* $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ *rendszer az* $x \in]a,b[$ *pontban korlátos, továbbá* $\psi_x \in \mathbb{L}^2(\varrho)$*, akkor* $s_n(x) \to f(x)$*, ha* $n \to \infty$*.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint

$$\begin{aligned}s_n(x) - f(x) = &\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\varphi_n(x)\int_a^b \psi_x(t)\varphi_{n+1}(t)\varrho(t)\,dt \\ &- \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\varphi_{n+1}(x)\int_a^b \psi_x(t)\varphi_n(t)\varrho(t)\,dt.\end{aligned} \tag{1}$$

Mivel a rekurzív formula szerint

$$x\varphi_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\varphi_{n+1}(x) + \lambda_n\varphi_n(x) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\varphi_{n-1}(x),$$

ha $n > 0$,

$$\left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right| = \left|\int_a^b x\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(x)\varrho(x)\,dx\right| \le \int_a^b |x|\big|\varphi_n(x)\big|\big|\varphi_{n-1}(x)\big|\varrho(x)\,dx$$
$$\le \max\{|a|,|b|\}\int_a^b \big|\varphi_n(x)\big|\big|\varphi_{n-1}(x)\big|\varrho(x)\,dx$$
$$\le \max\{|a|,|b|\}\|\varphi_n\|_2\|\varphi_{n-1}\|_2 = \max\{|a|,|b|\},$$

így az (1) jobb oldalán szereplő integrálok együtthatói korlátosak. Mivel az integrálok egy négyzetesen integrálható függvény Fourier-együtthatói, nullához tartanak, így a tételt bebizonyítottuk.

17.10. Megjegyzés. Az előző tételből levezethető a Lipschitz-kritérium ($\alpha > 1/2$ esetre), a félérintőkkel kapcsolatos konvergencia kritérium és a Riemann-féle lokalizációs tétel megfelelője.

17.11. Generátorfüggvény. A G kétváltozós függvényt a

$$\varphi_n\colon]a,b[\to \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

függvénysorozat *generátorfüggvény*ének nevezzük, ha $]a,b[\times \{0\}$ egy D környezetén van értelmezve, és

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) z^n, \quad \text{ha} \quad (x,z) \in D.$$

Megjegyezzük, hogy az ortogonális polinomrendszerekhez gyakran megadható generátorfüggvény, az azonban a főegyütthatók megválasztásától is függ.

17.12. Klasszikus ortogonális polinomok. Egy táblázatban foglaltuk össze a legfontosabb ortogonális polinomrendszerek – részint az általános elméletből nyerhető, részint külön bizonyítható – legfontosabb jellemzőit. Megmutatható, hogy a táblázatban szereplő minden ortogonális polinomrendszerre alkalmazhatók az előzőekben bizonyított tételek, a konvergenciatétel természetesen csak korlátos alapintervallum esetén. A részletes tárgyalás megtalálható Pál [121] jegyzetében. Ajánljuk még Szőkefalvi-Nagy [164] jegyzetét, valamint Frank–Mises [43] könyvét.

A táblázatban $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ esetén használtuk az

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}$$

jelölést. A táblázatban az ortogonális polinomok definíciójának a Rodriques-formula tekintendő.

→ **17.13. Feladat [9].** Számoljunk ki Gram–Schmidt-ortogonalizációval néhány Legendre-, Csebisev-, Laguerre-, és Hermite-polinomot.

→ **17.14. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy $T_n(x) = \cos n \arccos x$, ha $x \in [-1,1]$. Mi köze az elsőfajú Csebisev-polinomoknak a Lissajous-görbékhez?

Név	Jel	Halmaz	Súlyfüggvény
Jacobi $(\alpha, \beta > -1)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$
Ultra-szferikus $(\alpha > -1)$	${}^{(\alpha)}P_n$	$(-1, 1)$	$(1-x^2)^\alpha$
Legendre	P_n	$(-1, 1)$	1
Csebisev	T_n	$(-1, 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
Csebisev, másodfajú	U_n	$(-1, 1)$	$\sqrt{1-x^2}$
Laguerre, általános $(\alpha > -1)$	${}^{(\alpha)}L_n$	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$
Laguerre	L_n	$(0, \infty)$	e^{-x}
Hermite	H_n	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

∗∗ **17.15. Feladat[15].** Bizonyítsuk be a klasszikus ortogonális polinomoknak a függelék táblázatában szereplő tulajdonságait.

∗ **17.16. Az approximáció feladata.** Az ortogonális sorokkal szoros kapcsolatban áll az approximációelmélet. Az approximációelmélet alapfeladata a következő. Legyen adott

Jel	Rodrigues-formula	Normanégyzet
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ $\cdot \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right)$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)}$ $\cdot \frac{\mathbf{\Gamma}(n+\alpha+1)\mathbf{\Gamma}(n+\beta+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)\mathbf{\Gamma}(n+\alpha+\beta+1)}$
${}^{(\alpha)}P_n$	$P_n^{(\alpha,\alpha)}$	$\frac{2^{2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)}$ $\cdot \frac{\mathbf{\Gamma}^2(n+\alpha+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)\mathbf{\Gamma}(n+2\alpha+1)}$
P_n	${}^{(0)}P_n$	$\frac{2}{(2n+1)}$
T_n	$\cos n \arccos x = c_n \cdot {}^{(-1/2)}P_n(x)$ $c_0 = 1,\ c_n = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n-1}{n}}$	$\pi, \quad \text{ha} \quad n = 0,$ $\frac{\pi}{2}, \quad \text{ha} \quad n > 0$
U_n	$\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} =$ $\frac{2^{2n}}{\binom{2n+1}{n}} \cdot {}^{(1/2)}P_n(x)$	$\frac{\pi}{2}$
${}^{(\alpha)}L_n$	$\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$	$\mathbf{\Gamma}(\alpha+1)\binom{\alpha+n}{n}$
L_n	${}^{(0)}L_n$	1
H_n	$\frac{(-1)^n}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	$\frac{2^n}{n!}\sqrt{\pi}$

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

egy H halmazon értelmezett f függvény. Ismerjük $f(x)$ értékeit a H halmazon, vagy annak adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontjaiban. Keresendő egy paraméteres $g(x, a_1, \ldots, a_m)$ függvényseregből az a függvény, amely f-et a „legjobban közelíti". Általában olyan függvények közül választjuk a közelítő függvényt, amelyek értékei könnyen számíthatók. Mivel számítógé-

Jel	Főegyüttható	Következő együttható
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)2^n n!}$	$\frac{n(\alpha-\beta)\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+2n)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)2^n n!}$
${}^{(\alpha)}P_n$	$\frac{\mathbf{\Gamma}(2\alpha+2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(2\alpha+n+1)2^n n!}$	0
P_n	$\frac{\mathbf{\Gamma}(2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)2^n n!}$	0
T_n	$1, \quad \text{ha} \quad n=0,$ $2^{n-1}, \quad \text{ha} \quad n>0$	0
U_n	2^n	0
${}^{(\alpha)}L_n$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{(n+\alpha)(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$
L_n	$\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{n(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$
H_n	$\frac{2^n}{n!}$	0

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

pen közvetlenül csak a négy alapművelet végezhető el, előnyben részesítjük a polinom és racionális törtfüggvény közelítéseket. Lehetséges az is, hogy érdemes H-t kisebb részekre osztani, és a részeken külön-külön keresni a közelítéseket. Egy adott halmazon való közelítést helyettesítéssel egy másik halmazon való közelítésre vezethetünk vissza, például

Jel	Differenciálegyenlet	Generátorfüggvény
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(x^2-1)y'' + ((\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta)y' - n(\alpha+\beta+n+1)y = 0$	$\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \cdot (1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\alpha} \cdot (1+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\beta}$
${}^{(\alpha)}P_n$	$(x^2-1)y'' + (2\alpha+2)xy' - n(2\alpha+n+1)y = 0$	$\frac{2^{\alpha}}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \cdot (1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\alpha}$
P_n	$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$	$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$
T_n	$(x^2-1)y'' + xy' - n^2y = 0$	$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$
U_n	$(x^2-1)y'' + 3xy' - n(n+2)y = 0$	$\frac{1}{1-2xz+z^2}$
${}^{(\alpha)}L_n$	$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$	$(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-xz(1-z)}$
L_n	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$	$(1-z)^{-1}e^{-xz(1-z)}$
H_n	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$	$e^{z(2x-z)}$

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

bármilyen korlátos zárt intervallumon való közelítés lineáris helyettesítéssel visszavezethető a $[0,1]$ vagy a $[-1,1]$ intervallumon való közelítésre. A lineáris helyettesítés előnye, hogy a polinomok polinomba mennek át, és a fokszám sem változik.

Attól függően, hogy f és a közelítő függvény eltérését hogyan mérjük, különböző

Egyéb összefüggések
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathbf{\Gamma}(\alpha+n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+n-k+1)}\frac{\mathbf{\Gamma}(\beta+n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\beta+k+1)}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,$ $\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$
${}^{(k)}P_n(x) = 2^k\frac{(n+k)!}{(n+2k)!}\frac{d^k}{dx^k}{}^{(0)}P_{n+k}(x)$
$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}$ $= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos t\right)^n dt$
$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k}$ $= \frac{1}{2}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n$
$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x),$ $T_n(x) = xT_{n-1}(x) - (1-x^2)U_{n-2}(x),$ $U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x)$
${}^{(\alpha)}L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\binom{n+\alpha}{k}x^{n-k},$ $\frac{d}{dx}\,{}^{(\alpha)}L_n(x) = -{}^{(\alpha+1)}L_{n-1}(x)$
$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\binom{n}{k}x^{n-k}$
$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2H_{n-1}(x)$

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

eseteket kapunk. Ha azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen f-el, kapjuk az *interpoláció* esetét. Ha azt követeljük meg, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban mért eltérések négyzetösszege minimális legyen, akkor a *legkisebb négyzetek módszerét* kapjuk. Végül, ha az egész H-n vett eltérés szuprémumát minima-

lizáljuk, akkor az *egyenletesen legjobb közelítés*t kapjuk. Természetesen más függvénytér normájával is mérhetjük az eltérést, például használhatunk $\mathbb{L}^2$-normát.

∗ **17.17. Interpoláció.** Az interpoláció különösen akkor hasznos, ha az f függvény értékeit csak az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokban ismerjük. A legáltalánosabb esetben az

$$f(x_j) = g(x_j, a_1, \dots, a_m), \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az $a_1, \dots, a_m$ paraméterekre megoldva, kapjuk az interpoláló függvényt. Például, ha

$$g(x, a_1, \dots, a_m) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_m g_m(x),$$

akkor lineáris egyenletrendszert kapunk. Megjegyezzük, hogy ezeknek az egyenleteknek a megoldása gyakran csak nagy számítási hibákkal lehetséges.

A legfontosabb az az eset, amikor f egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvény, $x_1, x_2, \dots, x_n$ az $[a, b]$ pontjai, interpoláló függvényként pedig n-nél alacsonyabb fokú polinomot keresünk, ez a *Lagrange-interpoláció*. Érdemesebb mindjárt egy általánosabb esetet vizsgálni, amikor a pontokban a függvény első néhány deriváltja is adott. Például, ha csak két pont van, akkor a lineáris

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

közelítés $x_2 \to x_1$ esetén az

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

lineáris közelítésbe megy át. Ez úgy is tekinthető, mintha az alappontok között az x_1 kétszer szerepelne. Ezt a gondolatmenetet általánosítva, az alábbi problémához jutunk.

∗ **17.18. Hermite-interpoláció.** Legyen $x_1, \dots, x_n$ az $[a, b]$ intervallum pontjainak egy sorozata, amelyben lehetnek egyezők is, és $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy függvény. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontrendszerre támaszkodó *Hermite interpolációs polinom*on egy olyan, n-nél alacsonyabb fokú p polinomot értünk, amelyre $f^{(j)}(x) = p^{(j)}(x)$ minden $0 \le j < k$-ra, ha x pontosan k-szor fordul elő az $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorozatban. Természetesen feltesszük, hogy az f függvénynek a feltételben szereplő deriváltjai léteznek.

Legfeljebb egy Hermite interpolációs polinom létezik, hiszen két ilyen polinom különbsége olyan n-nél alacsonyabb fokú polinom, amelynek (multiplicitással számolva) legalább n zérushelye van, így csak azonosan nulla lehet. Világos, hogy az interpolációs polinom nem függ az alappontok sorrendjétől. Az interpolációs polinom konstrukciójához tegyük fel, hogy az egyező alappontok egymás után következnek. Jelölje $L_{k,k+1,\dots,l}$ az $x_k, x_{k+1}, \dots, x_l$ pontokra támaszkodó interpolációs polinomot. Ha $x_k = x_l$, akkor nyilván

$$L_{k,k+1,\dots,l}(x) = \sum_{j=0}^{l-k} \frac{f^{(j)}(x_k)}{j!}(x - x_k)^j.$$

Ha $x_k \ne x_l$, akkor $L_{k,k+1,\dots,l}$ megkapható két alacsonyabb fokú interpolációs polinomból az *Aitken-féle eljárás*sal:

$$L_{k,k+1,\dots,l}(x) = \frac{L_{k+1,k+2,\dots,l}(x)(x - x_k) - L_{k,k+1,\dots,l-1}(x)(x - x_l)}{x_l - x_k}.$$

Differenciálás utáni helyettesítéssel azonnal adódik, hogy $L_{k,k+1,\dots,l}$ eleget tesz a kirótt feltételeknek. Vegyük észre, hogy a konstrukció nem használja fel, hogy $p^{(j)}(x_k)$ előírt értéke egy függvény deriváltjának értéke, ezek tetszőleges számok lehetnek. Ha az előírt számok egy rögzített sorrendben $y_1,\dots,y_n$, akkor a hozzájuk tartozó p interpolációs polinomra $p=\sum_{k=1}^{n} y_k p_k$, ahol p_1 az $1,0,0,\dots,0$ sorozathoz, p_2 a $0,1,0,\dots,0$ sorozathoz, stb., tartozó interpolációs polinomok. Ez azonnal következik az interpolációs polinom egyértelműségéből.

∗ **17.19. Osztott differenciák.** Az előző pont feltételei mellett, jelölje

$$f(x_k;x_{k+1};\dots;x_l)$$

az $L_{k,k+1,\dots,l}$ főegyütthatóját. Ezeket a számokat *osztott differenciák*nak nevezzük. Definíció szerint az osztott differenciák nem változnak az alappontok permutálásakor. Az osztott differenciák könnyen kiszámíthatók az interpolációs polinomok felhasználása nélkül is. Valóban, ha $x_k=x_l$, akkor $f(x_k;x_{k+1};\dots;x_l)=f^{(l-k)}(x_k)/(l-k)!$, ha pedig $x_k\neq x_l$, akkor az Aitken-féle eljárás alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x_k;x_{k+1};\dots;x_l)=\frac{f(x_{k+1};x_{k+2};\dots;x_l)-f(x_k;x_{k+1};\dots;x_{l-1})}{x_l-x_k}.$$

Ezen utóbbi összefüggésből ered az osztott differencia elnevezés. Az osztott differenciák és bizonyos polinomok elrendezhetők az úgynevezett *Fraser-diagram*ban:

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \\
f(x_1) & (x-x_1) & & \\
1 & f(x_1;x_2) & (x-x_1)(x-x_2) & \\
f(x_2) & (x-x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\
1 & f(x_2;x_3) & (x-x_2)(x-x_3) & f(x_1;x_2;x_3;x_4) \quad \dots \\
f(x_3) & (x-x_3) & f(x_2;x_3;x_4) & (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \quad \dots \\
1 & f(x_3;x_4) & (x-x_3)(x-x_4) & f(x_2;x_3;x_4;x_5) \quad \dots \\
f(x_4) & (x-x_4) & f(x_3;x_4;x_5) & (x-x_3)(x-x_4)(x-x_5) \quad \dots \\
1 & f(x_4;x_5) & (x-x_4)(x-x_5) & f(x_3;x_4;x_5;x_6) \quad \dots \\
f(x_5) & (x-x_5) & f(x_4;x_5;x_6) & (x-x_4)(x-x_5)(x-x_6) \quad \dots \\
1 & f(x_5;x_6) & (x-x_5)(x-x_6) & \vdots \\
f(x_6) & (x-x_6) & \vdots & \\
1 & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

A Fraser–diagramból úgy kaphatunk interpolációs polinomokat, hogy valamelyik $f(x_i)$ pontból kiindulva minden lépésben vagy jobbra felfelé, vagy jobbra lefelé haladunk. Minden lépésnél egy új tagot adunk a polinomhoz, jobbra felfelé lépve az éppen elért osztott

differencia és az alatta lévő polinom szorzatát, jobbra lefelé lépve pedig az éppen elért osztott differencia és a felette lévő polinom szorzatát. Például $f(x_1)$-ből indulva és jobbra lefelé haladva az

$$L_{1,2,\dots,n}(x) = f(x_1) + f(x_1;x_2)(x-x_1) + \dots \\ + f(x_1;x_2;\dots;x_n)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

előállítást kapjuk, ez *Newton interpolációs formulája.* Megjegyezzük, hogy bárhogy is jutunk el az $f(x_k;\dots;x_l)$ osztott differenciához a Fraser-diagramban, mindig az $x_k,\dots,x_l$ pontokra támaszkodó $L_{k,k+1,\dots,l}$ interpolációs polinomhoz jutunk, csak más alakban. Ezt $l-k$ szerinti teljes indukcióval láthatjuk be. Valóban, vegyük észre, hogy a Fraser-diagramból kapott polinom és $L_{k,k+1,\dots,l}$ főegyütthatója is $f(x_k;\dots;x_l)$. A kettő különbsége így olyan, $l-k-1$-nél alacsonyabb fokú polinom, amely osztható $f(x_k;\dots;x_l)$ szorzójával, tehát csak nulla lehet.

Szokás megengedni a Fraser-diagramban balra felfelé vagy lefelé történő lépéseket is; ilyenkor azt a tagot, amit ellenkező irányú lépésnél hozzáadnánk, levonjuk. Ennek nincs gyakorlati jelentősége, mert így is igaz, hogy bárhogy jutunk el az $f(x_k;\dots;x_l)$ osztott differenciához, mindig az $x_k,\dots,x_l$ pontokra támaszkodó $L_{k,k+1,\dots,l}$ interpolációs polinomot kapjuk. Ennek belátásához vegyük észre, hogy az eddig bizonyítottak szerint, egy polinomot egy rombusz mentén körbejárva a Fraser-diagramban, a kapott négy tag összege nulla kell legyen. Ha az első balra lépés az előző jobbra lépés megfordítása, akkor nyilván mindkettő kihagyható, egyébként pedig az előző észrevétel szerint helyettesíthetjük egy alacsonyabb szinten történő balra lépéssel, mindaddig ismételve ezt, amíg vagy kimarad, vagy az alapszinten végződik. Ezt minden balra lépéssel megismételve, végül minden balra lépés az alapszinten végződik. Egyszerű számolás mutatja, hogy ha az alapszintről indulva jobbra majd balra lépve $f(x_k)$-ba jutunk, a kapott összeg $f(x_k)$, így az ilyen típusú lépések teljesen elhagyhatók.

∗ **17.20. Megjegyzés.** A Hermite-interpolációról és az osztott differenciákról eddig mondottak akkor is érvényben maradnak, ha f komplex változós, és/vagy vektor értékű függvény.

∗ **17.21. Az interpoláció hibája.** Az osztott differenciáknál használt jelölésekkel, tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$. Az $x_1,x_2,\dots,x_n$ pontrendszert bővítsük egy új, $x \in [a,b]$ ponttal, és jelölje a bővített pontrendszerre támaszkodó interpolációs polinomot p. Ekkor a Fraser-diagramból

$$p(y) - L_{1,2,\dots,n}(y) = f(x;x_1;x_2;\dots;x_n)\omega(y),$$

ahol $\omega(y) = \prod_{j=1}^{n}(y-x_j)$. Mivel $p(x) = f(x)$, ebből

$$f(x) - L_{1,2,\dots,n}(x) = f(x;x_1;x_2;\dots;x_n)\omega(x). \tag{1}$$

Másrészt, az

$$f(y) - L_{1,2,\dots,n}(y) - f(x;x_1;x_2;\dots;x_n)\omega(y)$$

függvénynek (multiplicitással számolva) $n+1$ zérushelye van $[a,b]$-ben. A Rolle-tételt felhasználva, teljes indukcióval azt kapjuk, hogy ezen függvény n-edik deriváltjának, az

$$y \mapsto f^{(n)}(y) - f(x;x_1;x_2;\dots;x_n)n!$$

függvénynek van zérushelye $[a,b]$ belsejében, azaz

$$f^{(n)}(\xi) = f(x; x_1; x_2; \dots; x_n)n! \quad \text{valamely } \xi \in]a,b[\text{-re.} \tag{2}$$

Így (1) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) - L_{1,2,\dots,n}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x) \quad \text{valamely } \xi \in]a,b[\text{-re.} \tag{3}$$

Ebből a $\mathcal{C}[a,b]$ normájával

$$\|f - L\| \le \|f^{(n)}\|\|\omega\|/n!.$$

Ha f éppen n-ed fokú polinom, akkor egyenlőség áll, így ez a becslés nem javítható. A jobb oldalon $\|\omega\|$ függ az alappontok választásától, és a Csebisev-polinomok tulajdonságaiból következik, hogy $[a,b] = [-1,1]$ esetén akkor lesz minimális, ha az alappontok T_n zérushelyei.

∗ **17.22. Az interpoláció alkalmazása.** Az elsőrendű polinommal való *lineáris interpolációt* mindenki ismeri:

$$f(x) \approx f(x_1) + f(x_1; x_2)(x - x_1).$$

A másodfokú polinommal történő *parabolikus interpoláció* már ritkábban használatos. A gyakorlatban általában adott egy táblázat, és egy x értékre az $f(x)$ lehető legjobb közelítését szeretnénk meghatározni, de nem tudjuk, hogy milyen m fokszámot válasszunk. A következő eljárást követhetjük: Számozzuk meg az alappontokat $|x-x_i|$ növekvő sorrendjében. Legyen

$$\varepsilon_m = \big|p_{m+1}(x) - p_m(x)\big|, \qquad \text{ahol } p_m = L_{1,2,\dots,m},$$

és számítsuk ki rendre a

$$p_1(x), p_2(x), \varepsilon_1, p_3(x), \varepsilon_2, p_4(x), \varepsilon_3, \dots$$

értékeket. Ha E már kielégítő pontosság, akkor addig számolunk, amíg $\varepsilon_m \le E$ lesz. Ha ilyen m nincs, akkor addig növeljük m-et, amíg ε_m csökken.

∗ **17.23. Példa.** Határozzuk meg a KNO_3 oldhatóságát vízben $40\,C^\circ$-on, ha adott 0, 20, 50, 80 és $100\,C^\circ$-on az oldhatóság.

Az Aitken-féle eljárással számolva az

$$\begin{array}{ccccccc}
L_1(x) & & & & & & \\
 & L_{1,2}(x) & & & & & \\
L_2(x) & & L_{1,2,3}(x) & & & & \\
 & L_{2,3}(x) & & L_{1,2,3,4}(x) & & & \\
L_3(x) & & L_{2,3,4}(x) & & L_{1,2,3,4,5}(x) & & \\
 & L_{3,4}(x) & & L_{2,3,4,5}(x) & & & \\
L_4(x) & & L_{3,4,5}(x) & & & & \\
 & L_{4,5}(x) & & & & & \\
L_5(x) & & & & & &
\end{array}$$

értékeket, g KNO_3/100 g H_2O egységben

50C°	85,5				
		67,53			
20C°	31,6		64,00		
		49,90		64,12	
0C°	13,3		63,65		64,36
		91,15		62.94	
80C°	169,0		60,69		
		15,00			
100C°	246,0				

Mivel a kiindulási értékek egy tizedesre vannak megadva, $E = 0{,}2$-nél jobb közelítést nem várhatunk. A számítások szerint másodfokú interpolációnál kell megállni, és a kapott közelítő érték 64,0. A mért érték 63,9. Láthatjuk, hogy ha tovább növeljük a fokszámot, a közelítés romlik.

∗ **17.24. Feladat [8].** Cserebomlással NH_4NO_3-ból és KCl-ból KNO_3-ot és NH_4Cl-ot akarunk előállítani. Ábrázoljuk e sók oldhatóságát a hőmérséklet függvényében, mól/100 g H_2O egységben, a táblázatban talált adatokat interpolációval sűrítve.

∗ **17.25. Feladat [7].** Készítsünk táblázatot, amelyből $\sin x$ értéke 2^{-15} pontossággal meghatározható lineáris interpolációval. Mennyi lehet a lépésköz?

∗ **17.26. Inverz interpoláció.** Valós változós, valós értékű függvények zérushelyeinek meghatározására, vagy ami ezzel ekvivalens, egyenletek megoldására használható nyilvánvaló módszer az *intervallum felezés*. Ha f az $[a, b]$ intervallumon folytonos, valós függvény, $f(a)f(b) < 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet $[a, b]$-beli megoldásának megkeresésére számítsuk ki $x_0 = a$, $x_1 = b$ jelöléssel az $x_2 = (a + b)/2$ helyen a függvényértéket. Ha $f(x_2) = 0$, akkor készen vagyunk, egyébként legyen $[a_2, b_2]$ az $[a, b]$ intervallumnak az a fele, amelynek végpontjaiban f előjele különböző, és alkalmazzuk az előző lépést x_3 és $[a_3, b_3]$ előállítására, stb. A kapott $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozat mindig konvergál f egy zérushelyéhez. Az eljárás hátránya, hogy a konvergencia lassú, és a módszer nem alkalmazható, ha a függvény az intervallumon nem vált előjelet (például x^2 a $[-1, 1]$-en).

Valamivel jobb módszer a *húrmódszer*. Az eljárás hasonlít az intervallum felezéshez, de az x_{n+1} pontot az $(a_n, f(a_n))$ és $(b_n, f(b_n))$ pontokat összekötő egyenes és az x tengely metszéspontjaként definiáljuk, azaz

$$x_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n).$$

A konvergencia valamivel gyorsabb, mint az intervallum felezésnél. Előnyei és hátrányai hasonlóak.

Lényegesen jobb módszereket kaphatunk *inverz interpoláció*val. Ha f invertálható, akkor néhány $y_j = f(x_j)$ pontra támaszkodó interpolációs polinom f^{-1} egy közelítése, és a nulla helyen vett értéke a gyök egy közelítése. Például, ha két különböző y_j értéket veszünk, és lineáris interpolációt használunk, akkor a *szelőmódszer*t kapjuk. Itt az x_{n+1}

közelítést $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ és $(x_n, f(x_n))$ pontokon átmenő szelőnek az x tengellyel való metszéspontjaként kapjuk. Így

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

A szelőmódszernél nem szükséges úgy választani az x_0, x_1 kezdőpontokat, hogy ott a függvény ellenkező előjelű legyen. A szelőmódszer gyorsabb, mint a húrmódszer. Egyetlen hátránya, hogy nem mindig konvergens.

Ha két egyenlő pontot és lineáris Hermite-interpolációt használunk, akkor a *Newton-módszer*hez jutunk. A Newton-módszernél elég a gyök egyetlen x_0 közelítéséből kiindulni. Az x_{n+1} közelítést az x_n pontban vett érintő és az x tengely metszéspontjaként kapjuk, az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

összefüggéssel. A Newton-módszer a szelőmódszernél is gyorsabban konvergál. Hátránya, hogy nem minden esetben konvergens, és hogy nem csak f, hanem f' értékeit is ki kell számítani. Ez utóbbi hátrány elkerülhető a *módosított Newton-módszer*rel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul.

A Newton-módszer és a módosított Newton-módszer is speciális esete az

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{Q_n}$$

iterációval dolgozó *kvázi Newton-módszer*nek, amelynél α_n minden lépésben változtatható paraméter, Q_n pedig $f'(x_n)$ egy közelítése. Megtehetjük például, hogy $f'(x_n)$-et egy

$$Q_n = \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n}$$

differenciával közelítjük, ekkor egyáltalán nem kell deriváltat számolni. Ha $h_n = x_n - x_{n-1}$, akkor a szelőmódszert kapjuk vissza. Ha h_n ennél lényegesen kisebb abszolút értékű, akkor az eljárás felgyorsul, azonban a kerekítési hibák megnőhetnek.

Természetesen fixpontmódszerek is használhatók, és a módszerek kombinálhatók is.

Leállási kritériumként (egy adott iterációszám túllépésén kívül) annak vizsgálata kínálkozik, hogy $\left|f(x_n)\right| < \varepsilon$ valamely előre megadott $\varepsilon > 0$-ra. Ha a gyök közelében $|f'| \ll 1$, akkor ez túl hamar történő leállást eredményezhet, míg $|f'| \gg 1$ esetén az iteráció túl soká tarthat. Ezért inkább az $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ kritériumot alkalmazzuk. Ez csak nagyon lassan konvergáló fixpontmódszer esetén (azaz ha a kontrakcióra a Lipschitz-konstans nagyon közel van egyhez) hátrányos; ezt észrevehetjük Aitken Δ^2-módszerével.

A módszerek Banach-terekre való általánosítását a differenciálszámításnál tárgyaltuk.

	felezés	húr	módosított Newton
0	1,500000000000000	1,500000000000000	2,000000000000000
1	3,000000000000000	3,000000000000000	1,900995594203909
2	2,250000000000000	1,731105741103194	1,896061839711735
3	1,875000000000000	1,835346758106057	1,895554271020856
4	2,062500000000000	1,874711941565929	1,895500626429194
5	1,968750000000000	1,888467091368380	1,895494941197443
6	1,921875000000000	1,893136039488919	1,895494338504453
7	1,898437500000000	1,894704904454640	1,895494274610843
8	1,886718750000000	1,895230273680515	1,895494267837234
9	1,892578125000000	1,895406002936673	1,895494267119137
10	1,895507812500000	1,895464759477905	1,895494267043009
11	1,894042968750000	1,895484402686160	1,895494267034938
12	1,894775390625000	1,895490969427515	1,895494267034082
13	1,895141601562500	1,895493164663164	1,895494267033992
14	1,895324707031250	1,895493898518221	1,895494267033982
15	1,895416259765625	1,895494143841487	1,895494267033981
16	1,895462036132813	1,895494225851513	1,895494267033981

	szelő	Newton
0	1,500000000000000	1,500000000000000
1	3,000000000000000	2,076558200630435
2	1,731105741103194	1,910506615659081
3	1,835346758106057	1,895622002987846
4	1,902230210959766	1,895494276472771
5	1,895250943924996	1,895494267033981
6	1,895493322966086	1,895494267033981
7	1,895494267166912	
8	1,895494267033981	
9	1,895494267033981	

Táblázat: a konvergencia rendje

∗ **17.27. Egy példa.** Tekintsük a $2\sin x - x = 0$ egyenletet, és határozzuk meg egyetlen pozitív gyökét. Az ismertetett eljárásokkal a táblázatokban látható eredményeket kapjuk.

∗ **17.28. A konvergencia rendje.** Mint az előző példából látjuk, a húrmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben ugyanannyival nő, amit úgy szokás kifejezni, hogy a módszer konvergens *elsőrendben konvergens*. A Newton-féle érintőmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben kb. megduplázódik, a Newton-módszer *másodrendben konvergens*; ezt jóval általánosabb esetben, a differenciálszámításnál bizonyítjuk. A szelőmódszernél minden lépésben a helyes jegyek száma kb. 1,6-szeresére nő, megmutatható hogy a szelő módszer *konvergencia rendje* $(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1{,}6$.

Megjegyezzük, hogy a módosított Newton-módszer is elsőrendben konvergens, és többszörös gyökök esetében, tehát ha nem csak $f(\alpha) = 0$, hanem $f'(\alpha) = 0$ is teljesül, akkor a Newton-módszer is csak elsőrendben konvergens: Valóban, az általánosabb kvázi

Newton módszerre (de $f'(x)$-et használva), ha $f(x) = 0$, azaz x a gyök, és $f^{(m)}(x)$ az első el nem tűnő derivált, f pedig lokálisan $\mathcal{C}^m$-ben van, akkor a Taylor-formulából

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x_n - x)^m \quad \text{és} \quad f'(x_n) \approx \frac{f^{(m)}(\xi')}{(m-1)!}(x_n - x)^{m-1},$$

így

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \approx x_n - \alpha_n \frac{x_n - x}{m},$$

ahonnan $x_{n+1} - x \approx (1 - \alpha_n/m)(x_n - x)$, azaz $\alpha_n = \alpha \neq m$ esetén a konvergencia lineáris, a hiba $x_n - x \approx cq^n$ a $q = 1 - \alpha/m$ értékkel. Megmutatható, hogy $\alpha = m$ esetén a konvergencia másodrendű lesz. Ha nem ismerjük m értékét, akkor az Aitken-módszernél leírtak szerint q – és így m is – minden második lépésben újra becsülhető; így kapjuk az *adaptív Newton-módszer*t.

∗ **17.29. Feladat [7].** Készítsünk programot az előző példában bemutatott számítások elvégzésére.

∗ **17.30. Feladat [8].** Mely módszerek alkalmazhatók a

$$4\sin^2 x - 4x \sin x + x^2 = 0$$

egyenlet egyetlen pozitív gyökének meghatározására, az egyenlet átalakítása nélkül? Milyen gyors lesz a konvergencia?

∗ **17.31. Feladat [10].** Számítsuk ki $\sqrt[n]{a}$-t az $x^n = a$ egyenlet Newton-módszerrel történő megoldásával.

∗ **17.32. Feladat [8].** Határozzuk meg $\sqrt{110}$ értékét a négyzetszámok gyökeiből, interpolációval.

∗ **17.33. Feladat [11].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a tanult módszerekkel és megállási kritériumokkal:

(1) $\cos^2(2x) - x^2 = 0$;

(2) $\prod_{k=1}^{10}(x + k) = 0$;

(3) $x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$;

(4) $e^{-x} - \eta = 0$, $\eta = 10^{-9}$;

(5) $(x^2 - 1)^{m-1} \ln x = 0$, $m = 3, 5, 7$.

∗ **17.34. Feladat [9].** Határozzuk meg 1 mól CO_2 térfogatát 300 K°-on 10 atm (1013250 Pa) nyomáson a van der Waals-állapotegyenletből:

$$(p + a(n/V)^2)(V/n - b) = nRT,$$

ahol n a mólok száma. A van der Waals-állandók CO_2-ra $a/(\text{Pa}\,\text{m}^6\text{K}^\circ/\text{mól}^2) = 188{,}33$ és $b/(\text{m}^3\text{K}^\circ/\text{mól}) = 9{,}77 \cdot 10^{-4}$. Vessük össze az eredményt a tökéletes gázra kapott eredménnyel.

∗ **17.35. Feladat [9].** Egy alagútdióda karakterisztikája

$$I = \alpha(e^{U/\beta} - 1) - \mu U(U - \gamma),$$

ahol $\alpha/\mathrm{A} = 10^{-12}$, $\beta/\mathrm{V} = 25 \cdot 10^{-3}$, $\mu/(\mathrm{A/V^2}) = 10^{-3}$ és $\gamma/\mathrm{V} = 0{,}4$. Sorbakötjük egy 3333 Ω-os ellenállással egy 0,4 V-os feszültségforrásra. Határozzuk meg a kialakuló munkapontokat. Mi a helyzet, ha a feszültség 0,6 V, az ellenállás pedig 12 kΩ?

∗ **17.36. A legkisebb négyzetek módszere.** A közelítendő függvény mért értékei sokszor elég nagy hibát tartalmaznak. Ilyenkor nem célszerű azt kívánni, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen a mért értékekkel, mert akkor a hibát is tartalmazza. Elég azt megkövetelni, hogy a mért értékek közelében legyen. A módszer értelmében tehát az $a_1, \ldots, a_m$ paramétereket úgy kell megválasztani, hogy ha $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ a mért értékek, akkor a

$$\Phi(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i (f(x_i) - g(x_i, a_1, \ldots, a_m))^2$$

eltérés minimális legyen. Itt a w_i-k pozitív súlyok, amelyeket az $f(x_i)$ értékek szórásnégyzete reciprokának célszerű választani. Ezt a minimumot a $\nabla\Phi(a_1, \ldots, a_m) = 0$ egyenletrendszer megoldásával kereshetjük.

Ha speciálisan

$$g(x, a_1, \ldots, a_m) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_m g_m(x),$$

akkor célszerű bevezetni függvényekre a

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(x_i) \psi(x_i)$$

belső szorzatot. Ez egy olyan μ mértékhez tartozó $\mathbb{L}^2$ térnek felel meg, amelyre az x_i pont mértéke w_i, az x_i-k közül egyet sem tartalmazó halmazok pedig nullmértékűek. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \langle g_k, g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. A megoldás különösen egyszerű, és a számítási hibák kicsik, ha a g_k függvények ortogonálisak. Ezt úgy érhetjük el, hogy a $g_1, \ldots, g_m$ függvényeket egy $h_1, \ldots, h_m$ függvényrendszerből a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással állítjuk elő. A közelítendő és a közelítő függvény távolságát mérő $\delta_m = \Psi(a_1, \ldots, a_m)$ mennyiség az $f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j$ hibafüggvény önmagával vett belső szorzata.

Ha valós változós polinomközelítést keresünk, akkor $h_1(x) = 1$, $h_2(x) = x$, és $h_{k+1}(x) = x g_k(x)$ választással érdemes dolgozni, mert ekkor a rekurzív formulánál látott ötlettel $\langle h_{k+1}, g_j \rangle = \langle g_k(x), x g_j(x) \rangle = 0$, ha $j < k - 1$. A fokszámot addig érdemes növelni, amíg a $\delta_m/(n-m)$ mennyiség lényegesen csökken. Vegyük észre, hogy a fokszám túlzott növelésével interpoláló függvényhez jutunk.

∗ **17.37. Simítás.** Ha a keresendő függvényről nem tételezhető fel, hogy az egész értelmezési tartományán egy polinommal jól közelíthető, akkor is csökkenthetjük a véletlen hibákat *simítás*sal. Ha például az x_i pont egy környezetében feltehető, hogy ott a keresett függvény jól közelíthető egy egyenessel, akkor az ezen környezetben lévő pontokra a legkisebb négyzetek módszerével egy lineáris függvényt illesztünk, és ezen függvény x_i helyen felvett értéke lesz az új, simított érték. Legtöbbször a simításhoz a legközelebbi 3 vagy 5 pontot használjuk. Az (x_j, y_j) pontokra a legkisebb négyzetek módszerével illeszthető egyenes egyenlete:

$$y - m_y = \frac{r}{s_x}(x - m_x),$$

ahol m_x az x_j-k, m_y az y_j-k átlaga, és

$$s_x = \sum_j (x_j - m_x)^2, \qquad r = \sum_j (x_j - m_x)(y_j - m_y).$$

∗ **17.38. Feladat [9].** 50 C°-on, különböző nyomásokon megmértük 1 móI NH_3 térfogatát:

P/kPa	118,6	498	957	1573
V/dm^3	22,13	5,11	2,55	1,456

Határozzuk meg a van der Waals-állandókat.

∗ **17.39. Feladat [8].** Egy Weston-elem feszültsége 20 C°-tól eltérő hőmérsékleten, az eltérés függvényében:

δ/C°	−10	−5	0	5	10	15
U/V	1,01895	1,01883	1,01865	1,01842	1,01816	1,01786

Adjunk egy polinomközelítést az $U = f(\delta)$ függvényre.

∗ **17.40. Feladat [8].** Folyadékok gőznyomása az $\ln P = A + B/T$ összefüggés szerint változik. Határozzuk meg az A és B állandókat aceton esetében, ha

P/MPa	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4
t/C°	56,5	78,6	113,0	144,5	181,0	205,0	214,5

∗ **17.41. Egyenletesen jó közelítések.** Ilyen közelítéseket akkor szoktunk használni, ha a közelítendő függvényt pontosan ismerjük, de csökkenteni szeretnénk a függvényértékek meghatározásához szükséges munkát. Csak a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett valós értékű f függvény polinomközelítéseivel fogunk foglalkozni, bár hasonló a racionális törtfüggvényekkel és trigonometrikus polinomokkal való közelítések elmélete is. Minden polinomközelítés a minimális hibára egy triviális felső becslést ad. Egy „elég jó” közelítés birtokában az alábbi tétel mindig lehetővé teszi, hogy egy alsó becslést is kapjunk a minimális hibára.

∗ **17.42. de la Vallée Poussin tétele.** *Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, és p egy valós együtthatós n-nél alacsonyabb fokú polinom. Ha az $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$ pontokban $f - p$ váltakozó előjelű értékeket vesz fel, akkor bármilyen, n-nél alacsonyabb fokú q polinomra $\sup_{a \le x \le b} |f(x) - q(x)| \ge \min_i |f(x_i) - p(x_i)|$.*

Bizonyítás. Az indirekt feltevésből

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(p(x_i)-q(x_i)) &= \operatorname{sgn}\Big((p(x_i)-f(x_i))-(q(x_i)-f(x_i))\Big)\\ &= \operatorname{sgn}(p(x_i)-f(x_i)),\end{aligned}$$

mivel az első összeadandó nagyobb a másodiknál, ami azt jelenti, hogy az n-nél alacsonyabb fokú $p-q$ polinom legalább n-szer vált előjelet.

∗ **17.43. Csebisev tétele.** *Legyen X egy legalább $n+1$ pontot tartalmazó kompakt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, és $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. A p akkor és csak akkor az f-et legjobban approximáló n-nél alacsonyabb fokú polinom, ha léteznek olyan X-beli $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ pontok, amelyekben $f-p$ váltakozó előjellel veszi fel a $\pm\|f-p\|$ értékeket. A p polinom egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. A de la Vallée Poussin-tételből következik, hogy az adott tulajdonságú $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ pontok létezése elégséges. Megmutatjuk, hogy ha ilyen pontok nem léteznek, akkor $\|f-p\|$ nem lehet minimális. Nyilván $\|f-p\| > 0$. Legyen $e = f-p$, és jelölje E^+ illetve E^- az X azon x pontjainak halmazát, amelyekre $e(x) = \|e\|$, illetve $e(x) = -\|e\|$. Legyen $E = E^+ \cup E^-$. Az E^+ és E^- halmazok diszjunkt kompakt halmazok, és feltehetjük, hogy $\inf E^+ < \inf E^-$, mert egyébként áttérhetünk f helyett $-f$-re. Indukcióval válasszunk olyan $\min X = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ pontokat, hogy $y_i \notin E$, ha $i > 0$ és $[y_{i-1}, y_i] \cap E^- = \emptyset$ de $[y_{i-1}, y_i] \cap E^+ \neq \emptyset$, ha i páratlan és $[y_{i-1}, y_i] \cap E^+ = \emptyset$, de $[y_{i-1}, y_i] \cap E^- \neq \emptyset$, ha i páros. Mivel az adott tulajdonságú $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ pontok nem léteznek, az így kapott sorozat csak véges lehet, ha y_r az utolsó tagja, akkor $r \leq n$, és feltehetjük, hogy $y_r = \max X$. Legyen $p_0(x) = (-1)^{r-1}\prod_{i=1}^{r-1}(x-y_i)$. Ekkor az E halmaz minden pontjának van olyan X-ben mint altérben nyílt környezete, ahol p_0 nem nulla, és előjele megegyezik e előjelével. Válasszunk ki E így kapott nyílt lefedéséből egy véges lefedést, és legyen V a véges lefedés egyesítése. Az $X \setminus V$ kompakt halmazon $|e|$ szuprémuma kisebb, mint $\|e\|$. Így elég kis $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sup_{x\in X\setminus V}\big|e(x)-\varepsilon p_0(x)\big| \leq \sup_{x\in X\setminus V}\big|e(x)\big| + \varepsilon\|p_0\| < \|e\|.$$

Másrészt, a V halmazon e és p_0 előjele megegyezik, így $0 < \varepsilon < \|e\|/(2\|p_0\|)$ esetén

$$\big|e(x)-\varepsilon p_0(x)\big| < \max\Big\{\big|e(x)\big|, \|e\|/2\Big\}.$$

Azt kapjuk tehát, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $|e-\varepsilon p_0| < \|e\|$. Ez azt jelenti, hogy $p+\varepsilon p_0$ jobb approximációja f-nek, mint p.

Tegyük fel, hogy p_1 és p_2 két legjobb approximációja f-nek n-nél alacsonyabb fokú polinomokkal. Ekkor $p = (p_1+p_2)/2$ is egy legjobb approximáció. De ha $\big|f(x)-p(x)\big| = \|f-p\|$, akkor $p_1(x) = p_2(x) = p(x)$, és ez legalább $n+1$ pontban teljesül, így $p_1 = p_2$.

∗ **17.44. Következmény.** *Bármely, a T_n, $n > 0$ Csebisev-polinommal egyező fokszámú és főegyütthatójú p polinomra $\mathcal{C}[-1,1]$-ben $\|p\| \geq \|T_n\| = 1$.*

Bizonyítás. A p és a T_n is úgy tekinthetők, mint a főtagnak egy n-nél alacsonyabb fokú polinommal történő közelítésénél a hibafüggvény. Ennek normája T_n-re az előző tétel szerint minimális, mert a $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ összefüggés szerint T_n a $\cos(k\pi/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ pontokban váltakozó előjellel veszi fel a $\|T_n\| = 1$ értéket.

∗ **17.45. A közelítés javítása.** Az előző következmény lehetővé teszi, hogy egy függvény egy ε hibájú, n-ed fokú polinomközelítésének fokszámát eggyel csökkentsük úgy, hogy közben a hiba lehetőleg keveset nőjön. Ez úgy történik, hogy a legmagasabb fokú $a_n x^n$ tagot egy n-nél alacsonyabb fokú p polinommal közelítjük. A p-t nyilván úgy érdemes megválasztani, hogy $x \mapsto a_n x^n - p(x)$ normája minimális legyen. A $[-1,1]$-en ezt elérjük, ha a különbség a T_n Csebisev-polinom egy konstansszorosa. Mivel T_n főegyütthatója 2^{n-1}, ha $n > 0$, a csökkentett fokszámú közelítés hibája legfeljebb $\varepsilon + |a_n|2^{1-n}$ lesz. Alsó becslést is kaphatunk. Az új közelítés hibája nem lehet kisebb, mint $|a_n|2^{1-n} - \varepsilon$, mert egyébként a háromszög-egyenlőtlenség szerint az eredeti közelítés hibája kisebb lenne, mint ε.

Alacsony fokszámú, de mégis jó közelítő polinomot úgy kaphatunk, hogy egy pontos, de magas fokszámú polinomközelítés fokszámát alkalmasan csökkentjük. Ez megtehető a fent leírt eljárás ismétlésével. A Csebisev-polinomok a rekurzív formula segítségével könnyen számolhatók. A fokszám csökkentését addig folytatjuk, amíg a hiba még megengedhető. A kezdeti pontos közelítést kaphatjuk például a Taylor-sor felhasználásával, vagy az alábbi tétel alapján, interpolációval, T_n zérushelyeit választva alappontnak.

∗ **17.46. Tétel.** *Legyen f folytonos, valós értékű függvény $[-1,1]$-en. Ha p a*

$$\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

alappontokhoz tartozó interpolációs polinom, akkor $n \leq 20$ esetén hibája legfeljebb négyszer, $n \leq 100$ esetén hibája legfeljebb ötször akkora, mint bármely, az f-et közelítő legfeljebb n-ed fokú polinom hibája.

A pontos hivatkozást lásd Henrici [64] könyvében, 226. o.

∗ **17.47. Megjegyzés.** A fent leírt módszer, különösen sima függvényeknél, elég jó egyenletes közelítés eredményezhet, de így az egyenletesen legjobb polinomközelítést nem tudjuk megtalálni. Ha egy X véges halmazon az f és $g_1, \ldots, g_n$ valós függvények adottak, és keressük az f-et legjobban közelítő (valamelyik) $\sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ lineáris kombinációt, akkor azt megkaphatjuk a $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ és e ismeretlenekre vonatkozó

$$c_1 g(x) + \cdots + c_n g_n(x) - f(x) \leq e, \quad c_1 g_1(x) + \cdots + c_n g_n(x) - f(x) \geq -e,$$

ha $x \in X$ és $e \to \min$ lineáris programozási feladat megoldásaként. Az alábbi tétel tetszőleges X kompakt metrikus téren ad algoritmust az egyenletesen legjobb közelítés előállítására ilyen közelítések határértékeként.

∗ **17.48. Remes első algoritmusa.** *Legyen X kompakt metrikus tér, $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ és G egy véges dimenziós altere $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$-nek. Ekkor létezik olyan $X_1 \subset X$ véges halmaz, hogy a G-beli függvények X_1-re vett megszorításai ugyanannyi dimenziós lineáris teret alkotnak, mint G. Teljes indukcióval definiáljuk az $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ véges halmazokat: jelölje g_i azt a G-beli függvényt, amelyre $\|f|X_i - g_i|X_i\|_{\mathcal{C}(X_i)}$ minimális, legyen x_i egy olyan X-beli pont, amelyre $\big|f(x) - g_i(x)\big|$ maximális, és legyen $X_{i+1} = X_i \cup \{x_i\}$. Ekkor*

$$\|f|X_k - g_k|X_k\|_{\mathcal{C}(X_k)} \uparrow \inf_{g \in G} \|f - g\|_{\mathcal{C}(X)},$$

és a g_k sorozat bármely g_0 torlódási pontjára $\|f - g_0\|_{\mathcal{C}(X)}$ minimális.

Bizonyítás. Legyen $b_1, \dots, b_n$ egy bázisa G-nek. Az X_1 választható n eleműnek; létezését n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, az állítás triviális. Tegyük fel, hogy sikerült olyan $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ pontokat választani, hogy $\det(b_i(y_j))_{i,j=1}^{n-1} \neq 0$. Ha az $y_n \mapsto \det(b_i(y_j))_{i,j=1}^{n}$ függvény azonosan nulla lenne, akkor a determinánst az utolsó sor szerint kifejtve az $y_n \mapsto b_j(y_n)$ függvények egy nem csupa nulla együtthatókkal képzett lineáris kombinációját kapnánk, amely azonosan nulla.

Ha $h \in \mathcal{C}(X)$, legyen $\|h\| = \|h\|_{\mathcal{C}(X)}$ és $\|h\|_k = \|h\|_{\mathcal{C}(X_k)}$. Megjegyezzük, hogy $\| \ \|_k$ nem norma, csak félnorma, azonban az X_1 altéren $\| \ \|_1$ norma. Nyilván $\|h\|_k \leq \|h\|_{k+1} \leq \|h\|$ bármely $h \in \mathcal{C}(X)$-re. Így

$$\|f - g_k\|_k \leq \|f - g_{k+1}\|_k \leq \|f - g_{k+1}\|_{k+1}$$

és

$$\|f - g_k\|_k = \inf_{g \in G} \|f - g\|_k \leq \inf_{g \in G} \|f - g\|.$$

Mivel G-n $\| \ \|_1$ ekvivalens $\| \ \|$-val, ha $\|g\|$ nagy, biztosan nem lehet $\|f - g\|_k$ minimális. Így a g_k sorozat korlátos. Ha g_0 a sorozat egy torlódási pontja, akkor bármely $\delta > 0$-hoz van olyan k, hogy $\|g_0 - g_k\| < \delta$, és van olyan $i > k$, hogy $\|g_0 - g_i\| < \delta$. Nyilván $\|g_i - g_k\| < 2\delta$. Innen

$$\begin{aligned} \inf_{g \in G} \|f - g\| \leq \|f - g_0\| &\leq \|f - g_k\| + \delta = \big|f(x_k) - g_k(x_k)\big| + \delta \\ &\leq \big|f(x_k) - g_i(x_k)\big| + 3\delta \leq \|f - g_i\|_i + 3\delta \leq \lim_{j \to \infty} \|f - g_j\|_j + 3\delta, \end{aligned}$$

és mivel δ tetszőleges volt, $\inf_{g \in G} \|f - g\| = \|f - g_0\| = \lim_{j \to \infty} \|f - g_j\|_j$.

∗ **17.49. Következmény.** *Ha az f függvény G-beli legjobb közelítése egyértelmű, akkor a g_k sorozat ehhez konvergál.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása szerint g_k korlátos sorozat, így ha csak egy torlódási pontja van, akkor konvergens.

∗ **17.50. Tétel.** *Legyen (X, d) kompakt metrikus tér, $f \in \mathcal{C}(X)$, és G egy véges dimenziós altere $\mathcal{C}(X)$-nek. Ha $Y \subset X$, akkor jelölje g_Y (bármely) olyan elemét G-nek, amelyre $g_Y|Y$ egy legjobb approximációja $f|Y$-nak $\mathcal{C}(Y)$-ban. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha Y egy δ-háló X számára, akkor*

$$0 \leq \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(X)} - \|f - g_X\|_{\mathcal{C}(X)} \leq \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $g_1, g_2, \dots, g_n$ egy bázisa G-nek. Ha $\delta > 0$, legyen

$$\omega(\delta) = \sup\Big\{\big|f(x) - f(y)\big| \colon x, y \in X, |x - y| \leq \delta\Big\},$$

és legyen

$$\Omega(\delta) = \sup\Big\{\big|g_i(x) - g_i(y)\big| \colon x, y \in X, |x - y| \leq \delta, i = 1, 2, \dots, n\Big\}.$$

Mivel az f illetve $g_1, g_2, \dots, g_n$ függvények egyenletesen folytonosak X-en, $\omega(\delta) \downarrow 0$ és $\Omega(\delta) \downarrow 0$, ha $\delta \downarrow 0$. Legyen C a $\| \sum_{i=1}^n c_i g_i \|_{\mathcal{C}(X)}$ minimuma a $\sum_{i=1}^n |c_i| = 1$ kompakt halmazon.

Első lépésként megbecsüljük egy tetszőleges $g = \sum_{i-1}^n c_i g_i \in G$ függvény $\mathcal{C}(X)$-beli normáját a $\mathcal{C}(Y)$-beli normájával. Legyen $x \in X$ egy olyan pont, amelyre $|g(x)|$ maximális, és y egy olyan pontja Y-nak, amelyre $d(x,y) \le \delta$. Ekkor

$$C \sum_{i=1}^n |c_i| \le \|g\|_{\mathcal{C}(X)} = \big|g(x)\big| \le \big|g(x) - g(y)\big| + \big|g(y)\big|$$
$$\le \sum_{i=1}^n |c_i| \big|g_i(x) - g_i(y)\big| + \|g\|_{\mathcal{C}(Y)} \le \Omega(\delta) \sum_{i=1}^n |c_i| + \|g\|_{\mathcal{C}(Y)}.$$

Innen

$$\sum_{i=1}^n |c_i| \le \frac{\|g\|_{\mathcal{C}(Y)}}{C - \Omega(\delta)}$$

és

$$\|g\|_{\mathcal{C}(X)} \le \Omega(\delta) \frac{\|g\|_{\mathcal{C}(Y)}}{C - \Omega(\delta)} + \|g\|_{\mathcal{C}(Y)} = \|g\|_{\mathcal{C}(Y)} \left(1 + \frac{\Omega(\delta)}{C - \Omega(\delta)}\right).$$

Második lépésként megmutatjuk, hogy

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}(X)} \le \|f - g\|_{\mathcal{C}(Y)} + \omega(\delta) + \frac{\Omega(\delta)}{C} \|g\|_{\mathcal{C}(X)}.$$

Ennek bizonyítására válasszunk egy $x \in X$ pontot, amelyre $|f(x) - g(x)|$ maximális. Válasszunk egy olyan $y \in Y$ pontot, amelyre $d(x,y) \le \delta$. Ekkor

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}(X)} = \big|f(x) - g(x)\big| \le \big|f(x) - f(y)\big| + \big|f(y) - g(y)\big| + \big|g(y) - g(x)\big|$$
$$\le \omega(\delta) + \|f - g\|_{\mathcal{C}(Y)} + \sum_{i=1}^n |c_i| \big|g_i(y) - g_i(x)\big|.$$

Az utolsó tag legfeljebb $\|g\|_{\mathcal{C}(X)} \Omega(\delta)/C$.

Végül nyilván

$$\|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(Y)} \le \|f - g_X\|_{\mathcal{C}(Y)} \le \|f - g_X\|_{\mathcal{C}(X)} \le \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(X)},$$

így

$$0 \le \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(X)} - \|f - g_X\|_{\mathcal{C}(X)} \le \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(X)} - \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(Y)}$$
$$\le \omega(\delta) + \frac{\Omega(\delta)}{C} \|g_Y\|_{\mathcal{C}(X)}.$$

A bizonyítás befejezéséhez megbecsüljük $\|g_Y\|_{\mathcal{C}(X)}$-et:

$$\|g_Y\|_{\mathcal{C}(X)} \le \|g_Y\|_{\mathcal{C}(Y)} \frac{\Omega(\delta)}{C - \Omega(\delta)},$$

és

$$\|g_Y\|_{\mathcal{C}(Y)} \le \|g_Y - f\|_{\mathcal{C}(Y)} + \|f\|_{\mathcal{C}(Y)} \le \|0 - f\|_{\mathcal{C}(Y)} + \|f\|_{\mathcal{C}(X)} \le 2\|f\|_{\mathcal{C}(X)}.$$

Így végül is

$$0 \le \|f - g_Y\|_{\mathcal{C}(X)} - \|f - g_X\|_{\mathcal{C}(X)} \le \omega(\delta) + \frac{2\Omega(\delta)^2}{C(C - \Omega(\delta))} \|f\|_{\mathcal{C}(X)} \to 0,$$

ha $\delta \to 0$.

∗ **17.51. Tétel.** *Az előző tétel jelöléseivel, ha az f függvény g_X legjobb appoximációja egyértelmű, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha Y egy δ-háló X számára, akkor (bármely) g_Y-ra $\|g_X - g_Y\| < \varepsilon$. (A norma $\mathcal{C}(X)$-ben értendő.)*

Bizonyítás. Ha $\varepsilon > 0$, legyen

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{\|f - g\| - \|f - g_X\| \colon g \in G, \|g - g_X\| \geq \varepsilon\}.$$

Mivel ha $\|g\|$ nagy, akkor $\|f - g\| - \|f - g_X\|$ is nagy, az infimum felvétetik és g_X egyértelműsége miatt pozitív. Ha most $\|f - g_Y\| - \|f - g_X\| < \delta(\varepsilon)$, akkor $\|g_Y - g_X\| < \varepsilon$.

∗ **17.52. Feladat [8].** Adjunk meg 2^x-et $[0, 1]$-en 10^{-3}-nál pontosabban közelítő, alacsony fokszámú polinomot.

∗∗ **17.53. Feladat [16].** Írjunk egy adott pontosságú számítógépen e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ és $\arctan x$ lehető legpontosabb kiszámítására alkalmas programokat az alapműveletek felhasználásával.

∗∗∗ **17.54. Feladat [17].** Írjunk programot a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének gyors és pontos számítására.

Megoldás. Lásd Frank–Mises I, 240. o.

∗ **17.55. Periodikus függvények közelítése.** Periodikus függvények közelítésekor periodikus függvényekkel való közelítéseket célszerű választani. A komplex írásmód előnyei miatt vizsgáljuk egy valós változós, komplex értékű, 1 szerint periodikus függvény közelítését egy

$$\sum_k c_k g_k, \qquad g_k(x) = e^{2\pi i k x}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

alakú véges lineáris kombinációval. (Az Euler-féle összefüggéssel könnyű áttérni valós közelítésre, ha szükséges.) Legkisebb négyzetes közelítés keresésekor legtermészetesebb n pontból álló ekvidisztáns $x_j = j/n$ alappontrendszer választani, egyenlő, $w_j = 1/n$ súlyokkal. Mivel $f(x_0) = f(x_n)$, mindegy, hogy $0 \leq j < n$ vagy $0 < j \leq n$. Ezen a pontrendszeren g_k és g_j megegyeznek, ha $k \equiv j \pmod n$, egyébként pedig a megfelelő belső szorzatra nézve ortogonálisak és normáltak, így ha a k indexek inkongruensek (mod n), akkor az együtthatókra $f_j = f(j/n)$, $\omega = e^{-2\pi i/n}$ jelöléssel a

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{jk} \tag{1}$$

összefüggéseket kapjuk. Speciálisan, ha a k index egy (mod n) teljes maradékosztályt fut be, akkor az interpoláció esetét kapjuk.

∗ **17.56. Diszkrét Fourier-transzformáció.** Az előző pont jelöléseivel, osszuk a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre, és közelítsük a Fourier-együtthatókat a trapéz formulával. A c_k közelítésekre az előző pont (1) összefüggése adódik. Ugyanez adódik, ha az f függvény $2l$ szerint periodikus, és $f_j = f(2lj/n)$. Ha f az $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény, akkor a $[-l, l]$ intervallumon dolgozva, nagy l esetén a $2lc_k$ számokkal az $\hat{f}$ Fourier-transzformált k/l helyen felvett értéke közelíthető, ha felhasználjuk a Fourier-sor és a Fourier-transzformált

közti kapcsolatot. (Természetesen csak $|k| \ll n/2$ esetén várhatunk jó közelítést. Ha $|k|$ nagy, a közelítés már csak azért sem lehet jó, mert $c_k = c_{k+n}$ minden k-ra. Meglepő tény, hogy ha Romberg módszerével próbáljuk javítani a közelítést, az inkább romlik. Ennek okáról lásd Henrici [64], 322. o.) Ez az észrevétel is az előző pontban szereplő (1) összefüggés jelentőségét támasztja alá. Érdemes tehát bevezetni az

$$F\colon (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \mapsto (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}), \quad \hat{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{jk}$$

lineáris leképezést, amelyet *diszkrét Fourier-transzformáció*nak nevezünk. Ezzel $c_k = \hat{f}_k/n$. A diszkrét Fourier-transzformáció olyan fontos leképezés, hogy gyors végrehajtására integrált áramköröket gyártanak, számos műszaki alkalmazással (lásd Simonyi [153]).

∗ **17.57. Feladat [8].** Az előző pont jelöléseivel, mutassuk meg, hogy F^2 az

$$(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$$

sorozathoz az

$$n(f_{n-1}, \dots, f_1, f_0)$$

sorozatot rendeli, és $F^{-1} = \overline{F}/n$.

∗ **17.58. Feladat: gyors Fourier-transzformáció, FFT [11].** A diszkrét Fourier-transzformációnál használt jelölésekkel, vegyük észre, hogy $\hat{f}_j$ nem más, mint a $p(x) = \sum_{j=0}^{k} f_j x^j$ polinom $x_j = \omega^j$ helyen felvett értéke. Az $\hat{f}_j$ értékek gyors kiszámításához vezető trükk: ha $k|n$, akkor $y = x^k$ jelöléssel

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} x^j p_j(y),$$

ahol

$$p_j(y) = \sum_{l=0}^{n/k-1} f_{kl+j} y^l, \qquad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Ha $x = \omega^j, \omega^{j+n/k}, \dots, \omega^{j+(k-1)n/k}$, akkor y ugyanaz, így minden kiszámított $p_j(y)$ érték többször is felhasználható. Például, ha $k = 2$, akkor a p polinom ω^j és $\omega^{j+n/2}$ helyen felvett értékeit egyszerre számolhatjuk ki (azt is felhasználva, hogy $\omega^{n/2} = -1$) az alábbi *pillangó művelet*tel:

$$p(\omega^j) = p_0(\omega^{2j}) + \omega^j p_1(\omega^{2j})$$
$$p(\omega^{j+n/2}) = p_0(\omega^{2j}) - \omega^j p_1(\omega^{2j})$$

Például, ha $n = 8$, $k = 2$, akkor $x = \omega^j$ és $x = \omega^{j+4}$ esetén y értéke ω^{2j}, így az

$$f_0 + f_2 y + f_4 y^2 + f_6 y^3$$

és

$$f_1 + f_3 y + f_5 y^2 + f_7 y^3$$

értékeket kétszer is tudjuk használni, így a munkát nagyjából megfeleztük. Természetesen rekurzívan is alkalmazhatjuk ezt a trükköt. Az alábbi, együtthatóikkal adott polinomok értékeit kell kiszámolnunk a megadott helyeken:

$$\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7 \\ \omega^0, & \omega^1, & \omega^2, & \omega^3, & \omega^4, & \omega^5, & \omega^6, & \omega^7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_0, & f_2, & f_4, & f_6 \\ \omega^0, & \omega^2, & \omega^4, & \omega^6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1, & f_3, & f_5, & f_7 \\ \omega^0, & \omega^2, & \omega^4, & \omega^6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_0, & f_4 \\ \omega^0, & \omega^4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_2, & f_6 \\ \omega^0, & \omega^4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1, & f_5 \\ \omega^0, & \omega^4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_3, & f_7 \\ \omega^0, & \omega^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_4 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_2 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_6 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_5 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_3 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_7 \\ \omega^0 \end{pmatrix}$$

A fentiek alapján írjunk rekurzív programot a diszkrét Fourier-transzformáció elvégzésére. Hány szorzást igényel?

∗ **17.59. Feladat: FFT kettőhatvány alappontra [10].** Az előző feladatban vázolt ötlet alapján a rekurziót kiküszöbölve, az alábbi algoritmust kapjuk. Az algoritmus az $A[j]$, $0 \le j < n = 2^k$ sorozat diszkrét Fourier-transzformáltját számolja ki. Az eredmény az A tömbben keletkezik, de a diszkrét Fourier-transzformált j-edik eleme $A[r_k(j)]$, ahol $r_k(j)$ a j természetes szám k bites bináris reprezentációjának megfordításával kapott természetes szám. A számítás használ egy T segédtáblázatot, amely az ω primitív n-edik egységgyök hatványait tartalmazza, alkalmas sorrendben: $T[j] \leftarrow \omega^{r_{k-1}(j)}$, ha $0 \le j < 2^{k-1}$.

(1) [Inicializálás.] Legyen $l \leftarrow 2^{k-1}$.

(2) [Menet kezdete.] Legyen $i \leftarrow 0$ és $t \leftarrow 0$.

(3) [Pillangósorozat kezdete.] Legyen $j \leftarrow i + l$ és $w \leftarrow T[t]$.

(4) [Pillangó.] Legyen $x \leftarrow A[i]$ és $y \leftarrow wA[i+l]$, majd legyen $A[i] \leftarrow x + y$ és $A[i+l] \leftarrow x - y$, végül legyen $i \leftarrow i + 1$.

(5) [Pillangósorozat vége?] Ha $i < j$, menjünk vissza (4)-re.

(6) [Menet vége?] Ha $j + l < 2^k$, legyen $i \leftarrow j + l$, $t \leftarrow t + 1$ és menjünk vissza (3)-ra.

(7) [Vége?] Legyen $l \leftarrow \lfloor l/2 \rfloor$. Ha $l > 0$, menjünk vissza (2)-re, egyébként az algoritmus véget ért.

Az r_k függvény számítása, a „bitfordítás” eltolásokkal történhet: a függvény változóját balra tolva, egyenként megkapjuk bitjeit, és azokat jobbra tolással összerakjuk fordított sorrendben. Még egyszerűbb $r_k(j+1)$ értékét $r_k(j)$-ből számítani, a *legnagyobb helyiértékű bithez* 1-et hozzáadva, és az átvitelt az *alacsonyabb helyiértékek* felé végezve.

Vegyük észre, hogy ugyanaz a T táblázat különböző k értékekre is megfelel, ha a maximális k értékre számoljuk ki.

Bizonyítsuk be az algoritmus helyességét, belátva, hogy ha az eredeti sorozat a_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, akkor a (2) lépésnél, ha $l = 2^{k-1-q}$ (azaz q menet után vagyunk) egy k-bites j szám bináris alakját $[j_{k-1}j_{k-2}\ldots j_1 j_0]$-al jelölve, ahol $j_i \in \{0, 1\}$ a 2^i együtthatója

a j bináris előállításában,

$$A[s_{k-1}s_{k-2}\dots s_{k-q}t_{k-q-1}t_{k-q-2}\dots t_1t_0] = \sum_{t_{k-1},\dots,t_{k-q}\in\{0,1\}} \omega^{[s_0\dots s_{k-1}][t_{k-1}\dots t_{k-q}0\dots0]} a_{[t_{k-1}\dots t_0]}.$$

∗ **17.60. Feladat: inverz FFT kettőhatvány alappontra [7].** Bizonyítsuk be, hogy az előző pontban megadott algoritmus megfordítható: ha a meneteket fordított sorrendben hajtjuk végre, $l = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$-re, és a (4) pillangó műveletet invertáljuk, akkor a transzformáció inverzét kapjuk:

(4') [Inverz pillangó.] Legyen $x \leftarrow A[i]$, $y \leftarrow A[i+l]$, majd $A[i] \leftarrow (x+y)/2$, $A[i+l] \leftarrow (x-y)/(2w)$, végül $i \leftarrow i+1$.

A felhasznált T táblázat ugyanaz. A kettővel való osztásokat elhagyhatjuk, ha az egész algoritmus elején vagy végén az A tömb minden elemét osztjuk 2^k-val. Vegyük észre azt is, hogy $1/w = \overline{w}$, így nincs szükség osztásra, szorzással is dolgozhatunk.

∗ **17.61. Feladat: valós FFT [9].** Mutassuk meg, hogy egy

$$(a_0, a_1, \dots, a_{2n-1})$$

valós számsorozat diszkrét Fourier-transzformáltjára $\omega = e^{-\pi i/n}$ jelöléssel

$$\overline{\hat{a}_k} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \bar{\omega}^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{(2n-k)j} = \hat{a}_{(2n-k) \bmod 2n}.$$

Mutassuk meg, hogy a $2n$ független valós koordináta kiszámítása redukálható a komplex

$$A_k = a_{2k} + ia_{2k+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

sorozat diszkrét Fourier-transzformáltjának kiszámítására:

$$\left(\hat{A}_k + \overline{\hat{A}}_{n-k}\right) - i\omega^k \left(\hat{A}_k - \overline{\hat{A}}_{n-k}\right) = 2\hat{a}_k,$$

ahol az A-k indexei modulo n értendők.

∗ **17.62. Feladat: gyors polinomszorzás komplex FFT-vel [9].** Mutassuk meg, hogy az $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ és $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ sorozatok diszkrét Fourier-transzformáltjaira $\hat{a}_k\hat{b}_k = \hat{c}_k$, $0 \le k < n$, ahol

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_j b_{n+k-j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{(k-j) \bmod n}$$

(úgynevezett konvolúciós összeg), mert a megfelelő $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ és $\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ polinomok szorzata minden ω^j helyen ugyanazt az értéket veszi fel, mint a $\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ polinom. Mutassuk meg, hogy ha az $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ és $\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ polinomok szorzatának foka kisebb, mint n, akkor éppen a $\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ polinom. Így két Fourier-transzformáció és egy inverz Fourier-transzformáció segítségével megkaphatjuk a szorzatpolinom együtthatóit.

∗ **17.63. Feladat: gyors szorzás és osztás FFT-vel [18].** Mutassuk meg, hogy számok szorzása polinomszorzásra vezethető vissza, ha a számjegyeket egy polinom együtthatóinak tekintjük. Célszerű negatív jegyeket is megengedni, ekkor a konvolúciós összeg tagjainak előjele vegyes és csökken a kerekítési hiba esélye. Becsüljük meg, lebegőpontosan számolva hány bites lehet egy számjegy, hogy ne lépjen fel túlcsordulás. Kísérletezzünk, hogy ha több bites jegyeket engedünk meg, van-e túlcsordulás? Ha az eredmény nem biztos hogy helyes, a szorzatot modulo $2^m \pm 1$ is kiszámolva, ellenőrizzük, hogy valószínűleg helyes-e.

Mutassuk meg, hogy a polinomszorzás is visszavezethető nagy számok szorzására, ha az együtthatók közé „elég sok" nullát teszünk.

Dolgozzunk ki gyors eljárást osztásra illetve polinomosztásra a Newton-iterációt használva fel a reciprok kiszámítására: az $f(x) = c - 1/x$ függvény zérushelyét keressük iterációval:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2x_n - cx_n^2.$$

Skálázást használunk, az $n+1$ bites c számra $2^{2n}/c$-t közelítjük. Polinomokra az eljárás hasonló: ha a $p(x)$ polinom foka n, akkor $x^{2n}/p(x)$-et közelítjük.

∗ **17.64. Feladat [11].** Általánosítsuk a diszkrét Fourier-transzformációt és a gyors Fourier-transzformációt több dimenzióra.

∗ **17.65. Közelítő integrálás és differenciálás.** A függvény egy közelítését integrálva, az integrál egy közelítését nyerjük. Általában interpolációval kapott közelítést integrálunk. A közelítő integrálás módszereit részletesen tárgyaltuk az integrálásnál. Hasonlóan, a függvény egy közelítését deriválva, a derivált egy közelítését kaphatjuk. A hiba jóval nagyobb, mint az eredeti közelítés hibája, ezért már kis hibák esetén is – simító hatása miatt – inkább a legkisebb négyzetek módszerét használjuk, mint interpolációt. Valós változós esetben a deriváltak durva közelítésére alkalmasak az osztott differenciák is, mert

$$f(x_k; \ldots; x_l) = \frac{f^{(l-k)}(\zeta)}{(l-k)!}, \quad \min\{x_k, \ldots, x_l\} \le \zeta \le \max\{x_k, \ldots, x_l\}.$$

∗ **17.66. Feladat [8].** Egy függőlegesen emelkedő rakéta magassága az idő függvényében:

t/s	0	2	4	6	8
h/m	0	98	371	801	1463

Mikor lépte át a hangsebességet?

18
Fourier-transzformáció

Minden hullámra el lehet végezni a spektrális felbontást, azaz bármely hullám előállítható különböző frekvenciájú monokromatikus hullámok szuperpozíciójaként. A felbontás jellegét a térerősség időfüggése határozza meg. Az egyik csoportba tartozó esetekben a felbontás egy diszkrét frekvenciasorozatot tartalmaz. . . . A másik csoportba azok a hullámok tartoznak, amelyek különböző frekvenciák sorozatát tartalmazó Fourier-integrálként állíthatók elő. Ehhez a függvénynek meghatározott feltételeket kell kielégítenie.

Landau–Lifsic [101]

18.1. Integráltranszformációk. A Fourier-transzformáció az integráltranszformációk körébe tartozik. Egy *integráltranszformáció* függvények valamely osztályának egy másik függvényosztályba való leképezése egy

$$(T_K f)(x) = \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

alakú integráloperátor segítségével, K a *magfüggvény*. A Fourier-transzformációnál a magfüggvény

$$K(x,y) = e^{-2\pi i \langle x,y\rangle}, \quad \text{ha} \quad x,y \in \mathbb{R}^n,$$

és az integrálás a Lebesgue-mérték szerint történik. Egy integráltranszformáció jelentősége rendszerint abban van, hogy függvényekkel végzett bonyolult műveleteket egyszerűbb műveletekbe visz át. Például a Fourier-transzformációt két függvény konvolúciójára alkalmazva, a két függvény Fourier-transzformáltjának szorzatát kapjuk, ha pedig a függvényre alkalmazunk egy konstans együtthatós lineáris differenciáloperátort, a kapott függvény Fourier-transzformáltja az eredeti függvény Fourier-transzformáltjának polinomszorosa.

Mivel az integráltranszformációk közül a Fourier-transzformáció a legjelentősebb, csak a Fourier-transzformációval foglalkozunk részletesen.

18.2. A Fourier-sor és a Fourier-transzformáció kapcsolata. A többdimenziós Fourier-soroknál bevezetett jelölésekkel, jelölje a $k_1, k_2, \dots, k_n$ reciprok vektorok által kifeszített $\{\sum_{j=1}^n \xi_j k_j : 0 \le \xi_j \le 1\}$ *reciprok cellát* J, a Lebesgue-mértékét pedig $|J|$. Mindkét cellát toljuk el úgy, hogy az origó legyen a szimmetriaközéppontja. A determinánsok szorzástételéből $|I||J| = 1$, és így

$$c_k = |J| \int_I f(x) e^{-2\pi i \langle x,k\rangle}\, dx.$$

Ha bevezetjük az

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,y\rangle}\, dx$$

Fourier-transzformáltat, akkor azt kapjuk, hogy ha I nagy, és így J kicsi, akkor $c_k \approx \hat{f}(k)|J|$, tehát

$$f(x) \approx \sum_k \hat{f}(k)|J|e^{2\pi i\langle k,x\rangle} \approx \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{2\pi i\langle y,x\rangle}\,dy,$$

ez a Fourier-féle inverziós formula. A Parseval-egyenlőségből az adódik, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \approx \int_I |f|^2 = |I|\sum_k |c_k|^2 = |I|\sum_k \big|\hat{f}(k)\big|^2|J|^2 \approx \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2.$$

18.3. Fourier-transzformáció. Ha f az $\mathbb{R}^n$ valamely részhalmazán értelmezett függvény, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \neq s \in \mathbb{R}$, akkor legyen az f függvény $\tau_x f$ *eltolt*ja, $\sigma_s(f)$ *nyújtott*ja illetve $\check{f}$ *megfordítás*a a

$$(\tau_x f)(y) = f(y-x), \quad \sigma_s(f)(y) = f(y/s), \quad \text{illetve} \quad \check{f}(y) = f(-y)$$

összefüggéssel értelmezve. Ha $t \in \mathbb{R}^n$, legyen $\mathbf{e}_t$ az

$$\mathbf{e}_t(x) = e^{2\pi i\langle t,x\rangle}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel definiálva. Ezeket a függvényeket *karakter*eknek nevezzük. A karakterek eleget tesznek az

$$\mathbf{e}_t(x+y) = \mathbf{e}_t(x)\mathbf{e}_t(y), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletnek, így $\mathbb{R}^n$ additív csoportját az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportjába képező folytonos homomorfizmusok. Nyilván $\overline{\mathbf{e}}_t = \mathbf{e}_{-t}$.

Egy $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ függvény *Fourier-transzformált*ját az

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\mathbf{e}}_t(x)\,dx$$

összefüggéssel értelmezzük. Megjegyezzük, hogy sok könyv az

$$\hat{f}\Big(\frac{t}{2\pi}\Big) = \int f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,dx$$

függvényt, vagy ennek $(2\pi)^{-n}$ illetve $(2\pi)^{-n/2}$-szeresét nevezi Fourier-transzformáltnak. Ennél a jelölésnél t fizikai jelentése körfrekvencia, míg a mi jelölésünknél frekvencia. A Fourier-transzformált egyszerű kapcsolatban van a $t \mapsto \int f(x)e^{-\langle t,x\rangle}\,dx$ Laplace-transzformálttal is, hiszen

$$\hat{f}\Big(\frac{t}{2\pi i}\Big) = \int f(x)e^{-\langle t,x\rangle}\,dx$$

A definícióból azonnal következik, hogy a Fourier-transzformáció lineáris leképezés és

(1) $|\hat{f}| \leq \|f\|_1$;

(2) $\overline{\hat{f}} = \check{\overline{f}}$ (konjugálás);

(3) $(\tau_x f)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\hat{f}$ (eltolás);

(4) $(\mathbf{e}_x f)\hat{} = \tau_x \hat{f}$ (modulálás);

(5) $(\sigma_s(f))\hat{} = |s|^n \sigma_{1/s}(\hat{f})$ (nyújtás);

(6) $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ (a Fourier-transzformáció áthelyezése).

Tegyük fel, hogy f valós változós. Ekkor

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i t x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi t x\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi t x\, dx.$$

A jobb oldali első integrál az *f koszinusz transzformáltját*, a második pedig az *f szinusz transzformáltját* definiálja. Nyilván, ha f páratlan függvény, akkor a koszinusz, ha pedig páros függvény, akkor a szinusz transzformált azonosan nulla. Mivel az f függvény az $(f + \check{f})/2$ páros és az $(f - \check{f})/2$ páratlan függvények összege, a koszinusz transzformáltat csak páros, a szinusz transzformáltat csak páratlan függvény esetén célszerű használni, és ekkor

$$t \mapsto 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi t x\, dx \quad \text{illetve} \quad t \mapsto 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi t x\, dx$$

alakba írhatók. A definícióból látszik, hogy a koszinusz transzformált páros, a szinusz transzformált pedig páratlan függvény, így értékeiket elég nemnegatív t-re ismerni. Előnyük, hogy valós értékű függvények esetén valósak. Mivel a fentiek alapján kifejezhetők f és $\check{f}$ Fourier-transzformáltjaival, a továbbiakban nem foglalkozunk velük.

Egy metrikus téren értelmezett, normált térbeli értékű h függvényre azt mondjuk, hogy *eltűnik a végtelenben*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan K kompakt halmaz, hogy $|f| < \varepsilon$ a K komplementerén.

A Fourier-transzformált nevezetes tulajdonsága, hogy eltűnik a végtelenben.

18.4. Riemann–Lebesgue-lemma. *Egy $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ függvény Fourier-transzformáltja folytonos és eltűnik a végtelenben.*

Bizonyítás. Ha f egy korlátos tégla karakterisztikus függvénye, akkor közvetlen számolással adódik az állítás. Vegyük észre, hogy azok az $f \in \mathbb{L}^1$ függvények, amelyekre az állítás teljesül, az előző definíció (1) egyenlőtlensége miatt zárt lineáris alteret alkotnak $\mathbb{L}^1$-ben. Elég tehát megmutatni, hogy a korlátos téglák karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációi sűrűek $\mathbb{L}^1$-ben. Sőt, azt elég megmutatni, hogy egy Lebesgue-mérhető és véges mértékű $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz karakterisztikus függvénye közelíthető $\mathbb{L}^1$-ben ilyen lineáris kombinációval, mert az integrálható egyszerű függvények sűrűek $\mathbb{L}^1$-ben. Legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy korlátos téglákkal való $A \subset \cup_j T_j$, $j \in \mathbb{N}$ megszámlálható lefedést, amelyre $\sum_j \lambda^n(T_j) < \lambda^n(A) + \varepsilon$. Válasszunk olyan k-t, amelyre $\sum_{j>k} \lambda^n(T_j) < \varepsilon$. Ekkor

$$\int \left(\xi_A - \sum_{j \le k} \xi_{T_j} \right)^+ \le \int \left(\sum_j \xi_{T_j} - \sum_{j \le k} \xi_{T_j} \right) = \sum_{j>k} \int \xi_{T_j} < \varepsilon$$

és

$$\int \left(\xi_A - \sum_{j \le k} \xi_{T_j} \right)^- = \int \left(\sum_{j \le k} \xi_{T_j} - \xi_A \right)^+ \le \int \left(\sum_j \xi_{T_j} - \xi_A \right) < \varepsilon,$$

így $\left\| \xi_A - \sum_{j \le k} \xi_{T_j} \right\|_1 < 2\varepsilon$.

A Riemann–Lebesgue-lemma egy másik bizonyítása azon múlik, hogy ha $1 \le p < \infty$, és $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$, akkor az $x \mapsto \tau_x f$ lineáris leképezése $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$-be folytonos. Ez nyilvánvaló f egyenletes folytonosságából, ha $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, és innen approximációval következik az általános eset. Ezt felhasználva, annak bizonyítására, hogy $\hat f$ eltűnik a végtelenben, vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\hat f(t) &= -e^{-i\pi}\hat f(t) = -e^{-i\pi}\int f(x)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx\\ &= -\int f(x)e^{-2\pi i\langle t,x+t/(2|t|^2)\rangle}\,dx = -\int f\Big(x-\frac{t}{2|t|^2}\Big)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx.\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}2\big|\hat f(t)\big| &= \left|\int\left(f(x)-f\Big(x-\frac{t}{2|t|^2}\Big)\right)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx\right|\\ &\le \int\left|f(x)-f\Big(x-\frac{t}{2|t|^2}\Big)\right|\,dx,\end{aligned}$$

és a jobb oldal nullához tart, ha $|t|\to\infty$. Végül az

$$\big|\hat f(t+h)-\hat f(t)\big| \le \int |f||\mathbf{e}_{-(t+h)}-\mathbf{e}_{-t}| = \int \big|f(x)\big|\big|e^{-2\pi i\langle h,x\rangle}-1\big|\,dx$$

becslésből következik $\hat f$ folytonossága, ha $f\in\mathcal{K}$, innen pedig approximációval az általános eset.

18.5. Tétel. *Ha $f\in\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ és minden $|\alpha|\le m$ esetén $\partial^\alpha f$ integrálható, akkor $t\mapsto\hat f(t)|t|^m$ eltűnik a végtelenben, és minden, legfeljebb m-ed fokú P polinomra $P(\partial)f$ Fourier-transzformáltja a $t\mapsto P(2\pi it)\hat f(t)$ függvény.*

Az állítást nem nehéz megjegyezni: $P(\partial)f$ Fourier-transzformáltját felírva és formálisan parciálisan integrálva ez az összefüggés adódik.

Bizonyítás. Elég a $P(\partial)=\partial_1$ esetet vizsgálnunk, mert a többi parciális derivált esete hasonlóan kapható, az általános eset pedig teljes indukcióval adódik. Az $\hat f(t)|t|^m$-re vonatkozó becslés a $|t|\le|t_1|+|t_2|+\cdots+|t_n|$ egyenlőtlenségből következik. Az $x'=(x_2,x_3,\dots,x_n)$ jelöléssel, a Fubini-tétel szerint majdnem minden x'-re az $x_1\mapsto f(x_1,x')$ és $x_1\mapsto\partial_1 f(x_1,x')$ függvények integrálhatók. Mivel ilyen x'-re

$$f(b,x')-f(a,x')=\int_a^b\partial_1 f(x_1,x')\,dx_1,$$

léteznek a

$$\lim_{x_1\to-\infty}f(x_1,x')\quad\text{és}\quad\lim_{x_1\to\infty}f(x_1,x')$$

határértékek. Ezek a határértékek csak nullák lehetnek, mivel $x_1\mapsto f(x_1,x')$ integrálható. Így parciális integrálással minden $N>0$-ra

$$\begin{aligned}&\int_{-N}^N e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\partial_1 f(x_1,x')\,dx_1 =\\ &\big[e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}f(x_1,x')\big]_{-N}^N + 2\pi i t_1\int_{-N}^N e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}f(x_1,x')\,dx_1,\end{aligned}$$

amiből Lebesgue tételét felhasználva határátmenettel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\partial_1 f(x_1,x')\,dx_1 = 2\pi i t_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\langle t,x\rangle} f(x_1,x')\,dx_1.$$

Most a Fubini-tételt alkalmazva kapjuk az állítást.

18.6. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, és tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$-re az $x \mapsto f(x)|x|^m$ függvény integrálható. Ekkor az $\hat{f}$ függvény m-szer folytonosan differenciálható és minden m-nél nem magasabb fokú P polinomra $P(\partial)\hat{f}$ az*

$$x \mapsto P(-2\pi i x) f(x)$$

függvény Fourier-transzformáltja.

Az állítást nem nehéz megjegyezni. A Fourier-transzformáltat felírva, és formálisan az integráljel mögött differenciálva, ez az összefüggés adódik.

Bizonyítás. Elég a $P(\partial) = \partial_1$ esetet vizsgálnunk, mert a többi parciális derivált esete hasonlóan kapható, az általános eset pedig teljes indukcióval adódik. A $t' = (t_2, t_3, \dots, t_n)$ jelöléssel

$$\frac{\hat{f}(t_1+\varepsilon,t') - \hat{f}(t_1,t')}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_1 f(x) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle} \frac{e^{-2\pi i x_1 \varepsilon} - 1}{-2\pi i x_1 \varepsilon}\,dx.$$

Mivel $|x_1| \le |x|$, az $x \mapsto x_1 f(x)$ függvény integrálható. Felhasználva, hogy az

$$y \mapsto \frac{e^{-iy}-1}{-iy}$$

függvény korlátos $\mathbb{R}$-en, és 1-hez tart, ha $y \to 0$, Lebesgue tétele szerint $\partial_1\hat{f}$ létezik és

$$\partial_1 \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_1 f(x) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx.$$

→ **18.7. Feladat 6].** Számoljuk ki a $[-1,1]$ intervallum karakterisztikus függvényének a Fourier-transzformáltját, és mutassuk meg, hogy nem integrálható.

→ **18.8. Feladat [7].** Számoljuk ki egy zárt tégla karakterisztikus függvényének a Fourier-transzformáltját.

18.9. Feladat [7]. Számoljuk ki az $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. $1/(1+t^2)$, transzformálva.

18.10. Feladat [7]. Számítsuk ki az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként összefüggésekkel definiált függvény Fourier-transzformáltját.

Megoldás. A Fejér-féle magfüggvény, transzformálva.

18.11. Feladat [7]. Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$, ha $|x| \le \pi/2$, $f(x) = 0$ egyébként függvény Fourier-transzformáltját.

18.12. Definíció. Ha f és g Lebesgue-mérhető komplex értékű függvények $\mathbb{R}^n$-en, akkor f és g *konvolúció*ját az

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

összefüggéssel értelmezzük minden olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, ahol a jobb oldali integrál létezik. Az $x - y$ helyére új változót írva, adódik, hogy $f * g = g * f$, azaz a konvolúció kommutatív. Továbbá, ha $x \notin \operatorname{spt}(f) + \operatorname{spt}(g)$, akkor nincs olyan $y \in \mathbb{R}^n$, amelyre $g(y) \neq 0$ és $f(x-y) \neq 0$, így $(f * g)(x) = 0$.

18.13. Tétel. *A konvolúcióval, mint szorzással $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kommutatív Banach-algebra.*

Bizonyítás. A Fubini-tételt és helyettesítést használva, minden tulajdonság vizsgálata egyszerű számolás.

18.14. Tétel. *Ha $f \in \mathbb{L}^1$ és $g \in \mathbb{L}^p$, akkor $f * g \in \mathbb{L}^p$ és $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.*

$*$ **Bizonyítás.** Legyen $K(x,y) = f(x-y)$ és alkalmazzuk az 8.37 tételt.

18.15. Közelítő egységek. Megmutatható, hogy az $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ algebrában nincs egységelem. Lehet azonban közelítő egységeket találni. Ha ω egy nemnegatív integrálható függvény, amelynek 1 az integrálja, akkor az $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ függvények $\varepsilon \downarrow 0$ esetén egy egységet közelítenek. Ha ω sima függvény, akkor az így kapott közelítő egységet simításra használhatjuk fel. Megadunk egy ilyen, kompakt tartójú és sima függvényt. A 12.6 lemma bizonyításában a L'Hospital-szabály alkalmazásával megmutattuk, hogy a

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{-1/r}, & \text{ha } r > 0, \\ 0, & \text{ha } r \le 0 \end{cases}$$

függvény akárhányszor differenciálható. Legyen $\omega(x) = c\varphi(1 - |x|^2)$, ahol a c konstanst úgy választjuk, hogy $\int \omega = 1$ teljesüljön. Megjegyezzük, hogy ω tartója a zárt egységgömb. Az ebből származó ω_ε függvények a *szokásos simító függvény*ek.

18.16. Simítási tétel. *Legyen ω egy nemnegatív integrálható függvény $\mathbb{R}^n$-en, amelyre $\int \omega = 1$, és legyen $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$, ha $\varepsilon > 0$.*

(1) *Ha $1 \le p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$, akkor $\|f * \omega_\varepsilon - f\|_p \to 0$ amint $\varepsilon \downarrow 0$.*

Ha $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ és f lokálisan integrálható $\mathbb{R}^n$-en, akkor

(2) *$f * \omega_\varepsilon \to f$ majdnem mindenütt, ha $\varepsilon \downarrow 0$;*

(3) *ha f folytonos egy G nyílt halmazon, akkor az $f * \omega_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \downarrow 0$ konvergencia a G-n lokálisan egyenletes;*

(4) *$f * \omega_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ minden $\varepsilon > 0$-ra és $\partial^\alpha(f * \omega_\varepsilon) = f * \partial^\alpha \omega_\varepsilon$ minden α multiindexre;*

(5) *ha $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\varepsilon > 0$, az f függvény lokálisan Lipschitz a $G + \operatorname{spt}\omega_\varepsilon$ halmazon, akkor $|\alpha| = 1$ esetén $\partial^\alpha(f * \omega_\varepsilon) = (\partial^\alpha f) * \omega_\varepsilon$.*

∗ **Bizonyítás.** Először is vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\big|(f*\omega_\varepsilon)(x)-f(x)\big| &= \left|\int (f(x-y)\omega_\varepsilon(y)-f(x)\omega_\varepsilon(y))\,dy\right| \\ &\le \int \omega_\varepsilon(y)\big|f(x-y)-f(x)\big|\,dy.\end{aligned} \tag{6}$$

Ha most K olyan konstans, amelyre $\omega \le K$, és ω tartója része az R sugarú, origó középpontú zárt gömbnek, akkor innen

$$\big|(f*\omega_\varepsilon)(x)-f(x)\big| \le KR^n\frac{1}{(\varepsilon R)^n}\int_{|z-x|\le\varepsilon R}\big|f(z)-f(x)\big|\,dz. \tag{7}$$

(3) bizonyításához, legyen C egy kompakt részhalmaza G-nek. Felhasználva, hogy valamely $\eta > 0$-ra $\mathbb{B}_\eta(C) \subset G$ és f egyenletesen folytonos a $\mathbb{B}_\eta(C)$ kompakt halmazon, $\varepsilon \le \eta/R$ esetén a (7) becslés alkalmazható, és így kapjuk (3)-at.

(2) ugyancsak a (7) becslésből adódik, mely szerint a konvergencia fennáll f minden Lebesgue-pontjában.

Vegyük észre, hogy (1)-et elég $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ elemeire bizonyítani, mivel $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$-ben, és az előző tétel szerint

$$\begin{aligned}\|f*\omega_\varepsilon\|_p &\le \|f*\omega_\varepsilon - g*\omega_\varepsilon\|_p + \|g*\omega_\varepsilon - g\|_p + \|g-f\|_p \\ &\le 2\|f-g\|_p + \|g*\omega_\varepsilon - g\|_p.\end{aligned}$$

Legyen $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, és M olyan konstans, amelyre $|g| < M$. Mivel $|g*\omega_\varepsilon| \le M$ is teljesül, azt kapjuk, hogy

$$\|g*\omega_\varepsilon - g\|_p^p = \int |g*\omega_\varepsilon - g|^p \le (2M)^{p-1}\int |g*\omega_\varepsilon - g|,$$

így (1)-et elég a $p=1$ esetre bizonyítani. (6)-ból

$$\begin{aligned}\int\big|(g*\omega_\varepsilon - g)(x)\big|\,dx &\le \int \omega_\varepsilon(y)\int\big|g(x-y)-g(x)\big|\,dx\,dy \\ &= \int \omega_\varepsilon(y)\|\tau_y g - g\|_1\,dy \\ &\le 2\|g\|_1\int_{|y|>\delta}\omega_\varepsilon(y)\,dy + \sup_{|y|\le\delta}\|\tau_y g - g\|_1.\end{aligned}$$

Mivel g egyenletesen folytonos, és egy kompakt halmazon kívül eltűnik, az utolsó tag tetszőleges kicsinnyé tehető, ha δ elég kicsi. Ha most $\varepsilon \downarrow 0$, akkor a jobb oldali első tag tart nullához.

A továbbiakban nem használjuk ki, hogy ω nemnegatív. (4) bizonyításához feltehetjük, hogy $\varepsilon = 1$. Ha $|x|, |y| \le r$ és $|x-y| \le \delta$, akkor

$$\begin{aligned}\big|(f*\omega)(x) - (f*\omega)(y)\big| &= \left|\int(\omega(x-z)-\omega(y-z))f(z)\,dz\right| \\ &\le \int\big|\omega(x-z)-\omega(y-z)\big|\big|f(z)\big|\,dz \\ &\le \sup_{|u-v|\le\delta}\big|\omega(u)-\omega(v)\big|\int_{|z|\le R+r}\big|f(z)\big|\,dz,\end{aligned}$$

így $f * \omega$ folytonos. Most

$$\begin{aligned}(f*\omega)(x+he_j)-(f*\omega)(x) &= \int\int_0^h \partial_j\omega(x-y+te_j)\,dt f(y)\,dy\\ &= \int_0^h \int \partial_j\omega(x-y+te_j)f(y)\,dy\,dt\\ &= \int_0^h (f*\partial_j\omega)(x+te_j)\,dt.\end{aligned}$$

Innen $\partial_j(f*\omega) = f*\partial_j\omega$, ha $1 \le j \le n$ és a parciális deriváltak folytonosak. Teljes indukcióval kapjuk az állítást. (5)-öt hasonlóan kapjuk.

18.17. Tétel. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $1 \le p < \infty$. Ekkor $\mathcal{D}(G)$ sűrű $\mathbb{L}^p(G)$-ben.*

$*$ **Bizonyítás.** Legyen $f \in \mathbb{L}^p(G)$ és $\delta > 0$. Válasszunk olyan $g \in \mathcal{K}(G)$ függvényt, amelyre $\|f-g\|_p < \delta$. Legyen g nulla a G komplementerén. Jelölje ω a 18.15 pontban leírt függvényt, és legyen η kisebb, mint $\operatorname{spt}(g)$ távolsága G komplementerétől. Ha $\varepsilon \le \eta$, akkor $\operatorname{spt}(g*\omega_\varepsilon) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(\operatorname{spt}(g))$. A simítási tétel szerint $g*\omega_\varepsilon$ egyenletesen konvergál g-hez, ha $\varepsilon \downarrow 0$, amiből ha ε elég kicsi, azt kapjuk, hogy $\|g - g*\omega_\varepsilon\|_p < \delta$.

A tétel közvetlenül is bizonyítható a simítási tételből: Legyen $f \in \mathbb{L}^p(G)$, $\delta > 0$ és álljon G_k a G azon elemeiből, amelyek hossza nem nagyobb k-nál, és legalább $1/k$ távolságra vannak G komplementerétől. Jelölje f_k azt a függvényt, amely G_k-n megegyezik f-fel, azon kívül nulla. Lebesgue tétele szerint elég nagy k-ra $\|f - f_k\|_p < \delta$. A simítási tétel szerint van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\|f - f_k * \omega_\varepsilon\|_p < \delta$.

18.18. Definíció. Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ függvényt *gyorsan csökkenő*nek fogunk nevezni, ha bármely polinommal megszorozva is korlátos. Egy f mérhető és gyorsan csökkenő függvény minden $\mathbb{L}^p$, $1 \le p \le \infty$ térben benne van. Ez $p = \infty$ esetén triviális, egyébként pedig abból adódik, hogy az

$$x \mapsto (1+|x|^{2n})f(x)$$

függvény korlátos. Valóban, ebből $|f|$ nem nagyobb, mint a $g(x) = 1/(1+|x|^{2n})$ függvény konstansszorosa, így elég belátnunk, hogy az utóbbi $\mathbb{L}^p$-ben van. Mivel $|g|^p \le g$, elég belátni, hogy g integrálható. Ez gömbi koordinátákra áttérve, vagy egyszerűbben a kofelszín-képlettel adódik, de abból is következik, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $2^k < |x| \le 2^{k+1}$ esetén $0 \le g(x) \le 1/2^{2kn}$, így

$$\int_{\mathbb{B}_{2^{k+1}}(0)\setminus\mathbb{B}_{2^k}(0)} g(x)\,dx \le \frac{1}{2^{2kn}}\frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/2)}2^{n(k+1)}.$$

Jelölje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{K})$ azon végtelen sokszor differenciálható, $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{K}$-ba képező függvények terét, amelyeknek minden parciális deriváltja is gyorsan csökkenő. Az $\mathcal{S}$ tér fontos szerepet játszik a Fourier-transzformációnál.

18.19. Tétel. *Ha $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, akkor $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.*

Bizonyítás. A Fubini-tételt felhasználva, minden $t \in \mathbb{R}^n$-re,

$$\begin{aligned}(f*g)\hat{}(t) &= \int (f*g)\mathbf{e}_{-t} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle t,x\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i\langle t,y+u\rangle}\,du\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i\langle t,y\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i\langle t,u\rangle}\,du\,dy.\end{aligned}$$

18.20. Inverziós tétel. *Ha $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. A bizonyítás kulcsa a Fourier-transzformáció egy sajátfüggvényének a felhasználása. Legyen $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $\varphi'(x) + 2\pi x\varphi(x) = 0$. Mivel $\hat{\varphi}$ is ugyanennek a differenciálegyenletnek tesz eleget, és $\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\,dx = 1 = \varphi(0)$, az egzisztencia-unicitási tételből azt kapjuk, hogy $\varphi = \hat{\varphi}$ mindenütt. (Ezt egyébként az egzisztencia-unicitási tétel nélkül is beláthatjuk, ha $\hat{\varphi}/\varphi$ deriváltját kiszámítjuk.) Legyen most $\omega(x) = e^{-\pi|x|^2}$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Koordinátánként alkalmazva az eddigieket, kapjuk hogy $\hat{\omega} = \omega$ és $\omega(0) = \int \omega = 1$. Legyen $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$. Ekkor

$$\begin{aligned}(f*\omega_\varepsilon)(x) &= \int f(x-y)\omega_\varepsilon(y)\,dy = \int f(x-y)\varepsilon^{-n}\omega(y/\varepsilon)\,dy \\ &= \int f(x-y) \int \omega(\varepsilon t)e^{-2\pi i\langle t,y\rangle}\,dt\,dy \\ &= \int \omega(\varepsilon t) \int f(u)e^{-2\pi i\langle t,x-u\rangle}\,du\,dt \\ &= \int \omega(\varepsilon t)\hat{f}(-t)e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dt = \int \omega(\varepsilon v)\hat{f}(v)e^{-2\pi i\langle v,-x\rangle}\,dv.\end{aligned}$$

Egy $\varepsilon_k \downarrow 0$ sorozatra, mivel $\omega(\varepsilon_k v) \to 1$, amint $k \to \infty$, Lebesgue tétele szerint a jobb oldal $\hat{\hat{f}}(-x)$-hez konvergál. Az $f_k = f * \omega_{\varepsilon_k}$ jelöléssel, mivel $f_k \to f$ az $\mathbb{L}^1$ térben, a Fatou-lemmából

$$\int |(\hat{\hat{f}})\check{} - f| \le \liminf_{k\to\infty} \int |f_k - f| = 0,$$

így $f = (\hat{\hat{f}})\check{}$ majdnem mindenütt.

18.21. Unicitási tétel. *Ha $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ és $\hat{f} = \hat{g}$, akkor $f = g$ majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. Mivel $(f-g)\hat{} = \hat{f} - \hat{g} = 0$, az előző tétel szerint $f = g$ majdnem mindenütt.

18.22. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}$ azon függények halmaza, amelyekre $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Az $f \mapsto \hat{f}$ Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{F}$-nek önmagára. Ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor $fg \in \mathcal{F}$, $f*g \in \mathcal{F}$, $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$, és $(fg)\hat{} = \hat{f}*\hat{g}$.*

Bizonyítás. Az inverziós tételből következik, hogy

$$f = \check{\hat{f}} = (\check{f})\hat{} = \hat{\check{f}},$$

azaz a Fourier-transzformáció $\mathcal{F}$-et $\mathcal{F}$-re képezi le. Ha $f, g \in S$, akkor az inverziós tétel szerint g korlátos és folytonos, így $fg \in \mathbb{L}^1$ és $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{L}^1$, azaz $fg \in \mathcal{F}$ és $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{F}$. Azt már láttuk, hogy $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{F}$. Alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, kapjuk, hogy $f * g \in \mathcal{F}$. Végül

$$(\hat{f} * \hat{g})\hat{} = \hat{\hat{f}}\hat{\hat{g}} = \check{f}\check{g} = (fg)\check{} = (fg)\hat{},$$

így mindkét oldalra alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.

18.23. Plancherel-tétel. *Egy és csak egy olyan lineáris és belső szorzat tartó leképezése létezik $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$-nek önmagára, amely az előző tételben szereplő $\mathcal{F}$-en megegyezik a Fourier-transzformációval.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathcal{F}$, akkor f korlátos és folytonos, így $f\overline{f} = |f|^2$ integrálható, azaz $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor a Fourier-transzformáció áthelyezésével $\int \hat{f}\,\overline{\hat{g}} = \int f\overline{g}$. Ebből $f \mapsto \hat{f}$ belső szorzat tartó leképezése $\mathcal{F}$-nek önmagára. Ha megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ sűrű $\mathbb{L}^2$-ben, ez a leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki egy $\mathbb{L}^2$-t önmagára képező izometriává. A simítási tétel után megmutattuk, hogy a kompakt tartójú $\mathcal{C}^\infty$-függvények sűrűek $\mathbb{L}^2$-ben. Ezek $\mathcal{F}$-ben vannak, hiszen egy $2n$-szer folytonosan differenciálható f függvény $\nu \mapsto \hat{f}(\nu)$ Fourier-transzformáltja $|\nu|^{2n}$-nel, és így $1+|\nu|^{2n}$-nel szorozva is eltűnik a végtelenben„ tehát abszolút értékben majorálja a $\nu \mapsto 1/(1+|\nu|^{2n})$ integrálható függvény egy konstansszorosa; hogy ez a függvény integrálható, az gömbi koordinátákra áttérve, vagy egyszerűbben a kofelszín-képlettel adódik, de abból is következik, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $2^k < |x| \le 2^{k+1}$ esetén $0 \le 1/(1+|x|^{2n}) \le 1/2^{2kn}$, így

$$\int_{\mathbb{B}_{2^{k+1}}(0)\setminus\mathbb{B}_{2^k}(0)} g(x)\,dx \le \frac{1}{2^{2kn}} \frac{\mathbf{\Gamma}(1/2)^n}{\mathbf{\Gamma}(1+n/2)} 2^{n(k+1)}.$$

18.24. Megjegyzés. Ha $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, akkor kérdés, hogy az előző tétel által definiált transzformáció megegyezik-e az $\mathbb{L}^1$-beli Fourier-transzformációval? Legyen f_k az f és a $\mathbb{B}_k(0)$ gömb karakterisztikus függvényének szorzata. A simítási tétel szerint, az ottani jelölésekkel, ha ω kompakt tartójú $\mathcal{C}^\infty$-függvény, akkor — az előző bizonyítás szerint — $f_k * \omega_\varepsilon$ integrálható, a Fourier-transzformáltja is integrálható, és $\varepsilon \downarrow 0$ esetén ezek a függvények $\mathbb{L}^1$-ben és $\mathbb{L}^2$-ben is f_k-hoz tartanak. Innen a Fourier-transzformáltjuk egyenletesen tart $\hat{f}_k$-höz, és $\mathbb{L}^2$-ben is konvergens. Részsorozatra áttérve kapjuk, hogy $\hat{f}_k$ majdnem mindenütt megegyezik a Plancherel-tétel szerinti transzformálttal. Ha most $k \to \infty$, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk, hogy $\hat{f}$ majdnem mindenütt megegyezik a Plancherel-tétel szerinti transzformálttal. Ennek alapján jogosan használhatjuk az utóbbira is az $\hat{f}$ jelölést. Akkor is ezt a jelölést fogjuk használni, ha csak $f \in \mathbb{L}^2$ teljesül. Mivel ekkor is $f_k \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, azt kapjuk, hogy az

$$\hat{f}_k(\nu) = \int_{\mathbb{B}(0)} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\,dt$$

függvényekre $\hat{f}_k \to \hat{f}$ az $\mathbb{L}^2$-térben, egy részsorozatra pedig majdnem mindenütt. Határátmenettel kapjuk, hogy az $\mathbb{L}^2$-beli Fourier-transzformáltra is érvényben maradnak az $\mathbb{L}^1$-beli transzformált definíciójánál felsorolt (2)–(6) tulajdonságok, valamint az inverziós tétel. Az unicitás benne van a Plancherel-tételben. A szorzat Fourier-transzformáltjára

$$\begin{aligned}(fg)\hat{}(\nu) &= \langle \mathbf{e}_{-\nu} f, \overline{g}\,\rangle = \langle (\mathbf{e}_{-\nu} f)\hat{}, \hat{\overline{g}}\,\rangle = \langle \tau_{-\nu}\hat{f}, \check{\overline{\hat{g}}}\,\rangle = \langle (\tau_{-\nu}\hat{f})\check{}, \overline{\hat{g}}\,\rangle \\ &= \int \hat{f}(\nu - x)\hat{g}(x)\,dx = (\hat{f} * \hat{g})(\nu).\end{aligned}$$

Innen

$$f * g = \check{\hat{\hat{f}}} * \check{\hat{\hat{g}}} = (\hat{\hat{f}}\hat{\hat{g}})\hat{}, \quad \text{ahonnan} \quad (f * g)\hat{} = (\check{\hat{f}} * \check{\hat{g}})\check{} = \hat{f}\hat{g}.$$

18.25. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^2\,dx = a\pi$.

Megoldás. Számoljuk ki $[-1,1]$ karakterisztikus függvényének Fourier-transzformáltját, és alkalmazzuk a Plancherel-tételt.

18.26. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin(ax)/x)^4\,dx = 2a^3\pi/3.$$

Megoldás. Számoljuk ki egy „háztető” Fourier-transzformálját, és alkalmazzuk a Plancherel-tételt.

18.27. Feladat [8]. Határozzuk meg $x \mapsto 1/(1+x^2)$ Fourier-transzformáltját és $\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(1+t^2)^2\,dt$ értékét.

Megoldás. $e^{|x|}$.

18.28. Ablak Fourier-transzformált. Legyen a $0 \neq \varrho \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ *ablak függvény* rögzített. Ha $\operatorname{spt}(\varrho) \subset [-T, 0]$, akkor azt mondjuk, hogy az ablak-függvény *kauzális*. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ függvény erre vonatkozó *ablak Fourier-transzformált*ja (angol rövidítéssel: WFT-je) az $(\nu, t) \mapsto \tilde{f}(\nu, t) = (f_t)\hat{}(\nu)$ függvény, ahol $f_t(x) = \overline{\varrho}(x-t)f(x)$. A $\varrho_{\nu,t}(x) = \varrho(x-t)e^{2\pi i\nu x}$ jelöléssel $\tilde{f}(\nu, t) = \langle f, \varrho_{\nu,t}\rangle$. Az ablak Fourier transzformáltat Gábor Dénes Nobel-díjas magyar fizikus vezette be, ezért *Gábor-transzformált*nak is szokás nevezni. Ő az $x \mapsto e^{-x^2/2}$ *Gauss-függvény*t használta ablaknak. Néha csak az ezzel az ablakkal vett transzformáltat nevezik Gábor-transzformáltnak.

18.29. Példa. Az $x \mapsto \sin(2\pi x^2)$ „zirp” jel a

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x), & \text{ha } -1/2 \le x \le 1/2, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

*Hanning-ablak*kal. Más függvények, amelyeket $[-1/2, 1/2]$-re megszorítva ablaknak használnak: 1 (négyzet-ablak); $x \mapsto 0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi x)$ (*Hamming-ablak*); $x \mapsto e^{-18x^2}$ (*Gauss-ablak*); $x \mapsto 0{,}42 + 0{,}5\cos(2\pi x) + 0{,}08\cos(4\pi x)$ (*Blackman-ablak*).

18.30. Megjegyzés. A fenti „időablakozásnak” megfelel egy „frekvenciaablakozás”: a Plancherel-tétel szerint $\tilde{f}(\nu,t)=\langle f,\varrho_{\nu,t}\rangle=\langle\hat{f},(\varrho_{\nu,t})\hat{}\,\rangle$, ahol $\varrho_{\nu,t}=(\tau_t\varrho)\mathbf{e}_\nu$ miatt $(\varrho_{\nu,t})\hat{}=\tau_\nu((\tau_t\varrho)\hat{}\,)=\tau_\nu(\hat{\varrho}\mathbf{e}_{-t})$, így

$$\tilde{f}(\nu,t)=e^{-2\pi it\nu}\langle\hat{f},\hat{\varrho}_{-t,\nu}\rangle.$$

Nyilván célszerű, ha az ablakfüggvény abszolút értékének négyzetét sűrűségfüggvénynek tekintve, a szórásnégyzete és a Fourier-transzformáltjának a szórásnégyzete is minél kisebb. A kettő azonban egyszerre nem csökkenthető tetszőlegesen.

18.31. Tétel: bizonytalansági reláció. *Tegyük fel, hogy $\varrho\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ és $\|\varrho\|_2=1$, továbbá*

$$\int_{\mathbb{R}}t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\quad\text{és}\quad\int_{\mathbb{R}}\nu^2\big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\,d\nu$$

végesek. Ekkor

$$t_0:=\int_{\mathbb{R}}t\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\quad\text{és}\quad\nu_0:=\int_{\mathbb{R}}\nu\big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\,d\nu$$

valamint

$$T^2:=\int_{\mathbb{R}}(t-t_0)^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\quad\text{és}\quad N^2:=\int_{\mathbb{R}}(\nu-\nu_0)^2\big|\hat{\varrho}(\nu)\big|^2\,d\nu$$

léteznek, végesek és $4\pi NT\geq 1$.

Bizonyítás. Mivel $\sqrt{2}|t|\leq 1+t^2$ és $\sqrt{2}|\nu|\leq 1+\nu^2$, létezik t_0 és ν_0. Megfelelő eltolást és modulációt alkalmazva, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t_0=0$ és $\nu_0=0$. Tegyük fel, hogy ϱ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és ϱ' négyzetesen integrálható. Először megmutatjuk, hogy $x\big|\varrho(x)\big|^2\to 0$, ha $x\to\pm\infty$. A $t\mapsto t\varrho(t)\overline{\varrho(t)}=t\big|\varrho(t)\big|^2$ függvény minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és

$$\frac{d}{dt}t\big|\varrho(t)\big|^2=\big|\varrho(t)\big|^2+t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)}+t\varrho(t)\overline{\varrho'(t)}=\big|\varrho(t)\big|^2+2\mathfrak{R}(t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)}).$$

Mindkét oldalt integrálva

$$2\mathfrak{R}\int_0^x t\varrho'(t)\overline{\varrho(t)}\,dt+\int_0^x\big|\varrho(t)\big|^2\,dt=x\big|\varrho(x)\big|^2.$$

Ha $x\to+\infty$, a bal oldalon lévő integrálok konvergálnak, mindkettő két négyzetesen integrálható függvény belső szorzatához $[0,+\infty[$-en. Innen a $\lim_{x\to+\infty}x\big|\varrho(x)\big|^2$ határérték létezik. Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x\to-\infty}x\big|\varrho(x)\big|^2$ is létezik. Mivel $t\mapsto t\big|\varrho(t)\big|^2$ integrálható, a határértékek csak végesek lehetnek.

Másodszor megmutatjuk, hogy ϱ' Fourier-transzformáltja az $f\colon\nu\mapsto 2\pi i\nu\hat{\varrho}(\nu)$ függvény. Parciális integrálással

$$\int_{-n}^n\varrho'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt=\varrho(n)e^{-2\pi in\nu}-\varrho(-n)e^{2\pi in\nu}+2\pi i\nu\int_{-n}^n\varrho(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt.$$

A bal oldalon álló integrál $\varrho'\xi_{[-n,n]}$, a jobb oldalon álló pedig $\varrho\xi_{[-n,n]}$ Fourier-transzformáltja. Részsorozatra áttérve elérhetjük, hogy a bal oldali integrálok majdnem mindenütt tartsanak ϱ' Fourier-transzformáltjához. Mégegyszer részsorozatra áttérve, elérhetjük, hogy a jobb oldalon álló integrálok majdnem mindenütt tartsanak ϱ Fourier-transzformáltjához.

Térjünk rá az egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\begin{aligned}
4\pi^2T^2N^2 &= 4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\nu^2\big|\hat\varrho(\nu)\big|^2\,d\nu\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\big|2\pi i\nu\hat\varrho(\nu)\big|^2\,d\nu\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\big|\varrho'(t)\big|^2\,dt\\
&\ge \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|t|\big|\varrho(t)\big|\big|\varrho'(t)\big|\,dt\Big)^2 \ge \Big(\Re\int_{-\infty}^{\infty} t\varrho(t)\varrho'(t)\,dt\Big)^2\\
&\ge \Big(\frac12\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{d}{dt}\big|\varrho(t)\big|^2\,dt\Big)^2.
\end{aligned}$$

Innen parciális integrálással — felhasználva, hogy $x\big|\varrho(x)\big|^2\to 0$, ha $x\to\pm\infty$ — kapjuk, hogy $4\pi^2T^2N^2\ge 1/4$.

A bizonyítás teljes lesz, ha megmutatjuk, hogy a tétel feltételeiből következik, hogy ϱ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és ϱ' négyzetesen integrálható. Disztribúciókkal fogunk dolgozni; a definíciókat és alaptulajdonságokat lásd azok részletes tárgyalásánál. Ha $\varphi\in\mathcal{S}$, akkor

$$T_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}2\pi i\nu\hat\varrho(\nu)\varphi(\nu)\,d\nu=-\int_{-\infty}^{\infty}\varrho\hat\varphi'=T'_\varrho(\hat\varphi),$$

ahol T'_ϱ a T_ϱ disztribúció deriváltja. Innen $T_{\hat f}(\varphi)=T'_\varrho(\check\varphi)$ minden $\varphi\in\mathcal{S}$-re. Ez azt jelenti, hogy T'_ϱ reguláris disztribúció, az $\hat f$ négyzetesen integrálható függvény megfordítása reprezentálja. Megmutatjuk, hogy ϱ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos és $\hat f$ megfordításának a deriváltja majdnem mindenütt. Legyen $g(x)=\int_0^x\hat f(-t)\,dt$. A g abszolút folytonos minden kompakt intervallumon és

$$T'_g(\varphi)=T_{g'}(\varphi)=T_{\hat f}(\check\varphi)=T'_\varrho(\varphi),$$

így $T'_{\varrho-g}(\varphi)=0$ minden $\varphi\in\mathcal{D}$-re. A DuBois-Reymond-lemma bizonyításában megmutatjuk, hogy $T_{\varrho-g}$ konstanssal reprezentálható, így $\varrho=g+c$ majdnem mindenütt, tehát ϱ is abszolút folytonos minden kompakt intervallumon és $\varrho'=g'$ az $\hat f$ megfordítása négyzetesen integrálható.

18.32. Példa. Ha $\varrho(t)=\sqrt[4]{2a}e^{-\pi t^2a}$, akkor $\hat\varrho(\nu)=\sqrt[4]{2/a}e^{-\pi\nu^2/a}$, $t_0=\nu_0=0$ és $T=1/\sqrt{4\pi a}$, $N=\sqrt{a}/\sqrt{4\pi}$.

18.33. Feladat [11]. Bizonyítsuk be a példában szereplő állításokat.

18.34. Feladat [13]. Határozzuk meg a példaként felsorolt ablakok Fourier-transzformáltját, ha kell, numerikusan.

18.35. Tétel. *Ha ϱ egy ablak-függvény, $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, Gábor-transzformáltjuk $\tilde{f}, \tilde{g}$, akkor*

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \|\varrho\|_2^2 \langle f, g \rangle.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle (f_t)\hat{}, (g_t)\hat{} \rangle \, dt = \int_{\mathbb{R}} \langle f\tau_t\overline{\varrho}, g\tau_t\overline{\varrho} \rangle \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{g}(s) \int_{\mathbb{R}} \big|\varrho(s-t)\big|^2 \, dt \, ds = \|\varrho\|_2^2 \langle f, g \rangle.\end{aligned}$$

18.36. Következmény. *Az $f \mapsto \tilde{f}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű.*

Bizonyítás. A norma egy nem nulla konstanssal szorzódik.

18.37. Tétel: rekonstrukciós formula. *Ha ϱ egy ablak függvény, akkor a hozzá tartozó ablak Fourier-transzformáltra bármely $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$-re*

$$f(x) = \frac{1}{\|\varrho\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(.,t)(-x)\varrho(x-t) \, dt$$

majdnem minden x-re, ahol az $\mathbb{L}^2$-beli Fourier-transzformált a kipontozott frekvencia változóban értendő.

Bizonyítás. Mivel $\tilde{f}$ a három változójában mérhető

$$(x, \nu, t) \mapsto \overline{\varrho}(x-t)f(x)e^{-2\pi i\nu x}$$

függvény x szerinti integrálja, mérhető. Mivel az $(x,t) \mapsto \overline{\varrho}(x-t)f(x)$ függvény minden t-re négyzetesen integrálható, $\hat{\tilde{f}}(.,t)$ az $f\tau_t\overline{\varrho}$ megfordítása majdnem mindenütt, azaz $\hat{\tilde{f}}(.,t)(-x) = f(x)\overline{\varrho}(x-t)$ majdnem minden x-re. Szorozva $\varrho(x-t)$-vel és integrálva t szerint, kapjuk a bizonyítandó állítást.

18.38. Tétel. *Legyen $\varrho \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ egy ablak függvény. Ekkor bármely $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$-re, ha*

$$f_h(x) = \frac{1}{\|\varrho\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varrho_{\nu,t}(x)h(\nu,t) \, dt \, d\nu = \frac{1}{\|\varrho\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \varrho(x-t)\hat{h}(.,t)(-x) \, dt,$$

ahol a Fourier-transzformáltat a kipontozott változóban értjük, akkor $\tilde{f}_h$ a h-t legjobban közelítő elem $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ képében, azaz $h - \tilde{f}_h \perp \tilde{f}$ bármely $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-re.

Bizonyítás. A második alak az integrálás sorrendjét felcserélve adódik, ha h az első változójában $\mathbb{L}^1$-ben van, akkor közvetlenül, egyébként határátmenettel, majdnem

minden x-re és t-re. Felhasználva az előző tételt,

$$\begin{aligned}\langle h, \tilde{f}\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle h(.,t), (f\tau_t\overline{\varrho})\hat{}\,\rangle\, dt = \int_{\mathbb{R}} \langle \hat{h}(.,t), (f\tau_t\overline{\varrho})\check{}\,\rangle\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(.,t)(x)\overline{f}(-x)\varrho(-x-t)\,dx\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(.,t)(-x)\varrho(x-t)\overline{f}(x)\,dt\,dx \\ &= \frac{1}{\|\varrho\|_2^2}\langle f_h, f\rangle = \langle \tilde{f}_h, \tilde{f}\rangle.\end{aligned}$$

Természetesen inkább olyan formulákat keresünk, amelyek a Gábor-transzformált diszkrét helyeken vett értékeiből állítják vissza a függvényt. Az ilyen formulák őse a mintavételi tétel:

18.39. Mintavételi tétel. *Legyen $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ folytonos függvény, amely „sávhatárolt N-nel", azaz amelyre $\hat{f}(\nu) = 0$, ha $\nu \notin [-N, N]$. Ekkor $t_n = n/(2N)$ jelöléssel*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi N(t-t_n))}{2\pi N(t-t_n)}\hat{f}(t_n);$$

itt $t = t_n$ esetén a tört értékének a határértéke $(= 1)$ veendő.

Bizonyítás. Mivel $\hat{f}$ sávhatárolt, $\hat{f} \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, és az inverziós tétel szerint

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i t\nu}\,d\nu \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i t\nu}\,d\nu.$$

Mivel $\hat{f} \in \mathbb{L}^2[-N, N]$, Fourier-sorba fejthető,

$$\hat{f}(\nu) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\pi i n\nu/N},$$

ahol

$$c_n = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu)e^{-\pi i n\nu}\,d\nu.$$

A fentiek szerint az integrál $f(-n/(2N))$, így $c_n = f(-n/(2N))/(2N)$. A Fourier-sort behelyettesítve az inverziós formulába

$$f(t) = \int_{-N}^{N} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i t\nu}\,d\nu = \langle \hat{f}, \mathbf{e}_{-t}\rangle = \Big\langle \sum c_n \mathbf{e}_{n/(2N)}, \mathbf{e}_{-t}\Big\rangle.$$

Mivel a belső szorzat folytonos,

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big)\int_{-N}^{N} e^{\pi i n\nu/N}e^{2\pi i t\nu}\,d\nu \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big)\int_{0}^{N} \cos\pi\nu(2t+n/N)\,d\nu \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big)\Big[\frac{\sin\pi\nu(2t+n/N)}{\pi(2t+n/N)}\Big]_0^N \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\Big(-\frac{n}{2N}\Big)\frac{\sin\pi(2Nt+n)}{\pi(2Nt+n)}.\end{aligned}$$

18.40. Diszkrét rekonstrukciós formula. *Legyen $\varrho \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ egy kompakt tartójú ablak függvény, amely eltűnik egy $1/\nu$ hosszúságú intervallumon kívül. Legyen*

$$H_\tau(x) = \tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\varrho(x-n\tau)\big|^2.$$

(Ha ϱ majdnem mindenütt folytonos, akkor $\tau \downarrow 0$ esetén $H_\tau(x) \to \|\varrho\|_2^2$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.) Tegyük fel, hogy

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) \quad \text{és} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} H_\tau(x) < \infty.$$

(Ez csak $\nu\tau < 1$ esetén lehetséges.) Ekkor

$$f(t) = \nu\tau \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\varrho_{m\nu,n\tau}(t)}{H_\tau(t)} \tilde{f}(m\nu, n\tau).$$

A tételt nem bizonyítjuk. Mivel lényegében a $\varrho_{m\nu,n\tau}$ függvények szerinti sorfejtésről van szó, amelyek az ablakfüggvény eltoltjainak moduláltjai, a bizonyítás a keretek (lásd később) segítségével, a Zak-transzformációt felhasználva kapható meg: lásd [144], 3. fejezet.

Egy ablakfüggvény modulálásai helyett hasznosabb lehet a modulálást és az ablakozás egyesíteni, és hullámcsomag, wavelet (magyarul hullámocska lenne) eltolásával és skálázásával dolgozni. Bár a kétdimenziós eset is fontos a képfeldolgozásban, mi csak az egydimenzióssal foglalkozunk.

18.41. Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ rögzített, és egy $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre legyen $\psi_s(x) = |s|^{-1/p}\psi(x/s)$ és $\psi_{s,t}(x) = |s|^{-1/p}\psi((x-t)/s)$; ez a ψ *anyawavelet*hez tartozó *waveletcsalád* (itt $1/\infty = 0$). Ha $1 \le q < \infty$, akkor

$$\|\psi_{s,t}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} |s|^{-q/p} \Big|\psi((x-t)/s)\Big|^q dx = |s|^{-q/p} \int_{\mathbb{R}} \big|\psi(y)\big|^q |s|\, dy = |s|^{1-q/p}\|\psi\|_q^q,$$

így $p = q$ esetén a norma nem változik; $q = \infty$-re $\|\psi_{s,t}\|_\infty = |s|^{-1/p}\|\psi\|_\infty$. Mivel itt csak az $\mathbb{L}^2$ tér esetével fogunk foglalkozni, a továbbiakban a $p = 2$ választással élünk.

18.42. Feladat [Példa]. Anyawaveletnek alkalmas például $\psi(x) = xe^{-x^2}$ vagy a deriváltja, a $\psi(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ „mexikói kalap".

18.43. Feladat [8]. Számoljuk ki az előző példában szereplő anyawaveletek Fourier-transzformáltját!

18.44. Definíció. Legyen $p \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény *folytonos wavelet transzformált*ja az

$$\tilde{f}(s,t) = \langle f, \psi_{s,t}\rangle = \langle \hat{f}, (\psi_{s,t})\hat{}\,\rangle$$

függvény, amely $s = 0$ esetén nincs értelmezve. Egyszerű számolással $(\psi_{s,t})\hat{}\,(\nu) = |s|^{1/2}e^{-2\pi i\nu t}\hat{\psi}(s\nu)$, így $t \mapsto \tilde{f}(s,-t)$ a $\nu \mapsto |s|^{1/2}\hat{f}(\nu)\overline{\hat{\psi}}(s\nu)$ integrálható függvény $\mathbb{L}^1$-beli Fourier-transzformáltja (amiben $\hat{f}$ az $\mathbb{L}^2$-beli transzformált), ha $s \ne 0$. A wavelet-transzformáltak között a $(t,s) \mapsto 1/s^2$ súlyfüggvénnyel vett belső szorzatot érdemes tekinteni.

18.45. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, ha $\psi \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, akkor bármely $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvénypárra*

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = C\langle f, g \rangle,$$

ahol a bal oldalon a wavelet transzformáltak belső szorzata az $(s,t) \mapsto 1/s^2$ súlyfüggvénnyel értendő és feltesszük, hogy

$$0 < C = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(u)|^2}{|u|}\, du.$$

Bizonyítás. Mivel $\hat{\psi}$ korlátos és folytonos, a $\nu \mapsto |s|^{1/2}\hat{f}(\nu)\overline{\hat{\psi}}(s\nu)$ függvény minden $s \neq 0$-ra négyzetesen integrálható. A Fourier-transzformáltat a kipontozott változóban értve, a számolás a következő:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s,t)\overline{\tilde{g}}(s,t)\, dt \frac{ds}{s^2} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s,-t)\overline{\tilde{g}}(s,-t)\, dt \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle \hat{\tilde{f}}(s,.), \hat{\tilde{g}}(s,.) \rangle \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |s|\hat{f}(\nu)\overline{\hat{\psi}}(s\nu)\overline{\hat{g}}(\nu)\hat{\psi}(s\nu)\, d\nu \frac{ds}{s^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{g}}(\nu)\Big(\int_{\mathbb{R}} \big|\hat{\psi}(s\nu)\big|^2 \frac{ds}{|s|}\Big)\, d\nu.
\end{aligned}$$

A zárójelben álló integrálban $u = s\nu$ új változót vezetve be

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(s\nu)|^2}{|s|}\, ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(u)|^2}{|u|}\, du = C.$$

A fenti számolásban az integrálok felcserélése azért jogos, mert az utolsó sorban álló integrálokban az integrandusz abszolút értékét véve, az integrálás felcserélhető, és ugyanígy számolva, látjuk, hogy a kettős integrál véges. Speciálisan az $f = g$ esetben azt is megkapjuk, hogy $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ a $(t,s) \mapsto 1/s^2$ súlyfüggvényre nézve négyzetesen integrálhatóak.

18.46. Következmény. *A wavelet-transzformáció injektív.*

Bizonyítás. A normát egy pozitív konstanssal szorozza.

18.47. Megjegyzés. Ha $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $\hat{\psi}$ folytonos, így a feltételből $\hat{\psi}(0) = 0$, azaz $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0$.

18.48. Folytonos rekonstrukciós formula. *Az előző definíció jelöléseivel, tegyük fel, hogy $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1$ és*

$$0 < C = \int_{\mathbb{R}} \frac{\big|\hat{\psi}(u)\big|^2}{|u|}\, du < \infty.$$

Ekkor f visszaállítható $\tilde{f}$-ból:

$$f(x) = \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|s|}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s,t)\psi_{s,t}(x)\, dt\, ds$$

majdnem minden x-re.

Bizonyítás. Mivel f és $\hat{f}$ folytonos és eltűnik a végtelenben, mindkettő benne van $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$-ben is. A minden $g, h \in \mathbb{L}^2$ függvényre teljesülő $\langle \check{\hat{g}}, h\rangle = \langle g, \hat{h}\rangle$ összefüggést fogjuk felhasználni, ami a Fourier-transzformáció unitér voltából következik, hiszen $\check{\hat{g}}$ Fourier-transzformáltja g. A képletben szerepel a $t \mapsto \tilde{f}(s,t)$ és

$$t \mapsto \overline{\psi}_{s,t}(x) = |s|^{-1/2}\overline{\psi}\Big(\frac{x-t}{s}\Big) \tag{1}$$

belső szorzata. A fentiek és a definícióban szereplő állítás szerint ez megegyezik

$$\nu \mapsto |s|^{1/2}\hat{f}(\nu)\overline{\hat{\psi}}(s\nu) = |s|^{1/2}\hat{f}(\nu)\hat{\varphi}(s\nu)$$

és az (1) függvény Fourier-transzformáltjának belső szorzatával, ahol $\varphi = \overline{\check{\psi}}$. Számoljuk ki az (1) függvény Fourier-transzformáltját! A függvény úgy is írható, hogy

$$t \mapsto |s|^{-1/2}\overline{\psi}\Big(\frac{x-t}{s}\Big) = |s|^{-1/2}\varphi\Big(\frac{t-x}{s}\Big).$$

Mivel

$$\sigma_s(\varphi(t)) = \varphi\Big(\frac{t}{s}\Big) = \varphi_s(t)$$

jelöléssel

$$\tau_x(\varphi_s(t)) = \varphi_s(t-x) = \varphi\Big(\frac{t-x}{s}\Big),$$

és

$$\Big(\tau_x(\sigma_s(\varphi))\Big)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\cdot(\sigma_s(\varphi))\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\cdot|s|\sigma_{1/s}(\hat{\varphi}),$$

azt kapjuk, hogy (1) Fourier-transzformáltja a

$$\nu \mapsto e^{-2\pi i\nu x}|s|^{1/2}\hat{\varphi}(s\nu)$$

függvény. A belső szorzat tehát — ν helyett t-t írva változónak —

$$|s|\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)e^{2\pi itx}\big|\hat{\varphi}(st)\big|^2\,dt.$$

Innen osztva s^2-tel és integrálva

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|s|}\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(s,t)\psi_{s,t}(x)\,dt\,ds = \int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)e^{2\pi itx}\int_{\mathbb{R}}\frac{\big|\hat{\varphi}(st)\big|^2}{|s|}\,ds\,dt = Cf(x),$$

ahol $u = -st$ helyettesítéssel adódik, hogy a jobb oldali integrálban a belső integrál értéke C; az integrálok azért felcserélhetőek, mert az integrandus abszolút értékét véve és ugyanígy számolva kapjuk, hogy a kettős integrál véges; végül felhasználtuk az inverziós tételt.

18.49. Definíció. A folytonos rekonstrukció inkább csak mint bizonyítási eszköz fontos. A diszkrét rekonstrukció vizsgálatához „ferdeszögű” koordinátarendszerekre lesz szükségünk. Normált térben egy vektorrendszer *minimális*, ha egyik vektor sincs benne a többiek lineáris burkának a lezártjában. Minimális vektorrendszer nyilván lineárisan független. Ortonormált rendszerek helyett (Schauder) bázisokat fogunk használni. Bázis nyilván minimális vektorrendszer. Egy bázist *feltétlen bázis*nak nevezünk, ha minden átrendezése is bázis. Bár továbbra is az $\mathbb{L}^2$ térben dolgozunk, ortogonalitás helyett inkább biortogonalitást használunk: az e_n, f_n, $n \in \mathbb{N}$ vektorrendszer *biortogonális*, ha $\langle e_m, f_n\rangle = \delta_{m,n}$ minden $m, n \in \mathbb{N}$-re. A következő tétel a minimális vektorrendszerek jellemzését adja.

18.50. Tétel. *Egy H Hilbert-térben az e_n vektorrendszer akkor és csak akkor minimális, ha van hozzá olyan f_n vektorrendszer, amellyel együtt biortogonális. Ha e_n, $n \in \mathbb{N}$ zárt, akkor egyetlen ilyen rendszer létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a vektorrendszer minimális. Az e_n-hez legyen H_n a többi vektor lineáris burkának a lezártja, P_n az erre az altérre való ortogonális projekció. Ekkor $e_n - P_n(e_n) \neq 0$ merőleges H_n-re, és $c_n = \langle e_n, e_n - P(e_n)\rangle = \|e_n - P(e_n)\|^2 \neq 0$, így $f_n = (e_n - P(e_n))/c_n$ választható.

Ha létezne biortogonális rendszer, de a vektorrendszer nem lenne minimális, akkor valamely e_n-hez létezne a többiek lineáris kombinációiból álló x_k sorozat, amely e_n-hez tart. De ekkor $0 = \langle x_k, f_n\rangle \to \langle e_n, f_n\rangle = 1$, ami ellentmondás.

Az unicitás igazolásához, ha f_n, f_n' is biortogonális, akkor $\langle e_m, f_n - f_n'\rangle = 0$ minden e_m-re. Mivel az e_m vektorrendszer zárt, $f_n - f_n' = 0$.

18.51. Definíció. Egy H Hilbert-térben az e_n, f_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozatok *frame*-et, magyarul *keret*et alkotnak, ha minden $x \in H$-ra a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, f_n\rangle e_n$$

sor konvergens, és összegét $F(x)$-szel jelölve, az F *keretleképezés* korlátos bijekciója H-nak önmagára. Ekkor az e_n rendszer zárt, az f_n rendszer teljes. Az F és F^{-1} korlátosságából következik, hogy léteznek olyan $0 < m \leq M < \infty$ konstansok, hogy

$$m\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k\rangle e_k \right\| \leq M\|x\|$$

minden $x \in H$-ra. A legnagyobb ilyen m és a legkisebb ilyen M a *keret konstansok*. Ha a keret konstansok megegyeznek, akkor a keret *szoros*. A felül indexelt $e^n = F^{-1}(e_n)$, $f^n = F^{-1}(f_n)$ vektorok is keretet alkotnak (ebben a sorrendben), ez az eredeti kerethez tartozó *inverz keret*. Minden $x \in H$-ra érvényes az

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, f_n\rangle e^n$$

keret sorfejtés. Sokszor az $e_n = f_n$, $n \in \mathbb{N}$ választással élünk, így beszélhetünk arról, hogy e_n, $n \in \mathbb{N}$ keret. A következő tétel egyszerű feltételt ad arra, hogy egy vektorrendszer keret legyen. Egyébként egy ilyen keretet *egzakt*nak nevezünk, ha bármelyik e_n-et elhagyva, a maradék rendszer már nem keret.

18.52. Tétel. *Az e_n, $n \in \mathbb{N}$ vektorrendszer akkor és csak akkor keret a H Hilbert-térben, ha léteznek olyan $0 < m \le M < \infty$ konstansok, hogy*

$$m\|x\|^2 \le \sum_n \big|\langle x, e_n\rangle\big|^2 \le M\|x\|^2$$

teljesül minden $x \in H$-ra. Ekkor az F keretleképezés önadjungált, pozitív definit és

$$\langle F(x), x\rangle = \sum_n \big|\langle x, e_n\rangle\big|^2$$

minden $x \in H$-ra.

Bizonyítás. Lásd [144], 79. o. 1. Tétel.

18.53. Példák. Egy e_n, $n \in \mathbb{N}$ teljes ortonormált rendszer egy szoros, egzakt keret $m = M = 1$ keret konstansokkal. Az $e_0, e_0, e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots$ sorozat is keret $m = 1$, $M = 2$ keret konstansokkal. Ennek bármely tagját elhagyva, továbbra is keret marad, tehát nem egzakt. A $2e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots$ sorozat egzakt keret $m = 1$, $M = 2$ keret konstanssokkal. Látjuk, hogy a keret előállítás általában nem egyértelmű. A keret együtthatókat az jellemzi, hogy a sorozat $\mathbb{l}^2$ normája minimális (lásd [144], 82. o. 2. Tétel).

18.54. Tétel. *Legyen e_n, $n \in \mathbb{N}$ egy keret a H Hilbert-térben, és jelölje e^n az inverzét. A keret akkor és csak akkor egzakt, ha $\langle e_n, e^n\rangle = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Speciálisan minden egzakt keret minimális, továbbá e_n, e^n, $n \in \mathbb{N}$ biortogonális.*

Bizonyítás. Lásd [144], 83. o., 3. Tétel.

18.55. Következmény. *Bármely egzakt keret esetén $m \le \|e_n\|^2 \le M$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.*

Bizonyítás. A jelenlegi tétel szerint e_n, e^n biortogonális. Az előző tétel szerint, azt az $x = e^k$ elemre alkalmazva

$$m\|e^k\|^2 \le \sum_n \big|\langle e^k, e_n\rangle\big|^2 = \big|\langle e^k, e_n\rangle\big|^2 \le \|e^k\|^2\|e_k\|^2.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség minden keretre fennáll: alkalmazzuk az előző tétel egyenlőtlenségét az $x = e_k$ elemre:

$$\|e_k\|^4 \le \sum \big|\langle e_k, e_n\rangle\big|^2 \le M\|e_k\|^2.$$

18.56. Következmény. *Az e_n rendszer akkor és csak akkor egzakt keret, ha feltétlen bázis, amelyre teljesül a tétel feltétele.*

18.57. Megjegyzés. A wavelet-transzformált definíciójában használ jelölésekkel, visszatérünk a diszkrét visszaállítás kérdéséhez. Általánosan, lehetne $s = \pm\varrho^m$, $t = n\varrho^m\tau$, $m, n \in \mathbb{Z}$, ahol $0 < \varrho < 1$, de a gyakorlatban csak pozitív előjelet és csaknem kizárólag a $\varrho = 1/2$ választást, azaz oktáv skálázást használnak. A τ beleolvasztható az anyawaveletbe. Így a $\varphi_{m,n} = \psi_{2^{-m},n2^{-m}}$ függvényekkel képezünk belső szorzatot. Ha ezek keretet alkotnak, akkor a keret előállítás adja a diszkrét visszaállítást, és a feladat a $\varphi^{m,n}$ inverz

keret meghatározása. Különösen kedvező az az eset, amikor az inverz keret (egy másik) anyawaveletből származtatható. Hogy még ennél több is lehetséges, azt mutatja a

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x < 1/2, \\ -1, & \text{ha } 1/2 \le x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Haar-féle anyawavelet esete, amelyhez tartozó $\varphi_{m,n}$ függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-ben. Természetesen szakadásos anyawavelet nem nagyon kedvező sima függvények vizsgálatánál. Sokáig nem volt világos, hogy sima anyawaveletből is lehet-e teljes ortonormált rendszert kapni? Először szakaszonként lineáris, majd sima, végül kompakt tartójú és elég sima (egy paramétertől függ hogy mennyire) anyawavelettel is sikerült ezt elérni. A konstrukció megtalálható [144]-ben és az ott idézett irodalomban, sok más kapcsolódó anyaggal együtt. A gyakorlatban nem mindig (bár sokszor) érdemes ilyen anyawaveletet hasnzálni, más szempontok is vannak. Kész programkönyvtárak érhetők el ingyenesen wavelet sorfejtésre és rekonstrukcióra.

A mérnöki gyakorlatban való alkalmazások miatt röviden foglalkozunk a Hardy-terekkel.

18.58. Hardy-tér a felső és alsó (illetve bal és jobb) félsíkon. Jelölje $\mathbb{C}^+$ a nyílt komplex felső félsíkot, $\mathbb{C}^-$ pedig a nyílt komplex alsó félsíkot, azaz legyen $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) > 0\}$ és $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) < 0\}$. Ha $1 \le p < \infty$, legyen H^p_+ azon $f\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak, és amelyekre

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p \, dx$$

korlátos, mint $y > 0$ függvénye. Egy $f \in H^p_+$ függvényre legyen

$$\|f\| = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy)\bigr|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Legyen H^∞_+ azon $f\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ komplex függvények halmaza, amelyek analitikusak és korlátosak. Egy $f \in H^\infty_+$ függvényre legyen $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}, y>0} \bigl|f(x+iy)\bigr|$. Legyen $f \in H^p_-$ pontosan akkor, ha az $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ függvény H^p_+ eleme; ezek a függvények az alsó félsíkon analitikusak. (Ha a Fourier-transzformált helyett Laplace-transzformáltat akarunk használni, akkor a felső félsíknak a bal, az alsó félsíknak a jobb félsík felel meg.)

Mivel a Hardy-terek tanulmányozását a $\mathbb{D}$ egységkörlapon értelmezett hasonló Hardy-tér tanulmányozasára szokás visszavezetni, ami túl messzire vezetne, itt a bizonyítások helyett megelégszünk a [11] jegyzetre történő hivatkozásokkal.

18.59. Definíció. Ha $x \in \mathbb{R}$, jelentse $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z) = c$ azt, hogy minden $C > 0$-ra az f függvény $\{\xi + i\eta\colon \xi, \eta \in \mathbb{R}, |\xi - x| < C\eta\}$ halmazra vett megszorításának c a határértéke az x pontban; $\lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x}$ a *nemtangenciális határérték.*

18.60. Tétel. *Ha $1 \le p \le \infty$, $f \in H^p_+$, akkor $f(x) := \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ majdnem mindenütt létezik, $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, továbbá $x \mapsto \ln\bigl|f(x)\bigr|/(1+x^2)$ integrálható.*

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 47. o., Corollary 5.

18.61. Következmény: Poisson-formula. *Ha* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p_+$, *akkor* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f(t)\, dt.$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *és*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} h(t)\, dt$$

analitikus a felső félsíkon, akkor $f \in H^p_+$ *és* $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ *majdnem mindenütt. Továbbá az* $x \mapsto f(x+iy)$ *függvény* $\mathbb{L}^p$*-normája tart az* $x \mapsto f(x)$ *függvény* $\mathbb{L}^p$*-normájához, ha* $y \downarrow 0$.

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 48. o., Corollary 6.

18.62. Következmény. *Ha* $1 \leq p < \infty$, $f \in H^p_+$, *akkor*

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \bigl|f(x+iy) - f(x)\bigr|^p\, dx = 0.$$

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 49. o., Corollary 8.

18.63. Tétel: Cauchy-formula. *Ha* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p_+$, *akkor* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x+iy)}\, dt \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-(x-iy)}\, dt = 0$$

Megfordítva, ha $h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *és* $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ *esetén*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x-iy)}\, dt = 0,$$

akkor az

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-(x+iy)}\, dt$$

összefüggéssel definiált függvényre $f \in H^p_+$ *és* $h(x) = \lim_{z \overset{\vee}{\longrightarrow} x} f(z)$ *majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 51. o., Theorem 13.

18.64. Megjegyzés. A fentiek alapján úgy tekinthető, hogy $H^p_+ \subset \mathbb{L}^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, ha $1 \leq p \leq \infty$. Megmutatható, hogy zárt altér, így maga is Banach-tér. A bizonyítást illetően lásd a [11] jegyzetet, 53. o., Corollary 10.

18.65. Paley–Wiener-tétel. *Egy* $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *függvény pontosan akkor van* H^2_+*-ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a* $[0, +\infty[$ *intervallumon kívül.*

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 58. o., Theorem 1.

18.66. Megjegyzés. Ebből már könnyen következik, hogy egy $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény pontosan akkor van H^2_--ben, ha a Fourier-transzformáltja majdnem mindenütt nulla a $]-\infty,0]$ intervallumon kívül. Mivel a Fourier-transzformáció $\mathbb{L}^2$-n belső szorzat tartó, minden $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény egyértelműen írható fel egy $f_+ \in H^2_+$ és egy $f_- \in H^2_-$ függvény ortogonális összegeként. A megfelelő $P_+\colon \mathbb{L}^2 \to H^2_+$ és $P_-\colon \mathbb{L}^2 \to H^2_-$ ortogonális projekciókat *Riesz-projekció*nak hívjuk.

18.67. Definíció. Legyen $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ rögzített. Az előző pont jelöléseivel az ehhez a függvényhez tartozó $T_\varphi\colon H^2_+ \to H^2_+$ *Töplitz-operátor*t a $T_\varphi f = P_+(\varphi f)$ összefüggés, a $H_\varphi\colon H^2_+ \to H^2_-$ *Hankel-operátor*t pedig a $H_\varphi f = P_-(\varphi f)$ összefüggés definiálja.

18.68. Nehari tétele. *Az előző definíció jelöléseivel, ha $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $\|H_\varphi\| = d(\varphi, H^\infty_+)$, ahol a d távolság $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$-ben értendő.*

Bizonyítás. Lásd a [11] jegyzetet, 73. o., Theorem 3.

VI. Variációszámítás

Azaz, mivel a világegyetem terve a legtökéletesebb, nem lehet kétség, hogy minden történés a világon meghatározható a megfigyelt jelenségből és okokból a maximum és minimum módszerének segítségével.

Leonhard Euler

Euler módszerét általánosítva jutott Lagrange figyelemreméltó formuláihoz, ahol egyetlen sorban benne van az analitikus mechanika összes problémájának megoldása.

C. G. J. Jacobi

Newton lerakta a mechanika, és – Leibniz-cel együtt – az analízis alapjait. Követőire várt, hogy az új matematikai eszközöket (melyeket ő a „Principia . . .”-ban nem használt!) továbbfejlesszék, és felépítsék az épületet. A munkát nagyrészt Euler (1707–1783) végezte el. A „matematicus acutissimus” matematikával, fizikával, élettannal, térképészettel, és még sok mással is foglalkozott. (Összes művei 72 kötet!) Többek között nagy jártassággal rendelkezett a variációszámításban (ahogy ma nevezzük), amely Johann Bernoulli egy lényegében matematikai problémájából nőtt ki, és észrevette, hogy a newtoni mozgásegyenletek integrálásával kapott pályáknak bizonyos minimáltulajdonságaik vannak. Ezzel a variációs elvek bevonultak a fizikába. Munkáit Lagrange (1738–1813) fejlesztette tovább, 100 évvel a „Principia . . .” után írt könyvében a mechanika lényegében már úgy szerepel, ahogy ma szokás tárgyalni az egyetemen.

A variációszámítás, ahogy ma látjuk, az extrémális problémák tárgykörének egy fejezete. Ez a problémakör jól kezelhető a nemlineáris funkcionálanalízis eszközeivel.

Itt az első variációk eltűnéséből kapható Euler–Lagrange-differenciálegyenletek levezetése került a középpontba. Röviden kitérünk a regularitás kérdésére, a Rytz-módszerre, és a Pontrjagin-féle maximumelvre.

19
Az Euler–Lagrange egyenletek

A híres Euler az összes variációs problémák vizsgálatát sikeresen egy általános módszerre vezette vissza. De bármilyen kifinomult és gyümölcsöző is legyen a módszere, el kell ismerni, hogy nem *egyszerű. Itt most egy olyan módszer található, amely csak az analízis egyszerű elveit használja.*

Joseph Louis Lagrange (1762)

19.1. A fizika variációs elvei. A természettudományok alaptörvényeinek nagy része differenciálegyenletként fogalmazható meg. Az egyes konkrét problémákra vonatkozó egyenletek származtatását nagyon elősegíti, hogy a fizika számos ágának (mechanika, relativitáselmélet, elektromágnesség, kvantummechanika, kvantumtérelmélet, stb.) alaptörvényei megfogalmazhatók úgynevezett *variációs elv*ek segítségével. Példaként a klasszikus mechanika esetét tekintjük. Tegyük fel, hogy egy mechanikai rendszer állapotát a $q_1, q_2, \dots, q_n$ paraméterekkel, az *általános koordináták*kal és ezek idő szerinti deriváltjaival, a $q_1', q_2', \dots, q_n'$ *általános sebesség*ekkel jellemezhetjük, továbbá, hogy a rendszer helyzeti és mozgási energiájának összege állandó, a rendszer *konzervatív*. Ilyen rendszerekre a *Hamilton-elv* azt mondja ki, hogy a rendszer mozgását leíró $t \mapsto q(t)$ vektor értékű függvény olyan, hogy a t_0 és t_1 időpontok közötti pályára az

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), q'(t))\, dt$$

hatás minimális (pontosabban stacionárius), ahol $L = T - U$ a *Lagrange-függvény*, a T mozgási és U helyzeti energia különbsége, az integrál a *hatásintegrál*. A hatás egy (nem lineáris) funkcionál a lehetséges pályákon. A *variációszámítás* ilyen funkcionálok szélsőértékszámításával foglalkozik, és megfelelő feltételek mellett azt mutatja ki, hogy a szélsőértéket adó pályára teljesülnek a

$$\frac{d}{dt} L_{q'}(t, q(t), q'(t)) - L_q(t, q(t), q'(t)) = 0$$

(másodrendű) Euler–Lagrange-differenciálegyenletek. Ha bevezetjük a $p = L_{q'}$ *általános impulzus*okat, akkor az Euler–Lagrange-egyenletek alakja $p' = L_q$.

19.2. Feladat [8]. Írjuk fel a kettős síkinga (l_1 hosszúságú súlytalan rúdon m_1 tömeg, ahhoz erősítve l_2 hosszúságú súlytalan rúdon m_2 tömeg) Lagrange-függvényét.

Megoldás. Lásd Landau–Lifsic [101], I., 22. o.

19.3. Feladat [8]. Írjuk fel egy m_1 tömegű síkinga Lagrange-függvényét, amelynek felfüggesztési pontja m_2 tömeggel vízszintes egyenesen mozoghat.

Megoldás. Lásd Landau–Lifsic [101], I., 23. o.

19.4. Egydimenziós probléma. Tekintsük az alábbi *egydimenziós, rögzített peremű variációs problémát*: Legyenek n és m pozitív természetes számok, $G \subset \mathbb{R}$ nem üres, korlátos nyílt intervallum. Álljon M, a *megengedett függvények osztálya* az összes olyan $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G};\mathbb{R}^n)$ függvényekből, amelyekre az

$$S(x) = \int_{\overline{G}} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))\, dt$$

integrál integrandusa minden $\overline{G}$-beli pontban értelmezve van, ahol L egy megfelelő dimenziós euklidészi tér egy Q nyílt részhalmazán értelmezett folytonos valós értékű függvény, és amelyek eleget tesznek a $Bx = g$ peremfeltételnek, ahol B a $\mathcal{C}^m(\overline{G};\mathbb{R}^n)$-beli függvényekre értelmezett lineáris operátor, g a B értékkészletének egy eleme, és B „csak a peremen felvett értékektől függ", azaz nulla, ha x nulla a G végpontjainak egy-egy környezetében. Megoldandó az

$$M\colon S(x) \to \text{lokmin}$$

probléma. Az függvényt a probléma *Lagrange-függvény*ének szokás nevezni, az integrál a hatásintegrál, S a *hatás*.

Ez a szélsőérték feladat (és a 19.17 többváltozós feladat is) kezelhető a funkcionálanalízis eszközeivel. Első pillantásra úgy néz ki, hogy a feltételes szélsőértékszámítás eszközeit kell használnunk, erre azonban csak akkor van szükség, ha más, bonyolultabb mellékfeltételek is vannak. A fenti, egyszerű mellékfeltétel könnyen kiküszöbölhető, ha egy megengedett x függvényt (például a lokális minimumot adó függvényt) levonunk minden megengedett függvényből, így az

$$(\tilde{x} - x) \mapsto S\big((\tilde{x} - x) + x\big) = \tilde{S}(\tilde{x} - x)$$

funkcionál lokális minimumát keressük. Ezzel az egyszerű *különbség trükk*el kapott új funkcionál már egy normált tér egy nyílt részhalmazán van értelmezve. Annak, hogy lokális szélsőértékhelye legyen egy pontban, szükséges feltétele, hogy az első variációi (iránymenti deriváltjai) nullák legyenek az adott pontban. Megjegyezzük, hogy a fizika variációs elvei nem mindig minimumelvek, és sokszor inkább úgy fogalmazhatók, hogy az első variáció eltűnik, ezért elsősorban ezzel a szükséges feltétellel fogunk foglalkozni, és a lokális minimum létezéséhez elégséges feltételeket egyáltalán nem tárgyalunk. A szükséges feltétel levezetésénél Lagrange eredeti módszerét követjük. Felhasználjuk az úgynevezett Lagrange-lemma alábbi egyszerű változatát. (Az élesebb változatot lásd a disztribúcióknál.)

19.5. Lagrange-lemma. *Tegyük fel, hogy $-\infty < a < b < \infty$ és $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $m \geq 0$ és tetszőleges m-szer folytonosan differenciálható $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre, amely az $]a,b[$ egy kompakt részintervallumán kívül nulla, $\int_a^b h(t)y(t)\,dt = 0$. Ekkor h nulla $]a,b[$-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $t_0 \in]a,b[$-re $h(t_0) \neq 0$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ és $[c,d] \subset]a,b[$, $c < t_0 < d$ intervallum, amelyen $|h| \geq \varepsilon$. Legyen

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } a \leq t \leq c \text{ vagy } d \leq t \leq b, \\ (t-c)^{m+1}(d-t)^{m+1}, & \text{ha } c < t < d. \end{cases}$$

Mivel h nem vált előjelet $[c,d]$-n,

$$\left|\int_a^b h(t)y(t)\,dt\right| = \left|\int_c^d h(t)y(t)\,dt\right| = \int_c^d |h(t)|y(t)\,dt \geq \varepsilon\int_c^d y(t)\,dt > 0,$$

ami ellentmondás.

19.6. Tétel. *19.4 jelöléseivel, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^{m+1}(Q)$ és az $x \in M$ függvényhez van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$S(x) \leq S(\tilde{x}), \quad \text{ha} \quad \tilde{x} \in M \quad \text{és} \quad \|\tilde{x} - x\|_m < \delta,$$

továbbá, hogy az x függvény $2m$-szer folytonosan differencálható G-n. Ekkor $t \in G$ esetén x eleget tesz az

$$\begin{aligned} L_x(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t)) - \frac{d}{dt}\Bigg(& L_{x'}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t)) \\ - \frac{d}{dt}\Bigg(& L_{x''}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t)) - \dots \\ - \frac{d}{dt}& L_{x^{(m)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))\Bigg)\dots\Bigg) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Euler–Lagrange-egyenlet*nek*.

Vigyázat, az x, x', … jelöléseket kettős értelemben használjuk. Egyrészt, mint az L függvény változóit (például differenciálunk szerintük), másrészt mint a keresett függvényt, deriváltját stb. Ez a „fizikus jelölésmód” jóval egyszerűbb, mint a precíz.

Bizonyítás. Legyen $y\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges olyan függvény, amely m-szer folytonosan differenciálható és nulla a végpontok egy környezetében. Tekintsük az

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon) = S(x + \varepsilon y)$$

valós változós függvényt. Ez a függvény értelmezve van a nulla egy környezetében, és mivel a nulla pontban lokális minimuma van, valamint a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint differenciálható a nulla pontban, $\varphi'(0) = 0$, azaz

$$\int_G \sum_{j=0}^m L_{x^{(j)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))y^{(j)}(t)\,dt = 0.$$

Nem írva ki a változókat, parciális integrálással átalakítva az integrált, és felhasználva, hogy y eltűnik a végpontok egy környezetében, azt kapjuk, hogy

$$\int_G \left(\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} L_{x^{(j)}}\right) y\,dt = 0.$$

Ha y-t úgy választjuk, hogy egy koordinátája kivételével a többi nulla legyen, alkalmazhatjuk az előző lemmát, és azt kapjuk, hogy $\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} L_{x^{(j)}}$ adott koordinátája mindenütt nulla. Mivel ez mindegyik koordinátára megtehető, azt kapjuk, hogy $\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} L_{x^{(j)}} = 0$.

19.7. Regularitás. Mivel tudjuk, hogy $x \in \mathcal{C}^{2m}(G)$ és $L \in \mathcal{C}^{m+1}(Q)$, a kijelölt differenciálások elvégezhetők, és az Euler–Lagrange-egyenlet egy $2m$-edrendű implicit vektor differenciálegyenlettel ekvivalens. Az L Lagrange-függvényre ez a feltevés könnyen ellenőrizhető, az ismeretlen függvényre azonban csak az $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G})$ feltevés tűnik természetesnek. A továbbiakban célunk annak megmutatása, hogy egy szükséges feltétel, a Legendre-feltétel egy olyan, könnyen ellenőrizhető és gyakran teljesülő feltételhez vezet el bennünket, amelynek segítségével az $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G})$ feltevésből következik, hogy $x \in \mathcal{C}^{2m}(G)$. Az ilyen típusú úgynevezett *regularitási tétel*ek nagyon fontos szerepet játszanak a variációszámításban. Először azonban meg kell mutatnunk, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet akkor is fennáll, ha csak azt tesszük fel, hogy $x \in \mathcal{C}^m(G)$ és $L \in \mathcal{C}^1(Q)$.

19.8. Du Bois-Reymond-lemma. *Tegyük fel, hogy $G \subset \mathbb{R}$ egy nem üres nyílt intervallum, h lokálisan integrálható függvény G-n, és tegyük fel, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{D}(G)$ függvényre*

$$\int_G h(t)y^{(m)}(t)\,dt = 0.$$

Ekkor h majdnem mindenütt megegyezik egy m-nél alacsonyabb fokú polinommal.

$*$ **Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy ha egy $h \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúcióra $h' = 0$, akkor h konstans függvénnyel reprezentálható. Válasszunk olyan $\omega \in \mathcal{D}$ függvényt, amelyre

$$\int_G \omega(t)\,dt = 1.$$

Legyen $G =]a, b[$. Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{D}$ függvény előállítható

$$\varphi(t) = \psi'(t) + \omega(t)\int_a^b \varphi(s)\,ds$$

alakban, ahol

$$\psi(t) = \int_a^t \left(\varphi(r) - \omega(r)\int_a^b \varphi(s)\,ds\right) dr,$$

és itt $\psi \in \mathcal{D}$. Valóban, ψ akárhányszor differenciálható, és nulla, ha $\operatorname{spt}(\omega) \cup \operatorname{spt}(\varphi)$ alsó határánál kisebb, vagy felső határánál nagyobb a t. Ebből viszont

$$h(\varphi) = h(\psi') + h(\omega)\int_a^b \varphi(s)\,ds = \int_a^b h(\omega)\varphi(s)\,ds,$$

azaz h konstanssal reprezentálható.

Most teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha egy h disztribúció m-edik deriváltja nulla, akkor m-nél alacsonyabb fokú polinommal reprezentálható. Mivel $(h')^{(m-1)} = 0$, $h' = p$, ahol p legfeljebb $m-2$-ed fokú polinom. Legyen P a p egy primitív függvénye, ekkor $(h-P)' = 0$, így $h - P$ konstanssal reprezentálható, azaz h egy m-nél alacsonyabb fokú polinommal reprezentálható. Végül a lemma állítását az általánosított Lagrange-lemmából kapjuk, mivel a h lokálisan integrálható függvény és egy m-nél alacsonyabb fokú polinom ugyanazt a disztribúciót reprezentálják.

19.9. Tétel. *19.4 jelöléseivel, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^1(Q)$ és az $x \in M$ függvényhez létezik olyan $\delta > 0$, hogy*

$$S(x) \le S(\tilde{x}), \quad \text{ha} \quad \tilde{x} \in M \quad \text{és} \quad \|x - \tilde{x}\|_m < \delta.$$

Ekkor x eleget tesz G-n az

$$\begin{aligned} L_x(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) - \frac{d}{dt}\Big(& L_{x'}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) \\ & - \frac{d}{dt}\Big(L_{x''}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) - \dots \\ & - \frac{d}{dt} L_{x^{(m)}}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))\Big) \dots \Big) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Euler–Lagrange-egyenlet*nek*.

Bizonyítás. Legyen $G =]a, b[$ és $y \in \mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, amely nulla a végpontok egy-egy környezetében. Tekintsük az

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon) = S(x + \varepsilon y)$$

valós változós függvényt. Ez a függvény értelmezve van a nulla egy környezetében, és mivel a nulla pontban lokális minimuma van, valamint a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint differenciálható a nulla pontban, $\varphi'(0) = 0$, azaz

$$\int_{\overline{G}} \sum_{j=0}^{m} L_{x^{(j)}}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) y^{(j)}(t)\, dt = 0.$$

Nem írva ki a változókat, parciális integrálással átalakítva az integrált, és felhasználva, hogy y eltűnik a végpontok környezetében, azt kapjuk, hogy

$$\int_{\overline{G}} \left(\sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \mathcal{J}^{m-j}(L_{x^{(j)}}) \right) y^{(m)}\, dt = 0,$$

ahol $\mathcal{J}$ a t szerinti integrálás

$$\mathcal{J}(h)(s) = \int_a^s h(t)\, dt$$

összefüggéssel értelmezett operátora. Koordinátánként alkalmazva az előző lemmát, azt kapjuk, hogy

$$L_{x^{(m)}} - \mathcal{J}(L_{x^{(m-1)}}) + \mathcal{J}^2(L_{x^{(m-2)}}) - \dots + (-1)^m \mathcal{J}^m(L_x) = p$$

a G pontjaiban, ahol p egy m-nél alacsonyabb fokú, vektorértékű polinom. Mivel minden más tag differenciálható t szerint, $L_{x^{(m)}}$ differenciálható t szerint. Differenciálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} L_{x^{(m)}} - L_{x^{(m-1)}} + \mathcal{J}(L_{x^{(m-2)}}) - \dots + (-1)^m \mathcal{J}^{m-1}(L_x) = p'.$$

Most, mivel minden más tag is differenciálható, az első két tag összege is differenciálható, így

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}L_{x^{(m)}} - L_{x^{(m-1)}}\right) + L_{x^{(m-2)}} - \ldots + (-1)^m \mathcal{J}^{m-2}(L_x) = p''.$$

Teljes indukcióval folytatva, végül $(-1)^m$-mel szorozva, kapjuk az Euler–Lagrange-egyenletet.

∗ **19.10. Legendre-feltétel.** *Az előző tétel feltételei mellett, ha $L \in \mathcal{C}^2(Q)$, akkor az*

$$L_{x^{(m)}x^{(m)}}(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))$$

bilineáris formából pozitív szemidefinit kvadratikus forma származik minden $t \in G$-re.

Bizonyítás. Képezzük az $\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon)$ függvényt, mint az előző tétel bizonyításában. Mivel φ kétszer folytonosan differenciálható a nulla egy környezetében, és a nullában lokális minimuma van, $\varphi''(0) \geq 0$. Ebből, nem írva ki a változókat,

$$\varphi''(0) = \int_G \left(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} L_{x^{(i)}x^{(j)}} y^{(i)} y^{(j)}\right) dt \geq 0.$$

Tegyük fel indirekt, hogy valamely $t \in G$-re és valamilyen v egységvektorra

$$L_{x^{(m)}x^{(m)}}(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))vv < 0.$$

Válasszunk olyan $\omega \in \mathcal{K}^m(\mathbb{R})$ nemnegatív függvényt, amely a 0 pontban nem nulla, és legyen $\omega_\varepsilon(s) = \omega(s/\varepsilon)$, ha $\varepsilon > 0$. Mivel az $L_{x^{(k)}x^{(l)}}$ függvények folytonosak, van olyan környezete t-nek, és $K, M > 0$, hogy ebben a környezetben

$$\|L_{x^{(k)}x^{(l)}}\| \leq K \quad \text{és} \quad L_{x^{(m)}x^{(m)}}vv \leq -M.$$

Az $y(s) = \omega_\varepsilon(s-t)v$ függvényre alkalmazva a becslést, $c_k = \int |\omega^{(k)}|$ jelöléssel azt kapjuk, hogy ha ε elég kicsi, akkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} L_{x^{(k)}x^{(l)}} y^{(k)} y^{(l)}\right) dt \leq \sum_{k+l<2m} K c_k \varepsilon^{1-k} c_l \varepsilon^{1-l} - M c_m^2 \varepsilon^{2-2m} \\ &= \varepsilon^{2-2m}\left(\sum_{k+l<2m} K c_k c_l \varepsilon^{2m-k-l} - M c_m^2\right). \end{aligned}$$

Ha ε nagyon kicsi, akkor a zárójelben lévő kifejezés negatív, ami ellentmondás.

∗ **19.11. Hilbert tétele.** *Az 19.9 tétel feltételei mellett, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^{m+1}(Q)$, és az $L_{x^{(m)}x^{(m)}}(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))$ bilineáris formából származó kvadratikus forma pozitív definit egy $t \in G$ pontban. Ekkor van olyan környezete t-nek, amelyen az x függvény $2m$-szer folytonosan differenciálható, és az Euler–Lagrange-egyenlet egy explicit vektor differenciálegyenlettel ekvivalens.*

Bizonyítás. Induljunk ki a 19.9 tétel bizonyításában levezetett

$$\begin{aligned}&L_{x^{(m)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))\\&=p(t)+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\mathcal{J}^k\Big(L_{x^{(m-k)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))\Big)\end{aligned}$$

összefüggésből, és tekintsük az

$$\begin{aligned}F(t,y)=&L_{x^{(m)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m-1)}(t),y)\\&+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\mathcal{J}^k\Big(L_{x^{(m-k)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))\Big)-p(t)\end{aligned}$$

függvényt. Mivel F folytonosan differenciálható, és az

$$L_{x^{(m)}x^{(m)}}(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(m)}(t))$$

bilineáris formához tartozó kvadratikus forma pozitív definit, determinánsa nem nulla, így alkalmazható az implicit függvény tétel, mely szerint t egy környezetében pontosan egy olyan $s\mapsto y(s)$ függvény létezik, amelyre

$$F(s,y(s))=0\quad\text{és}\quad y(t)=x^{(m)}(t),$$

továbbá ez a függvény folytonosan differenciálható. Mivel $s\mapsto x^{(m)}(s)$ is megoldása az egyenletnek, $s\mapsto x^{(m)}(s)$ folytonosan differenciálható a t pont egy környezetében. Most ezt felhasználva, kapjuk, hogy F kétszer folytonosan differenciálható, és így $x^{(m)}$ is kétszer folytonosan differenciálható t egy környezetében, stb., teljes indukcióval kapjuk az első állítást. A második állítást úgy kapjuk, hogy az Euler–Lagrange-egyenletben elvégezzük a differenciálásokat, majd figyelembe vesszük, hogy $L_{x^{(m)}x^{(m)}}$, az $x^{(2m)}$ együtthatója invertálható mátrixú t egy környezetében.

19.12. Hiányos Lagrange-függvények. Ha az L Lagrange-függvény nem függ valamely változótól (hiányos), akkor az Euler–Lagrange-egyenlet általában egyszerűsíthető. Az egydimenziós probléma leírásánál bevezetett jelölésekkel, az $m=1$, $L\in\mathcal{C}^2(Q)$ eset vizsgálatára szorítkozunk.

Ha L nem függ x'-től, vagy x'-nek lineáris függvénye, akkor nem differenciálegyenletet kapunk, hanem x egy egyenletből fejezhető ki.

Ha L nem függ x-től, akkor az egyenlet

$$\frac{d}{dt}L_{x'}(t,x')=0$$

alakú, és azonnal integrálható: $L_{x'}(t,x')=c$, azaz elsőrendű egyenletet kapunk.

Ha L nem függ t-től és x'' folytonos, akkor egyszerű számolással adódik, hogy a $\frac{d}{dt}(L(x,x')-L_{x'}(x,x')x')$ függvény nulla, így az elsőrendű

$$L(x,x')-L_{x'}(x,x')x'=c$$

egyenletre jutunk.

→ **19.13. Feladat [7].** Vezessük le a *matematikai inga* (merev, súlytalan l hosszúságú rúdon m tömegű tömegpont) φ kitérésre vonatkozó mozgásegyenletét a Hamilton-elv segítségével.

19.14. Feladat [10]. Határozzuk meg a minimális felszínű forgásfelületek alakját.

Megoldás. Lásd Kósa [92], 22. és 46. o.

19.15. Brachisztochon-probléma [10]. Egy tömegpont egy sima pályán súrlódás nélkül csúszik a gravitáció hatására az A pontból B pontba. Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakú pálya esetén ér oda a legrövidebb idő alatt. (Lásd Kósa [92], 20. és 48. o.) Johann Bernoulli ezen, 1696-ban közölt problémája tekinthető az első variációszámítási feladatnak.

19.16. Multiindexek. Többváltozós függvények vizsgálatánál tömör jelöléseket tesz lehetővé a multiindexek használata. Egy *multiindex* egy

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$$

természetes számokból álló vektor. Legyen $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ és $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_k!$. Multiindexekkel tömören írhatók például polinom többváltozós polinomok és parciális differenciáloperátorok. Ha

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{K}^k,$$

akkor jelölje ξ^α a $\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_k^{\alpha_k}$ *monom*ot. Ekkor egy legfeljebb m-ed fokú polinom

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \xi^\alpha$$

alakban írható. Jelölje ∂^α az $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_k^{\alpha_k}$ differenciáloperátort, ahol ∂_j a j-edik változó szerinti differenciálás operátora, $P(\partial)$ pedig a

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

differenciáloperátort. Például, ha $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2$, akkor $P(\partial)$ a $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_k^2$ *Laplace-operátor*.Ha $u \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ az x pontban m-szer differenciálható, akkor az $u^{(m)}(x)$ szimmetrikus m-lineáris leképezés koordinátái azonosíthatók a $(\partial^\alpha u)(x)$, $|\alpha| = m$ vektorok koordinátáival.

19.17. Többdimenziós probléma. Tekintsük az alábbi *többdimenziós, rögzített peremű variációs problémát*. Legyenek n, m, k pozitív természetes számok, $G \subset \mathbb{R}^k$ korlátos tartomány. Álljon M, a *megengedett függvények osztálya* az összes olyan $u \in \mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$ függvényekből, amelyekre az

$$S(u) = \int_{\overline{G}} L(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x))\, dx$$

integrál integrandusa minden $x \in \overline{G}$ pontban értelmezve van, ahol L egy megfelelő dimenziós euklidészi tér egy Q nyílt részhalmazán értelmezett folytonos valós értékű függvény,

és amelyek eleget tesznek a $Bu = g$ peremfeltételnek, ahol B a $\mathcal{C}^m(\overline{G};\mathbb{R}^n)$-beli függvényekre értelmezett lineáris operátor, g a B értékkészletének egy eleme, és B „csak a peremen felvett értékektől függ", azaz nulla, ha $u|_G \in \mathcal{K}^m(G;\mathbb{R}^n)$. Megoldandó az

$$M\colon S(u) \to \text{lokmin}$$

probléma. Az L függvényt a probléma *Lagrange-függvény*ének fogjuk nevezni, az integrált *hatásintegrál*nak, S-et *hatás*nak. Álló helyzetre vonatkozó problémáknál L rendszerint a helyzeti energia sűrűsége, ennek megfelelően az integrál nem hatás, azaz Js dimenziójú. Mozgó helyzetre vonatkozóknál L-nek a térkoordinátákra vonatkozó integrálja a helyzeti és a mozgási energia különbsége, amelyet az idő szerint integrálunk. Relativisztikus problémáknál a hely- és időkoordináták között nincs is lényeges különbség. A fizikában L-et gyakran Lagrange-sűrűségnek nevezik.

19.18. Parciális integrálás többdimenzióban. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelyre a ∂G határ lokálisan Lipschitz, $u, v\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-függvények, e_i az i-edik egységvektor. Ekkor*

$$\int_G (u\partial_i v + v\partial_i u) = \int_{\partial G} uv\langle e_i, \mathbf{n}\rangle.$$

Ha v tartója G-nek kompakt részhalmaza, akkor a jobb oldal nulla, és a G határára vonatkozó feltevés elhagyható.

Vegyük észre, hogy a tétel lényegében csak a divergenciatétel átfogalmazása.

Bizonyítás. Az első eset következik a divergenciatételből, ha egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli értékű függvényre alkalmazzuk, amelynek i-edik koordinátája uv, a többi nulla. A második esetben fedjük le v tartóját véges sok alkalmasan választott nyílt téglával, amelyeknek a lezártja G-ben van, és alkalmazzuk az első esetet G helyett ezen téglák egyesítésére.

19.19. Tétel. *19.17 jelöléseivel, tegyük fel, hogy az $u \in M$ függvényhez létezik $\delta > 0$, hogy*

$$S(u) \le S(\tilde{u}), \quad \text{ha} \quad \tilde{u} \in M,\ \|u - \tilde{u}\|_m < \delta,$$

továbbá $u \in \mathcal{C}^{2m}(G;\mathbb{R}^n)$ és $L \in \mathcal{C}^{(m+1)}(Q)$. Ekkor u eleget tesz G-n a

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \left(L_{\partial^\alpha u}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x))\right) = 0$$

Euler–Lagrange-egyenlete*knek. (Az u minden koordinátájára egy egyenlet.)*

Vigyázat, a $\partial^\alpha u$ jelöléseket kettős értelemben használjuk. Egyrészt, mint az L függvény változóit (például differenciálunk szerintük), másrészt, mint a keresett függvény parciális deriváltjait. Ez a „fizikus jelölésmód" jóval egyszerűbb, mint a precíz.

Bizonyítás. Legyen $v \in \mathcal{K}^m(G;\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, és tekintsük az

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon) = S(u + \varepsilon v)$$

valós változós függvényt. Ez a függvény értelmezve van a nulla egy környezetében, és mivel a nulla pontban lokális minimuma van, valamint a paraméteres integrálok paraméter

szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint differenciálható a nulla pontban, $\varphi'(0) = 0$, azaz

$$\int_G \sum_{j=0}^{m} L_{u^{(j)}}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) v^{(j)}(x)\, dx = 0.$$

Nem írva ki a változókat, az integrálandó mennyiség

$$\sum_{|\alpha|\le m} L_{\partial^\alpha u} \partial^\alpha v$$

alakban is írható. Koordinátánként parciálisan integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\int_G \left(\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (L_{\partial^\alpha u}) \right) v = 0,$$

amiből, mivel v tetszőleges volt, koordinátánként alkalmazva az általánosított Lagrange-lemmát, kapjuk, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet G minden pontjában fennáll.

19.20. Megjegyzés. Az Euler–Lagrange-egyenletben a kijelölt differenciálásokat elvégezve, $2m$-edrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk u-ra.

A variációszámítás még akkor is hasznos lehet, ha az Euler–Lagrange-egyenlet triviális, minden elég síma függvény eleget tesz neki:

19.21. Következmény. *Tegyük fel, hogy bármely elég síma függvény eleget tesz az Euler–Lagrange-egyenletnek, és Q konvex. Ha $\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}$ eltűnik a határon, akkor $S(\tilde{u}) = S(\tilde{\tilde{u}})$, azaz a hatás csak a „peremen felvett értékektől" függ.*

$*$ **Bizonyítás.** Legyen $u(t) = t\tilde{u} + (1-t)\tilde{\tilde{u}}$, ahol az x-től való függést nem írtuk ki, és legyen $s(t) = S(u(t))$, ha $0 \le t \le 1$. Ekkor s differenciálható (t szerint), és

$$s'(t) = \int_G \sum_{j=0}^{m} L_{u^{(j)}}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) (\tilde{u}^{(j)}(x) - \tilde{\tilde{u}}^{(j)}(x))\, dx.$$

Nem írva ki a változókat, az integrálandó mennyiség

$$\sum_{|\alpha|\le m} L_{\partial^\alpha u} \partial^\alpha (\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}})$$

alakban is írható. Az x koordinátái szerint parciálisan integrálva, azt kapjuk, hogy

$$s'(t) = \int_G \left(\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (L_{\partial^\alpha u}) \right) (\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}).$$

Mivel az u is teljesíti az Euler–Lagrange-egyenletet, a nagy zárójelben álló kifejezés nulla minden t-re, így s' azonosan nulla, amiből következik a bizonyítandó állítás.

A következő tétel nem látszik fontosnak, de segítségével be tudjuk bizonyítani a Brouwer-féle fixponttételt.

19.22. Tétel. *Az $L(x,u,u') = \det(u')$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lagrange-függvényhez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek minden elég sima u függvény eleget tesz.*

Bizonyítás. Ha a egy $n \times n$-es mátrix, jelölje $A_{i,j}$ az a mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának törlésével kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szeresét, A pedig az ezen adjungált aldeterminánsokból képzett $A = (A_{i,j})$ mátrixot. A lineáris algebrából tudjuk, hogy A transzponáltja szorozva a-val $\det(a)$-szor az egységmátrix, azaz

$$\det(a)\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}A_{k,j}. \tag{1}$$

Innen ha $i = j = m$, akkor

$$\frac{\partial \det(a)}{\partial a_{k,m}} = A_{k,m}.$$

Ez azt jelenti, hogy az Euler–Lagrange-egyenletrendszer

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} \frac{\partial(\det(u_{i,x_k}))}{\partial u_{i,x_k}} = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} U'_{i,k} = 0 \quad i = 1,2,\dots,n,$$

ahol $U'_{i,k}$ az $u' = (u_{i,x_k})$ mátrixhoz tartozó adjungált aldeterminánsok mátrixa.

Helyettesítsük be (1)-be a helyébe u'-t, differenciáljuk a kapott egyenlőséget x_j szerint, majd összegezzünk j-re. A bal oldalon a determinánst kell differenciálni. A determináns egy szorzatösszeg. Amikor a k-adik sorban és m-edik oszlopban álló m-edik u_{k,x_m} tényezőt differenciáljuk, az eredmény u_{k,x_m,x_j}. Ez a tényező többször is előfordul, összes együtthatóját összeszedve azok összege $U'_{k,m}$. A determináns deriváltja tehát $\sum_{k,m=1}^{n} U'_{k,m}u_{k,x_m,x_j}$. A $\delta_{i,j}$-vel való szorzás és j-re való összegzés után a bal oldalon az eredmény

$$\sum_{j,k,m=1}^{n} \delta_{i,j}U'_{k,m}u_{k,x_m,x_j}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

A jobb oldalon a $\sum_{k=1}^{n} u_{k,x_i}U'_{k,j}$ összeget kell differenciálni. A szorzat differenciálási szabálya szerint a derivált

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(u_{k,x_i,x_j}U'_{k,i} + u_{k,x_i}\partial_{x_j}U'_{k,j} \Big),$$

és összegzés után a jobb oldal

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Big(u_{k,x_i,x_j}U'_{k,i} + u_{k,x_i}\partial_{x_j}U'_{k,j} \Big), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

A két oldal egyenlő. A bal oldalon megcserélve a j és m összegző indexeket, és kihasználva, hogy $\delta_{i,m}$ egy, ha $m = i$, egyébként nulla, egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{k=1}^{n} u_{k,x_i} \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} U'_{k,j}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Ha valamely x-re $\det(u') \neq 0$, akkor ez csak úgy állhat fenn, ha a belső összeg nulla minden k-ra. Ha $\det(u') = 0$, akkor válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, amire $\tilde{u}(y) = u(y) + \varepsilon y$ determinánsa x-ben nem nulla, ismételjük meg a fenti gondolatmenetet u helyett az $\tilde{u}$-ra, majd tartson ε nullához. Így azt kapjuk hogy a belső összeg nulla minden k-ra.

19.23. A Brouwer-féle fixponttétel bizonyítása. Mint tudjuk, a tétel ekvivalens azzal, hogy $B := \mathbb{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$-nek nem létezik $u\colon B \to \partial B$ folytonos retrakciója a határára. Tegyük fel indirekt, hogy ilyen retrakció létezik, és terjesszük ki folytonosan az egész $\mathbb{R}^n$-re az $u(x) := x$, ha $|x| > 1$ definícióval. Nyilván a kiterjesztés forgáskovariáns abban az értelemben, hogy ha R egy origón átmenő tengely körüli forgatás, akkor $u(Rx) = Ru(x)$. Tekintsünk egy ω_ε szokásos simító függvényt $\mathbb{R}^n$-en. Ennek értéke csak az origótól vett távolságtól függ. Ezt is felhasználva, alkalmas $\varepsilon > 0$-ra az $u_1 := \omega_\varepsilon * u$ függvényre $u_1(x)$ pozitív konstansszorosa x-nek, $|x| - 1 < \big|u_1(x)\big| < |x| + 1$ és u_1 sehol sem nulla. Legyen most $u_2(x) := 2u_1(x)/\big|u_1(x)\big|$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Az u_2 egy $\mathcal{C}^\infty$-retrakciója $\mathbb{R}^n$-nek $\partial\mathbb{B}_2(0)$-ra. Legyen u_3 az identikus leképezés. Nyilván $u_2 \equiv u_3$ a $\partial\mathbb{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^n$ határon. Innen az előző tétel szerint

$$\int_{\mathbb{B}_2(0)} \det u_2'(x)\,dx = \int_{\mathbb{B}_2(0)} \det u_3'(x)\,dx = \int_{\mathbb{B}_2(0)} 1\,dx \neq 0.$$

Másrészt viszont $\big|u_2(x)\big|^2 \equiv 4$, ahonnan $u_2'(x)x = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re. Ez azt jelenti, hogy minden $x \neq 0$-ra a nulla sajátértéke $u_2'(x)$-nek, így a determinánsa nulla. Tehát a bal oldali integrál nulla, ellentmondás.

19.24. A Dirichlet-elv. Mint látjuk, a variációszámítás lehetővé teszi, hogy függvénytereken értelmezett funkcionálokra vonatkozó szélsőérték feladatokat differenciálegyenletekre vezessünk vissza. Megfordítva, egy differenciálegyenlethez is gyakran megtalálhatjuk azt a variációs problémát, amelynek az adott egyenlet az Euler–Lagrange-differenciálegyenlete. Például Gauss, W. Thomson (a későbbi Lord Kelvin), és Dirichlet egymástól függetlenül észrevették, hogy az

$$\int_G |\nabla u|^2 \to \min, \quad \partial G\colon u = g$$

problémához, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $g\colon \partial G \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, a Laplace-egyenlet tartozik, mint Euler–Lagrange-egyenlet. Ennek alapján a

$$G\colon \Delta u = 0, \quad \partial G\colon u = g$$

Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldásának létezését nyilvánvalónak tartották. Riemann a gondolatmenetet általánosítva, *Dirichlet-elv*nek nevezte el, és felhasználásával csodálatos eredményeket ért el a komplex függvénytanban. Három tulajdonság azonban bizonyítatlan maradt:

(1) létezik olyan u, amelyre $\partial G\colon u = g$ és az integrál értelmes és véges;

(2) ha létezik ilyen u, akkor létezik olyan is, amelyre az integrál minimális;

(3) egy ilyen u függvényre a G-n Δu értelmezve van.

A problémák első jele Weierstrass egy egyszerű, egydimenziós példája volt olyan variációs problémára, amelynél a funkcionál alulról korlátos, de az infimumot nem veszi fel. R. Prym adott egy példát az egységkörön, amelyre (1) nem teljesül. Mivel a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-problémát H. A. Schwarz, C. Neumann és H. Poincaré egymástól függetlenül, más módszerekkel, megfelelő megszorítások mellett megoldották, sokáig azt gondolták, hogy ezek a megszorítások csak a bizonyítások tökéletlenségéből

erednek. Végül Lebesgue adott példát olyan $G \subset \mathbb{R}^3$ (gömbbel homeomorf) nyílt halmazra, és g folytonos függvényre, amelyre a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladatnak nincs megoldása.

Ha a „Dirichlet-elvet" kívánjuk minimumproblémák megoldására felhasználni, akkor úgy járhatunk el, hogy választunk egy u_k „minimálsorozatot", amelyre a funkcionál értékei az infimumhoz konvergálnak, majd megpróbáljuk az u_k sorozatnak egy konvergens részsorozatát kiválasztani. Megfelelő feltételek mellett azt várjuk, hogy $\lim_{j\to\infty} u_{k_j}$ a minimumfeladat egy megoldása.

A nehézségek illusztrálására tekintsük egy adott körvonalra illeszkedő minimális felszínű felület meghatározásának problémáját $\mathbb{R}^3$-ban. A minimumot adó körlaphoz találhatunk olyan felületet, amelynek felszíne alig nagyobb, de nagyon távoli pontokat is tartalmaz. Egy minimálsorozat pontonként esetleg egyetlen pontban sem konvergens. A probléma ahhoz hasonló, mintha egy folytonos valós függvény minimumhelyét keresnénk, de csak a racionális számokat ismerve. Megfelelő távolságot kell bevezetni, és a teret teljessé kell tenni, csak ekkor várhatjuk, hogy a minimálsorozat egy megfelelő részsorozata konvergens. Ha a Lagrange-függvényben $u^{(m)}$ a legmagasabb rendű előforduló derivált, akkor a megfelelő tér gyakran a $\mathcal{H}^m(G)$ Szoboljev-tér (amely egy szeparábilis Hilbert-tér), vagy ennek valamilyen zárt altere.

Miután egy ilyen „általánosított" megoldás létezését megmutattuk, megfelelően sima adatok esetén belátható az is, hogy a megoldás klasszikus értelemben is megoldás. Lebesgue példája azonban arra figyelmeztet, hogy a regularitás problémája többváltozós esetben nem olyan egyszerű, mint az egyváltozós esetben, ahol a tartomány határa csak két pont.

Hilbert kezdeményezte a fent vázolt módszer használatát, de hosszú idő telt el, amíg mai formája kialakult. Ez a gondolatmenet vezet a variációszámítás direkt módszereihez is, amelyek közül a Ritz-módszer a legismertebb.

∗ **19.25. Ritz módszere.** Variációs feladatoknál, vagy általánosabban, egy végtelen dimenziós X Banach-tér egy M részhalmazán értelmezett

$$F\colon M \to \mathbb{R}$$

funkcionál

$$\min_{u\in M} F(u) = \alpha \tag{1}$$

minimumának megkeresésére úgy járunk el, hogy először véges sok paraméterrel jellemezhető $X_1, X_2, \dots$ halmazokra oldjuk meg a

$$\min_{u\in M\cap X_n} F(u) = \alpha_n \tag{2}$$

problémát, és a paraméterek számát növelve, arra számítunk, hogy $\alpha_n \to \alpha$ és a (2) probléma u_n megoldásai, vagy azok egy részsorozata valamilyen értelemben konvergál (1) megoldásához. Ha például van olyan $c, p > 0$, hogy $c\|u-v\|^p \le F(u)-F(v)$, akkor $\alpha_n \to \alpha$-ból következik u_n konvergenciája. (2) megoldása egyszerűbb, mint (1) megoldása, mert a második probléma véges dimenziós. Az egyes konkrét esetekben (2) és (1) megoldásának

létezését, és a konvergenciákat bizonyítani kell. Az $\alpha_n - \alpha$ különbség becslése különösen egyszerű, ha sikerül egy

$$\max_{p \in N} G(p) = \beta \tag{3}$$

duális problémát találnunk, amelyre $\beta = \alpha$, mert ekkor egy $\beta_n \leq \beta$ közelítés birtokában $0 \leq \alpha_n - \alpha \leq \alpha_n - \beta_n$ (*dualitási módszer*, *Trefftz-módszer*).

Leggyakrabban az X_n halmazok alterek, a paraméterek pedig egy bázisra vonatkozó koordináták. Ha $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ véges dimenziós alterek, és

$$\overline{\cup_{n=1}^{\infty} X_n} = X,$$

akkor az altérsorozatot *Galjorkin-séma*nak nevezzük. Galjorkin-sémát kaphatunk például úgy, hogy egy $w_1, w_2, \dots$ lineárisan független sűrű rendszert veszünk X-ben, és X_n a $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ lineáris burka.

Az itt vázolt módszerek részletes tárgyalása és számos alkalmazása megtalálható Zeidler [179] könyvének II. és III. kötetében. Michlin [114] könyve is a Ritz-módszerrel és általánosításaival foglalkozik. A Ritz-módszer elliptikus lineáris parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására történő felhasználását részletesebben is ismertetni fogjuk.

19.26. Weierstrass példája. Tekintsük a

$$S(f) = \int_{-1}^{1} \left(x f'(x)\right)^2 dx \to \min, \quad f(-1) = -1,\ f(1) = 1$$

problémát. Az

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvénysorozatra $S(f_n) \to 0$, ha $n \to \infty$, így ez egy minimalizáló sorozat, de nem konvergál folytonos függvényhez.

19.27. Feladat [8]. Tekintsünk egy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ hatványsort 1 konvergenciasugárral és az egyszerűség kedvéért valós együtthatókkal. Mutassuk meg, hogy az összeg u valós része gradiense hosszának négyzetintegrálja a körlapon $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2$. Megfelelő együtthatósorozatot választva érjük el, hogy legyen a hatványsor egyenletesen konvergens (így u a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-probléma megoldása), de az integrál értéke végtelen.

→ **19.28. Feladat [10].** Vezessük le az inhomogén, izotróp, álló membrán kitérését jellemző differenciálegyenletet a minimális energia elvéből. Használjuk fel, hogy a membrán megnyújtásába fektetett munka arányos a felület növekedésével és a rugalmassággal, és alkalmazzunk az u kitérés u_x, u_y deriváltjaiban lineáris közelítést. Tegyük fel, hogy a helytől függő, de a kitéréstől független erő, valamint a kitéréssel arányos visszatérítő erő is működik. A membrán pereme rögzített.

→ **19.29. Feladat [9].** Az előző feladat feltételei mellett, hogyan változik az egyenlet és a peremfeltétel, ha a perem nem rögzített, de a peremen külső erő hat, illetve ha a perem rugalmasan rögzített?

→ **19.30. Feladat [10].** Vezessük le az inhomogén rezgő húr differenciálegyenletét. A húr megnyúlását kifejezve az u kitérés u_x deriváltja segítségével, alkalmazzunk lineáris közelítést.

→ **19.31. Feladat [10].** Vezessük le az inhomogén, izotróp rezgő membrán differenciálegyenletét. Használjuk fel, hogy a membrán megnyújtásába fektetett munka arányos a felület növekedésével és a rugalmassággal, és alkalmazzunk az u kitérés u_x, u_y deriváltjaiban lineáris közelítést.

19.32. Feladat [11]. Mutassuk meg, hogy a homogén rezgő húr problémájánál a hatásnak nincs szélsőértéke.

19.33. Feladat [11]. Határozzuk meg a minimálfelületek differenciálegyenletét.

19.34. Feladat [11]. Az

$$\ddot{u}(x) + \cos x = 0, \quad 0 < x < \pi,\ u(0) = u(\pi) = 0$$

peremérték-probléma megoldását közelítsük a Ritz-módszerrel. A közelítést keressük $u = \sum_{k=1}^{2n} c_k w_k$, $w_k(x) = \sin kx$ alakban. Mi a pontos megoldás, és konvergál-e a közelítés a pontos megoldáshoz?

Megoldás. Lásd Zeidler [179], II., 94. o.

19.35. Feladat [13]. Vezessük le egyik végén befogott, vékony, homogén kör keresztmetszetű rúd hajlítási síkrezgéseinek egyenletét.

Megoldás. Lásd Vlagyimirov [171], 22. o. és Landau–Lifsic [101], VII., 152. o.

∗ **19.36. Irányítási feladat.** Adott, rögzített t_0 kezdő, és változó $t_1 > t_0$ végpontra tekintsük az $x\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ *állapot* és a $w\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ *vezérlés* függvényeket. Tegyük fel, hogy teljesül az

$$x(t) = a + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t), w(t))\, dt$$

vezérlési egyenlet, teljesül a

$$g(t_1, x(t_1)) = 0$$

határfeltétel a t_1 végpontban, és a

$$w(t) \in W, \quad \text{ha} \quad t \in [t_0, t_1]$$

vezérlési korlátozás. Az *irányítási feladat* az

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), w(t))\, dt \to \min$$

minimumfeladat, azaz a *vezérlési funkcionál* minimumát keressük. Feltesszük, hogy a $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ egy nyílt környezetét $\mathbb{R}^n$-be, illetve $\mathbb{R}$-be leképező f, illetve L, valamint a $]t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n$-et $\mathbb{R}^n$-be képező g adott függvények folytonosan differenciálhatóak, $a \in \mathbb{R}^n$ és $W \subset \mathbb{R}^m$ adottak, továbbá az ismeretlen x *állapotfüggvény* folytonos, a w *vezérlési függvény* pedig korlátos és véges sok szakadási helye van, és ezek mind elsőfajúak. Célunk az ismeretlen állapot és vezérlési függvények, valamint a t_1 végpont meghatározása.

Sok más irányítási feladat egyszerű trükkökkel a fenti problémára vezethető vissza. Néhány ilyen trükköt mutatunk be.

Gyakran a vezérlési feltételek

$$x'(t) = f(t, x(t), w(t)), \quad x(t_0) = a$$

alakban adottak. Integrálegyenletre áttérve, kapjuk a fenti alakot.

Ha a végpont rögzített ($= \tilde{b}$), akkor vezessünk be egy új $\tilde{x}(t) = t$ állapotváltozót az

$$\tilde{x}(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} dt \quad \text{és} \quad \tilde{x}(t_1) = \tilde{b}$$

feltételekkel.

Ha az f vagy az L függvény függ x'-től, akkor az $x'(t) = \tilde{w}(t)$ összefüggéssel új vezérlési változót bevezetve, ettől megszabadulhatunk. Ha magasabb deriváltak is szerepelnek, akkor először az $x'(t) = \tilde{x}(t)$ alakban új változót bevezetve, csökkentjük a deriváltak rendjét.

Az

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), w(t))\, dt = c, \quad x(t_0) = a$$

típusú mellékfeltételek új $\tilde{x}$ állapotváltozó bevezetésével

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} f(t, x(t), w(t))\, dt, \quad \tilde{x}(t_1) = c$$

alakba írhatók át.

Ha a minimalizálandó kifejezés

$$h(t_1) = F(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), w(t))\, dt \to \min$$

alakú (*Bolza-probléma*), akkor $h(t_0) = F(a)$ miatt az ekvivalens

$$h(t_1) - h(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} h'(t)\, dt \to \min$$

minimumproblémára térhetünk át. A mellékfeltételek miatt ez

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x(t), w(t))\, dt \to \min$$

alakba írható, ahol

$$\tilde{L}(t, x, w) = F'(x) f(t, x, w) + L(t, x, w).$$

Ha kevesebb határfeltétel van, mint vezérlési egyenlet, akkor a g függvény néhány koordinátája azonosan nullának választható.

∗ **19.37. Pontrjagin-féle maximumelv.** *Ha x, w, t_1 az előző pontban megfogalmazott irányítási feladat megoldásai, és*

$$H(t,x,w,p,\lambda) = pf(t,x,w) - \lambda L(t,x,w)$$

a Pontrjagin-függvény, *akkor létezik $\lambda \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$, nem mindkettő nulla és $p\colon [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{n*}$ folytonos függvény úgy, hogy*

$$H(t,x(t),w(t),p(t),\lambda) = \max_{w^* \in W} H(t,x(t),w^*,p(t),\lambda)$$

és

$$p' = -H_x, \qquad x' = H_p$$

teljesülnek a w optimális irányítás minden folytonossági pontjában. Továbbá a t_1 végpontban teljesülnek a

$$p(t_1) = -\alpha g_x(t_1, x(t_1))$$

transzverzalitási feltételek. *Létezik továbbá olyan $p_0\colon [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy a w minden folytonossági pontjában*

$$p_0(t) = H(t,x(t),w(t),p(t),\lambda) \quad \text{és} \quad p_0' = H_t,$$

továbbá a végpontban teljesül a

$$p_0(t_1) = \alpha g_t(t_1, x(t_1))$$

transzverzalitási feltétel. *A λ mindig választható 1-nek vagy 0-nak. Ha $g_i \equiv 0$, akkor $\lambda_i = 0$ választható.*

A maximumelv használatához megjegyezzük, hogy a *maximumfeltétel* általában m feltételt jelent w koordinátáira. Például, ha $W = \mathbb{R}^m$, akkor

$$H_w(t,x(t),w(t),p(t),\lambda) = 0.$$

A maximumfeltétel által adott feltételekből w-t kifejezve, a p és x függvényeket a

$$p' = -H_x, \qquad x' = H_p$$

differenciálegyenlet-rendszerből határozhatjuk meg. Az utóbbi egyenlet tulajdonképpen az irányítási feltételekkel ekvivalens. Az egyenletrendszert megoldva, $2n$ konstans lép fel, és t_1 is ismeretlen. Az irányítási feltételből kapott $x(t_0) = a$ egyenlet és a transzverzalitási feltételek összesen $2n+1$ skalár egyenletet adnak. Megjegyezzük, hogy gyakorlati problémákban mindig $\lambda = 1$ lép fel, hiszen $\lambda = 0$ esetén a feltételek, amelyekből az optimális irányítást meghatározzuk, nem is függnek L-től.

A tételt később bizonyítjuk. További irodalmat illetően Zeidler [179] könyvének III. kötete 48. §-ára utalunk.

∗ **19.38. Feladat [10].** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen kell egy tömegpontot eljuttatni -1-ből 1-be minimális idő alatt, 1-nél kisebb abszolút értékű gyorsulással.

∗ **19.39. Feladat [10].** Oldjuk meg a következő irányítási feladatot: az egyenesen x_0 helyen tartózkodó v_0 sebességű tömegpontot kell minimális idő alatt az origóban megállítani. Mutassuk meg, hogy a vezérlés felírható a pillanatnyi hely és sebesség függvényeként. Ábrázoljuk a mozgást a fázistérben.

∗ **19.40. Feladat [11].** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a (függőleges) „sima" Holdraszállás minimális üzemanyagfelhasználással irányítási feladatára az alábbi feltételekkel, a Hold forgását figyelmen kívül hagyva (a gyorsulás 0 és a között lehet):

(1) sem az űrhajó tömegének, sem a gravitációs mezőnek a változását nem vesszük figyelembe;

(2) csak az űrhajó tömegének változását vesszük figyelembe;

(3) mindkettőt figyelembe vesszük.

∗ **19.41. Feladat [11].** Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket a rakétaindítás feladatára homogén gravitációs térben. A rakétának minimális üzemanyagfelhasználással kell egy adott pontot elérnie, a gyorsulás 0 és a között lehet.

∗ **19.42. Feladat: visszatérés a Holdról [13].** A feladat egy űrhajó lefékezése a Föld légkörében és Föld körüli pályára állítás minimális felmelegedéssel. Legyen x_1 a sebesség, x_2 a hajlási szög a „pillanatnyi vízszinteshez", x_3 a magasság a felszín felett R földsugár egységekben véve, w a „fékezés", $\varrho = \varrho_0 e^{-\beta R x_3}$ a levegő sűrűsége. A kezdeti adatok $x_1(t_0) = 10{,}8$ km/s, $x_2(t_0) = 0{,}0045\pi$, $x_3(t_0) = 120$ km/R, a céladatok $x_0(t_1) = 8{,}1$ km/s, $x_2(t_1) = 0$, $x_3(t_1) = 75$ km/R. Az $x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, w)$ vezérlési feltételekben

$$f_1 = -\frac{F\varrho x_1^2}{2} c_1(w) - \frac{g \sin x_2}{(1+x_3)^2},$$
$$f_2 = \frac{F\varrho x_1}{2} c_2(w) + \frac{x_1 \cos x_2}{R(1+x_3)} - \frac{g \cos x_2}{x_1(1+x_3)^2},$$
$$f_3 = \frac{x_1 \sin x_2}{R};$$

itt F az űrhajó keresztmetszet/tömege, g a gravitációs gyorsulás, $c_1(w) = 1{,}174 - 0{,}9 \cos w$, $c_2(w) = 0{,}6 \sin w$, a (nem SI egységekben megadott!) aerodinamikus ellenállás illetve emelő erő. A felmelegedést kívánjuk minimalizálni, a közelítő gyakorlati formula:

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^3 \sqrt{\varrho} \to \min .$$

Az űrhajósokról feltesszük, hogy bármit kibírnak, a Föld nyugvó gömb, és a Föld középpontján átmenő síkban repülünk. Írjuk fel a Pontrjagin-elvből adódó egyenleteket, határozzuk meg a vezérlést, és visszaírva az egyenletekbe, határozzuk meg a differenciálegyenleteket és a peremfeltételeket. (Az adott numerikus esetben a magasság lemegy kb. 50 km-ig, majd nő, a sebesség kezdetben kicsit nő, majd csökken, $t_1 = 224{,}9$ s.)

∗ **19.43. Kapcsolat a variációszámítással.** Mint az irányítási feladat megfogalmazásakor elmondottakból következik, a Pontrjagin-féle maximumelv alkalmazható egyváltozós variációs feladatokra (akkor is, ha mellékfeltételek vannak). Például tekintsük a

szakaszonként folytonosan differenciálható $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ függvényekre vonatkozó

$$\int_a^b L(t,x(t),x'(t))\,dt\to\min,\quad x(a)=x_0,\quad x(b)=x_1$$

problémát. Ez a probléma abban tér el a 19.4 problémától, hogy abszolút minimumot adó megoldást keresünk, és nem csak a folytonosan differenciálható függvények körében. Feltesszük, hogy L folytonosan differenciálható $[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ egy nyílt környezetén (és $\mathbb{R}$-be képez).

A 19.36 pontban leírtaknak megfelelően, $t_0=a$ jelöléssel vezessük be az új $\tilde{x}$ állapotváltozót az

$$\tilde{x}(t)=t_0+\int_{t_0}^t dt\quad\text{és}\quad\tilde{x}(t_1)=b$$

feltételekkel (így $\tilde{x}(t)\equiv t$), és a w kontrollváltozót az

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t w(t)\,dt,\quad x(t_1)=x_1$$

feltételekkel (így $x'(t)=w(t)$ a w minden folytonossági pontjában). A Pontrjagin-függvény

$$H(x,\tilde{x},w,p,\tilde{p})=pw+\tilde{p}1-\lambda L(\tilde{x},x,w).$$

A Pontrjagin-féle maximumelv szerint létezik $\lambda\ge 0$ és $\alpha\in\mathbb{R}^{n*}$, $\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^*$ (nem mind nulla), valamint $p\colon[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^{n*}$, $\tilde{p}\colon[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^*$ folytonos függvények, hogy

$$p'=-H_x=\lambda L_x,\quad p(t_1)=-\alpha,\quad \tilde{p}'=-H_{\tilde{x}}=\lambda L_{\tilde{x}},\quad \tilde{p}(t_1)=-\tilde{\alpha},$$

$$H(x(t),\tilde{x}(t),w(t),p(t),\tilde{p}(t))=\max_{w^*\in\mathbb{R}^n}H(x(t),\tilde{x}(t),w^*,p(t),\tilde{p}(t)),$$

továbbá létezik olyan $p_0\colon[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy

$$p_0(t)=H(x(t),\tilde{x}(t),w(t),p(t),\tilde{p}(t)),\quad p_0'=H_t,\quad p_0(t_1)=0,$$

minden t-re, amelyben w folytonos. Az utóbbi két egyenletből $p_0\equiv 0$. Ha $\lambda=0$ lenne, akkor $p\equiv-\alpha$, $\tilde{p}\equiv-\tilde{\alpha}$ teljesülne, így a $H=-\alpha w-\tilde{\alpha}1$ lineáris függvény maximuma $p_0=0$ lenne, amiből $\alpha=0$ és $\tilde{\alpha}=0$. Ez ellentmond annak, hogy λ, α, $\tilde{\alpha}$ nem mind nulla. Így $\lambda=1$ választható. A maximumfeltételből

$$H_w(x(t),\tilde{x}(t),w(t),p(t),\tilde{p}(t))=0,$$

tehát $p=L_{x'}$, ami a $p'=-H_x=L_x$ egyenlettel együtt az Euler–Lagrange-egyenleteket adja x' minden folytonossági pontjában. Ugyancsak a maximumfeltételből

$$H_{ww}(x(t),\tilde{x}(t),w(t),p(t),\tilde{p}(t))vv\le 0$$

minden $v\in\mathbb{R}^n$-re, ami az

$$L_{x'x'}(t,x(t),x'(t))vv\ge 0,\quad\text{ha}\quad v\in\mathbb{R}^n$$

Legendre-feltételt adja x' minden folytonossági pontjában. Továbbá, a maximumfeltételből

$$L(t,x(t),w)-L(t,x(t),x'(t))-L_{x'}(t,x(t),x'(t))(w-x'(t))\geq 0$$

minden $w\in\mathbb{R}^n$-re x' minden folytonossági pontjában, ez az úgynevezett *Weierstrass-feltétel*. Végül, p, $\tilde{p}$ és p_0 folytonosságából, x' minden szakadási pontjában kapjuk, hogy

$$L_{x'}(t,x(t),x'(t)) \quad \text{illetve} \quad L_{x'}(t,x(t),x'(t))x'(t)-L(t,x(t),x'(t))$$

bal és jobb oldali határértéke megegyezik, ezek a *Weierstrass–Erdmann-féle törési feltételek*. Figyeljük meg a Pontrjagin-függvény szoros kapcsolatát a mechanikában használatos Hamilton-függvénnyel.

∗ **19.44. Feladat [11].** Alkalmazzuk a Pontrjagin-féle maximumelvet a szakaszonként folytonosan differenciálható $x\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ függvényekre vonatkozó

$$\int_a^b L(t,x(t),x'(t))\,dt\to\min,\quad x(a)=x_0,\quad x(b)=x_1$$

$$\int_a^b f(t,x(t),x'(t))\,dt=c$$

mellékfeltételes problémára, és vezessük le a megfelelő Euler–Lagrange-egyenleteket.

∗ **19.45. Feladat [11].** Határozzuk meg két végén felfüggesztett homogén súlyos lánc alakját (láncgörbe).

∗ **19.46. A lövöldözés módszere.** Ez a módszer közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó peremérték-problémák – például irányítási feladatoknál fellépő problémák – közelítő megoldására használatos. Az egyik végpontban megadott feltételeket Cauchy-feladattá egészítjük ki, az új kezdeti feltételekben előírt értékeket egy α paramétervektornak tekintve. A kapott Cauchy-feladatot megoldva valamilyen $\alpha=\alpha_0$ választással, a másik végpontban általában nem teljesülnek a peremfeltételek, de az eltérés ismeretében a közelítés javítható, és kaphatunk jobb közelítéseket adó $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots$ paramétersorozatot.

∗ **19.47. Diszkrét irányítási feladat.** Tipikus esetként tekintsünk egy gyártási folyamatot, amelyben egy x_1 kezdeti állapotból kiindulva, ha egy w_1 vezérlést választottunk, az $x_2=\varphi_1(x_1,w_1)$ állapotba jutunk, ahol $x_1\in\mathbb{R}^N$, $w_1\in W_1\subset\mathbb{R}^M$, és közben $k_1(x_1,w_1)$ költség lép fel, majd ha egy w_2 vezérlést választunk, az $x_3=\varphi_2(x_2,w_2)$ állapotba jutunk, ahol $x_2\in\mathbb{R}^N$, $w_2\in W_2\subset\mathbb{R}^M$, és közben $k_2(x_2,w_2)$ költség lép fel stb. (Például lehet x_j összesen N kémiai anyag eloszlása a j-edik lépés előtt egy vegyipari gyártási folyamatban.) A φ_j és k_j függvények adottak, és álljon a gyártás összesen n lépésből; az utolsó költségbe annak a költségét is beleértjük, hogy a végtermék elmarad valamely „ideális” végterméktől. Legyen

$$K_r(x_r,w_r,w_{r+1},\dots,w_n):=\sum_{j=r}^{n}k_j(x_j,w_j)$$

az utolsó $n-r+1$ lépés költsége, és

$$(r,x_r)\mapsto S_r(x_r):=\inf_{w_r,\dots,w_n}K_r(x_r,w_r,w_{r+1},\dots,w_n),\quad S_{n+1}(x_{n+1})\equiv 0$$

az úgynevezett *Bellman-függvény*.

∗ **19.48. Tétel.** *Az előző pont jelöléseivel,*

(1) *a Bellman-függvényre*

$$S_r(x_r) = \inf_{w_r \in W_r} k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(\varphi_r(x_r, w_r)), \quad \text{ha} \quad r = 1, \dots, n;$$

(2) *az x_r és $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$ változókra a $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel pontosan akkor teljesül, hogy*

$$S_r(x_r) = K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

ha

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = r, \dots, n.$$

Bizonyítás. (1)-hez nyilván

$$K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = k_r(x_r, w_r) + K_{r+1}(\varphi(x_r, w_r), w_{r+1}, \dots, w_n)$$

teljesül a költségekre. Mivel nyilván

$$\inf_{w_r, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n) = \inf_{w_r} \inf_{w_{r+1}, \dots, w_n} K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n),$$

kapjuk (1)-et.

(2)-höz tetszőleges $w_j \in W_j$, $j = r, \dots, n$-re a megfelelő $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = r, \dots, n$ értékekkel

$$S_r(x_r) \le k_r(x_r, w_r) + S_{r+1}(x_{r+1}) \le \dots \le K_r(x_r, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n).$$

Ha az adott értékekre egyenlőség áll, akkor mindenütt egyenlőségnek kell állnia, így kapjuk (2)-t.

∗ **19.49. Következmény: Bellman-féle optimum elv.** *A következő két állítás ekvivalens:*

(1) *az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \dots, n$ értékekkel*

$$S_1(x_1) = K_1(x_1, w_1, w_2, \dots, w_n);$$

(2) *az x_1 és $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$ változókra az $x_{j+1} = \varphi_j(x_j, w_j)$, $j = 1, \dots, n$ értékekkel*

$$S_m(x_m) = K_m(x_m, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$$

teljesül, ha $m = 1, 2, \dots, n$.

∗ **19.50. Bellman módszere.** Meghatározva az optimális vezérléseket az

$$S_j(x_j) = k_j(x_j, w_j) + S_{j+1}(x_{j+1})$$

egyenletekből $j = n, n-1, \dots, 1$-re x_j függvényében, kapjuk az optimális vezérlést.

A következő célunk a Lagrange-elv általánosítása Banach-terekre, egyenlőtlenség típusú feltételeket is megengedve. Az eszköz a Dubovickij–Miljutyin-elmélet lesz. A Lagrange-elv általános alakja lehetővé teszi a Pontrjagin-féle maximumelv bizonyítását is. Részben Páles [123] jegyzetét, részben Zeidler [179] könyvét követjük.

∗ **19.51. Konvex függvények.** Egy X valós normált tér egy részhalmazát $[-\infty,+\infty]$-be képező F függvényt *konvex*nek nevezünk, ha $0<\alpha<1$ esetén

$$F(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha F(x)+(1-\alpha)F(y),$$

valahányszor a jobb oldal értelmezve van. Minden ilyen függvényt kiterjeszthetünk az egész X-en konvex függvénnyé, ha az eredeti értelmezési tartományán kívül $+\infty$-nek definiáljuk. Nyilván ha F nem vette fel a $+\infty$ értéket, akkor visszakaphatjuk a kiterjesztésből. Általánosabban, azon pontok halmaza, ahol $F(x)<+\infty$, egy konvex halmaz. Ha ezen a halmazon valahol $F(x)=-\infty$, akkor az egész halmazon.

∗ **19.52. Állítás.** *Egy X normált teret $[-\infty,+\infty]$-be képező F függvényre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *F folytonos x-ben;*

(2) *F felülről korlátos az x egy környezetében.*

Továbbá ha egy U nyílt halmazon F véges és valamely pontjában folytonos, akkor az egész U-n folytonos.

Bizonyítás. Nyilván (1)-ből következik (2). A megfordításhoz feltehetjük, hogy $x=0$, $F(x)=0$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{U}_r(0)$-n F-nek felső korlátja M. Ha $0<\varepsilon<1$, akkor

$$y=(1-\varepsilon)\cdot 0+\varepsilon\frac{y}{\varepsilon},\quad 0=\frac{1}{1+\varepsilon}y+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{-y}{\varepsilon},$$

így ha $y\in\mathbb{U}_{\varepsilon r}(0)$, akkor

$$F(y)\le(1-\varepsilon)F(0)+\varepsilon F(y/\varepsilon)\le\varepsilon M,$$

és ha $-y\in\mathbb{U}_{\varepsilon r}(0)$, akkor

$$F(y)\ge(1+\varepsilon)F(0)-\varepsilon F(-y/\varepsilon)\ge-\varepsilon M.$$

A második állítás bizonyításához feltehetjük, hogy $0\in U$ és F a 0-ban folytonos. Az F felülről korlátos valamilyen M-mel valamely $\mathbb{U}_r(0)$-n. Legyen $x\in U$ és válasszunk olyan $\varrho>1$-et, amelyre $\varrho x\in U$. A $h(y)=(1-1/\varrho)y+(1/\varrho)(\varrho x)$ összefüggéssel definiált h homeomorfizmusa X-nek önmagára, $h(0)=x$, így h a nulla $\mathbb{U}_r(0)$ környezetét x egy $h(\mathbb{U}_r(0))$ környezetére képezi. Mivel

$$F(h(y))\le(1-1/\varrho)F(y)+\frac{1}{\varrho}F(\varrho x)\le(1-1/\varrho)M+\frac{1}{\varrho}F(\varrho x),$$

és mivel (2)-ből következik (1), F folytonos x-ben.

∗ **19.53. Következmény.** *Véges dimenziós normált tér nyílt konvex részhalmazán valós értékű konvex függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen F az eredeti U értelmezési tartományon kívül $+\infty$, és legyen $x \in U$. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Válasszunk egy $S \subset U$ szimplexet, amely belsejében tartalmazza a 0-t, például a szokásos bázisvektorok és összegük ellentettje konvex burkának ε-szorosát egy alkalmas $\varepsilon > 0$-ra. Mivel F korlátos S-en, folytonos a belsejében, így 0-ban is. □

∗ **19.54. Definíció.** Egy X valós normált tér (vagy akár lineáris tér) egy K részhalmazát *kúp*nak nevezzük, ha $u \in K$, $\alpha > 0$ esetén $\alpha u \in K$.

A $K \subset X$ kúp *duális kúp*ja a

$$K^+ = \{ f \in X^* \colon f(u) \geq 0, \text{ ha } u \in K \}$$

halmaz. Nyilvánvaló, hogy K^+ konvex, zárt és nem üres kúp X^*-ban.

Legyen $U \subset X$ nyílt. A $h_0 \in X$ vektort az $F \colon U \to \mathbb{R}$ függvény $u_0 \in U$-beli *csökkenési irány*ának nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$ esetén

$$\frac{F(u_0 + th)) - F(u_0)}{t} < 0.$$

Ha $N \subset X$, a $h_0 \in X$ vektort az $u_0 \in X$-ben N-re nézve *megengedett irány*nak nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$ esetén $u_0 + th \in N$.

Ha $N \subset X$, a $h \in X$ vektort az $u_0 \in X$-ben N-re nézve *félérintő irány*nak nevezzük, ha van olyan $\varepsilon > 0$ és $t \mapsto u(t)$ görbe, hogy $u(t) = u_0 + th + \omega(t) \in N$, ha $0 < t < \varepsilon$, ahol $\lim_{t \downarrow 0} \omega(t)/t = 0$.

Világos, hogy a megengedett irányok egyben félérintő irányok is, a félérintő irányok, a megengedett irányok és a csökkenési irányok is kúpot alkotnak, és a két utóbbi nyílt.

A Dubovickij–Miljutyin-elmélet alapgondolata egyszerű: ha F-nek u_0-ban minimuma van N-nen, akkor nem lehet olyan csökkenési irány, amely megengedett irány. Pontosabban, az alábbi lemma teljesül.

∗ **19.55. Dubovickij–Miljutyin-lemma.** Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt és $F_0 \colon U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $N_1, \dots, N_n, N_{n+1} \subset X$ tetszőleges halmazok. Az

$$F_0(u) \to \min, \quad u \in \bigcap_{j=1}^{n+1} N_j$$

feltételes minimumfeladat u_0 megoldására

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset,$$

ahol K_0 az F_0 függvény u_0-beli csökkenési irányainak kúpja, K_j az N_j halmaz u_0-beli megengedett irányainak kúpja, K_{n+1} pedig az N_{n+1} halmaz u_0-beli félérintő irányainak kúpja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a metszet nem üres, h_0 egy eleme. Ekkor létezik egy V környezete h_0-nak, $\varepsilon > 0$, és $\omega\colon [0, \varepsilon[\to X$, hogy

$$F_0(u_0 + th) < F(u_0), \quad u_0 + th \in \bigcap_{j=1}^{n} N_j, \quad u_0 + th_0 + \omega(t) \in N_{n+1},$$

ha $0 < t < \varepsilon$, $h \in V$, továbbá $\lim_{t \downarrow 0} \omega(t)/t = 0$. Csökkentve ε-t, feltehetjük, hogy $h(t) = h_0 + \omega(t)/t \in V$, ha $0 < t < \varepsilon$. Ekkor $u_0 + th(t) \in N_j$, ha $j = 1, \dots, n, n+1$ és $F_0(u_0 + th(t)) < F_0(u_0)$, ha $0 < t < \varepsilon$, ami ellentmondás.

∗ **19.56. Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemma.** *Legyen X valós normált tér, $K_0, \dots, K_n, K_{n+1} \subset X$, $n \geq 0$ nem üres konvex kúpok, és tegyük fel, hogy $K_0, \dots, K_n$ nyíltak. Ekkor*

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$$

pontosan akkor teljesül, ha léteznek nem mind nulla $f_i \in K_i^+$ funkcionálok, hogy $f_0 + \dots + f_n + f_{n+1} = 0$.

Bizonyítás. Az elégségesség bizonyításához vegyük észre, hogy $f_0 = 0$, …, $f_n = 0$ nem lehetséges, mert akkor minden f_j nulla lenne. Legyen $f_j \neq 0$, $f_j(v) \neq 0$. Ha u a metszet egy eleme lenne, akkor $f_j(u + \lambda v) \geq 0$ lenne, ha $|\lambda|$ elég kicsi, ahonnan $f_j(u) > 0$ következne. Mivel $f_i \in K_i^+$, minden f_i nemnegatív a metszeten, nem lehet az összegük nulla u-ban.

A szükségesség bizonyításához legyen $A = K_0 \times \cdot \times K_n$ és

$$B = \{(u, u, \dots, u) \in X^{n+1} \colon u \in K_{n+1}\}.$$

Az A és B diszjunk nem üres konvex kúpok X^{n+1}-ben, A nyílt. A Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint van olyan $f \neq 0$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(b) \leq c \leq f(a)$, ha $a \in A$, $b \in B$. Mivel A és B kúpok, $\lambda > 0$ esetén $\lambda f(b) \leq c \leq \lambda f(a)$ is teljesül, ahonnan $\lambda \downarrow 0$ határátmenettel $c = 0$. Legyen $f_0(u) = f(u, 0, \dots, 0), \dots, f_n(u) = (0, \dots, 0, u)$ és $f_{n+1}(u) = -f(u, u, \dots, u)$. Nyilván $f_{n+1}(u) \geq 0$, ha $u \in K_{n+1}$. Mivel f nem nulla, és $f(u_0, u_1, \dots, u_n) = f_0(u_0) + f_1(u_1) + \dots + f_n(u_n)$, a jobb oldalon szereplő funkcionálok valamelyike nem nulla. Ha $u_i \in K_i$ rögzített, akkor

$$(\lambda u_0, \dots, \lambda u_{j-1}, u_j, \lambda u_{j+1}, \dots, \lambda u_n) \in A,$$

így

$$\lambda f_0(u_0) + \dots + \lambda f_{j-1}(u_{j-1}) + f_j(u_j) + \lambda f_{j+1}(u_{j+1}) + \dots + \lambda f_n(u_n) \geq 0,$$

ahonnan $\lambda \downarrow 0$ határátmenettel $f_j(u_j) \geq 0$, ha $u_j \in K_j$.

∗ **19.57. Dubovickij–Miljutyin-tétel.** *A Dubovickij–Miljutyin-lemma jelöléseivel, az ottani feltételes minimumfeladatot kívánjuk vizsgálni. Tegyük fel, hogy $n \geq 0$, $N_j^\circ \neq \emptyset$, ha $j = 1, \dots, n$, és $K_0, \dots, K_{n+1}$ konvex nem üres halmazok. Ekkor*

(1) *Szükséges feltétel: ha u_0-ban feltételes minimum van, akkor léteznek $f_i \in K_i^+$, $i = 0, \dots, n+1$ nem mind nulla funkcionálok, hogy $f_0 + \dots + f_{n+1} = 0$.*

(2) *Nemelfajulás: ha*

$$\bigcap_{i\neq k} K_i \neq \emptyset,$$

akkor $f_k \neq 0$.

(3) *Elégséges feltétel: az (1)-ben szereplő szükséges feltétel elégséges is, ha még teljesül az is, hogy* $F_0\colon X \to \mathbb{R}$ *konvex és folytonos, továbbá teljesül a Slater-feltétel: van olyan* h*, amelyre* $h \in N_j^\circ$*,* $j = 1, \dots, n$ *és* $h \in N_{n+1}$.

A szükséges feltétel nyilván lokális feltételes minimum esetén is fennáll.

Bizonyítás. A szükséges feltétel következik a Dubovickij–Miljutyin-lemmából és Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemmából.

Ha $f_k = 0$ és $\cap_{i\neq k} K_i \neq \emptyset$ lenne, akkor $f_0 + \dots + f_{n+1} = 0$ ellentmondana a Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemmának.

Az elégségesség bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy van olyan u_1, amire $F_0(u_1) < F_0(u_0)$ és $u_1 \in N_j$, $j = 1, \dots, n+1$. Legyen $u = tu_1 + (1-t)h$, ha $0 < t < 1$. A Slater-feltétel szerint $u \in N_j^\circ$ és $u \in N_{n+1}$. A K_i definíciója szerint $u - u_0 \in K_i$, ha $i \geq 1$. Ha megmutatjuk, hogy $u - u_0 \in K_0$, akkor az a Dubovickij–Miljutyin elválasztási lemma miatt ellentmond (1)-nek. Az F_0 folytonossága miatt találhatunk olyan kis $t > 0$-t, hogy $F_0(u) < F_0(u_0)$. Ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor

$$F_0(u_0 + \varepsilon(u - u_0)) \leq \varepsilon F_0(u) + (1-\varepsilon)F_0(u_0),$$

ahonnan

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{F_0(u_0 + \varepsilon(u-u_0)) - F_0(u_0)}{\varepsilon} \leq F_0(u) - F_0(u_0) < 0,$$

azaz $u - u_0 \in K_0$; a határérték létezése F_0 konvexségéből következik.

$*$ **19.58. Definíció.** Legyen X valós vektortér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$ és $F\colon U \to \mathbb{R}$. Az F csökkenési irányait az

$$\bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_0) = \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

mennyiség segítségével kívánjuk vizsgálni. A lim sup úgy értendő, hogy mindazon α bővített valós számok halmazának a pontos alsó korlátja, amelyekhez van olyan $\varepsilon > 0$ és V környezete h_0-nak, hogy $0 < t < \varepsilon$ és $h \in V$ esetén

$$\frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} \leq \alpha.$$

Könnyű látni, hogy a $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ leképezés pozitív homogén és felülről félig folytonos. A könnyebben kezelhető

$$\bar{\delta} F(u_0; h_0) = \limsup_{t\downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t}$$

mennyiséget is használni fogjuk, ami megegyezik az irány menti deriválttal, ha az létezik. Nyilván

$$\bar{\delta} F(u_0; h_0) \leq \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_0),$$

ha $h_0 \in X$. A két mennyiség gyakran megegyezik.

Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ konvex és van olyan $h_1 \in X$, hogy $\bar{\bar{\delta}} F(u_0; h_1) < 0$, akkor a rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy F *reguláris* az u_0-ban.

∗ **19.59. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ konvex nyílt halmaz, $u_0 \in U$ és $F\colon U \to \mathbb{R}$. Ha az*

(1) *F folytonos konvex függvény;*

(2) *F Lipschitz-függvény;*

(3) *F differenciálható u_0-ban*

feltételekből valamelyik teljesül, akkor

$$\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) = \overline{\delta}F(u_0; h_0)$$

minden $h_0 \in X$-re.

Bizonyítás. Csak a $\leq$-t kell bizonyítanunk. Az (1) esetben legyen

$$\alpha > \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t}$$

tetszőleges. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\frac{F(u_0 + \varepsilon h_0) - F(u_0)}{\varepsilon} < \alpha.$$

Ha $0 < t < \varepsilon$, akkor

$$F(u_0 + th) \leq F\big((1 - t/\varepsilon)u_0 + (t/\varepsilon)(u_0 + \varepsilon h)\big) \leq (1 - t/\varepsilon)F(u_0) + (t/\varepsilon)F(u_0 + \varepsilon h),$$

ezért

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0, h_0) &\leq \limsup_{t \downarrow 0, h \to h_0} \frac{(1 - t/\varepsilon)F(u_0) + (t/\varepsilon)F(u_0 + \varepsilon h)}{t} \\ &= \limsup_{t \downarrow 0, h \to h_0} \frac{F(u_0 + \varepsilon h) - F(u_0)}{\varepsilon} = \limsup_{h \to h_0} \frac{F(u_0 + \varepsilon h) - F(u_0)}{\varepsilon} < \alpha;\end{aligned}$$

az utolsó lépésben a folytonosságot használtuk.

A (2) esetben, ha L egy Lipschitz-konstans, akkor

$$F(u_0 + th) \leq F(u_0 + th_0) + tL\|h - h_0\|,$$

ha t elég kicsi. Így

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0, h_0) &\leq \limsup_{t \downarrow 0, h \to h_0} \left(\frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t} + L\|h - h_0\| \right) \\ &\leq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t} + \limsup_{h \to h_0} L\|h - h_0\| \\ &= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F(u_0 + th_0) - F(u_0)}{t}.\end{aligned}$$

Végül a (3) esetben, ha $\omega(h) = F(u_0 + h) - F(u_0) - F'(u_0)h$, akkor

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}}F(u_0, h_0) &\le \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0} \frac{F'(u_0)th + \|\omega(th)\|}{t} \\ &\le \limsup_{h\to h_0} F'(u_0)h + \limsup_{t\downarrow 0, h\to h_0} \frac{\|\omega(th)\|}{\|th\|}\|h\| \\ &= F'(u_0)h_0.\end{aligned}$$

∗ **19.60. Következmény.** *Ha F konvex és folytonos u_0-ban, akkor $h \mapsto \bar{\bar{\delta}}F(u_0; h)$ konvex és*

$$\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

véges.

Bizonyítás. Mivel F mindenütt folytonos, így $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h) = \bar{\delta}F(u_0; h)$, és mivel

$$t \mapsto \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

monoton növekedő függvénye t-nek, létezik és véges a jobb oldali határérték, és nyilván megegyezik $\bar{\delta}F(u_0; h)$-val. Ha $h_1, h_2 \in X$ tetszőleges, akkor

$$F\Big(u_0 + t(\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2)\Big) \le \alpha F(u_0 + th_1) + (1-\alpha)F(u_0 + th_2).$$

Innen

$$\bar{\delta}F(u_0; \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2) \le \alpha\bar{\delta}F(u_0; h_1) + (1-\alpha)\bar{\delta}F(u_0; h_2).$$

∗ **19.61. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$ és $F\colon U \to \mathbb{R}$. Ha h_0 az F csökkenési iránya u_0-ban, akkor $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) \le 0$. Ha $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) < 0$ akkor h_0 az F csökkenési iránya u_0-ban. Ha F reguláris u_0-ban, akkor az utóbbi feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy h_0 csökkenési irány legyen, és a csökkenési irányok halmaza nem üres konvex kúp.*

Bizonyítás. Az első két állítás nyilvánvaló a definícióból. Az utolsó állítás bizonyításához legyen h_0 csökkenési irány. Mivel h_0 belső pontja a csökkenési irányok kúpjának, van olyan $0 < t < 1$, hogy $h' = h_0 - th_1/(1-t)$ is csökkenési irány, így $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h') \le 0$. A konvexitást alkalmazva

$$\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) = \bar{\bar{\delta}}F(u_0, th_1 + (1-t)h') \le t\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_1) + (1-t)\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h') < 0.$$

Ezek szerint a csökkenési irányok kúpja a $\{h\colon \bar{\bar{\delta}}F(u_0; h) < 0\}$ nívóhalmaz, ami mint konvex függvény nívóhalmaza, konvex.

∗ **19.62. Tétel.** *Legyen X valós normált tér, $U \subset X$ nyílt, $u_0 \in U$, $F\colon U \to \mathbb{R}$ és*

$$N = \{u \in U\colon F(u) \le F(u_0)\}.$$

Ha h_0 az N megengedett iránya u_0-ban, akkor $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) \le 0$. Ha $\bar{\bar{\delta}}F(u_0; h_0) < 0$ akkor h_0 az N megengedett iránya u_0-ban. Ha F reguláris u_0-ban, akkor az utóbbi feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy h_0 megengedett irány legyen, és a megengedett irányok halmaza nem üres konvex kúp.

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint az előző tétel.

∗ **19.63. Lemma: korlátos jobbinverz létezése.** *Legyenek X és Y Banach-terek és A egy X-et Y-ra képező korlátos lineáris operátor. Ekkor létezik olyan $J\colon Y \to X$ (nem feltétlenül lineáris és nem is feltétlenül folytonos) leképezés és K valós konstans, hogy $A(J(y)) = y$ és $\|J(y)\| \le K\|y\|$ minden $y \in Y$-ra.*

Bizonyítás. Mivel A folytonos, $\ker(A)$ zárt, így – mint könnyen látható – az $\tilde{X} = X/\ker(A)$ faktortér Banach-tér az $\|\tilde{x}\| = \inf_{x\in\tilde{x}} \|x\|$ normával és az $\tilde{A}\tilde{x} = Ax$, ha $x \in \tilde{x}$ összefüggéssel értelmezett operátor lineáris és folytonos leképezése $\tilde{X}$-nek Y-ra, amely korlátos $\|A\|$-val. Alkalmazva Banachnak a korlátos inverzre vonatkozó tételét, $\tilde{A}$ inverze, a $\tilde{J}\colon Y \to \tilde{X}$ operátor korlátos. Minden $y \in Y$ esetén válasszunk egy $J(x)$-szel jelölt elemet a $\tilde{J}y$ osztályból úgy, hogy $\|J(x)\| \le 2\|\tilde{J}y\|$ teljesüljön.

∗ **19.64. Következmény: zárt képtér tétel.** *Legyenek X, Y és Z Banach-terek és $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$ korlátos lineáris operátorok. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{rng}(A)$ *és* $B(\ker(A))$ *zárt alterek. Ekkor a $Cx = (Ax, Bx)$ összefüggéssel definiált leképezés $Y \times Z$-beli képtere is zárt.*

Bizonyítás. Az $A\colon X \to \mathrm{rng}(A)$ leképezésnek létezik egy J jobbinverze, amelyre $\|J(y)\| \le K\|y\|$ teljesül. Ha (y, z) a $\mathrm{rng}(C)$ lezártjában van, akkor van olyan x_n sorozat, hogy $(Ax_n, Bx_n) \to (y, z)$. Mivel $y \in \mathrm{rng}(A)$, értelmezhetjük az $x'_n = J(Ax_n - y)$ sorozatot, amelyre $A(x_n - x'_n) = y$ és $\|x'_n\| \le K\|Ax_n - y\| \to 0$. Innen $Bx'_n \to 0$ és így $B(x_n - x'_n) \to z$. Tehát z benne van a $\{Bx\colon x \in X, Ax = y\}$ halmaz lezártjában, ami a $B(\ker(A))$ zárt altér eltoltja, tehát zárt. Ezért van olyan $x \in X$, amelyre $Ax = y$ és $Bx = z$.

∗ **19.65. Luszternyik tétele.** *Legyenek X és Y Banach-terek, $U \subset X$ nyílt halmaz és $F\colon U \to Y$ folytonosan differenciálható függvény. Legyen $u_0 \in U$ és tegyük fel, hogy $F'(u_0)$ értékkészlete Y. Ekkor létezik u_0-nak egy U_0 környezete, egy K konstans és egy $\varphi\colon U_0 \to X$ leképezés, hogy $u \in U_0$ esetén*

$$F(u + \varphi(u)) = F(u_0) \quad \text{és} \quad \|\varphi(u)\| \le K\|F(u) - F(u_0)\|.$$

A tételt és az első következményét elolvasva az az érzésünk támadhat, hogy az implicit függvény tétel segítségével ennél többet is be tudunk bizonyítani. A gondot az okozza, hogy a $\ker(F'(u_0))$ zárt altér nem feltétlenül „hasítja” az X teret, azaz nem biztos, hogy van hozzá olyan zárt altér, hogy X a kettő direkt összege.

Bizonyítás. A módosított Newton-módszer alkalmazásával történik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u_0 = 0$ és $F(u_0) = 0$. A lemma szerint az $A = F'(0)$ operátorhoz tartozó jobbinverz legyen J, és $K > 0$ a megfelelő konstans. A folytonos differenciálhatóság és a középérték-egyenlőtlenség segítségével válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, hogy U tartalmazza az ε-nál kisebb normájú elemeket és teljesüljön

$$\|F(u') - F(u'') - F'(0)(u' - u'')\| \le \frac{1}{2K}\|u' - u''\|, \tag{1}$$

ha $\|u'\| < \varepsilon$ és $\|u''\| < \varepsilon$. Válasszunk olyan $\delta > 0$-t, hogy $\|u\| < \delta$ esetén fennálljon $\|u\| + K\|F(u)\| < \varepsilon/2$. Ha $\|x\| < \delta$, akkor legyen $x_0 = x$ és

$$x_{n+1} = x_n - J(F(x_n)), \quad \text{ha} \quad n \ge 0. \tag{2}$$

Indukcióval megmutatjuk, hogy $\|x_n\| < \varepsilon$, ha $n \geq 0$. Ez $n = 0$-ra nyilvánvaló, és

$$\|x_1 - x_0\| \leq \Big\|J(F(x_0))\Big\| \leq K\|F(x_0)\|,$$

ahonnan $\|x_1\| \leq \|x_0\| + \|x_1 - x_0\| < \varepsilon/2$. Indukcióval, tegyük fel, hogy $\|x_i\| < \varepsilon$ teljesül, ha $i = 0, 1, \ldots, k$. A (2) definíciót átrendezve és mindkét oldalra alkalmazva $F'(0)$-t,

$$F'(0)(x_{i+1} - x_i) + F(x_i) = 0, \tag{3}$$

ha $i = 0, 1, \ldots, k$. Ebből, felhasználva (1)-et

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_i\| &= \Big\|J(F(x_i))\Big\| \leq K\|F(x_i)\| \\ &= K\|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(0)(x_i - x_{i-1})\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_i - x_{i-1}\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \tag{5}$$

ha $i = 0, 1, \ldots, k$. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}\| &\leq \|x_{k+1} - x_k + x_k - \ldots - x_1 + x_1\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\Big) < \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel az indukciót befejeztük.

A (4) és (5) egyenlőtlenségek ismételt felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \Big(\frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + 1\Big)\|x_{n+1} - x_n\| \\ &< 2\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2^{n-1}} \end{aligned} .$$

A sorozat tehát Cauchy-sorozat, legyen a határértéke $\psi(x)$. Megmutatjuk, hogy a $\varphi(x) = \psi(x) - x$ függvénnyel teljesül a tétel állítása K helyett $2K$-val. Alkalmazva az (5) egyenlőtlenséget

$$\|x_n - x\| < \Big(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\Big)\|x_1 - x\| < 2\|x_1 - x\|$$

adódik, amiből $n \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\big\|\varphi(x)\big\| = \big\|\psi(x) - x\big\| \leq 2\|x_1 - x\| = \Big\|J(F(x))\Big\| \leq 2K\|F(x)\|,$$

ahonnan

$$\big\|\psi(x)\big\| \leq \|x\| + 2\|x_1 - x\| \leq 2\Big(\|x\| + K\big\|F(x)\big\|\Big) < \varepsilon.$$

Az (1) egyenlőtlenség szerint F folytonos az ε-nál kisebb normájú pontokban, ezért $\psi(x)$-ben is. Alkalmazva (3)-at, a bizonyítandó

$$F(x + \varphi(x)) = F(\psi(x)) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = -\lim_{n\to\infty} F'(0)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

összefüggést kapjuk.

∗ **19.66. Következmény.** *Ha* $F'(u_0)h = 0$, *akkor* $\|\varphi(u_0+h)\|/\|h\| \to 0$, *amint* $h \to 0$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\|\varphi(u_0+h)\| &\le K\|F(u_0+h)-F(u_0)\| \\ &= \|F(u_0+h)-F(u_0)-F'(u_0)h\| \\ &\le \|h\| \sup_{\|u-u_0\|\le\varepsilon} \|F'(u)-F'(u_0)\|,\end{aligned}$$

ha $\|h\| \le \varepsilon$.

∗ **19.67. Következmény.** *Ha*

$$N = \{u \in U : F(u) = 0\},$$

akkor N *félérintő irányainak halmaza* $\ker F'(u_0)$.

Bizonyítás. Azt, hogy $\ker F'(u_0)$ elemei félérintő irányok, adja az előző következmény. Ha h_0 félérintő irány, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ és $\omega :]0,\varepsilon[\to X$, hogy $F(u_0 + th_0 + \omega(t)) = 0$, ha $0 < t < \varepsilon$ és $\lim_{t\downarrow 0} \omega(t)/t = 0$. Mivel F differenciálható u_0-ban, $\varrho(h) = F(u_0+h) - F(u_0) - F'(u_0)h$ jelöléssel $\lim_{h\to 0} \varrho(h)/\|h\| = 0$. Mivel $F(u_0) = 0$,

$$\begin{aligned}0 = \frac{F(u_0+th_0+\omega(t))}{t} &= \frac{F'(u_0)(th_0+\omega(t)) + \varrho(th_0+\omega(t))}{t} \\ &= F'(u_0)(h_0+\omega(t)/t) + \frac{\varrho(th_0+\omega(t))}{\|th_0+\omega(t)\|}\|h_0+\omega(t)/t\|.\end{aligned}$$

Innen $t \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $F'(u_0)h_0 = 0$.

∗ **19.68. Tétel.** *Legyen* X *valós normált tér,* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *felülről félig folytonos pozitív homogén és konvex függvény, amire* $g(h_0) < 0$ *valamely* $h_0 \in X$*-re. Ekkor a* $K = \{h \in X : g(h) < 0\}$ *kúp adjungált kúpja*

$$\{f \in X^* : \text{ van olyan } \lambda \ge 0, \text{ hogy } f \ge -\lambda g\ \}.$$

(Itt $0 \cdot \pm\infty = 0$*.)*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy ennek a halmaznak az elemei K^+-ban vannak. Legyen $f \in K^+$. A K nem üres konvex nyílt halmaz. Ha f sehol sem pozitív K-n, akkor $f = 0$, és $\lambda = 0$ választható. Egyébként az $A = \{(h,t) \in X\times\mathbb{R} : g(h) < t\}$ és $B = \{(h,0) \in X\times\mathbb{R} : f(h) = 0\}$ nem üres konvex halmazok, A nyílt, B zárt. Ha (h,t) a metszetben lenne, akkor $g(h) < 0$ és $f(h) = 0$ teljesülne. Ez lehetetlen, mivel f valahol pozitív, és innen az összekötő egyenesen h felé mozogva, túljutva h-n negatívvá válna, ami ellentmond annak, hogy $f \in K^+$. Alkalmazva a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakját, olyan nem nulla $F \in (X\times\mathbb{R})^*$ lineáris funkcionált és c konstanst kapunk, amelyre $F|_B \le c \le F|_A$. Mivel B altér, feltehetjük, hogy $c = 0$. Így $F(h,0) \le 0$, ha $f(h) = 0$ és $F(h,t) = F(h,0) + tF(0,1) \ge 0$, ha $g(h) < t$. Az első egyenlőtlenségből a $h \mapsto F(h,0)$ leképezés eltűnik az f nullterén, így annak konstansszorosa, mondjuk $F(h,0) = kf(h)$. A második egyenlőtlenségből $t \to +\infty$ határátmenettel $F(0,1) \ge 0$, majd $t \downarrow g(h)$ határátmenettel $kf(h) + g(h)F(0,1) \ge 0$ minden h-ra. Ha $F(0,1) = 0$ lenne, akkor innen $F = 0$ adódna, ami ellentmondás. Mivel $g(h_0) < 0$, $kf(h_0) > 0$. Mivel f nemnegatív K-n, ez csak úgy teljesülhet, ha $k > 0$. A $\lambda = F(0,1)/k$ választással készen vagyunk.

∗ **19.69. Tétel.** *Legyenek X és Y Banach-terek A az X-et Y-ra képező korlátos lineáris operátor. Ekkor* $\ker(T)^+ = \{y^* \circ T : y^* \in Y^*\}$.

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvaló. Legyen $f \in \ker(A)^+$. Ez azt jelenti, hogy f nulla $\ker(A)$-n, mivel az altér. Legyen $Cx = (Ax, fx)$, ha $x \in X$. A zárt képtér tétel feltételei teljesülnek, így C képtere zárt, azonban a $(0,1)$ pár nincs benne. Válasszuk el C képterét a $(0,1)$-től egy H nem nulla lineáris funkcionállal. A H nulla $\mathrm{rng}(C)$-n. Feltehetjük, hogy $H(0,1) = -1$. Az $y^*(y) = H(y,0)$ jelöléssel $H(Cx) = y^*(A(x)) + H(0,1)fx$, azaz $f = y^* \circ A$.

∗ **19.70. Lagrange-szorzók.** Az

$$\begin{aligned} &F_0(u) \to \min, \quad u \in N \\ &F_j(u) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ &F_{n+1}(u) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

feltételes minimumproblémát akarjuk tanulmányozni. Az u_0-at a feltételes minimumprobléma egy *lokális megoldás*ának fogjuk nevezni, ha van olyan U_0 környezete, hogy $F_0(u) \ge F_0(u_0)$ minden $u \in U_0$-ra, ami teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket. Szükséges és elégséges feltételt is a λ_j és y^* *Lagrange-szorzó*k segítségével adhatunk:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bar{\bar{\delta}} F_i(u_0; u - u_0) + y^* F'_{n+1}(u_0)(u - u_0) \ge 0, \quad \text{ha} \quad u \in N; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0, \quad y^* \in Y^* \\ &\lambda_j F_j(u_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &F_j(u_0) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ &F_{n+1}(u_0) = 0, \quad u_0 \in N. \end{aligned} \tag{4}$$

A (2) variációs egyenlőtlenség az Euler–Lagrange-egyenleteknek felel meg, (3) és (4) további feltételek. Nyilván $\lambda_j = 0$ kell legyen, ha $F_j(u_0) < 0$ $(j = 1, \dots, n)$, azaz ekkor λ_j nem aktív. Figyeljük meg, hogy ha egy pozitív konstanssal megszorozzuk a Lagrange-szorzókat, (2), (3) és (4) ekvivalens feltételbe mennek át, így akár azt is feltehetjük, hogy vagy $\lambda_0 = 0$ (*elfajuló eset*), vagy $\lambda_0 = 1$ (*nemelfajuló eset*).

∗ **19.71. Általánosított Kuhn–Tucker-tétel.** *Az előző pont jelöléseivel, tekintsük az alábbi feltételeket:*

(5) *X és Y valós Banach-terek;*

(6) *$U \subset X$ nyílt környezete u_0-nak, $F_i : U \to \mathbb{R}$, a $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F(u_0; h)$ funkcionálok konvexek $(i = 0, 1, \dots, n)$ és F_j folytonos u_0-ban $(j = 1, \dots, n)$;*

(7) *N konvex részhalmaza X-nek, amelynek a belseje nem üres;*

(8) *$F_{n+1} : U \to Y$ folytonosan differenciálható U-n;*

(9) *regularitás:* $\mathrm{rng}(F'_{n+1}(u_0))$ *zárt.*

Szükségesség: ha (5)–(9) teljesülnek, és u_0 lokális megoldása (1)-nek, akkor léteznek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ valós számok és $y^* \in Y^*$, nem mind nulla, hogy (2), (3) és (4) teljesülnek.

Elégségesség: ha (5)–(8) teljesülnek, akkor (2), (3) és (4)-ből következik, hogy u_0 megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:

(10) $\lambda_0 = 1$;

(11) $F_0, F_1, \dots, F_n$ *és* $u \mapsto y^* F_{n+1}(u)$ *konvexek.*

Használni fogjuk az L *Lagrange-függvényt*, amelyet az

$$L(u, \lambda, y^*) = \lambda_0 F_0(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(u) + y^* F_{n+1}(u)$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Bizonyítás. Az elégségességet bizonyítása teljesen elemi. Legyen

$$\varphi(t) = L(u_0 + t(u - u_0), \lambda, y^*),$$

ahol $t \in [0, 1]$ és $u \in N$ rögzített. A φ függvény konvex, valamint (2) szerint $\varphi'(0+) \geq 0$, ezért a $[0, 1]$-en φ-nek minimuma van 0-ban. Innen következik, hogy

$$L(u_0, \lambda, y^*) \leq L(u, \lambda, y^*), \quad \text{ha} \quad u \in N.$$

Mivel $\lambda_0 = 1$, a (3) és (4) feltételekből

$$F_0(u_0) = L(u_0, \lambda, y^*).$$

Minden u-ra, amely teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket,

$$L(u, \lambda, y^*) \leq F_0(u),$$

mivel $\lambda_j \geq 0$. Innen $F_0(u_0) \leq F_0(u)$.

A szükségesség a Dubovickij–Miljutyin-tételből fog következni. A bizonyítást több lépésre osztjuk.

I. Először a triviális speciális eseteket tekintjük. Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0, h)$ nemnegatív X-en, akkor $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, $y^* = 0$ választással (2), (3) és (4) teljesül. Ha $h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0, h)$ nemnegatív, $F_j(u_0) = 0$ valamely $1 \leq j \leq n$-re, akkor $\lambda_j = 1$, $\lambda_k = 0$, ha $k \neq j$, $y_* = 0$ választással élhetünk. Ha $\operatorname{rng}(F'_{n+1}(u_0)) \neq Y$, akkor a Hahn–Banach-tétel elválasztási alakja szerint az értékkészlet elválasztható valamely rajta kívül fekvő ponttól egy $y^* \in Y^*$-gal, amelyre tehát $y^* F'_{n+1}(u_0)h = 0$ minden $h \in X$-re, így $\lambda_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ választással élhetünk.

II. A továbbiakban feltesszük, hogy a triviális speciális esetek egyike sem teljesül. Ekkor az F_i, $i = 0, 1, \dots, n$ függvények regulárisak u_0-ban.

Először az F_0-hoz u_0-ban tartozó reguláris csökkenési irányok K_0 kúpjával foglalkozunk. Tudjuk, hogy ez

$$K_0 = \{h \in X \colon \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0; h) < 0\}$$

és

$$K_0^+ = \{f \in X^*\colon \text{ van olyan } \lambda_0 \geq 0, \text{ hogy } f \geq -\lambda_0 \bar{\bar{\delta}} F_0(u_0;.)\ \}.$$

Legyen

$$N_j = \{u \in X\colon F_j(u) \leq 0\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és tekintsük az N_j-hez u_0-ban tartozó megengedett irányok K_j kúpját. Figyelembe véve, hogy F_j folytonos u_0-ban, kapjuk, hogy ha $F_j(u_0) < 0$, akkor $K_j = X$, és így $K_j^+ = \{0\}$. Ha $F_j(u_0) = 0$, akkor

$$K_j = \{h \in X\colon \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0; h) < 0\}$$

és így

$$K_j^+ = \{f \in X^*\colon \text{ van olyan } \lambda_j \geq 0, \text{ hogy } f \geq -\lambda_j \bar{\bar{\delta}} F_j(u_0;.)\ \}.$$

A definícióból és a duális kúp definíciójából közvetlenül következik, hogy az N-hez az u_0-ban tartozó megengedett irányok K kúpjára

$$K = \{h \in X\colon h = \alpha(u - u_0), u \in N^\circ, \alpha > 0\}$$

és

$$K^+ = \{f \in X^*\colon f(u - u_0) \geq 0, \text{ ha } u \in N\ \}.$$

Az $N_{n+1} = f_{n+1}^{-1}(u_0)$ halmazhoz u_0-ban tartozó félérintő irányok K_{n+1} kúpjára megmutattuk, hogy az $A = F'_{n+1}(u_0)$ jelöléssel a $\operatorname{rng}(A) = Y$ esetben $K_{n+1} = \ker(A)$ és $K_{n+1}^+ = \{y^* \circ A\colon y^* \in Y^*\}$.

Alkalmazzuk a Dubovickij–Miljutyin-tételt. Az kapjuk, hogy léteznek nem mind nulla $f \in K^+$, $f_i \in K_i^+$, $i = 0, \ldots, n, n+1$ lineáris funkcionálok, hogy az összegük nulla, azaz

$$f = -f_0 - f_1 - \cdots - f_{n+1} \in K^+.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$-f_0(u - u_0) - f_1(u - u_0) - \cdots - f_{n+1}(u - u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N,$$

így vannak olyan $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ nemnegatív valós számok és $y^* \in Y^*$, nem mind nulla, hogy

$$\begin{aligned} -f_i &\leq \lambda_i \bar{\bar{\delta}} F(u_0, .) \quad i = 0, 1, \ldots, n; \\ -f_{n+1} &= y^* \circ F'_{n+1}(u_0); \\ 0 &= \lambda_j F_j(u_0) \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

∗ **19.72. Következmény: általánosítás.** *Ha még*

$$F_i\colon U \mapsto \mathbb{R}, \quad F_i(u_0) = 0 \quad i = n+2, \ldots, n+m$$

alakú feltételek is vannak, ahol minden F_i, $i = n+2, \ldots, n+m$ folytonosan differenciálható U-n, azokat beolvaszthatjuk F_{n+1}-be, mivel

$$u \mapsto (F'_{n+1}(u_0), \ldots, F'_{n+m}(u_0))$$

értékkészlete zárt a zárt képtér tétel szerint. Ekkor léteznek $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $i = n+2, \ldots, n+m$ és $y^* \in Y^*$, nem mind nulla, hogy (2) helyett

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bar{\bar{\delta}} F_i(u_0; u - u_0) + \sum_{i=n+2}^{n+m} \lambda_i F_i'(u_0)(u - u_0) + y^* F'_{n+1}(u_0)(u - u_0) \geq 0,$$

teljesül, ha $u \in N$; (3) és (4) változatlan.

∗ **19.73. Következmény: speciális esetek.** *Ha nincs egyenlőség típusú feltétel, akkor* $Y = \{0\}$ *választással élhetünk, és a bizonyítás szerint* $K_{n+1} = X$, *így* $K_{n+1}^+ = \{0\}$, *azaz feltehetjük, hogy* $y^* = 0$, *és (2) arra redukálódik, hogy*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bar{\bar{\delta}} F_i(u_0; u - u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N.$$

Ha nincs $u \in N$ *típusú feltétel, akkor* $N = X$ *választással élhetünk. Ha az* $F_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *függvények konvexek, akkor a*

$$h \mapsto \bar{\bar{\delta}} F_i(u_0; h) = \bar{\delta} F_i(u_0; h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F_i(u_0 + th) - F_i(u_0)}{t}$$

leképezések is konvexek, így (6) helyett csak azt kell megkövetelni, hogy F_j, $j = 1, \ldots, n$ *folytonos* u_0*-ban. Ha még ezen kívül* X *véges dimenziós (az eredeti Kuhn–Tucker-tételben ez a két feltétel szerepelt), akkor ezt sem, mert ekkor a konvex függvények folytonosak.*

∗ **19.74. Következmény: általános Lagrange-elv.** *Tekintsük (6) helyett a*

(6') *U nyílt környezete* u_0*-nak,* $F_0, F_1, \ldots, F_n : U \to \mathbb{R}$ *differenciálhatóak* u_0*-ban feltételt.*

Szükségesség: ha (5), (6'), (7)–(9) teljesülnek, és u_0 *lokális megoldása (1)-nek, akkor léteznek* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *valós számok és* $y^* \in Y^*$, *nem mind nulla, hogy*

$$(2') \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i F_i'(u_0)(u - u_0) + y^* F_{n+1}'(u_0)(u - u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N,$$

továbbá (3) és (4) teljesülnek.

Elégségesség: ha (5), (6'), (7) és (8) teljesülnek, akkor (2'), (3) és (4)-ből következik, hogy u_0 *megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:*

(10) $\lambda_0 = 1$*;*

(11) $F_0, F_1, \ldots, F_n$ *és* $u \mapsto y^* F_{n+1}(u)$ *konvexek.*

A (2'), (3) és (4) feltételek az L Lagrange-függvény segítségével is kifejezhetők. Könnyű kiszámolni, hogy a $\lambda \in [0, +\infty[^n$, $y^* \in Y^*$, $u_0 \in U$ esetben (2'), (3) és (4) a

$$\begin{aligned} &L_u(u_0, \lambda, y^*)(u - u_0) \geq 0, \quad \text{ha} \quad u \in N, \\ &L_\lambda(u_0, \lambda, y^*)(\mu - \lambda) \leq 0, \quad \text{ha} \quad \mu \in [0, +\infty[^n, \\ &L_{y^*}(u_0, \lambda, y^*) = 0 \end{aligned}$$

feltételekkel ekvivalensek. Valóban, (2') nyilván ekvivalens az első feltétellel, $F_{n+1}(u_0) = 0$ pedig az utolsóval. A középső feltételben $L_\lambda(u_0, \lambda, y^*) = (F_1(u_0), \ldots, F_n(u_0))$, így μ egyik koordinátájával tartva $+\infty$-hez, a többit rögzítve $F_j(u_0) \leq 0$ adódik. Ha $F_j(u_0) = 0$, akkor nyilván $\lambda_j F_j(u_0) = 0$, ha viszont $F_j(u_0) < 0$, akkor a $\lambda_j > 0$ esetben $\mu_j = 0$, $\mu_i = \lambda_i$, ha $i \neq j$ választással ellentmondást kapnánk. Megfordítva, $F_j(u_0) \leq 0$-ból $\sum_{j=1}^n \mu_j F_j(u_0) \leq 0$, amiből levonva $\sum_{j=1}^n \lambda_j F_j(u_0) = 0$-át, kapjuk a középső egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 19.48. tételt.

∗ **19.75. Belső pont módszerek.** Az

$$
\begin{aligned}
&f_0(u) \to \min, \quad u \in U \\
&f_j(u) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\
&f_j(u) = 0, \quad j = k+1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

feltételes minimumproblémát kívánjuk numerikusan megoldani. Az egyenlőség típusú feltételeket kiküszöbölhetjük, ha f_0 helyett az $f_0 + \sum_{i=k+1}^{m} (\lambda_i f_i)^2$ függvényt minimalizáljuk, ahol $\lambda_i \neq 0$ súlyok. Kérdés, hogyan célszerű választani a súlyokat. Az egyenlőtlenség típusú feltételeket úgy vehetjük figyelembe, hogy a célfüggvényhez hozzáadunk egy

$$-\frac{1}{t} \sum_{j=1}^{k} \ln(-f_j(u))$$

tagot. Ez mint sorompó szerepel, az $U^- = \{u \colon f_j(u) < 0, j = 1, \dots, k\}$ nyílt halmaz belsejében tart minket, mert a határhoz közeledve $+\infty$-hez tart. Innen a *belső pont módszerek* elnevezés. Minél nagyobb t, annál gyengébb a sorompó, annál közelebb mehetünk a határhoz. A legegyszerűbb *sorompó módszer*nél $U^- \cap \operatorname{dmn}(f_0)$ egy pontjából indulunk. Egy adott pozitív t-re minimalizálva (például a fékezett Newton-módszerrel), ha $u_0(t)$-ben van a minimum, akkor megnövelt t-re, például t helyett μt-re a $u_0(t)$-t használhatjuk kezdőpontnak, újra minimalizálunk, stb. A tapasztalatok szerint a módszer 3 és 100 közötti μ-t választva jól működik, sebessége alig függ μ-től. Leggyakrabban μ értékét 10 és 20 között választjuk. Fontos észrevétel, hogy ha nincsenek egyenlőség típusú feltételek és $u_0(t)$ a minimumhely, akkor $u = u_0(t)$-re

$$f_0'(u) + \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j'(u)}{-t f_j(u)} = 0,$$

így – legalábbis a reguláris esetben – a

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{-t f_j(u_0(t))}$$

mennyiségek az $u_0(t)$-hez tartozó Lagrange-szorzók, és $-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) f_j(u)$ az $u = u_0(t)$ helyen k/t. Ez adhatja az ötletet a sokkal agresszívebb és gyorsabb primál-duál belső pont módszerhez.

Tekintsük a

$$
\begin{aligned}
0 =& f_0'(u) + \sum_{j=1}^{m} v_j f_j'(u), \\
0 =& -\frac{1}{t} - v_j f_j(u), \quad j = 1, \dots, k; \\
0 =& f_j(u), \quad j = k+1, \dots, m
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert, amely a $t > 0$ paramétertől függ. Ennek az (u, v) megoldását keressük $v_j > 0$, ha $j = 1, \dots, k$ feltételek mellett fékezett Newton-módszerrel. Azt várjuk, hogy

t növekedésével (u, v) tart (u_0, λ)-hoz. Kiszámítjuk $\eta = -\sum_{j=1}^{k} v_j f_j(u)$ értékét, és t-t a k/η szám μ-szörösének választjuk (μ rendszerint 10 körüli). Csak egyetlen iterációs lépést teszünk, majd újraszámoljuk t-t. Az egyenes szakasz menti keresésnél kiszámítjuk azt a legnagyobb α-t, amely nem nagyobb mint 1, és amelyre $v_j + \alpha \Delta v_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$, majd az α kezdőértékének ennek mondjuk 0,99-szeresét vesszük, és ha kell, tovább csökkentjük α-t a fékezett Newton-módszernél leírtak szerint. Az egész program akkor áll meg, ha $\eta < \varepsilon$ és $\sum_{j=k+1}^{m} f_j(u)^2$ meg az első egyenlet jobb oldala normanégyzetének összege kisebb mint δ^2. Egy olyan $u \in U^-$ pontból indulunk, amely mindegyik függvény értelmezési tartományában benne van, v_j kezdőértéke $-1/(t f_j(u))$, ha $j = 1, \dots, k$, a többi v_j tetszőleges, például nulla. Nincs garancia a konvergenciára, kivéve, ha az f_i, $i = 0, 1, \dots, k$ függvények szigorúan konvexek, az f_j, $j = k+1, \dots, m$ függvények pedig lineáris plusz konstans alakúak.

Ha nem tudunk pontot U^--ban, amire minden f_i értelmezve van, de ismerjük az értelmezési tartományok egy közös pontját, akkor az $f_0 \to \min$, $f_j \leq s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j = 0$, $j = k+1, \dots, m$, $s = 0$ problémát próbáljuk megoldani. Ha csak külön-külön tudunk egy-egy $w_i \in \operatorname{dmn}(f_i)$ pontot, akkor az $f_0(u + w_0) \to \min$, $f_j(u + w_j) \leq s$, $j = 1, \dots, k$, $f_j(u + w_j) = 0$, $j = k+1, \dots, m$, $s = 0$, $w_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$ problémát próbáljuk megoldani.

∗ **19.76. A Pontrjagin-féle maximumelv bizonyítása.** Most már rendelkezésünkre állnak azok az eszközök, amelyekkel be tudjuk bizonyítani a Pontrjagin-féle maximumelvet. Jelölje (P) a 19.36 pontban megfogalmazott irányítási problémát. Az ottani jelöléseket fogjuk használni. Az alaptrükk egy időtranszformáció bevezetése, aminek segítségével egyrészt a tetszőleges W halmazból egy N konvex halmazt kapunk, másrészt a változó $[t_0, t_1]$ intervallumból a rögzített $[0, 1]$ időintervallumot.

I. Jelölje C a $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ függvényteret, C_+ pedig a C azon részhalmazát, amely olyan nemnegatív, nem azonosan nulla v függvényekből áll, amelyeknek a nullhalmaza véges sok zárt intervallum egyesítése. Vegyük észre, hogy C_+ a C konvex részhalmaza, amelynek belseje nem üres, például az azonosan 1 függvény a belsejében van. Minden $v \in C_+$ függvényhez hozzárendelünk egy időtranszformációt a

$$t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v(\tau)\, d\tau, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0, 1]$$

összefüggéssel. Azokon az intervallumokon, ahol $v(\tau)$ nem nulla, a transzformáció kölcsönösen egyértelmű, $t'(\tau) = v(\tau)$, de ha egy intervallumon $v(\tau)$ nulla, akkor ott t konstans. Az inverz transzformációt a

$$\tau(t^*) = \min\{\tau \in [0,1] : t(\tau) = t^*\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Tisztán formálisan az eredeti (P) probléma a

$$\int_0^1 L(y(\tau), \overline{w}(\tau), t(\tau)) v(\tau)\, d\tau \to \min \tag{P′}$$

problémával ekvivalens, ahol $(y,t,v)\in C^n\times C\times C_+$ és

$$\begin{aligned}0=&y(\tau)-a-\int_0^\tau f(y(\tau),\overline{w}(\tau),t(\tau))v(\tau)\,d\tau,\\ 0=&t(\tau)-t_0-\int_0^\tau v(\tau)\,d\tau,\\ 0=&g(t(1),y(1)).\end{aligned}$$

Ezt az problémát operátorokkal felírva,

$$(\mathrm{P}'')\qquad F_0(u)\to\min,\quad u\in N,\quad F_1(u)=0,$$

ahol $u=(y,t,v)\in X=C^n\times C\times C$, $N=C^n\times C\times C_+$, $Y=C^n\times C\times\mathbb{R}^m$ és F_1 az X-et Y-ba képezi. Igazolnunk kell a formális eljárás jogosságát.

II. Megmutatjuk, hogy ha x, w és t_1 az eredeti (P) probléma egy megoldása és adott $w^*\in W$-re és $\overline{v}\in C_+$-ra a

$$\overline{t}(\tau)=t_0+\int_0^\tau\overline{v}(\tau)\,d\tau,\quad \overline{y}(\tau)=x(\overline{t}(\tau))$$

definíciókkal $\overline{u}=(\overline{y},\overline{t},\overline{v})$, továbbá definíció szerint

$$\overline{w}(\tau)=\begin{cases}w(\overline{t}(\tau)), & \text{ha } \overline{v}(\tau)>0,\\ w^*, & \text{ha } \overline{v}(\tau)=0,\end{cases}$$

akkor $\overline{u}$ megoldása (P')-nek, feltéve, hogy $\overline{v}(1)=t_1$.

Valóban, $\overline{w}$-nak csak véges sok szakadási helye van, továbbá $\overline{t}\in C$, $\overline{y}\in C^n$. Jelölje $\overline{w}$ folytonossági helyeinek halmazát S. A (P)-ből könnyen következik, hogy $\overline{u}$ teljesíti a (P')-beli mellékfeltételeket. Továbbá, új változót bevezetve,

$$(1)\qquad F_0'(\overline{u})=\int_{t_0}^{t_1}L(x(t),w(t),t)\,dt.$$

Ha most egy $u=(y,t,v)$-re teljesül (P'), akkor a

$$t(\tau)=t_0+\int_0^\tau v(\tau)\,d\tau$$

transzformációval az $y,\overline{w}$ függvényekből a

$$t\mapsto\tilde{x}(t),\quad t\mapsto\tilde{w}(t),\quad t\in[t_0,\tilde{t}_1]$$

függvényeket kapjuk, amelyek teljesítik a (P)-ben szereplő mellékfeltételeket, továbbá

$$F_0(u)=\int_{t_0}^{\tilde{t}_1}L(\tilde{x}(t),\tilde{w}(t),t)\,dt.$$

Mivel x,w megoldása (P)-nek, $F_0(u)\geq F_0(\overline{u})$.

Az alábbiakban legyenek $\overline{u},\overline{w}$ rögzítettek. Csak az utolsó lépésben fogjuk felhasználni, hogy $\overline{u},w^*$ tetszőlegesek.

III. Harmadik lépésként a következő szükséges feltételt adjuk (P") teljesülésére: Létezik olyan $\lambda \geq 0$ és $y^* \in Y^*$, nem mindkettő nulla, hogy minden $u \in N$-re a

$$\lambda F_0'(\overline{u})(u-\overline{u}) + y^* F_1'(\overline{u})(u-\overline{u}) \geq 0 \tag{2}$$

variációs egyenlőtlenség teljesül.

Ez az általános Lagrange-elvből következik: csak azt kell megmutatnunk, hogy $\operatorname{rng}(F_1'(\overline{u}))$ zárt, mert a többi feltétel nyilván teljesül. Az

$$F_1'(\overline{u})(u-\overline{u}) = b$$

egyenlet nyilván megfelel a (P') feltételben szereplő inhomogén egyenleteknek, ha azok bal oldalát linearizáljuk, azaz

$$\begin{aligned} b_1 =& y - \overline{y} - \int_0^\tau f_x(\overline{P})\overline{v}(y-\overline{y})\,d\tau \\ & - \int_0^\tau \Big(f_t(\overline{P})\overline{v}(t-\overline{t}) + f(\overline{P})(v-\overline{v}) \Big)\,d\tau, \\ b_2 =& t - \overline{t} - \int_0^\tau (v-\overline{v})\,d\tau, \end{aligned} \tag{3}$$

továbbá

$$b_3 = g_t(\overline{Q})(t(1)-\overline{t}(1)) + g_x(\overline{Q})(y(1)-\overline{y}(1)); \tag{4}$$

itt $u=(y,t,v)$, $\overline{P}=(\overline{y}(\tau),\overline{w}(\tau),\overline{t}(\tau))$, tehát a változót nem írjuk ki, és $\overline{Q}=(\overline{t}(1),\overline{y}(1))$. Fontos megfigyelés, hogy a (3) egyenletrendszer rögzített v-re Volterra integrálegyenlet rendszer. Valóban, $z=(y-\overline{y},t-\overline{t})$ és alkalmas rögzített $k_1 \in C^n$, $k_2 \in C$ és $K\colon [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^{n+1})$ folytonos függvényekkel az egyenletrendszer $c=(b_1+k_1, b_2+k_2)$ jelöléssel

$$z(\tau) = c(\tau) + \int_0^\tau K(\sigma)z(\sigma)\,d\sigma$$

alakba írható. A jobb oldalon álló operátort T-vel jelölve, teljes indukcióval

$$\big|T^\ell(z_2)(\tau) - T^\ell(z_1)(\tau)\big| \leq \frac{\|K\|^\ell \tau^\ell}{\ell!}\|z_2 - z_1\|, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0,1].$$

Innen T valamely hatványa kontrakció, így pontosan egy $(y,t) \in C^n \times C$ megoldása van (3)-nak bármely $(b_1,b_2) \in C^n \times C$-re, és ez folytonosan függ (b_1,b_2)-től.

Jelölje $h(u)$ a (4) egyenlet jobb oldalát. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{rng}(F_1'(\overline{u}))$ pontosan azokból a b-kből áll, amelyekre

$$b_1 \in C^n, \quad b_2 \in C, \quad b_3 = h(u(b_1,b_2)) + \gamma, \tag{5}$$

ahol γ az $\mathbb{R}^n$ egy rögzített Z lineáris alterén fut keresztül, $(b_1,b_2) \mapsto u(b_1,b_2)$ pedig egy bizonyos folytonos függvény $C^n \times C$-n. Mivel Z zárt, $u \mapsto h(u)$ pedig szintén folytonos, ebből már következik, hogy $\operatorname{rng}(F_1'(\overline{u}))$ zárt.

Az (5) összefüggés bizonyításához, (3)-nak a $b_1=0$, $b_2=0$ homogén esethez tartozó összes u_h megoldásának halmazát jelöljük U_h-val. Az $U_h - \overline{u}$ halmaz lineáris altér, így $h(U_h - \overline{u})$ is lineáris altér, ezt jelöljük Z-vel. Továbbá rögzített (b_1,b_2)-re (3)-nak pontosan egy megoldása van a $v=\overline{v}$ esetben is, ezt jelöljük $u(b_1,b_2)$-vel. A (3) minden u megoldása $u = u(b_1,b_2) + u_h$ alakú, amivel (5) teljesülését beláttuk.

IV. Negyedik lépésként az y^* Lagrange-multiplikátort vizsgáljuk meg. Mivel $y^* \in Y^*$ és $Y = C^n \times C \times \mathbb{R}^n$,

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \alpha) \in C^{n*} \times C^* \times \mathbb{R}^{n*}.$$

Először megmutatjuk, hogy λ és α nem lehet egyszerre nulla. A bizonyítás indirekt. A $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$ választással, rögzítve $v = v_1 \equiv 1$-et, megkonstruáljuk (3) egy $u_1 = (y, t, v_1)$ megoldását. A (2) összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$y^* F_1'(\overline{u})(u_1 - \overline{u}) = 0.$$

Mivel v_1 a C_+ belsejében van, u_1 az N belsejében van. Ezért (2)-ből $\lambda = 0$ miatt

$$y^* F_1'(\overline{u})(u - \overline{u}) = 0$$

minden $u \in X$-re. Most felhasználva (5)-öt azt kapjuk, hogy $y_1^* = 0$ és $y_2^* = 0$, így $y^* = 0$, ez azonban ellentmond a III. lépésben bizonyítottaknak.

Tegyük fel, hogy g valamelyik koordinátája, mondjuk az utolsó, nulla. Hagyjuk el ezt a koordinátát. Megismételve az eddigieket, azt kapjuk, hogy a most eggyel kisebb dimenziós α-val is fennáll, hogy $\lambda = 0$ és $\alpha = 0$ egyszerre nem teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy akár azt is feltehetjük, hogy $\alpha_n = 0$. A (2) kulcsegyenlőtlenség sem változik, az α_n szorzója úgyis nulla. Ismételve ezt a lépést, a g minden azonosan nulla koordinátájához tartozó α_i-ről feltehetjük, hogy nulla. Figyeljük meg, hogy ha minden koordináta nulla, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda > 0$.

V. A maximumelv bizonyításához u és $\overline{u}$ specializálásával jutunk el. Ebben a lépésben u-t specializáljuk (2)-ben. Minden $v \in C_+$-hoz válasszuk a $b_1 = 0$, $b_2 = 0$-hoz tartozó egyetlen u megoldását (3)-nak. Ekkor (2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lambda \int_0^1 \Big(L_x(\overline{P})\overline{v}(y - \overline{y}) + L_t(\overline{P})\overline{v}(t - \overline{t}) + L(\overline{P})(v - \overline{v}) \Big)\, d\tau$$
$$+ \alpha g_t(\overline{Q})(t(1) - \overline{t}(1)) + \alpha g_x(\overline{Q})(y(1) - \overline{y}(1)) \geq 0$$

és (3) teljesül $b_1 = 0$, $b_2 = 0$-val. A (3) összefüggést differenciálhatjuk τ szerint az integrandus folytonossági pontjaiban, azaz ha $\tau \in S$. Azt kapjuk, hogy

$$y' - \overline{y}' = f_x(\overline{P})\overline{v}(y - \overline{y}) + f_t(\overline{P})\overline{v}(t - \overline{t}) + f(\overline{P})(v - \overline{v}), \quad \text{ha} \quad \tau \in S, \tag{6}$$

és

$$t' - \overline{t}' = v - \overline{v}, \quad \text{ha} \quad \tau \in [0, 1], \quad y(0) = \overline{y}(0), \quad t(0) = \overline{t}(0) \equiv t_0.$$

Elhagytuk a τ-tól való függés $y'(\tau)$, $t'(\tau)$, stb. explicit kiírását.

VI. A maximumelv minden változatában fontos szerepet játszik egy trükk, amit az „adjungált állapotok bevezetésének” szokás nevezni. Bevezetjük a φ és ψ függvényeket, kiküszöbölve t-t és y-t. Célunk a

$$\int_0^1 (\lambda L(\overline{P}) - \psi f(\overline{P}) + \varphi)(v - \overline{v})\, d\tau \geq 0, \quad \text{ha} \quad v \in C_+ \tag{7}$$

egyenlőtlenség bizonyítása, ahol a φ és ψ függvényeket a $\tau \in S$ esetén fennálló

$$\begin{aligned} \psi'(\tau) &= (\lambda L_x(\overline{P}) - \psi(\tau) f_x(\overline{P}))\overline{v}(\tau), \\ \varphi'(\tau) &= -(\lambda L_t(\overline{P}) - \psi(\tau) f_t(\overline{P}))\overline{v}(\tau) \end{aligned} \tag{8}$$

differenciálegyenletekkel és a

$$\psi(1) = -\alpha g_x(\overline{Q}), \quad \varphi(1) = \alpha g_t(\overline{Q})$$

kezdeti feltételekkel vezetjük be. A φ és ψ létezése könnyen adódik, ha (8)-at integráljuk 1-től τ-ig, a kapott Volterra-integrálegyenletet megoldjuk $[0,1]$-en, majd a kapott φ, ψ folytonos megoldásokat differenciáljuk S pontjaiban.

Ezeket a függvényeket úgy vezettük be, hogy a szorzat differenciálási szabályát lehet alkalmazni az V. lépésben szereplő integranduszra. Nevezetesen, ha $\tau \in S$, akkor

$$\begin{aligned} &\lambda\Big(L_x(\overline{P})\overline{v}(y-\overline{y}) + L_t(\overline{P})\overline{v}(t-\overline{t}) + L(\overline{P})(v-\overline{v})\Big) \\ &\quad = (\psi\cdot(y-\overline{y}))' - (\varphi\cdot(t-\overline{t}))' - (\psi f(\overline{P}) - \varphi)(v-\overline{v}). \end{aligned}$$

Figyelembe véve az V. lépésben szereplő egyenlőtlenséget integrálással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &(\lambda L(\overline{P}) - \psi f(\overline{P}) + \varphi)(v-\overline{v})\,d\tau + [\psi\cdot(y-\overline{y}) - \varphi\cdot(t-\overline{t})]_{\tau=0}^{\tau=1} \\ &\quad + \alpha g_t(\overline{Q})(t(1)-\overline{t}(1)) + \alpha g_x(\overline{Q})(y(1)-\overline{y}(1)) \geq 0. \end{aligned}$$

Ebből következik (7).

VII. Most a (7) integrálegyenlőtlenséget pontonkénti egyenlőtlenséggé változtatjuk. Vezessük be a Δ függvényt a

$$\Delta(\tau) = \lambda L(\overline{P}) - \psi(\tau) f(\overline{P}) + \varphi(\tau)$$

definícióval. Minden $\tau \in S$ pontban azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\Delta(\tau) = 0, \quad \text{ha} \quad \overline{v}(\tau) > 0, \\ &\Delta(\tau) > 0, \quad \text{ha} \quad \overline{v}(\tau) = 0; \end{aligned} \tag{9}$$

valóban, ennek ellenkezője könnyen ellentmondásra vezet, ha megfelelő v-t választunk, mivel Δ folytonos a τ pontban.

VIII. A (8) összefüggést integrálva 1-től τ-ig azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \psi(1) + \int_1^\tau (\lambda L_x(\overline{P}) - \psi f_x(\overline{P}))\overline{v}\,d\tau, \\ \varphi(\tau) &= \varphi(1) - \int_1^\tau (\lambda L_t(\overline{P}) - \psi f_t(\overline{P}))\overline{v}\,d\tau. \end{aligned}$$

Áttérve a τ változóról a $t = \overline{t}(\tau)$ változóra, amit a

$$\overline{t}(\tau) = t_0 + \int_0^\tau \overline{v}(\tau)\,d\tau$$

összefüggéssel definiálunk, kapjuk a p és p_0 függvényeket, tehát

$$p(t) = p(t_1) + \int_{t_1}^{t} (\lambda L_x(P) - p f_x(P))\, dt,$$
$$p(t_1) = \psi(1) = -\alpha g_x(t_1, x(t_1))$$

és

$$p_0(t) = p_0(t_1) - \int_{1}^{\tau} (\lambda L_t(P) - p f_t(P))\, dt,$$
$$p_0(t_1) = \varphi(1) = \alpha g_t(t_1, x(t_1))$$

minden $t \in [t_0, t_1]$-re, ahol $P = (x(t), w(t), t))$. Ezekből az egyenletekből következik, hogy p és p_0 folytonosak $[t_0, t_1]$-en. Differenciálással kapjuk a p-re és p_0-ra a tételben szereplő differenciálegyenletek fennállását.

IX. Most használjuk ki, hogy $\overline{w}$ függ $\overline{v} \in C_+$ és $w^* \in W$ választásától. Értelmezzük (9)-et $\overline{v}$ megfelelő választásával. Legyen $\overline{v}(\tau) \equiv t_1 - t_0$. Az időtranszformációval $\Delta(\tau) = 0$-ból a $t \mapsto w(t)$ optimális irányítás minden pontjában

$$\lambda L(P) - p(t) f(P) + p_0(t) = 0.$$

Ez megegyezik a maximumelvben szereplő

$$p_0(t) = H(t, x(t), w(t), p(t), \lambda) \tag{10}$$

összefüggéssel. Magát a maximumelvet úgy kapjuk, hogy olyan $\overline{v}$-t választunk, amelyre $\overline{t}$ egy pozitív hosszúságú intervallumon egy adott t^*-ot vesz fel értékként. Vegyük észre, hogy ez minden $t^* \in [t_0, t_1]$-re megtehető. A (9)-ben szereplő $\Delta(\tau) \geq 0$ egyenlőtlenségből – figyelembe véve $\overline{w}$ definícióját is – azt kapjuk, hogy

$$\lambda L(x(t^*), w^*, t^*) - p(t^*) f(x(t^*), w^*, t^*) + p_0(t^*) \geq 0 \tag{11}$$

minden $w^* \in W$, $t^* \in [t_0, t_1]$-re. Azonban, (10) miatt (11) éppen a

$$H(t^*, x(t^*), w(t^*), p(t^*), \lambda) \geq H(t^*, x(t^*), w^*, p(t^*), \lambda)$$

egyenlőtlenség, ami a maximumelv.

VII. Közönséges differenciálegyenletek

Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa. (Függvényeket differenciálni és differenciálegyenleteket megoldani hasznos.)

Newton Leibnizhez, 1676

A differenciálegyenleteket Newton (1642–1727) találta fel, hogy segítségükkel fizikai problémákat oldjon meg. Differenciálegyenletek megoldására használt módszere lényegében a megfelelő vektormező kiegyenesítésén alapult. A XVIII. század folyamán számos differenciálegyenlet típust oldottak meg. Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) munkái vezettek a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek és magasabbrendű egyenletek elméletéhez, és ez a fejlődés vezetett a lineáris algebra számos fogalmának kialakulásához. Például az adjungált operátor is Lagrange-tól származik, aki lineáris differenciáloperátorokra vezette be ezt a fogalmat. A felhalmozódó tapasztalatok végül a XIX. század végén a differenciálegyenletek megoldhatóságának egy „Galois-elméletéhez" vezettek (amely azonban permutációcsoportok helyett Lie-csoportokat használ).

Az általános egyenlettípusokra vonatkozó tételek bizonyítását Cauchy kezdeményezte. A megoldás egzisztenciájának és unicitásának ma szokásos bizonyítása Picard-tól ered, 1890-ből. Teljesen új irányt adott a vizsgálatoknak Poincaré és Ljapunov munkája 1880 körül, akik a megoldásgörbék családjának globális geometriai tulajdonságait kezdték vizsgálni, és így megalkották a differenciálegyenletek kvalitatív elméletét. A kérdéskör szoros kapcsolatban áll a stabilitással, és sok mély problémát fogalmazott meg. Például a Naprendszer stabilitásának kérdését csak a múlt század második felében sikerült megoldani (Kolmogorov–Arnold–Moser-elmélet). A digitális technika és a numerikus eljárások fejlődése még a valós idejű alkalmazásokból is kiszorította a differenciálegyenletek numerikus megoldására a múlt század első felében használt – lényegében fizikai modellezésen alapuló – szoba méretű analóg számítógépeket.

Itt a tárgyalás az alapprobléma vázolása után – előrebocsátva az egzisztencia-unicitás tételt – a kvalitatív fogalmak bevezetésével kezdődik. Az elemi megoldási módszereket „szakácskönyvként" tárgyalom, úgy érzem, így használhatók a legkönnyebben. A fő eredményeket az implicit függvény tételből – így közvetve a szukcesszív approximáció módszerével – vezetem le. A lineáris egyenletek és rendszerek tárgyalása a szokásos. A stabilitást, a numerikus módszereket, és azok stabilitását csak érintjük.

20
Alapfogalmak

A differenciálegyenletek fejlődésében új szakaszt nyitott Poincaré (1854–1912) munkássága. Az ő nevéhez fűződik „a differenciálegyenletek kvalitatív elméletének" létrehozása, amely a komplex függvénytannal együtt a modern topológia kialakulásához vezetett. A differenciálegyenletek kvalitatív elmélete, vagy ahogy ma gyakrabban nevezik, a dinamikus rendszerek elmélete a differenciálegyenletek elméletének legaktívabban fejlődő, s a természettudományokban a leginkább hasznosítható területe. A. M. Ljapunov (1857–1918) klasszikus, a mozgás stabilitáselméletéről szóló munkájától kezdve a terület fejlesztésében nagy szerepet játszottak az orosz matematikusok.

V. I. Arnold [4]

20.1. A differenciálegyenletek osztályozása. *Differenciálegyenlet-rendszer*en egy

$$f_j(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = g_j(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)})$$

$(j = 1, 2, \dots, k)$ alakú egyenletrendszert értünk. Itt az f_j, g_j függvények adottak, és az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlen függvényeket (amelyek a t változó függvényei) keressük. Az adott és az ismeretlen függvények változói és értékei is euklidészi terek vektorai. Az egyenletek átrendezésével elérhetjük, hogy a jobb oldalon nulla álljon. Ha az adott, illetve ismeretlen függvények vektor (azaz különböző l-ekre $\mathbb{K}^l$-beli) értékűek, akkor koordinátákra áttérve egy hasonló, de már skalár értékű függvényekre vonatkozó egyenletrendszert kapunk.

Gyakran célszerű az ismeretlen és az ismert függvényeket egy-egy vektor értékű függvény koordinátáinak tekinteni, így egy

$$f(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = g(t, x, x', \dots, x^{(m)})$$

alakú *differenciálegyenlet*et kapunk. Az egyenlet *rend*je m, a legmagasabb előforduló derivált rendje. Általában feltesszük, hogy az f és g függvények nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, és *megoldás*on egy nem üres G tartományon értelmezett m-szer folytonosan differenciálható $t \mapsto x(t)$ függvényt értünk, amelyre

$$f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))$$

minden $t \in G$-re. Azt mondjuk, hogy az x megoldásnak a $\tilde{x}$ megoldás *folytatás*a, ha $x \subset \tilde{x}$. Egy x megoldást *teljes*nek vagy *nem folytatható*nak nevezünk, ha nincs tőle különböző folytatása.

Ha az ismeretlen függvény t változója skalár, *közönséges*, egyébként *parciális differenciálegyenlet*ről beszélünk. Ez utóbbi esetben $x', x'', \dots, x^{(m)}$ nyilván a parciális deriváltakkal fejezhető ki. A közönséges jelzőt általában elhagyjuk. Csak a valós t változó esetével foglalkozunk.

Közönséges differenciálegyenlet-rendszereknél a gyakorlatban előforduló esetekben az ismeretlen skalár függvények száma és a skalár egyenletek száma megegyezik, azaz $n = k$. Ennek oka, hogy megfelelő mellékfeltételek mellett ebben az esetben az egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása létezik. Az $n < k$ esetben az egyenletrendszer túlhatározott, és nem mindig van megoldása. Az $n > k$ esetben $n - k$ ismeretlen függvényt szabadon választva, az $n = k$ esetet kapjuk. A továbbiakban mindig az $n = k$ esetet fogjuk vizsgálni.

20.2. Explicit és implicit egyenletek. Ha az ismeretlen $x_1, \dots, x_n$ függvényekre vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$x_j^{(m_j)} = f_j(t, x_1, x_1', \dots, x_j, \dots, x_j^{(m_j-1)}, x_{j+1}, x_{j+1}', \dots)$$

$(j = 1, 2, \dots, k)$ alakú egyenletekből áll, és az egyenletek jobb oldalán szereplő függvényekben mindenütt csak x_j-nek m_j-nél alacsonyabb fokú deriváltjai szerepelnek, akkor *explicit* differenciálegyenlet-rendszerről beszélünk, minden más differenciálegyenlet-rendszert *implicit*nek nevezünk. Implicit egyenleteket néha könnyen átalakíthatunk explicit egyenletekké, máskor az átalakítás problémákkal jár, csak lokálisan végezhető el, vagy még úgy sem. A továbbiakban legtöbbször csak explicit egyenletekkel foglalkozunk.

20.3. Átviteli elv. Minden magasabbrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer ekvivalens egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel. Az átvitel a következőképpen történik: ha az x ismeretlen függvénynek az eredeti egyenletrendszerben előforduló legmagasabb deriváltja $x^{(m)}$, akkor bevezetve az

$$x' = x_1, \quad x_1' = x_2, \quad \dots \quad x_{m-2}' = x_{m-1}$$

új ismeretlen függvényeket, és ezeket beírva az eredeti egyenletekbe, azokban csak x, x_1, x_2, …, x_{m-1} és x_{m-1}' fog előfordulni, így a differenciálegyenlet-rendszer rendje csökken, viszont a helyettesítést definiáló összefüggések $m - 1$ új elsőrendű egyenletet adnak. A szokásos $x(\tau) = \xi$, $x'(\tau) = \xi_1$, …, $x^{(m-1)}(\tau) = \xi_{m-1}$ kezdőfeltételből az $x(\tau) = \xi$, $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, \dots, m - 1$ kezdőfeltételek adódnak. Minden ismeretlen függvényre elvégezve a fenti típusú helyettesítést, egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amely az eredeti differenciálegyenlet-rendszerrel ekvivalens. Világos, hogy ha az eredeti differenciálegyenlet-rendszer explicit volt, akkor az új differenciálegyenlet-rendszer is explicit lesz. Parciális differenciálegyenleteknél hasonló eljárás alkalmazható, de a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét előíró új egyenleteket is be kell vezetni.

20.4. Alapprobléma. A fentiek alapján az alábbi közönséges explicit differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in D,$$

ahol $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ egy nyílt halmaz, és $f\colon D \to \mathbb{K}^n$ egy folytonos függvény, amelyre f_x is folytonos D-n. Az egyszerűbb szóhasználat kedvéért a fenti egyenletet *normál egyenlet*nek fogjuk nevezni.Mivel egy komplex vektortér egy kétszer akkora dimenziós valós vektortérrel azonosítható, általában elég a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetre szorítkozni.

Ha $(\tau, \xi) \in D$, és a fenti rendszer olyan x megoldását keressük, amelyre

$$x(\tau) = \xi,$$

akkor *Cauchy-feladat*ról beszélünk. Meg fogjuk mutatni, hogy a fenti feltételek mellett a Cauchy-feladatnak egy és csak egy teljes megoldása van. Feleslegesnek tűnik f_x folytonosságát is megkövetelni, de enélkül nem teljesül az unicitás. Bár ez a feltétel gyengébb feltétellel is helyettesíthető, a gyakorlatban a legjobban kezelhető.

A normál egyenlet jobb oldala úgy fogható fel, hogy a D halmaz minden (t, x) pontjához megad egy $(1, f(t, x))$ irányt (*iránymező*). Az egyenlet megoldása olyan görbe keresését jelenti, amely minden pontban az adott irányban halad. Gyakran az iránymező ábrázolása jól mutatja a differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését.

Jelölje $\varphi(t, \tau, \xi)$ a fenti Cauchy-feladat egyetlen teljes megoldásának az értékét a t pontban. A φ függvényt a differenciálegyenlet *karakterisztikus függvény*ének nevezzük, a $\xi \mapsto \varphi(t, \tau, \xi)$ leképezést pedig a *t és τ közötti leképezés*nek. Jelölje $R(t, \tau)$ ezt a leképezést. R a *rezolvens*. A Cauchy-feladat teljes megoldásának egyértelműségéből $R(\tau, t) = R(t, \tau)^{-1}$ és $t_1 \le t_2 \le t_3$ esetén $R(t_3, t_1) = R(t_3, t_2) \circ R(t_2, t_1)$. Az $S(t) = R(t, 0)$ leképezést *eltolásoperátor*nak nevezzük.

20.5. Autonóm egyenletek. A gyakorlatban igen fontosak azok a differenciálegyenletek, amelyekben az egyenlet nem függ t-től. A természettudományokban általában ilyen egyenletek lépnek fel zárt rendszerek vizsgálatánál, mivel a természeti törvények függetlenek az időtől. Nem autonóm egyenletek lépnek fel, ha két részből álló rendszer egyik részét vizsgáljuk. Bár az egész rendszer fejlődési törvénye nem változik, a második résznek az elsőre gyakorolt hatása függ az időtől.

Az alábbi közönséges, explicit, autonóm differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$x' = f(x), \qquad x \in D$$

ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ez az előző pontbeli egyenlet speciális esete. A D halmaz pontjait a differenciálegyenlet *fázistér*ének nevezzük. Az egyenlet megoldásai a fázistérbeli „pályák”.

Megjegyezzük, hogy az előző pontban tárgyalt egyenlet autonómmá tehető, ha egy új x_{n+1} ismeretlen függvényt vezetünk be úgy, hogy $x_{n+1}(t) = t$ legyen, az új $x'_{n+1} = 1$ egyenlettel és $x_{n+1}(\tau) = \tau$ feltétellel. Gyakran érdemes ezzel a fogással élni.

Autonóm egyenletek esetén egy megoldás minden eltoltja is megoldás. Így elég egy, mondjuk a $\tau = 0$ kezdeti értékhez tartozó teljes megoldásokat meghatározni. A τ és t közötti leképezés is csak a $t - \tau$ különbségtől függ, így az $S(t)$ eltolásoperátorok egyértelműen meghatározzák a rezolvenst. A rezolvens tulajdonságaiból $t_1, t_2 \ge 0$ esetén $S(t_1 + t_2) = S(t_2) \circ S(t_1)$.

Látható, hogy egy autonóm differenciálegyenlet megadása egy folytonosan differenciálható vektormező megadásával ekvivalens. Az autonóm egyenlet megoldásakor olyan $x\colon I \to D$ görbét keresünk, amelynek minden t pontjában a $x'(t)$ érintővektor megegyezik az f vektormező $x(t)$ pontbeli vektorával. Gyakran a vektormező ábrázolása jól mutatja a differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését. Vegyük észre, hogy az iránymező nem más, mint az autonóm átíráshoz tartozó vektormező.

20.6. Autonóm egyenletek ekvivalenciája. Az $x' = f(x), x \in D$ és $y' = g(y), y \in E$ autonóm normál egyenleteket *differenciálhatóan ekvivalens*eknek nevezzük, ha van olyan D-t E-re képező T diffeomorfizmus, hogy x pontosan akkor megoldása az első egyenletnek, ha $T \circ x$ megoldása a másodiknak. A differenciálható ekvivalencia meglehetősen erős megkötés. A gyengébb topologikus ekvivalenciát nem definiálhatjuk hasonlóan, mivel ha T csak homeomorfizmus, akkor $T \circ x$ nem differenciálható. Jelölje $S(t)$ az első, $Q(t)$ második egyenlet esetén az eltolásoperátort. A két egyenletet *topologikusan ekvivalens*nek nevezzük akkor, ha van olyan D-t E-re képező T homeomorfizmus, amelyre $T \circ S(t) = Q(t) \circ T$ minden $t \in \mathbb{R}$-re. Még gyengébb feltételt ad az orbitális ekvivalencia, amely csak azt fejezi ki, hogy a fázistérbeli pályák hasonlóak. A két egyenletet *orbitálisan ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan D-t E-re képező T homeomorfizmus, hogy $\xi \in D$, $\eta = T(\xi)$ esetén, ha x az első egyenlet $x(0) = \xi$ feltételnek eleget tévő teljes megoldása, y pedig a második egyenlet $y(0) = \eta$ feltételnek eleget tévő teljes megoldása, akkor van olyan s, az x értelmezési tartományát az y értelmezési tartományára képező monoton növekedő homeomorfizmus, hogy $y \circ s = T \circ x$.

Nevezetes tény, hogy ha $f(\xi) \neq 0$, akkor a ξ pontnak van olyan környezete, amelyen lokálisan az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet differenciálhatóan ekvivalens egy olyan differenciálegyenlettel, amelynek a jobb oldala konstans. Ez az úgynevezett *kiegyenesítési tétel*.

→ **20.7. Feladat [5].** Adjunk meg olyan $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre az $f(t, x, x') = 0$ differenciálegyenletnek nincs megoldása.

→ **20.8. Feladat [5].** Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerekkel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert:

(1) $x'' + 2x + y'' + 3y' + y = 0$, $x''' + y' = 0$;

(2) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$, $x''(0) = 1$.

→ **20.9. Feladat [10].** Adjunk meg olyan differenciálegyenlet-rendszert, amelynek az adott függvények a megoldásai:

(1) $x = at$;

(2) $x = at^2$;

(3) $x = ae^{t/a}$;

(4) $x^2 + t^2 = a^2$;

(5) $x^2 + t^2 = at$;

(6) $(t - a)^2 + x^2 = 1$;

(7) $x = at + b$;

(8) $x = at^2 + a^2$;

(9) $x = at^2 + bt + c$;

(10) $(t - a)^2 + (x - b)^2 = c^2$;

(11) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$;

(12) $t^2 + x^2 + y^2 = a^2$, $t + x + y = b$.

20.10. Feladat (N. N. Konsztantyinov) [13]. Az A pontból a B pontba két, egymást nem metsző út vezet. Tudjuk, hogy két gépkocsi, amelyek egy $2r$-nél rövidebb kötéllel vannak összekötve, és amelyek a két különböző úton indulnak el A-ból B-be, képesek útjukon végigmenni úgy, hogy nem szakítják szét a kötelet. Képes-e két kör alakú, r sugarú szénásszekér elkerülni egymást, ha szemben haladnak?

→ **20.11. Feladat [12].** Tanulmányozzuk az alábbi differenciálegyenlet-rendszerekhez tartozó iránymezőket, illetve vektormezőket. Mit mondhatunk a megoldásokról?

(1) $x' = kx$ (szaporodás);

(2) $x' = kx^2$ (robbanás);

(3) $x' = (1-x)x$ (szaporodás versengéssel);

(4) $x' = (1-x)x - c$ (halászat);

(5) $x' = f(t)$;

(6) $x'' = -x$ (kis rezgések);

(7) $x'' = -\sin x$ (inga);

(8) $x' = kx - axy$, $y' = -ly + bxy$ (ragadozó–áldozat Lotka–Volterra-modellje);

(9) $x'' = 0$ (szabad tömegpont);

(10) $x' = x$, $y' = ky$;

(11) $x'' = -x$, $y'' = -y$ (gömbi inga).

∗ **20.12. Feladat [10].** Néhányszori differenciálással, helyettesítésekkel és egyes tagok kiküszöbölésével redukáljuk differenciálegyenletre az alábbi függvényegyenleteket:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cauchy-egyenlet);

(2) $f(x+y) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cauchy exponenciális egyenlete);

(3) $f(xy) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cauchy hatvány egyenlete);

(4) $f(xy) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cauchy logaritmikus egyenlete);

(5) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (normanégyzet-egyenlet);

(6) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (d'Alembert-egyenlet).

21
Elemi megoldási módszerek

Amikor bebizonyították az algebrai egyenletek gyökvonással való megoldhatatlanságát, Liouville (1809–1882) kidolgozott a differenciálegyenletekre egy analóg elméletet, megállapítva egy sor egyenlet (ezen belül olyan klasszikus egyenlet, mint a másodrendű lineáris egyenlet) megoldhatatlanságát elemi függvényekkel és kvadratúrával. Később S. Lie (1842–1899), elemezve az egyenletek kvadratúrával való integrálhatóságát, felismerte a diffeomorfizmus-csoportok részletes tanulmányozásának szükségességét (ma e csoportok az ő nevét viselik). Így nőtt ki a differenciálegyenletek elméletéből a modern matematika egyik leggyümölcsözőbb területe, amelynek további fejlődése szorosan összefonódott egészen más területek fejlődésével (a Lie-algebrákat korábban már Poisson (1781–1840) és különösen Jacobi (1804–1851) tanulmányozta).

V. I. Arnold [4]

21.1. Megjegyzés. Ha egy differenciálegyenletet meg akarunk oldani, akkor alkalmas helyettesítéssel igyekszünk egyszerűbb alakra hozni. Hogy ez lokálisan általában lehetséges, azt mutatja a kiegyenesítési tétel. Sajnos, a tétel bizonyítása nem ad módszert a kiegyenesítő diffeomorfizmus megkeresésére. Így csak azt tehetjük, hogy megfelelő helyettesítésekkel az egyenletet megpróbáljuk olyan alakra hozni, amelynek megoldását már ismerjük. Autonóm egyenleteknél ez az eljárás annak felel meg, hogy az egyenlethez tartozó vektormezőt úgy transzformáljuk, hogy egy ismert megoldású egyenlettípus vektormezőjével egyezzen meg. Sokszor a transzformáció csak lokálisan végezhető el. Ezzel az eljárással „elég sok” megoldását megtalálhatjuk az egyenletnek. Annak vizsgálata, hogy minden megoldást megkaptunk-e, sokszor célszerűbben elvégezhető az egzisztencia-unicitás tétel felhasználásával, mint a megoldási módszer pontosabbá tételével. Ennek megfelelően, a továbbiakban a megoldási módszereket nem próbáljuk meg nehézkes tételekké átfogalmazni, és a feladatokban az „*oldjuk meg*” kifejezés csak azt jelenti, hogy keressünk „elég sok” megoldást.

21.2. Szeparábilis egyenletek. Ha a differenciálegyenlet *szeparábilis*, azaz $f(x)x' = g(t)$ alakra hozható, akkor a helyettesítéses integrálásra vonatkozó tétel szerint a megoldásokat az $F(x) = G(t) + C$ összefüggésből kaphatjuk, ahol F a f, G a g primitív függvénye. Az $x' = f(x/t)$ alakú *homogén egyenlet* $y = x/t$ helyettesítéssel szeparábilisra vezethető vissza. (Néha érdemes az általánosabb $y = x^\xi t^\tau$ helyettesítéssel próbálkozni, hátha szeparábilis egyenletet kapunk.) Ugyancsak szeparábilis egyenletre vezethető vissza az $x' = f(at + bx)$ alakú egyenlet $y = at + bx$ helyettesítéssel. Az

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$$

alakú egyenlet ha $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, akkor az előző típusba tartozik, egyébként pedig alkalmas α és β választással $t = t_1 + \alpha$, $x = x_1 + \beta$ helyettesítéssel az egyenesek metszéspontját a koordináta-rendszer kezdőpontjába eltolva, homogénné válik.

→ **21.3. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi egyenletek összes teljes megoldását:

(1) $x' = x$;
(2) $x' = \sqrt[3]{|x|}$;
(3) $x'x + t = 0$;
(4) $x'' = 0$;
(5) $x^{(m)} = f(t)$.

→ **21.4. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $1 + x^2 + txx' = 0$;
(2) $tx(1 + t^2)x' = 1 + x^2$;
(3) $(1 + x^2) = tx'$;
(4) $t/(1 + x) - xx'/(1 + x) = 0$, $x(1) = 1$;
(5) $y' \sin x = y \ln y$, $y(0) = 1$;
(6) $(1 + e^x)yy'x = e^x$, $y(1) = 1$;
(7) $x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\sqrt{1 - x^2}\, dy = 0$, $y(0) = 1$;
(8) $2\sqrt{y}\, dx = \, dy$, $y(0) = 1$;
(9) $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$, $y(1) = 1$;
(10) $(a^2 + y^2)\, dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\, dy = 0$, $y(a) = 0$;
(11) $2x \ln y + x^2 y'/y = 0$;
(13) $y' = \sin y$;
(14) $y' = 10^y$;
(15) $y' = 10^{x+y}$;
(16) $xy' + y = \sin x$;
(17) $xy^2(xy' + y) = a^2$.

→ **21.5. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x' = (t + x)/(t + 2x)$;
(2) $x' = (x^2 - t^2)/(2tx)$;
(3) $x' = (x^2 + t^2)/(2tx)$;
(4) $(t^2 + x^2)x' = tx$;
(5) $(x + y)\, dx - (x - y)\, dy = 0$;
(6) $(x + y)\, dx + (x - y)\, dy = 0$;
(7) $(x + y)\, dx + (x + y)\, dy = 0$;
(8) $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\, dx + (2x^2 + 3xy)\, dy = 0$;
(9) $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$;
(10) $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$;
(11) $2xyy' = 3x^2 - y^2$;
(12) $y^2\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0$;
(13) $y^3\, dx + 2(x^2 - xy^2)\, dy = 0$;

(14) $(x^2 - y^4)y' = xy$;
(15) $2y' + y^2 + 1/x^2 = 0$;
(16) $x^2(y' + y^2) = a(xy - 1)$;
(17) $(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})\,dx + 2x\,dy = 0$.

→ **21.6. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
(1) $x' = (t - x)^2 + 1$;
(2) $x' = \sin(t - x)$;
(3) $x' = at + bx + c$;
(4) $x'^2 = at + bx + c$;
(5) $(t + x)^2x' = a^2$;
(6) $x' = (at + bx + c)^2$.

→ **21.7. Feladat [10].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
(1) $y' = 2(y + 2)^2/(x + y - 1)^2$;
(2) $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$;
(3) $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$;
(4) $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

21.8. Lineáris egyenletek. Az $x' = f(t)x + g(t)$ *inhomogén lineáris egyenlet* minden teljes megoldása előáll $c\varphi + \varphi_0$ alakban, ahol φ_0 az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldása, φ pedig az $x' = f(t)x$ *homogén lineáris egyenlet* egy nem nulla teljes megoldása. (Ezt később bebizonyítjuk.) Utóbbi szeparábilis, így megoldásait könnyen megkaphatjuk. Az inhomogén egyenlet egy megoldását mindig megkaphatjuk a „konstans variálásával" $c(t)\varphi(t)$ alakban, ahol φ a homogén egyenlet egy nem nulla megoldása. (Ezt is bebizonyítjuk később.) Néha az egyenlet t-ben, mint x függvényében lineáris. Lineárisra visszavezethető az

$$x' + f(t)x + g(t)x^\alpha = 0$$

Bernoulli-egyenlet $y = x^{1-\alpha}$ helyettesítéssel. Az

$$x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

Riccati-egyenlet egy φ megoldását ismerve, $x = y + \varphi$ helyettesítéssel y-ra egy Bernoulli-egyenletet kapunk. Egyébként egy Riccati-egyenletből

$$x = \frac{y'}{y}\frac{1}{f(t)}$$

helyettesítéssel egy másik Riccati-egyenletet kapunk, amelyet néha könnyebb megoldani.

→ **21.9. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
(1) $tx' + 2x = 3t$, $x(0) = 0$;
(2) $tx' + 3x = t^2$;
(3) $x' + ax = e^{mt}$;

(4) $(1+t^2)x' - 2tx = (1+t^2)^2$;

(5) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

(6) $y' + x^2y = x^2$, $y(0) = 1$;

(7) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;

(8) $y' - 1 = e^{x+2y}$;

(9) $xy' + 1 = e^y$.

→ **21.10. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x' + x = -1/x$;

(2) $x' + x + x^2 = 0$;

(3) $xy' + y = y^2 \ln x$;

(4) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

(5) $y^{n-1}(ay' + y) = x$;

(6) $y' - 3y/(2x) = 3x\sqrt{y}/2$;

(7) $3y^2y' - ay^3 = x + 1$.

→ **21.11. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$;

(2) $y' + y^2 = 2x^{-2}$;

(3) $y' + y^2 = x^{-4}$;

(4) $y' = e^x y^2 - y + e^{-x}$;

(5) $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$;

(6) $y' + Ay^2 = Bx^m$;

(7) $xy' + 3y + y^2 = x^2$.

21.12. Egzakt egyenletek. Az $f_1(t,x) + f_2(t,x)x' = 0$ egyenletet *egzakt*nak nevezzük, ha van olyan $(t,x) \mapsto F(t,x)$ valós értékű függvény, amely primitív függvénye az $f = (f_1, f_2)$ vektor-vektor függvénynek, azaz $F_t = f_1$, $F_x = f_2$. Egy egzakt egyenlet megoldásai a $F(t,x) = c$ egyenletből kaphatók meg. Az egyenlet egzakt voltának ellenőrzésére és a F függvény megkeresésére lehetőséget adnak a vektoranalízisnél tanult tételek: ha f_1, f_2 differenciálhatóak, akkor $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ a primitív függvény létezésének szükséges feltétele, és ha D egyszeresen összefüggő tartomány, akkor ez a feltétel elégséges is. A primitív függvény görbe menti integrálással vagy az $F_t = f_1$, $F_x = f_2$ egyenletrendszer megoldásával megkereshető.

21.13. Integráló szorzó. Ha egy $f_1(t,x) + f_2(t,x)x' = 0$ egyenlet nem egzakt, esetleg egy $\mu(t,x) \neq 0$ függvénnyel végigszorozva azzá tehető. Az összes olyan μ függvény meghatározásának problémája, amellyel az egyenletet szorozva, az egzakt lesz, egy parciális differenciálegyenletre vezet, amelynek megoldása nehezebb, mint az eredeti egyenleté. Egy ilyen μ függvényt viszont gyakran találhatunk, ha valamilyen speciális alakban keressük, például csak t-től függ, csak x-től függ, csak tx-től függ, stb.

→ **21.14. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $(2x + y + 1)\,dx + (x + 3y + 2\,dy = 0;$

(2) $y\,dx + (2x^2y - x)\,dy = 0;$

(3) $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^2 - 3x^2y) = 0;$

(4) $t\,dt + x\,dx + (t^2 + x^2)t^2\,dt = 0;$

(5) $\operatorname{tg} x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0;$

(6) $x(1 + tx)\,dt - t\,dx = 0;$

(7) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx - 2y\,dy = 0;$

(8) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0;$

(9) $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0;$

(10) $xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0;$

(11) $(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0;$

(12) $(3y^2/x - y/x^2 + 2y)\,dx + (8y^2/x + 1/x + 3y)\,dy = 0;$

(13) $(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0;$

(14) $(y^3 - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0;$

(15) $(xy + y^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0;$

(16) $x(1 - y)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0;$

(17) $(y + x^2y^3)\,dx + (x^3y^2 - 2x^2y + x)\,dy = 0;$

(18) $\cos x + e^x \sin y + e^{-x}y' \cos y = 0;$

(19) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0.$

21.15. Implicit egyenletek. Az

$$x = f(t, x')$$

egyenlet a $p = x'$ paraméter bevezetésével

$$x = f(t, p) \tag{1}$$

alakú, amit differenciálva,

$$\frac{dx}{dt} = p = g\Big(t, p, \frac{dp}{dt}\Big)$$

alakú egyenletet kapunk. Ezt megoldva, a kapott

$$h(t, p, c) = 0$$

alakú összefüggés, és (1) együtt a megoldást adják a p paraméter függvényében. Szükség esetén p a két egyenletből kiküszöbölhető.

Speciálisan, az

$$x = tf(x') + g(x')$$

Lagrange-egyenlet megoldható ezzel a módszerrel, mert t-re, mint p függvényére lineáris egyenletet kapunk.

Hasonlóan oldható meg a

$$t = f(x, x')$$

egyenlet is a $p = x'$ paraméter bevezetésével:

$$t = f(x, p), \tag{2}$$

amiből x szerinti differenciálással

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p} = g\Big(x, p, \frac{dp}{dx}\Big)$$

alakú differenciálegyenletet kapunk. Ha ennek megoldása

$$h(x, p, c) = 0,$$

akkor ez az összefüggés és (2) együtt a megoldás egy paraméteres előállítása.

Az

$$f(tx' - x) = g(x')$$

Clairout-egyenlet megoldásai lineárisak és az

$$f(tc - x) = g(c)$$

implicit egyenletből kaphatók. Ha az egyenletnek van ezektől különböző megoldása, amelyre tehát $x'' \neq 0$, akkor azt az egyenlet differenciálása, és x''-vel való osztás után kapott

$$f'(tx' - x)t - g'(x') = 0$$

egyenletből, és az eredeti egyenletből kiküszöbölve x'-t, kaphatjuk meg.

→ **21.16. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $t = xx' - tx'^2$;

(2) $x = 2tx' + xx'^2$;

(3) $x = 2tx' - ax'^3$;

(4) $x = 2tx' - x'^2$;

(5) $(tx' - x)^2 - x'^2 - 1 = 0$;

(6) $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$;

(7) $y'^3 - 3y' + 1 = 0$;

(8) $x(1 + y'^2 = 1$;

(9) $y = y' \ln y'$;

(10) $y = xy' + y'^2$.

21.17. Magasabbrendű egyenletek. Az

$$f(t, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

egyenlet rendje a nyilvánvaló $y = x'$ helyettesítéssel csökkenthető.

Hasonlóan, az

$$f(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

autonóm egyenlet rendje is csökken, ha megoldását $x' = y(x)$ alakban keressük.

Ha az

$$f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

egyenlet $x \mapsto ax$ helyettesítéssel nem változik, akkor $x = e^y$ helyettesítéskor rendje csökken.

Hasonlóan, ha az egyenlet $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik, akkor $t = e^s$ helyettesítéssel autonóm lesz.

Végül, ha az egyenlet a $t \mapsto at$, $x \mapsto a^p x$ helyettesítések elvégzése után ugyanaz marad, akkor az $x = t^p y$ helyettesítés elvégzése után olyan egyenletet kapunk, amely a $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik.

→ **21.18. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x'' = \sin t/t$;

(2) $x'' = e^x$;

(3) $tx'' = x' + t\sin(x'/t)$;

(4) $xx'' - 2xx' \ln x = x'^2$;

(5) $x'' = 2xx'$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

(6) $x'' = x'^2 - x$, $x(1) = -1/4$, $x'(1) = 1/2$;

(7) $x'' = x'e^x$;

(8) $tx'' = x'$, $x(0) = x'(0) = 1$;

(9) $t - x''e^{x''} = 0$;

(10) $x''' = x''^2$;

(11) $x''' = 2xx'$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 4{,}5$;

(12) $yy''^2 = 1$;

(13) $y'' = ae^y$;

(14) $x = y'' + e^{y''}$;

(15) $x = y''e^{y''}$;

(16) $y'^2 + y''^2 = 1$.

→ **21.19. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $tx'' = 2xx'$;

(2) $(1-t)(xx'' - x'^2) + t^2x^2 = 0$;

(3) $t^2x'' + 3tx' = 1/x^3t^4$;

(4) $x' = t/(t^2x^2 + x^5)$;

(5) $x'(x'+x) = t(t+x)$;
(6) $(t^2-t^3)x'' + (2t^2-4t)x' + (6-2t)x = 0$;
(7) $y'' - 2y/x^2 = 0$;
(8) $xy'' = y' + x\sin(y'/x)$.

21.20. Vegyes módszerek. Ha tudjuk, vagy sejtjük, hogy az egyenlet megoldásai milyen alakúak, akkor a *határozatlan együtthatók módszerével* találhatunk megoldásokat. A megoldásokat például polinom, exponenciális függvény, ezek szorzatainak lineáris kombinációja, stb. alakban kereshetjük, és a differenciálegyenletből egy egyenletrendszert kapunk az együtthatókra. A módszer egyik esete, amikor a megoldást végtelen sor, például Taylor-sor alakban keressük.

Gyakran célszerű t-t mint x függvényét keresni. Ekkor

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-3}\frac{d^2t}{dx^2}, \quad \dots.$$

Ha az egyenlet szorzattá alakítható, akkor felhasználva, hogy a szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, két egyszerűbb egyenletet kapunk.

Máskor a differenciáloperátort lehet szorzattá alakítani. Ha $P(x) = Q(R(x))$, akkor a $P(x) = f(t)$ egyenlet megoldása a $Q(y) = f(t)$, $R(x) = y(t)$ egyenletek megoldásával ekvivalens.

Néha megtörténik, hogy az eredeti egyenletet differenciálva, egy egyszerűbben megoldható új egyenletet kapunk. Az új egyenletnek nem minden megoldása megoldása a réginek.

→ **21.21. Feladat [12].** Határozzuk meg az alábbi egyenletek egy megoldását:
(1) $x'' - 2x/t^2 = 7t^4 + 3t^3$;
(2) $x'' + x = 0$;
(3) $x'' + (1+2t)x'/2t - x/2t^2 = 0$;
(4) $2xx'' - x'^2 = (x' - tx'')^2/3$;
(5) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$;
(6) $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$;
(7) $x' = t^2 - x^2$, $x(0) = 1$;
(8) $x' = x^2 - t$, $x(0) = 1$.

21.22. Megjegyzés. Speciális egyenletek integrálására nagyon sok példa létezik. Kamke [77] könyve például kb. 1600 egyenletet tartalmaz. Ezen egyenletek sora tovább bővíthető, ha egy már megoldott egyenletben valamilyen helyettesítést alkalmazunk. Mindez azt az érzést keltheti, hogy csak ügyességünkön múlik, hogy egy adott differenciálegyenletet meg tudunk-e oldani. Ez nincs így. Mint Liouville bebizonyította, egészen egyszerű egyenletek, például az $x' = x^2 - t$ egyenlet általános megoldása sem írható fel elemi és algebrai függvények valamint integráljaik véges kombinációjaként. Ha a fent megadott egyszerű módszerekkel nem sikerül valamely egyenletet megoldani, vagy a számítások nagyon hosszadalmasak, akkor komputer algebrai rendszerek (Maple, MuPAD, MATHEMATICA, muMATH, REDUCE, MACSYMA, stb.) segíthetnek. Ha ezek sem vezetnek célra, Zwillinger [183] kézikönyve jó áttekintést ad megoldott egyenletekről, hasznos megoldási módszerekről és transzformációkról. Ha ez sem vezet célra, vagy a megoldás túl bonyolult és így használhatatlan, akkor közelítő módszereket használhatunk.

∗ **21.23. Operátorszámítás.** Oliver Heaviside angol mérnök differenciálegyenletekkel foglalkozva, egyszerű és hatékony számítási módszert talált ki. Módszerét egy példán mutatjuk be. Jelölje D a differenciálás „operátorát”, és tegyük fel, hogy a $D^2x + 2Dx + x = t^2 - 4t + 1$ differenciálegyenletet szeretnénk megoldani. „Kiemelve” x-et, és „osztva” $D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$-nel, majd $1/(D+1)^2$-t „sorbafejtve”,

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \ldots)(t^2 - 4t + 1) \\ &= t^2 - 4t + 1 - 2(2t - 4) + 3 \cdot 2 \\ &= t^2 - 8t + 15, \end{aligned}$$

ami egy partikuláris megoldás. Módszerét sikerrel alkalmazta bonyolultabb esetekben is. Heaviside módszere matematikailag megalapozható a Fourier- (vagy Laplace-) transzformáció segítségével: az egyenlet transzformálása – konstanstól eltekintve – a független változóval való szorzásba viszi át a differenciálást, így az osztás és a sorbafejtés jogossá válik, és az inverz transzformációt alkalmazva, kapjuk az eredmény. Egy másik, elegáns módszer Heaviside ötletének megmentésére a Mikusiński-féle operátorszámítás: Vezessük be a lokálisan integrálható, az origótól balra nullát felvevő valós változós, komplex értékű függvények körében a konvolúciót, mint szorzást: egy gyűrűt kapunk. A Θ Heaviside-függvénnyel való szorzásra $(\Theta * f)(t) = \int_0^t f(t)\,dt$, így Θ az „integrálás”. Azt várjuk, hogy ennek multiplikatív inverze a differenciálás, ez azonban nincs a gyűrűben, amely nem is egységelemes. Mivel a Titchmarsh-tétel egy, az ezen jegyzetben szereplőnél erősebb változata szerint – a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva – a fenti gyűrű nullosztómentes, azaz $f * g = 0$ esetén $f = 0$ vagy $g = 0$, ugyanúgy, ahogy az egész számokból képezzük a racionális számokat, ennek a gyűrűnek is képezhetjük a hányadostestét, amelynek elemeit, az (f, g) párokat f/g alakban írjuk ($g \not\equiv 0$), ezek a *Mikusiński-operátor*ok. Az f_1/g_1 és f_2/g_2 hányadost akkor azonosítjuk, ha $f_1 * g_2 = f_2 * g_1$. A Mikusiński-operátorok között ott vannak az eredeti függvények, mint $(f * g)/g$ alakú hányadosok, a komplex számok, mint $(\alpha g)/g$ alakú hányadosok (g/g az egységelem), a differenciálás $D = g/(\Theta * g)$ operátora és hatványai, így ebben a testben a Heaviside-féle számítások elvégezhetők. Értelmezhető például $(D + \alpha)^\beta$, ha α és β komplex számok, és segítségével megoldhatók az

$$(\alpha_2 t + \beta_2)x'' + (\alpha_1 t + \beta_1)x' + (\alpha_0 t + \beta_0)x = 0$$

*Laplace-féle differenciálegyenlet*ek ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$). Az operátorszámítás felhasználható bizonyos parciális differenciálegyenletek, például az egydimenziós hővezetési és hullámegyenlet, valamint a telegráfegyenlet megoldására is. Az operátorszámítás részletes tárgyalása megtalálható Mikusiński [116] könyvében. Megjegyezzük, hogy az operátorszámítás kapcsolatban áll a disztribúcióelmélettel is.

∗ **21.24. Differenciák.** Egy skalár változós, vektor értékű $t \mapsto x(t)$ függvény esetén, ha $h \neq 0$ skalár, értelmezzük a Δ_h *differenciaoperátor*t a

$$(\Delta_h x)(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

összefüggéssel. Ez az operátor az x függvényhez a h lépésközzel képzett $\Delta_h x$ *első differenciá*t rendeli. A *magasabb differenciá*kat a $\Delta_h^2, \Delta_h^3, \ldots$ operátorok alkalmazásával kapjuk.

Sok könyv elhagyja a h-val való osztást, mi azért használjuk, mert a differenciákat elsősorban differenciálhányadosok közelítésére fogjuk alkalmazni. Az osztott differenciák nyilván a differenciák általánosításai, a kapcsolatot leíró

$$\Delta_h^n x(t) = n! x(t; t+h; t+2h; \ldots; t+nh), \quad n = 0, 1, \ldots$$

összefüggés teljes indukcióval könnyen adódik. Többváltozós függvények esetén *parciális differenciá*kat képezhetünk, egy kivételével a többi változót rögzítve, és az így kapott egyváltozós függvény differenciáját képezve.

∗ **21.25. Differenciaegyenletek.** Ha a független változó nem változik folyamatosan, hanem csak diszkrét értékeket vesz fel, gyakran lépnek fel differenciaegyenletek. Differenciálegyenletek esetén is, a deriváltakat differenciákkal közelítve, differenciaegyenleteket kapunk. A differenciaegyenletek sokszor a megfelelő differenciálegyenletekkel analóg módon kezelhetők. Vegyük észre, hogy egy differenciaegyenlet csak egy rács pontjaiban felvett függvényértékek között fejez ki kapcsolatot, más pontokban a függvényértékek ezektől teljesen függetlenül alakulhatnak. Lineáris helyettesítéssel elérhetjük, hogy a rács pontjai az egész koordinátájú pontok legyenek, így elég ennek az esetnek a tanulmányozására szorítkozni (ekkor a lépésköz egységnyi). Másik fontos észrevétel, hogy a

$$\Delta_h^0 x, \Delta_h^1 x, \ldots, \Delta_h^n x$$

differenciák egy adott pontban felvett értékei kifejezhetők az adott pontban és n darab szomszédos rácspontban felvett függvényértékekkel, és megfordítva, az ezekben a rácspontokban felvett függvényértékek kifejezhetők a fenti differenciák adott pontban felvett értékeivel. Ezeket az észrevételeket felhasználva, differenciaegyenleteket gyakran a rácspontokban felvett függvényértékek közötti összefüggésként írunk fel, közönséges differenciaegyenleteket pedig egy sorozat tagjai közötti összefüggésként.

∗ **21.26. Feladat [8].** Oldjuk meg az

$$x_{t+1} + \frac{t+2}{t+1} x_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **21.27. Feladat [9].** Oldjuk meg az

$$x_{t+2} - (2t+1)x_{t+1} + (t^2+t)x_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **21.28. Feladat [10].** Desztillációs probléma vizsgálatánál, elméleti tányérszám számításakor az

$$x_{t+1}x_t + ax_{t+1} + bx_t + c = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

*Ricatti-differenciaegyenlet*hez jutunk. Oldjuk meg.

22
Általános eredmények

Jól ismert, hogy Cauchy volt az első matematikus, aki differenciálegyenletek általános *típusaira, amelyekre explicit megoldás nem kapható, bizonyított be egzisztencia tételeket. Stratégiája az volt, hogy tekintette a különböző módszereket, amelyeket korábban vezettek be numerikus számolások céljára, és megmutatta, hogy ezek a módszerek valóban konvergens közelítő eljárást adnak, amelynek a határértéke megoldás.*

Jean Dieudonné [28]

22.1. Ekvivalens integrálegyenlet. *20.4 jelöléseivel, de csak f folytonosságát feltéve, egy τ-t tartalmazó nyílt intervallumon értelmezett $x\colon I \to \mathbb{K}^n$ függvény pontosan akkor megoldása a Cauchy-feladatnak, ha x folytonos és*

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(t, x(t))\,dt, \quad \text{ha} \quad t \in I.$$

Bizonyítás. Ha x megoldása a Cauchy-feladatnak, akkor integrálással kapjuk, hogy az integrálegyenlet fennáll. Megfordítva, ha az x folytonos függvény eleget tesz az integrálegyenletnek, akkor a jobb oldalon az integrandusz folytonos, tehát x folytonosan differenciálható. Mindkét oldalt differenciálva, kapjuk hogy x megoldása a differenciálegyenletnek. A $t = \tau$ helyettesítés az integrálegyenletben mutatja, hogy x megoldása a Cauchy-feladatnak is.

22.2. Szukcesszív approximáció. Az előző tétel azért fontos, mert az ekvivalens integrálegyenlet gyakran sokkal jobban kezelhető, mint a differenciálegyenlet. Például, ha $(\tau, \xi) \in D$, és $a, b, K > 0$ valós számok úgy, hogy

$$C = \big\{(t,x)\colon |t-\tau| \le a, |x-\xi| \le b\big\} \subset D,$$

továbbá

$$\sup\Big\{\big|f(t,x)\big|\colon (t,x) \in C\Big\} < K,$$

legyen $c = \min\{a, b/K\}$. Megmutatható, hogy az integrálegyenlet jobb oldala az $[\tau-c, \tau+c]$-n értelmezett, $\big|x(t) - \xi\big| \le b$ feltételnek eleget tévő folytonos függvények terének egy olyan leképezése önmagába, amelynek valamelyik hatványa kontrakció, így alkalmazható rá a Banach-féle fixponttétel. Azt kapjuk, hogy például az $x_0 \equiv \xi$ konstans függvényből kiindulva, és képezve a

$$x_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f(t, x_n(t))\,dt$$

függvénysorozatot, x_n egyenletesen konvergál egy x függvényhez, amely megoldása az integrálegyenletnek, így a Cauchy-feladatnak is. Lásd például Losonczi [104] jegyzetét, 42–44. oldal. Egyébként ez az úgynevezett *szukcesszív approximációs* módszer bizonyos

egyenletek esetén alkalmas a pontos megoldás közelítésére, illetve annak meghatározására is. A szukcesszív approximáció módszerét használja a megoldások létezésének és egyértelműségének bizonyítására, a megoldások viselkedésének tanulmányozására a legtöbb, differenciálegyenletekkel foglalkozó tankönyv, például Pontrjagin [130] munkája. Itt az alapvető eredmények bizonyítását az implicit függvény tételre alapozzuk, amely ugyancsak a Banach-féle fixponttételre vezethető vissza. Megjegyezzük, hogy több eredmény kicsit gyengébb feltételek mellett is bebizonyítható: f_x folytonossága helyett elég megkövetelni, hogy f lokálisan a második változójában Lipschitz-feltételnek tegyen eleget.

Ha a megoldások kezdeti értékektől és paraméterektől való függésével nem kívánunk foglalkozni, akkor a közönséges differenciálegyenletek elméletének főtétele helyett Peano tételét is használhatjuk a Cauchy-feladat megoldhatóságának bizonyítására.

→ **22.3. Feladat [8].** Szukcesszív approximációval oldjuk meg az alábbi Cauchy-feladatokat:

(1) $x' = 2tx$, $x(0) = 1$;

(2) $x' = x^2 - t$, $x(0) = 1$.

22.4. A közönséges differenciálegyenletek elméletének főtétele. *Legyenek X és P euklidészi terek, $D \subset \mathbb{R} \times X \times P$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to X$ egy folytonos függvény, amelyre f_x is folytonos. Ha $(\tau_0, \xi_0, p_0) \in D$, akkor létezik olyan $r > 0$, és olyan $|t-\tau| < r$, $|\tau - \tau_0| < r$, $|\xi - \xi_0| < r$, $|p - p_0| < r$ esetén értelmezett, X-beli értékű $(t, \tau, \xi, p) \mapsto x(t, \tau, \xi, p)$ folytonos függvény, amelyre*

$$x_t(t, \tau, \xi, p) = f(t, x(t, \tau, \xi, p), p),$$

ha $|t - \tau| < r$ és $x(\tau, \tau, \xi, p) = \xi$, továbbá

(1) *x folytonosan differenciálható ξ szerint és fennáll a*

$$x_{\xi t}(t, \tau, \xi, p) = f_x(t, x(t, \tau, \xi, p), p) x_\xi(t, \tau, \xi, p),$$
$$x_\xi(\tau, \tau, \xi, p) = \mathbb{I}$$

variációs egyenlet;

(2) *ha f_p is folytonos, akkor x folytonosan differenciálható p szerint és fennáll a*

$$x_{pt}(t, \tau, \xi, p) = f_x(t, x(t, \tau, \xi, p), p) x_p(t, \tau, \xi, p) + f_p(t, x(t, \tau, \xi, p), p),$$
$$x_p(\tau, \tau, \xi, p) = 0$$

variációs egyenlet;

(3) *ha f egy $\mathcal{C}^m$-leképezés, akkor x is $\mathcal{C}^m$-leképezés.*

Ha az egyenletet és a kezdeti feltételt differenciáljuk ξ, illetve p szerint, akkor a variációs egyenleteket kapjuk a megfelelő kezdeti feltétellel, de a jobb oldalon $x_{t\xi}$ illetve x_{tp} áll. Így az $x_{\xi t}$ és $x_{t\xi}$, illetve x_{pt} és x_{tp} parciális deriváltak léteznek és megegyeznek.

∗ **Bizonyítás.** Először a megfelelő integrálegyenlet $[\tau-c,\tau+c]$ zárt intervallumon értelmezett megoldásaival fogunk foglalkozni. Az egyszerűség kedvéért x-nek csak az első változótól való függését írjuk ki. Legyen $I=[-1,1]$. A trükk a bizonyításban a következő skálázás:

$$t=\tau+cs,\quad y(s)=x(\tau+cs)-\xi,\quad \text{ha}\quad s\in I.$$

Ekkor az

$$x(t)=\xi+\int_\tau^t f(t,x(t),p)\,dt,\quad t\in[\tau-c,\tau+c]$$

integrálegyenlet ekvivalens az

$$y(s)-c\int_0^s f(\tau+cs,y(s)+\xi,p)\,ds=0,\quad \text{ha}\quad s\in I$$

integrálegyenlettel. Ezt operátoregyenlet alakjában írjuk fel:

$$F(y,c,\tau,\xi,p)=0,$$

az $F\colon Y\times Z\to Y$ operátorral, ahol $Y=\mathcal{C}(I;X)$ és a Z tér pedig a (c,τ,ξ,p) paramétereket tartalmazza. Legyen $q_0=(0,0,\tau_0,\xi_0,p_0)$. Nyilván $F(q_0)=0$. Az F operátort felírhatjuk $\mathbb{I}_Y-cG$ alakban. A kritikus pont az, hogy $F_y(q_0)=\mathbb{I}$, így az implicit függvény tételt alkalmazhatjuk, ha belátjuk, hogy G és G_y folytonos. Vizsgáljuk tehát a

$$G(y,c,\tau,\xi,p)(s)=\int_0^s f(\tau+cs,y(s)+\xi,p)\,ds$$

összefüggéssel értelmezett operátort. Először megmutatjuk, hogy G értelmezési tartománya nyílt. Ha az $s\mapsto(\tau+cs,y(s)+\xi,p)$ görbe értékkészlete a D nyílt halmazban van, akkor az értékkészlet távolsága D komplementerétől pozitív. Így az (y,c,τ,ξ,p) paramétereket kicsit megváltoztatva, az értékkészlet még mindig D-ben lesz. Most lássuk be, hogy G folytonos. Legyen $\varepsilon>0$ és a fenti görbe minden pontjához válasszunk olyan $\delta>0$-t, hogy a pont δ sugarú környezetében az f értéke $\varepsilon/2$-nél kevesebbet változzon. $\delta/2$ sugarú környezetekkel lefedve a görbe értékkészletét, és kiválasztva egy véges lefedést, a $\delta/2$ értékek minimuma egy olyan $\eta>0$ értéket ad, hogy a görbe bármely pontjától η-nál kisebb távolságot távolodva, f értéke legfeljebb ε-nal változik. Így a változók kicsiny változtatására f értéke kicsit változik minden $s\in I$-re, azaz G értéke kicsit változik.

Most megmutatjuk, hogy G_y létezik és folytonos a G értelmezési tartományának minden pontjában. A gyenge derivált meghatározásához legyen $h\in Y$ és $\varepsilon\in\mathbb{R}$. A középértékegyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}&\Big|f(\tau+cs,y(s)+\varepsilon h(s)+\xi,p)-f(\tau+cs,y(s)+\xi,p)\\&\qquad-f_x(\tau+cs,y(s)+\xi,p)\varepsilon h(s)\Big|\\&\le\big|\varepsilon h(s)\big|\sup_{0\le\vartheta\le1}\Big\|f_x(\tau+cs,y(s)+\vartheta\varepsilon h(s)+\xi,p)-f_x(\tau+cs,y(s)+\xi,p)\Big\|.\end{aligned}$$

Pontosan úgy, mint ahogy G folytonosságát kaptuk, megmutathatjuk, hogy

$$f_x(\tau + cs, y(s) + \xi, p)$$

folytonos függvénye az y, τ, ξ, p, c paramétereknek s-ben egyenletesen. Ebből az

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^s f(\tau + cs, y(s) + \varepsilon h(s) + \xi, p)\,ds - \int_0^s f(\tau + cs, y(s) + \xi, p)\,ds\\&- \int_0^s f_x(\tau + cs, y(s) + \xi, p)\varepsilon h(s)\,ds\Big|\\&\le \|\varepsilon h\| \int_0^s \sup_{0\le\vartheta\le 1}\Big\|f_x(\tau + cs, y(s) + \vartheta\varepsilon h(s), p) - f_x(\tau + cs, y(s), p)\Big\|\,ds\end{aligned}$$

becslés szerint G-nek a h iránymenti deriváltja létezik. Mivel az iránymenti deriváltak h lineáris függvényei, a G_y gyenge derivált létezik. A gyenge derivált folytonosságát ugyanúgy kapjuk, mint G folytonosságát.

Alkalmazzuk az implicit függvény tételt az $F(y, c, \tau, \xi, p) = 0$ operátoregyenletre. Azt kapjuk, hogy létezik olyan $r > 0$, valamint olyan (egyértelműen meghatározott)

$$(c, \tau, \xi, p) \mapsto \psi(c, \tau, \xi, p)$$

leképezés $\mathcal{C}(I; X)$-beli értékekkel, amely $|c| \le r$, $|\tau - \tau_0| \le r$, $|\xi - \xi_0| \le r$, $|p - p_0| \le r$ esetén van értelmezve, és amelyre

$$\psi(c, \tau, \xi, p)(s) = c\int_0^s f(\tau + cs, \psi(c, \tau, \xi, p)(s) + \xi, p)\,ds,$$

ha $s \in I$. Az r esetleges csökkentésével azt is elérhetjük, hogy F_y minden

$$(\psi(c, \tau, \xi, p), c, \tau, \xi, p)$$

pontban invertálható lineáris leképezés legyen. Mivel a továbbiakban a ψ függvénynek a c segédváltozótól való függése nem érdekel bennünket, $c = r$ értéket rögzítünk, és ψ-nek ezt a változóját nem írjuk ki. Ekkor

$$\psi(\tau, \xi, p)(s) = r\int_0^s f(\tau + rs, \psi(\tau, \xi, p)(s) + \xi, p)\,ds. \tag{4}$$

Legyen $\varphi(s, \tau, \xi, p) = \psi(\tau, \xi, p)(s)$, ha $|\tau - \tau_0| < r$, $|\xi - \xi_0| < r$, $|p - p_0| < r$ és $|s| < 1$. Könnyű látni, hogy φ folytonos. Az előző egyenletből

$$\varphi(s, \tau, \xi, p) = r\int_0^s f(\tau + rs, \varphi(s, \tau, \xi, p) + \xi, p)\,ds,$$

ha $|s| < 1$. Ebből az összefüggésből

$$s = (t - \tau)/r, \quad x(t, \tau, \xi, p) = \varphi((t - \tau)/r, \tau, \xi, p) + \xi$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy x folytonos és

$$x(t,\tau,\xi,p)=\xi+\int_\tau^t f(t,x(t,\tau,\xi,p),p)\,dt,\quad \text{ha}\quad |t-\tau|<r, \tag{5}$$

amiből x_t is folytonos, fennáll a differenciálegyenlet, és teljesül a kezdeti feltétel.

Rögzítsünk most egy τ és egy p értéket. Az implicit függvény tételből és bizonyításából látjuk, hogy $\xi\mapsto\psi(\tau,\xi,p)$ differenciálható, és a $(\tau,\xi,p)\mapsto\psi_\xi(\tau,\xi,p)$ leképezés folytonos, ha $|\tau-\tau_0|<r$, $|\xi-\xi_0|<r$, $|p-p_0|<r$. A φ_ξ létezésének és folytonosságának belátásához rögzítsünk egy s értéket, amelyre $|s|<1$. Jelölje P_s azt az operátort, amely egy $y\in\mathcal{C}(I;X)$ függvényhez az $y(s)$ értéket rendeli. P_s korlátos lineáris operátor, normája 1, és $P_s\psi(\tau,\xi,p)=\varphi(s,\tau,\xi,p)$. Mivel a bal oldal differenciálható ξ szerint, a jobb oldal is, és $P_s\psi_\xi(\tau,\xi,p)=\varphi_\xi(s,\tau,\xi,p)$. A (4) összefüggésből bármely $\eta\in X$-re

$$\begin{aligned}(\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta)(s)&=r\int_0^s f_x(\tau+rs,\psi(\tau,\xi,p)(s)+\xi,p)\eta\,ds\\&\quad+r\int_0^s f_x(\tau+rs,\psi(\tau,\xi,p)(s)+\xi,p)(\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta)(s)\,ds.\end{aligned}$$

Innen $|\eta|\le1$ esetén

$$\Big|(\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta)(s')-(\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta)(s)\Big|\le r|s'-s|M\Big(1+\|\psi_\xi(\tau,\xi,p)\|\Big),$$

ahol

$$M=\sup_{s\in I}\Big\|f_x(\tau+rs,\psi(\tau,\xi,p)(s)+\xi,p)\Big\|.$$

Ennek a becslésnek a birtokában belátható φ_ξ folytonossága:

$$\begin{aligned}\big\|\varphi_\xi(s',\tau',\xi',p')-\varphi_\xi(s,\tau,\xi,p)\big\|&=\sup_{\|\eta\|=1}\big\|P_{s'}\psi_\xi(\tau',\xi',p')\eta-P_s\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta\big\|\\&\le\sup_{\|\eta\|=1}\big\|P_{s'}\psi_\xi(\tau',\xi',p')\eta-P_{s'}\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta\big\|\\&\quad+\sup_{\|\eta\|=1}\big\|P_{s'}\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta-P_s\psi_\xi(\tau,\xi,p)\eta\big\|\\&\le r|s'-s|M\big\|\psi_\xi(\tau,\xi,p)\big\|+\|P_{s'}\|\big\|\psi_\xi(\tau',\xi',p')-\psi(\tau,\xi,p)\big\|.\end{aligned}$$

A φ_ξ létezéséből és folytonosságából következik x_ξ létezése és folytonossága. Az (5) egyenletet ξ szerint differenciálva, a variációs egyenlettel ekvivalens integrálegyenletet kapunk.

Teljesen hasonlóan látható be (2) is. (3) bizonyításához, hasonló módszerrel, megmutathatjuk, hogy ha f folytonosan differenciálható, akkor φ_τ és φ_s létezik és folytonos (az utóbbi a (4) egyenletből nyilvánvaló). Ha rögzített ξ és p mellett bevezetjük a $H(t,\tau)=\int_{\tau_0}^t f(t,x(t,\tau,\xi,p),p)\,dt$ jelölést, akkor (5) az

$$x(t,\tau,\xi,p)=\xi+H(t,\tau)-H(\tau,\tau)$$

egyenlettel ekvivalens. Ezt differenciálva, az

$$x_\tau(t,\tau,\xi,p)=-\xi+\int_\tau^t f_x(t,x(t,\tau,\xi,p),p)x_\tau(t,\tau,\xi,p)\,dt$$

variációs egyenletet kapjuk. Így x bármelyik elsőrendű parciális deriváltjára egy olyan egyenletet kapunk, amelyből nyilvánvaló, hogy a parciális derivált még $(m-1)$-szer folytonosan differenciálható. Ebből következik (3).

22.5. Közelítő megoldások. 20.4 jelöléseivel, ha $\varepsilon > 0$, akkor egy nem üres nyílt intervallumon értelmezett és ott szakaszonként folytonosan differenciálható x függvényt a differenciálegyenlet *ε-megoldás*ának nevezünk, ha

$$\Big|x'(t) - f(t, x(t))\Big| \le \varepsilon$$

minden olyan t-re, amelyre $x'(t)$ létezik.

A közelítő megoldások hasznos bizonyítási eszközök, és fontos szerepet játszanak differenciálegyenletek numerikus módszerekkel történő megoldásánál. Az úgynevezett „Euler-féle töröttvonalak" is ε-megoldások, a következő tétel bizonyítása ezeket használja.

$*$ **22.6. Peano-tétel.** *20.4 jelöléseivel, de csak az $f\colon D \to \mathbb{K}^n$ függvény folytonosságát feltéve, a Cauchy-feladatnak létezik megoldása.*

Bizonyítás. Válasszunk $a, b, K > 0$ valós számokat úgy, hogy

$$C = \big\{(t, x)\colon |t - \tau| \le a, |x - \xi| \le b\big\} \subset D,$$

továbbá

$$\sup\Big\{\big|f(t, x)\big|\colon (t, x) \in C\Big\} < K$$

teljesüljön, és legyen $c = \min\{a, b/K\}$. Definiáljuk az úgynevezett „Euler-féle töröttvonalakat". Ezeket úgy kapjuk, hogy a $[\tau - c, \tau + c]$ intervallumot $2m$ egyenlő h hosszúságú részre osztva, a (τ, ξ) pontból indulva, lineárisan haladunk az f függvénynek a töréspontban felvett értéke által megadott irányban a következő töréspontig. A K és c megválasztásából következik, hogy bármelyik x_m töröttvonal D-ben halad, és értékei a ξ-től nem esnek távolabb, mint b, mert deriváltjuk normája kisebb mint K. Legyen $\varepsilon > 0$. Megmutatjuk, hogy ha m elég nagy, akkor ε-megoldást kapunk. Valóban, mivel f egyenletesen folytonos C-n, van olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, \tilde{t} \in [\tau - c, \tau + c]$, $|t - \tilde{t}| \le \delta$ és $x, \tilde{x}$ távolsága ξ-től legfeljebb b és $|x - \tilde{x}| \le \delta$, akkor $\big|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})\big| \le \varepsilon$ teljesül. Ha most m olyan nagy, hogy $h < \delta$ és $hK < \delta$, akkor ε-megoldást kapunk.

Tekintsünk minden $\varepsilon = 1/k$-hoz egy x_k Euler-féle töröttvonalat. Diagonális eljárással válasszunk ki ennek a sorozatnak egy olyan részsorozatát, amely az összes töréspontok halmazának pontjaiban konvergens. Felhasználva, hogy a töröttvonalak Lipschitz-függvények, és K mindegyikhez egy Lipschitz-konstans, megmutatjuk, hogy a konvergencia egyenletes. Valóban, kiválasztva töréspontok egy véges halmazát, amely η-nál finomabb felosztása $[\tau - c, \tau + c]$-nek, ha ezekben a pontokban x_{m_1} és x_{m_2} eltérése legfeljebb η, akkor mindenütt legfeljebb $\eta + 2K\eta$. Mivel elég nagy m-re x_m egy ε-megoldás, kielégíti az

$$\Big|x_m(t) - \xi - \int_\tau^t f(t, x_m(t))\, dt\Big| \le c\varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ebből határátmenettel kapjuk, hogy a határfüggvény, legyen ez x, is kielégíti ezt az egyenlőtlenséget. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, x kielégíti a differenciálegyenletettel ekvivalens integrálegyenletet. Ebből következik, hogy x megoldás a $]\tau - c, \tau + c[$ intervallumon.

22.7. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy a Peano-tétel feltételei mellett minden megoldás folytatható teljes megoldássá.

22.8. Grönwall-lemma. *Legyenek u és v a $[0,c]$ intervallumon adott folytonos pozitív függvények, ω pedig olyan, a $[0,c]$-n folytonos valós függvény, amelyre*

$$\omega(t) \le u(t) + \int_0^t v(s)\omega(s)\,ds$$

minden $t \in [0,c]$-re. Ekkor

$$\omega(t) \le u(t) + \int_0^t u(s)v(s)\exp\left(\int_s^t v(r)\,dr\right)\,ds$$

minden $t \in [0,c]$-re.

A becslés könnyen megjegyezhető: ha a feltételben egyenlőség állna, és a szereplő függvények simák lennének, akkor az állítás az ekvivalens differenciálegyenlet megoldását adná egyenlőséggel. Ez a gondolat a bizonyítás alapja is. A bizonyítás egyben példát ad arra, hogyan lehet differenciálegyenlőtlenségeket megoldani.

Bizonyítás. Legyen

$$y(t) = \int_0^t v(s)\omega(s)\,ds.$$

Ekkor y differenciálható, és

$$y'(t) - v(t)y(t) \le u(t)v(t).$$

Legyen most

$$z(t) = y(t)\exp\left(-\int_0^t v(s)\,ds\right),$$

ekkor az előző egyenlőtlenség a

$$z'(t) \le u(t)v(t)\exp\left(-\int_0^t v(s)\,ds\right)$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mivel $z(0) = 0$, ebből

$$z(t) \le \int_0^t u(s)v(s)\exp\left(-\int_0^s v(r)\,dr\right)\,ds,$$

és így z definíciója szerint

$$y(t) \le \int_0^t u(s)v(s)\exp\left(\int_s^t v(r)\,dr\right)\,ds,$$

amiből $\omega(t) \le u(t) + y(t)$ miatt adódik az állítás.

22.9. Feladat [8]. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlőtlenségeket:

(1) $y' \le 0$;

(2) $xy' \le y$;

(3) $yy' \le -x$;

(4) $0 \le (x^2 - x0y' + y = x^2$;

(5) $\cos(x-y) \le y'(1+\cos(x-y))$.

22.10. Hibabecslési tétel. *20.4 jelölései mellett, tegyük fel, hogy x_1 egy ε_1-megoldása, x_2 pedig egy ε_2-megoldása a differenciálegyenletnek az I intervallumon, $\tau \in I$, $K > 0$ és $\|f_x\| \le K$ mindenütt a D-n, továbbá*

$$D_t = \{x\colon (t,x) \in D\}$$

konvex minden $t \in I$-re. Ekkor

$$\big|x_1(t) - x_2(t)\big| \le \big|x_1(\tau) - x_2(\tau)\big| e^{K|t-\tau|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(e^{K|t-\tau|} - 1)/K$$

minden $t \in I$-re.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tau = 0$, és $t \ge 0$. Az

$$\Big|x_1'(t) - f(t, x_1(t))\Big| \le \varepsilon_1$$

egyenlőtlenség integrálásával a $[0,t]$ intervallumon,

$$\left|x_1(t) - x_1(0) - \int_0^t f(t, x_1(t))\,dt\right| \le \varepsilon_1 t,$$

és hasonlóan,

$$\left|x_2(t) - x_2(0) - \int_0^t f(t, x_2(t))\,dt\right| \le \varepsilon_2 t,$$

tehát

$$\big|x_1(t) - x_2(t)\big| \le \big|x_1(0) - x_2(0)\big| + \left|\int_0^t \Big(f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\Big)\,dt\right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Ebből $\omega(t) = \big|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big|$ jelöléssel, a középérték-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\omega(t) \le \omega(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t + K\int_0^t \omega(t)\,dt$$

adódik, amiből a Grönwall-lemma felhasználásával kapjuk a keresett egyenlőtlenséget.

22.11. Egzisztencia–unicitás tétel. *20.4 feltételei mellett minden Cauchy-feladatnak pontosan egy teljes megoldása létezik. Ha a differenciálegyenlet valamely teljes megoldása legalább egy pontban megegyezik egy megoldással, akkor annak folytatása. Ha két teljes megoldás legalább egy pontban megegyezik, akkor egybeesnek.*

Bizonyítás. Jelölje X a differenciálegyenlet azon x megoldásainak halmazát, amelyekre $x(\tau)=\xi$, és legyen $\tilde{x}=\bigcup_{x\in X} x$. Megmutatjuk, hogy $\tilde{x}$ függvény. Ha $x_1, x_2 \in X$, x_1 az I_1-en, x_2 az I_2-n van értelmezve, de $x_1 \neq x_2$ az $I_1 \cap I_2$-n, akkor az $a, b \in I_1 \cap I_2$, $a<\tau<b$ számok megválaszthatók úgy, hogy $x_1 \neq x_2$ az $]a,b[$-n. Válasszunk az $x_1([a,b])$ kompakt halmaz minden pontjához olyan nyílt környezetet, amelyen f_x korlátos. Ebből a nyílt lefedésből kiválasztva egy véges lefedést, $x_1([a,b])$ egy nyílt környezetét kapjuk, amelyen f_x korlátos. Válasszuk meg az $r>0$ számot úgy, hogy a

$$C=\Big\{(t,x)\colon a<t<b, \big|x-x_1(t)\big|<r\Big\}$$

henger ebben a környezetben legyen. Az x_2 folytonossága miatt van olyan $a \le a_0 < \tau < b_0 \le b$, hogy $\big|x_2(t)-x_1(t)\big|<r$, de $x_1 \neq x_2$ az $]a_0,b_0[$ intervallumon. Ez azonban ellentmond az előző tételnek.

Így $\tilde{x}$ függvény. Nyilván $\tilde{x}$ teljes megoldás, $\tilde{x}(\tau)=\xi$, és $\tilde{x}$ az egyetlen teljes megoldás. Ha most az $\tilde{x}$ teljes megoldás és az x megoldás egy pontban egybeesnek, jelölje τ ezt a pontot, és legyen $x(\tau)=\xi$. Mivel $x \cup \tilde{x} \supset \tilde{x}$, $\tilde{x}=\tilde{x}\cup x$, azaz $x \subset \tilde{x}$. Ha x is teljes megoldás, akkor $\tilde{x} \subset x$ is teljesül.

22.12. A megoldás határtól határig halad. *20.4 jelöléseivel, legyen $C \subset D$ egy kompakt halmaz, és x a differenciálegyenlet egy teljes megoldása, amelynek értelmezési tartománya $]a,b[$. Ekkor léteznek olyan $a<a_0<b_0<b$ számok, hogy $a<t<a_0$, illetve $b_0<t<b$ esetén $(t,x(t)) \notin C$.*

Bizonyítás. Elég a felső végponttal foglalkozni. Ha $b=\infty$, akkor az állítás nyilvánvaló. A $b<\infty$ esetben tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $t_n \uparrow b$ sorozat, amelyre $(t_n, x(t_n)) \in C$. Egy részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $(t_n, x(t_n)) \to (b,\xi) \in C$. A $\tau=b$ jelöléssel, létezik olyan $\varepsilon>0$, hogy a τ és ξ pontok ε-környezeteinek Descartes-szorzata D-ben van, és rajta $|f|<L$ valamilyen L valós konstansra. Válasszuk meg a $0<\delta \le \min\{\varepsilon, \varepsilon/(2L)\}$ értéket úgy, hogy x értelmezve legyen a $]\tau-\delta,\tau[$ intervallumon. Válasszunk olyan n-et, amelyre $\big|x(t_n)-\xi\big|<\varepsilon/4$. Tegyük fel, hogy $\tau-\delta \le t_0 < t < t_n$ esetén $\big|x(t)-\xi\big|<\varepsilon$. Ekkor a differenciálegyenlet és a középérték-egyenlőtlenség szerint $\big|x(t)-x(t_n)\big| \le L\delta \le \varepsilon/2$, így $\big|x(t)-\xi\big|<3\varepsilon/4$. Mivel x folytonos, az ilyen t_0-ok alsó határa nem nagyobb, mint $\tau-\delta$. Ha $n\to\infty$, akkor kapjuk, hogy $\tau-\delta<t<\tau$ esetén $\big|x(t)-\xi\big|<\varepsilon$, tehát x Lipschitz-függvény ezen az intervallumon. Mivel így egyenletesen folytonos, egyértelműen kiterjeszthető a τ pontban is folytonos függvénnyé. Alkalmazzuk a differenciálegyenletek főtételét a (τ,ξ) pontban, és legyen $\tilde{x}$ a kapott lokális megoldással egyenlő, ha $t \ge \tau$, és $\tilde{x}(t)=x(t)$, ha $\tau-\delta<t<\tau$. Ekkor $\tilde{x}$ egy folytonos függvény, amely eleget tesz az

$$\tilde{x}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\tilde{x}(s))\,ds$$

integrálegyenletnek. Mivel $\tilde{x}$ nem része x-nek, x folytatható megoldás.

∗ **22.13. Globális függés a paraméterektől.** *Legyenek X és P euklidészi terek, $D \subset \mathbb{R}\times X \times P$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to X$ egy folytonos függvény, amelyre f_x is folytonos. Ha rögzített τ, ξ és p mellett $t \mapsto x(t,\tau,\xi,p)$ az*

$$x'=f(t,x,p), \quad x(\tau)=\xi$$

Cauchy-feladat teljes megoldása, akkor x a (t,τ,ξ,p) változók terének egy nyílt részhalmazán van értelmezve, ott folytonos, továbbá

(1) *x folytonosan differenciálható ξ szerint és fennáll a*

$$x_{\xi t}(t,\tau,\xi,p) = f_x(t,x(t,\tau,\xi,p),p)x_\xi(t,\tau,\xi,p),$$
$$x_\xi(\tau,\tau,\xi,p) = \mathbb{I}$$

variációs egyenlet*;*

(2) *ha f_p is folytonos, akkor x folytonosan differenciálható p szerint és fennáll a*

$$x_{pt}(t,\tau,\xi,p) = f_x(t,x(t,\tau,\xi,p),p)x_p(t,\tau,\xi,p) + f_p(t,x(t,\tau,\xi,p),p),$$
$$x_p(\tau,\tau,\xi,p) = 0$$

variációs egyenlet*;*

(3) *ha f egy $\mathcal{C}^m$-leképezés, akkor x is $\mathcal{C}^m$-leképezés.*

Ha az egyenletet és a kezdeti feltételt differenciáljuk ξ, illetve p szerint, akkor a variációs egyenleteket kapjuk a megfelelő kezdeti feltétellel, de a jobb oldalon $x_{t\xi}$ illetve x_{tp} áll. Így az $x_{\xi t}$ és $x_{t\xi}$, illetve x_{pt} és x_{tp} parciális deriváltak léteznek és megegyeznek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (t_0,τ_0,ξ_0,p_0) pontban x értelmezve van. Megmutatjuk, hogy ennek egy környezetében is értelmezve van, és folytonos. Feltesszük, hogy $t_0 \geq \tau_0$, ellenkező esetben a bizonyítás hasonló. A $[\tau_0,t_0]$ intervallum minden pontjára, p_0 paraméterértékkel, alkalmazhatjuk a közönséges differenciálegyenletek főtételét, és kapunk egy olyan $r>0$ értéket, amelyre az r sugarú környezetben létezik megoldás. A középpontok $r/4$ sugarú környezetei lefedik az intervallumot. A lefedésből kiválasztva egy véges lefedést, olyan $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_0$ sorozatot, és $r_i > 0$ számokat kaphatunk, amelyekre a $]\tau_i - r_i/4, \tau_i + r_i/4[$ nyílt intervallumok lefedik a $[\tau_0,t_0]$ intervallumot. A $\xi_i = x(\tau_i,\tau_0,\xi_0,p_0)$ jelöléssel $|t-\tau| < r_i$, $|\tau-\tau_i| < r_i$, $|\xi-\xi_i| < r_i$, $|p-p_0| < r_i$ esetén értelmezett megoldás legyen $(t,\tau,\xi,p) \mapsto x_i(t,\tau,\xi,p)$. Az i szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy van olyan U_i nyílt környezete a (τ_0,ξ_0,p_0) pontnak, hogy $(\tau,\xi,p) \in U_i$ esetén a $t \mapsto x(t,\tau,\xi,p)$ teljes megoldás értelmezve van ha t a $]\tau - r_0/2, \tau_j + r_j/2[$, $j \leq i$ intervallumok egyesítésének egy pontja, és folytonos az összes változójában. Ha $i=0$, legyen U_i a $|\tau-\tau_0| < r_0/2$, $|\xi-\xi_0| < r_0$, $|p-p_0| < r_0$ pontok halmaza. Ha $i < n$-re az állítás igaz, akkor az indukciós lépésnél két esetet különböztetünk meg. Ha a $(\tau_i+\tau_{i+1})/2$ pontot lefedő $]\tau_j - r_j/4, \tau_j + r_j/4[$ intervallumok között van olyan, amelyre $j \leq i$, akkor x értelmezve van a τ_{i+1} pontban, és tekintsük a $(t,\tau,\xi,p) \mapsto x_{i+1}(t,\tau_{i+1},x(\tau_{i+1},\tau,\xi,p),p)$ függvényt. Mivel ez a függvény értelmezve van a (τ_0,ξ_0,p_0) pont egy U_{i+1} környezetében, változóinak folytonos függvénye, és megoldás, valamint a τ_{i+1} pontban megegyezik x-el, x ennek folytatása, így kapjuk az indukciós lépést. Ha a lefedő intervallumokra $j > i$, akkor a legkisebb j-t választva, tekintsük az $(t,\tau,\xi,p) \mapsto x_j(t,\tau_i,x(\tau_i,\tau,\xi,p),p)$ függvényt. Hasonlóan, mint az előbb, kapjuk az indukciós lépést j-re.

A fenti indukciós eljárással adódik a megoldás simasága is. Az indukciós lépés alapján könnyű ellenőrizni, hogy $x_{\xi t} = x_{t\xi}$, így az egyenlet differenciálásával adódik az első variációs egyenlet. Hasonlóan kapható a második variációs egyenlet is.

22.14. Első integrálok. 20.5 feltételei mellett a D valamely G nyílt részhalmazát $\mathbb{R}^m$-be képező folytonosan differenciálható u függvényt az

$$x' = f(x), \quad x \in D$$

autonóm egyenlet *első integrál*jának nevezünk, ha $t \mapsto u(x(t))$ konstans minden olyan x megoldásra, amelynek értékkészlete G-ben van.

Fizikailag az első integrálok megmaradó mennyiségeket jelentenek. Például a mechanikában megfelelő feltételek mellett első integrálok az energia, az impulzus és az impulzusmomentum.

Az első integrálok jelentősége abban áll, hogy az $u(x) = c$ egyenletből kifejezhetjük az u néhány változóját a többivel (legalábbis lokálisan), és így az egyenletek számát csökkenthetjük. Minél nagyobb az $u'(x)$ derivált rangja, annál több változó fejezhető ki a többivel. Mint látni fogjuk, $f(x)$ az $u'(x)$ nullterében van, így $u'(x)$ rangja általában legfeljebb $n-1$. Ez az érték $f(x) \neq 0$ esetén lokálisan el is érhető. Nyilván egy első integrált behelyettesítve egy nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható függvénybe, újra első integrált kapunk. A funkcionális kifejezhetőségről szóló tétel azt mutatja majd, hogy olyan első integrál birtokában, amely deriváltjának rangja maximális, minden más első integrált – legalábbis lokálisan – így kaphatunk.

A nem autonóm $x' = f(t, x)$ egyenlet esetén természetesebb *t-től függő első integrál*okat vizsgálni. Ezek az egyenlet $\tilde{x}' = \tilde{f}(\tilde{x})$ autonóm átírása első integráljainak felelnek meg. Megjegyezzük, hogy $\tilde{f}(\tilde{x}) \neq 0$ sehol sem. Az egyenlet általános megoldása birtokában t-től függő első integrálokat úgy kaphatunk, hogy a konstansokat kifejezzük az általános megoldásból, t-től nem függő első integrálokat pedig úgy, hogy az így kapott egyenletrendszerből kiküszöböljük t-t.

22.15. Tétel. *Az előző pont jelöléseivel, u pontosan akkor első integrálja az $x' = f(x)$ egyenletnek, ha $u'(x)f(x) = 0$ minden $x \in G$-re.*

Bizonyítás. Ha u első integrál, ξ a G tetszőleges pontja, x pedig olyan megoldása az egyenletnek, amelyre $x(0) = \xi$, akkor

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t)) = u'(x(t))x'(t) = u'(x(t))f(x(t))$$

az x értelmezési tartományának pontjaiban, így a $t = 0$ pontban is. Ha $u'(x)f(x) = 0$ a G pontjaiban, akkor tetszőleges G-beli értékkészletű megoldásra $t \mapsto u(x(t))$ deriváltja nulla, így $t \mapsto u(x(t))$ konstans.

22.16. Feladat [8]. Adjunk meg az $x' = x$, $x \in \mathbb{R}^2$ egyenletnek első integráljait. Melyek az origó egy környezetében értelmezett első integrálok?

22.17. Kiegyenesítési tétel. *20.5 feltételei mellett, ha $f(\xi) \neq 0$, akkor a ξ pont valamely környezetében az $x' = f(x)$ egyenlet differenciálhatóan ekvivalens egy $y' = c$, ($0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ konstans) egyenlettel.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\xi = 0$, és hogy $f(0)$ utolsó koordinátája nem nulla. Jelölje φ az egyenlet karakterisztikus függvényét, és tekintsük a

$$T\colon (\eta, s) \mapsto \varphi(s, 0, (\eta, 0))$$

leképezést $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$-en az origó egy környezetében. T nyilván folytonosan differenciálható, és ha $c=(0,1)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, akkor a második egyenlet $y(t)=tc+d$, $d=(d^*,d_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ megoldásaira

$$T(y(t))=\varphi(t+d_n,0,(d^*,0))=\varphi(t,-d_n,(d^*,0)),$$

így T a második egyenlet megoldásait az első megoldásaiban viszi át. Mivel $T_\eta(0,0)=\mathbb{I}$, és $T_s(0,0)=f(0)$, azt kapjuk, hogy $\det T'(0,0)\neq 0$, így az inverz függvény tétel szerint T diffeomorfizmus az origó egy környezetében.

$*$ **22.18. Feladat [8].** Alkalmazzuk a kiegyenesítési tételt az $x'=f(t,x)$ egyenlet autonóm átírására. Mit kapunk?

22.19. Tétel. *22.14 jelöléseivel, ha $f(\xi)\neq 0$, akkor a ξ egy G környezetében létezik egy $u\colon G\to\mathbb{R}^{n-1}$ első integrálja az $x'=f(x)$ egyenletnek, amelyre $u'(x)$ rangja $n-1$ a G minden pontjában.*

Bizonyítás. A kiegyenesítési tétel szerint az egyenlet a ξ egy környezetében differenciálhatóan ekvivalens egy $y'=c$ egyenlettel, azaz van olyan T diffeomorfizmusa a ξ egy környezetének, hogy

$$\frac{d}{dt}T(x(t))=c$$

minden, ebben a környezetben haladó megoldásra. Legyen P egy projekciója $\mathbb{R}^n$-nek egy $(n-1)$-dimenziós altérre, amelynek c a nullterében van. Ekkor

$$P\frac{d}{dt}T(x(t))=\frac{d}{dt}P\Big(T(x(t))\Big)=0,$$

azaz $P\circ T$ egy első integrál. Mivel

$$(P\circ T)'(x)=P'(T(x))T'(x)=PT'(x),$$

és $T'(x)$ képtere $\mathbb{R}^n$, $(P\circ T)'(x)$ rangja $n-1$.

22.20. A funkcionális kifejezhetőség tétele. *Legyen u a $G\subset\mathbb{R}^n$ nyílt halmazt $\mathbb{R}^m$-be képező folytonosan differenciálható függvény, amelyre $u'(x)$ rangja r mindenütt. Ha $v\colon G\to\mathbb{R}^k$ egy másik folytonosan differenciálható függvény, és $(u'(x),v'(x))$ rangja is mindenütt r, akkor minden $\xi\in G$ pontnak van olyan U környezete, és azon olyan Ψ folytonosan differenciálható függvény, hogy $v(x)=\Psi(u(x))$, ha $x\in U$.*

$*$ **Bizonyítás.** Jelölje $u'(\xi)$ értékkészletét Y_1, $(u'(\xi),v'(\xi))$ értékkészletét pedig Y, és legyen $\tilde{P}$ egy Y_1-re való projekciója $\mathbb{R}^m$-nek. Jelölje P_1 az első, P_2 a második tényezőre való ortogonális projekcióját $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$-nak. P_1 az Y alteret Y_1-re képezi le, és mivel mindkettő r dimenziós, kölcsönösen egyértelműen. Definiáljuk P-t úgy, hogy $P(z)$ legyen Y azon eleme, amelyre $P_1(P(z))=\tilde{P}(P_1(z))$, azaz $P=(P_1|_Y)^{-1}\tilde{P}P_1$. A P nyilván projekció. Válasszunk egy új belső szorzatot, amire P ortogonális projekció. A rang tétel szerint van olyan U környezete ξ-nek, hogy minden $z=(u(x),v(x))$, $x\in U$ vektor felírható

$$z=P(z)+\varphi(P(z)) \tag{1}$$

alakban, ahol φ egy folytonosan differenciálható függvény. Legyen y_1 a $z_1=u(x)$ képe a $\tilde{P}$ projekciónál. Legyen y a Y azon eleme, amelyre $P_1(y)=y_1$. Mivel $P_1(P(z))=\tilde{P}(P_1(z))$, azt kapjuk, hogy $P(z)=y$. A $z_1\mapsto y$ leképezés folytonosan differenciálható, így (1) miatt $z_1\mapsto z$ is folytonosan differenciálható. Legyen $\Psi(z_1)=P_2(z)$.

23
Lineáris egyenletek

A XVIII. században a differenciálegyenletekről írt nagyszámú munkák közül kiemelkednek Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) művei. Ezekben a munkákban dolgozták ki mindenekelőtt a kis rezgések elméletét, következésképpen a lineáris differenciálegyenlet rendszerek elméletét is, mellékesen kialakultak a lineáris algebra alapfogalmai (az n-dimenziós eset sajátértékei és vektorai). A lineáris operátor karakterisztikus egyenletét sokáig szekuláris egyenletnek nevezték, mert éppen egy ilyen egyenletből határozták meg a Lagrange-féle kis rezgések elmélete alapján a bolygómozgások szekuláris (évszázados, azaz az éves mozgáshoz képest lassú) perturbációit. Newtont követve először Euler és Lagrange majd Gauss (1777–1855) fejlesztette ki a rezgéselmélet módszereit.

V. I. Arnold [4]

23.1. Lineáris egyenletek. Legyen I egy nyílt intervallum,

$$A\colon I \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n), \qquad b\colon I \to \mathbb{K}^n$$

legyenek folytonos függvények. Tekintsük az $x' = A(t)x + b(t)$ differenciálegyenletet. Az egyszerűbb hivatkozás kedvéért ezt a differenciálegyenletet a fenti feltételek mellett *lineáris normál differenciálegyenlet*nek fogjuk nevezni. A megfelelő *homogén lineáris normál differenciálegyenlet* az $x' = A(t)x$ egyenlet. Ezek a differenciálegyenletek nyilvánvalóan kielégítik az egzisztencia-unicitás tétel feltételeit.

A szuperpozícióról és a komplexifikálásról tanultak lineáris differenciálegyenletekre is alkalmazhatók.

23.2. Tétel. *Az $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in I$ lineáris normál differenciálegyenlet minden teljes megoldása az egész I intervallumon van értelmezve.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < \tau < b$, és x egy teljes megoldás, amely értelmezve van az $]a, b[$ intervallumon, $x(\tau) = \xi$. Az

$$\varepsilon = \sup\Big\{\big|b(t)\big|\colon a \le t \le b\Big\}, \quad K > \sup\Big\{\big\|A(t)\big\|\colon a \le t \le b\Big\}$$

konstansokkal, mivel az azonosan nulla függvény ε-megoldása az egyenletnek,

$$\big|x(t)\big| \le |\xi| e^{K|t-\tau|} + \varepsilon(e^{K|t-\tau|} - 1)/K,$$

ha $a < t < b$. A jobb oldal korlátos, így x is korlátos $]a, b[$-n. Az egyenletből következik, hogy x' is korlátos $]a, b[$-n, amiből a középérték-egyenlőtlenség szerint x Lipschitz-függvény $]a, b[$-n, tehát értékkészlete teljesen korlátos, így $x(]a, b[)$ lezártja kompakt halmaz. Mivel a teljes megoldás határtól határig halad, b nem lehet az x értelmezési tartományának felső határa, a pedig nem lehet az alsó határa. Ebből következik, hogy x az egész I-n értelmezve van.

23.3. Tétel. *A homogén lineáris egyenlet R rezolvensére, minden $t, \tau \in I$-re $R(t,\tau)$ a $\mathbb{K}^n$-nek önmagára való kölcsönösen egyértelmű folytonos lineáris leképezése, $s,t,\tau \in I$ esetén*

$$R(s,t)R(t,\tau) = R(s,\tau),$$

továbbá $t \mapsto R(t,\tau)$ az

$$U' = A(t)U, \qquad U(\tau) = \mathbb{I}$$

operátor értékű függvényekre vonatkozó Cauchy-feladat, a rezolvens egyenlet egyetlen teljes megoldása.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$U' = A(t)U, \qquad U(\tau) = \mathbb{I}$$

$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$-beli értékű függvényekre vonatkozó Cauchy-feladat egy teljes megoldását. Mivel az egyenlet lineáris, U az I-n van értelmezve, és $\xi \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\frac{d}{dt}U(t)\xi = \frac{dU(t)}{dt}\xi = A(t)U(t)\xi$$

és $U(\tau)\xi = \xi$. Az unicitás miatt így $U(t)\xi = R(t,\tau)\xi$, azaz $U(t) = R(t,\tau)$, tehát $R(t,\tau) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$ és teljesül az operátoregyenlet a kezdeti feltétellel.

Mivel $s \mapsto R(s,\tau)\xi$ a homogén egyenlet olyan megoldása, amelynek értéke a t pontban $R(t,\tau)\xi$, így

$$R(s,\tau)\xi = R(s,t)R(t,\tau)\xi$$

minden ξ-re, tehát ξ nélkül is. Végül $s = \tau$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $R(t,\tau)$ invertálható, és inverze $R(\tau,t)$.

23.4. A konstans variálása. Keressük az

$$x' = A(t)x + b(t), \qquad t \in I$$

differenciálegyenlet egy megoldását a homogén egyenlet R rezolvensének ismeretében

$$\varphi(t) = R(t,\tau)c(t), \qquad c\colon I \to \mathbb{K}^n$$

alakban. Mivel

$$\varphi'(t) = R_t(t,\tau)c(t) + R(t,\tau)c'(t),$$

és $R_t(t,\tau) = A(t)R(t,\tau)$, az kapjuk, hogy $R(t,\tau)c'(t) = b(t)$, azaz $c'(t) = R(\tau,t)b(t)$, aminek eleget tesz a

$$c(t) = \int_\tau^t R(\tau,s)b(s)\,ds$$

függvény, és ezzel

$$\varphi(t) = R(t,\tau)\int_\tau^t R(\tau,s)b(s)\,ds = \int_\tau^t R(t,s)b(s)\,ds.$$

Így az alábbi tételhez jutunk.

23.5. Tétel. *23.1 jelöléseivel, az inhomogén egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat teljes megoldása*

$$\varphi(t) = R(t,\tau)\xi + \int_\tau^t R(t,s)b(s)\,ds, \quad t \in I. \tag{1}$$

Ha ξ befutja $\mathbb{K}^n$-et, akkor az inhomogén egyenlet összes teljes megoldását megkapjuk.

Bizonyítás. Nyilván $\varphi(\tau) = \xi$. A szuperpozíció elve szerint az inhomogén egyenlet minden teljes megoldását megkapjuk, ha az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet valamely teljes megoldását. A jobb oldal első tagja teljes megoldása a homogén egyenletnek, a második tag pedig az inhomogén egyenletnek.

23.6. Konstansegyütthatós egyenlet. *Az $x' = Ax$ konstansegyütthatós homogén lineáris egyenlet rezolvense*

$$R(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}.$$

Bizonyítás. Nyilván e^{0A} az identikus leképezés. Ha megmutatjuk, hogy $s \mapsto e^{sA}$ differenciálható, és deriváltja Ae^{sA}, akkor a bizonyítás kész. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\frac{e^{(s+h)A} - e^{sA}}{h} - Ae^{sA} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s+h)^k - s^k}{hk!}A^k - \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}A^k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} s^j h^{k-j-1} \right) \frac{A^k}{k!}.\end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben tagonként véve normát, és hasonló átalakítást végezve visszafelé, azt kapjuk, hogy

$$\left\| \frac{e^{(s+h)A} - e^{sA}}{h} - Ae^{sA} \right\| \le e^{|s|\|A\|} \left(\frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \right) \to 0,$$

ha $h \to 0$.

$*$ **23.7. Megjegyzés: differenciálegyenletek Banach-térbeli értékű függvényekre.** Az eddig tárgyalt fogalmak és általános tételek – a Peano-tétel, a kiegyenesítési tétel és az első integrálokra vonatkozó eredmények kivételével – átvihetők az alábbi, jóval általánosabb esetre is: $x' = f(t,x)$, $(t,x) \in D$, ahol X egy Banach-tér, $D \subset \mathbb{R} \times X$ egy nyílt halmaz, és $f\colon D \to X$ egy folytonos függvény, amelyre f_x is folytonos. A bizonyítások változatlanok. Az autonóm egyenlet ekkor is $x' = f(x)$, $x \in D$ alakú, ahol $D \subset X$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to X$ folytonosan differenciálható függvény. Az $x' = A(t)x + b(t)$, $A\colon I \to \mathcal{L}(X;X)$, $b\colon I \to X$ lineáris normál differenciálegyenlet tárgyalása is végezhető ebben az általánosságban. Ennek a fejezetnek a további részei a végtelen dimenziós esetben nem tárgyalhatók változatlanul, de a stabilitáselmélet definíciói és egyes tételei átvihetők az általánosabb esetre is.

23.8. Alaprendszer. 23.1 jelöléseivel, a homogén lineáris

$$x' = A(t)x, \qquad t \in I$$

egyenlet teljes megoldásai lineáris teret alkotnak. Ha $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ teljes megoldásoknak egy lineárisan független rendszere, akkor minden $\tau \in I$-re a $\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_r(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek. Valóban, ha

$$c_1\varphi_1(\tau) + \dots + c_r\varphi_r(\tau) = 0$$

teljesülne, akkor $c_1\varphi_1 + \dots + c_r\varphi_r$ az azonosan nulla megoldással egyezne meg. A homogén rendszer teljes megoldásainak egy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rendszerét *alaprendszer*nek nevezzük, ha lineárisan független. Egy tetszőleges φ teljes megoldás előáll egy alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációjaként. Valóban, ha

$$\varphi(\tau) = c_1\varphi_1(\tau) + \dots + c_n\varphi_n(\tau),$$

akkor φ és $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ ugyanazon kezdeti feltételnek eleget tévő teljes megoldások.

A rezolvens ismeretében könnyen kaphatunk alaprendszert: ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy bázisa $\mathbb{K}^n$-nek, akkor a $t \mapsto R(t,\tau)\xi_j$ függvények alaprendszert alkotnak. Megfordítva, ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ egy alaprendszer, legyen $\Psi(t)$ olyan lineáris leképezés, amely mátrixának oszlopai $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Ekkor $(t,\tau) \to \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}$ a rezolvens. Valóban, kielégíti a rezolvens egyenletet.

23.9. Liouville tétele. *20.4 feltételei mellett, az $x' = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ differenciálegyenlet rezolvensének Jacobi-determinánsára*

$$\det R(t,\tau)'(\xi) = e^{\int_\tau^t (\operatorname{div}_x f)(s,\varphi(s,\tau,\xi))\,ds},$$

ahol φ a karakterisztikus függvény. Speciálisan, az $x' = A(t)x + b(t)$ lineáris normál differenciálegyenlet esetén

$$\det R(t,\tau) = e^{\int_\tau^t \operatorname{Tr} A(s)\,ds}.$$

A tétel jelentősége, hogy segítségével kiszámolhatjuk, az $R(t,\tau)$ operátor hogyan változtatja a mértéket.

Bizonyítás. Fennáll a variációs egyenlet:

$$\varphi_{\xi t}(t,\tau,\xi) = f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi))\varphi_\xi(t,\tau,\xi).$$

Mivel $R(t,\tau)'(\xi) = \varphi_\xi(t,\tau,\xi)$, rögzítve t-t és τ-t, azt kapjuk, hogy

$$\Psi'(t) = A(t)\Psi(t) \quad \text{és} \quad \Psi(\tau) = \mathbb{I},$$

ahol $A(t) = f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi))$ és $\Psi(t) = \varphi_\xi(t,\tau,\xi)$. Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\det \Psi(t) = e^{\int_\tau^t \operatorname{Tr} A(s)\,ds}.$$

Jelölje $|x_1, x_2, \dots, x_n|$ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorvektorokból álló négyzetes mátrix determinánsát. Ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jelölik $\Psi(t)$ mátrixának sorvektorait (sic!), akkor

$$\psi(t) = \big|\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t)\big|$$

és

$$A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{i,j=1}^{n}$$

jelöléssel

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \big|\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big|' \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big|\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i'(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\big| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big|\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\Big| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\big|\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_j(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\big| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)\big|\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)\big|
\end{aligned}$$

így $\psi'(t) = \psi(t)\operatorname{Tr} A(t)$ és $\psi(\tau) = \det \mathbb{I} = 1$. Ezt a Cauchy-feladatot megoldva, kapjuk a tételt.

23.10. Az egyenletek számának csökkentése. 23.1 jelöléseivel, tegyük fel, hogy az n egyenletből álló $x' = A(t)x$ egyenletrendszer egy $\varphi(t) \neq 0$ megoldása ismert. Ekkor az egyenletek száma eggyel csökkenthető az alábbi módon. Tegyük fel, hogy a $\varphi(t)$ függvény i-edik koordinátája nem nulla egy nyílt intervallumon, és keressük a megoldást $x = u\varphi(t) + y$ alakban, ahol u skalár értékű, y pedig olyan n-dimenziós vektor értékű függvény, amelynek i-edik koordinátája nulla. Behelyettesítés után az u-ra és y-ra kapott egyenletrendszer i-edik egyenletéből kifejezve u'-t, és beírva a többi egyenletbe, y nem nulla koordinátáira egy $n-1$ egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert kapunk.

$*$ **23.11. A csatolás csökkentése.** Ha az együtthatómátrix nem függ t-től, azaz a differenciálegyenlet

$$x' = Ax + b(t), \qquad t \in I$$

alakú, a rezolvens explicit formában meghatározható. Egy másik módszer a megoldásra az egyenletek csatolásának csökkentése. Válasszuk meg a T transzformációt úgy, hogy $TAT^{-1} = B$ felső (vagy alsó) háromszögmátrixú (például Jordan-normálalakú) legyen. Az $y = Tx$ helyettesítéssel

$$y' = By + Tb(t),$$

és az egyik egyenlet csak egy ismeretlen függvényt tartalmaz. Ezzel kezdve az egyenletrendszer könnyen megoldható.

23.12. Definíció. *Exponenciális polinom*nak nevezünk egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt, ha előállítható

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} p_j(t)$$

alakban, ahol $\lambda_j \in \mathbb{C}$, p_j pedig komplex együtthatós polinom, ha $j = 1, 2, \dots, n$.

23.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} p_j(t), \qquad \lambda_j \neq \lambda_k, \quad \text{ha} \quad j \neq k$$

exponenciális polinom nulla egy I nem üres nyílt intervallum minden pontjában. Ekkor $p_j(t) \equiv 0$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, azaz a

$$t \mapsto t^k e^{\lambda t}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, \dots$$

komplex értékű függvények lineárisan függetlenek I-n.

Bizonyítás. $n = 1$ esetén $e^{-\lambda_n t}$-vel szorozva, kapjuk, hogy $p_n(t) \equiv 0$ az I intervallumon, így mindenütt. Tegyük fel indirekt, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás, de n-re nem. $e^{-\lambda_n t}$-vel szorozva

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{(\lambda_j - \lambda_n)t} p_j(t) + p_n(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t \in I.$$

Mivel $e^{\lambda t} p(t)$ deriválásakor a polinom főegyütthatója mindig λ-val szorzódik, addig differenciálva, amíg $p_n(t)$ deriváltja nulla nem lesz, ellentmondásra jutunk.

$*$ **23.14. Tétel.** *23.1 jelöléseivel, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ és b minden koordinátája exponenciális polinom, akkor $x' = Ax + b(t)$ minden megoldása is exponenciális polinom. Ha $e^{\lambda t}$ együtthatópolinomja b koordinátáiban legfeljebb r-ed fokú, és λ az A-nak k-szoros sajátértéke, akkor $e^{\lambda t}$ együtthatópolinomja a megoldás koordinátaiban legfeljebb $r + k$. (Azonosan nulla polinom -1 fokú.)*

Bizonyítás. A csatolás csökkentésére az $y = Tx$ komplex lineáris helyettesítéssel az $y' = By + Tb(t)$ egyenletre térünk át, amelyben B alsó háromszögmátrix (pl. Jordan normálalakú). Nyilván $e^{\lambda t}$ együtthatópolinomja a $Tb(t)$ koordinátáiban is legfeljebb r-ed fokú. Elég megmutatnunk, hogy az y megoldás y_i koordinátaiban az $e^{\lambda t}$ együtthatópolinomja legfeljebb $(r+k)$-ad fokú. A j szerinti indukcióval haladunk. Az egyenletek $y_j' = \lambda' y_j + E_j(t)$ alakúak, ahol E_j exponenciális polinom. A $\lambda' = \lambda$ eset az egyenletek közül pontosan k darabban lép fel. Megmutatjuk, hogy ha a j-edik egyenletben $\lambda' = \lambda$, akkor $e^{\lambda t}$ együtthatópolinomja y_j-ben legfeljebb eggyel magasabb fokú, mint az E_j-ben, ha pedig $\lambda' \neq \lambda$, akkor nem magasabb fokú. Ebből adódik az állítás, mert E_j a Tb koordinátainak és az y_l, $l < j$ függvényeknek a lineáris kombinációja. A j-edik egyenlet megoldása $c(t)e^{\lambda' t}$ alakú, ahol

$$c(t) = \int E_j(t) e^{-\lambda' t}\, dt.$$

Felhasználva, hogy az integrandus exponenciális polinom, amelyben az előző tétel bizonyítása szerint csak a nulla kitevőhöz tartozó polinom foka csökken eggyel differenciáláskor, kapjuk, hogy integráláskor meg csak ennek a foka nőhet eggyel. Így y_j-ben csak az $e^{\lambda' t}$ együtthatópolinomjának foka nagyobb eggyel, mint E_j-ben.

$*$ **23.15. Konstansegyütthatós egyenlet.** Az $x' = Ax$ konstansegyütthatós homogén lineáris egyenlet esetén az előző tétel alapján is meghatározható egy alaprendszer a határozatlan együtthatók módszerével. A konstans variálásával megkaphatjuk az $x' = Ax + b(t)$ inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ha b koordinátai exponenciális polinomok, akkor gyakran jobb erre a célra is az előző tételt használni, és a határozatlan együtthatók módszerével dolgozni. A szuperpozíció elve szerint minden λ-ra külön dolgozhatunk.

$\rightarrow$ **23.16. Feladat [8].** Oldjuk meg:

(1)
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 5, \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2, \quad x_2(0) = 5; \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -3, \\ x_2' &= -8x_1 - 3x_2, \quad x_2(0) = 2; \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2, \quad x_1(0) = -4, \\ x_2' &= -9x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

23.17. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet. Legyen I egy nyílt intervallum, $a_i, b\colon I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ folytonos függvények. Az

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x^{(n-i)} + b(t)$$

n-edrendű lineáris egyenlet teljes megoldásait a szuperpozíció elve szerint úgy kaphatjuk, hogy az egyenlet egy teljes megoldásához hozzáadjuk a megfelelő *n-edrendű homogén lineáris*

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x^{(n-i)}$$

egyenlet összes teljes megoldását. Az egyenlet az szerint egy lineáris differenciálegyenletrendszerrel ekvivalens, amelyhez az

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

mátrix, illetve vektor tartozik. Az *alaprendszer* itt a homogén egyenlet I-n értelmezett megoldásainak egy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárisan független rendszere. A homogén egyenlet minden megoldása ezek lineáris kombinációja. A $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ teljes megoldások pontosan akkor alkotnak alaprendszert, ha a

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa, a

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t)$$

Wronski-determináns nem nulla. Ha ez a determináns egy t-re nem nulla, akkor egyetlen t-re sem, mert a Liouville-formula megfelelője a

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) = W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(\tau) e^{\int_\tau^t a_1(s)\,ds}$$

összefüggés. A *konstans variálás*ának módszerét alkalmazva itt a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(j)}(t) = 0 \qquad (j = 0, 1, \dots, n-2)$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) = b(t)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk a c_i' függvényekre, amelynek determinánsa éppen a Wronski-determináns.

Ha az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek ismerjük egy φ nem nulla megoldását, akkor az egyenlet rendje $x(t) = \varphi(t)\int_\tau^t y(s)\,ds$ helyettesítéssel csökkenthető.

23.18. Tétel. *Legyen*

$$x^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)}$$

egy n-edrendű konstansegyütthatós lineáris egyenlet, és legyen λ a

$$z^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

karakterisztikus egyenlet *egy k-szoros gyöke. Ekkor a*

$$t \mapsto t^j e^{\lambda t} \qquad (j = 0, 1, \dots, k-1)$$

függvények a differenciálegyenlet (komplex) megoldásai.

Bizonyítás. A

$$p(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

polinomot $p(z) = q(z)(z-\lambda)^k$ alakban írhatjuk. Ha D jelöli a differenciálás operátorát a végtelen sokszor differenciálható függvények terén, akkor a differenciálegyenlet ezen a téren

$$q(D)(D - \lambda\mathbb{I})^k x = 0$$

alakba írható. Mivel

$$(D - \lambda\mathbb{I})\frac{t^j}{j!}e^{\lambda t} = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t},$$

ha $j > 0$ és $(D - \lambda\mathbb{I})e^{\lambda t} \equiv 0$, látható, hogy a megadott függvények valóban megoldások.

23.19. Megjegyzés. A $p(z)$ minden zérushelyére felírva a

$$t^j e^{\lambda t}, \qquad j = 0, 1, \dots, k-1$$

függvényeket, a differenciálegyenlet egy alaprendszerét kapjuk. Valós a_j együtthatók esetén valós alaprendszerre úgy térhetünk át, hogy a nem valós $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ zérushelyekhez tartozó függvényeket kombináljuk:

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} + t^j e^{\overline{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} - t^j e^{\overline{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

23.20. Az adjungált egyenlet. 23.1 jelöléseivel, az $x' = A(t)x$ egyenletnek az $y' = -A(t)^* y$ *adjungált egyenlet* megoldásai segítségével első integráljait adhatjuk meg: $t \mapsto \langle x(t), y(t) \rangle$ konstans. Valóban,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle x(t), y(t)\rangle &= \langle x'(t), y(t)\rangle + \langle x(t), y'(t)\rangle \\ &= \langle A(t)x(t), y(t)\rangle + \langle x(t), -A(t)^* y(t)\rangle = 0. \end{aligned}$$

23.21. Feladat [11]. Mutassuk meg, hogy egy n-edrendű lineáris egyenlet esetén az átviteli elvvel kapott egyenletrendszerhez tartozó adjungált egyenlet (ha az együtthatófüggvények elég simák) egy lineáris n-edrendű egyenlettel ekvivalens, és határozzuk meg ezt az egyenletet. Hogyan csökkenthető az utóbbi egyenlet egy nem azonosan nulla megoldása birtokában az előző egyenlet rendje?

23.22. Vegyes módszerek. A $\sum_{j=0}^{n} a_j(t) x^{(j)} = b(t)$ lineáris egyenlet rendjének csökkentésére megpróbálhatjuk integrálni az egyenlet mindkét oldalát. Ha a jobb oldalon parciális integrálások után nem marad olyan tag, amely x primitív függvényét tartalmazza, akkor egy eggyel kisebb rendű lineáris egyenletet kaptunk. Esetleg hasznos lehet az egyenletet végigszorozni egy t-től függő függvénnyel.

Ha $a_j(t) = c_j t^j$, akkor *Euler-egyenlet*ről beszélünk, és $t = e^s$ helyettesítéssel konstansegyüttható egyenletet kapunk.

→ **23.23. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $xy'' + 2y' - xy = 0$;
(2) $(2x-1)y'' + 4xy' - 4y = 0$;
(3) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$;
(4) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$;
(5) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$;
(6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$;
(7) $x^2 \ln x y'' - xy' + y = 0$;
(8) $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$;
(9) $(x^2+1)y'' - 2y = 0$.

→ **23.24. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$;

(2) $(3x^3+x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$;

(3) $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + 1/x$.

→ **23.25. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $y'' - y - 2y = 0$;

(2) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

(3) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

(4) $y'' + \omega^2 y = 0$;

(5) $y'' + 2y' + y = 0$;

(6) $y'' + y' - 2y = 0$;

(7) $y'' - 6y' = 0$;

(8) $y'' + 4y = 0$;

(9) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

(10) $y^{(3)} - 3y' - 2y = 0$;

(11) $y^{(4)} - y = 0$;

(12) $y^{(4)} + y = 0$;

(13) $y'' + y = x^2$;

(14) $y'' - y = e^x$;

(15) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

(16) $y'' - y = 2e^x - x^2$;

(17) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$;

(18) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$;

(19) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$;

(20) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin x$;

(21) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;

(22) $y'' + y = \hat{g}x$;

(23) $y'' + y = 1/\cos x$;

(24) $y'' + y' + y = x$;

(25) $y^{(3)} - 3y' - 2y = -8x^3$.

→ **23.26. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$;

(2) $x^2y'' + xy' - y = 0$;

(3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$;

(4) $y'' - 2y/x^2 = 0$;

(5) $y'' - 3y'/x + 5y/x^2 = 0$;

(6) $y'' + 7y'/x + 9y/x^2 = 0$;

(7) $xy'' + y' - y/x = 0$;
(8) $2x^2y'' - xy' + y = x^2$;
(9) $4x^2y'' + y = \sqrt{x}$;
(10) $x^2y'' + xy' - y = x^2$.

23.27. Feladat [10]. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték- és peremérték-problémákat:
(1) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
(2) $y'' + y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
(3) $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;
(4) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;
(5) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;
(6) $y'' + y = 2x - \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$;
(7) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

23.28. Feladat [11]. Határozzuk meg a harmónikus rezgőmozgás, a csillapított harmónikus rezgőmozgás, a kényszerrezgés és a csillapított kényszerrezgés kitérés-idő függvényét.

23.29. Feladat [10]. Jordan-normálalak segítségével határozzuk meg az $x' = Ax$ differenciálegyenlet-rendszer egy alaprendszerét.

23.30. Feladat [11]. Osztályozzuk a két egyenletből álló $x' = Ax$ differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó vektormezőket, egy osztályba sorolva azokat, amelyek diffeomorfak, topologikusan, illetve orbitálisan ekvivalensek.

∗ **23.31. Lineáris magasabbrendű differenciaegyenletek.** Az

$$x(t+n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x(t+n-i), \quad t \in \mathbb{N}$$

homogén lineáris differenciaegyenlethomogén lineáris n-edrendű differenciaegyenlet általános megoldása felírható $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ alakban, ahol az x_i függvények az egyenlet lineárisan független megoldásai. Valóban, vegyük észre, hogy tetszőlegesen megadott $x(0), x(1), \ldots x(n-1)$ értékekhez az egyenletnek pontosan egy megoldása tartozik, így a megoldások n-dimenziós lineáris alteret alkotnak.

∗ **23.32. Feladat: konstansegyütthatós lineáris differenciaegyenletek [9].** Mutassuk meg, hogy ha a μ komplex szám k-szoros gyöke a

$$\mu^n = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^{n-i}$$

egyenletnek, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ esetén az

$$x_j(t) = t^j \mu^{t-j}, \quad t \in \mathbb{N}$$

összefüggéssel definiált függvények az

$$x(t+n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x(t+n-i), \quad t \in \mathbb{N}$$

homogén lineáris konstansegyüttható differenciaegyenlet megoldásai. Itt $0^{t-j} = 1$, ha $t = j$, egyébként 0.

Megoldás. Írjuk az egyenletet $q(S)(S - \mu\mathbb{l})^k x(t) = 0$ alakba, ahol S az $Sx(t) = x(t+1)$ összefüggéssel definiált eltolásoperátor. Mutassuk meg, hogy minden gyökre felírva ezeket a megoldásokat, n lineárisan független megoldást kapunk. (Indirekt feltéve, hogy $t^j\mu^{t-j}$ előáll $t^{j_i}\mu_i^{t-j_i}$, $\mu_i \neq \mu$ vagy $j_i < j$ alakú függvények lineáris kombinációjaként, konstruáljunk egy konstansegyüttható homogén lineáris differenciaegyenletet, aminek az egyik oldal megoldása, a másik nem.)

∗ **23.33. Feladat: konstans variálása [11].** Dolgozzuk ki a konstans variálásának módszerét az

$$x(t+n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x(t+n-i) + b(t), \quad t \in \mathbb{N}$$

inhomogén lineáris n-edrendű differenciaegyenlet megoldására.

∗ **23.34. Feladat: rend csökkentése [9].** Mutassuk meg, hogy homogén lineáris differenciaegyenlet egy megoldását ismerve, az egyenlet rendjét eggyel csökkenthetjük.

∗ **23.35. Feladat [10].** Lépcsőzetes ellenáramú extraháló rendszer anyagmérlegét vizsgálva az

$$x_{t+1} - (a+1)x_t + ax_{t-1} = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenlethez jutunk. Oldjuk meg.

∗ **23.36. Feladat [8].** Oldjuk meg az

$$x_{t+1} - 3x_t + 2x_{t-1} = 1 + a^t, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **23.37. Feladat [8].** Oldjuk meg az

$$x_{t+2} - 2\cos\alpha x_{t+1} + 2x_t = \sqrt{t}, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **23.38. Feladat [9].** Oldjuk meg az

$$(t+2)x_{t+2} - (t+3)x_{t+1} + x_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **23.39. Feladat [9].** Oldjuk meg az

$$(t+2)^2 x_{t+2} - 3(t+1)^2 x_{t+1} - 2t^2 x_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

∗ **23.40. Feladat [9].** Oldjuk meg az

$$t(t+1)x_{t+2} + 3t(t+2)x_{t+1} - 4(t+1)(t+2)x_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

differenciaegyenletet.

24
Stabilitás

Ha a differenciálegyenleteket integrálni lehet, a stabilitás kérdése nem jelent nehézséget. Szükség van azonban olyan módszerekre, amelyek az integrálástól függetlenül megoldják a stabilitás kérdését.

Alekszander Mihajlovics Ljapunov (1892)

Csak stabil módszereket használjunk számítógépen! A konvergencia sebessége a konzisztencia rendjén múlik, azaz a differenciálhányadosnak differenciahányadosokkal való közelítésének pontosságán.

Népköltészet

∗ **24.1. Definíció.** Az $x' = f(t,x)$, $(t,x) \in D$ normál egyenlet egy φ megoldását *Ljapunov-stabil*nak nevezzük, ha van olyan τ a φ értelmezési tartományában, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $\big|\xi - \varphi(\tau)\big| < \delta$ esetén a τ, ξ kezdeti értékekhez tartozó ψ megoldás minden $t \geq \tau$ esetén értelmezve van, és $\big|\varphi(t) - \psi(t)\big| < \varepsilon$, ha $t \geq \tau$. Ha még az is teljesül, hogy $\big|\varphi(t) - \psi(t)\big| \to 0$, ha $t \to \infty$, akkor φ-t *aszimptotikusan stabilis*nak nevezzük. A megoldások kezdeti értékektől való folytonos függése miatt világos, hogy ha φ értelmezési tartományának egy τ pontjára teljesül a fenti feltétel, akkor minden más pontra is.

∗ **24.2. Ljapunov-tétel.** *Legyen $X = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(X;X)$, $U \subset X$ nyílt környezete az origónak, $f\colon \mathbb{R} \times U \to X$ folytonosan differenciálható, és tegyük fel, hogy $\|f(t,x)\|/\|x\| \to 0$, ha $x \to 0$ egyenletesen $t \geq 0$-ban. Ha $\Re(\lambda) < 0$ minden $\lambda \in \sigma(A)$-ra, akkor az $x' = Ax + f(t,x)$ egyenlet $x \equiv 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.*

Bizonyítás. A bizonyítást arra az esetre végezzük, amikor X tetszőleges Banach-tér. Az első lépés e^{tA} becslése. Először tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mivel $\sigma(A)$ kompakt, van olyan $c > 0$, hogy $\Re(\lambda) < -c$ minden $\lambda \in \sigma(A)$-ra. Megmutatjuk, hogy van olyan $C > 0$, hogy

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{-tc}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Valóban,

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{tz}(zI - A)^{-1}\, dz,$$

és ha Γ egy olyan körpálya, amelynek értékkészlete a $\{\Re(z) < -c\}$ félsíkban fekvő R sugarú, $\sigma(A)$-t tartalmazó U körlap határa, akkor

$$\|e^{tA}\| \leq Re^{-ct} \sup_{z \in \partial U} \big\|(zI - A)^{-1}\big\|, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Ha X valós Banach-tér, akkor az A komplexifikáltjára kapjuk a fenti becslést, így az X-ben is teljesül.

Második lépés egy a priori becslés. Legyen x az eredeti egyenlet egy megoldása, amely értelmezve van $[0,T[$-n. Ekkor $g(t)=f(t,x(t))$ jelöléssel x teljesíti az $x'=Ax+g(t)$ egyenletet, így

$$x(t)=e^{tA}x(0)+\int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\,ds.$$

Létezik olyan origó középpontú B zárt gömb, amelyre

$$\big|f(t,x)\big|\le\frac{c}{2}|x|,\quad\text{ha}\quad x\in B,\ t\ge 0.$$

Tegyük fel, hogy $x(t)\in B$, ha $t\in[0,T[$. Ekkor

$$\big|x(t)\big|\le Ce^{-ct}\big|x(0)\big|+\frac{c}{2}\int_0^t e^{-c(t-s)}\big|x(s)\big|\,ds.$$

A Grönwall-lemmát alkalmazva az $e^{ct}\big|x(t)\big|$ függvényre,

$$\big|x(t)\big|\le Ce^{-ct/2}\big|x(0)\big|.$$

Így az alábbi a priori becslést kapjuk: van olyan $V\subset B$ környezete az origónak, amely T-től független, és amelyre V-beli kezdőértékekhez tartozó B-beli megoldások nem hagyják el $B/2$-t.

Végül legyen $x(0)\in V$, és x egy megoldás, amely értelmezve van $[0,T[$ pontjaiban. Ekkor $x(t)\in B/2$, ha $t\in[0,T[$, így az egyenlet jobb oldala korlátos, ha $t\in[0,T[$. Ez azt jelenti, hogy x ezen a halmazon Lipschitz-függvény, tehát értékkészlete itt teljesen korlátos. Az értékkészlet lezárja kompakt, amiből felhasználva, hogy x határtól határig halad, kapjuk, hogy $x(t)$ minden $t\ge 0$-ra folytatható. A fenti becslésből kapjuk az aszimptotikus stabilitást.

∗ **24.3. Autonóm rendszerek megoldásgörbéi.** Autonóm rendszerek megoldásai az alábbi három csoportba sorolhatók:

(1) *egyensúlyi helyzet*nek is nevezett konstans megoldások;
(2) *ciklus*ok az olyan megoldások, amelyek nem egyensúlyi helyzetek, de önmagukat metszik; egy φ ciklus esetén mindig létezik egy legkisebb olyan $T>0$ szám, a *ciklus periódusa*, amelyre $\varphi(t+T)=\varphi(t)$ minden $t\in\mathbb{R}$-re;
(3) önmagukat nem metsző megoldások.

Az, hogy ciklusok esetén mindig létezik legkisebb pozitív periódus, abból következik, hogy $x(0)=\xi$ esetén $x^{-1}(\xi)$ egy zárt halmaz, amely additív részcsoportja $\mathbb{R}$-nek.

Az előző tétel közvetlenül alkalmazható egy $x'=f(x)$ normál autonóm egyenlet ξ egyensúlyi helyzete tanulmányozására. Valóban, ekkor $f(\xi)=0$, és ha $A=f_x(\xi)$, $x(t)=\xi+y(t)$, akkor azt kapjuk, hogy az eredeti egyenlet az

$$y'=Ay+g(t,y)$$

egyenlettel ekvivalens, ahol

$$g(t,y)=f(\xi+y)-f(\xi)-f_x(\xi)y.$$

Az, hogy erre az egyenletre alkalmazható az előző tétel, a középérték-egyenlőtlenségből következik.

∗ **24.4. Periodikus megoldások stabilitása.** *Legyen az*

$$x' = f(t,x), \quad \text{ha} \quad (t,x) \in D$$

normál rendszer periodikus $T > 0$ periódussal, azaz $(t,x) \in D$ akkor és csak akkor, ha $(t+T,x) \in D$, és

$$f(t+T,x) = f(t,x), \quad \text{ha} \quad (t,x) \in D.$$

Tegyük fel, hogy f_x folytonos D-n. Ha a φ megoldás minden t-re értelmezve van, T szerint periodikus, és

$$B(t) = f_x(t,\varphi(t))$$

jelöléssel az

$$y' = B(t)y$$

egyenlet $S(T)$ eltolásoperátorára $r(S(T)) < 1$, akkor φ aszimptotikusan stabilis megoldás.

Bizonyítás. Bizonyításunk érvényes lesz Banach-térbeli értékű megoldásokra is, ha $S(T)$ spektruma nem kerüli meg az origót. Legyen $x(t) = \varphi(t) + y(t)$, így azt kapjuk, hogy

$$y' = B(t)y + g(t,y),$$

ahol

$$g(t,y) = f(t,\varphi(t)+y) - f(t,\varphi(t)) - f_x(t,\varphi(t))y.$$

Alkalmazzuk a Floquet-trükköt. Válasszunk egy $\sigma(S(T))$-t tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományt, és rajta egy Log holomorf függvényt (logaritmus ágat), amely az exponenciális függvény egy megszorításának az inverze. Legyen $A = \frac{1}{T}\operatorname{Log}(S(T))$. Ekkor $S(T) = e^{TA}$. Legyen $P(t) = S(t)e^{-TA}$. Mivel a periodicitás miatt $S(t+T) = S(t)S(T)$, azt kapjuk, hogy

$$P(t+T) = S(t+T)e^{-(t+T)A} = S(t)S(T)e^{-TA}e^{-tA} = P(t).$$

Az $y(t) = P(t)z(t)$ Floquet-transzformációval az egyenletünk

$$z' = Az + P(t)^{-1}g(t,P(t)z)$$

alakú. Mivel $\sup_t \|P(t)\| < \infty$ és $\sup_t \|P(t)^{-1}\| < \infty$, alkalmazható a Ljapunov-tétel.

∗ **24.5. Autonóm rendszer ciklusai.** Úgy tűnik, mintha egy $x' = f(x)$ autonóm normál rendszer egy T periódusú ciklusának stabilitása vizsgálható lenne az előző tétel segítségével. Ez azonban nem igaz, mert a tétel feltételei nem teljesülhetnek ebben az esetben. Valóban, ha φ egy megoldása az autonóm rendszernek, akkor

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)),$$

amiből

$$\varphi'' = B(t)\varphi'(t).$$

Mivel $\varphi'(t)$ a T szerint periodikus,

$$\varphi'(0) = S(T)\varphi'(0), \quad \text{és} \quad \varphi'(0) \neq 0,$$

így $S(T)$-nek sajátértéke az 1. Ebben az esetben tehát élesebb eredményt kell megfogalmaznunk.

24.6. Andronov– Witt-tétel. *Legyen az $x' = f(x)$, $x \in D$ normál autonóm egyenletnek φ egy $T > 0$ periódusú periodikus megoldása, és $B(t) = f_x(\varphi(t))$. Ha az $y' = B(t)y$ egyenlet $S(T)$ eltolásoperátorának az 1 egyszeres sajátértéke, és minden más sajátértéke abszolút értékben 1-nél kisebb, akkor φ Ljapunov-stabil.*

∗ **24.7. Megjegyzések.** Az Andronov–Witt-tétel bizonyításának alapgondolata a következő. Tekintsünk egy, a periodikus megoldást metsző $(n-1)$-dimenziós kis felületdarabot. Ennek a metszésponthoz elég közeli pontjaiból kiinduló megoldások $\approx T$ idő múlva a felületdarabot egy másik pontban metszik. Ezt a pontot hozzárendelve a kiindulási ponthoz, lokálisan egy leképezést kapunk, a *Poincaré-leképezés*t. A periodikus megoldásnak a Poincaré-leképezés egy fixpontja felel meg. Ha a Poincaré-leképezés ezen fixpont közelében lokálisan kontrakció, akkor a periodikus megoldás Ljapunov-stabil. Látható, hogy a Poincaré-leképezés szoros kapcsolatban van az eltolásoperátorral, így egyszerűbb esetekben az eltolásoperátor tanulmányozására vezethető vissza a stabilitás vizsgálata.

A stabilitás vizsgálatának másik eszköze *Ljapunov direkt módszere*. Ennek alapgondolata, hogy „domborzatot", egy olyan valós értékű $x \mapsto L(x)$ *Ljapunov-függvény*t konstruálunk $\mathbb{R}^n$-en, amelyre a megoldásgörbék, a „folyók" mindenütt lefelé haladnak. A lokális minimumhelyek adják a stabilitási pontokat. Fizikai problémáknál gyakran a súrlódás miatt csökkenő energia a Ljapunov-függvény, vagy az entrópia -1-szerese.

A stabilitási tételek „elemi" bizonyításai megtalálhatók Pontrjagin [130] könyvében. Részletesebb vizsgálatok szerepelnek Zeidler [179] munkájában, I/84. o., IV/840. o.

∗ **24.8. Differenciálegyenletek közelítő megoldása.** Az

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

normál egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat közelítő megoldását, egy kis pozitív h lépésközt választva, a $t_k = \tau + kh$ pontokban kívánjuk közelíteni. A *közelítő értéke*k legyenek $\xi = x_0, x_1, x_2, \ldots$. Meg kell különböztetnünk az $E_k = x(t_k) - x_k$ *halmozott hibát* a *k-dik lépés* e_k *hibájától*, amely a (t_{k-1}, x_{k-1}) ponton áthaladó pontos megoldás t_k helyen felvett értékének és x_k-nak a különbsége. Használni fogjuk az $f_k = f(t_k, x_k)$ jelölést.

A legegyszerűbb közelítő módszer az *Euler-módszer*: $x_{k+1} = x_k + hf_k$, amelyet a Peano-tétel bizonyítása során használtunk fel. A középérték-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy egy lépés hibája h^2 nagyságrendű. A gyakorlatban nem használatos, mert nagyon durva közelítést ad.

Az Euler-módszer úgy tekinthető, mintha a megfelelő integrálegyenletben az integrandust konstanssal helyettesítettük volna. Pontosabb közelítést kapunk, ha az

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, x(t))\, dt$$

összefüggésben az integrált a trapézszabállyal közelítjük:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})).$$

Az így kapott *trapéz módszer*nél egy lépés hibája h^3 nagyságrendű, ha $f \in \mathcal{C}^2$. A módszer hátránya, hogy implicit: mindkét oldalon szerepel x_{k+1}, így minden lépésben egy

egyenletet kell megoldanunk. Ha a differenciálegyenlet lineáris, akkor ez nem nehéz. A nemlineáris esetben például iterációt használhatunk. A jobb oldalra beírva x_{k+1} egy közelítését, az egyenlet egy jobb közelítést ad. Ha h nem elég kicsi, akkor előfordulhat, hogy az iteráció nem konvergens, ilyenkor más módszert kell használnunk.

Explicit módszert úgy kaphatunk, hogy a $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ intervallumon alkalmazzuk az érintő formulát:

$$x_{k+1} = x_{k-1} + 2hf_k.$$

Az így kapott *középpont módszer* kiválóan alkalmas arra, hogy az implicit trapéz módszer kezdőértékét szolgáltassa. Ennek hibája is h^3 nagyságrendű, ha $f \in \mathcal{C}^2$. Hátránya, hogy két kezdőérték szükséges. (A trapéz módszer előnye az abszolút stabilitása: lásd később.)

Egy másik gondolat, amellyel a trapéz módszerből kaphatunk explicit módszert, az, hogy a trapéz módszerben a jobb oldalon x_{k+1} helyére az Euler-módszerrel kapott közelítést írjuk, és a két közelítést átlagoljuk. Így kapjuk a *Heun-módszer*t. Ez a módszer így is írható:

$$x_{k+1} = x_k + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right),$$

ahol

$$k_1 = f(t_k, x_k),$$
$$k_2 = f(t_{k+1}, x_k + hk_1).$$

∗ **24.9. Runge–Kutta-módszerek.** Az előző gondolat továbbvitele vezetett a *Runge–Kutta-módszer*ek kialakításához:

$$x_{k+1} = x_k + h\sum_{j=1}^{m} w_j k_j,$$

ahol a k_j korrekciókat a

$$k_j = f(t_k + h\alpha_j, x_k + h\textstyle\sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ij} k_i), \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

formulákból kapjuk. A w_j súlyokat és az α_j, β_{ij} paramétereket úgy választjuk, hogy a hiba minél kisebb legyen. A legelterjedtebb a *klasszikus Runge–Kutta-módszer*:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

ahol

$$k_1 = f(t_k, x_k),$$
$$k_2 = f(t_k + h/2, x_k + hk_1/2),$$
$$k_3 = f(t_k + h/2, x_k + hk_2/2),$$
$$k_4 = f(t_k + h, x_k + hk_3).$$

Ennél a módszernél egy lépés hibája h^5 nagyságrendű, ha $f \in \mathcal{C}^4$.

Az egy lépésben elkövetett hiba a Runge-szabály alapján a következőképpen becsülhető. x_k-ból számítsuk ki x_{k+1}-et és x_{k+2}-t h lépésközzel. Számítsuk ki $x(t_{k+2})$ egy másik $\overline{x}_{k+2}$ közelítését is x_k-ból kiindulva, $2h$ lépésközzel. Ha a hiba nagyságrendje h^m, akkor $e_{k+1} \approx (x_{k+2} - \overline{x}_{k+2})/(2^{m-1} - 1)$. A gyakorlatban a megoldás pontosságát úgy szokás ellenőrizni, hogy fele akkora lépésközzel is megismételjük az egész számítást. Ha nincs lényeges eltérés, akkor a közelítés jónak tekinthető.

∗ **24.10. Prediktor-korrektor módszerek.** Úgy is kaphatunk közelítő módszereket, hogy az x_{k+1}, x_k, és még néhány megelőző pontra — célszerűen az első deriváltakat használó — Hermite–Lagrange-interpolációs formulát írunk fel. Ilyen módon explicit és implicit formulát is kaphatunk. Az implicit módszerek pontosabbak, és jobb a stabilitásuk. Egy explicit formulát jósló (prediktor) formulának használva, majd az így kapott $\overline{x}_{k+1}$ közelítést a javító (korrektor) formula segítségével iterációval javítva, kapjuk a következő pontban az x_{k+1} közelítést. A prediktor formula segítségével kapott kezdeti közelítést érdemes a hibabecslések alapján kapható módosító formulával javítani. A prediktor és a korrektor által adott közelítés alapján becsülhető az adott lépésben elkövetett hiba.

Például, ha a középpont módszert használjuk prediktornak, a trapéz módszert pedig korrektornak, akkor az érintő módszer, illetve a trapézszabály hibájának finomabb vizsgálatával (lásd Bahvalov [7], 95.o.) megmutatható, hogy a korrektor hibája $-h^3x'''(\tau_k)/12$, a prediktor hibája pedig $h^3x'''(\bar{\tau}_k)/3$ alakba írható. Ebből, ha a harmadik derivált nem változik túl gyorsan, akkor $x_k - \overline{x}_k \approx 5h^3x'''(\tau_k)/12$, azaz $x'''(\tau_k) \approx 12(x_k - \overline{x}_k)/(5h^3)$. Az $x'''(\tau_{k+1}) \approx x'''(\tau_k)$ feltételezéssel a hibabecslés $e_{k+1} \approx (x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})/5$. A pontos érték becslése $\overline{x}_{k+1} + 4(x_k - \overline{x}_k)/5$, ezen „módosító" által adott kezdőértékkel érdemes indítani az iterációt. Így az alábbi módszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
\text{prediktor: } & \overline{x}_{k+1} \bar{t} x_{k-1} + 2hf_k \\
\text{módosító: } & x_{k+1} \bar{t} \overline{x}_{k+1} + \frac{4}{5}(x_k - \overline{x}_k) \\
\text{korrektor: } & x_{k+1} \bar{t} x_k + \frac{h}{2}(f(t_{k+1}, x_{k+1}) + f_k) \\
\text{hibabecslés: } & e_{k+1} \approx \frac{1}{5}(x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})
\end{aligned}$$

Az iterációt akkor állítjuk le, ha az egymás utáni iteráltak eltérése kicsi. Ez gyakran már az első iterációnál teljesül. A prediktor-korrektor módszerek előnye a lépéshiba könnyű becsülhetősége, és az, hogy általában — rendszereknél is — csak két függvényértéket kell kiszámolni minden lépésben.

Egy negyedrendű példa a *Hamming-módszer*:

$$\begin{aligned}
\text{prediktor: } & \overline{x}_{k+1} \bar{t} x_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}) \\
\text{módosító: } & x_{k+1} \bar{t} \overline{x}_{k+1} + \frac{112}{121}(x_k - \overline{x}_k) \\
\text{korrektor: } & x_{k+1} \bar{t} \frac{1}{8}(9x_k - x_{k-2}) + \frac{3h}{8}(f(t_{k+1}, x_{k+1}) + 2f_k - f_{k-1}) \\
\text{hibabecslés: } & e_{k+1} \approx \frac{9}{121}(x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})
\end{aligned}$$

∗ **24.11. Automatikus programok.** A fenti módszerek kombinálásával automatikus programok állíthatók össze differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldására. A program rendszerint egy prediktor-korrektor módszeren alapul. Minden lépésben megvizsgáljuk az adott lépés hibáját. Ha ez egy megadott határnál nagyobb, vagy az iteráció konvergenciája lassú, akkor a lépésközt csökkentjük, ha pedig a hiba túl kicsi, akkor növeljük, például felezzük illetve duplázzuk. Nem érdemes a lépésenkénti hibát a kerekítési hibák

nagyságrendjéig csökkenteni, mert a stabilitást veszélyeztetjük. Az indításhoz, illetve a lépésközváltáshoz szükséges x_k értékeket legkényelmesebben egy ugyanolyan pontosságú Runge–Kutta-módszerrel állíthatjuk elő.

Az iteráció során több közeli helyen kiszámítjuk $f(t_{k+1}, x)$ értékét. Az

$$\frac{\left|f(t_{k+1}, x) - f(t_{k+1}, x^*)\right|}{|x - x^*|}$$

hányados $\|f_x\|$ egy durva becslését adja a (t_{k+1}, x_{k+1}) pont közelében. Ez két dologra használható: egyrészt ellenőrizhető, hogy a stabilitás feltétele ($h\|f_x\|$ elég kicsiny, lásd később) teljesül-e, másrészt megvizsgálható, hogy az iteráció gyors konvergenciáját biztosító $r = h|c|\|f_x\| \ll 1$ feltétel teljesül-e, ahol ch az $f(t_{k+1}, x_{k+1})$ együtthatója a korrektor formulában. Ha valamelyik feltétel nem teljesül, a lépésközt csökkentjük. Ajánlatos a lépésközt az éppen szükségesnél jóval kisebbre választani. Az utolsó két $f(t_{k+1}, x)$ érték különbségét összevetve $|\varepsilon_k|/(|c|h)$-val, eldönthető, érdemes-e tovább iterálni.

∗ **24.12. Feladat [8].** Határozzuk meg egy 1 m hosszúságú fonálon lengő tömegpont lengésidejét 90°-os kitérés esetén.

∗ **24.13. Feladat [10].** Két, Nap tömegű csillag egy adott pillanatban úgy mozog, mintha közös tömegközéppontjuk körül, attól 1 cs.e. távolságra körpályán keringenének. Egy harmadik csillag pályasíkjukra merőlegesen halad ugyanilyen sebességgel, a síkot az egyik csillagtól 5, a másiktól 3 cs. e. távolságra metsző egyenesen. Távolsága a síktól 10 cs. e.. Határozzuk meg mindhárom csillag pályáját. (Háromtest probléma.)

∗∗ **24.14. Feladat [14].** Modellezzük egy 1 000 000 000 csillagból álló spirálköd mozgását.

Megoldás. Képezzünk csoportokat, és a távoli csoportokat helyettesítsük tömegközéppontjukkal.

∗∗ **24.15. Feladat [17].** Tervezzünk automatikus lépésközváltással működő programot differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldására.

∗ **24.16. Hibabecslések.** Egylépéses módszerek (Runge–Kutta-módszerek, trapéz módszer) esetén a felgyülemlő hibát a hibabecslési tétel segítségével megbecsülhetjük, ha a pontos megoldás és a közelítő megoldás egy konvex, nyílt halmaz belsejében vannak, „elég távol” annak határától, valamint ezen a halmazon $\|f_x\| \le K$, ahol $K > 0$. Legyen a lépésköz állandóan h, az egy lépésben elkövetett hibák korlátja pedig ε. A hibabecslési tétel szerint, ha azt a pontos megoldásra, és a (t_j, x_j) ponton átmenő pontos megoldásra alkalmazzuk,

$$\begin{aligned} |E_k| &\le |e_k| + |E_{k-1}|e^{Kh} \le |e_k| + |e_{k-1}|e^{Kh} + |E_{k-2}|e^{2Kh} \\ &\le \ldots \le \sum_{j=k}^{1} |e_j|e^{Kh(k-j)} \le \varepsilon \frac{e^{Khk} - 1}{e^{Kh} - 1}. \end{aligned}$$

Többlépéses módszerekre a hibabecslés jóval bonyolultabb (lásd Bahvalov [7], 419–428.o.), de ott is exponenciális jellegű becslés adódik.

A fenti biztos hibakorlátok általában túl nagyok. Gyakran, ha stabil megoldás meghatározására numerikusan stabil módszert alkalmazunk, akkor a felhalmozódó hiba az egyes lépések hibáival egyező nagyságrendű.

∗ **24.17. Numerikus stabilitás.** Mivel differencálegyenletek numerikus megoldásánál minden t_k pontban a közelítést az előző pontokban kapott közelítések felhasználásával számoljuk ki, a felhalmozódó hibák összjátéka olyan nem kívánt hatást, *numerikus instabilitás*t okozhat, amely más numerikus eljárásoknál nem lép fel. Ennek elkerülése a legfontosabb szempont a módszerek kiválasztásánál. Ha egy normál vektor egyenlet megoldásai stabilan számolhatók, akkor a különbségük is, amely közeli megoldások esetén — a variációs egyenlet fennállása miatt — közelítőleg egy homogén lineáris egyenletnek tesz eleget. Ha az egyenlet mátrixa lassan változik, akkor egy szakaszon egy $x' = Ax$ egyenlettel közelíthető, amely viszont, ha A normális operátor, megfelelő bázisban $x' = \lambda x$ alakú skalár egyenletekre esik szét, ahol $\lambda \in \sigma(A)$. Ez a heurisztikus gondolatmenet azt mutatja, hogy a stabilitás vizsgálatára megfelelő modell az

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Cauchy-feladat. Nyilván, ha ennél az egyenletnél instabilitás lép fel, akkor bonyolultabb egyenletnél sem várhatunk sok jót. Másrészt, a fenti modellfeladat „jó", és a vizsgálatával kapott szükséges feltételek nem állnak messze az elégségestől.

Ha egy egyenlet megoldásai exponenciálisan távolodnak egymástól, akkor nyilván nem várható, hogy a numerikus megoldások ne így viselkedjenek. Ha azonban a megoldás Ljapunov-stabil, akkor elvárhatjuk, hogy a numerikus megoldás is legfeljebb lassan távolodjon az igazi megoldástól. Mivel a fenti modellfeladat megoldásai $\Re(\lambda) \leq 0$ esetén lesznek Ljapunov-stabilak, és ekkor korlátosak, azt kell megvizsgálnunk, hogy ebben az esetben nem nő-e gyorsan a közelítő megoldások abszolút értéke.

∗ **24.18. A spektrálkritérium.** Mint látni fogjuk, az előző pontban megfogalmazott modellfeladatra alkalmazva numerikus integrálási módszereinket, az x_k értékekre homogén lineáris differenciaegyenleteket kapunk. A Neumann János által bevezetett *spektrálkritérium* azt követeli meg, hogy az így fellépő differenciaegyenletnek ne legyen olyan exponenciális függvény megoldása, amelynek abszolút értéke növekvő. Ez a szükséges kritérium közel áll az elégségeshez, mivel a homogén lineáris differenciaegyenletek megoldásai exponenciális polinomok.

Vizsgáljuk meg módszereink stabilitását. Az Euler-módszernél

$$x_{k+1} = (1 + \lambda h)x_k,$$

így a stabilitás kritériuma $|1 + \lambda h| \leq 1$. Ez valós λ-ra $-2 \leq \lambda h \leq 0$ esetén teljesül, képzetes λ-ra nem teljesül. A Heun-módszernél $k_1 = \lambda x_k$, $k_2 = \lambda(x_k + h\lambda x_k)$, így

$$x_{k+1} = (1 + \lambda h + \lambda^2 h^2/2)x_k,$$

amiből a stabilitás kritériuma $|1 + \lambda h + \lambda^2 h^2/2| \leq 1$. Ez valós λ-ra $-2 \leq \lambda h \leq 0$ esetén teljesül, képzetes λ-ra nem teljesül. Hasonlóan, a klasszikus Runge–Kutta-módszernél a stabilitás kritériuma $|1+\lambda h+\lambda^2 h^2/2+\lambda^3 h^3/6+\lambda^4 h^4/24| \leq 1$, amely $\Re(\lambda h) \leq 0$, $|\lambda h| < 2$ esetén teljesül, sőt, negatív vagy képzetes λ-ra $|\lambda| < 2{,}8$ esetén.

A prediktor-korrektor módszerek stabilitása csak a korrektoron múlik. A trapéz módszernél a stabilitás feltétele

$$\left|\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}\right| \leq 1,$$

ami mindig teljesül, ha $h > 0$ és $\Re(\lambda) \leq 0$: ez a módszer *abszolút stabil*. Az abszolút stabilitásnak egyenletrendszerek, különösen az egyes mikroelektronikai, kémiai reakciókinetikai alkalmazásoknál fellépő úgynevezett „*stiff*" rendszerek integrálásánál van jelentősége, amelyeknél a megoldás néhány komponense gyorsan oszcillál, vagy gyorsan lecseng, ami a rendszer egésze szempontjából lényegtelen lehet. (Ez a helyzet, ha az $f_x(t, x(t))$ operátornak nagy és kis abszolút értékű, nempozitív valós részű sajátértékei is vannak.) Ilyenkor a lépéshosszt szeretnénk a lassan változó összetevőknek megfelelően megválasztani, de a gyors összetevők miatt fellépő numerikus instabilitás nagy hibákat okozhat. A követelményeknek csak abszolút stabil módszerek felelnek meg. Ilyenkor néha egyszerű iterációt alkalmazva az implicit korrektor formulára, az nem konvergens. A Newton-módszer, esetleg Aitken Δ^2-módszere segíthet.

Az eddig tárgyalt egylépéses módszereknél bonyolultabb a többlépéses módszerek stabilitásának vizsgálata. Például nem stabil a *Milne-módszer*:

$$\begin{aligned}
\text{prediktor: } & \overline{x}_{k+1}\bar{t}x_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}) \\
\text{módosító: } & x_{k+1}\bar{t}\overline{x}_{k+1} + \frac{28}{29}(x_k - \overline{x}_k) \\
\text{korrektor: } & x_{k+1}\bar{t}x_{k-1} + \frac{h}{3}(f(t_{k+1}, x_{k+1}) + 4f_k + f_{k-1}) \\
\text{hibabecslés: } & e_{k+1} \approx \frac{1}{29}(x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})
\end{aligned}$$

Milne módszerének korrektora ugyanúgy adódik, mint a trapéz módszer formulája, ha a trapézszabály helyett a Simpson-formulát alkalmazzuk. Ennél a korrektornál $x' = \lambda x$ esetén

$$x_{k+1} = x_{k-1} + \frac{\lambda h}{3}(x_{k+1} + 4x_k + x_{k-1}).$$

Egy $t \mapsto e^{\alpha t}$ exponenciális függvény ennek a differenciaegyenletnek pontosan akkor megoldása, ha $r = e^{\alpha h}$ jelöléssel

$$r = \frac{1}{r} + \frac{\lambda h}{3}(r + 4 + \frac{1}{r}).$$

Mivel $t \mapsto e^{\alpha t}$ abszolút értéke pontosan akkor nem növekszik, ha $|r| \leq 1$, azt kell megvizsgálnunk, hogy ennek az egyenletnek a gyökei mikor 1-nél nem nagyobb abszolút értékűek. Az egyik, $r \approx 1 + \lambda h$ gyöknek az igazi megoldás közelítése felel meg, a többi gyökök úgynevezett „parazita megoldásokhoz" vezetnek. Elemi számolás mutatja, hogy ennek az egyenletnek $\lambda < 0$ és $h > 0$ esetén mindig van 1-nél nagyobb abszolút értékű gyöke, így a módszer nem stabil. Ilyen módszer számítógépre nem alkalmas.

Hamming módszere Milne prediktorát használja, a korrektort azonban úgy választja, hogy stabil legyen. Hamming korrektoránál a fenti gondolatmenettel az

$$r = \frac{9}{8} - \frac{1}{8r^2} + \frac{3\lambda h}{8}\left(r + 2 - \frac{1}{r}\right)$$

egyenlethez jutunk, amely numerikusan vizsgálható. A részletes tárgyalást lásd Ralston [133] könyvében, 197–199. o, ahol valós λ-ra megmutatják, hogy a módszer elsősorban $-0{,}69 < \lambda h$ esetén használható jól. Tiszta képzetes λ esetén a módszer nem stabil, bár az instabilitás $|\lambda h| < 0{,}69$ esetén elég enyhe.

∗ **24.19. Feladat [10].** Oldjuk meg numerikusan az $x' = -x$, $x(0) = 1$ Cauchy-feladatot Heun módszerével, illetve a trapézszabállyal $h = 0{,}01$ lépésközzel.

∗ **24.20. Feladat [10].** Oldjuk meg numerikusan az $x' = -x$, $x(0) = 1$ Cauchy-feladatot a klasszikus Runge–Kutta-módszerrel, Hamming és Milne módszerével, $h = 0{,}1$ lépésközzel.

∗ **24.21. Feladat [8].** Az $x' = f(t)$ „differenciálegyenletet” a trapéz módszerrel, illetve Milne módszerével integráljuk. Mit kapunk?

∗ **24.22. Feladat [10].** Egy nemlineáris mágneses karakterisztikájú vasmagos tekercset váltakozó feszültséggel gerjesztünk. Oldjuk meg az áram időfüggését jellemző $x' = -\operatorname{th} x + \sin t$ egyenletet numerikusan. Hasonlítsuk össze a megoldást a linearizált egyenlet pontos megoldásával.

∗ **24.23. Feladat [10].** Az $x' = -77x + 114y$, $y' = -38x + 56y$ egyenletrendszernek határozzuk meg a pontos megoldását, és hasonlítsuk össze a Heun-módszerrel 0,05, illetve 0,2 lépésközzel kapott közelítő megoldással.

∗ **24.24. Feladat [10].** Oldjuk meg az előző feladatot trapéz-módszerrel, az implicit egyenletrendszert eliminációval megoldva.

∗ **24.25. Feladat [10].** Ha a trapéz módszert nagyon „stiff” rendszerek integrálására alkalmazzuk, akkor a megoldás $x_k \approx c(-1)^k$ közelítő alakú komponenseket tartalmaz. A nem kívánt oszcillációk elkerülhetők az $\tilde{x}_k = (x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1})/4$ simított értékek képzésével. Alkalmazzuk ezt az előző feladat megoldására.

VIII. Parciális differenciálegyenletek

Schwarz, C. Neumann és Poincaré kifinomult módszerei lényegében megoldották a Laplace-egyenletre vonatkozó peremérték-problémát. Azonban ezeket a módszereket nem lehet közvetlenül kiterjeszteni általánosabb esetekre. ... Meg vagyok győződve róla, hogy ezeket az egzisztencia bizonyításokat meg lehet majd kapni egy általános alapgondolatból*, amely a Dirichlet-elv felé mutat. Esetleg ekkor majd arra is választ lehet adni, hogy vajon minden reguláris variációs problémának van-e megoldása, ha a peremfeltételekre bizonyos megszorítások teljesülnek, és ha ésszerűen* általánosítjuk *a* megoldás *fogalmát.*

David Hilbert (1900)

1971-ben olvastam Fujita és Kato gyönyörű dolgozatát a kvázilineáris Navier–Stokes-egyenletről, és gyönyörű volt látni, hogy megfelelően szemlélve, közönséges *differenciálegyenletnek néz ki, és a vizsgálata a közönséges differenciálegyenleteknél szokásos módon történik. Ez valószínűleg nem meglepetés a parciális differenciálegyenletek szakértőinek, de én közönséges és függvény-differenciálegyenletekkel foglalkoztam, és érdeklődésem, hogy parciális differenciálegyenletekről olvassak, rendszerint lelohadt a technikai nehézségek láttán. Sok parciális differenciálegyenletekre vonatkozó problémát lehet Banach-térbeli közönséges differenciálegyenletként felírni nemkorlátos operátorok felhasználásával. Félcsoportok felhasználásával Volterra-integrálegyenletre áttérve, a parabolikus problémákban már nem lépnek fel nemkorlátos operátorok, és a vizsgálat teljesen hasonló a közönséges differenciálegyenletekhez. Kizárólag általánosított (gyenge) megoldásokkal dolgozunk, amelyek gyakran klasszikus megoldások is.*

Dan Henry (1981)

A parciális differenciálegyenletek vizsgálata a XVIII. század közepén kezdődött, és kezdetben csak a fizikában legfontosabb másodrendű egyenletek, az $u_{tt} - \Delta_x u = 0$ hullámegyenlet, az $u_t - \Delta_x u = 0$ hővezetési egyenlet, és a $-\Delta u = 0$ potenciálegyenlet vizsgálatára korlátozódott. A rezgő húr differenciálegyenletének megoldása körül lezajlott vita után Fourier munkái – mint arról a Fourier-elméletnél már szó volt – megvetették az ortogonális sorok és a spektrálelmélet alapjait. Módszere, a változók szétválasztása, azonban csak speciális esetekben tette lehetővé a fenti egyenletek megoldását. Mindenesetre Fourier munkái hozzájárultak a határfeltételek szerepének tisztázásához. Bár a XIX. század folyamán a kialakuló komplex függvénytan sok esetben lehetővé tette a kétdimenziós potenciálegyenlet megoldásainak meghatározását, az általános elmélet embrionális állapotban maradt, és az egyetlen általános tétel ebből a korból Kovalevszkaja tétele, amely analitikus megoldás lokális létezését és egyértelműségét állítja bizonyos analitikus függvényekkel leírható egyenletrendszer-típusok esetére.

Történt azonban három fontos előrelépés. Egyrészt, 1836–37-ben Sturm és Liouville tisztázták a Fourier-módszer kétdimenziós esetre való alkalmazásakor fellépő közönséges

másodrendű egyenletekre vonatkozó sajátérték-probléma esetén a sajátértékek és a sajátfüggvények létezését és tulajdonságait. Másrészt, 1828-ban Green (1793–1841) az általa felfedezett formulák segítségével az egyszerű fizikai jelentéssel bíró „Green-függvény" segítségével adta meg a potenciálegyenlet megoldásait. Ez az eredmény magába foglalta Poisson 1820-ban felfedezett, gömbre vonatkozó formuláját. Harmadrészt, Gauss, W. Thomson és Dirichlet egymástól függetlenül észrevették, hogy az $\int |\nabla u|^2 \to \min$ variációs probléma Euler–Lagrange-egyenlete $\Delta u = 0$. Ezzel az adott korlátos tartomány határán adott folytonos függvénnyel megegyező, a tartomány belsejében harmonikus függvény létezését – a potenciálegyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldhatóságát – adottnak vették. A gondolatmenetet Riemann általánosította, „Dirichlet-elvnek" nevezte el, és haszonnal alkalmazta a komplex függvénytanban. A variációszámítás problémáinak Weierstrass és tanítványai által végzett kritikus elemzése nyomán azonban világossá vált, hogy nem biztos, hogy a minimumot adó függvényre a Δ operátor alkalmazható, nem biztos a minimum létezése, sőt, még az sem, hogy egyáltalán van olyan – az adott peremfeltételt kielégítő – függvény, amelyre az integrál véges!

Bár a potenciálegyenletre vonatkozó Dirichlet-feladatot a XIX. század vége felé H. A. Schwarz, C. Neumann és H. Poincaré megoldották, sőt, megbirkóztak a változók szétválasztásával adódó $-\Delta u = \lambda u$ Helmholtz-egyenlettel is, Hilbert 1900-ban az előrevivő utat mégis abban látta, hogy a megoldás fogalmát megfelelően általánosítva, a Dirichlet-elvet kell igazolni. Hilbertnek ebben az irányban tett erőfeszítései vezettek a funkcionálanalízis sok fontos fogalmának kifejlesztéséhez, kezdettől azzal a céllal, hogy az eredményeket alkalmazni lehessen a matematikai fizika egyenleteinek megoldására. Másrészt, ez a gondolat vezet a „gyenge megoldások" és „általánosított megoldások" bevezetéséhez, amelyeket a Dirac nyomán a fizikában elterjedt, a „δ-függvénnyel" kapcsolatos heurisztikus gondolatmenetek matematikai megalapozása után disztribúcióként sikerült definiálni. Ma, a funkcionálanalízis eszközeinek birtokában a hatvanas évektől kibontakozó fejlődés nyomán a lineáris parciális differenciáloperátorok esetére igen hatékony általános elmélet áll rendelkezésre.

Ez a fejezet az elemi ismeretek összefoglalás után a disztribúciók rövid tárgyalásával folytatódik. A disztribúciók ismeretében az alapmegoldások segítségével megadjuk a hővezetési egyenletre és a hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat megoldását. Az elliptikus egyenletekre vonatkozó peremérték-problémák tárgyalása vázlatosabb. Az alapgondolat ismertetése után megadjuk a fő eredményeket, és a technikai részletek elhagyásával ismertetjük a hozzájuk vezető utat. Részletesebben foglalkozunk a harmonikus függvényekkel. Végül a vegyes feladatok tárgyalásánál a hangsúly a Fourier-módszer jogosultságának igazolásán van: megmutatjuk, hogy segítségével éppen a gyenge megoldásokat kapjuk meg.

A feladatok nagy részét a Vlagyimirov [171] feladatgyűjteményből vettem.

25
Alapfogalmak és általános módszerek

Azt, hogy parciális differenciálegyenleteknél nem elég az általános megoldást megtalálni, hanem a kérdés inkább speciális perem- és kezdeti feltételek kielégítése, meggyőzően megmutatta 1822-ben Fourier „Théorie de la chaleur" című könyve, és ezt a felfogást explicit módon fejtette ki például Riemann 1860 körül. A sajátfüggvényekről szóló tételek igazságát hihetővé lehet tenni Daniel Bernoulli (1700–1782) következő megfigyelésével. Egy n szabadsági fokú rendszernek pontosan n sajátrezgése van. Egy membrán azonban végtelen szabadsági fokú rendszer. Ennek a rendszernek ezért végtelen sok sajátrezgése van.

Arnold Sommerfeld (1900)

25.1. Parciális differenciálegyenletek osztályozása. Az $x \mapsto u(x)$ valós értékű, több változós ismeretlen függvényre vonatkozó

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, u', \dots, u^{(m-1)})\partial^\alpha u = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)})$$

alakú egyenletet *kvázilineáris parciális differenciálegyenlet*nek nevezzük. *Főrészében lineáris egyenlet* alatt

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)})$$

alakú egyenletet értünk. A

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x)$$

alakú egyenletek a *lineáris egyenlet*ek. $f \equiv 0$ esetén *homogén lineáris egyenlet*ről beszélünk. Ha az a_α együtthatók nem függnek x-től, akkor *konstansegyütthatós lineáris egyenlet*ről beszélünk.

25.2. Elemi megoldási módszerek. Néhány egyenlet már integrálással is megoldható. Például az $u_{xy} = 0$ egyenlet kétszeri integrálással megoldható, és (megfelelő tartományon) azt kapjuk, hogy megoldásai $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ alakúak, ahol φ és ψ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható függvények.

Más esetekben az egyenlet közönséges differenciálegyenletre vezethető vissza. Például az $u_{yx} + 2xu_y = 0$ egyenletből y-t rögzítve $v(x) = u_y(x, y)$ jelöléssel a $v' + 2xv = 0$ egyenletre jutunk. Ezt megoldva,

$$u_y(x, y) = c(y)e^{-x^2},$$

amiből rögzített x mellett integrálva, megfelelő feltételek mellett

$$u(x, y) = \varphi(x) + e^{-x^2}\psi(y).$$

Az általános megoldás ismeretében sokszor a mellékfeltételeknek (például kezdeti, vagy peremfeltételnek) eleget tévő megoldások is meghatározhatók.

Néha helyettesítések segítenek. Például az $u_{xx} = a^2 u_{yy}$ egyenlet $\xi = ax+y$, $\eta = ax-y$ helyettesítéssel, $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ jelöléssel $v_{\xi\eta} = 0$ alakú lesz.

Sokszor könnyen megtalálhatjuk az egyenlet speciális alakú megoldásait. Például egyváltozós függvények szorzataként vagy összegeként keresve a megoldásokat, közönséges differenciálegyenleteket kaphatunk.

→ **25.3. Feladat [8].** Oldjuk meg:

(1) $u_{yx} - u_x = f(x,y)$;

(2) $u_{xx} = u_{yx}$;

(3) $u_y = 0$, $u(x,x) = x^2$;

(4) $\Delta u = 0$, $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$.

25.4. Homogén lineáris elsőrendű egyenletek. Az $u'f(x) = 0$ *homogén lineáris elsőrendű egyenlet* megoldásai, ha f folytonosan differenciálható, az első integráloknál tanultak szerint az $x' = f(x)$ autonóm egyenlet skalár értékű első integráljai. Ezek az ott leírt tételek alapján gyakran meghatározhatók.

25.5. Kvázilineáris elsőrendű egyenletek. Az $u'f(x,u) = g(x,u)$ kvázilineáris elsőrendű parciális differenciálegyenlet megoldásait $v(x,u(x)) = 0$ implicit alakban keresve, az $n+1$ változós valós értékű v függvényre egy homogén lineáris egyenletet kapunk.

→ **25.6. Feladat [11].** Oldjuk meg:

(1) $xu_x + yu_y = 0$;

(2) $u_x + xzu_y - xyu_z = 0$;

(3) $xu_x + yu_y = au$;

(4) $(y^3x - 2x^4)u_x + (2y^4 - x^3y)u_y = 9u(x^3 - y^3)$.

25.7. Általános elsőrendű parciális differenciálegyenletek. Az általános elsőrendű $f(x,u,\operatorname{grad} u) = 0$ egyenlet egy $u\colon G \to \mathbb{R}$ megoldása egy n-dimenziós felület az $(n+1)$-dimenziós térben. Egy ilyen felület egy *felületelem*én egy (x_0,u_0,p_0) hármast értünk, amelyre $x_0 \in G$, $u_0 = u(x_0)$, $p_0 = \operatorname{grad} u(x_0)$. A p_0 vektor jellemzi a felület érintősíkját az (x_0,u_0) pontban, mivel $(p_0,-1)$ az érintősík normálvektora. Az egyenlet a felületi pont és az érintősík állása között fejez ki egy összefüggést.

A megoldásfelületet $t \mapsto (x(t),u(t))$ felületi görbék burkolójaként keressük. Hogy az érintősík állását is figyelemmel kísérhessük, olyan $t \mapsto (x(t),u(t),p(t))$ függvényhármasokat keresünk, amelyeknek minden pontja felületelem. Ekkor természetesen az $(x'(t),u'(t))$ érintővektor merőleges a $(p(t),-1)$ vektorra, azaz teljesül az

$$u'(t) = \langle x'(t), p(t)\rangle$$

sávfeltétel. Ilyen függvényhármasokat az alábbi *karakterisztikus differenciálegyenletrendszer* megoldásával nyerhetünk:

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{grad}_p f(x,u,p),\\ u' &= f_p(x,u,p)p,\\ p' &= -\operatorname{grad}_x f(x,u,p) - f_u(x,u,p)p. \end{aligned}$$

Valóban, ezen közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásaira teljesül a sávfeltétel, mert

$$\langle x', p\rangle = \langle \operatorname{grad}_p f, p\rangle = u',$$

és

$$\frac{d}{dt} f(x(t), u(t), p(t)) = f_x x' + f_u u' + f_p p' = f_x \operatorname{grad}_p f + f_u f_p p - f_p \operatorname{grad}_x f - f_u f_p p = 0,$$

így ha egyetlen pontjuk felületelem, akkor az összes többi is.

Próbáljuk most megoldani a parciális differenciálegyenletünkre vonatkozó alábbi Cauchy-feladatot:

$$u(\varphi(s)) = \psi(s),$$

ahol $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nyílt halmaz, $\varphi\colon H \to \mathbb{R}^n$ és $\psi\colon H \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Először egy $\chi\colon H \to \mathbb{R}^n$ függvényt próbálunk meghatározni úgy, hogy $(\operatorname{grad} u)(\varphi(s)) = \chi(s)$ teljesüljön. Az egyenletből, illetve a kezdeti feltétel differenciálásával

$$f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) = 0, \qquad \langle \chi(s), \varphi'(s)\rangle = \operatorname{grad} \psi(s).$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva χ-re, egy $s \mapsto (\varphi(s), \psi(s), \chi(s))$ kezdeti alakzatot kapunk, amelynek minden pontja egy felületelem. Ezen felületelemekkel, mint kezdőértékekkel megoldva a karakterisztikus differenciálegyenlet-rendszert, egy kétparaméteres

$$(t, s) \mapsto (x(t, s), u(t, s), p(t, s))$$

sokaságot kapunk. Megfelelő feltételek mellett

$$(t, s) \mapsto (x(t, s), u(t, s))$$

lokálisan a megoldás paraméteres előállítása, amelyből a paramétereket szükség esetén kiküszöbölhetjük.

25.8. Teljes integrál. Az előző pont jelöléseivel, az általános elsőrendű egyenlet megoldására gyakran jól használható egy $a \in \mathbb{R}^n$ paramétertől függő, megfelelő feltételeket kielégítő $x \mapsto \Phi(x, a)$ paraméteres megoldássereg, úgynevezett *teljes integrál*. Teljes integrált gyakran könnyen kaphatunk, ha speciális alakú – leggyakrabban egyváltozós függvények összegeként előálló – megoldásokat keresünk. Néhány példa: $u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y)$ illetve $f(u_x, u_y) = 0$ esetén $ax+by+c$ alakban, $f(u, u_x, u_y) = 0$ esetén $\varphi(ax+by)$ alakban, $f(x, u_x) = g(y, u_y)$ esetén $\varphi(x) + \psi(y)$ alakban érdemes keresni a teljes integrált.

Egy teljes integrál birtokában elvileg megkaphatjuk az egyenlet általános megoldását is az állandók variálásával. Valóban, egy tetszőleges (elég „szép") $s \mapsto a(s)$, $s \in \mathbb{R}^{n-1}$ függvényt beírva a teljes integrálba, egy $s \mapsto \Phi(x, a(s))$ megoldássereget kapunk, amelynek a burkolója is megoldás. A burkolót úgy kaphatjuk, hogy a $0 = \Phi_a(x, a(s))a'(s)$ egyenletrendszerből kifejezzük s-et x függvényeként, majd az így kapott $x \mapsto s(x)$ függvényt beírva Φ-be, képezzük az $u(x) = \Phi\Big(x, a(s(x))\Big)$ függvényt. Mivel $u'(x) = \Phi_x\Big(x, a(s(x))\Big)$, a „tetszőleges" $s \mapsto a(s)$ függvénytől függő u függvény kielégíti az egyenletet.

Ha Cauchy-feladatot kívánunk megoldani, akkor az $s \mapsto a(s)$ függvényt úgy érdemes megválasztani, hogy az $x \mapsto \Psi(x, a(s))$ megoldás a $\varphi(s)$ pontban kielégítse a kezdeti feltételt. Ilyen $s \mapsto a(s)$ függvényt a kezdeti feltételből, illetve annak differenciálásával nyert egyenletből álló

$$\Phi(\varphi(s), a) = \psi(s), \quad \Phi_x(\varphi(s), a)\varphi'(s) = \psi'(s)$$

egyenletrendszerből az a paramétert s függvényeként kifejezve kaphatunk.

∗ **25.9. Hamilton–Jacobi-egyenletek.** 19.4 jelöléseivel, az

$$\int_G L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{lokmin}$$

problémához tartozó Euler–Lagrange-differenciálegyenletek, ha az $L_{x'x'}$ bilineáris formából származó kvadratikus forma pozitív definit – ez a mechanikai problémáknál általában teljesül – a $p = L_{x'}(t, x, x')$ új változót bevezetve x' helyett, és a $H = px' - L$ összefüggéssel a $(t, x, p) \mapsto H(t, x, p)$ *Hamilton-függvény*t L helyett, a sokkal szimmetrikusabb

$$\frac{d}{dt}x = H_p(t, x, p), \qquad \frac{d}{dt}p = -H_x(t, x, p)$$

*Hamilton–Jacobi-egyenlet*ekbe megy át. Ez a transzformáció a *Legendre-transzformáció*. A mechanikában H általában az összenergia, p koordinátái az *általános impulzus*ok. Ezek az egyenletek a $(t, x) \mapsto S(t, x)$ függvényre vonatkozó

$$S_t + H(t, x, S_x) = 0$$

parciális differenciálegyenletnek az általános elsőrendű egyenletnél tárgyalt karakterisztikus egyenletei közül kettőnek felelnek meg; a harmadik egyenlet itt nem játszik szerepet, mert H nem függ S-től, és a két egyenlet megoldásának birtokában a harmadik könnyen megoldható. Így a fenti *Hamilton–Jacobi parciális differenciálegyenlet* megoldását a Hamilton–Jacobi egyenletek megoldására vezettük vissza. Sokkal fontosabb a fordított irány. Ismerve a Hamilton–Jacobi parciális differenciálegyenletnek egy (vektor) paramétertől függő $(t, x) \mapsto S(t, x, a)$ megoldásseregét (például teljes integrálját), az

$$S_a(t, x, a) - b, \qquad S_x(t, x, b) - p$$

függvények (időtől függő) első integrálok, így segítségükkel a Hamilton–Jacobi-egyenletrendszer egyenleteinek száma csökkenthető. Valóban, a parciális differenciálegyenletet a, illetve x szerint differenciálva,

$$S_{ta} + H_p S_{xa} = 0, \qquad S_{tx} + H_x + H_p S_{xx} = 0,$$

amiből viszont a Hamilton–Jacobi-egyenleteket felhasználva, adódik, hogy a fenti függvények t szerinti deriváltja nulla. A részletesebb tárgyalást illetően Arnold [6] könyvére, Zeidler [179] könyvének IV. kötetére, illetve Landau–Lifsic [101] könyvének I. kötetére utalunk.

25.10. Másodrendű egyenletek pontbeli osztályozása. Bevezetve az

$$\langle A(x)\partial, \partial\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j$$

differenciáloperátort, a főrészében lineáris másodrendű egyenletek

$$\langle A(x)\partial, \partial\rangle u = f(x, u, u')$$

alakba írhatók. Mivel kétszer folytonosan differenciálható megoldásokat keresünk, feltehető, hogy A szimmetrikus mátrix. Vezessünk be a kétszer folytonosan differenciálható $x \mapsto \tilde{x}$ lokális diffeomorfizmus segítségével új változót. Ezen transzformáció deriváltjának mátrixát $\Psi(x)$-el jelölve, $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$ jelöléssel az egyenlet

$$\langle \tilde{A}(\tilde{x})\partial, \partial\rangle \tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}')$$

alakú, ahol $\tilde{A}(\tilde{x}) = \Psi(x)A(x)\Psi^*(x)$, azaz az együtthatómátrix ugyanúgy transzformálódik, mint egy kvadratikus forma mátrixa. Így a kvadratikus formáknál alkalmazott, teljes négyzetté történő kiegészítésen alapuló módszerrel itt is elérhető egy adott pontban, hogy az $\tilde{A}$ mátrix diagonális alakú legyen, és a főátlóban csak 1, -1 és 0 értékek szerepeljenek. Szorozva az egyenletet -1-gyel, elérhető, hogy ne legyen kevesebb -1, mint $+1$. Ha ez után a főátlóban nincs 0 és 1, akkor *elliptikus*nak, ha nincs 0, és egy darab 1 van, akkor *hiperbolikus*nak, ha nincs 1 és egy darab 0 van, akkor *parabolikus*nak nevezzük az egyenletet az adott pontban.

25.11. Lineáris másodrendű egyenletek normál alakja konstansegyütthatós esetben. Az előző pont szerint ezek az egyenletek lineáris transzformációval

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu = f(x)$$

alakra hozhatók a teljes értelmezési tartományon egyszerre, ahol a_i értéke 1, 0 vagy -1. Feltehetjük azt is, hogy $b_i = 1$, ha $a_i = 0$ és $b_i \neq 0$, mert x_i helyére x_i/b_i-t helyettesítve, ez elérhető. Most

$$\tilde{u}(x) = u(x)e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

jelöléssel, $\alpha_i = -b_i/(2a_i)$, ha $a_i \neq 0$ választással az egyenlet

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i^2 \tilde{u} + \sum_{a_i=0} b_i \partial_i \tilde{u} + \left(\sum_{a_i=0} b_i \alpha_i - \sum_{a_i \neq 0} \frac{b_i^2}{4a_i} + c \right) \tilde{u} = \tilde{f}(x)$$

alakú. Két eset van:

I. Ha van olyan k, hogy $a_k = 0$ és $b_k \neq 0$, akkor $a_i = 0$, $i \neq k$ esetén legyen $\alpha_i = 0$. Az α_k megfelelő választásával az egyenlet

$$\sum_{a_i \neq 0} a_i \partial_i^2 \tilde{u} + \sum_{a_i = 0 \neq b_i} \partial_i \tilde{u} = \tilde{f}(x)$$

alakú.

II. Egyébként az egyenlet

$$\sum_{a_i \neq 0} a_i \partial_i^2 \tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u} = \tilde{f}(x)$$

alakú.

25.12. Normál alak kétváltozós másodrendű főrészében lineáris egyenletekre. Függvényegyüttható esetben általában nincs olyan transzformáció, amely egy főrészében lineáris másodrendű egyenletet egy egész tartományon egyszerre normál alakra hozna. Ez azért van, mert az n koordináta-függvényre $n(n-1)/2+n-1$ feltétel adódik. $n=2$ esetén azonban van ilyen transzformáció. Ekkor az egyenlet az x pontban attól függően hiperbolikus, parabolikus, illletve elliptikus, hogy $d(x)=a_{1,2}^2(x)-a_{1,1}(x)a_{2,2}(x)$ pozitív, nulla, vagy negatív. A kanonikus alakra vezető $x\mapsto\tilde{x}$ transzformációt a

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{a_{1,2}(x)\pm\sqrt{d(x)}}{a_{1,1}}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}=0$$

egyenletek, az úgynevezett *karakterisztikus egyenlet*ek megoldásai segítségével találhatjuk meg. Hiperbolikus esetben legyenek ezek a transzformáció koordinátafüggvényei, és az egyenlet

$$\partial_1\partial_2\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u}')$$

alakú lesz. Parabolikus esetben csak egy karakterisztikus egyenlet van, a másik koordináta-függvény legyen $\tilde{x}_2=x_1$. Elliptikus esetben az egyik karakterisztikus egyenlet komplex megoldásának valós és képzetes része adja a megfelelő koordináta-függvényeket. A részletes tárgyalást lásd Vlagyimirov [170] könyvében.

25.13. Feladat [11]. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő egyenleteket:

(1) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$;
(2) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0$;
(3) $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$;
(4) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+2u_{zz}=0$;
(5) $u_{xx}+2u_{xy}-4u_{xz}-6u_{yz}-u_{zz}=0$;
(6) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{xz}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+3u_{tt}=0$;
(7) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0$;
(8) $u_{xy}+u_{xz}+u_{xt}+u_{zt}=0$.

25.14. Feladat [12]. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi egyenleteket minden olyan tartományban, ahol az egyenlet azonos típusú.

(1) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+u_y=0$;
(2) $u_{xx}-6u_{xy}+10u_{yy}+u_x-3u_y=0$;
(3) $4u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$;
(4) $u_{xx}-xu_{yy}=0$;
(5) $u_{xx}-yu_{yy}=0$;
(6) $xu_{xx}-yu_{yy}=0$;
(7) $yu_{xx}-xu_{yy}=0$;
(8) $x^2u_{xx}+y^2u_{yy}=0$;
(9) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$;
(10) $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$;

→ **25.15. Feladat [8].** Oldjuk meg:

(1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

(2) $u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}(u_x + u_y) = 0$.

→ **25.16. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $u_{xy} = 0$;

(2) $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$;

(3) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$;

(4) $u_{xy} + au_x = 0$;

(5) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 0$;

(6) $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$;

(7) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$;

(8) $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + au_y = 0$;

25.17. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy az $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$ egyenlet $u(x,y) = v(x,y)e^{-bx-ay}$ helyettesítéssel $v_{xy} + (c - ab)v = 0$ alakra hozható.

25.18. Lineáris differenciálegyenletek. A továbbiakban lineáris differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni lineáris határfeltételek mellett. Egy $Lu = f$ alakú lineáris inhomogén differenciálegyenletet tekintünk, ahol az u ismeretlen és az f adott függvény egy $G \subset \mathbb{R}^n$ tartományon vannak értelmezve, L pedig egy függvényegyütthatós lineáris differenciáloperátor, azaz

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

ahol m az L rendje. Az a_α együtthatófüggvények is a G tartományon vannak értelmezve. Rendszerint egy $H \subset \partial G$ halmazon a $Bu = g$ határfeltételeknek eleget tévő megoldásokat keresünk, ahol B egy H-n értelmezett függvényegyütthatókkal képzett vektorértékű lineáris differenciáloperátor. A $Bu = g$ vektoregyenlet koordinátái külön-külön egy-egy skalár határfeltételt jelentenek. Problémánkat tehát tömören

$$G\colon Lu = f, \quad H\colon Bu = g$$

alakban írhatjuk. Ha B rendje k, akkor *megoldás*ról akkor beszélünk, ha (nem teljesen korrekt jelöléssel) $u \in \mathcal{C}^m(G) \cap \mathcal{C}^k(G \cup H)$, azaz ha az u függvény m-szer folytonosan differenciálható G-n, és legfeljebb k-adrendű parciális deriváltjai folytonosan és egyértelműen kiterjeszthetők $G \cup H$-ra.

25.19. A feladat részekre bontása. A szuperpozíció elve szerint egy

$$H \subset \partial G, \quad G\colon Lu = f, \quad H\colon Bu = g$$

lineáris probléma bármely megoldása előállítható egy adott megoldás, és a

$$G\colon Lu = 0, \quad H\colon Bu = 0$$

homogén probléma tetszőleges megoldásának összegeként. Több lépésben is haladhatunk. Ha

$$G\colon Lv = f, \quad H\colon Bv = 0 \quad \text{és} \quad G\colon Lw = 0, \quad H\colon Bw = g,$$

akkor $u = v+w$ az eredeti probléma megoldása. Sőt, ha w tetszőleges „elég sima" függvény, amelyre

$$H\colon Bw = g,$$

akkor a

$$G\colon Lv = f - Lw \quad H\colon Bv = 0$$

homogén peremfeltételű problémát megoldva, $u = v + w$ az eredeti probléma megoldását adja. Ez a *különbség trükk*. Fordítva is alkalmazható: ha inhomogén egyenletet homogén peremfeltétel mellett akarunk megoldani, és ismert az inhomogén egyenlet egy megoldása, akkor a különbség trükkel az inhomogén egyenletet homogén egyenletre vezethetjük vissza inhomogén peremfeltétellel.

Néha hasznos a határt, és ennek megfelelően a problémát is több részre bontani, és a fenti egyszerű trükköket ezekre a részekre alkalmazni.

25.20. A legfontosabb másodrendű egyenletek. Az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ egy részhalmazán értelmezett $(x,t) \mapsto u(x,t)$ függvényre vonatkozó

$$\varrho(x)u_{tt} - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

egyenlet hullámmozgásokat ír le. Feltesszük, hogy ϱ, p, q folytonosak, és hogy $\varrho, p > 0$ a zárt értelmezési tartományukon. Az egyenlet elliptikus típusú. Legfontosabb speciális esete a konstansegyütthatós

$$u_{tt} - a^2\Delta_x u = f(x,t)$$

hullámegyenlet. A fentiekben a div_x, ∇_x, Δ_x jelölések azt fejezik ki, hogy ezeket a differenciáloperátorokat itt csak az x változóban alkalmazzuk. Az x és t jelölések megfelelnek annak, hogy a fizikai alkalmazásokban x a hely, t pedig az idő. Ilyen egyenlet lép fel például mechanikai és elektromágneses rezgések terjedésének leírásakor. Az előbbi esetben u a kitérés, f a külső erő sűrűsége, q a kitéréssel arányos visszahúzó erő direkciós erejének sűrűsége, ϱ a tömegsűrűség, p pedig a mechanikai feszültség. Elektromágneses rezgéseknél, ha u a skalárpotenciál, akkor f a töltéssűrűség, p az (abszolút) dielektromos „állandó", azaz $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, $q \equiv 0$, és ϱ az (abszolút) mágneses permeábilitás, $\mu = \mu_r\mu_0$ reciproka. Vegyük észre, hogy mindkét esetben fu energiasűrűség jellegű. Egyébként – megfelelő feltételek mellett – a vektorpotenciál koordinátái is hasonló egyenletnek tesznek eleget, de ε és μ szerepe megcserélődik, és a töltéssűrűség helyére az áramsűrűség kerül. Más fizikai jelenségek leírásában is szerepet játszik ez az egyenlet, például speciális esete a Klein–Fock–Gordon-egyenlet.

Diffúzió, illetve hővezetés vizsgálatánál lép fel a parabolikus

$$\varrho(x)u_t - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

diffúziós egyenlet. Hővezetés esetén u a hőmérséklet, ϱ a fajhő és a sűrűség szorzata, p a hővezetési tényező, $q \equiv 0$, f pedig a hőforrások (vagy nyelők) energiaintenzitása. Diffúzió esetén u a koncentráció, f a források (vagy nyelők) intenzitása, $\varrho \equiv 1$, p a diffúziós állandó,

q pedig a koncentrációval arányos elnyelődés (vagy kibocsátás) intenzitása. Formailag hasonló egyenlet adódik a kvantummechanikában is (Schrödinger-egyenlet). A diffúziós egyenlet legfontosabb speciális esete a konstansegyütthatós

$$u_t - a^2 \Delta_x u = f(x,t)$$

hővezetési egyenlet.

A fenti egyenleteket – mivel időtől függő folyamatokat írnak le – közös néven *evolúciós egyenlet*eknek fogjuk nevezni. Időben állandó (stacionárius) folyamatok esetén a jobb oldal és az ismeretlen függvény nem függ az időtől, így a

$$-\operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x)$$

elliptikus egyenletet kapjuk. A stacionárius egyenlet, pontosabban az arra vonatkozó sajátérték-probléma lép fel akkor is, ha az evolúciós egyenletek megoldásait a Fourier-módszerrel keressük. Néhány más fizikai terület, ahol szintén erre az egyenletre, vagy valamely speciális esetére jutunk: gravitációs potenciál, potenciális áramlás, szóródási jelenségek. A stacionárius egyenlet fontos speciális esetei a konstansegyütthatós

$$-\Delta u - k^2 u = f(x)$$

Helmholtz-egyenlet, a

$$-\Delta u = f(x)$$

Poisson-egyenlet, és a

$$-\Delta u = 0$$

Laplace-egyenlet.

Megjegyezzük, hogy mint látható, inhomogén, de izotróp közegre vonatkozó egyenletekre szorítkozunk, azért, hogy a fellépő differenciáloperátorok szimmetrikusak legyenek. Anizotróp esetre a tárgyalás technikailag bonyolultabb (lásd Simon–Baderko [150]). A fizikában nem olyan fontos magasabbrendű egyenletek tárgyalását lásd Wloka [175] könyvében. További hivatkozások találhatók Zeidler [179] könyvében.

25.21. Határfeltételek. Az egyszerűbb jelölések kedvéért, ha a parciális deriváltak értelmezve vannak (még disztribúciók esetén is), sőt, $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ esetén ∂G pontjaiban is használni fogjuk rövidítésként a

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u)$$

jelölést.Hasonlóan használjuk a

$$\operatorname{div}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u_j$$

jelölést. Legyen továbbá $u_{\mathbf{n}} = \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle$ a G határának azon pontjaiban, ahol létezik a külső normális.

A másodrendű egyenletek közül a parabolikus és hiperbolikus egyenletekre fontos szerepet játszik a *Cauchy-feladat*, amelyben a G tartomány a $\{t > 0\}$ féltér. Parabolikus egyenletek esetén u, hiperbolikus egyenletek esetén u és u_t adott a féltér határán.

Elliptikus egyenletek esetén egy G tartomány korlátos határán előírt tulajdonságú megoldást keresünk, ez a *peremérték-feladat*. Általános alakja

$$\partial G\colon k(x)u_{\mathbf{n}} + h(x)u = g(x).$$

Mindig fel fogjuk tenni, hogy

$$\partial G\colon k^2 + h^2 > 0.$$

Ha a peremfeltétel

$$\partial G\colon u = g$$

alakú, azaz $k \equiv 0$, $h \equiv 1$, akkor *első peremérték-feladat*ról vagy *Dirichlet-feladat*ról, ha

$$\partial G\colon u_{\mathbf{n}} = g$$

alakú, azaz $k \equiv 1$, $h \equiv 0$, akkor *második peremérték-feladat*ról vagy *Neumann-feladat*ról, ha

$$\partial G\colon u_{\mathbf{n}} + h(x)u = g(x), \quad h \not\equiv 0$$

alakú, azaz $k \equiv 1$, akkor *harmadik peremérték-feladat*ról beszélünk. Vegyük észre, hogy ha k sehol sem nulla, akkor osztva vele, harmadik peremérték-problémához jutunk. A Neumann-feladat ennek speciális esete. Hasonlóan, ha k azonosan nulla, akkor h-val osztva, Dirichlet-feladathoz jutunk. Ha G korlátos, akkor *belső*, egyébként *külső peremérték-feladat*ról beszélünk. Külső peremérték-feladatnál rendszerint előírjuk a megoldás viselkedését a végtelenben. Elsősorban belső peremérték-problémákkal fogunk foglalkozni.

Parabolikus és hiperbolikus egyenleteknél fontos a *vegyes feladat*. Ekkor a $H_T = G \times]0, T[$ halmazon keresünk megoldást, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, és $0 < T \leq \infty$. A $\partial G \times [0, T[$ halmazon a $k(x)u_{\mathbf{n}}(x,t) + h(x)u(x,t) = g(x,t)$ *peremfeltétel* teljesülését követeljük meg, a $\overline{G} \times \{0\}$ halmazon pedig parabolikus esetben u, hiperbolikus esetben u és u_t adottak, ezek a *kezdeti feltétel*ek. Itt is feltesszük, hogy $\partial G\colon k^2 + h^2 > 0$.

→ **25.22. Feladat [11].** Vezessük le a hővezetés egyenletét inhomogén izotróp közeg esetére, ha a hőforrások sűrűsége az időtől és a helytől is függ. (Lásd Vlagyimirov [170], 48. o.)

→ **25.23. Feladat [9].** Határozzuk meg a hővezetés egyenletére a megfelelő peremfeltételt, ha a peremen adott a hőmérsékleteloszlás, vagy ha adott a hőáramlás, vagy ha a hőmérsékletkülönbséggel arányos hőátadás történik. (Lásd Vlagyimirov [170], 49. o.)

→ **25.24. Feladat [11].** Vezessük le a diffúzió egyenletét inhomogén izotróp közeg esetére, figyelembe véve a részecskék koncentrációval arányos elnyelődését és az időtől és a helytől is függő keletkezését. (Lásd Vlagyimirov [170], 49. o.)

25.25. Feladat [10]. Vezessük le az inhomogén, izotróp rezgő membrán differenciálegyenletét. Használjuk fel, hogy a membrán megnyújtásába fektetett munka arányos a felület növekedésével és a rugalmassággal, és alkalmazzunk az u kitérés u_x, u_y deriváltjaiban lineáris közelítést. Tegyük fel, hogy helytől és időtől függő, de a kitéréstől független külső erő, valamint a kitéréssel arányos visszatérítő erő is működik. (Lásd Vlagyimirov [171], 16. o.)

25.26. A változók szétválasztása. Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldására gyakran jól használható a *Fourier-módszer*, a *változók szétválasztása*. Először a megfelelő homogén egyenlet megoldását keressük

$$u(x,y) = v(x)w(y)$$

alakban. Ha például $L = L_x + L_y$, ahol L_x csak az x-ben, L_y csak az y-ban ható differenciáloperátor, $x \in G$, $y \in H$, akkor az $Lu = 0$ egyenletből azt kapjuk, hogy

$$wL_xv + vL_yw = 0,$$

azaz

$$\frac{L_xv}{v} + \frac{L_yw}{w} = 0.$$

Mivel az első tag csak x-től, a második csak y-tól függ, mindkettő konstans, így az

$$L_xv = \lambda v, \quad L_yw = -\lambda w$$

problémákat kapjuk. (Néha máskor is sikerül – megfelelő átalakítások után – így „szétválasztani" a változókat.) Az egyik problémát, mondjuk az elsőt megoldva, bizonyos λ-kra kapunk csak v_λ megoldást. Az eredeti probléma megoldása ezek után

$$u(x,y) = \sum_\lambda v_\lambda(x)w_\lambda(y)$$

alakban kereshető, és itt már csak a w_λ függvények ismeretlenek.

Ha a tartomány nem $G \times H$ alakú, akkor gyakran érdemes ilyen alakra hozni új változók bevezetésével.

Két példát mutatunk be a Fourier-módszer alkalmazására.

25.27. Vegyes feladat megoldása Fourier-módszerrel. Az

$$L_x = -\operatorname{div}_x(p(x)\nabla_x u) + q(x)u$$

jelöléssel a diffúziós egyenletre vonatkozó

$$G \times]0,T[\colon \varrho(x)u_t + L_xu = f(x,t),$$

$$G\colon u(x,0) = u_0(x), \quad \partial G \times [0,T]\colon k(x)u_{\mathbf{n}} + h(x)u = 0$$

vegyes feladatot fogjuk vizsgálni. Először a

$$G \times]0,T[\colon \varrho(x)u_t + L_xu = 0 \quad \partial G \times [0,T]\colon k(x)u_{\mathbf{n}} + h(x)u = 0$$

probléma $u(x,t) = X(x)T(t)$ alakú megoldásait keressük. Így a

$$G\colon \frac{1}{\varrho(x)}L_xX = \lambda X \quad \partial G\colon k(x)X_{\mathbf{n}} + h(x)X = 0$$

sajátérték-problémához jutunk. Legyen X_k ennek a sajátérték-feladatnak a sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban, a megfelelő sajátérték λ_k és keressük az eredeti feladat megoldását

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

alakban. Feltéve, hogy a sor tagonként differenciálható, behelyettesítve és belsőleg szorozva X_j-vel, a

$$T_j' + \lambda_j T_j = \langle f(.,t)/\varrho, X_j \rangle_\varrho, \qquad T_j(0) = \langle u_0, X_j \rangle_\varrho,$$

$j = 1, 2, \ldots$ egyenleteket kapjuk. Teljesen hasonlóan hiperbolikus esetben a

$$T_j'' + \lambda_j T_j = \langle f(.,t)/\varrho, X_j \rangle_\varrho, \qquad T_j(0) = \langle u_0, X_j \rangle_\varrho, \quad T_j'(0) = \langle u_1, X_j \rangle_\varrho$$

egyenletekhez jutunk. Az eljárás formális, a megoldás helyességét ellenőrizni kell. A vegyes feladatok tárgyalásánál megmutatjuk, hogy Fourier módszere pontosan a gyenge megoldásokat adja.

25.28. Sajátérték-feladat megoldása Fourier-módszerrel. A változók szétválasztása gyakran jól használható sajátérték-probléma megoldására is : A megoldást

$$u(x,y) = v(x)w(y)$$

alakban keressük. Ha $L = L_x + L_y$, ahol L_x csak az x-ben, L_y csak az y-ban ható differenciáloperátor, $x \in G$, $y \in H$, akkor az $Lu = \lambda u$ sajátérték-probléma

$$wL_x v + vL_y w = \lambda vw,$$

azaz

$$\frac{L_x v}{v} + \frac{L_y w}{w} = \lambda$$

alakba írható. Mivel a jobb oldali első tag csak x-től, a jobb oldali második tag csak y-tól függ, mindkettő konstans, így az

$$L_x v = \mu v, \quad L_y w = \nu w$$

sajátérték-problémákat kapjuk, és $\lambda = \mu + \nu$. Vegyük észre, hogy az utóbbi két sajátérték-probléma megoldásaiból mindig megkaphatjuk az eredeti sajátérték-probléma egy megoldását.

25.29. A leereszkedés módszere. Egy $\sum_{k=0}^{m} \partial_t^k L_k u = f(x)$ alakú egyenlet megoldásából, ahol az L_k differenciáloperátorok csak x-ben hatnak, gyakran megkaphatjuk az $L_0 u = f(x)$ differenciálegyenlet megoldását, ha t-től nem függő megoldásokat keresünk, vagy t-ben átlagolunk integrálással. Ez a *leereszkedés módszere.*

→ **25.30. Feladat [12].** Egy homogén, vékony rúd oldalfelülete hőszigetelt. Határozzuk meg a hőmérsékleteloszlást az alábbi esetekben:

(1) a rúd végeit nulla hőmérsékleten tartjuk; vizsgáljuk azt az esetet, amikor kezdetben a hőmérséklet konstans, illetve amikor másodfokú függvény írja le, a végeken nulla hőmérséklettel;

(2) az egyik véget nulla hőmérsékleten tartjuk, a másik végen hőcsere megy végbe a nulla hőmérsékletű környezettel;

(3) mindkét végen hőcsere megy végbe a nulla hőmérsékletű környezettel;

(4) a rúd végei hőszigeteltek, a hőmérséklet a rúd két felében különböző konstans;

(5) a rúd végei hőszigeteltek, a hőmérséklet a végpontokban nulla, és a rúd mindkét felében lineárisan nő a középpontig.

25.31. Feladat [12]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_t = u_{xx}$, $u_x(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = x^2 - 1$;

(2) $u_t = u_{xx} - u$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 1$;

(3) $u_t = u_{xx} - 4u$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = x^2 - \pi x$.

→ **25.32. Feladat [12].** Egy homogén, vékony rúd oldalfelülete hőszigetelt. Határozzuk meg a hőmérsékleteloszlást az alábbi esetekben:

(1) a rúd végeit adott hőmérsékleteket tartunk, a kezdeti hőmérséklet konstans;

(2) a rúd végeit adott, egyforma hőmérsékleten tartjuk, a kezdeti hőmérsékletet másodfokú függvény írja le, a végeken nulla hőmérséklettel;

(3) a rúd egyik vége hőszigetelt, a másik végét állandó hőmérsékleten tartjuk, a kezdeti hőmérsékleteloszlás lineáris;

(4) a rúd egyik végét állandó hőmérsékleten tarjuk, a másik végén pedig állandó hőáramot biztosítunk.

→ **25.33. Feladat [12].** Egy homogén, vékony rúd oldalfelületén hőcsere megy végbe a környező nulla hőmérsékletű közeggel, az egyik véget állandó hőmérsékleten tartjuk. Határozzuk meg a hőmérsékleteloszlást az alábbi esetekben:

(1) a rúd másik végét egy másik állandó hőmérsékleten tartjuk;

(2) a rúd másik végén hőcsere megy végbe a nulla hőmérsékletű közeggel, a kezdeti hőmérséklet nulla.

→ **25.34. Feladat [12].** Egy homogén, vékony rúd oldalfelülete hőszigetelt. Határozzuk meg a hőmérsékleteloszlást, ha a kezdeti hőmérséklet nulla, az egyik végét nulla hőmérsékleten tartjuk, a másik végének hőmérséklete pedig az idővel arányosan növeljük.

25.35. Feladat [14]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_t = u_{xx}$, $u_x(0,t) = 1$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$;

(2) $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x$, $u_x(0,t) = u(\pi/2,t) = u(x,0) = 0$;

(3) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = t$, $u(x,0) = e^x \sin \pi x$;

(4) $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x$, $u(0,t) = 0$, $u_x(\pi/2,t) = 1$, $u(x,0) = x$;

(5) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 2\pi t$, $u(x,0) = 0$;

(6) $u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t$, $u(0,t) = 1 + t$, $u(\pi,t) = 1 + t$, $u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x$.

25.36. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2\cos t$, $u_x(0,t) = t^2$, $u_x(\pi,t) = t^2$, $u(x,0) = \cos 2x$;

(2) $u_t = u_{xx} + 9u + 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2$, $u_x(0,t) = 1$, $u_x(\pi,t) = 2\pi$, $u(x,0) = x^2 + 2$;

(3) $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x$, $u_x(0,t) = 1$, $u_x(\pi/2,t) = t^2 + \pi/2$, $u(x,0) = x$.

→ **25.37. Feladat [11].** Határozzuk meg a rögzített végpontú húr rezgését, ha a kezdősebesség nulla, a kezdeti kitérés pedig

(1) fél szinusz hullám;

(2) parabola;

(3) két lineáris szakaszból álló töröttvonal.

25.38. Feladat [12]. Határozzuk meg a rögzített végpontú húr rezgését, ha a kezdeti kitérés nulla, a kezdősebesség pedig

(1) konstans;

(2) egy szakaszon konstans, azon kívül nulla;

(3) egy szakaszon koszinusz félhullám, azon kívül nulla.

25.39. Feladat [13]. Határozzuk meg az áramerősséget egy egyik végén földelt, egyébként szigetelt huzalban, ha az ellenállás elhanyagolható, és kezdetben nem folyik áram, a feszültség pedig egy szinusz negyedhullám alakú.

25.40. Feladat [12]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat a változók szétválasztásának módszerével:

(1) $u_{tt} = u_{xx} + 2b$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$;

(2) $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

25.41. Feladat [11]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = t$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$;

(2) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(0,t) = t + 1$, $u(1,t) = t^3 + 2$, $u(x,0) = x + 1$, $u_t(x,0) = 0$.

25.42. Feladat [11]. Egy rúd, amelynek egyik vége rögzített, kezdetben nyugalomban van, majd a másik végén hatni kezd egy konstans összenyomó erő. Határozzuk meg az $u(x,t)$ összenyomódást.

25.43. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = x^2 - x$, $u_t(x,0) = 0$;

(2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \pi x - x^2$, $u_t(x,0) = 0$;

(3) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$;

(4) $u_{tt} + u_t = u_{xx}$, $u(0,t) = t$, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1 - x$;

(5) $u_{tt} = u_{xx} + u$, $u(0,t) = 2t$, $u(2,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$;

(6) $u_{tt} + u_t = u_{xx}$, $u(0,t) = t$, $u(l,t) = t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x/l$.

25.44. Feladat [12]. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatokat:

(1) $u_{tt} = u_{xx} + x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$;

(2) $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

→ **25.45. Feladat [11].** Határozzuk meg egy négyzet alakú, szélein rögzített membrán szabad rezgéseit, ha a kezdeti kitérés két szinusz félhullám szorzata, a kezdősebesség pedig nulla.

25.46. Feladat [12]. Oldjuk meg a következő vegyes feladatot:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy}, \\ u(0,y,t) &= u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, \\ u(x,y,0) &= 3\sin x \sin 2y, \\ u_t(x,y,0) &= 5\sin 3x \sin 4y. \end{aligned}$$

25.47. Differenciálegyenletek Banach-terekben. Parabolikus és hiperbolikus egyenletek, a Schrödinger-egyenlet esetén, például vegyes feladatok megoldására használható az az eljárás, hogy az egyenletet a t változónak egy függvénytérbeli értékű (a függvénytér elemei az x változó függvényei) közönséges differenciálegyenletnek tekintjük. Ilyen módon az eredeti egyenletből közönséges, de Hilbert-tér vagy Banach-térbeli értékű függvényekre vonatkozó lineáris differenciálegyenletet kapunk, ahol a t-től nem függő lineáris operátor általában nem korlátos. Lehet az egyenletet Hilbert-térbeli értékű disztribúciókra vonatkozó egyenletnek is tekinteni.

A legegyszerűbb esetben $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $t_0 \in I$, X Banach-tér, $x_0 \in X$, $x\colon I \to X$, $f \in \mathbb{R} \times X \to X$ folytonos és az

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad \text{ha} \quad t \in I \tag{1}$$

kezdeti érték problémáról van szó (az I esetleges végpontjaiban egyoldali deriváltakat értve). A probléma ekvivalens az

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds, \quad \text{ha} \quad t \in I \tag{2}$$

integrálegyenlettel. Valóban, ha $x\colon I \to X$ az utóbbinak folytonos megoldása, akkor $x(t_0) = x_0$. Az, hogy valós változós Banach-térbeli értékű folytonos függvény integrálfüggvénye differenciálható, mint a felső határ függvénye, és a derivált értéke a integrandus értéke, a középérték-egyenlőtlenséget felhasználva hasonlóan következik, mint a valós értékű esetben. Innen $x\colon I \to X$ differenciálható, és teljesül a kezdeti érték probléma. Megfordítva, ha a kezdeti érték probléma teljesül, akkor $x\colon I \to X$ folytonos, így az integrál létezik. Integrálásssal kapjuk az integrálegyenletet.

25.48. Picard–Lindelöf-tétel globális Lipschitz-feltétellel. *Az előző pont jelöléseivel, legyen X egy Banach-tér, és valamely pozitív a-val $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times X$. Tegyük fel, hogy $f\colon Q \to X$ folytonos és egy rögzített $L \geq 0$-ra*

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\| \leq \|x - y\|, \quad \textit{ha} \quad (t,x),(t,y) \in Q.$$

Ekkor az előző pontbeli kezdeti érték problémának pontosan egy folytonosan differenciálható megoldása van $[t_0 - a, t_0 + a]$-n minden $x_0 \in X$ kezdeti értékre.

Bizonyítás. Legyen $Y = \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a]; X)$ a szokásos $\| \ \|_u$ uniform normával. Hogy egyszerűbb legyen a bizonyítás, tekintsük inkább az

$$\|y\|_1 = \max_{|t-t_0|\le a} \|y(t)\| e^{-L|t-t_0|}$$

normát. A két norma ekvivalens, mert

$$\|y\|_u e^{-La} \le \|y\|_1 \le \|y\|_u, \quad \text{ha} \quad y \in Y.$$

A Banach-féle fixponttételt fogjuk alkalmazni a $T_p x = y$ összefüggéssel definált operátorra Q-n, ahol

$$y(t) = p + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \text{ha} \quad |t - t_0| \le a.$$

Az operátor Q-t Q-ba képezi, és

$$\begin{aligned} \|T_p x - T_p y\|_1 &= \max_{|t-t_0|\le a} \Big\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))\, ds \Big\| e^{-L|t-t_0|} \\ &\le \max_t \Big| \int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0| - L|t-t_0|}\, ds \Big| L\|x - y\|_1 \\ &\le k\|x - y\|_1, \end{aligned}$$

ahol $k = 1 - e^{-La} < 1$, azaz T_p kontrakció. (Az integrált az $s \ge t_0$ és $s \le t_0$ esetre külön kell kiszámítani.) A Banach-féle fixponttétel szerint a T_p leképezésnek a $p = x_0$ esetben is pontosan egy x fixpontja van, és ez az integrálegyenlet megoldása.

25.49. Picard–Lindelöf-tétel lokális Lipschitz-feltétellel. *A 25.47 pont jelöléseivel, legyen X egy Banach-tér, és valamely pozitív b-vel és c-vel*

$$Q_b = \big\{(t, x) \colon |t - t_0| \le c, \|x - x_0\| \le b\big\}.$$

Tegyük fel, hogy $f \colon Q_b \to X$ folytonos és

(1) *egy rögzített $L \ge 0$-ra*

$$\big\|f(t, x) - f(t, y)\big\| \le L\|x - y\|, \quad \text{ha} \quad (t, x), (t, y) \in Q_b;$$

(2) $\big\|f(t, x)\big\| < K$, *ha $(t, x) \in Q_b$ valamely $K > 0$-ra.*
Válasszunk olyan $0 < a < c$-t, amelyre $Ka < b$. Ekkor

(3) *Egzisztencia és unicitás: a 25.47 pontbeli kezdeti érték problémának egyetlen folytonosan differenciálható megoldása van a $[t_0 - a, t_0 + a]$ intervallumon;*

(4) *a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől x_0 egy kis környezetében.*

Bizonyítás. Legyen $Q_{a,b}$ a $\mathcal{C}([t_0-a,t_0+a];X)$-ben a konstans x_0 függvény körüli b sugarú zárt gömb. Az előző bizonyítás jelöléseivel, ha $x\in Q_{a,b}$, akkor

$$\|T_p(x)-p_0\|_u=\sup_{|t-t_0|\le a}\Big|\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\,ds\Big|\le aK+\|p-p_0\|\le b,$$

ha p elég közel van $p_0=u_0$-hoz, így T_p a $Q_{a,b}$-be képez. Hasonlóan, mint az előző bizonyításban kapjuk, hogy ekkor T_p kontrakció is $\|\ \|_1$-re k konstanssal, így egyetlen $x\in Q_{a,b}$ van, amelyre $T_{p_0}(x)=x$, és egyetlen $x_p\in Q_{a,b}$ van, amelyre $T_p(x_p)=x_p$. Mivel

$$\begin{aligned}\|x_p-x\|_1&=\|T_p(x_p)-T_{p_0}(x)\|_1\le\|T_p(x_p)-T_p(x)\|_1+\|T_p(x)-T_{p_0}(x)\|_1\\&\le k\|x_p-x\|_1+\|p-p_0\|,\end{aligned}$$

a megoldás folytonosan függ $u_0=p_0$-tól.

25.50. Picard–Lindelöf-tétel, globális megoldás létezése. *A 25.47 pont jelöléseivel, legyen X egy Banach-tér, és tegyük fel, hogy*

(1) *f folytonos $\mathbb{R}\times X$-en és a második változójában lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget, azaz minden (t_0,x_0)-hoz van olyan $a,b>0$ és $L\ge0$, hogy*

$$\big\|f(t,x)-f(t,y)\big\|\le L\|x-y\|,\quad\text{ha}\quad|t-t_0|\le a,\quad\|x-x_0\|\le b,\quad\|y-x_0\|\le b;$$

(2) *a priori becslés: van olyan K konstans, hogy a 25.47(1) kezdeti érték probléma minden x megoldására $\big\|f(t,x)\big\|\le K$ minden t-re, amire a megoldás értelmezve van.*

Ekkor a kezdeti érték problémának minden x_0-ra pontosan egy megoldása van, amely az egész $\mathbb{R}$-en értelmezve van.

Vegyük észre, hogy (2) mindig teljesül, ha f korlátos. A tétel annak az általános elvnek a speciális esete, hogy az „a priori becslésből következik a globális megoldás létezése´´.

Bizonyítás. Mivel f folytonos, lokálisan korlátos, így az előző tétel szerint a (t_0,x_0) kezdeti értékhez pontosan egy megoldás van valamely $[t_0-a,t_0+a]$, $a>0$ intervallumon. Rögzítve a kezdeti értéket, legyen $I=]\alpha,\beta[$ a legbővebb nyílt intervallum, amelyen a kezdeti érték problémának van megoldása. Tegyük fel indirekt, hogy $\beta<+\infty$. Az integrálegyenletből

$$x(t_2)=x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}f(s,x(s))\,ds,\quad\text{ha}\quad t_1,t_2\in I.$$

Innen és az a priori becslésből

$$\big\|x(t_2)-x(t_1)\big\|\le K|t_2-t_1|<\varepsilon,\quad\text{ha}\quad t_1,t_2\in I,\quad|t_2-t_1|<\varepsilon/K.$$

Így létezik az $x(t)\to y$, $t\uparrow\beta$ határérték. Ismét alkalmazva az előző tételt a (β,y) kezdeti értékkel, az integrálegyenlet egy lokális megoldását kapjuk. Ezzel folytathatjuk x-et $t\ge\beta$-ra, ami ellentmond β maximális voltának. Az $\alpha>-\infty$ eset hasonlóan kezelhető.

25.51. Általánosított megoldások és regularitási tételek. Parciális differenciálegyenletek esetén gyakran könnyebben meghatározhatjuk az egyenlet úgynevezett „általánosított" vagy „gyenge" megoldásait. Az általánosított megoldások disztribúciók, és közöttük vannak az egyenlet megoldásai is. Sokszor az általánosított megoldások jobban tükrözik a probléma fizikai tartalmát, mint a megoldások. Gyakran az általánosított megoldásokra könnyebb egzisztenciát, unicitást, és az adatoktól való folytonos függést bizonyítani. Az általánosított megoldásra vonatkozó unicitásból és adatoktól való folytonos függésből rendszerint közvetlenül következik a megoldás unicitása és adatoktól való folytonos függése. A megoldás létezését regularitási tételek segítségével kaphatjuk: megmutatjuk, hogy ha az egyenlet együtthatói és a határfeltételek „elég simák", akkor az általánosított megoldás is „elég sima", és így megoldás is.

$*$ **25.52. Feladat [13].** Megállapíthatjuk-e egy mélyfúrás hőmérsékletének elemzésével, milyen volt Newton korában az éghajlat?

$**$ **25.53. Feladat: Lebesgue példája [18].** A példa azt mutatja, hogy ha egy korlátos tartomány belsejébe egy „nagyon hegyes tű" nyúlik be, akkor előfordul, hogy a Dirichlet-problémának nincs megoldása.

Számítsuk ki $\mathbb{R}^3$-ban az x-tengely $[0,1]$ szakasza mentén $\varrho(x) = x$ sűrűséggel eloszló töltés u potenciálját, és mutassuk meg, hogy az $\{x > 0\}$ féltérben

$$\varphi(x,y,z) - 2x \ln \sqrt{y^2+z^2}, \quad y^2+z^2 \neq 0$$

alakú, ahol

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ + x \ln((1-x+\sqrt{(1-x)^2+y^2+z^2})(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2})).$$

Mutassuk meg, hogy φ határértéke az origóban nulla, míg $-2x \ln \sqrt{y^2+z^2}$ határértéke, ha az $y^2+z^2 = e^{-c/x}$ felület mentén közeledünk az origóhoz, c. Az origót az $(1/2,0,0)$ pontba áthelyezve, tekintsük adott $c>0$ esetén az $u = 1+c$ ekvipotenciális felület által határolt G nemkorlátos tartományt, és alkalmazzunk rá $1/2$ sugarú gömbre vonatkozó tükrözést. Legyen G^* a G képe, u^* pedig az u Kelvin-transzformáltja. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenletre vonatkozó, a $g = u^*|_{\partial G^*}$ folytonos függvényhez tartozó belső Dirichlet-feladatnak nincs $\mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^2(G)$-beli megoldása.

26
Disztribúciók

1930 és 40 között számos matematikus kezdte rendszeresen vizsgálni a parciális differenciálegyenletek „általánosított" megoldásainak fogalmát, amely alkalomszerűen (és név nélkül) már Poincaré munkájában előfordul. ...
Dirac nyomán, az elméleti fizikusok nem haboztak úgy tekinteni, hogy a Θ Heaviside-függvénynek, amely 0, ha $x \le 0$ és 1, ha $x > 0$, létezik egy „általánosított deriváltja", az úgynevezett δ „Dirac-függvény", amely $x \neq 0$ esetén 0 lenne, de úgy, hogy $\int \delta(x)\,dx = 1$; további $\delta', \delta'', \ldots$ „deriváltjait" is bevezették ennek a „függvénynek", olyan „egyenleteket" felírva, mint

$$\int f(x)\delta^{(n)}(x-a)\,dx = f^{(n)}(a)$$

egy $f \in \mathcal{C}^n$ függvényre, vagy

$$\int \delta'(a-x)\delta^{(n)}(x-b)\,dx = \delta^{(n+1)}(a-b).$$

Egy ideig a matematikusok számára rejtélyesek voltak ezek a manipulációk, amelyek végül is valódi függvényekre vonatkozó helyes állításokra vezettek. A döntő lépést Sz. Szoboljev tette meg 1936-ban: a nemlétező „függvényekkel" végzett bűvészmutatványok végeredménye végül mindig egy teljesen tisztességes lineáris funkcionál definiálása volt a $\mathcal{D}(G)$ vektortéren, mint például $f \mapsto f^{(n)}(a)$; Szoboljev gondolata volt közvetlenül ilyen funkcionálokkal foglalkozni, feltéve, hogy csak valódi matematikát felhasználó tulajdonságokkal jellemezhetjük őket. ... Laurent Schwartz fő hozzájárulása az volt, hogy 1945-ben észrevette, a disztribúciók Szoboljev által bevezetett fogalma (amelyet ő is függetlenül újra felfedezett,) lehetővé teszi a Fourier-transzformáció kielégítő általánosítását, amely minden előző általánosítást tartalmaz. ... Schwartz szerepe a disztribúcióelméletben nagyon hasonló ahhoz, amit Newton és Leibniz játszott a differenciál- és integrálszámításban: ellentétben a közhiedelemmel, nem ők fedezték fel, olyan emberek, mint Cavalieri, Fermat és Roberval már akkor művelték, amikor Newton és Leibniz még kisiskolások voltak. De ők rendszerezték az algoritmusokat és jelöléseket úgy, hogy a differenciál- és integrálszámítás azzá a sokoldalú és hatékony eszközzé vált, amelynek ismerjük, míg előttük csak bonyolult érveléssel és ábrákkal lehetett kezelni.

Jean Dieudonné [28]

26.1. Definíció. Ha $G \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $\mathcal{D}(G)$ jelöli az összes, G-n értelmezett, végtelen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvények – a *tesztfüggvény*ek – vektorterét. Ha $K \subset G$ kompakt, jelölje $\mathcal{D}_K(G)$a $\mathcal{D}(G)$ azon alterét, amely a K-beli tartójú függvényeket tartalmazza. A $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m}$ normák segítségével definiáljuk a

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{C}^m}}{1+\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{C}^m}}$$

eltolásinvariáns metrikát $\mathcal{D}_K(G)$-n, ez $\mathcal{D}_K(G)$ *szokásos metrikája*. Ebben egy φ_k sorozat pontosan akkor tart nullához, ha $\partial^\alpha\varphi_k \to 0$ egyenletesen minden α-ra. Jelölje $\mathcal{D}'(G)$ az összes olyan $\mathcal{D}(G)$-n értelmezett lineáris funkcionálok terét, amelyeknek minden $\mathcal{D}_K(G)$-re való megszorítása folytonos. $\mathcal{D}'$ elemei a *disztribúciók*. A definícióból következik, hogy egy $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálra $T \in \mathcal{D}'$ pontosan akkor teljesül, ha minden $K \subset G$ kompakt halmazhoz van olyan m egész szám és $C < \infty$ konstans, hogy

$$\big|T(\varphi)\big| \le C\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m}$$

teljesül minden $\varphi \in \mathcal{D}_K$-ra. Ha minden K-hoz ugyanaz az m jó (esetleg más-más C-vel), akkor a disztribúciót legfeljebb *m-edrendű*nek nevezzük. Ha nincs ilyen m, akkor a disztribúció *végtelen rendű*.

26.2. Példák. Jelölje $\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$az $G \subset \mathbb{R}^n$ halmazon *lokálisan Lebesgue-integrálható* függvények terét. Ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}$, legyen

$$T_f(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx,$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}$. Mivel

$$\big|T_f(\varphi)\big| \le \|\varphi\|_0 \int_K |f|,$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}_K$, T_f nulladrendű disztribúció. Az ilyen alakban előállítható disztribúciókat *reguláris disztribúció*knak nevezzük. Sokszor nem korrekt módon jelölésben nem teszünk különbséget egy lokálisan integrálható függvény és a hozzá tartozó reguláris disztribúció között. Hasonlóan, ha μ egy lokálisan véges mérték, amely G Borel-halmazain értelmezve van, akkor a

$$T_\mu(\varphi) = \int_G \varphi\,d\mu, \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

összefüggés egy nulladrendű disztribúciót definiál, a *μ-höz tartozó disztribúció*t. Ha a μ mérték a Dirac-mérték, azaz G minden részhalmaza μ-mérhető, és mértéke 1, ha az origót tartalmazza, egyébként nulla, akkor a kapott disztribúció a *Dirac-delta*, amit δ-val fogunk jelölni. A Dirac-delta pontszerű fizikai mennyiség (tömegpont, ponttöltés, stb.) matematikai megfelelője.

A vonal mentén, felületen, stb. koncentrálódó fizikai mennyiségnek megfelelő disztribúciót is könnyen megadhatjuk. Legyen $0 \le k \le n$, és tekintsünk egy $\varrho\colon G \to \mathbb{R}$ függvényt, amely lokálisan χ^k-integrálható. Megmutatható, hogy ϱ szükségképpen eltűnik a G egy k-dimenziós H részhalmazán kívül. A

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(x)\varrho(x)\,d\chi^k(x)$$

összefüggés egy nulladrendű disztribúciót definiál, amely a H részhalmazon ϱ „sűrűséggel" eloszló fizikai mennyiségnek felel meg. Az eloszlást jelentő disztribúció elnevezés innen származik.

26.3. Általánosított Lagrange-lemma. *A $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon lokálisan integrálható f függvényre $T_f = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$ majdnem mindenütt.*

Bizonyítás. Az elégségesség nyilvánvaló. Legyen $a \in G$ és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy a

$$T = \{x : |x_i - a_i| \le \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\}$$

téglára $T \subset G$ teljesüljön. 18.15 jelöléseivel, mivel minden $k \in \mathbb{Z}^n$-re az $x \mapsto e^{\pi i \langle k,x\rangle/\varepsilon}\omega_\varepsilon(x-a)$ függvény $\mathcal{D}(G)$-ben van,

$$\int f(x)\omega_\varepsilon(x-a)e^{\pi i\langle k,x\rangle/\varepsilon}\,dx = 0.$$

Eszerint az $f\tau_a\omega_\varepsilon$ függvény Fourier-együtthatói T-n nullák, így ez a függvény majdnem mindenütt nulla T-n. Ebből adódik, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt az a pont ε sugarú környezetében, így minden kompakt részhalmazán G-nek. Mivel G megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése, kapjuk, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

26.4. Definíció. Ha disztribúciókra akarunk valamit definiálni, akkor megnézzük, hogy reguláris disztribúciók esetén mi adódik, és az így kapott formulát használjuk fel – megfelelő átalakítások után – definíciónak. A „megfelelő átalakítás" abban áll, hogy mindent, amit a disztribúcióval akarunk tenni, „átjátszunk" a tesztfüggvényre. Például parciális integrálással adódik, hogy ha f egy m-szer folytonosan differenciálható függvény, $|\alpha| \le m$, akkor $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(\partial^\alpha\varphi)$. Ennek alapján ha α egy multiindex, és $T \in \mathcal{D}'$, akkor legyen

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi),$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}$. Ha

$$|T\varphi| \le C\|\varphi\|_m \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}_K\text{-ra},$$

akkor

$$\big|(\partial^\alpha T)\varphi\big| \le C\|\partial^\alpha\varphi\|_m \le C\|\varphi\|_{m+|\alpha|},$$

így $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$. Definíciónk alapján tehát ha f egy m-szer folytonosan differenciálható függvény, akkor $|\alpha| \le m$ esetén

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

Ha f nem folytonosan differenciálható, akkor ez általában nem áll fenn. Például, ha

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a *Heaviside-függvény*, akkor T_Θ deriváltja a Dirac-delta, de Θ'-höz a nulla disztribúció tartozik. A példa mutatja, hogy szakadásos függvények disztribúció-deriváltja jobban tükrözi a függvény viselkedését, mint a közönséges derivált.

Ugyanezen elv alapján, ha $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{E}$, legyen

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

és legyen

$$(\tau_x T)(\varphi) = T(\tau_{-x}\varphi), \quad \check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi}).$$

Vegyük észre, hogy ha $g \in \mathcal{C}^m$, és $|\alpha| \le m$ esetén $\partial^\alpha T$ egy f_α függvényhez tartozó reguláris disztribúció, akkor $|\beta| \le m$ esetén

$$\partial^\beta T_{fg} = \sum_{0\le\alpha\le\beta} T_{f_\alpha \partial^{\beta-\alpha} g}.$$

26.5. Példa. Egydimenzióban $-\delta'$ egy dipólusnak a matematikai megfelelője. Könnyen definiálhatjuk a vonal mentén, felületen, stb. eloszló dipólusrendszer megfelelőjét is. Legyen $0 \le k \le n$, H egy k-dimenziós részhalmaza G-nek, $\varrho\colon G \to \mathbb{R}$ egy lokálisan χ^k-integrálható függvény, amely H-n kívül eltűnik, és

$$e\colon H \to \{x\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}.$$

A

$$T(\varphi) = \int_H \langle \nabla\varphi(x), e(x)\rangle \varrho(x)\, d\chi^k(x)$$

elsőrendű disztribúció a H-n ϱ sűrűséggel e irányítással eloszló dipólusrendszer matematikai megfelelője. Felületi dipólusrendszer esetén e legtöbbször a felületi normális, ekkor *kettős réteg*ről beszélünk.

26.6. Definíció. $\mathcal{D}'$-ben a funkcionálok pontonként konvergenciáját (az úgynevezett *gyenge konvergenciát* vagy pontosabban *gyenge* konvergenciát*) érdemes használni. Ennél

$$T_k \to T, \quad \text{ha} \quad T_k(\varphi) \to T(\varphi) \text{ minden } \varphi \in \mathcal{D}\text{-re.}$$

$\mathcal{D}'$ teljes erre a konvergenciára az alábbi értelemben: ha minden $\varphi \in \mathcal{D}$-re $T_k(\varphi)$ konvergens, akkor a

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$$

összefüggés egy $T \in \mathcal{D}'$ disztribúciót definiál. A bizonyítás megtalálható Vlagyimirov [170] könyvében, 84–86. o. Megmutatható, hogy minden $T \in \mathcal{D}'$ disztribúció előállítható $\mathcal{D}$-beli függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók sorozatának a határértékeként. A bizonyítás alapgondolata megtalálható Vlagyimirov [170] könyvében, 131. o. A pontos bizonyítást lásd Federer [37], 346–348. o.

Mivel a disztribúciók a függvényfogalom általánosításainak tekinthetők, az *általánosított függvény* elnevezés is gyakran használatos. Ennek megfelelően, nem korrekt módon, számos könyv az általánosított függvény „változóját" is kiírja, például $\delta(x)$, $\delta'(x)$, stb. Gyakran még „titokzatosabb" jelölésekkel is találkozhatunk, például $\delta(1-|x|)$, $\delta'(1-|x|)$, stb. Ezek értelmét megfejthetjük, ha a disztribúciót függvényekkel közelítjük. Például 18.15 jelöléseivel, $\omega_{1/k} \to \delta$, ha $k \to \infty$, másrészt (egydimenzióban)

$$\begin{aligned}\int \omega_{1/k}(1-|x|)\varphi(x)\,dx &= \int_{-2}^{0} \omega_{1/k}(1+x)\varphi(x)\,dx + \int_0^2 \omega_{1/k}(1-x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \omega_{1/k}(t)\varphi(t-1)\,dt + \int_{-1}^{1} \omega_{1/k}(t)\varphi(1-t)\,dt \\ &\to \varphi(-1) + \varphi(1),\end{aligned}$$

így $\delta(1-|x|)$ a $\tau_{-1}\delta + \tau_1\delta$ disztribúciót jelöli.

→ **26.7. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy ha $T_k \to T$ a $\mathcal{D}'$-ben, akkor bármely α multiindexre $\partial^\alpha T_k \to \partial^\alpha T$.

26.8. Definíció. Tegyük fel, hogy $T \in \mathcal{D}'(G)$. Ha H egy nyílt részhalmaza G-nek, és $T(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(G)$-re, amelynek tartója H-ban van, akkor azt mondjuk, hogy T *eltűnik* H-n. Legyen W az összes ilyen H-k egyesítése. $G \setminus W$-t a T *tartójának* nevezzük, és $\operatorname{spt}(T)$-vel jelöljük. Ha $T, S \in \mathcal{D}'(G)$ és $T - S$ eltűnik H-n, akkor azt mondjuk, hogy T és S *megegyeznek* H*-n.*

26.9. Tétel. *Ha $T \in \mathcal{D}'(G)$, akkor T eltűnik $G \setminus \operatorname{spt}(T)$-n.*

A bizonyítást lásd Vlagyimirov [170], 87–88. o.

26.10. Következmény. *Tegyük fel, hogy $T \in \mathcal{D}'$ és $\varphi \in \mathcal{D}$. Ekkor*

(1) *ha $\operatorname{spt}(\varphi) \cap \operatorname{spt}(T) = \emptyset$, akkor $T(\varphi) = 0$;*

(2) *ha $\operatorname{spt}(T) = \emptyset$, akkor $T = 0$;*

(3) *ha $\psi \in \mathcal{E}$, és $\psi = 1$ valamely $\operatorname{spt}(T)$-t tartalmazó nyílt halmazon, akkor $\psi T = T$.*

Bizonyítás. (1) és (2) triviálisak. (3) abból adódik, hogy $\varphi - \psi\varphi$ tartója nem metsz bele $\operatorname{spt}(T)$-be.

26.11. Disztribúciók kiterjesztése. Bizonyos $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciókat nem csak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényein értelmezhetünk, hanem értelmezésük kiterjeszthető más $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényekre is.

Egy $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sorozatra azt mondjuk, hogy *egyhez tart*, ha minden $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazhoz van olyan k_0, hogy $k \geq k_0$ esetén $\eta_k(x) = 1$, ha $x \in K$, továbbá minden $m \in \mathbb{N}$-hez van olyan c_m konstans, hogy $\|\eta_k\|_{\mathcal{C}^m} \leq c_m$ minden k-ra. Ilyen sorozatot kaphatunk simítással: 18.15 jelöléseivel, legyen $\eta_k = \xi_{\mathbb{B}_k(0)} * \omega$.

Azt mondjuk, hogy a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció *kiterjeszthető* a $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényre, ha minden egyhez tartó η_k sorozatra létezik a

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T(\eta_k\varphi)$$

határérték, és ez nem függ az η_k sorozat választásától.

26.12. Példa. Ha $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, és $\operatorname{spt}(T) \cap \operatorname{spt}(\varphi)$ kompakt, akkor T kiterjeszthető φ-re. Legyenek ugyanis η és η^* olyan $\mathcal{D}$-beli függvények, amelyek 1-et vesznek fel ezen kompakt halmaz egy környezetében. Ekkor

$$T(\eta\varphi) - T(\eta^*\varphi) = T((\eta - \eta^*)\varphi) = 0,$$

mert $\operatorname{spt}((\eta-\eta^*)\varphi) \cap \operatorname{spt}(T) = \emptyset$. Ebből következik, hogy ha η_k egyhez tart, akkor $T(\eta_k\varphi)$ valahonnan kezdve konstans, tehát létezik a határértéke, és a határérték nem függ az η_k sorozat választásától. Speciálisan, kompakt tartójú disztribúció minden $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényre kiterjeszthető.

26.13. Disztribúciók direkt szorzata. Legyen az f a G nyílt halmazon lokálisan Lebesgue-integrálható, g pedig a H nyílt halmazon lokálisan Lebesgue-integrálható. A $G \times H$ nyílt halmazon értelmezett $(f \times g)(x, y) = f(x)g(y)$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvényhez tartozó disztribúcióra

$$T_{f\times g}(\varphi) = \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

Ez motiválja az alábbi definíciót. Legyen $T \in \mathcal{D}'(G)$ és $S \in \mathcal{D}'(H)$. Ha $\varphi \in \mathcal{D}(G \times H)$, akkor megmutatható, hogy $x \mapsto S(\varphi(x, .))$ egy $\mathcal{D}(G)$-beli függvény, és a

$$(T \times S)\varphi = T_x(S_y(\varphi(x, y))$$

összefüggés egy $\mathcal{D}'(G \times H)$-beli disztribúciót definiál, a T és S szorzat *direkt szorzat*át. A jelölés azt fejezi ki, hogy a φ kétváltozós függvényre először rögzített x mellett mint y függvényére alkalmazzuk az S disztribúciót, majd a kapott, x-től függő függvényre alkalmazzuk T-t. Részletesebben lásd Vlagyimirov [170] könyvét, 116–118. o.

26.14. Disztribúciók konvolúciója. Tegyük fel, hogy $f, g, |f| * |g| \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Ekkor $f * g$ is lokálisan integrálható, és

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int (f * g)(t)\varphi(t)\, dt = \iint f(y)g(t-y)\varphi(t)\, dy\, dt \\ &= \iint f(y)g(x)\varphi(x+y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Ennek alapján a $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók konvolúcióját a

$$(T * S)(\varphi) = (T_x \times S_y)(\varphi(x+y)), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

összefüggéssel értelmezzük. Mivel az $(x, y) \to \varphi(x+y)$ függvény nem kompakt tartójú, a konvolúciót csak akkor értelmezhetjük, ha $T_x \times S_y$ minden ilyen függvényre kiterjeszthető. Megmutatható, hogy ekkor a fenti összefüggés disztribúciót definiál. A részletes tárgyalást lásd Vlagyimirov [170], 123. o. Például a fenti feltételek mellett $T_f * T_g$ definiálva van, és $T_f * T_g = T_{f*g}$. Egy másik fontos eset, amikor minden $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazra az

$$\big\{(x, y) \colon x + y \in K, x \in \operatorname{spt}(T),\ y \in \operatorname{spt}(S)\big\}$$

halmaz kompakt. Ekkor $T_x \times S_y$ tartójának és $(x, y) \mapsto \varphi(x+y)$ tartójának metszete kompakt, így $T * S$ definiálva van.

Megmutatjuk, hogy ha $T * S$ definiálva van, akkor

$$(T * S)(\varphi) = T_x\Big(S_y(\varphi(x+y))\Big).$$

Ezt a formulát néha könnyebb alkalmazni. Itt $x \mapsto S_y(\varphi(x+y))$ általában nem kompakt tartójú, de $\mathcal{E}$-beli függvény, és megmutatjuk, hogy T_x kiterjeszthető erre a függvényre. A bizonyításhoz válasszunk olyan r számot, amelyre $\mathbb{B}_r(0)$ tartalmazza φ tartóját. Legyen η_k egy egyhez tartó sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-ben . Tegyük fel, hogy η_k tartója a $\mathbb{B}_{r_k}(0)$ gömbben van. Válasszuk úgy az egyhez tartó ζ_k sorozatot, hogy ζ_k legyen 1 a $\mathbb{B}_{r+r_k}(0)$ gömbön. Mivel $|x| \le r_k$ esetén $\varphi(x+y)$ tartója az $r + r_k$ sugarú gömbben van, így ekkor $S_y(\zeta_k(y)\varphi(x+y)) = S_y(\varphi(x+y))$. Ebből adódik, hogy $x \mapsto S_y(\varphi(x+y))$ akárhányszor differenciálható, és

$$\begin{aligned} (T * S)(\varphi) = (T_x \times S_y)(\varphi(x+y)) &= \lim_{k\to\infty} (T_x \times S_y)(\eta_k(x)\zeta_k(y)\varphi(x+y)) \\ &= \lim_{k\to\infty} T_x\Big(\eta_k(x)S_y(\zeta_k(y)\varphi(x+y))\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} T_x\Big(\eta_k(x)S_y(\varphi(x+y))\Big) = T_x\Big(S_y(\varphi(x+y))\Big). \end{aligned}$$

26.15. Példák. Legyen $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(1) Ha $\operatorname{spt}(T)$ kompakt, akkor $T * S$ definiálva van.

(2) Egy dimenzióban, ha $\operatorname{spt}(T), \operatorname{spt}(S) \subset [0, \infty)$, akkor $T * S$ definiálva van.

(3) $T * \delta = T$.

(4) $(1 * \delta') * \Theta = 0 * \Theta = 0 \neq 1 = 1 * \delta = 1 * (\delta' * \Theta)$.

26.16. Tétel. *Legyen $T, R, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ha $T * S$ és $R * S$ definiálva van, akkor az alábbi disztribúciók is, és*

(1) $(\beta T + \gamma R) * S = \beta(T * S) + \gamma(R * S)$;

(2) $T * S = S * T$;

(3) $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$;

(4) $\tau_x(T * S) = (\tau_x T) * S = T * (\tau_x S)$.

A bizonyítást lásd Vlagyimirov [170] könyvében, 124–125. o.

26.17. Definíció. Szeretnénk disztribúciók Fourier-transzformáltját definiálni, de gondot okoz, hogy a Fourier-transzformáció $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$-t nem önmagába képezi le. Ezért egy kicsit bővebb tesztfüggvényhalmazt kell használnunk. Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ függvényt *gyorsan csökkenő*nek fogunk nevezni, ha bármely polinommal megszorozva is korlátos. Egy f mérhető és gyorsan csökkenő függvény minden $\mathbb{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ térben benne van. Ez $p = \infty$ esetén triviális, egyébként pedig abból adódik, hogy az

$$x \mapsto (1 + |x|^{2n}) f(x)$$

függvény korlátos. Valóban, ebből $|f|$ nem nagyobb, mint a $g(x) = 1/(1+|x|^{2n})$ függvény konstansszorosa, így elég belátnunk, hogy az utóbbi $\mathbb{L}^p$-ben van. Mivel $|g|^p \leq g$, elég belátni, hogy g integrálható. Ezt viszont már a Plancherel-tétel bizonyításában beláttuk. Jelölje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ azon végtelen sokszor differenciálható, $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{K}$-ba képező függvények terét, amelyeknek minden parciális deriváltja is gyorsan csökkenő. A $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ teret a Fourier-transzformáció önmagába, sőt, mivel bármely f elemére

$$f = \check{\hat{f}} = (\check{f})\hat{} = \hat{\check{f}},$$

önmagára képezi le. Definiáljuk $\mathcal{S}$-en a

$$q_{s,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq s} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m \left|(\partial^\alpha \varphi)(x)\right|$$

normák felhasználásával a

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{s,m=0}^{\infty} 2^{-s-m} \frac{q_{s,m}(\varphi - \psi)}{1 + q_{s,m}(\varphi - \psi)}$$

eltolásinvariáns metrikát. Ez $\mathcal{S}$ *szokásos metrikája*. Jelölje $\mathcal{S}'$ az $\mathcal{S}$ folytonos lineáris funkcionáljainak halmazát. Egy T lineáris funkcionál pontosan akkor van $\mathcal{S}'$-ben, ha van olyan s, m és C, hogy $\left|T(\varphi)\right| \leq C q_{s,m}(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathcal{S}$-re. Ha egy $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció minden $\mathcal{S}$-beli függvényre kiterjeszthető, és a kiterjesztés $\mathcal{S}'$ egy eleme, akkor T-t *temperált disztribúció*nak nevezzük. Megmutatható, hogy $\mathcal{S}'$ minden eleme egy és csak egy temperált disztribúció kiterjesztése. Ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a temperált disztribúciók és $\mathcal{S}'$ elemei között. Jelölésben gyakran nem teszünk különbséget egy temperált disztribúció és $\mathcal{S}'$ megfelelő eleme között.

26.18. Példák. (1) Minden T kompakt tartójú disztribúció temperált. Legyen T egy ilyen disztribúció, és $\eta \in \mathcal{D}$ egy függvény, amely $\operatorname{spt}(T)$ egy környezetén 1. Ekkor $T(\varphi) = T(\eta\varphi)$ minden $\varphi \in \mathcal{S}$-re, és $\varphi \mapsto \eta\varphi$ egy folytonos leképezése $\mathcal{S}$-nek $\mathcal{D}_K$-ba, ahol $K = \operatorname{spt}(\eta)$. Így T az $\mathcal{S}'$ egy elemének megszorítása $\mathcal{D}$-re.

(2) Ha $1 \le p < \infty$, $m > 0$ és f egy mérhető függvény $\mathbb{R}^n$-en úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-m} \big|f(x)\big|^p \, dx < \infty,$$

akkor T_f temperált disztribúció. Itt $T_f(\varphi) = \int f\varphi$, ha $\varphi \in \mathcal{S}$.

(3) Ha μ egy lokálisan véges mérték, amely értelmezve van $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazain, és van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-m} \, d\mu(x) < \infty,$$

akkor T_μ temperált disztribúció. Valóban, legyen

$$T_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu, \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

26.19. Tétel. *Ha α multiindex, P polinom, és $g \in \mathcal{S}$, továbbá T egy temperált disztribúció, akkor a $\partial^\alpha T$, PT és gT disztribúciók is temperáltak.*

A bizonyítás megtalálható Vlagyimirov [170] könyvében, 139. o.

26.20. Definíció. Ha $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, akkor $\hat{f}$ folytonos és eltűnik a végtelenben. Számítsuk ki az $\hat{f}$-höz tartozó disztribúciót:

$$\begin{aligned} T_{\hat{f}}(\varphi) &= \int \hat{f}(t)\varphi(t)\,dt = \int \varphi(t) \int f(x) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dx\,dt \\ &= \int f(x) \int \varphi(t) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\,dt\,dx = T_f(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Ez motiválja az alábbi definíciót: Ha $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, legyen

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Megmutatható, hogy $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. A $\hat{T}$-t a T *Fourier-transzformált*jának nevezzük. Részletesebben lásd Vlagyimirov [170], 146. o.

26.21. Tétel. *Legyen $T \in \mathcal{S}'$ ekkor*

(1) $(\tau_x T)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\hat{T}$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$;

(2) $(\mathbf{e}_x T)\hat{} = \tau_x \hat{T}$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\hat{\hat{T}} = \check{T}$;

(4) *Ha P polinom, akkor $P(\partial)T$ Fourier-transzformáltja $t \mapsto P(2\pi i t)$ és $\hat{T}$ szorzata és $P(\partial)\hat{T}$ a $x \mapsto P(-2\pi i x)$ és T szorzatának Fourier-transzformáltja.*

Bizonyítás. A definíció alapján, a függvények Fourier-transzformációjánál tanult megfelelő összefüggéseket felhasználva adódik.

26.22. Példák. Láttuk, hogy a polinomok temperált disztribúciók. Kiszámítjuk a Fourier-transzformáltjukat. Kezdjük az azonosan 1 függvénnyel.

$$1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi,$$

amiből

$$\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

azaz $\hat{1} = \delta$. Hasonlóan, $\hat{\delta} = 1$. Ha most P tetszőleges polinom, akkor $P(\partial)\delta$ Fourier-transzformáltja $t \mapsto P(2\pi i t)$, és $x \mapsto P(-2\pi i x)$ Fourier-transzformáltja $P(\partial)\delta$.

$*$ **26.23. Laplace-transzformáció.** Egy $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény Fourier-transzformáltját az

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i t x}\,dx$$

összefüggés definiálja. A fenti integrált vizsgálhatjuk komplex t esetén is, bármely $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre. Az így definiált komplex változós $\hat{f}$ függvény az f *Laplace-transzformált*ja. (A legtöbb könyv a $t \mapsto \hat{f}(t/(2\pi i))$ függvényt nevezi Laplace-transzformáltnak. Megjegyezzük, hogy a szinusz és koszinusz transzformáltak is vizsgálhatók komplexben.) A Laplace-transzformált egyik előnye, hogy vizsgálatára a komplex függvénytan erős eszközeit használhatjuk. Másik előnye, hogy $t = r + is$, $r, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)e^{2\pi s x})e^{-2\pi i r x}\,dx,$$

azaz $\hat{f}(t)$ az $x \mapsto f(x)e^{2\pi s x}$ függvény Fourier-transzformáltja az r helyen, így ha $s < 0$, és f tartója alulról korlátos, akkor a Laplace-transzformált akkor is értelmezve lehet, ha a Fourier-transzformált nincs értelmezve.

Általánosabban, legyen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tekintsük azon s számok I halmazát, amelyekre T és az $x \mapsto e^{2\pi s x}$ függvény T_s szorzata temperált disztribúció. Megmutatható, hogy I intervallum, és ha $s \in I^\circ$, akkor T_s Fourier-transzformáltja függvénnyel reprezentálható. Legyen $\hat{T}$, a T *Laplace-transzformált*ja a

$$\hat{T}(r + is) = \hat{T}_s(r), \quad \text{ha} \quad s \in I^\circ$$

összefüggéssel definiálva. Megmutatható, hogy $\hat{T}$ holomorf a $\{t\colon \Im(t) \in I^\circ\}$ sávon, továbbá minden $K \subset I^\circ$ kompakt halmazhoz léteznek olyan $C > 0$ és $k > 0$ számok, hogy

$$\left|\hat{T}(r + is)\right| \le C(1 + |r|^2)^k, \quad \text{ha} \quad s \in K \quad \text{és} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Megfordítva, ha egy komplex változós, komplex értékű függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor pontosan egy $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció létezik, amelynek ez a függvény a Laplace-transzformáltja.

A Laplace-transzformáltra érvényben maradnak a Fourier-transzformáltra tanult számolási szabályok. Ha T tartója $[0, \infty[$, akkor $s_0 \in I$ esetén minden $s < s_0$ is I-beli. A Laplace-transzformált részletesebb tárgyalása $[0, \infty[$-beli tartójú $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$-beli disztribúciókra Vlagyimirov [170] könyvében, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ elemeire Dieudonné [27] könyvében, a (22.18) pontban található meg.

$*$ **26.24. Feladat: Titchmarsh-tétel [18].** Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $x < 0$ esetén $f(x) = g(x) = 0$, és $f * g = 0$ majdnem mindenütt, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt vagy $g = 0$ majdnem mindenütt.

Megoldás. Használjunk Laplace-transzformációt.

→ **26.25. Feladat [12].** Határozzuk meg az alábbi disztribúciók Fourier-transzformáltját:

(1) $\tau_{-1}\delta - \tau_1\delta$;

(2) δ'';

(3) $\Theta(x)\Theta(1-x)$;

(4) $f(x) = 1$, ha $-1 \le x \le 1$, $f(x) = x+2$, ha $-2 < x < -1$, $f(x) = 2-x$, ha $1 < x < 2$, és 0 egyébként;

(5) véges sok polinomiális szakaszból álló kompakt tartójú függvény;

(6) $\Theta(x)\Theta(1-x)\sin(\omega x + \alpha)$;

(7) modulált rezgés: $\sin \omega x$ és az (5) alatti függvények szorzata.

→ **26.26. Feladat [8].** Mi az összefüggés egy 1 szerint periodikus, $]0, 1[$-en integrálható függvény Fourier-sora és Fourier-transzformáltja között?

26.27. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy a Plancherel-tételben szereplő izometria $\mathbb{L}^2$ elemeihez a disztribúcióként vett Fourier-transzformáltjukat rendeli.

26.28. Általánosított megoldások. Legyen

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

ahol $a_\alpha \in \mathcal{E}(G)$. Az $Lu = f$ differenciálegyenlet, ahol $f \in \mathcal{D}'(G)$, *általánosított megoldás*án olyan $u \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúciót értünk, amely eleget tesz az egyenletnek, azaz amelyre

$$Lu(\varphi) = f(\varphi) \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}(G)\text{-re.}$$

Megjegyezzük, hogy – mint egyszerű számolás mutatja – az egyenlet az

$$u(L^*\varphi) = f(\varphi) \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}(G)\text{-re}$$

egyenlettel ekvivalens, ahol

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi),$$

az L *formális adjungált*ja.

26.29. Lemma. *Az előző definíció jelöléseivel, ha $f \in \mathcal{C}(G)$, és az u általánosított megoldás $\mathcal{C}^m(G)$-ben van, akkor u megoldása a differenciálegyenletnek.*

Bizonyítás. Mivel $u \in \mathcal{C}^m(G)$, az u klasszikus és általánosított deriváltjai m-ed rendig egybeesnek. Mivel u általánosított megoldás, a G-n folytonos $Lu-f$ függvényhez a nulla disztribúció tartozik. Ebből a általánosított Lagrange-lemma szerint $Lu-f$ azonosan nulla.

26.30. Definíció. Legyen L *konstansegyüttható lineáris differenciáloperátor*, azaz

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Az $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciót az L operátor *alapmegoldás*ának nevezzük, ha $LE = \delta$.

Megjegyezzük, hogy az alapmegoldás nem egyértelmű, mert a homogén $Lu = 0$ egyenlet bármely általánosított megoldását hozzáadva egy alapmegoldáshoz, új alapmegoldást kapunk. Megmutatható, hogy minden konstansegyüttható lineáris differenciáloperátornak létezik temperált alapmegoldása. (Lásd Hörmander [68], I. 189. o.)

26.31. Tétel. *Legyen E az L konstansegyüttható differenciáloperátor egy alapmegoldása. Ha $u = E * f$ értelmezve van, akkor általánosított megoldása az $Lu = f$ egyenletnek, továbbá u egyértelmű azon $\mathcal{D}'$-beli disztribúciók körében, amelyekre $u * E$ értelmezve van.*

Bizonyítás. Ha $E * f$ értelmezve van, akkor

$$\begin{aligned} L(E*f) &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (E*f) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (\partial^\alpha E * f) \\ &= \Big(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha E \Big) * f = \delta * f = f. \end{aligned}$$

Ha két megoldás van, akkor az u különbségükre $Lu = 0$ és $u * E$ értelmezve van, így

$$u = u * \delta = u * (LE) = (Lu) * E = 0 * E = 0.$$

26.32. Az alapmegoldás fizikai jelentése. Az E alapmegoldás a δ elemi forráshoz tartozó elemi hatás. Az f forrást előállítjuk $f = \delta * f$ alakban elemi források összegeként. Az u hatást $u = E * f$ alakban, az elemi hatások összegeként kapjuk.

26.33. Példa. Keressük meg egy közönséges differenciálegyenlet egy alapmegoldását. Az

$$u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots + a_m u = 0$$

differenciálegyenlet egy alapmegoldása $E = \Theta u$, ahol Θ a Heaviside-függvény, u pedig az egyenlet

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1$$

kezdeti feltételeknek eleget tévő megoldása. Valóban, $E^{(k)} = \Theta u^{(k)}$, ha $k < m$ és $E^{(m)} = \delta + \Theta u^{(m)}$. Speciálisan, az $u' + au = 0$ egyenlet egy alapmegoldása $E(t) = \Theta(t) e^{-at}$, az $u'' + a^2 u = 0$ egyenlet egy alapmegoldása pedig $E(t) = \Theta(t) \sin at/a$.

→ **26.34. Feladat [9].** Az $Lu = u'' + a^2 u$ differenciáloperátornak adjunk meg olyan alapmegoldását, amelynek tartója $]-\infty, 0]$-ban van.

26.35. Green-függvény. A lineáris differenciálegyenletre vonatkozó

$$G\colon Lu = f, \quad \partial G\colon Bu = 0$$

probléma megoldására felhasználható egy olyan $\overline{G} \times G$-n értelmezett $(x, y) \mapsto g(x, y)$ függvény, a *Green-függvény*, amelyre

$$G\colon Lg(.,y) = \tau_y \delta \quad \text{és} \quad \partial G\colon Bg(.,y) = 0,$$

ha $y \in G$. Ekkor

$$u(x) = \int_G g(x,y) f(y)\, dy$$

olyan, a peremfeltételnek eleget tévő függvény, amelyre az

$$(Lu)(x) = \int_G Lg(.,u) f(y)\, dy = \int_G \delta(x-y) f(y)\, dy = f(x)$$

formális számolás azt sugallja, hogy megoldása az egyenletnek, azaz a

$$(Tf)(x) = \int_G g(x,y) f(y)\, dy, \quad \text{ha} \quad x \in G$$

összefüggéssel értelmezett T integráloperátor az L differenciáloperátor „inverze". A Green-függvény az alapmegoldás általánosítása a függvényegyütthatós esetre. A T operátor sajátértékei az L operátor sajátértékeinek reciprokai. A Green-függvény sokszor az $L_y^* g(x,y) = \delta(y-x)$ összefüggésből nyerhető. Itt L^* az L formális adjungáltja.

A Green-függvény nagyon hatékony eszköz. Sajnos, általában csak egyszerű tartományok esetén sikerül explicit módon meghatározni.

26.36. Feladat [11]. Határozzuk meg az alábbi differenciáloperátorok egy $[0,\infty[$-beli tartójú alapmegoldását:

(1) $\frac{d^2}{dt^2} - a^2$;

(2) $\left(\frac{d}{dt} + a\right)^m$;

(3) $\frac{d^2}{dt^2} + 4\frac{d}{dt}$;

(4) $\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} + 1$;

(5) $\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2$;

(6) $\frac{d^2}{dt^2} - 4\frac{d}{dt} + 5$;

(7) $\frac{d^3}{dt^3} - a^3$;

(8) $\frac{d^3}{dt^3} - 3\frac{d^2}{dt^2} + 2$;

(9) $\frac{d^4}{dt^4} - a^4$;

(10) $\frac{d^4}{dt^4} - 2\frac{d^2}{dt^2} + 1$.

26.37. Feladat [11]. Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

a $-\Delta - k^2$ Helmholtz-operátor alapmegoldása $\mathbb{R}^3$-ban.

26.38. Feladat [11]. Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x) = \frac{-e^{ik|x|}}{2ki} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

a $-\Delta - k^2$ Helmholtz-operátor alapmegoldása $\mathbb{R}$-ben.

26.39. Feladat [12]. Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} \quad \text{illetve} \quad E(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

a $-\Delta + k^2$ operátor alapmegoldása $\mathbb{R}$-ben, illetve $\mathbb{R}^3$-ban.

26.40. Feladat [14]. Bizonyítsuk be, hogy az n-dimenziós

$$i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Schrödinger-operátor egy alapmegoldása

$$E(x,t) = -\frac{i\Theta(t)}{\hbar}\left(\frac{m}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2} e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}|x|^2 - \frac{\pi n}{4}\right)}.$$

$**$ **26.41. Feladat [16].** Bizonyítsuk be a hullámegyenlet alapmegoldására megadott összefüggés helyességét.

$**$ **26.42. Feladat [16].** Bizonyítsuk be, hogy a

$$\partial_t^2 - a^2\Delta + m^2$$

Klein–Fock–Gordon-operátor egy alapmegoldása $n = 1, 2, 3$ esetén rendre

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)}{2a} J_0(m\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}),$$

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}},$$

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at)}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2) - \frac{m\Theta(at-|x|)}{4\pi a^3} \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}.$$

$**$ **26.43. Feladat [16].** Bizonyítsuk be, hogy a

$$\partial_t^2 + 2m\partial_t - a^2\Delta$$

telegráf-operátor egy alapmegoldása $n = 1, 2, 3$ esetén rendre

$$E(x,t) = \frac{i\Theta(at-|x|)e^{-mt}}{2a} J_0(im\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}),$$

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)e^{-mt}}{2\pi a^2} \frac{\operatorname{ch}(m\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}},$$

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at)e^{-mt}}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2) - \frac{\Theta(at-|x|)me^{-mt}}{4\pi i a^3} \frac{J_1(im\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2 - |x|^2/a^2}}.$$

27
Cauchy-feladatok

1860-ban Riemann kétváltozós függvényekre vonatkozó másodrendű hiperbolikus $Lu = 0$ egyenletek esetén a Cauchy-feladat megoldására az $L^*v = 0$ adjungált egyenlet egy x-től függő $y \mapsto g(x,y)$ partikuláris megoldásának a felhasználását javasolta, amelyre a g magfüggvénnyel definiált T integráloperátorra $L(Tf) = f$ teljesül minden $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$-re. A g függvény hasonló szerepet játszik L-nél, mint a Green-függvény a Laplace-operátornál. ... Amit hangsúlyozni akarunk, az az, hogy a XIX. század végére készen állt a (meglehetősen bizonytalan) gondolat, hogy egy L másodrendű differenciáloperátor esetén az $L^*v = 0$ adjungált egyenlet egy $y \mapsto g(x,y)$ megoldását kell megkeresni, amelynek megfelelő szingularitása van az x pontban, és a g maggal definiált T integráloperátorra $L(Tf) = f$, ha $f \in \mathcal{D}$; egy ilyen g függvényt elemi *vagy* alapmegoldásnak *neveztek ...*

Jean Dieudonné [28]

27.1. A hővezetési egyenlet alapmegoldása. Alkalmazzunk x szerinti Fourier-transzformációt a

$$\partial_t E - a^2 \Delta_x E = \delta$$

egyenlet mindkét oldalára. Formálisan számolva,

$$\partial_t \hat{E}(y,t) + 4\pi^2 a^2 |y|^2 \hat{E}(y,t) = 1(y) \times \delta(t),$$

amiből az $u' + au$ egyenlet alapmegoldásában a helyére $4\pi^2 a^2 |y|^2$-et helyettesítve,

$$\hat{E}(y,t) = \Theta(t) e^{-4\pi^2 a^2 |y|^2 t}.$$

Ebből inverz Fourier-transzformációval

$$E(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Bár a fenti formális számolás is pontossá tehető, az így megsejtett függvényről közvetlenül is bizonyíthatjuk, hogy alapmegoldás. A továbbiakban mint „az” alapmegoldásra fogunk rá hivatkozni.

Nyilván $t > 0$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,dx = 1,$$

$t < 0$ esetén pedig a E nulla, így E lokálisan integrálható. Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)(-\partial_t \varphi(x,t) - a^2 \Delta_x \varphi(x,t))\,dx\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)(-\partial_t \varphi(x,t) - a^2 \Delta_x \varphi(x,t))\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Parciális integrálások után azt kapjuk, hogy

$$E(\varphi)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t E(x,t)-a^2\Delta_x E(x,t))\varphi(x,t)\,dx\,dt$$
$$+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi(0,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)\,dx+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)(\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(0,\varepsilon))\,dx.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy az első tag nulla. A második tag nyilván tart $\varphi(0,0)$-hoz, így elég megmutatnunk, hogy az utolsó tag nullához tart. A középérték-tétel felhasználásával adódik, hogy alkalmas c konstansra ez a tag nem nagyobb, mint $c\int_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)|x|\,dx$. Az $x/\sqrt{\varepsilon}$ helyére új változót helyettesítve, adódik, hogy ez az integrál nullához tart, ha $\varepsilon\downarrow 0$.

27.2. Definíció. Jelölje E a hővezetési egyenlet alapmegoldását. Tegyük fel, hogy $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ és $t<0$ esetén f eltűnik. A $V=E*f$ disztribúciót f sűrűségű *hőpotenciál*nak nevezzük. Ha ez létezik, akkor nyilván $\partial_t V-a^2\Delta_x V=f$. Ha $u_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, az $f=u_0\times\delta$ sűrűségű V_0 hőpotenciált *felületi hőpotenciál*nak, vagy az u_0 sűrűségű *egyszerű réteg hőpotenciáljá*nak nevezzük. Jelölje $\mathcal{M}$ azon $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mérhető függvények osztályát, amelyek $t<0$ esetén nullák, és minden $0\le t\le T$ sávban korlátosak.

27.3. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel, ha $f\in\mathcal{M}$, akkor a V hőpotenciál létezik, $V\in\mathcal{M}$, és*

$$V(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y,s)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-s)}\right)^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}\,dy\,ds,$$

továbbá

$$\big|V(x,t)\big|\le t\sup_{0\le s\le t}\big|f(y,s)\big|,$$

ahol $t>0$, valamint $V(x,t)$ az x-ben egyenletesen nullához tart, ha $t\downarrow 0$. Ha még $f\in\mathcal{C}^2\{t\ge 0\}$, és f legfeljebb másodrendű deriváltjai korlátosak, akkor

$$V\in\mathcal{C}^2\{t>0\}\cap\mathcal{C}\{t\ge 0\}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha az $|f|$ és $|E|=E$ lokálisan integrálható függvények

$$h(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\big|f(y,s)\big|E(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

konvolúciója létezik és lokálisan integrálható, akkor V lokálisan integrálható függvény, amely az f és E függvények konvolúciója, azaz a fent megadott formulával állítható elő, és $|V|\le h$. De

$$h(x,t)\le\sup_{0\le s\le t}\big|f(y,s)\big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}E(x-y,t-s)\,dy\,ds=t\sup_{0\le s\le t}\big|f(y,s)\big|,$$

ha $t>0$, és nulla egyébként. Ebből kapjuk a becslést V-re, és a határértéket $t\downarrow 0$-ra. Az $s=t-r$, $y=x-2a\sqrt{r}z$ helyettesítéssel

$$V(x,t)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f(x-2a\sqrt{r}z,t-r)e^{-|z|^2}\,dz\,dr,$$

és a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálásáról szóló tételből kapjuk, hogy $V\in\mathcal{C}^2\{t>0\}$.

27.4. Tétel. *A 27.2 definíció jelöléseivel, legyen u_0 korlátos mérhető függvény $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor létezik a V_0 felületi hőpotenciál, benne van az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{C}^\infty\{t>0\}$ osztályokban, és*

$$V_0(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy, \tag{1}$$

továbbá

$$\big|V_0(x,t)\big|\le \sup_y\big|u_0(y)\big|,$$

ha $t>0$. Ha még u_0 folytonos $\mathbb{R}^n$-en, akkor V_0 folytonosan kiterjeszthető a $\{t\ge 0\}$ féltérre, és $V_0(x,0)=u_0$.

Bizonyítás. Legyen

$$h(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\big|u_0(y)\big|E(x-y,t)\,dy.$$

Ez a függvény $t<0$ esetén nulla, $t>0$-ra pedig $h(x,t)\le \sup_y\big|u_0(y)\big|$, így az (1) jobb oldalán szereplő $\int u_0(y)E(x-y,t)\,dy$ integrál létezik, és eleget tesz a becslésnek. Megmutatjuk, hogy ehhez a korlátos függvényhez a V_0 felületi hőpotenciál tartozik. $V_0(\varphi)$ kiszámításához definíció szerint az $u_0\times\delta$ disztribúciót kell alkalmazni az

$$(y,s)\mapsto \iint E(z,t)\varphi(y+z,s+t)\,dz\,dt$$

függvényre. Választva egyhez tartó $\eta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ és $\zeta_k\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sorozatokat, $\eta_k\times\zeta_k$ egyhez tart $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$-ben, és így Lebesgue tételét felhasználva

$$\begin{aligned}
V_0(\varphi)&=\lim_{k\to\infty}\int u_0(y)\eta_k(y)\zeta_k(0)\iint E(z,t)\varphi(y+z,t)\,dz\,dt\,dy\\
&=\lim_{k\to\infty}\iint\varphi(x,t)\int u_0(y)\eta_k(y)E(x-y,t)\,dy\,dx\,dt\\
&=\iint\varphi(x,t)\int u_0(y)E(x-y,t)\,dy\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

(1)-ből következik, hogy $V_0\in\mathcal{C}^\infty\{t>0\}$. Most legyen $u_0\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, és $\varepsilon>0$. Létezik olyan $\delta>0$, hogy $|y-x_0|<2\delta$ esetén $\big|u_0(y)-u_0(x_0)\big|<\varepsilon$. Ezért $|x-x_0|<\delta$, $t>0$ esetén

$$\begin{aligned}
\big|V_0(x,t)-u_0(x_0)\big|&\le\int\big|u_0(y)-u_0(x_0)\big|E(x-y,t)\,dy\\
&=\int_{|z|\le\delta}\big|u_0(x-z)-u_0(x_0)\big|E(z,t)\,dz\\
&+\int_{|z|>\delta}\big|u_0(x-z)-u_0(x_0)\big|E(z,t)\,dz\\
&\le\varepsilon+\frac{2}{\pi^{n/2}}\sup_y\big|u_0(y)\big|\int_{|y|>\delta/(2a\sqrt{t})}e^{-|y|^2}\,dy\to\varepsilon,
\end{aligned}$$

ha $t\downarrow 0$.

27.5. Tétel. *Tekintsük a*

$$\{t>0\}\colon u_t - a^2\Delta_x u = f, \quad \mathbb{R}^n\colon u(x,0)=u_0(x) \tag{1}$$

Cauchy-feladatot. Terjesszük ki az u és f függvényeket $t<0$ esetére úgy, hogy ott nullával legyenek egyenlőek. Ekkor az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ kiterjesztett függvényekre

$$\partial_t\tilde{u} - a^2\Delta_x\tilde{u} = \tilde{f} + u_0\times\delta, \tag{2}$$

azaz az (1) Cauchy-feladat minden megoldása kiterjesztve a (2) egyenlet általánosított megoldása.

Bizonyítás. Ha $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor

$$\begin{aligned}(\partial_t\tilde{u} - a^2\Delta_x\tilde{u})(\varphi) &= \tilde{u}(-\partial_t\varphi - a^2\Delta_x\varphi) = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(-\partial_t\varphi - a^2\Delta_x\varphi)\,dx\,dt\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t u - a^2\Delta_x u)\varphi\,dx\,dt\\ &\quad + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx\\ &= (\tilde{f}+u_0\times\delta)(\varphi).\end{aligned}$$

27.6. Tétel. *A 27.2 definíció és az előző pont jelöléseivel, legyen $f\in\mathcal{M}$, és legyen u_0 valós értékű korlátos mérhető függvény $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor a (2) egyenletnek létezik egyértelmű általánosított megoldása az $\mathcal{M}$ függvényosztályban, és erre a megoldásra*

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y,s)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-s)}\right)^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}\,dy\,ds\\ &\quad + \frac{\Theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy.\end{aligned}$$

Az u általánosított megoldás folytonosan függ az f és u_0 függvényektől a következő értelemben: ha $|f|\le\varepsilon$ és $|u_0|\le\varepsilon_0$, akkor a megoldásra tetszőleges $0\le t\le T$ sávban $|u|\le T\varepsilon+\varepsilon_0$. Ha még $f\in\mathcal{C}^2\{t\ge 0\}$, továbbá f minden legfeljebb másodrendű deriváltja $\mathcal{M}$-ben van, és $u_0\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor u megoldása a Cauchy-feladatnak.

Bizonyítás. Az E alapmegoldásnak és a $F=\tilde{f}+u_0\times\delta$ disztribúciónak létezik a konvolúciója, egy V és egy V_0 hőpotenciál összege, továbbá $\mathcal{M}$-ben van. Így az előző tételek szerint a (2) egyenlet általánosított megoldása egyértelmű $\mathcal{M}$-ben. Az u folytonos függése f-től és u_0-tól az előző tételek becsléseiből következik. Ha a simasági feltételek is teljesülnek, akkor u eleget tesz a kezdeti feltételeknek és elég sima is, így a Cauchy-feladat klasszikus megoldása.

27.7. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t$, $u(x,0) = 2$;
(2) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u(x,0) = \sin x$;
(3) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x$, $u(x,0) = \cos x$;
(4) $u_t = u_{xx} + e^t \sin x$, $u(x,0) = \sin x$;
(5) $u_t = u_{xx} + \sin t$, $u(x,0) = e^{-x^2}$;
(6) $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{2x-x^2}$;
(7) $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = xe^{-x^2}$;
(8) $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x e^{-x^2}$.

27.8. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$):

(1) $u_t = \Delta u + e^t$, $u(x,y,0) = \cos x \sin y$;
(2) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y$, $u(x,y,0) = 1$;
(3) $u_t = \Delta u + \cos t$, $u(x,y,0) = xye^{-x^2-y^2}$;
(4) $8u_t = \Delta u + 1$, $u(x,y,0) = e^{(x-y)^2}$;
(5) $2u_t = \Delta u$, $u(x,y,0) = \cos xy$.

27.9. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$):

(1) $u_t = 2\Delta u + t\cos x$, $u(x,y,z,0) = \cos y \cos z$;
(2) $u_t = 3\Delta u + e^t$, $u(x,y,z,0) = \sin(x-y-z)$;
(3) $4u_t = \Delta u + \sin 2z$, $u(x,y,z,0) = \cos 2y e^{-x^2}$;
(4) $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z)$, $u(x,y,z,0) = e^{-(x+y-z)^2}$;
(5) $u_t = \Delta u$, $u(x,y,z,0) = \cos(xy)\sin z$.

27.10. Feladat [13]. Oldjuk meg az $u_t = a^2 u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x,t)$

(1) $\delta \times \delta$;
(2) $\delta' \times \delta$;
(3) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\delta$, $t_0 \geq 0$;
(4) $\delta \times \delta'$;
(5) $\delta'' \times \tau_{t_0}\delta$;
(6) $\delta' \times \delta'$;
(7) $\delta \times \Theta$;
(8) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\Theta$, $t_0 \geq 0$;
(9) $\tau_{x_0}\delta \times \delta' + (\tau_{x_0}\delta)' \times \delta$;
(10) $\delta \times \omega$, $\omega \in \mathcal{C}\{t \geq 0\}$.

27.11. Feladat [13]. Oldjuk meg az $u_t = u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x,t)$

(1) $\Theta(t-1)e^t$;
(2) $\Theta(t-\pi)\cos t$;
(3) $\Theta(t-1)x$;

(4) $\Theta(t-2)e^x$;

(5) $\Theta(t)\Theta(x)$;

(6) $\Theta(t)\Theta(1-|x|)$.

27.12. Feladat [13]. Oldjuk meg az $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t)$, $u(x,0) = u_0(x)$ feladatot a következő adatokkal:

(1) $f(x,t) = 1$, $u_0(x) = 1$, $c = 1$;

(2) $f(x,t) = e^t$, $u_0(x) = \cos x$, $a = c = 1$, $b = 0$;

(3) $f(x,t) = e^t$, $u_0(x) = \cos x$, $a = c = 2$, $b = 0$;

(4) $f(x,t) = t \sin x$, $u_0(x) = 1$, $a = c = 1$, $b = 0$;

(5) $f(x,t) = 0$, $u_0(x) = e^{-x^2}$;

(6) $f(x,t) = \omega(t) \in \mathcal{C}^1\{t \geq 0\}$, $u_0 \in \mathcal{C}$ korlátos.

27.13. Feladat [13]. Oldjuk meg az $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f + u_0 \times \delta$ általánosított feladatot a következő adatokkal:

(1) $f(x,t) = \Theta(t-1)$, $u_0(x) = \Theta(x)$, $c \neq 0$;

(2) $f(x,t) = \Theta(t-1)$, $u_0(x) = \Theta(1-x)$, $c = 0$;

(3) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^t$, $u_0(x) = \Theta(1-|x|)$, $c \neq 1$;

(4) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^t$, $u_0(x) = \Theta(x)e^x$, $c = 1$;

(5) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^x$, $u_0(x) = x\Theta(x)$, $a = 2$, $b = c = -2$;

(6) $f(x,t) = \Theta(t)\Theta(x)$, $u_0(x) = x$.

27.14. A hullámegyenlet alapmegoldása. A hővezetés egyenletéhez hasonlóan kezelhető a hullámegyenlet is. Hasonló meggondolásokkal azt kapjuk, hogy ha $n = 1$, akkor

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at - |x|)}{2a},$$

ha n páros, akkor

$$E(x,t) = \frac{(-1)^{n/2-1}\mathbf{\Gamma}(\frac{n-1}{2})}{2a\pi^{(n+1)/2}} \frac{\Theta(at-|x|)}{\left(a^2t^2 - |x|^2\right)^{(n-1)/2}},$$

ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor

$$E(\varphi) = \frac{\Theta(t)}{(2a\pi)\pi^{(n-3)/2}} \int_0^\infty \left(\frac{d}{2a^2 t\, dt}\right)^{\frac{(n-3)}{2}} \left(\frac{1}{2at} \int_{S_{at}} \varphi(x,t)\, dx\right) dt$$

egy alapmegoldás. A továbbiakban ezekre a disztribúciókra, mint „az” alapmegoldásra fogunk hivatkozni.

A bizonyítás $n = 1, 2, 3$ esetére megtalálható Vlagyimirov [170] könyvében, 181–183. o., teljes általánosságban pedig Hörmander [68] könyvében, 137–142. o.

27.15. Definíció. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eltűnik, ha $t < 0$. Legyen E a hullámegyenlet alapmegoldása. A $V = E * f$ disztribúciót f sűrűségű *késleltetett potenciál*nak nevezzük. Ha $f = u_1 \times \delta$, illetve $f = u_0 \times \delta'$, ahol u_0, u_1 tetszőleges $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúciók, akkor a megfelelő $V_0 = E * (u_1 \times \delta)$ illetve $V_1 = E * (u_0 \times \delta')$ késleltetett potenciálokat az u_1 sűrűségű *egyszerű réteg*, illetve az u_0 sűrűségű *kettős réteg késleltetett potenciálj*ának nevezzük. Megjegyezzük, hogy ha f lokálisan integrálható függvény, illetve u_0, u_1 lokálisan integrálható függvények, akkor – hasonlóan, mint a hővezetési egyenletnél – a fenti késleltetett potenciálok integrálok segítségével zárt alakban felírhatók és becsülhetők.

27.16. Tétel. *Tekintsük a hullámegyenletre vonatkozó alábbi Cauchy-feladatot:*

$$\{t > 0\}\colon u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f, \quad \mathbb{R}^n\colon u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x).$$

Terjesszük ki az u és f függvényeket az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ függvényekké úgy, hogy $t < 0$ esetén legyenek nullák. Az $\tilde{u}$ függvény kielégíti az

$$\partial_t^2 \tilde{u} - a^2 \Delta_x \tilde{u} = \tilde{f} + u_0 \times \delta' + u_1 \times \delta$$

általánosított egyenletet.

Bizonyítás. A hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelő állításhoz hasonlóan bizonyítható.

27.17. Tétel. *Legyen $n = 1$ esetén $k = 1$, $n = 2, 3$ esetén pedig $k = 2$, $f \in \mathcal{C}^k(t \geq 0)$, $u_0 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ és $u_1 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a Cauchy-feladatnak egyetlen megoldása létezik, és az folytonosan függ az f, u_0, u_1 adatoktól az alábbi értelemben: ha $|f| \leq \varepsilon$, $|u_1| \leq \varepsilon_1$, $|u_0| \leq \varepsilon_0$ és $(k-1)|\operatorname{grad} u_0| \leq \varepsilon_0'$, akkor az u megoldásra tetszőleges $0 \leq t \leq T$ sávban $|u| \leq \varepsilon T^2/2 + \varepsilon_1 T + \varepsilon_0 + (k-1)a\varepsilon_0' T$. A megoldás $n = 3$ esetén előállítható a* Kirchoff-*formulával:*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{f(y, t - |x-y|/a)}{|x-y|}\, dy + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\mathbb{S}_{at}(x)} u_1(y)\, dy + \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{S}_{at}(x)} u_0(y)\, dy \right);$$

$n = 2$ esetén a Poisson-*formulával:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{\mathbb{U}_{a(t-s)}(x)} \frac{f(y,s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy\, ds + \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{u_1(y)\, dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \partial_t \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{u_0(y)\, dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}};$$

$n = 1$ esetén a d'Alembert-*formulával:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)\, dy\, ds + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\, dy + \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)).$$

A tétel a késleltetett potenciálok vizsgálatával, a hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelő állításhoz hasonlóan bizonyítható. Részletesebben lásd Vlagyimirov [170], 192–204. o.

27.18. Az egydimenziós hullámegyenlet. Kétváltozós függvényekre vonatkozó hiperbolikus egyenletek esetén több speciális módszer is ismeretes a megoldás különböző határfeltételek (Cauchy-feladat, Goursat-feladat, stb.) mellett történő meghatározására. A részletes tárgyalást lásd Vlagyimirov [170] könyvében, 213–229. o.

27.19. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(1) $u_{tt} = u_{xx} + 6$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 4x$;

(2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$;

(3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$;

(4) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = x + \cos x$;

(5) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = 1$;

(6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$;

(7) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

27.20. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$):

(1) $u_{tt} = \Delta u + 2$, $u(x,y,0) = x$, $u_t(x,y,0) = y$;

(2) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$, $u(x,y,0) = x^2 - y^2$, $u_t(x,y,0) = xy$;

(3) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy$, $u(x,y,0) = e^x \cos y$, $u_t(x,y,0) = e^y \sin x$;

(4) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$, $u(x,y,0) = x^2$, $u_t(x,y,0) = \sin y$;

(5) $u_{tt} = 2\Delta u$, $u(x,y,0) = 2x^2 - y^2$, $u_t(x,y,0) = 2x^2 + y^2$;

(6) $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3$, $u(x,y,0) = x^2$, $u_t(x,y,0) = y^2$;

(7) $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = e^{3x+4y}$;

(8) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u(x,y,0) = \cos(bx + cy)$, $u_t(x,y,0) = \sin(bx + cy)$;

(9) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = (x^2 + y^2)^2$;

(10) $u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2)e^t$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0$.

27.21. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$):

(1) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$, $u(x,y,z,0) = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t(x,y,z,0) = 1$;

(2) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2$, $u(x,y,z,0) = y^2$, $u_t(x,y,z,0) = z^2$;

(3) $u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2 + y^2 + z^2)$, $u(x,y,z,0) = x^2 y^2 z^2$, $u_t(x,y,z,0) = xyz$;

(4) $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$, $u(x,y,z,0) = e^{x+y} \cos(z\sqrt{2})$, $u_t(x,y,z,0) = e^{3y+4z} \sin 5x$;

(5) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$;

(6) $u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = 0$;

(7) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \cos(x) \sin(y) e^z$, $u(x,y,z,0) = x^2 e^{y+z}$, $u_t(x,y,z,0) = \sin(x) e^{y+z}$;

(8) $u_{tt} = a^2 \Delta u + xe^t \cos(3y + 4z)$, $u(x,y,z,0) = xy \cos z$, $u_t(x,y,z,0) = yze^x$;

(9) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

27.22. Feladat [13]. Oldjuk meg az $u_{tt} = u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x,t)$

(1) $\delta \times \delta$;

(2) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\delta$, $t_0 \geq 0$;

(3) $\delta' \times \delta$;

(4) $\delta \times \delta'$;

(5) $\delta \times \tau_{t_0}\delta'$;

(6) $\tau_{x_0}\check{\delta}' \times \delta$;

(7) $\delta \times \delta''$;

(8) $\delta'' \times \delta$;

(9) $\delta \times \omega + \delta \times \delta' + \delta \times \delta$, $\omega \in \mathcal{C}\{t \geq 0\}$;

(10) $\delta \times \Theta + \tau_{x_0}\delta \times \delta' + \delta \times \delta$;

(11) $\delta \times \omega + \tau_{-2}\check{\delta} \times \delta' + \tau_{-3}\check{\delta} \times \delta$, $\omega(t) = t\Theta(t)$.

27.23. Feladat [13]. Oldjuk meg az alábbi (inkorrekt jelöléssel felírt) általánosított feladatokat:

(1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Theta(x)\delta'(t) + \Theta(x)\delta(t)$;

(2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Theta(t)(x-1) + x\delta'(t) + \operatorname{sgn}(x)\delta(t)$;

(3) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Theta(t)tx + \delta(t)\Theta(x)/\sqrt{x}$;

(4) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)/(t+1) + \Theta(-x)\delta(t)$;

(5) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t-2)\ln t + |x|\delta'(t)$;

(6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Theta(t)t^m + \Theta(2-|x|)\delta'(t)$, $m = 1, 2, \ldots$;

(7) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)e^{x+t} + \Theta(x)e^{-x}\delta(t)$;

(8) $u_{tt} = 9u_{xx} + \Theta(t-\pi)\cos t + \Theta(x-3)\delta'(t) + \delta(t)$;

(9) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)\Theta(x)$;

(10) $u_{tt} = u_{xx} + \delta(x-x_0)\Theta(t)\sin t + x\delta'(x)\delta(t)$.

28

Peremérték-problémák

Kezdetben az adott elliptikus differenciáloperátor csak a kétszer folytonosan differenciálható függvényeken van értelmezve. Aztán ezt az operátort kiterjesztjük formális lezárást használva egy absztrakt módon definiált operátorrá. A fő probléma megmutatni, hogy a kiterjesztett operátor önadjungált. Ezután alkalmazhatók Neumann János módszerei.

Kurt Otto Friedrichs (1934)

28.1. Lemma. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan G' nyílt halmaz, hogy $\overline{G'} \subset G$, $\chi^{n-1}(\partial G') \le \chi^{n-1}(\partial G) + \varepsilon$, $\lambda^n(G \setminus G') \le \varepsilon(\chi^{n-1}(\partial G) + \varepsilon)$, és minden $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényre*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle - \int_{\partial G'} \langle f, \mathbf{n}\rangle\right| &\le \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon x, y \in \overline{G}, |x-y| \le \varepsilon\Big\}\chi^{n-1}(\partial G)\\ &\quad + \varepsilon \sup\Big\{|f(x)|\colon x \in \overline{G}\Big\}.\end{aligned}$$

Ezen technikai jellegű lemma bizonyításának alapgondolata, hogy G határát nyílt felületdarabokkal lefedve, és a darabokat befelé eltolva, „meghámozzuk" a G halmazt.

$*$ **Bizonyítás.** A bizonyítást az $n > 1$ esetre fogalmazzuk meg, de vegyük észre, hogy az $n = 1$ eset is hasonlóan kezelhető. A lokálisan Lipschitz határú halmazok definíciójánál használt jelölésekkel fogunk dolgozni. Először megmutatjuk, hogy választható olyan $\delta_0 > 0$, hogy ha $0 \le \delta \le \delta_0$, akkor az F_i felületeket megszorítva az $r_i' = r_i - \delta_0$ sugarú nyílt gömbökre, az így kapott F_i' felületdarabok is lefedik ∂G-t. Ha ez nem lenne így, akkor a kimaradó felületi pontok egy F_δ nem üres kompakt halmazt alkotnának, és ezek a halmazok centrált rendszert adnának, a metszet viszont az F_i halmazok által le nem fedett pontok halmaza, amely üres.

A $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ lokális koordinátákkal leírva, jelölje p_i a

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

projekciót, q_i a

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, g_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}))$$

leképezést, q_i' pedig a

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, g_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) - \delta)$$

leképezést. q_i homeomorfizmus a $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ koordinátatér r_i sugarú nyílt gömbje és az F_i felületdarab (mint alterek) között, amelynek inverze p_i megszorítása F_i-re.

Legyen L az összes g_i függvényekhez alkalmas Lipschitz-konstans. Feltehetjük, hogy $(L+2)^2\delta_0/3 < \gamma_0$. Válasszuk úgy az $\delta > 0$ számot, hogy $3\delta \le \delta_0$ teljesüljön. Jelölje D_i'' az $r_i'' = r_i - 2\delta_0/3$, D_i' az $r_i' = r_i'' + \delta$ sugarú nyílt, D_i''' pedig az $r_i''' = r_i - \delta$ sugarú zárt, origó középpontú gömböket a $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ koordináták terében, $F_i' = q_i(D_i')$, $F_i'' = q_i(D_i'')$, $F_i''' = q_i(D_i''')$ pedig a megfelelő felületdarabokat. Készítünk egy E_i' felületdarabokból álló lefedést, és egy E_i'' felületdarabokra való felosztását a G határának. Az előbbit az $E_i' = F_i' \setminus (\cup_{j<i} F_j''')$, az utóbbit pedig az $E_i'' = F_i'' \setminus (\cup_{j<i} F_j'')$ összefüggéssel definiáljuk. Végül legyen $C_i' = p_i(E_i')$ és $C_i'' = p_i(E_i'')$. A D_i', D_i'', és D_i''' gömbök határát polárkoordináták bevezetésével előállítva egy Borel-halmaz Lipschitz-képeként, kapjuk, hogy χ^{n-2}-mértéke nem nagyobb, mint $\boldsymbol{\alpha}(n-1)(n-1)r_i^{n-2}$, amiből az F_i', F_i'', F_i''' felületdarabok ∂G-beli határa is előállítható egy Borel-halmaz Lipschitz-képeként, és χ^{n-2}-mértéke nem nagyobb, mint $K = L\boldsymbol{\alpha}(n-1)(n-1)r_i^{n-2}$. A tetszőleges metrikus térben teljesülő

$$\partial(A \setminus (\cup_j A_j)) \subset \partial A \cup (\cup_j \partial A_j)$$

tartalmazásból következik, hogy E_i', E_i'', C_i' és C_i'' határa is lefedhető véges sok $n-2$ dimenziós korlátos Borel-halmaz Lipschitz-képével, és χ^{n-2}-mértéke nem nagyobb, mint iK. Jelölje G_i azon pontok halmazát, amelyeknek

$$(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

koordinátái kielégítenek egy

$$\xi_n = g_i(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) + \gamma, \quad (\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in \overline{C_i'},\ 0 \ge \gamma \ge -\delta$$

alakú egyenletet. A $\gamma = 0$ esetén kapott felületdarabot mint G_i tetejét, a $\gamma = -\delta$ esetén kapott felületdarabot, mint G_i alját, a $(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in \partial C_i'$ esetén kapott halmazt pedig, mint G_i palástját fogjuk emlegetni. Ez utóbbi lefedhető véges sok $(n-1)$-dimenziós korlátos mérhető halmaz Lipschitz-képével, és χ^{n-1}-mértéke legfeljebb $iK\delta$.

Legyen $G' = G \setminus (\cup_i G_i)$. Megmutatjuk, hogy $\overline{G'} \subset G$, valamint G-ről G'-re áttérve, a felületi integrál, a felület és a térfogat nem sokat változik. A $\overline{G'} \subset G$ tartalmazás abból következik, hogy ∂G minden pontja valamely E_i'' halmazban van, így van olyan környezete, amelynek minden G-beli pontja G_i-ben van. A térfogat változása $\cup_i G_i$ térfogatával, így a $\sum_i \chi^{n-1}(E_i')$ összeggel becsülhető. Ennek az összegnek, a felületnek, és a felületi integrálok különbségének becsléséhez vegyük észre, hogy $\partial G'$ része a G_i „hengerek" alapja és palástja egyesítésének. Jelölje C_i''' a C_i'' azon pontjainak halmazát, amelyek C_i'' komplementerétől messzebb vannak, mint $(L+2)\delta$, és legyen $E_i''' = q_i'(C_i''')$. Megmutatjuk, hogy az E_i''' felületdarabok diszjunkt részhalmazai $\partial G'$-nek. Ehhez azt kell belátnunk, hogy E_i'''-nek nincs közös pontja G_j'-vel, ha $j \ne i$. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen y közös pont. Legyen $x \in E_i''$ úgy, hogy $p_i(x) = p_i(y)$ teljesüljön, és $x' \in E_j'$ úgy, hogy $p_j(x') = p_j(y)$ teljesüljön. Ekkor $|x-y| \le \delta$, amiből $\big|p_i(x') - p_i(y)\big| = \big|p_i(x') - p_i(x)\big| \le \delta$. Megmutatjuk, hogy $x' \in F_i'$. Az előző egyenlőtlenség miatt, van olyan $x'' \in F_i'$, hogy $p_i(x'') = p_i(x')$. Mivel $\big|p_i(x'') - p_i(x)\big| \le \delta$, kapjuk, hogy $|x'' - x| \le (L+1)\delta$. De így

$$|x'' - x'| \le |x'' - x| + |x - y| + |y - x'| \le (L+3)\delta.$$

Felhasználva, hogy F_i-t $0 < |\gamma| \le (L+2)^2\delta < \gamma_0$ távolsággal eltolva, F_i pontjai nem mehetnek át felületi pontokba, kapjuk, hogy csak $x' = x''$ lehetséges. A fenti becslés szerint $\big|p_i(x) - p_i(x')\big| \le |y - x'| \le \delta$. Mivel $p_i(x) \in C_i'''$, $x' \in F_i'''$. Ebből következik, hogy $x' \notin E_j'$, ha $j > i$, így csak $j < i$ lehetséges. Mivel $p_j(x') \in D_j'$, van olyan $x'' \in F_i''$, amelyre $\big|p_j(x') - p_j(x'')\big| < \delta$. Ebből viszont $x'' \notin E_i''$, de $|x' - x''| < (L+1)\delta$, tehát

$$|x - x''| \le |x - x'| + |x' - x''| < (L+2)\delta.$$

Ennek felhasználásával, ugyanúgy, mint x' esetében, beláthatjuk, hogy $x'' \in F_i'$. Ez azonban ellentmond C_i''' definíciójának, mert $p_i(x'') \in C_i' \setminus C_i''$, $p_i(x) \in C_i'''$, de $\big|p_i(x) - p_i(x'')\big| < (L+2)\delta$.

D_i', D_i'' és D_i''' definíciójából nyilvánvaló, hogy $D_i' \setminus D_i''$ és $D_j'' \setminus D_j'''$ mértéke, és így $F_i' \setminus F_j''$ és $F_j'' \setminus F_j'''$ mértéke is nullához tart, ha $\delta \downarrow 0$. A

$$C_i' \setminus C_i''' \subset (D_i' \setminus D_i'') \cup \big(\cup_{j<i} p_i(F_j'' \setminus F_j''')\big)$$

tartalmazásból következik, hogy $C_i' \setminus C_i'''$ mértéke is nullához tart. A mérték folytonosságából következik, hogy C_i''' mértéke tart C_i'' belsejének mértékéhez, ha $\delta \downarrow 0$. Mivel C_i'' határa $n-2$ dimenziós, $(n-1)$-dimenziós Lebesgue-mértéke nulla, így $C_i'' \setminus C_i'''$ mértéke nullához tart. A $\partial G'$, illetve ∂G felületek $q_i'(C_i''') = E_i'''$ illetve $q_i(C_i''')$ felületdarabjainak megfelelő pontjaiban a külső normális ugyanaz, így $\langle f, \mathbf{n}\rangle$ integráljának erre a részre eső megváltozása f egyenletes folytonossága miatt kicsi, azaz becsülhető a tételben a jobb oldalon szereplő első taggal. Ahhoz, hogy a becslést megkapjuk, azt kell megmutatnunk, hogy $\delta \downarrow 0$ esetén ∂G és $\partial G'$ kimaradó felületdarabjainak összfelszíne nullához tart. Egyrészt vegyük észre, hogy $E_i'' \setminus q_i(C_i''')$ mértéke nullához tart. Másrészt $E = \cup_i E_i'''$ jelöléssel azt kapjuk, hogy $\partial G'$-nek az E-n kívüli része lefedhető a $g_i'(C_i'' \setminus C_i''')$, $q_i'(C_i' \setminus C_i'')$ halmazokkal, és a G_i halmazok palástjaival, így mértéke nullához tart, ha $\delta \downarrow 0$. Így elég kis δ esetén G' eleget tesz a tétel állításainak.

28.2. Green-formulák. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelyre $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. A 25.20 pontban bevezetett jelölésekkel az*

$$Lu = -\operatorname{div}\big(p(x)\operatorname{grad} u\big) + q(x)u$$

differenciáloperátorra, ha $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ és $v \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ valós értékű függvények, továbbá $Lu \in \mathbb{L}^1(G)$, akkor teljesül az első Green-formula*:*

$$\int_G vLu = \int_G p\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_G quv - \int_{\partial G} pvu_{\mathbf{n}}.$$

Ha pedig $u, v \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ és $Lu, Lv \in \mathbb{L}^1(G)$, akkor teljesül a második Green-formula*:*

$$\int_G vLu - uLv = \int_{\partial G} p(uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}).$$

Bizonyítás. Az első Green-formula bizonyításához alkalmazzuk a divergenciatételt az előző lemmában szereplő G' tartományra:

$$\begin{aligned}\int_{G'} vLu &= \int v(-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)+qu)\\ &= -\int_{G'}\operatorname{div}(pv\operatorname{grad} u)+\int_{G'} p\langle\operatorname{grad} u,\operatorname{grad} v\rangle+\int_{G'} quv\\ &= \int_{G'} p\langle\operatorname{grad} u,\operatorname{grad} v\rangle-\int_{\partial G'} pvu_{\mathbf{n}}+\int_{G'} quv,\end{aligned}$$

majd vegyünk $\varepsilon\downarrow 0$ határértéket. A második Green-formulát úgy kapjuk, hogy az elsőben felcseréljük u és v szerepét, és a kapott formulát kivonjuk az eredetiből.

28.3. Elliptikus differenciáloperátorok tulajdonságai. Tegyük fel, hogy $G\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelyre $\partial G\in\mathcal{C}^{0,1}$. A 25.20 pontban bevezetett jelölésekkel, a Fourier-módszerben játszott szerepe miatt az ott leírt L differenciáloperátornál általánosabb

$$L_\varrho u=-\frac{1}{\varrho(x)}\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u)+\frac{q(x)}{\varrho(x)}u$$

differenciáloperátort fogjuk vizsgálni. Az operátort az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ tér

$$u\in\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G}),\quad \partial G\colon k(x)u_{\mathbf{n}}+h(x)u=0,$$

a 25.21 pontban leírt, homogén peremfeltételnek eleget tévő valós értékű függvényei közül azokra értelmezzük, amelyekre $L_\varrho u\in\mathbb{L}^2(\varrho)$. (Bár Dirichlet-feladatnál az $u\in\mathcal{C}^1$ feltétel nem természetes, túl erős, de egyelőre csak ekkor tudjuk a problémát hatékonyan kezelni.) Az operátor sűrű halmazon van értelmezve. Megmutatjuk, hogy szimmetrikus. Ha $u,v\in\operatorname{dmn}(L_\varrho)$, akkor az u és v függvények kielégítik a peremfeltételt. Mivel a két peremfeltétel úgy tekinthető, mint egy homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek k,h egy nem triviális megoldása, az egyenletrendszer determinánsa nulla, azaz

$$\partial G\colon uv_{\mathbf{n}}-vu_{\mathbf{n}}\equiv 0.$$

Ezt felhasználva, a második Green-formulából

$$\langle L_\varrho u,v\rangle_\varrho-\langle u,L_\varrho v\rangle_\varrho=\int_G vLu-uLv=\int_{\partial G}p(uv_{\mathbf{n}}-vu_{\mathbf{n}})=0.$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ tér elemei ugyanazok, mint $\mathbb{L}^2(G)$ elemei, és a normák is ekvivalensek, mivel ϱ alulról és felülről is korlátos, pozitív függvény. A ϱ súlyfüggvény az $L_\varrho u=f$ differenciálegyenlet megoldásakor semmi szerepet nem játszik, mivel szorozhatunk vele. A sajátérték-feladat tárgyalásakor azonban fontos, mert megváltoztatja a belső szorzatot, és így L_ϱ szimmetrikus, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények pedig ortogonálisak lesznek.

Vizsgáljuk most az $\langle L_\varrho u,u\rangle_\varrho$ belső szorzatot, az úgynevezett *energiaintegrál*t. (Mint láttuk, $\frac{1}{2}\langle L_\varrho u,u\rangle_\varrho$ általában az energiának felel meg.) A peremfeltételből $u_{\mathbf{n}}=-uh/k$

ahol $k \neq 0$, és $u = 0$ ahol $k = 0$. Az első Green-formulában $v = u$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\langle L_{\varrho} u, u\rangle_{\varrho} = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + \int_G qu^2 - \int_{\partial G} puu_{\mathbf{n}} = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 + \int_{\{k\neq 0\}} phu^2/k.$$

Ebből következik, hogy $q, k, h \geq 0$ esetén L_{ϱ} nemnegatív operátor, és minden sajátértéke nemnegatív.

Sok fontos esetben a fellépő elliptikus differenciáloperátor pozitív és szimmetrikus, de nem önadjungált. Hogy a spektrálelmélet eszközeit alkalmazhassuk, az L_{ϱ} operátort kiterjesztjük egy önadjungált operátorrá. Ez a kiterjesztés úgy történik, hogy az energiaintegrál által adott normában teljessé tesszük az értelmezési tartományt. Az így kibővített értelmezési tartomány elemei azonosíthatók $\mathbb{L}^2(G)$ függvényeivel; olyan függvények, amelyeknek disztribúció értelemben vett parciális deriváltjai négyzetesen integrálhatók (Szoboljev-tér). Az így kapott Friedrichs-kiterjesztésről finom becslések mutatják, hogy inverze kompakt operátor, tehát alkalmazható rá a Riesz-elmélet. Az általános esetben az operátor nem pozitív, de alulról korlátos, így az identikus operátor egy konstansszorosát hozzáadva, alkalmazható a fent leírt módszer. A variációs problémákkal való kapcsolat lehetővé teszi, hogy a megoldások közelítésére a Ritz-módszert alkalmazzuk.

28.4. Feladat [9]. Az előző pont jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha $q, k, h \geq 0$, akkor az L_{ϱ} operátornak csak akkor sajátértéke a nulla, ha $q \equiv 0$ és $h \equiv 0$, a megfelelő sajátfüggvények pedig a konstans függvények.

$*$ **28.5. Friedrichs-tétel.** *Tegyük fel, hogy a $T \in X \to X$ sűrűn definiált lineáris operátor szimmetrikus az X valós Hilbert-téren és T pozitív, azaz van olyan $c > 0$ konstans, hogy*

$$\langle Tu, u\rangle \geq c\|u\|^2 \quad \textit{minden } u \in \operatorname{dmn}(T)\textit{-re.}$$

Legyen az X_E energiatér a $\operatorname{dmn}(T)$ teljes burka az $\langle u, v\rangle_E = \langle Tu, v\rangle$ energia belső szorzatra nézve. Ekkor

(1) $\operatorname{dmn}(T)$ *identikus beágyazása X-be egyértelműen kiterjeszthető X_E egy folytonos beágyazásává X-be;*

(2) *az $f(v) = \langle f, v\rangle$, ha $v \in X_E$ összefüggés egy folytonos $X \subset X_E^*$ beágyazást definiál;*

(3) *léteznek $T \subset T_F \subset T_E$ kiterjesztései T-nek úgy, hogy a $T_F \in X \to X$* Friedrichs-kiterjesztés *önadjungált és*

$$\langle T_F u, u\rangle \geq c\|u\|^2$$

minden $u \in \operatorname{dmn}(T_F)$-re;

(4) *a $T_F^{-1}\colon X \to X$ inverz létezik, lineáris, folytonos és önadjungált;*

(5) *a $T_F^{-1}\colon X \to X_E$ leképezés lineáris és folytonos;*

(6) *a $T_E\colon X_E \to X_E^*$ energiakiterjesztés az X_E dualitás-leképezése, azaz a*

$$(T_E u)(v) = \langle u, v\rangle_E$$

összefüggésnek eleget tévő lineáris homeomorfizmus, továbbá $T_F^{-1} f = T_E^{-1} f$, ha $f \in X$;

(7) *ha az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt, akkor a $T_F^{-1}\colon X \to X$ operátor is kompakt;*

(8) *a*

$$Tu = f$$

egyenlet minden megoldása megoldása a

$$T_F u = f, \quad u \in \operatorname{dmn}(T_F)$$

egyenletnek, az

$$\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle, \quad v \in \operatorname{dmn}(T)$$

általánosított problémának és az

$$\frac{1}{2}\langle u, u\rangle_E - \langle f, u\rangle \to \min$$

variációs problémának, továbbá X_E-n az utóbbi három probléma ekvivalens.

Bizonyítás. Az $\langle u, v\rangle_E = \langle Tu, v\rangle$ belső szorzattal és a megfelelő normával ellátva $\operatorname{dmn}(T)$-t, vegyük észre, hogy $d = 1/\sqrt{c}$ jelöléssel $\|u\| \le d\|u\|_E$ minden $u \in \operatorname{dmn}(T)$-re továbbá $\operatorname{dmn}(T)$ sűrű az X_E teljes burokban. Megmutatjuk, hogy létezik egy $j\colon X_E \to X$ lineáris folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés, így ha u-t azonosítjuk $j(u)$-val, akkor $X_E \subset X$. Valóban, legyen $j(u) = u$, ha $u \in \operatorname{dmn}(T)$. Ez a leképezés folytonosan kiterjeszthető X_E-re. Határátmenettel $\langle u, v\rangle_E = \langle Tu, j(v)\rangle$ minden $u \in \operatorname{dmn}(T)$, $v \in X_E$-re, így $j(v) = 0$-ból $v = 0$, tehát j kölcsönösen egyértelmű. Azonosítva v-t $j(v)$-vel, határátmenettel az

$$\|u\| \le d\|u\|_E, \quad \text{ha} \quad u \in X_E$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Hasonlóan, megmutatjuk, hogy létezik egy $h\colon X \to X_E^*$ folytonos lineáris és kölcsönösen egyértelmű leképezés, így u-t $h(u)$-val azonosítva, $X \subset X_E^*$. Ha $f \in X$, legyen $f^*(v) = \langle f, v\rangle$ minden $v \in X_E$-re. Ekkor $f^* \in X_E^*$, mivel

$$\left|f^*(v)\right| \le \|f\|\|v\| \le d\|f\|\|v\|_E, \quad \text{ha} \quad v \in X_E.$$

Legyen $h(f) = f^*$. Mivel $\|f^*\| \le d\|f\|$, a $h\colon X \to X_E^*$ leképezés folytonos. Mivel X_E sűrű X-ben, $f^* = 0$-ból $f = 0$ következik, azaz h kölcsönösen egyértelmű. Azonosítva f-et f^*-gal, azt kapjuk, hogy

$$f(v) = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad f \in X, v \in X_E.$$

A következő lépés a kiterjesztések konstrukciója és vizsgálata. Legyen T_E az X_E dualitás-leképezése, azaz ha $u \in X_E$, legyen $b(v) = \langle u, v\rangle_E$ minden $v \in X_E$-re, és legyen $T_E u = b$. A Riesz-tétel szerint $T_E\colon X_E \to X_E^*$ egy lineáris izometria. Az is teljesül, hogy

$$T_E u(v) = \langle u, v\rangle_E, \quad \text{ha} \quad u, v \in X_E,$$

és

$$T_E u(u) = \|u\|_E^2 \ge c\|u\|^2, \quad \text{ha} \quad u \in X_E.$$

Legyen $f \in X$. A $T_E u = f$ egyenlet ekvivalens az

$$\langle u, v\rangle_E = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in X_E$$

egyenlettel. A $T_E\colon X_E \to X_E^*$ operátor kiterjesztése a $T \in X \to X$ operátornak. Valóban, ha $Tu = f$, akkor

$$\langle u, v\rangle_E = \langle Tu, v\rangle = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in X_E,$$

így $T_E u = f$. Végül legyen $\operatorname{dmn}(T_F) = T_E^{-1}(X)$ és $T_F u = T_E u$, ha $u \in \operatorname{dmn}(T_F)$. Nyilván $T \subset T_F \subset T_E$. A $T_F^{-1} = S$ inverz operátor a $T_E^{-1}\colon X_E^* \to X_E$ izometria megszorítása, és mivel az $X_E \subset X \subset X_E^*$ beágyazások folytonosak, $S\colon X \to X_E$ és $S\colon X \to X$ folytonos. Ha az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt, akkor $S\colon X \to X$ kompakt. Megmutatjuk, hogy $S\colon X \to X$ szimmetrikus. Legyen $f, g \in X$, $u = Sf$, $v = Sg$. Ekkor $\langle Sf, Sg\rangle_E = \langle f, Sg\rangle$. Innen $\langle f, Sg\rangle = \langle g, Sf\rangle$, azaz S szimmetrikus. Mivel $\operatorname{dmn}(S) = X$, az $S\colon X \to X$ operátor önadjungált. Mivel T_F az S önadjungált operátor inverze, szintén önadjungált. Továbbá

$$\langle T_F u, u\rangle = \langle u, u\rangle_E \geq c\|u\|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \operatorname{dmn}(T_F).$$

Hátra van még az utolsó állítás bizonyítása. Minden $b \in X_E^*$-ra, az

$$\frac{1}{2}\langle u, u\rangle_E - b(u) \to \min, \quad u \in X_E$$

variációs problémának egyetlen megoldása $u = T_E^{-1} b$. Valóban, ha $a = T_E^{-1} b$, akkor $b(v) = \langle a, v\rangle_E$ minden $v \in X_E$-re a T_E konstrukciója szerint. Innen a variációs probléma ekvivalens az

$$\langle u - a, u - a\rangle_E \to \min, \quad u \in X_E$$

feladattal, amelynek egyetlen megoldása $u = a$. Speciálisan, ha $f \in X$ és $b(u) = \langle f, u\rangle$ minden $u \in X_E$-re, akkor $u = T_E^{-1} f = T_F^{-1} f$. Ha $T_F u = f$, akkor

$$\langle T_F u, v\rangle = \langle u, T_F v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \text{minden } v \in \operatorname{dmn}(T)\text{-re.}$$

Megfordítva, legyen $f \in X$ és $u \in X_E$ az általánosított probléma megoldása, azaz

$$\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in \operatorname{dmn}(T).$$

Mivel $\langle u, v\rangle_E = \langle f, v\rangle$, kapjuk, hogy $u = T_E^{-1} f = T_F^{-1} f$. Végül $T \subset T_F$ miatt, ha $Tu = f$, akkor $T_F u = f$.

∗ **28.6. Következmény.** *A*

$$Tu = \lambda u + f, \quad u \in \operatorname{dmn}(T),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

inhomogén sajátértékprobléma minden megoldása megoldása a

$$T_F u = \lambda u + f, \quad u \in \operatorname{dmn}(T_F)$$

és

$$\langle u, Tv\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \langle f, v\rangle \text{ minden } v \in \operatorname{dmn}(T)\text{-re}, \quad u \in X_E$$

problémának, és az utóbbi két probléma ekvivalens.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a tétel bizonyítását f helyett a $\lambda u + f$ függvényre.

∗ **28.7. Következmény.** *Tegyük fel, hogy X végtelen dimenziós, és az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt. Ekkor*

(1) *a $T_F \in X \to X$ operátornak megszámlálható sok λ_n sajátértéke van;*

(2) *T_F minden sajátértéke véges multiplicitású, $\lambda_n \geq c$ minden n-re, és $\lambda_n \to \infty$ amint $n \to \infty$;*

(3) *a sajátvektorokból képezhető teljes ortonormált rendszer X-ben.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Hilbert–Schmidt-tételt T_F^{-1} komplexifikáltjára. Vegyük észre, hogy egy sajátvektor konjugáltja is sajátvektor, így a valós és a képzetes része is, tehát a sajátvektorok választhatók valósaknak.

∗ **28.8. Következmény.** *Tegyük fel, hogy X végtelen dimenziós, és az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt. Legyen $\lambda \neq 0$. Ekkor*

(1) *ha λ nem sajátértéke T_F-nek, akkor minden $f \in X$-re a $T_F u = \lambda u + f$ egyenletnek egyetlen megoldása van;*

(2) *ha λ sajátértéke T_F-nek, akkor adott $f \in X$-re a fenti egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $\langle f, u\rangle = 0$ minden, a λ-hoz tartozó sajátvektorára T_F-nek.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk T_F^{-1} komplexifikáltjára Fredholm alternatíva tételét.

∗ **28.9. Friedrichs-kiterjesztés alulról korlátos szimmetrikus operátorokra.** Tegyük fel, hogy $T \subset X \times X$ sűrűn definált szimmetrikus lineáris operátor az X valós Hilbert-téren, és T operátor alulról korlátos operátor, azaz van olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $\langle Tu, u\rangle \geq c\|u\|^2$ minden $u \in \mathrm{dmn}(T)$-re. A Friedrichs-kiterjesztés ekkor is definiálható, és az eredmények nagy része átvihető erre az esetre is, a következőképpen: Válasszunk olyan c' konstanst, amelyre $c + c' > 0$, és tekintsük a $T' = T + c'\mathbb{I}$ operátort. Alkalmazzuk erre Friedrichs tételét, és a kapott Friedrichs-kiterjesztésből vonjunk le $c'\mathbb{I}$-t, így kapjuk a T operátor T_F Friedrichs-kiterjesztését. Világos, hogy a $Tu = f$ egyenlet minden megoldása megoldása a $T_F u = f$ egyenletnek, és az $\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle$ minden $v \in \mathrm{dmn}(T)$-re általánosított problémának, valamint a T'-höz tartozó X_E energiatéren az utóbbi kettő ekvivalens. Ennek belátásához T'-re, T'_F-re és f helyett $f + c'u$-ra kell alkalmazni Friedrichs tételének eredményeit. Vegyük észre, hogy ha c' helyett egy másik konstanssal dolgozunk, az energiatér ugyanaz marad, más, ekvivalens normával. Így az általánosított probléma T-re ugyanaz marad, amiből következik, hogy T_F nem függ a c' választásától.

∗ **28.10. Megjegyzés.** Ha az eredeti probléma lineáris elliptikus egyenletre vonatkozó peremérték-probléma, akkor a variációs probléma az ehhez tartozó klasszikus variációs probléma, a T_F^{-1} operátor pedig egy integráloperátor, amelynek a magfüggvénye a Green-függvény. A klasszikus problémának csak elég sima f-re van megoldása. Az X_E térben mindig van megoldás. A klasszikus matematikai fizikában szokásos áttérés integráloperátorokra a

$$T_F u = \lambda u + f$$

problémáról az

$$u = \lambda T_F^{-1} u + T_F^{-1} f$$

problémára való áttérésnek felel meg. Az X_E energiatér egy Szoboljev-térnek felel meg, az $X_E \subset X$ beágyazás kompaktsága Szoboljev beágyazási tétele. A T_F nemkorlátos kiterjesztés helyett a T_E korlátos kiterjesztéssel is dolgozhatunk, különböző terek között.

∗ **28.11. Példa: Dirichlet-feladat.** A különbség trükkel az elliptikus egyenletekre vonatkozó Dirichlet-feladatban a peremfeltétel homogén peremfeltételre redukálható. Így 28.3 jelöléseivel, az alábbi problémát fogjuk vizsgálni:

$$G\colon L_\varrho u = f, \quad \partial G\colon u = 0.$$

Itt 28.3 szerint L_ϱ egy szimmetrikus alulról korlátos differenciáloperátor, amely $\mathbb{L}^2(\varrho)$ egy sűrű alterén van értelmezve. Ez az operátor pozitív, ha $q > 0$, így ekkor alkalmazható Friedrichs tétele, a többi eset pedig erre az esetre visszavezethető. Az energianormára

$$\|u\|_E^2 = \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2).$$

Ez a norma nyilván ekvivalens az

$$u \mapsto \left(\int_G (|\nabla u|^2 + u^2)\right)^{1/2}$$

normával, bármely $p, q > 0$ esetén, mivel p és q alulról és felülről is korlátosak. Így az energiatér egy olyan altere $\mathbb{L}^2(G)$-nek, amely erre a normára nézve zárt. Szoboljev tételéből következni fog, hogy ez a tér a $\mathcal{H}^1$ tér egy zárt altere, a $\mathcal{H}_0^1$ tér, és a $\mathcal{H}_0^1 \subset \mathbb{L}^2$ beágyazás kompakt, így megszámlálható sok sajátérték van, mindegyiknek a rangja véges, és a sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.

∗ **28.12. Példa: Neumann-feladat.** Itt 28.3 jelöléseivel, az alábbi problémát fogjuk vizsgálni:

$$G\colon L_\varrho u = f, \quad \partial G\colon u_{\mathbf{n}} = 0.$$

Ebben az esetben is L_ϱ egy szimmetrikus alulról korlátos differenciáloperátor, amely $\mathbb{L}^2(\varrho)$ egy sűrű alterén van értelmezve. $q > 0$ esetén ez az operátor pozitív, így ekkor alkalmazható Friedrichs tétele, a többi eset pedig erre az esetre visszavezethető. Az energianormára itt is

$$\|u\|_E^2 = \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2),$$

így az előző példa gondolatmenete megismételhető, tehát itt is megszámlálható sok sajátérték van, mindegyiknek a rangja véges, és a sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.

∗ **28.13. Szoboljev-terek.** Az előző két példa indokolja az alábbi, úgynevezett *Szoboljev-ter*ek bevezetését. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, $m \in \mathbb{N}$. Jelölje $\mathcal{H}^m(G)$ azon $u \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúciók terét, amelyekre $|\alpha| \leq m$ esetén $\partial^\alpha u$ reguláris disztribúció, és

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2 < \infty,$$

ahol $\|\ \|$ az $\mathbb{L}^2(G)$ tér normáját jelöli, az

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle$$

belső szorzattal, ahol $\langle .,. \rangle$ az $\mathbb{L}^2(G)$ tér belső szorzata. Nyilván $\mathcal{H}^0 = \mathbb{L}^2$. A $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{H}^m(G)$ halmaz lezártját $\mathcal{H}^m$-ben jelölje $\mathcal{H}_0^m(G)$. Disztribúciók konvergenciáját felhasználva, nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{H}^m$, és így $\mathcal{H}_0^m$ is Hilbert-tér.

Általánosabban, legyen $1 \leq p < \infty$ esetén $\mathcal{W}^{m,p}(G)$ azon $u \in \mathbb{L}^p(G)$ függvények halmaza, amelyeknek disztribúció értelemben vett deriváltja $0 \leq |\alpha| \leq m$ esetén reguláris disztribúció és

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G \left|\partial^\alpha u(x)\right|^p \, dx$$

véges, az $\|u\|_{m,p}$ (fél)normával. A $p = \infty$ esetben legyen $\mathcal{W}^{m,\infty}(G)$ azon $u \in \mathbb{L}^\infty(G)$ függvények halmaza, amelyeknek disztribúció értelemben vett deriváltja $0 \leq |\alpha| \leq m$ esetén reguláris disztribúció és

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty$$

véges, az $\|u\|_{m,\infty}$ (fél)normával. Ugyanúgy, mint fenn, látható hogy ezek a terek Banach-terek. Legyen $\mathcal{W}_0^{m,p}(G)$ a $\mathcal{D}(G)$ lezártja $\mathcal{W}^{m,p}(G)$-ben.

A következő tétel a $\mathcal{H}^m$ Szoboljev-terek legfontosabb tulajdonságait foglalja össze.

∗ **28.14. Szoboljev beágyazási tétele.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. Ekkor*

(1) *$\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ sűrű $\mathcal{H}^m(G)$-ben, ha $m = 0, 1, 2, \ldots$;*

(2) *a $\mathcal{H}^0(G) \supset \mathcal{H}^1(G) \supset \mathcal{H}^2(G) \supset \ldots$ beágyazások kompaktak;*

(3) *ha $m - j > n/2$, akkor $\mathcal{H}^m(G) \subset \mathcal{C}^j(\overline{G})$, azaz minden $u \in \mathcal{H}^m(G)$ függvény megváltoztatható úgy egy nullmértékű halmazon, hogy $\mathcal{C}^j(\overline{G})$-ba tartozzon, továbbá a beágyazás folytonos;*

(4) *létezik egy egyértelműen meghatározott lineáris folytonos $B\colon \mathcal{H}^1(G) \to \mathbb{L}^2(\partial G)$ „peremérték-képző" operátor úgy, hogy minden $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$-ra a Bu függvény χ^{n-1}-majdnem mindenütt megegyezik $u|_{\partial G}$-vel; $Bu = g$ (majdnem mindenütt) helyett egyszerűen azt fogjuk írni, hogy $\partial G\colon u = g$;*

(5) *$u \in \mathcal{H}_0^m(G)$ akkor és csak akkor, ha $u \in \mathcal{H}^m(G)$ és $\partial G\colon \partial^\alpha u = 0$ minden $|\alpha| < m$ esetén ($m = 1, 2, \ldots$).*

A tétel, hivatkozásokkal, és a bizonyítás nagy része megtalálható Zeidler [179] könyvében, II. 238–251. o., 1030. o.

∗ **28.15. Feladat [9].** Határozzuk meg $\mathcal{H}^m(G)$ és $\mathcal{H}_0^m(G)$ elemeit, ha G egy korlátos nyílt intervallum.

∗ **28.16. Egyenlőtlenségek.** Hogy a Friedrichs-tételt alkalmazhassuk általánosabb esetekben is, bizonyos egyenlőtlenségekre van szükségünk. Az első a *Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség*: ha $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, akkor van olyan $c > 0$, hogy

$$\int_G u^2 \leq c \int_G |\nabla u|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G; \mathbb{R}). \tag{1}$$

A másik fontos egyenlőtlenség a következő: Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. Ekkor van olyan $c > 0$ konstans, hogy $0 < \varepsilon \leq 1$ esetén

$$\varepsilon \int_{\partial G} u^2 \leq c \int_G (u^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|^2), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Végül a harmadik egyenlőtlenség: Az előző egyenlőtlenség feltételei mellett, van olyan $c > 0$ konstans, hogy

$$\int_G (u^2 + |\nabla u|^2) \leq c \left(\int_G |\nabla u|^2 + \int_{\partial G} u^2 \right), \quad \text{ha} \quad u \in \mathcal{H}^1(G; \mathbb{R}). \tag{3}$$

A bizonyítások megtalálhatók Zeidler [179] könyvében, II. 238–251. o. A (2) egyenlőtlenség csak az $\varepsilon = 1$ esetben van megfogalmazva, de a bizonyítás alkalmazható az általános esetre is.

∗ **28.17. Lemma.** *25.20 feltételei mellett, ha $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, akkor adott p és h esetén van olyan q_0 konstans, hogy $q \geq q_0$ esetén*

$$\|u\|^2 = \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2) + \int_{\partial G} phu^2, \quad u \in \mathcal{H}^1$$

a $\mathcal{H}^1$ tér normájával ekvivalens normát definiál.

Bizonyítás. Valóban, ha $p|h| \leq c_0$, akkor az előző pont (2) egyenlőtlenségét felhasználva,

$$\begin{aligned} \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2) + \int_{\partial G} phu^2 &\geq \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2) - c_0 \int_{\partial G} u^2 \\ &\geq \int_G ((p - \varepsilon c_0 c)|\nabla u|^2 + (q - c_0 c/\varepsilon)u^2). \end{aligned}$$

Válasszuk úgy $0 < \varepsilon \leq$ 1-et, hogy $p - \varepsilon c_0 c \geq p_0 > 0$ legyen. Ha $q_0 - c_0 c/\varepsilon > 0$, akkor ebből az egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\|u\|^2 \geq \min\{p_0, q_0 - c_0 c/\varepsilon\} \|u\|^2_{\mathcal{H}^1}.$$

Másrészt hasonló számolással, ha $p_1 \geq p + \varepsilon c_o c$, $q_1 \geq q + c_0 c/\varepsilon$, akkor

$$\|u\|^2 \leq \max\{p_1, q_1\} \|u\|^2_{\mathcal{H}^1}.$$

∗ **28.18. Tétel.** *28.3 feltételei mellett, tegyük fel, hogy a 25.21 pontban leírt homogén első, második, illetve harmadik peremérték-problémáról van szó. Ekkor az L_ϱ operátor alulról korlátos és szimmetrikus $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban, Friedrichs-kiterjesztésének megszámlálható végtelen sok sajátértéke van, a sajátértékek halmazának nincs torlódási pontja, és minden sajátérték véges rangú. A sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy Friedrichs tételének következményeit és Szoboljev beágyazási tételét alkalmazva megkapjuk ezt az állítást, csak azt kell megmutatnunk, hogy L_ϱ alulról korlátos operátor, az energianorma pedig $\mathcal{H}^1$ eredeti normájával ekvivalens. Az első és második peremérték-feladatra ez nyilvánvaló, a harmadik peremérték-probléma esetén pedig következik az előző lemmából.

28.19. Variációs egyenlőség. *Tegyük fel, hogy egy Hilbert-tér egy T szimmetrikus operátorához létezik sajátvektoroknak egy $u_1, u_2, \dots$ teljes ortonormált rendszere úgy, hogy a megfelelő sajátértékekre $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$. Ekkor*

$$\lambda_j = \inf\{\langle Tu, u\rangle \colon u \in \operatorname{dmn}(T), \|u\| = 1, u \perp u_i, \text{ ha } i < j\}$$

minden j-re.

A variációs egyenlőség lehetővé teszi, hogy elliptikus differenciáloperátorok sajátfüggvényeit és sajátértékeit a Ritz-módszerrel közelítsük.

Bizonyítás. Tetszőleges $u \in \operatorname{dmn}(T)$-re $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, u_j\rangle u_j$. Ebből

$$\begin{aligned}\langle Tu, u\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle Tu, u_j\rangle \overline{\langle u, u_j\rangle} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, Tu_j\rangle \overline{\langle u, u_j\rangle} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \lambda_j u_j\rangle \overline{\langle u, u_j\rangle} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \big|\langle u, u_j\rangle\big|^2.\end{aligned}$$

Ha most $\|u\| = 1$ és $u \perp u_i$, ha $i < j$, akkor a Parseval-egyenlőséget felhasználva

$$\langle Tu, u\rangle = \sum_{i=j}^{\infty} \lambda_i \big|\langle u, u_i\rangle\big|^2 \ge \sum_{i=j}^{\infty} \lambda_j \big|\langle u, u_i\rangle\big|^2 = \lambda_j.$$

Másrészt $u = u_j$ esetén $\langle Tu_j, u_j\rangle = \lambda_j$.

$*$ **28.20. Feladat: Ritz példája.** Határozzuk meg közelítően az

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \quad u(-1) = u(1) = 0$$

sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit Ritz módszerével. Hasonlítsuk össze az eredményeket a pontos értékekkel. A páros sajátfüggvények közelítését keressük

$$(1 - x^2)(c_0 + c_1 x^2 + \dots + c_n x^{2n})$$

alakban, a páratlan sajátfüggvények közelítését pedig

$$(1 - x^2)(c_0 x + c_1 x^3 + \dots + c_n x^{2n+1})$$

alakban. (Lásd Zeidler [179], II. 94. o.)

∗ **28.21. A Ritz-módszer a Dirichlet-feladatra.** 28.16 első egyenlőtlenségéből és Szoboljev tételéből következik, hogy a belső Dirichlet-feladatnál homogén peremfeltétel mellett fellépő elliptikus operátor $q \geq 0$ esetén is (azaz a Laplace-egyenletnél is) pozitív, és az energiatér $\mathcal{H}_0^1(G)$. Így ekkor bármely $f \in \mathbb{L}^2(G)$ esetén a Dirichlet-feladat megoldását a

$$\int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2 - 2fu) \to \min, \quad u \in \mathcal{H}_0^1(G)$$

minimumfeladat megoldásaként kaphatjuk. Jó közelítéseket kaphatunk a Ritz-módszerrel.

∗ **28.22. A Ritz-módszer a második és harmadik peremérték-feladatra.** Ebben az esetben $k \equiv 1$. A 25.20 és 25.21 pontok jelöléseivel, minden $u \in \operatorname{dmn}(L)$ azonosítható az $\mathbb{L}^2(G) \times \mathbb{L}^2(\partial G)$ Hilbert-tér $(u, u|_{\partial G})$ elemével. Értelmezzük ennek a térnek egy operátorát a $Tu = (Lu, pBu)$ összefüggéssel. Annak technikai jellegű bizonyítását, hogy T sűrűn definiált, feladatnak hagyjuk. Mivel

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle - \langle u, Tv\rangle &= \langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle + \langle pBu, v\rangle - \langle u, pBv\rangle \\ &= -\int_{\partial G} p(vu_{\mathbf{n}} - v_{\mathbf{n}}u) + \int_{\partial G} p((u_{\mathbf{n}} + hu)v - (v_{\mathbf{n}} + hv)u) \\ &= 0,\end{aligned}$$

az operátor szimmetrikus, továbbá

$$\begin{aligned}\langle Tu, u\rangle &= \langle Lu, u\rangle + \langle pBu, u\rangle \\ &= \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2) - \int_{\partial G} puu_{\mathbf{n}} + \int_{\partial G} pu(u_{\mathbf{n}} + hu) \\ &= \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2) + \int_{\partial G} phu^2.\end{aligned}$$

Ha $q > 0$ és $h \geq 0$, vagy ha $q \geq 0$ és $h > 0$, akkor az 28.16 pont (2) és (3) egyenlőtlenségeiből kapjuk, hogy a T operátor pozitív, és az energianorma ekvivalens $\mathcal{H}^1$ normájával. Ezekben az esetekben alkalmazható a Friedrichs-tétel, és azt kapjuk, hogy az eredeti probléma megoldása megoldása az alábbi minimumproblémának:

$$\int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2 - 2fu) + \int_{\partial G} p(hu^2 - 2gu) \to \min, \quad u \in \mathcal{H}^1.$$

A megoldást így tetszőleges $f \in \mathbb{L}^2(G)$, $g \in \mathbb{L}^2(\partial G)$ esetén közelíthetjük a Ritz-módszerrel.

∗ **28.23. Feladat [14].** Mutassuk meg, hogy ha $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, és $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, akkor az $\{(u, u|_{\partial G})\colon u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})\}$ halmaz sűrű $\mathbb{L}^2(G) \times \mathbb{L}^2(\partial G)$-ben.

∗ **28.24. Galjorkin-módszer.** Az előző esetben u közelítésére a Ritz-módszert használva, ha $u \approx \sum_i c_i w_i$ véges összeg alakjában keressük a közelítést lineárisan független $\mathcal{H}^1$-beli w_i függvényekkel, akkor az ismeretlen c_i együtthatók egy másodfokú polinomját

kell minimalizálni. c_i szerinti differenciálással $\sum_j a_{i,j}c_j = b_i$ alakú lineáris egyenletrendszert kapunk

$$a_{i,j} = \int_G (p\langle \nabla w_i, \nabla w_j\rangle + q w_i w_j) + \int_{\partial G} p h w_i w_j,$$
$$b_i = \int_G f w_i + \int_{\partial G} g w_i$$

együtthatókkal. Dirichlet-feladat és homogén peremfeltétel esetén ugyanilyen egyenletrendszert kapunk a $h \equiv 0$, $g \equiv 0$ esetnek megfelelő együtthatókkal, de $w_i \in \mathcal{H}_0^1$ függvényekkel kell dolgoznunk.

Ugyanezekhez az egyenletekhez az alábbi, formális úton is eljuthatunk:

(1) Az u függvényre vonatkozó egyenletet szorozzuk egy $v \in \mathcal{H}$ függvénnyel, integrálunk, és esetleg G feletti parciális integrálásokkal kapjuk az általánosított problémát.

(2) Döntő fontosságú, hogy a $\mathcal{H}$ osztályt úgy kell megválasztani, hogy az általánosított probléma egy elég sima u megoldása a klasszikus problémának is megoldása legyen, ha az adatok is elég simák.

(3) Ha u-t és v-t egy megfelelő véges dimenziós altérből (amely nem kell, hogy $\mathcal{H}$ altere legyen) választjuk, akkor megkapjuk az egyenletrendszert.

Ez a *Galjorkin-módszer*. Előnye, hogy a differenciáloperátornak nem kell sem pozitívnak, sem szimmetrikusnak lennie, sőt, még nemlineáris is lehet (ekkor nemlineáris egyenletrendszert kapunk). A Galjorkin-módszer a Ritz-módszer általánosításának tekinthető. Figyeljük meg, hogy a Galjorkin-módszer az Euler–Lagrange-egyenletek levezetésénél alkalmazott lépések ellenkező irányban történő végrehajtásának felel meg.

Várható, hogy ha az utolsó lépésben használt véges dimenziós altér egy Galjorkin-séma X_n altereit futja be, akkor az egyes lépésekben kapott u_n közelítő megoldások sorozata konvergens. A konvergencia bizonyítása úgy történhet, hogy u_n hibáját, $\|u - u_n\|$-t a $d(u, X_n)$ távolság segítségével becsüljük. Az utóbbi távolság annál kisebb, így a konvergencia annál gyorsabb, minél simább a megoldás. A Galjorkin-módszer egzisztenciabizonyításokra is alkalmas.

A módszer evolúciós egyenletek megoldására történő alkalmazásával a következő fejezetben ismerkedünk meg. Itt egy egyszerű példán mutatjuk be használatát. További példák és pontos konvergenciatételek találhatók a Galjorkin-módszerre és a Ritz-módszerre Zeidler [179] könyvében, elsősorban a II. kötetben.

∗ **28.25. Integrálegyenletek és a Galjorkin-módszer.** Tekintsük az

$$u(x) - \int_G k(x,y)u(y)\,dy = f(x), \quad x \in G,$$

$k \in \mathbb{L}^2(G \times G)$, $f \in \mathbb{L}^2(G)$ integrálegyenletet. A $v \in \mathcal{D}(G)$ függvénnyel való szorzás és G feletti integrálás után

$$\int_G uv - \int_{G\times G} k(x,y)u(y)v(x)\,dy\,dx = \int_G fv.$$

Az $u_n = \sum_{i=1}^n c_i w_i$, $w_i \in \mathbb{L}^2(G)$ alakban keresve a közelítő megoldást, a Galjorkin-egyenletek:

$$\int_G u_n w_j - \int_{G\times G} k(x,y) u_n(y) w_j(x)\,dy\,dx = \int_G f w_j,$$

$j = 1, 2, \dots, n$, lineáris egyenletrendszer a c_i együtthatókra.

∗ **28.26. Galjorkin-sémák.** A Ritz-módszer és a Galjorkin-módszer alkalmazásához Galjorkin-sémákra van szükségünk. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. A legfeljebb k-ad fokú polinomok alterét X_k-val jelölve, az altérrendszer Galjorkin-sémát alkot $\mathcal{H}^m(G)$-ben. Ha ϱ valós értékű $\mathcal{C}^{m+2}$-függvény $\overline{G}$ valamely környezetén, amelyre $\varrho(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x \in \partial G$, továbbá $\nabla\varrho(x) \neq 0$, ha $x \in \partial G$, akkor az $x \mapsto \varrho^m(x)p(x)$ alakú *kvázipolinom*ok terét X_k-val jelölve, ahol p a legfeljebb k-ad fokú polinomokat futja be, Galjorkin-sémát kapunk $\mathcal{H}_0^m(G)$-ben. Az approximáció pontosságát illetően lásd Zeidler [179] könyvét, II. 1035–1036. o.

Ezeknek a Galjorkin-sémáknak az alkalmazása számítástechnikailag általában nem előnyös, mert X_k bázisaként a $w_\alpha(x) = x^\alpha$ monomokat, illetve a $w_\alpha(x) = \varrho^m(x)x^\alpha$ kvázimonomokat választva, a Galjorkin-módszer alkalmazásánál fellépő $\langle w_\alpha, w_\beta\rangle$ együtthatók mátrixa kitöltött. Sokkal előnyösebb az úgynevezett végeselemek használata, amelyeknél az együtthatómátrix ritka és a bázisfüggvények megválasztásában érvényesülhet a felhasználó tapasztalata, rugalmasan alkalmazkodva a feladat jellegéhez.

∗ **28.27. Végeselemek.** A *végeselem-módszer*nél a $\overline{G} \subset \mathbb{R}^n$ poliédert egyszerű geometriai idomokra, legtöbbször szimplexekre (szakaszokra, háromszögekre, tetraéderekre, stb.) vagy zárt téglákra osztjuk, és olyan közelítő függvényeket keresünk, amelyek az egyes idomokon polinomok. Egy *végeselem* egy ilyen idom, amelynek néhány pontját kijelöltük, ezek a *csomópont*ok. Minden csomóponthoz tartozik néhány iránymenti derivált (nulladik derivált alatt a függvényt értve), és n-változós polinomok egy osztálya úgy, hogy tetszőlegesen megadva a csomópontokhoz tartozó iránymenti deriváltakat, pontosan egy olyan polinom létezik a polinomosztályból, amely a csomópontokban az adott értékeket veszi fel. A poliéder végeselemekre való felosztásának olyannak kell lennie, hogy az egymáshoz csatlakozó végeselemek metszetének csomópontjai közösek legyenek, és ugyanazok az iránymenti deriváltak legyenek előírva. Sokszor a felosztás összes végeseleme egyetlen végeselemből kapható affin transzformációval. Egy adott végeselem-felosztáshoz tartozó *bázisfüggvény*eket a következőképpen kapjuk: egy adott csomópontban egy, a csomóponthoz tartozó iránymenti derivált értékét 1-nek, minden más iránymenti derivált értékét az adott csomópontban és az összes többi csomópontban 0-nak véve, minden végeselemen meghatározzuk a megfelelő polinomot. Természetesen a bázisfüggvény csak azokon a végeselemeken lesz nullától különböző, amelyek az adott csomópontot tartalmazzák. A bázisfüggvények mindig $\mathbb{L}^2 = \mathcal{H}^0$-ban vannak, és belátható, hogy egy bázisfüggvény pontosan akkor van $\mathcal{C}^m$-ben, ha $\mathcal{H}^{m+1}$-beli. A végeselemek legfőbb előnye, hogy a távoli csomópontokhoz tartozó bázisfüggvények ortogonálisak. Galjorkin-sémát úgy kaphatunk, hogy végeselem-felosztásoknak egy alkalmas sorozatát vesszük.

Egyszerű végeselem egydimenzióban egy szakasz, a két végpontjával, mint csomóponttal. Ha a csomópontokhoz a legfeljebb m-edrendű deriváltakat rendeljük hozzá, a polinomosztály pedig a legfeljebb $2m+1$-ed fokú polinomok osztálya, akkor tetszőlegesen megadva a végpontokban a deriváltak értékét, Hermite-interpolációval kaphatjuk meg a megfelelő polinomot. A bázisfüggvények $\mathcal{C}^m$-ben vannak.

Kétdimenzióban egyszerű végeselem egy háromszög a csúcspontokkal, mint csomópontokkal. Minden csomóponthoz a függvényérték van hozzárendelve, a polinomosztály a legfeljebb elsőfokú polinomok osztálya. Egy másik végeselem egy háromszög, csomópontok a csúcspontok és az oldalfelező pontok. Minden csomópontban a függvényérték van megadva, a polinomosztály a legfeljebb másodfokú polinomok osztálya. Általánosabban, egy háromszöget $(m+1)^2$ egybevágó kis háromszögre osztva, válasszuk csomópontnak a kis háromszögek $(m+1)(m+2)/2$ csúcsát. Ha minden csomóponthoz a függvényérték tartozik, és a polinomosztály a legfeljebb m-ed fokú polinomok osztálya, akkor a kapott végeselemek az úgynevezett *Lagrange háromszög-elem*ek. A név onnan ered, hogy a polinomot (többváltozós) Lagrange-interpolációval kaphatjuk. A megfelelő bázisfüggvények folytonosak, ugyanis az egy oldalon fekvő $m+1$ pont egyértelműen meghatározza az oldalon a függvényértéket, mert az a csúcstól mért távolság legfeljebb m-ed fokú polinomja. Ez az elemcsalád könnyen általánosítható akárhány dimenzióra, így a *Lagrange szimplex elem*eket kapjuk.

Nehezebb probléma $\mathcal{C}^m$-beli ($m \geq 1$) bázisfüggvényeket szolgáltató végeselemek keresése. Ilyeneket legegyszerűbben úgy kaphatunk, hogy egydimenziós végeselemek „direkt szorzatát" képezzük. Az így kapott végeselemek téglák, a polinomok pedig változónként egy-egy adott fokszámnál alacsonyabb fokúak. Egyébként az alacsonyabb dimenziós végeselemek direkt szorzása más végeselemek képzésére is felhasználható. Például egydimenziós vonalelemek és kétdimenziós háromszög-elemek direkt szorzásával hasábelemet kaphatunk. A téglák végeselemként való felhasználásának hátránya, hogy bonyolult határú tartományok széle igen rosszul közelíthető. Két- és háromdimenzióban ezért $\mathcal{C}^1$ bázisfüggvényeket eredményező háromszög- illetve tetraéder-elemeket is használnak.

Egy másik lehetőség „kombinált elemek" használata. Például kétdimenzióban ezek több kisebb háromszögre felbontott háromszögek illetve négyszögek, a részháromszögek „külső" csomópontjaiban több, „belső" csomópontjaiban kevesebb előírással. Egyébként ez a gondolat, a „belső" csomópontok számának, és ezzel együtt a polinomok együtthatói számának csökkentése vezet egyéb végeselemek konstrukciójához. Gyakran még a simaság rovására is megéri a belső csomópontokat kiküszöbölni, mert az ilyen „nemkonform" elemek alkalmazásakor a számításigény jelentősen csökken, és a tapasztalatok jók.

A tartomány határának jobb közelítésére, vagy a megoldandó fizikai probléma jellegének megfelelően görbült végeselemeket is szokás használni. A további, finomabb részleteket illetően Stoyan [156] jegyzetére, illetve a Kurutzné–Scharle [96] könyvre, valamint az ott hivatkozott szakirodalomra utalunk.

∗ **28.28. Spline interpoláció.** A végeselemek módszerével szoros kapcsolatban van a *spline interpoláció*. Ennek során a legegyszerűbb és legfontosabb esetben egy valós $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ alappontrendszer esetén Lagrange interpolációs polinom helyett olyan $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$ interpoláló függvényt keresünk, amely az x_i pontokban az előírt $f(x_i)$ értéket veszi fel, az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokon $\mathcal{C}^2$-beli, és amelyre $\int_a^b (p'')^2$ minimális. Ez az előírás mechanikailag egy olyan rugalmas rúdnak (amit a hajóépítésben *spline*-nak neveznek) felel meg, amely átmegy az $(x_i, f(x_i))$ pontokban szabadon forgó tengelyeken. Hilbert tételét alkalmazva az $]x_{i-1}, x_i[$ intervallumon, kapjuk, hogy itt $p \in \mathcal{C}^4$, és így az Euler–Lagrange-egyenletből itt p legfeljebb harmadfokú polinom. Ezt felhasználva, p mint az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszokhoz (csomópontok a végpontok) tartozó $\mathcal{C}^1$-beli bázisfüggvények lineáris kombinációja, meghatározható.

∗ **28.29. Differenciamódszerek.** A Ritz-módszer és a Galjorkin-módszer mellett elliptikus egyenletek megoldására használhatók a *differenciamódszer*ek is, amelyeknél az $Lu = f$ egyenletben szereplő elliptikus differenciáloperátort egy L_h differenciaoperátorral közelítjük, és egy $L_h u_h = f_h$ differenciaegyenletre jutunk. Például a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat esetében az egységnégyzeten, h lépésközű négyzetrácsot használva, és a $\Delta_h\Delta_{-h}$ differenciával közelítve a második parciálisokat, $u(ph, qh) = u_{p,q}$ jelöléssel a

$$4u_{p,q} = u_{p+1,q} + u_{p-1,q} + u_{p,q+1} + u_{p,q-1}$$

egyenletrendszer adódik a négyzet belsejében lévő pontokra, míg a peremen fekvő pontokban u adott. A fellépő nagyméretű, bár ritka mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása sok speciális problémát vet fel. Természetesen más, sokkal hatékonyabb módszerek is léteznek. A további részleteket, és az irodalmat illetően lásd Stoyan [156] jegyzetét, Szamarszkij [157] és Marcsuk [107] könyvét, illetve Zeidler [179] könyvének 20. fejezetét, valamint az ezekben található hivatkozásokat.

28.30. Az elliptikus egyenletek elméletének főtétele. *A 28.3 pont jelöléseivel, tekintsük a*

$$G\colon L_\varrho u = f, \quad \partial G\colon Bu = 0$$

problémát. Tegyük fel, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^\infty$, $\varrho, p, q \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})$, *a peremfeltétel az első, második vagy harmadik peremfeltétel,* $h \in \mathcal{C}^\infty(\partial G)$. *Legyen* $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ *és*

$$X = \mathcal{C}^{m+2,\alpha}(\overline{G}), \quad Y = \mathcal{C}^{m,\alpha}(\overline{G}), \quad Z = \mathcal{C}(\overline{G}),$$

X_0 *pedig a peremfeltételt kielégítő* $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$*-beli függvények halmazának lezártja* X*-ben. Ekkor*

(1) *az* $L_\varrho\colon X_0 \to Y$ *operátor nulltere véges* d*-dimenziós;*

(2) *a nulltér minden eleme* $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$*-ban van;*

(3) *létezik pontosan* d *lineárisan független* $F_j \in Y^*$ *funkcionál úgy, hogy* $L_\varrho u = f$ *pontosan akkor oldható meg, ha* $F_j(f) = 0$, $j = 1, 2, \dots, d$;

(4) *van olyan* c *konstans, hogy minden* $u \in X_0$*-ra*

$$\|u\|_X \le c(\|L_\varrho u\|_Y + \|u\|_Z);$$

(5) *ha* $d = 0$, *akkor* L_ϱ *homeomorfizmus, és* L_ϱ^{-1} *kompakt.*

Az (1)–(5) állítások akkor is érvényben maradnak, ha $m \in \mathbb{N}$ *és*

$$X = \mathcal{H}^{m+2}(G), \quad Y = \mathcal{H}^m(G), \quad Z = \mathbb{L}^1(G),$$

a szükséges deriváltakat disztribúció értelemben értve.

Hasonló regularitási tétel teljesül inhomogén peremfeltétel esetén is, jóval általánosabb és magasabbrendű egyenletekre is. Ezeknek az eredményeknek az összefoglalását lásd Zeidler [179] könyvében, I. 257–265. o., utalással a részletes irodalomra.

28.31. Példa. Vizsgáljuk a $q \equiv 0$ esetben a homogén első peremérték-problémát. Az $\langle L_\varrho u, u\rangle_\varrho$-ra adott kifejezésből látható, hogy $\lambda = 0$ nem sajátérték, azaz L_ϱ magja nulldimenziós, így a fenti $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-elméletből következik, hogy minden $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{G})$ esetén létezik $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{G})$ megoldás. (Az unicitásból következik az egzisztencia.) A $\mathcal{H}^m$-elméletből az következik, hogy L_ϱ homeomorf leképezése a $\mathcal{H}^2(G)$ tér X_0 zárt alterének $\mathbb{L}^2(G)$-re, így minden $f \in \mathbb{L}^2(G)$ esetén létezik általánosított megoldás. Hasonlóan kezelhető $h \geq 0$, $h \neq 0$ esetén a harmadik peremérték-probléma is.

A második peremérték-problémánál más a helyzet. Itt $q \equiv 0$ esetén a homogén peremérték-probléma $\lambda = 0$-hoz tartozó sajátaltere, L_ϱ magja, a konstans függvényekből áll, azaz egydimenziós. Ha $L_\varrho u = f$ és $L_\varrho v = 0$, akkor

$$\langle f, v\rangle_\varrho = \langle L_\varrho u, v\rangle_\varrho = \langle u, L_\varrho v\rangle_\varrho = 0,$$

így a keresett F funkcionál $F(f) = \langle f, 1\rangle_\varrho$, azaz $F(f) = \int_G f\varrho$, tehát a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\int_G f\varrho = 0$ legyen. Ha ez a feltétel teljesül, és $f \in \mathbb{L}^2(G)$, akkor létezik $u \in \mathcal{H}^2(G)$ megoldás. Ugyanez a feltétel megfelel a $\mathcal{C}^{m,\alpha}$-elméletben is.

$*$ **28.32. Tétel.** *A 28.3 pontban értelmezett, klasszikus L_ϱ operátor Friedrichs-kiterjesztése az előző tétel feltételei mellett az $\{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})\colon Bu = 0\}$ halmaz $\mathcal{H}^2(G)$-beli lezártján értelmezett*

$$u \mapsto -\frac{1}{\varrho}\operatorname{div}(p\nabla u) + \frac{q}{\varrho}u$$

differenciáloperátor.

Bizonyítás. A bizonyítás során az egyszerűbb jelölés kedvéért elhagyjuk a ϱ indexet. Először feltesszük, hogy q elég nagy, és így L pozitív. Jelölje L^∞ az L megszorítását az $\{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})\colon Bu = 0\}$ halmazra. Megmutatjuk, hogy a tételben megadott $\tilde{L}$ operátor ennek Friedrichs-kiterjesztése. Világos, hogy $\tilde{L}$ kiterjesztése L^∞-nek. Mivel L^∞ szimmetrikus, $\mathcal{H}^2$-beli határátmenettel kapjuk, hogy $\tilde{L}$ is szimmetrikus. De ekkor $\tilde{L}u = f$ esetén

$$\langle \tilde{L}u, v\rangle = \langle u, \tilde{L}v\rangle = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in \operatorname{dmn}(\tilde{L}),$$

amiből $L_F^\infty u = f$, azaz $\tilde{L} \subset L_F^\infty$. Az előző tétel szerint $\tilde{L}$ értékkészlete $\mathbb{L}^2(G)$, így nincs valódi kiterjesztése, azaz $\tilde{L} = L_F^\infty$.

Most megmutatjuk, hogy $\tilde{L} = L_F$. Friedrichs tételéből, $L_F^{-1}f$ az az egyetlen, a $\operatorname{dmn}(L)$ halmaz $\mathcal{H}^1$-beli lezártjából vett elem, amelyre

$$\int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2 - 2fu) + \int_{\partial G} phu^2 \to \min.$$

Hasonlóan kapjuk az előző pont felhasználásával, hogy $\tilde{L}^{-1}f$ az az egyetlen, a $\operatorname{dmn}(L^\infty)$ halmaz $\mathcal{H}^1$-beli lezártjából vett elem, amelyre a fenti minimumfeltétel teljesül. A Dirichlet-feladat esetében Szoboljev tételéből következik, hogy mindkét halmaz $\mathcal{H}_0^1$. A második és harmadik peremérték-probléma esetén, mint azt a Ritz-módszernek ezekre való alkalmazásánál beláttuk, az ottani jelölésekkel, $g \equiv 0$ helyettesítéssel $T^{-1}(f, 0)$ az az egyetlen $u \in \mathcal{H}^1$ elem, amelyre a fenti minimumfeltétel teljesül. Így a fenti minimumfeltétel egyetlen $u \in \mathcal{H}^1$ függvény elégíti ki, azaz $L_F^{-1}f = \tilde{L}^{-1}f$ minden f-re.

Végül, ha q tetszőleges, akkor elég L helyett az $L + c'\mathbb{1}$ operátort vizsgálni.

28.33. Következmény. *Tegyük fel, hogy a homogén első, második, illetve harmadik peremérték-problémáról van szó. Ekkor az L_ϱ operátornak megszámlálható végtelen sok sajátértéke van, a sajátértékek halmazának nincs torlódási pontja, és minden sajátérték véges rangú. A sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.*

∗ **Bizonyítás.** A főtétel (2) pontját L_ϱ Friedrichs-kiterjesztése helyett az $L_\varrho - \lambda\mathbb{I}$ Friedrichs-kiterjesztésére alkalmazva, kapjuk, hogy minden sajátfüggvény $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$-ban van. Az L_ϱ Friedrichs-kiterjesztésének minden sajátfüggvénye $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$-beli, így L_ϱ értelmezési tartományában van, tehát alkalmazható a Friedrichs-kiterjesztésre vonatkozó hasonló tétel.

→ **28.34. Feladat: Sturm–Liouville-probléma [12].** A 28.3 pont jelöléseivel, tekintsük az egydimenziós elliptikus egyenletre vonatkozó

$$]a,b[\colon L_\varrho u = \lambda u \quad \{a,b\}\colon k(x)u_{\mathbf{n}} + h(x)u = 0$$

sajátérték-feladatot.

(1) Jelölje $u_0(x,\lambda)$ illetve $u_1(x,\lambda)$ az $L_\varrho u = \lambda u$ egyenlet $u_0(a,\lambda) = 1$, $u_0'(a,\lambda) = 0$ illetve $u_1(a,\lambda) = 0$, $u_1'(a,\lambda) = 1$ feltételnek eleget tévő megoldását (a vessző az első változó szerinti deriválást jelöli). Keressük a sajátfüggvényeket u_0 és u_1 lineáris kombinációjaként, és mutassuk meg, hogy a sajátértékek a

$$\begin{aligned} 0 = {} & k(b)k(a)u_0'(b,\lambda) + k(b)h(a)u_1'(b,\lambda) \\ & + h(b)k(a)u_0(b,\lambda) + h(b)h(a)u_1(b,\lambda) \end{aligned}$$

egyenlet gyökei.

(2) Mutassuk meg, hogy minden sajátértékhez egydimenziós sajátaltér tartozik.

(3) Mutassuk meg, hogy az L_ϱ operátor alulról korlátos, azaz q-t eléggé megnövelve, pozitív lesz.

(4) Feltéve, hogy L_ϱ pozitív operátor, válasszunk egy $\{u_a, u_b\}$ alaprendszert, ahol u_a az a, u_b a b pontban elégíti ki a peremfeltételt. A Liouville-tételt felhasználva, írjuk fel u_a és u_b segítségével zárt alakban az $L_\varrho u = f$ egyenlet megoldását. Ebből határozzuk meg az L_ϱ-hoz tartozó g Green-függvényt.

(5) Mutassuk meg, hogy (4) feltételei mellett az $L_\varrho u = \lambda u + f$ egyenlet ekvivalens az

$$u(x) = \lambda \int_a^b g(x,y)u(y)\,dy + \int_a^b g(x,y)f(y)\,dy$$

integrálegyenlettel.

→ **28.35. Feladat [9].** Az előző feladat jelöléseivel, $\varrho \equiv 1$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $k \equiv 0$, $h \equiv 1$ esetén határozzuk meg a Sturm–Liouville-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

28.36. Harmonikus függvények. Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ tartományon értelmezett, kétszer folytonosan differenciálható függvényt *harmonikus*nak nevezünk, ha eleget tesz a Laplace-egyenletnek. Az $n = 1$ esetben a lineáris függvények a harmonikus függvények. Az $n = 2$ esetben a harmonikus függvények jól tanulmányozhatók a komplex függvénytan eszközeivel.

28.37. Definíció. Legyen

$$E(x) = \frac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\boldsymbol{\alpha}(n)}, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

ha $n \neq 2$, és ha $n = 2$, akkor

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^2.$$

Megjegyezzük, hogy az E deriváltjait könnyű számolni, és ha $x \neq 0$, akkor $\Delta E(x) = 0$. Később meg fogjuk mutatni, hogy E a Laplace- (és a Poisson-) egyenlet egy alapmegoldása, és mint „az" alapmegoldásra fogunk rá hivatkozni.

28.38. Green-féle előállítás. *Tegyük fel, hogy a G korlátos tartományra $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$, és E az előző definícióban adott függvény. Ekkor G-n teljesül az*

$$u(x) = \int_{\partial G} \langle E(y-x) \operatorname{grad} u(y) - u(y) \operatorname{grad}_y E(y-x), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy - \int_G E(y-x) \Delta u(y) \, dy$$

Green-féle előállítás.

Bizonyítás. Válasszunk olyan kicsiny $r > 0$-t, amelyre $\mathbb{B}_r(x) \subset G$ és alkalmazzuk a második Green-formulát $G \setminus \mathbb{B}_r(x)$-en $v(y) = E(y-x)$-re. $n \neq 2$-re azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{G \setminus \mathbb{B}_r(x)} E(y-x) \Delta u(y) \, dy \\
&\quad = \int_{\partial G} \langle E(y-x) \operatorname{grad} u(y) - u(y) \operatorname{grad}_y E(y-x), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy \\
&\quad - \int_{\partial \mathbb{B}_r(x)} \langle u(y) \operatorname{grad}_y E(y-x) - E(y-x) \operatorname{grad} u(y), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy.
\end{aligned}$$

Mivel $r \to 0$ esetén

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B_r(x)} \langle E(y-x) \operatorname{grad} u(y), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy &= \frac{1}{n(n-2)\boldsymbol{\alpha}(n) r^{n-2}} \int_{\partial \mathbb{B}_r(x)} u_{\mathbf{n}}(y) \, dy \\
&\leq \frac{r}{n-2} \sup_{\mathbb{S}_r(x)} |\operatorname{grad} u| \to 0,
\end{aligned}$$

és

$$\int_{\partial \mathbb{B}_r(x)} \langle u(y) \operatorname{grad}_y E(y-x), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy = \frac{1}{n\boldsymbol{\alpha}(n) r^{n-1}} \int_{\partial \mathbb{B}_r(x)} u(y) \, dy \to u(x),$$

kapjuk a tételt. $n = 2$-re a számolás hasonló.

28.39. Következmény. *E a Laplace-egyenlet alapmegoldása.*

Bizonyítás. A

$$-\Delta E(\varphi) = E(-\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} -E(y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(0)$$

összefüggést kell ellenőrizni. Ez következik a Green-féle előállításból, ha olyan nagy gömböt tekintünk, ami tartalmazza φ tartóját, $u = \varphi$ helyettesítéssel.

28.40. Következmény. *Harmonikus függvény végtelen sokszor differenciálható.*

Bizonyítás. A Green-féle előállításból, azt egy pont egy alkalmas G nyílt környezetére alkalmazva, a G pontjaiban

$$u(x) = \int_{\partial G} \langle E(y-x)\operatorname{grad} u(y) - u(y)\operatorname{grad}_y E(y-x), \mathbf{n}(y)\rangle\,dy.$$

Az integrál az x paraméter szerint akárhányszor differenciálható.

28.41. Megjegyzés. A Green-féle előállítás közvetlenül nem használható egy peremérték-probléma megoldására, mert u-t és $u_{\mathbf{n}}$-et is ismernünk kellene a peremen. Egy T disztribúcióhoz tartozó *potenciál*on a $T * E$ disztribúciót értjük, ha létezik, ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása. E maga a Dirac-delta potenciálja. A Green-féle előállítás jobb oldalát két „felületi" és egy „térfogati" integrál összegeként írhatjuk. A „térfogati" integrál a $-\Delta u$ függvényhez tartozó disztribúció potenciálja. A ∇u-t tartalmazó tag egyszerű réteg potenciáljának, a másik tag pedig kettős réteg potenciáljának felel meg. A Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-, illetve Neumann-feladat megoldásának egyik klasszikus módszere az, hogy kettős réteg, illetve egyszerű réteg potenciáljának alakjában keressük a megoldást. Így egy Fredholm-féle integrálegyenletre jutunk. A technikailag nem egyszerű tárgyalást részletesen ismerteti Vlagyimirov [170] könyvének 27. és 28. paragrafusa.

28.42. Lemma. *Ha G korlátos tartomány, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, és az $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^2(G)$ függvény harmonikus G-n, akkor $\int_G u_{\mathbf{n}}(y)\,dy = 0$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az első Green-formulát a $-\Delta$ operátorra, és az u és $v \equiv 1$ függvényekre.

28.43. Középérték-tétel. *Legyen $u \in \mathcal{C}^2(G)$ harmonikus függvény. Ekkor minden $\mathbb{B}_r(x) \subset G$ gömbre*

$$u(x) = \frac{1}{n\boldsymbol{\alpha}(n)r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}_r} u(y)\,dy.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Green-féle előállítást $\mathbb{B}_r(x)$-re, számoljuk ki az alapmegoldás deriváltjait, és vegyük figyelembe az előző lemmát.

28.44. Maximumelv. *Ha u harmonikus a G tartományon, és ott felveszi szuprémumát vagy infimumát, akkor konstans.*

Bizonyítás. Nyilván elég azzal az esettel foglalkozni, amikor u felveszi szuprémumát. Jelölje M a szuprémumot. Ha $u(x) = M$, akkor a középérték-tétel és u folytonossága miatt $u(y) = M$ az $\mathbb{S}_r(x)$ pontjaiban, ha $\mathbb{S}_r(x) \subset G$. Ebből $u(y) = M$ az $\mathbb{U}_r(x)$ gömb pontjaiban is, ha $\mathbb{U}_r(x) \subset G$. Az eddig bizonyítottakból viszont következik, hogy azon x pontok halmaza, amelyekre $u(x) = M$, nyílt-zárt részhalmaza G-nek.

28.45. Következmény. *A Laplace-egyenletre vonatkozó belső Dirichlet-feladat u megoldása egyértelmű, és $\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} \le \|u\|_{\mathcal{C}(\partial G)}$, azaz a megoldás folytonosan függ a peremfeltételtől.*

Bizonyítás. A maximumelv szerint u a peremen is felveszi szuprémumát és infimumát.

28.46. A Dirichlet-feladat Green-függvénye. Jelölje E a Poisson-egyenlet alapmegoldását. A Poisson-egyenletre vonatkozó belső Dirichlet-feladat *Green-függvényén* egy

$$g(x,y) = E(x-y) - w(x,y), \quad \text{ha} \quad x \in G, y \in \overline{G}$$

függvény értünk, ahol minden $x \in G$-re az $y \mapsto w(x,y)$ leképezés $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$-ban van és G-n harmonikus, továbbá $g(x,y) = 0$, ha $x \in G$, $y \in \partial G$. A Green-függvényekről általában tanultak alapján más peremérték-problémák Green-függvényei hasonlóan értelmezhetők.

28.47. Tétel. *Ha G korlátos tartomány, amelyre $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, és $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ a Poisson-egyenletre vonatkozó belső Dirichlet-feladat megoldása, g pedig a Poisson-egyenletre vonatkozó belső Dirichlet-feladat Green-függvénye, akkor*

$$u(x) = \int_{\partial G} u(y) \langle \operatorname{grad}_y g(x,y), \mathbf{n}(y) \rangle \, dy + \int_G g(x,y) f(y) \, dy.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a második Green-formulát a $-\Delta$ operátorra, u-ra és az $y \mapsto w(x,y)$ leképezésre, valamint a Green-féle előállítást u-ra.

28.48. Megjegyzés. Megfelelő simasági feltételek mellett a fenti állítás megfordítása is megmutatható. A Poisson-egyenletre vonatkozó inhomogén sajátérték-probléma is hasonlóan kezelhető. Finomabb analízissel megmutatható, hogy ha ∂G elég sima, és $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$, akkor a Poisson-egyenlet esetén a belső Dirichlet-feladatra vonatkozó inhomogén sajátérték-probléma az

$$u(x) = \lambda \int_G g(x,y) u(y) \, dy + \int_G g(x,y) f(y) \, dy$$

integrálegyenlettel ekvivalens. Megjegyezzük, hogy a külső problémák kezelése technikailag bonyolultabb, de sok esetben hasonlóan végezhető a Green-függvény használatával.

28.49. Inverzió és Kelvin-transzformáció. Az R sugarú, origó középpontú *gömbre vonatkozó tükrözés*en vagy *inverzió*n az $x \mapsto x^* = R^2 x/|x|^2$ leképezését értjük $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-nak önmagára. Egy $G \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett u függvény *Kelvin-transzformált*ját a G halmaz inverzió általi képén az

$$u^*(x^*) = \frac{R}{|x^*|} u(R^2 x^*/|x^*|^2)$$

összefüggéssel értelmezzük. Egyszerű, de hosszadalmas számolással megmutatható, hogy ha u harmonikus, akkor a Kelvin-transzformáltja is harmonikus.

Az inverzió és a Kelvin-transzformáció felhasználható arra, hogy egyszerű tartományok esetén megkeressük a Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat Green-függvényét.

A külső peremérték-problémák gyakran belső peremérték-problémára vezethetők vissza a Kelvin-transzformáció segítségével.

→ **28.50. Feladat [11].** Határozzuk meg gömb, féltér, félgömb és negyedtér Green-függvényét három dimenzióban.

→ **28.51. Feladat [11].** Három dimenziós gömb esetén írjuk fel a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldását zárt alakban. Ez a *Poisson-formula*.

28.52. A Laplace-operátor sajátfüggvényei körön. Keressük a

$$G\colon -\Delta u = \lambda u, \quad \partial G\colon ku + hu_{\mathbf{n}} = 0$$

sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit a $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < 1\}$ egységkörön. Polárkoordinátákra áttérve az $(r, \varphi) \mapsto \tilde{u}(r, \varphi)$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$G\colon -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u}, \quad \partial G\colon \tilde{k}\tilde{u} + \tilde{h}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = 0;$$

a jobb oldalt kiszámolva ellenőrizhetjük, hogy az valóban $-\Delta u$. Az u és v függvények $\tilde{u}, \tilde{v}$ megfelelőire

$$\langle u, v\rangle = \int_G u\overline{v} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \tilde{u}(r,\varphi)\overline{\tilde{v}}(r,\varphi) r\, dr\, d\varphi.$$

A Fourier-módszert alkalmazva az $\tilde{u}(r, \varphi) = R(r)\Psi(\varphi)$ alakból

$$-\Psi'' = \kappa\Psi, \quad \Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi);$$

$$r(rR')' + (\lambda r^2 - \kappa)R = 0, \quad kR(1) + hR'(1) = 0, \quad \text{ha } k, h \text{ konstans.}$$

Az első probléma sajátértékei $\kappa = \nu^2$, $\nu \in \mathbb{Z}$ a $\Psi_\nu(\varphi) = e^{i\nu\varphi}$ sajátfüggvényekkel. Az Euler-összefüggéssel könnyen áttérhetünk valós sajátfüggvényekre. Ezek a függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak az $\mathbb{L}^2[-\pi, \pi]$ térben. Minden ν^2 sajátértékhez az R sajátfüggvényeknek egy, a $\varrho(r) = r$, $0 \le r \le 1$ súlyfüggvénnyel képzett $\mathbb{L}^2(\varrho)$ térben teljes ortonormált rendszerét kell megtalálnunk. Ha $\lambda > 0$, akkor $\mu = \sqrt{\lambda}$ jelöléssel bevezethetjük a $\mu r = x$ helyettesítést, és így az

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

*Bessel-egyenlet*hez jutunk, amelyre olyan $\mu > 0$ értékeket keresünk, amelyekre

$$ky(\mu) + h\mu y'(\mu) = 0.$$

28.53. Bessel-függvények. Az előző pontban bevezetett Bessel-egyenlet megoldásait $\nu \in \mathbb{R}$ esetén $y(x) = x^\nu f_\nu(x^2)$ alakban keresve, f_ν Taylor-sorára azt kapjuk, hogy

$$f_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^j}{2^{2j+\nu}\mathbf{\Gamma}(j+\nu+1)\mathbf{\Gamma}(j+1)},$$

és így a J_ν *Bessel-függvény*ekre

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\mathbf{\Gamma}(j+\nu+1)\mathbf{\Gamma}(j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}.$$

Ha ν negatív egész, akkor az első néhány tag együtthatója $1/\infty$ alakú, és nullának értendő. Természetesen a Bessel-függvények komplex változóra is vizsgálhatók. Ha ν egész szám, akkor $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$, azaz $J_{-\nu}$ és J_ν lineárisan függők. Ilyenkor van a Bessel-egyenletnek J_ν-től lineárisan független megoldása, ezek az úgynevezett *másodfajú Bessel-függvény*ek. A következő tétel azt mutatja, hogy a Bessel-függvények segítségével megkapjuk az előző pontban keresett, sajátfüggvényekből álló teljes ortonormált rendszert.

28.54. Tétel. *Az előző két pont jelöléseivel, ha $\nu > 0$ vagy $\nu \geq 0$ és $k = 1$, akkor a*

$$kJ_\nu(\mu) + h\mu J'_\nu(\mu) = 0$$

egyenletnek megszámlálhatóan végtelen sok pozitív gyöke van, ezek a végesben nem torlódnak, és a különböző gyökökhöz tartozó $x \mapsto J_\nu(\mu x)$ függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban.

A bizonyítás megtalálható Vlagyimirov [170] könyvében, 315. o.

28.55. A Laplace-operátor sajátfüggvényei gömbön. Tekintsük a háromdimenziós G nyílt egységgömbön a

$$G\colon -\Delta u = \lambda u \quad \partial G\colon u = 0$$

sajátérték-problémát. A probléma gömbszimmetrikus jellege miatt az

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\vartheta$$

összefüggésekkel gömbi koordinátákat bevezetve, az $\tilde{u}(r,\vartheta,\varphi)$ függvényre a

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} = \lambda\tilde{u}$$

egyenletet kapjuk (a jobb oldalt kiszámolva ellenőrizhetjük, hogy az valóban $-\Delta u$), a

$$\tilde{u}(r,\vartheta,\varphi) = \tilde{u}(r,\vartheta,\varphi+2\pi), \quad \tilde{u}(1,\vartheta,\varphi) = 0$$

feltételekkel. A belső szorzatra

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 r^2 \int_0^\pi \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \tilde{u}(r,\vartheta,\varphi)\overline{\tilde{v}}(r,\vartheta,\varphi)\,d\varphi\,d\vartheta\,dr.$$

Keressük a sajátfüggvényeket $R(r)Y(\vartheta,\varphi)$ alakban. A változókat szétválasztva, az R és Y függvényekre a

$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \kappa Y,$$

$$Y(\vartheta,\varphi) = Y(\vartheta,\varphi+2\pi), \qquad (r^2R')' + (\lambda r^2 - \kappa)R = 0, \quad R(1) = 0$$

összefüggéseket kapjuk. Az utóbbiból $\sqrt{r}R(r)$ helyére új függvényt bevezetve, az

$$r(r\tilde{R}')' + \left(\lambda r^2 - \kappa - \frac{1}{4}\right)\tilde{R} = 0, \quad \tilde{R}(1) = 0$$

Bessel-egyenletre vonatkozó problémára jutunk, amit már vizsgáltunk. A másik egyenletben $z = \cos\vartheta$ helyettesítéssel, a változókat szétválasztva

$$Y(\vartheta,\varphi) = P(\cos\vartheta)\Psi(\varphi)$$

alakban keressük a megoldást. Azt kapjuk, hogy

$$\Psi'' + \nu\Psi = 0, \quad \Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi),$$

$$((1-z^2)P')' + \left(\kappa - \frac{\nu}{1-z^2}\right)P = 0.$$

A megfelelő $\mathbb{L}^2$-terek $\mathbb{L}^2]-\pi,\pi[$ és $\mathbb{L}^2]-1,1[$. Az első egyenletből $\nu = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$ és $\Psi(\varphi) = e^{im\varphi}$. Így a másik egyenlet

$$\left((1-z^2)P'\right)' + \left(\kappa - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0.$$

Vizsgáljuk először az $m = 0$ esetet. Az egyenletnek eleget tesznek a Legendre-polinomok, amelyek teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben, így ebben az esetben $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $P = P_l$. Azért kell a megoldások közül éppen a Legendre-polinomokat választanunk, mert a megoldásoknak korlátosaknak kell lenniük a végpontokban, egyébként az u függvény nem tehet eleget a Laplace-egyenletnek.

28.56. Asszociált Legendre-függvények. Megmutatjuk, hogy az általános esetben a

$$((1-z^2)P')' + \left(\kappa - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0 \tag{1}$$

egyenlet megoldásai $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le l$ esetén a

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{m/2} P_l^{(m)}(z)$$

*asszociált Legendre-függvény*ek. Az ortogonális polinomokra vonatkozó összefüggések szerint ezek szoros kapcsolatban vannak az ultraszférikus polinomokkal:

$$^{(m)}P_{l-m}(z) = \frac{2^m l!}{(l+m)!}(1-z^2)^{-m/2} P_l^m(z). \tag{2}$$

Ezt az összefüggést az ultraszférikus polinomok differenciálegyenletébe helyettesítve, kapjuk, hogy P_l^m kielégíti (1)-et $\kappa = l(l+1)$ esetén. Mivel az ultraszérikus polinomok teljes ortonormált rendszert alkotnak a $\varrho(z) = (1-z^2)^m$ súlyfüggvényre nézve, a P_l^m, $0 \le m \le l$ függvények, mint a $^{(m)}P_{l-m}\sqrt{\varrho}$ függvények konstansszorosai, teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben.

28.57. Gömbfüggvények. A fentiek alapján az

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \quad l \in \mathbb{N},\ |m| \le l$$

*gömbfüggvény*ekhez jutunk. A gömbfüggvények egy teljes ortogonális rendszert adnak a gömbfelületen. Könnyen áttérhetünk valós rendszerre is, mert $\overline{Y_l^m} = Y_l^{-m}$, így $m > 0$ esetén Y_l^m és Y_l^{-m} helyett Y_l^m valós és képzetes részét vehetjük. Megmutatható, hogy Y_l^m normanégyzete

$$\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

Mivel Y_l^0 valós, a valós részének normanégyzete ugyanennyi, míg egyébként a valós és a képzetes rész normanégyzete is ennek a fele. Felhasználva a Legendre-polinomokra vonatkozó

$$P_l(z) = 2^k \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \binom{2l-2k}{l} \binom{l}{k} z^{l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]} c_k z^{l-2k}$$

összefüggést, az

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\vartheta$$

változókra $m \geq 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi) &= r^l P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \\ &= (r\sin\vartheta e^{i\varphi})^m \sum_{2k+m\leq l} r^{2k} c_k (r\cos\vartheta)^{l-2k-m} \\ &= (x_1+ix_2)^m \sum_{2k+m\leq l} (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^k c_k x_3^{l-2k-m}. \end{aligned}$$

Ebből láthatjuk, hogy $r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ valós és képzetes része is az x_1, x_2, x_3 változók valós együtthatós l-ed fokú homogén polinomja (azaz pontosan l-ed fokú monomok lineáris kombinációja). Ez az észrevétel egyrészt azt jelenti, hogy ez egy $\mathcal{C}^\infty$-függvény a háromdimenziós euklédeszi téren, másrészt lehetőséget ad magasabb dimenziós általánosításokra.

28.58. Folytatás: a Laplace-operátor sajátfüggvényei gömbön. Mivel $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, az eredeti sajátérték-probléma sajátfüggvényei (gömbi koordinátákban felírva) az

$$r^{-1/2} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda} r) Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$

függvények, ahol $\sqrt{\lambda}$ a $J_{l+1/2}$ Bessel-függvény pozitív gyökeit futja be. Ezek a függvények $\mathcal{C}^\infty$-függvények, és így az origóban is kielégítik a sajátérték-egyenletet. Ortogonalitásuk már következik az eddigiekből, mivel rögzített m és l esetén λ különböző értékeket vesz fel. A teljesség a Bessel-függvényekre tanult tételből következik. A függvények normája az eddigiek alapján kiszámolható.

∗∗ **28.59. Feladat [15].** Határozzuk meg a Laplace-egyenlet sajátértékeit és sajátfüggvényeit gömbön a $u_n + hu = 0$ peremfeltétel esetén.

∗ **28.60. Hidrogénatom, spin nélkül.** *A hidrogénatom*

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta\psi - \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}\psi, \quad \operatorname{dmn}(H) = \mathcal{D}(R^3)$$

Hamilton-operátora (lásd a 7.118 pontot) lényegében önadjungált és alulról korlátos. Továbbá

$$\sigma_c(\overline{H}) = [0,\infty[, \quad \sigma_p(\overline{H}) = \left\{-\frac{m_e Q_e^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2} : n = 1,2,\dots\right\}, \quad \sigma_r(\overline{H}) = \emptyset;$$

a $-m_e Q_e^4/(8h^2\varepsilon_0^2 n^2)$ sajátértékhez tartozó sajátaltér n^2 dimenziós, és a (gömbi koordinátákban felírt)

$$ {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}\Big(\frac{2r}{nr_0}\Big)\cdot r^l\cdot e^{-r/(nr_0)}\cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi),\quad 0\le l\le n-1,\ |m|\le l $$

sajátfüggvények feszítik ki, ahol $r_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_e Q_e^2)$ a Bohr-féle atomsugár, *az L függvények általánosított Laguerre-polinomok, az Y függvények pedig gömbfüggvények. Az $\overline{H}$ operátor értelmezési tartománya a $\mathcal{H}^2$ Szoboljev-tér.*

Ha a redukált sugárral számolunk, m_e helyére m_r kerül, és ha a mag töltése Z, akkor Q_e^2 helyére ZQ_e^2.

Részleges bizonyítás. A teljes bizonyítás megtalálható Triebel [168] könyvében. Itt csak a sajátértékek és a sajátfüggvények meghatározására szorítkozunk, de nem bizonyítjuk, hogy csak ezek a sajátértékek és a sajátfüggvények.

Ugyanúgy, mint a 28.55 pontban, a probléma gömbszimmetrikus jellege miatt áttérünk gömbi koordinátákra: $q_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $q_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $q_3 = r\cos\vartheta$, $0\le r<\infty$, $0\le\vartheta\le\pi$, $-\pi\le\varphi\le\pi$. A ψ függvényt r,ϑ,φ függvényének tekintve, a Laplace-operátor

$$ \psi\mapsto \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right). $$

Keressük a sajátfüggvényeket $R(r)Y(\vartheta,\varphi)$ alakban. Azt kapjuk, hogy

$$ -\frac{\hbar^2}{2m_r}\left(\frac{1}{r^2}(r^2R')'Y-\frac{R}{r^2}L(Y)\right)-\frac{Q_e^2}{r}RY=ERY, \tag{1} $$

ahol

$$ L(Y)=-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}. $$

Vegyük észre, hogy ha az $L(Y)=\kappa Y$ sajátérték-probléma egy sajátfüggvényét helyettesítjük (1)-be, akkor Y-nal oszthatunk. Ezt a sajátérték-problémát viszont már vizsgáltuk a 28.55, 28.56 és 28.57 pontokban, és azt találtuk, hogy $\kappa = l(l+1)$, $l\in\mathbb{N}$ sajátértékek, a megfelelő sajátfüggvények pedig az Y_l^m, $|m|\le l$ gömbfüggvények. Visszahelyettesítve (1)-be, azt kapjuk, hogy

$$ R''+\frac{2}{r}R'+\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E+\frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0. $$

Az $\tilde r_0^2 = -\hbar^2/(2m_eE)$ jelölést bevezetve, az r változó helyett áttérünk a dimenzió nélküli $\varrho = 2r/\tilde r_0$ független változóra. Az $\tilde R(\varrho)=R(r)$, $n = m_eQ_e^2\tilde r_0/(4\pi\varepsilon_0\hbar^2)$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$ \tilde R''+\frac{2}{\varrho}\tilde R'+\left(-\frac14+\frac{n}{\varrho}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right)\tilde R=0. \tag{2} $$

Kis ϱ esetén hatványsor alakban keressük a megoldást: $\tilde R(\varrho)=c_0\varrho^s+c_1\varrho^{s+1}+\cdots$. Csak a főtagokat tartva meg, és elhanyagolva a magasabb fokú tagokat, az $s(s+1)=l(l+1)$

összefüggés adódik, ebből pedig $s = l$ vagy $s = -(l+1)$, de csak az első esethez tartozik sima megoldás, így azt sejtjük, hogy kis ϱ-ra $\tilde{R}(\varrho) \sim \varrho^l$.

Nagy ϱ esetén a (2) egyenletben elhanyagolva az $1/\varrho$-t és $1/\varrho^2$-et tartalmazó tagokat, az $\tilde{R}'' \sim \tilde{R}/4$ összefüggést kapjuk, ahonnan azt sejtük, hogy $\tilde{R}(\varrho) \sim e^{\pm\varrho/2}$, de csak $e^{-\varrho/2}$ négyzetesen integrálható. Ezek a heurisztikus meggondolások azt sugallják, hogy $\tilde{R}(\varrho) = \varrho^l e^{-\varrho/2} w(\varrho)$ alakban érdemes keresni a megoldást. Visszahelyettesítve (2)-be, azt kapjuk, hogy

$$\varrho w'' + (2l + 2 - \varrho)w' + (n - l - 1)w = 0.$$

Ebből látjuk, hogy ha $n - l - 1 \geq 0$, azaz ha $n > l$, akkor ${}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)$ megoldás, nyilván erre

$$\tilde{R}(\varrho) = {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)\varrho^l e^{-\varrho/2},$$

azaz

$$\tilde{r}_0^2 = \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4}{m_e^2 Q_e^4} n^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e E}$$

miatt $E = -m_e Q_e^4/(8\varepsilon_0^2 h^2 n^2)$ és kapjuk az állítást.

29

Vegyes feladatok

A félcsoportok analitikus elmélete mostanában került fel a matematikai diszciplínák örökké növekvő listájára. ... Én örülök minden félcsoportnak, amelyet látok, és mindenütt találkozom velük! A barátaim azonban megfigyelték, hogy vannak olyan matematikai objektumok is, amelyek nem félcsoportok.

Einar Hille (1948)

Itt főleg a differenciamódszerek stabilitásával foglalkozunk, és nem a pontosságukkal.

Neumann János és Robert Richtmeyer (1947)

29.1. Egyparaméteres operátorseregek. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, $A \in H \to H$ egy normális operátor, és $S(t) = e^{tA}$.*

(1) *Ha A önadjungált és felülről korlátos a c konstanssal, akkor $t \geq 0$ esetén $S(t) \in \mathcal{L}(H;H)$ és $\|S(t)\| \leq e^{ct}$, továbbá $S(0) = \mathbb{1}$ és $S(t+s) = S(t)S(s)$, ha $t, s \geq 0$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonos minden $x \in H$-ra, ha pedig $x \in \operatorname{dmn}(A)$, akkor $\mathcal{C}^1(]0,\infty[;H)$-ban van, és deriváltja $AS(t)x = S(t)Ax$, tehát kielégíti az $u' = Au$ differenciálegyenletet. A*

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{S(t) - S(0)}{t} \right) x$$

határérték pontosan akkor létezik, ha $x \in \operatorname{dmn}(A)$, és ekkor megegyezik Ax-szel.

(2) *Ha $A^* = -A$, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $S(t)$ unitér operátor, továbbá $S(0) = \mathbb{1}$ és $S(t+s) = S(t)S(s)$, ha $t, s \in \mathbb{R}$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonos minden $x \in H$-ra, ha pedig $x \in \operatorname{dmn}(A)$, akkor $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};H)$-ban van, és deriváltja $AS(t) = S(t)A$, tehát kielégíti az $u' = Au$ differenciálegyenletet. A*

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{S(t) - S(0)}{t} \right) x$$

határérték pontosan akkor létezik, ha $x \in \operatorname{dmn}(A)$, és ekkor megegyezik Ax-szel.

Az első esetben *egyparaméteres operátor félcsoport*ról, a második esetben *egyparaméteres operátor csoport*ról beszélünk, A a *generátor*.

Bizonyítás. (1)-hez, ha P az A spektrálfelbontása, akkor a spektráltételből, a spektrálintegrál tulajdonságait felhasználva,

$$\|S(t)x\|^2 = \int_{\sigma(A)} e^{2t\lambda} \, dP_x(\lambda) \leq e^{2ct} \|x\|^2$$

minden $x \in H$-ra. Az, hogy $S(0) = \mathbb{I}$, triviális. Mivel $e^{(t+s)\lambda} = e^{t\lambda}e^{s\lambda}$, a spektrálintegrál tulajdonságai szerint $S(t+s) = S(t)S(s)$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonosságának belátásához vegyük észre, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz a P_x mérték folytonossága szerint van olyan $b < 0$, hogy $P_x]-\infty, b[< \varepsilon$. Ebből

$$\begin{aligned}\big\|S(t)x - S(s)x\big\|^2 &= \int_{\sigma(A)} |e^{t\lambda} - e^{s\lambda}|^2 \, dP_x(\lambda) \\ &\le \int_{]-\infty,b[} 4 \, dP_x(\lambda) + \int_{[b,c]} |e^{t\lambda} - e^{s\lambda}|^2 \, dP_x(\lambda) \\ &\le 4\varepsilon + \varepsilon\|x\|^2,\end{aligned}$$

ha t és s elég közel vannak.

Hasonlóan bizonyítjuk $t \mapsto S(t)x$ differenciálhatóságát. Legyen

$$B(s) = \int \lambda e^{s\lambda} \, dP(\lambda).$$

Mivel $|\lambda e^{s\lambda}|^2 \le |\lambda|^2 e^{2cs}$, ha $\int |\lambda|^2 \, dP_x(\lambda) < \infty$, akkor $\int |\lambda e^{s\lambda}|^2 \, dP_x(\lambda) < \infty$ is teljesül, így a spektrálintegrál tulajdonságai szerint $\operatorname{dmn}(A) \subset \operatorname{dmn}(B(s))$. A spektrálintegrál további tulajdonságait felhasználva,

$$\operatorname{dmn}(AS(s)) = \operatorname{dmn}(S(s)) \cap \operatorname{dmn}(B(s)) = \operatorname{dmn}(B(S)) \supset \operatorname{dmn}(A).$$

Most használjuk fel a középérték-egyenlőtlenségből kapható

$$\left|\frac{e^{t\lambda} - e^{s\lambda}}{t-s} - \lambda e^{s\lambda}\right| \le \sup_{0\le\vartheta\le1} \left|\lambda e^{s\lambda}(e^{\vartheta(t-s)} - 1)\right|$$

becslést. A folytonosság bizonyításához hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{S(t)-S(s)}{t-s} - AS(t)\right)x\right\|^2 &= \int_{\sigma(A)} \left|\frac{e^{t\lambda} - e^{s\lambda}}{t-s} - \lambda e^{s\lambda}\right|^2 \, dP_x(\lambda) \\ &\le 4\varepsilon + \varepsilon\|x\|^2,\end{aligned}$$

ha $s, t \ge 0$ elég közel vannak. Ebből adódik, hogy $t \mapsto S(t)x$ eleget tesz a differenciálegyenletnek $x \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén. A derivált másik alakja hasonlóan adódik. Ugyancsak adódik, hogy a

$$\lim_{t\downarrow0} \left(\frac{S(t)-S(0)}{t}\right)x$$

határérték $x \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén létezik, és megegyezik Ax-szel. Definiálja a C operátort a fenti határérték azokban a pontokban, amelyekben a határérték létezik. Az $\langle e^{tA}x, y\rangle = \langle x, e^{tA}y\rangle$ összefüggés mindkét oldalának jobboldali deriváltját képezve a nullában, kapjuk, hogy C szimmetrikus. Mivel C az A szimmetrikus kiterjesztése, $C = A$.

(2) legtöbb állítása (1) megfelelő állításához hasonlóan látható be, így csak az eltéréseket ismertetjük. $A^* = -A$ pontosan akkor teljesül, ha iA önadjungált, így A spektruma

képzetes számokból áll. Ebből következik, hogy $S(t)$ mindenütt értelmezve van, korlátos, továbbá az $e^{t\lambda}e^{-t\lambda}=1$ összefüggésből,

$$S(t)=\int_{\sigma(A)} e^{t\lambda}\,dP(\lambda),\quad S(t)^*=\int_{\sigma(A)} e^{-t\lambda}\,dP(\lambda)$$

felhasználásával $S(t)S(t)^*=S(t)^*S(t)=\mathbb{I}$, tehát $S(t)$ unitér. A $t\mapsto S(t)x$ leképezés folytonosságának és differenciálhatóságának bizonyítása hasonló, mint (1)-ben, de a $b>0$ értéket úgy kell választani, hogy a $-ib$ és ib pontokat összekötő szakasz komplementerének P_x-mértéke ε-nál kisebb legyen. Végül az $\langle e^{tA}x,e^{tA}y\rangle=\langle x,y\rangle$ összefüggés differenciálásából adódik, hogy $\langle Cx,y\rangle+\langle x,Cy\rangle=0$, és ez használható $C=A$ bizonyítására.

29.2. Példa: a Schrödinger-egyenlet. Az

$$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\colon -i\hbar u_t-Lu=0,\quad \mathbb{R}^n\colon u(x,0)=u_0(x) \tag{1}$$

alakban írható Schrödinger-egyenletnél általában nem elég kétszer folytonosan differenciálható megoldásokra szorítkozni, s gyakran u_0 sem folytonos. Kiterjesztve L-et $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ egy önadjungált H operátorává (energiaoperátor), tekinthetjük (1) helyett az

$$u'=-\frac{i}{\hbar}Hu,\quad u(0)=u_0,\quad u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})) \tag{2}$$

Cauchy-feladatot. Az $-\frac{i}{\hbar}H$ operátor adjungáltja $(-\frac{i}{\hbar}H)^*=\frac{i}{\hbar}H$, így alkalmazható az előző tétel második fele, mely szerint (2) megoldásai

$$u(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}tH}u_0,\quad t\in\mathbb{R} \tag{3}$$

alakban állíthatók elő, és itt $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ unitér operátorok egy egyparaméteres csoportja. Ez az összefüggés minden $u_0\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$-re értelmez egy $t\mapsto u(t)$ folytonos leképezést, amelyet az eredeti egyenlet megoldás *gyenge megoldás*ának nevezünk. A kvantummechanikában a gyenge megoldások sokkal jobban használhatók, mint (1) megoldásai. Az egyenletben szereplő imaginárius egység miatt csak komplex $\mathbb{L}^2$-tér jöhet szóba.

Ha sajátvektorokból képezhető teljes ortonormált rendszer, az alábbi lemma lehetővé teszi normális operátorok függvényeinek kiszámítását. A Schrödinger-egyenlet esetében a lemma azt mutatja, hogy ha létezik L (vagy H) sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2$-ben, akkor a gyenge megoldások éppen a Fourier-módszernek ezzel az ortonormált rendszerrel való alkalmazásakor adódó megoldások.

29.3. Lemma. *Legyen $x_1,x_2,\dots$ teljes ortonormált rendszer egy H komplex Hilbert-térben, $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ tetszőleges skalárok. Ekkor az $Tx=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\langle x,x_j\rangle x_j$ összefüggés egy normális operátort definiál, és bármely, a λ_j számokon értelmezett, komplex értékű g függvényre*

$$g(T)x=\sum_{j=1}^{\infty}g(\lambda_j)\langle x,x_j\rangle x_j.$$

Ha $x_1,x_2,\dots$ egy S önadjungált operátor sajátvektorai, $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ pedig a megfelelő sajátértékek, akkor $T=S$.

A fenti összefüggések úgy értendők, hogy Tx, illetve $g(T)x$ pontosan akkor vannak értelmezve, ha a jobb oldali sor konvergens.

Bizonyítás. Ha $A \subset \mathbb{C}$ Borel-halmaz, legyen

$$P(A)x = \sum_{\lambda_k \in A} \langle x, x_k\rangle x_k.$$

Triviális, hogy $P(A)$ projekció, és egyszerű számolás mutatja, hogy önadjungált. Nyilván $P(\mathbb{C}) = \mathbb{1}$, és

$$\langle P(A)x, x\rangle = \sum_{\lambda_k \in A} \big|\langle x, x_k\rangle\big|^2,$$

így P spektrálmérték. Megmutatjuk, hogy P a T spektrálfelbontása, azaz $T = \int_{\mathbb{C}} \lambda\, dP(\lambda)$. A definícióból látszik, hogy T lineáris operátor. A Fourier-sorok elmélete szerint $x \in \operatorname{dmn}(T)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^{\infty} \big|\lambda_k\langle x, x_k\rangle\big|^2 < \infty$. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^2\, dP_x(\lambda) < \infty$, így a két oldal értelmezési tartománya megegyezik. Azt kell csak megmutatnunk, hogy $\langle Tx, x\rangle = \int_{\mathbb{C}} \lambda\, dP_x(\lambda)$ a közös értelmezési tartomány minden elemére. De

$$\langle Tx, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k\rangle \overline{\langle x, x_k\rangle} = \int_{\mathbb{C}} \lambda\, dP_x(\lambda).$$

Tegyük fel, hogy $S^* = S$. Megmutatjuk, hogy T kiterjesztése S-nek. Legyen $x \in \operatorname{dmn}(S)$, ekkor

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Sx, x_k\rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, Sx_k\rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k = Tx.$$

Ebből, S és T önadjungáltságát felhasználva, $S \subset T = T^* \subset S^* = S$. Végül, $g(\lambda) = \lambda$ helyett más $g(\lambda)$ függvényt tekintve, hasonló érveléssel adódik az általános formula.

29.4. Megjegyzés. Ha H valós Hilbert-tér, és a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ számok is valósak, akkor a $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, x_j\rangle x_j$ összefüggés H egy önadjungált operátorát definiálja. Ha g is valós értékű, akkor az $x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} g(\lambda_j)\langle x, x_j\rangle x_j$ operátor komplexifikáltja $g(T_{\mathbb{C}})$.

29.5. Vegyes feladat parabolikus egyenletre. 25.20 és 25.21 jelöléseivel és feltételei mellett a parabolikus

$$H_T\colon \varrho(x)u_t - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

diffúziós egyenletet fogjuk vizsgálni, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $0 < T \le \infty$, és $H_T = G \times]0, T[$. Olyan $u \in \mathcal{C}^2(H_T)$ megoldásokat keresünk, amelyek eleget tesznek a

$$\overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x), \quad \partial G \times [0, T[\colon k(x)u_{\mathbf{n}}(x,t) + h(x)u(x,t) = g(x,t)$$

kezdeti, illetve peremfeltételeknek. Az f, g, u_0 függvényekről feltesszük, hogy folytonosak, és teljesítik a

$$\partial G\colon k(x)\langle \nabla u_0(x), \mathbf{n}(x)\rangle + h(x)u_0(x) = g(x,0)$$

feltételt.

29.6. Maximumelv. *Az előző pont jelöléseivel, tegyük fel, hogy T véges, és $u \in \mathcal{C}(\overline{H}_{T'}) \cap \mathcal{C}^2(H_{T'})$ teljesíti a diffúziós egyenletet $H_{T'}$-n valamely $T' > T$-re. Ha $q \geq 0$, $f \leq 0$ a H_T hengeren, akkor $u \leq 0$ a $\overline{H}_T$-on, vagy az u felveszi $\overline{H}_T$-beli szuprémumát a $\overline{G} \times \{0\} \cup \partial G \times [0,T]$ halmazon.*

Ha a tételben u helyére $-u$-t, az f helyére $-f$-et helyettesítünk, akkor egy minimumelvet kapunk.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $x_0 \in G$ és $0 < t_0 \leq T$, hogy

$$u(x_0,t_0) > \sup\{0, u(x,t)\colon (x,t) \in \overline{G} \times \{0\} \cup \partial G \times [0,T]\} = M \geq 0.$$

Legyen

$$\varepsilon = u(x_0,t_0) - M > 0 \quad \text{és} \quad v(x,t) = u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T}.$$

Ekkor $v(x,t) \leq u(x,t) + \varepsilon/2$, és ha $(x,t) \in \overline{G} \times \{0\} \cup \partial G \times [0,T]$, akkor

$$v(x_0,t_0) \geq u(x_0,t_0) = \varepsilon + M \geq \varepsilon + u(x,t) \geq \frac{\varepsilon}{2} + v(x,t).$$

Ebből következik, hogy a v függvény szintén felveszi $\overline{H}_T$-beli pozitív szuprémumát valamely $x_1 \in G$, $0 < t_1 \leq T$ esetén, és $v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0) \geq \varepsilon + M \geq \varepsilon$. Ehhez az (x_1,t_1) pontban teljesülni kell a $v_t \geq 0$, $\nabla_x v = 0$, $\Delta_x v \leq 0$ feltételeknek, amiből ebben a pontban

$$\begin{aligned}
&\varrho u_t - \operatorname{div}_x(p \operatorname{grad}_x u) + qu - f \\
&= \varrho v_t - p\Delta_x v - \langle \operatorname{grad}_x p, \operatorname{grad}_x v\rangle + qv - f + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varrho}{T} - q\frac{T-t_1}{T}\right) \\
&\geq qv + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varrho}{T} - q\frac{T-t_1}{T}\right) \geq q\varepsilon\left(1 - \frac{T-t_1}{2T}\right) + \frac{\varepsilon\varrho}{2T} > 0,
\end{aligned}$$

ami ellentmondás.

29.7. Következmény. *29.5 feltételei mellett, $q \geq 0$ és első peremfeltétel esetén az $u \in \mathcal{C}(\overline{G} \times [0,T[) \cap \mathcal{C}^2(H_T)$ megoldás egyértelmű, és ha*

$$\|f\|_{\mathcal{C}(H_T)} \leq \varepsilon, \quad \|g\|_{\mathcal{C}(\partial G \times [0,T[)} \leq \delta_0,$$
$$\|u_0\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} \leq \delta, \quad \inf_{x \in \overline{G}} \varrho(x) \geq \varrho_0 > 0,$$

akkor a megoldásra

$$\big|u(x,t)\big| \leq \sup\{\delta_0,\delta\} + \varepsilon t/\varrho_0, \quad \text{ha} \quad x \in \overline{G},\ 0 \leq t < T,$$

azaz a megoldás folytonosan függ az adatoktól.

Bizonyítás. Tekintsük a $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t/\varrho_0$ függvényt. Ez a függvény a vegyes feladat megoldása, az $\tilde{f} = f - \varepsilon\varrho/\varrho_0 - q\varepsilon t/\varrho_0$ jobb oldallal és a $\tilde{g} = g - \varepsilon t/\varrho_0$ peremfeltétellel. Mivel $\tilde{f} \leq 0$ és $\tilde{g} \leq \delta_0$, a maximumelvet alkalmazva $\overline{G} \times [0,t]$-n, azt kapjuk, hogy ott $\tilde{u} \leq \sup\{\delta_0,\delta\}$, azaz $u \leq \sup\{\delta_0,\delta\} + \varepsilon t/\varrho_0$. Hasonlóan, bevezetve az $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + \varepsilon t/\varrho_0$ segédfüggvényt, és alkalmazva a minimumelvet, azt kapjuk, hogy $u \geq -\sup\{\delta_0,\delta\} - \varepsilon t/\varrho_0$.

29.8. Absztrakt parabolikus egyenletek. 29.5 feltételei mellett, a diffúziós egyenletet fogjuk vizsgálni, homogén peremfeltétel esetén. Feltesszük, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f \in \mathcal{C}(\overline{G}\times[0,T[)$, és $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G}\times[0,T[)\cap\mathcal{C}^2(H_T)$ megoldásokat keresünk. Megjegyezzük, hogy első peremfeltételnél az $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G}\times[0,T[)$ feltétel nem természetes, de csak így tudjuk hatékonyan kezelni a problémát. A 28.3 pont jelöléseit felhasználva a problémát tömören

$$H_T\colon \varrho u_t + Lu = f, \quad \overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x), \quad u \in \mathcal{C}^2(H_T)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G}\times[0,T[) \tag{1}$$

alakba írhatjuk. Operátoregyenletre áttérve, a

$$]0,T[\colon u' = Au + b(t), \quad u(0) = u_0,\ u \in \mathcal{C}^1(]0,T[;\mathbb{L}^2)\cap\mathcal{C}([0,T[;\mathbb{L}^2) \tag{2}$$

egyenlethez jutunk, ahol $-A$ a L_ϱ Friedrichs-kiterjesztésének komplexifikáltja, és $b(t) = f(.,t)/\varrho$. Ennek megoldásaira azt várjuk, hogy $S(t) = e^{tA}$ jelöléssel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)b(s)\,ds \tag{3}$$

alakban állnak elő. Az utóbbi összefüggéssel megadott függvényeket az eredeti egyenlet *gyenge megoldás*ainak nevezzük. A gyenge megoldások nyilván egyértelműek.

29.9. Parabolikus egyenlet gyenge megoldásai. *Az előző pont és 25.27 jelöléseivel, (1) minden megoldására a $t \mapsto u(.,t) \in \mathbb{L}^2(\varrho)$ függvény folytonos, és eleget tesz a (2) egyenletnek. Ha $t \mapsto b(t) \in \mathbb{L}^2(\varrho)$ folytonos, akkor (2) minden megoldása gyenge megoldás is. Ha $u_0 \in \mathbb{L}^2(\varrho)$, $f \in \mathbb{L}^2(H_T)$, akkor (3) jobb oldala mindig értelmezve van, továbbá ha az L_ϱ sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel, vagy a Friedrichs-kiterjesztésének sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel alkalmazzuk a Fourier-módszert, akkor a kapott sor minden t-re konvergens az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ térben, és összege a (3) gyenge megoldás.*

∗ **Bizonyítás.** Annak bizonyításához, hogy (1) minden megoldása megoldása (2)-nek, azt kell belátnunk, hogy az $\mathbb{L}^2(\varrho)$-beli értékű $t \mapsto u(.,t)$ leképezés differenciálható, és deriváltja a $t \mapsto u_t(.,t)$ leképezés. Ha $t, s > 0$, akkor a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\left|\frac{u(x,s)-u(x,t)}{s-t} - u_t(x,t)\right| \le \sup_{0\le\vartheta\le1}\Big|u_t(x,t+\vartheta(s-t)) - u_t(x,t)\Big|.$$

Választva egy $t < T' < T$ számot, mivel u_t egyenletesen folytonos a $\overline{G}\times[0,T']$ kompakt halmazon, kapjuk, hogy a jobb oldal x-ben egyenletesen nullához tart, ha $s \to t$. Mivel az abszolút érték szuprémumával becsülhető az $\mathbb{L}^2$-norma, kapjuk, hogy a $t \mapsto u(.,t)$ leképezés diferenciálható. Az, hogy ez a leképezés a nulla pontban is folytonos, hasonlóan adódik u egyenletes folytonosságának felhasználásával.

Tegyük fel, hogy $b\colon [0,T[\to \mathbb{L}^2(\varrho)$ folytonos, és u a (2) megoldása. Legyen $v(s) = S(t-s)u(s)$, ha $0 < s < t < T$. Felhasználva az egyparaméteres operátorseregekről szóló tételt, és differenciálva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v'(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)(Au(s)+b(s)) = S(t-s)b(s). \end{aligned}$$

Integrálva

$$v(t-\varepsilon)-v(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} S(t-s)b(s)\,ds,$$

amiből $\varepsilon\downarrow 0$ határátmenettel

$$\int_0^t S(t-s)b(s)\,ds=v(t)-v(0)=u(t)-S(t)u_0.$$

Végül legyen $X_1,X_2,\dots$ az L_ϱ Friedrichs-kiterjesztésének sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer, a megfelelő sajátértékek $\lambda_1,\lambda_2,\dots$. (Feltételeink mellett ilyen mindig létezik.) Ekkor A sajátértékei $-\lambda_1,-\lambda_2,\dots$. Minden belső szorzatot és normát $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban értve, az előző lemma szerint

$$e^{tA}X=\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\langle X,X_j\rangle X_j.$$

Ennek alapján a gyenge megoldásra

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\langle u_0,X_j\rangle X_j+\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_j(t-s)}\langle f(.,s)/\varrho,X_j\rangle X_j\Big)\,ds$$

adódik, de meg kell mutatnunk, hogy az integrál létezik. Ha azt is megmutatjuk, hogy a szumma és az integrál felcserélhetőek, akkor kapjuk, hogy a gyenge megoldások éppen a Fourier-módszerrel adódó megoldások. Az integrál létezése, és a szumma és az integrál felcserélhetősége Lebesgue tételéből fog következni. Azt kell ellenőriznünk, hogy a sor majdnem mindenütt konvergens, és a részletösszegek egy integrálható függvény alatt maradnak. Ez utóbbi teljesül, mivel A felülről korlátos valamely c konstanssal, így

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j(t-s)}\langle f(.,s)/\varrho,X_j\rangle X_j\right\|^2\le e^{2cT}\sum_{j=1}^{m}\Big|\langle f(.,s)/\varrho,X_j\rangle\Big|^2\le\big\|f(.,s)/\varrho\big\|^2,$$

és a Fubini-tétel szerint a jobb oldalon álló függvény integrálható. Ugyanez a becslés mutatja, hogy a sor majdnem minden s-re konvergens.

29.10. Következmény. *(1)-nek legfeljebb egy megoldása létezik, és a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől és a jobb oldaltól az alábbi értelemben: ha $-c\le 0$ az L_ϱ egy alsó korlátja,*

$$\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)}\le\varepsilon_0\quad\text{és}\quad\big\|f(.,t)/\varrho\big\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)}\le\varepsilon,$$

ha $0\le t\le T$, akkor $\big\|u(.,t)\big\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)}\le\varepsilon_0e^{ct}+\varepsilon te^{ct}$, ha $0\le t\le T$.

Bizonyítás. Mivel $t\mapsto u(.,t)$ gyenge megoldás, $S(t)$ normájának becslését felhasználva, a gyenge megoldásokat megadó formulából következik a fenti becslés. Az unicitást megkapjuk, ha a becslést alkalmazzuk két megoldás különbségére, mert ekkor az adódik, hogy minden t-re $u(.,t)$ majdnem mindenütt nulla, amiből a folytonosság miatt $u\equiv 0$.

$*$ **29.11. A Galjorkin-módszer parabolikus egyenletekre.** Homogén első peremfeltétel esetén, 29.5 jelöléseivel, szorozzuk végig az (1) egyenletet egy $v \in \mathcal{D}(G)$ függvénnyel, és integráljunk G felett. Az első Green-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\int_G \varrho(x)u(t,x)v(x)\,dx + \int_G \Big(p(x)\langle \nabla_x u(x,t), \nabla v(x)\rangle + q(x)u(x,t)v(x) - f(x,t)v(x)\Big)\,dx = 0.$$

Az $u(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$ alakban keresve a közelítést, a

$$\sum_{k=1}^m c_k'(t)\int_G \varrho w_k w_j + \sum_{k=1}^m c_k(t)\int_G p\langle \nabla w_k, \nabla w_j\rangle + q w_j w_k = \int_G f w_j,$$

$j = 1, 2, \dots, m$ Galjorkin-egyenleteket kapjuk, ami egy elsőrendű lineáris közönséges (erősen „stiff") differenciálegyenlet-rendszer az együtthatókra. A $c_k(0)$ kezdeti értékeket úgy választhatjuk, hogy

$$\int_G \varrho(x)\big(u_0(x) - u(x,0)\big)^2\,dx$$

minimális legyen. A peremfeltétel kielégítésére $w_k \in \mathcal{H}_0^1$. Hasonlóan járhatunk el inhomogén második és harmadik peremfeltétel esetén is, de ekkor egy $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ függvénnyel kell szoroznunk, és az első Green-formula alkalmazása után egy

$$\int_{\partial G} p(x)\big(h(x)u(x,t) - g(x,t)\big)v(x)\,dx$$

tag is megjelenik, és ennek megfelelően módosul az egyenletrendszer. Itt $w_k \in \mathcal{H}^1$. A módszer még nemlineáris parciális differenciálegyenletnél is alkalmazható, ekkor nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk.

29.12. Vegyes feladat hiperbolikus egyenletre. A 25.20 és 25.21 pontok jelöléseivel és feltételei mellett a hiperbolikus

$$H_T\colon \varrho(x)u_{tt} - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

egyenletet fogjuk vizsgálni, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $0 < T \le \infty$, és $H_T = G \times]0,T[$. Olyan $u \in \mathcal{C}^2(H_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G} \times [0,T[)$ megoldásokat keresünk, amelyek eleget tesznek a

$$\overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$\partial G \times [0,T[\colon k(x)u_{\mathbf{n}}(x,t) + h(x)u(x,t) = g(x,t)$$

kezdeti, illetve peremfeltételeknek. Az f, g és u_1 függvényekről feltesszük, hogy folytonosak, u_0-ról, hogy $\mathcal{C}^1(\overline{G})$-ban van, és hogy teljesül a

$$\partial G\colon k(x)\langle \nabla u_0(x), \mathbf{n}(x)\rangle + h(x)u_0(x) = g(x,0)$$

feltétel. Feltesszük továbbá, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f \in \mathcal{C}(\overline{G}\times[0,T[)$, valamint, hogy $Lu \in \mathbb{L}^2(G)$ minden t-re. Ez utóbbi feltétel nem természetes, de csak így tudjuk hatékonyan kezelni a problémát.

29.13. Tétel. *Az előző pont feltételei mellett, homogén peremfeltétel esetén*

$$E(t) = \int_G \Big(\varrho(x) u_t^2(x,t) + p(x) \big|\operatorname{grad}_x u(x,t)\big|^2 + q(x) u^2(x,t) \Big)\, dx + \int_{\{k\neq 0\}} p(x) h(x) u^2(x,t)/k(x)\, dx$$

jelöléssel

$$E(s) = E(0) + 2\int_0^s \int_G f(x,t) u_t(x,t)\, dx\, dt, \quad \text{ha} \quad 0 \le s < T.$$

$E(t)$ *az* energiaintegrál. *Mechanikai rezgéseknél az u_t^2-et tartalmazó tag a mozgási, a többi együtt a helyzeti energia kétszerese. A tétel állítása azt fejezi ki, hogy az energia a kezdeti energia és a végzett munka összege.*

Bizonyítás. A 28.1 lemma felhasználásával, a Green-formuláknál használt jelölésekkel, szorozzuk meg az egyenletet u_t-vel, és integráljunk a $G' \times [\varepsilon, s]$ hengeren. Az első Green-formula felhasználásával, nem írva ki a változókat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{G'} \int_{[\varepsilon,s]} f u_t\, dt\, dx = \int_{G'} \int_\varepsilon^s u_t \left(\varrho u_{tt} + Lu\right)\, dt\, dx \\
&= \int_{G'} \varrho \int_\varepsilon^s u_t u_{tt}\, dt\, dx + \int_\varepsilon^s \int_{G'} u_t L u\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{G'} \left[\varrho u_t^2\right]_\varepsilon^s dx + \int_\varepsilon^s \left(\int_{G'} p\langle \operatorname{grad}_x u, \operatorname{grad}_x u_t\rangle + q u u_t\, dx - \int_{\partial G'} p u_t u_{\mathbf{n}} \right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{G'} \left[\varrho u_t^2 + p|\operatorname{grad}_x u|^2 + q u^2\right]_\varepsilon^s dx - \int_\varepsilon^s \int_{\partial G'} p u_t u_{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Az $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\int_G \left[\varrho u_t^2 + p|\operatorname{grad}_x u|^2 + q u^2\right]_0^s - \int_0^s \int_{\partial G} p u_t u_{\mathbf{n}} = \int_{H_s} f u_t.$$

A peremfeltételből következik, hogy a ∂G felületen $u_{\mathbf{n}} = -hu/k$, ha $k \neq 0$, és $u = 0$, ha $k = 0$. Ezért

$$-\int_0^s \int_{\partial G} p u_t u_{\mathbf{n}} = \int_0^s \int_{\{k\neq 0\}} p h u u_t / k = \frac{1}{2}\int_{\{k\neq 0\}} \left[p h u^2/k\right]_0^s,$$

amiből kapjuk az állítást. Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy a Newton–Leibniz-formula $x \in \partial G$ esetén is alkalmazható t-ben, ami határátmenettel kapható.

29.14. Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett, 28.3 jelöléseivel, tegyük fel, hogy L_ϱ pozitív, és jelölje $\|\ \|$ az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ tér normáját, $\|\ \|_E$ pedig az L_ϱ operátorhoz tartozó energianormát. Ekkor a hiperbolikus egyenletre vonatkozó vegyes feladat megoldása egyértelmű, és folytonosan függ az adatoktól az alábbi értelemben: ha $\|u_0\|_E \le \varepsilon_0$, $\|u_1\| \le \varepsilon_1$, akkor*

$$\big\|u(.,t)\big\|_E \le \sqrt{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2} + \int_0^t \big\|f(.,s)/\varrho\big\|\, ds$$

és

$$\|u_t(.,t)\| \le \sqrt{\varepsilon_0^2+\varepsilon_1^2} + \int_0^t \|f(.,s)/\varrho\|\,ds,$$

ha $0 \le t < T$.

Bizonyítás. Az előző tétel jelöléseivel

$$E(t) = E(0) + 2\int_0^t \int_G f u_t.$$

Ebből differenciálással

$$E'(t) = 2\int_G f u_t \le 2\|f(.,t)/\varrho\|\|u_t(.,t)\| \le 2\|f(.,t)/\varrho\|\sqrt{E(t)}.$$

Egy $t > 0$-hoz válasszuk a legkisebb olyan $\tau \le t$-t, amelyre $\tau < s < t$ esetén $E(s) > 0$. Ekkor

$$\frac{E'(s)}{2\sqrt{E(s)}} \le \|f(.,s)/\varrho\|, \quad \text{ha} \quad \tau < s < t,$$

amiből integrálva, és felhasználva E folytonosságát a τ és t pontokban,

$$\sqrt{E(t)} - \sqrt{E(0)} \le \sqrt{E(t)} - \sqrt{E(\tau)} \le \int_0^t \|f(.,s)/\varrho\|\,ds,$$

és ebből mindkét egyenlőtlenség következik. Az unicitást abból kapjuk, hogy két megoldás különbsége azonos kezdőfeltételek és jobb oldal esetén a nulla kezdőfeltételekhez és jobb oldalhoz tartozó u megoldás. Ha c az L_ϱ egy pozitív alsó korlátja, akkor u-ra

$$c\|u(.,t)\|^2 \le \|u(.,t)\|_E^2 \le 0.$$

29.15. Absztrakt hiperbolikus egyenletek. A 29.12 pont feltételei mellett az ott leírt hiperbolikus egyenletre vonatkozó vegyes feladatot fogjuk vizsgálni, homogén első, második vagy harmadik peremfeltétel mellett. A 28.3 pont jelöléseit használva, feltesszük, hogy L_ϱ pozitív operátor, és a problémát tömören

$$(1) \qquad H_T\colon \varrho(x)u_{tt} + Lu = f(x,t), \quad \overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

alakba írjuk. Áttérve operátoregyenletre, az

$$]0,T[\colon u'' = A + f(.,t)/\varrho, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,$$
$$u \in \mathcal{C}^2(]0,T[;\mathbb{L}^2) \cap \mathcal{C}^1([0,T[;\mathbb{L}^2)$$

problémát kapjuk, ahol $-A$ a L_ϱ Friedrichs-kiterjesztésének komplexifikáltja, és $b(t) = f(.,t)/\varrho$. Alkalmazva az átviteli elvet, az

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

egyenlethez jutunk, amelyből

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$]0,T[: w' = Cw + c(t), \quad w(0) = w_0,\ w \in \mathcal{C}^1(]0,T[; Z) \cap \mathcal{C}([0,T[; Z) \tag{2}$$

ahol $X = \mathbb{L}^2(\varrho;\mathbb{C})$, X_E az L_ϱ-hoz tartozó energiatér komplexifikáltja, $Z = X_E \times X$, $w_0 \in Z$, és $\operatorname{dmn}(C) = \operatorname{dmn}(A) \times X_E$. Ennek megoldásaira azt várjuk, hogy $S(t) = e^{tC}$ jelöléssel,

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-s)c(s)\,ds \tag{3}$$

alakban állnak elő. Az utóbbi összefüggés által előállított $w(t) = (u(t), v(t))$ függvénypárokat az eredeti egyenlet *gyenge megoldás*ainak nevezzük. A gyenge megoldások nyilván egyértelműek.

29.16. Hiperbolikus egyenlet gyenge megoldásai. *Az előző pont és 25.27 jelöléseivel, $C^* = -C$, és ha c folytonos, akkor (2) megoldásai is gyenge megoldások. Ha L_ϱ sajátfüggvényeiből képezhető teljes ortonormált rendszer, akkor (1) minden megoldására $t \mapsto (u(.,t), u_t(.,t))$ gyenge megoldás. Ha $z_0 \in Z$ és $f \in \mathbb{L}^2(H_T)$, akkor (3) jobb oldala értelmezve van, $w(t) = (u(t), v(t))$ folytonos, továbbá L_ϱ vagy a Friedrichs-kiterjesztése sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel alkalmazva a Fourier-módszert, az $u(.,t)$-re kapott sor minden t-re konvergens az X_E térben, a tagonként t szerint differenciálással kapott sor minden t-re konvergens az X térben, és összegük $u(t)$, illetve $v(t)$.*

Bizonyítás. Ha mást nem mondunk, a belső szorzatot és normát az $X = \mathbb{L}^2(\varrho)$ térben fogjuk érteni. Első lépésként megmutatjuk, hogy $C^* = -C$. Ennek bizonyításához, legyen $X_1, X_2, \dots$ a $-A$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, a megfelelő sajátértékek $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Mivel ezek X_E-ben is ortogonálisak, és X_j normája $\sqrt{\lambda_j}$, az $(X_j, 0)$ és $(0, X_j)$ párok ortogonális rendszert alkotnak Z-ben. Ezek a párok nem sajátvektorai C-nek, viszont az $(X_j, i\sqrt{\lambda_j}X_j)$ és $(X_j, -i\sqrt{\lambda_j}X_j)$ párok igen, $i\sqrt{\lambda_j}$, illetve $-i\sqrt{\lambda_j}$ sajátértékekkel. Így az

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda_j}} \begin{pmatrix} X_j \\ i\sqrt{\lambda_j}X_j \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\lambda_j}} \begin{pmatrix} X_j \\ -i\sqrt{\lambda_j}X_j \end{pmatrix},$$

vektorok a C operátor sajátvektoraiból álló ortonormált rendszert alkotnak, a megfelelő sajátértékek $i\sqrt{\lambda_j}$, $-i\sqrt{\lambda_j}$. Ez az ortonormált rendszer teljes, mert ha (u, v) ortogonális a fenti vektorokra, akkor összegükre és különbségükre is, amiből $u = 0$ és $v = 0$ következik. Így C értelmezési tartománya sűrű. Megmutatjuk, hogy $C^* = -C$. A C definícióját felhasználva, és az előző lemmát alkalmazva A-ra, azt kapjuk, hogy

$$C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \langle v, X_j\rangle X_j \\ \sum_j -\lambda_j \langle u, X_j\rangle X_j \end{pmatrix}.$$

Ugyanez adódik, ha C sajátvektorainak és sajátértékeinek fenn megadott rendszerére alkalmazzuk a lemmát. Ez azt mutatja, hogy C normális operátor. A lemma, és a spektrálintegrál tulajdonságai szerint, mivel a spektrum tiszta képzetes, $C^* = -C$. Egyben megkaptuk C spektrálfelbontását is. Ismét alkalmazva az előző lemmát, azt kapjuk, hogy

$$e^{tC}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

első koordinátája

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\cos(\sqrt{\lambda_j}t)\langle u_0, X_j\rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\langle u_1, X_j\rangle\right)X_j,$$

a második pedig

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\sqrt{\lambda_j}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\langle u_0, X_j\rangle + \cos(\sqrt{\lambda_j}t)\langle u_1, X_j\rangle\right)X_j.$$

Hasonlóan,

$$\int_0^t e^{(t-s)C}c(s)\,ds$$

első koordinátájára az adódik, hogy

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(\sqrt{\lambda_j}(t-s))\langle f(.,s)/\varrho, X_j\rangle X_j\,ds,$$

második koordinátájára pedig az, hogy

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{\infty}\cos(\sqrt{\lambda_j}(t-s))\langle f(.,s)/\varrho, X_j\rangle X_j\,ds.$$

Az, hogy az integrál létezik, valamint, hogy a szumma és az integrál felcserélhető, hasonlóan látható be, mint a parabolikus egyenletre vonatkozó megfelelő tételben. Ugyancsak az ott alkalmazott gondolatmenet alkalmazható annak bizonyítására, hogy (2) megoldásai gyenge megoldások is.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy (1) megoldásai gyenge megoldások is. Jelölje $u_j(x,t)$ a Fourier-módszerrel kapott sor j-edik tagját. Közvetlen számolással adódik, hogy az u_j függvények kielégítik a peremfeltételt és a differenciálegyenletet $\langle f(.,t)/\varrho, X_j\rangle X_j(x)$ jobb oldallal. Nyilván u_j, illetve t szerinti deriváltja $t=0$ esetén az $\langle u_0, X_j\rangle X_j$, illetve az $\langle u_1, X_j\rangle X_j$ függvényt adja. Tekintsük a $\sum_{j=1}^m u_j$ részletösszegeket. Ezek az egyenletnek $\sum_{j=1}^m\langle u_0, X_j\rangle X_j$, illetve $\sum_{j=1}^m\langle u_1, X_j\rangle X_j$ kezdeti értékekhez és

$$\sum_{j=1}^{m}\langle f(.,t)/\varrho, X_j\rangle X_j$$

jobb oldalhoz tartozó megoldásai. A második és harmadik részletösszeg sorozat nyilván konvergál $\mathbb{L}^2(\varrho)$ normában u_1-hez, illetve $f(.,t)/\varrho$-hoz. Megmutatjuk, hogy az első sor energianormában tart u_0-hoz. Valóban, mivel $X \in \operatorname{dmn}(L_\varrho)$ esetén

$$L_\varrho X = \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_\varrho X, X_j\rangle X_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle X, X_j\rangle X_j,$$

$X = u_0 - \sum_{j=1}^{m} \langle u_0, X_j\rangle X_j$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\|X\|_E^2 = \langle L_\varrho X, X\rangle &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j \big|\langle u_0, X_j\rangle\big|^2 \\ &\le \frac{1}{\min_j \lambda_j} \sum_{j=m+1}^{\infty} \big|\lambda_j \langle u_0, X_j\rangle\big|^2 \to 0,\end{aligned}$$

ha $m \to \infty$.

Rögzítsünk egy $0 \le t < T$-t, és vizsgáljuk az $u(.,t) - \sum_{j=1}^{m} u_j(.,t)$ különbséget. Mivel az

$$s \mapsto \left\| f(.,s)/\varrho - \sum_{j=1}^{m} \langle f(.,s)/\varrho, X_j\rangle X_j \right\|$$

függvények sorozata pontonként nullához tart, és az integrálható

$$s \mapsto \big\| f(.,s)/\varrho \big\|$$

függvény alatt marad, Lebesgue tétele szerint a függvénysorozat integrálja nullához tart. Így az előző tétel szerint $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(.,t)$ konvergál $\mathbb{L}^2(\varrho)$-ban, és összege $u(.,t)$. Másrészt, a sor összege gyenge megoldás, így $t \mapsto u(.,t)$ gyenge megoldás.

29.17. Megjegyzés. Tekintsük az

$$u'' = Au + b(t), \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1$$

Cauchy-feladatot. Skalár egyenlet esetén, az alaprendszer

$$\cos(tA^{1/2}), \quad \sin(tA^{1/2}).$$

A $v(t) = u'(t)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}u(t) &= \cos(tA^{1/2})u_0 + A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})v_0 \\ &\quad + \int_0^t A^{-1/2}\sin\big((t-s)A^{1/2}\big)b(s)\,ds, \\ v(t) &= -A^{1/2}\sin(tA^{1/2})u_0 + \cos(tA^{1/2})v_0 \\ &\quad + \int_0^t \cos\big((t-s)A^{1/2}\big)b(s)\,ds.\end{aligned}$$

(3) megfelel ennek, mert az előző tétel szerint

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos(tA^{1/2}) & A^{-1/2}\sin(tA^{1/2}) \\ -A^{1/2}\sin(tA^{1/2}) & \cos(tA^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

$*$ **29.18. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy a hiperbolikus egyenlet megoldásaira nyert becslés a gyenge megoldásokra is teljesül.

Megoldás. Mivel $t \mapsto (u(.,t), u_t(.,t))$ gyenge megoldás, felhasználva, hogy $S(t)$ unitér, a gyenge megoldásokat megadó formulából következik a becslés.

$*$ **29.19. Feladat: energiaintegrál [13].** Az előző tétel jelöléseivel, $0 \le t < T$ esetén gyenge megoldásokra az $E(t) = \|w(t)\|_Z^2 = \|u(t)\|_E^2 + \|v(t)\|_X^2$ összefüggéssel értelmezve az energiaintegrált, mutassuk meg, hogy

$$E(t) = E(0) + 2\int_0^t \langle f(.,s)/\varrho, v(s)\rangle_X \, ds.$$

Megoldás. Számoljuk ki a $\langle w(t), w(t)\rangle$ belső szorzatot tagonként, felhasználva, hogy S unitér operátorok egyparaméteres csoportja. Négy tag adódik. Az elsőre

$$\langle S(t)w_0, S(t)w_0\rangle = \langle w_0, S(t)^* S(t) w_0\rangle = \|w_0\|^2.$$

A másodikra

$$\Big\langle \int_0^t S(t-s)c(s)\,ds, S(t)w_0\Big\rangle = \int_0^t \langle c(s), S(s)w_0\rangle\, ds.$$

Ugyanez adódik a harmadik mennyiségre is. Végül

$$\Big\langle \int_0^t S(t-s)c(s)\,ds, \int_0^t S(t-r)c(r)\,dr\Big\rangle = \int_0^t\int_0^t \big\langle S(-s)c(s), S(-r)c(r)\big\rangle\, dr\, ds.$$

A belső integrált egy $\int_0^s$ és egy $\int_s^t$ részre osztva, az utóbbiban felcserélve az integrálás sorrendjét, és új változókat bevezetve

$$2\int_0^t \Big\langle c(s), \int_0^s S(s-r)c(r)\,dr\Big\rangle\, ds$$

adódik. Összegezve az egyes tagokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\langle w(t), w(t)\rangle &= \langle w_0, w_0\rangle + 2\int_0^t \Big\langle c(s), S(s)w_0 + \int_0^s B(s-r)c(r)\,dr\Big\rangle\, ds \\ &= 2\int_0^t \langle c(s), w(s)\rangle\, ds,\end{aligned}$$

ami éppen a kívánt eredmény.

29.20. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a diffúziós egyenletre vonatkozó vegyes feladatnál egyparaméteres operátor félcsoport adódik, míg az hiperbolikus egyenletek, illetve a Schrödinger-egyenlet esetében egyparaméteres operátor csoport. Ennek fizikai oka az, hogy a diffúziós folyamatok irreverzibilisek, míg a rezgések, illetve a kvantumfolyamatok – amíg megfigyelés nem történik – reverzibilisek. Az irreverzibilis folyamatok nem írhatók le $u' = Au$ alakú egyenletekkel, ahol A korlátos, például közönséges lineáris differenciálegyenletekkel. A fizika differenciálegyenleteit, elsősorban a parciális differenciálegyenleteket túl erős, nem reális regularitási feltételek mellett nyerjük, ezért a fizikai folyamatokat a gyenge megoldások jobban leírják, mint a megoldások. Ez azt mutatja, hogy az egyparaméteres operátor csoportok és félcsoportok vizsgálata fontosabb, mint a differenciálegyenleteké. Ezért nem is foglalkozunk a megoldások létezésének technikailag bonyolult kérdéseivel. Ezekre egy regularitási elmélet ad választ, hasonlóan az elliptikus egyenletekhez, amelynek keretében megmutatják, hogy ha a kezdeti- és peremfeltételekben, valamint az egyenlet jobb oldalán szereplő függvények és a tartomány határa „elég simák", akkor a gyenge megoldások is „elég simák", és így megoldások is.

∗ **29.21. A Galjorkin-módszer hiperbolikus egyenletekre.** A parabolikus esethez teljesen hasonlóan használható a Galjorkin-módszer hiperbolikus egyenletek közelítő megoldására. Homogén első peremfeltétel esetén, 29.12 jelöléseivel, szorozzuk végig az (1) egyenletet egy $v \in \mathcal{D}(G)$ függvénnyel, és integráljunk G felett. Az első Green-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_G \varrho(x)u(t,x)v(x)\,dx + \int_G \Big(p(x)\langle\nabla_x u(x,t),\nabla v(x)\rangle + q(x)u(x,t)v(x) - f(x,t)v(x)\Big)\,dx = 0.$$

Az $u(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$ alakban keresve a közelítést, a

$$\sum_{k=1}^m c_k''(t)\int_G \varrho w_k w_j + \sum_{k=1}^m c_k(t)\int_G p\langle\nabla w_k,\nabla w_j\rangle + q w_j w_k = \int_G f w_j,$$

$j = 1,2,\dots,m$ Galjorkin-egyenleteket kapjuk, ami egy (erősen „stiff") másodrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer az együtthatókra. A $c_k(0)$ és $c_k'(0)$ kezdeti értékeket úgy célszerű választani, hogy

$$\int_G p(x)\Big|\nabla_x(u_0(x) - u(x,0))\Big|^2 + q(x)(u_0(x) - u(x,0))^2\,dx,$$

illetve

$$\int_G \varrho(x)(u_1(x) - u_t(x,0))^2\,dx$$

minimális legyen. A peremfeltétel kielégítésére $w_k \in \mathcal{H}_0^1$. Hasonlóan járhatunk el inhomogén második és harmadik peremfeltétel esetén is, de ekkor egy $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ függvénnyel kell szoroznunk, és az első Green-formula alkalmazása után egy

$$\int_{\partial G} p(x)(h(x)u(x,t) - g(x,t))v(x)\,dx$$

tag is megjelenik, és ennek megfelelően módosul az egyenletrendszer. Itt $w_k \in \mathcal{H}^1$. Ekkor a $c_k(0)$ kezdeti értékeket úgy célszerű választani, hogy

$$\int_G p(x)\Big|\nabla_x(u_0(x) - u(x,0))\Big|^2 + q(x)(u_0(x) - u(x,0))^2\,dx + \int_{\partial G} p(x)h(x)(u_0(x) - u(x,0))^2\,dx$$

legyen minimális.

29.22. Feladat [12]. Határozzuk meg egy végtelen hosszú, R sugarú henger belsejében a hőmérsékleteloszlást a következő esetekben:

(1) a henger felületén nulla hőmérsékletet tartunk fenn, a henger belsejében pedig a kezdeti hőmérsékleteloszlás csak a tengelytől való r távolságtól függ, értéke $AJ_0(\mu r/R)$, ahol μ a $J_0(\mu) = 0$ egyenlet egy gyöke;

(2) a henger felületén állandó hőmérsékletet tartunk fenn, a henger belsejében pedig a kezdeti hőmérséklet nulla;

(3) a henger felülete hőt ad át a környező nulla hőmérsékletű közegnek, a kezdeti hőmérséklet csak a tengelytől való távolságtól függ.

29.23. Feladat [12]. Oldjuk meg az

$$u_t = u_{xx} + u_x/x - u/x^2 + f(t)J_1(\mu_k x)$$

vegyes feladatot, ahol μ_k a $J_1(\mu) = 0$ egyenlet egyik pozitív gyöke, $u(0,t)$ korlátos, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, ha $f(t) = \sin t$, illetve ha $f(t) = e^{-t}$.

29.24. Feladat [13]. Határozzuk meg egy kör alakú, R sugarú membrán szabad rezgését a következő esetekben:

(1) a kezdeti kitérés $J_0(\mu_k r/R)$, ahol μ_k a J_0 Bessel-függvény egy pozitív gyöke, a kezdeti sebesség nulla;

(2) a kezdeti kitérés és sebesség csak $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvénye;

(3) a kezdeti kitérés forgási paraboloid alakú, a kezdeti sebesség pedig nulla.

29.25. Feladat [13]. Egy súlyos, homogén fonal egyik végénél van felfüggesztve. A fonalat kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, és kezdősebesség nélkül elengedjük. Vizsgáljuk a nehézségi erő hatására bekövetkező kis rezgéseket.

29.26. Feladat [13]. Egy súlyos, homogén fonal egyik végénél tengelyhez van erősítve. A tengelyt állandó szögsebességgel forgatjuk. Határozzuk meg tetszőleges kezdeti feltételek mellett a függőleges egyensúlyi helyzet körüli kis rezgéseket.

∗ **29.27. Differenciamódszerek.** Evolúciós egyenletek esetén is kaphatunk differenciamódszereket, a deriváltakat differenciákkal közelítve. Ezeket példákon mutatjuk be. A fellépő problémák részletes vizsgálatát, és más, sokkal hatékonyabb módszereket illetően lásd Stoyan [156] jegyzetét, Szamarszkij [157] és Marcsuk [107] könyvét, illetve Zeidler [179] könyvének 20. fejezetét, valamint az ezekben található hivatkozásokat.

Tekintsük az

$$u_t - u_{xx} = f, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le T$$

hővezetési egyenletre vonatkozó problémát. A t-re Δt, az x-re Δx lépésközt választva, és u_t-t $\Delta_{\Delta t}u$, u_{xx}-et a $\Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}u$ differenciával közelítve, $u_{p,q} = u(p\Delta x, q\Delta t)$, $f_{p,q} = f(p\Delta x, q\Delta t)$ jelölésekkel az

$$\frac{u_{p,q+1} - u_{p,q}}{\Delta t} - \frac{u_{p+1,q} - 2u_{p,q} + u_{p-1,q}}{(\Delta x)^2} = f_{p,q}$$

*explicit módszer*hez jutunk. Ha viszont u_t-t a $\Delta_{-\Delta t}u$ differenciával közelítjük, akkor az

$$\frac{u_{p,q}-u_{p,q-1}}{\Delta t} - \frac{u_{p+1,q}-2u_{p,q}+u_{p-1,q}}{(\Delta x)^2} = f_{p,q}$$

*implicit módszer*t kapjuk. Ha u_{xx}-et közelítjük a $\Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}u$ differenciával, és az így kapott, már csak t-től függő függvényekre vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszerre alkalmazzuk a trapézmódszert Δt lépésközzel, akkor a *Crank–Nicolson-módszer*hez jutunk:

$$\Delta_{\Delta t}u_{p,q} - \Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}\left(\frac{u_{p,q}+u_{p,q+1}}{2}\right) = \frac{f_{p,q}+f_{p,q+1}}{2}.$$

A két utóbbi módszer a $(q+1)$-edik „réteg” kiszámításához egy egyenletrendszer megoldását igényli, ellentétben az explicit módszerrel.

Az

$$u_{tt}-u_{xx}=f, \quad u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad \text{ha} \quad 0\le x\le 1,$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad \text{ha} \quad 0\le t\le T$$

egydimenziós hullámegyenlet megoldására a fenti jelölésekkel a

$$\Delta_{\Delta t}\Delta_{-\Delta t}u_{p,q} - \Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}u_{p,q} = f_{p,q}$$

differenciaegyenletet kaphatjuk. A $q=0$ és $q=1$ rétegeket az

$$u_{p,0}=u_0(p\Delta x), \quad u_{p,1}=u_{p,0}+u_1(p\Delta x)\Delta t$$

összefüggésekből kapjuk. A formula explicit.

∗ **29.28. Neumann-stabilitás.** Az evolúciós egyenletekre vonatkozó differenciamódszerek stabilitását a spektrálkritérium alapján vizsgálhatjuk. Ha az

$$u_t + L_\varrho u = f/\varrho \quad \text{illetve} \quad u_{tt}+L_\varrho u = f/\varrho$$

egyenletben az L_ϱ operátort diszkretizáljuk, egy véges dimenziós tér egy lineáris operátorára térünk át. Ha az X_k rácsfüggvények ennek az operátornak a sajátfüggvényei homogén peremfeltétel mellett, akkor a spektrálkritérium azt követeli meg, hogy a megfelelő homogén differenciaegyenletnek homogén peremfeltételek melletti $e^{\alpha_k t}X_k(x)$ alakú megoldásaira $\Re(\alpha_k)\le 0$ teljesüljön. Valóban, ha ez nem teljesül, akkor egy lépés hibái a későbbiekben exponenciálisan növekedhetnek. Ha viszont ez teljesül, akkor – a Fourier-módszerrel összhangban – várhatjuk, hogy a hibák nem nagyon nőnek fel.

Vizsgáljuk meg az előző pontban tárgyalt módszerek stabilitását az ottani példák esetén. A $\Delta_{\Delta x}$ operátornak sajátfüggvénye minden $e^{\pi i n x}$ alakú függvény

$$\frac{e^{\pi i n\Delta x}-1}{\Delta x}$$

sajátértékkel, így a $-\Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}$ operátornak is,

$$\frac{4\sin^2(\pi n\Delta x/2)}{(\Delta x)^2}$$

sajátértékkel. Ha $\Delta x = 1/N$, akkor a peremfeltételeket is figyelembe véve, a $-\Delta_{\Delta x}\Delta_{-\Delta x}$ operátor egy $N-1$ dimenziós téren hat. A peremfeltételeket kielégítő sajátfüggvények az

$$X_k(x) = e^{\pi ikx} - e^{-\pi ikx}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

függvények. Ezek lineárisan függetlenek, mert különböző sajátértékekhez tartoznak. Ha most $e^{\alpha_k t}X_k(x)$ az explicit módszer differenciaegyenletének megoldása, akkor

$$e^{\alpha_k t}X_k(x)\left(\frac{e^{\alpha_k\Delta t}-1}{\Delta t} + \frac{4\sin^2(\pi k\Delta x/2)}{(\Delta x)^2}\right) \equiv 0,$$

amiből

$$e^{\alpha_k\Delta t} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x/2),$$

így $|e^{\alpha_k\Delta t}| \le 1$ minden k-ra, ha $\Delta t/(\Delta x)^2 \le 1/2$, ez a Neumann-stabilitás feltétele.

Az implicit módszer esetén

$$e^{\alpha_k t}X_k(x)\left(\frac{e^{-\alpha_k\Delta t}-1}{-\Delta t} + \frac{4\sin^2(\pi k\Delta x/2)}{(\Delta x)^2}\right) \equiv 0$$

adódik, amiből

$$|e^{\alpha_k\Delta t}| = \left|1 + \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x/2)\right|^{-1},$$

tehát a módszer mindig stabil.

∗ **29.29. Feladat [10].** Az előző pont feltételei mellett, mutassuk meg, hogy a Crank–Nicolson-módszer mindig Neumann-stabil.

∗ **29.30. Feladat [10].** Az előző pontok feltételei mellett, mutassuk meg, hogy az egydimenziós hullámegyenletre adott módszer $\Delta t/\Delta x \le 1$ esetén Neumann-stabil.

∗ **29.31. Feladat [11].** Az előző pontok feltételei mellett, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta t = 0{,}01$ választással, $u_0(x) = 1 - 2|x - 1/2|$ kezdőfeltétellel határozzuk meg a hővezetési egyenlet megoldását az egységnégyzeten mindhárom módszerrel. Hasonlítsuk össze a megoldást a Fourier-módszerrel kapott pontos megoldással.

30

Nemlineáris egyenletek

Egy valós változós valós értékű függvény pontosan akkor monoton növekvő, ha $(f(y)-f(x))(y-x)\geq 0$ minden x,y-ra, és pontosan akkor szigorúan monoton növekvő, ha $(f(y)-f(x))(y-x)>0$ minden $x\neq y$-ra. Más feltételek, például folytonosság mellett ezek az egyenlőtlenségek biztosítják az $f(x)=b$ egyenlet megoldásának létezését, illetve unicitását is. Meglepő módon, az egyenlőtlenség formális általánosítása Hilbert-terekre, sőt tovább, hatékony akár nemlineáris operátoregyenletek, például nemlineáris parciális differenciálegyenletek vizsgálatában is. Ebben a fejezetben ezzel a monotonitási módszerrel fogunk foglalkozni, hogy ízelítőt kapjunk a nemlineáris egyenletek elméletéből. Természetesen sok más módszer is létezik: lásd például Zeidler „Nonlinear functional analysis´´ című [179] négykötetes könyvét.

Normált tér egy részhalmazát normált térbe képező $A\in X\to Y$ operátor esetén elhagyjuk a zárójelet nemlineáris operátor esetén is. Ha nem mondjuk kifejezetten, hogy egy operátor lineáris, akkor nem feltétlenül lineáris.

30.1. Definíció. Ha X,Y normált terek, akkor bármely $A\in X\to Y$ operátorra azt mondjuk, hogy *korlátos*, ha korlátos halmazok képe korlátos, *kompakt*, ha korlátos halmazok képe teljesen korlátos, *lokálisan korlátos*, ha az értelmezési tartomány minden pontjának van olyan környezete, amelyen korlátos.

30.2. Definíció. Legyenek X,Y Banach-terek, $A\colon X\to Y$ egy operátor. Ekkor A

(1) *stabil*, ha $\|Au-Av\|\geq a(\|u-v\|)$ minden $u,v\in X$-re és valamely $a\colon[0,\infty[\to[0,\infty[$ szigorúan monoton növekedő függvényre, amelyre $a(0)=0$ és az értékkészlete nem korlátos;

(2) *demifolytonos*, ha $u_n\to u$-ból következik $Au_n\rightharpoonup Au$;

(3) *hemifolytonos*, ha $t\mapsto A(u+tv)w$ folytonos $[0,1]$-en minden $u,v,w\in X$-re;

(4) *erősen folytonos*, ha $u_n\rightharpoonup u$-ból következik $Au_n\to Au$.

30.3. Definíció. Legyen X Banach-tér, $A\colon X\to X^*$ egy operátor. Ekkor A

(1) *monoton*, ha $(Au-Av)(u-v)\geq 0$ minden $u,v\in X$-re;

(2) *szigorúan monoton*, ha $(Au-Av)(u-v)>0$ minden $u\neq v,u,v\in X$-re;

(3) *egyenletesen monoton*, ha $(Au-Av)(u-v)\geq a(\|u-v\|)\|u-v\|$ minden $u,v\in X$-re és valamely $a\colon[0,\infty[\to[0,\infty[$ szigorúan monoton növekedő függvényre, amelyre $a(0)=0$ és az értékkészlete nem korlátos;

(4) *erősen monoton*, ha (3)-ban a az identitásnak választható;

(5) *kényszerítő*, ha

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{Auu}{\|u\|}=+\infty.$$

Nyilván (1), (2), (3), (4) egyre erősebbek. Az egyenletesen monoton operátorok kényszerítőek, mivel

$$Auu = (Au - A0)u + A0u \geq a(\|u\|)\|u\| - \|A0\|\|u\|,$$

továbbá stabilak, mivel

$$\|Au - Av\|\|u - v\| \geq (Au - Av)(u - v) \geq a(\|u - v\|)\|u - v\|.$$

30.4. Állítás. *Ha X valós Banach-tér, akkor $A\colon X \to X^*$ pontosan akkor monoton, ha $t \mapsto A(u + tv)v$ monoton $[0, 1]$-en minden u, v-re.*

Bizonyítás. Ha A monoton, $0 \leq s < t$, akkor

$$f(t) - f(s) = (A(u + tv) - A(u + sv))v \geq 0$$

és megfordítva,

$$(A(u + v) - Au)v = f(1) - f(0) \geq 0.$$

30.5. Feladat [6]. Elemezzük, hogy mit jelentenek az egyes feltételek egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

30.6. Példa. Legyen $A\colon X \to X^*$ lineáris operátor. Ekkor

(1) A pontosan akkor monoton, ha $Auu \geq 0$ minden $u \in X$-re;

(2) A pontosan akkor szigorúan monoton, ha $Auu > 0$ minden $u \in X$-re;

(3) A pontosan akkor erősen monoton, ha van olyan $c > 1$, hogy $Auu \geq c\|u\|^2$ minden $u \in X$-re;

30.7. Monotonitási trükk. *Ha $A\colon X \to X^*$ monoton és hemifolytonos operátor az X reflexív valós Banach-téren, akkor*

(1) *A maximális monoton;*

(2) *ha $u_n \rightharpoonup u$ és $Au_n \rightharpoonup b$, valamint $Au_nu_n \to bu$, vagy legalábbis*

$$\limsup_{n\to\infty} Au_nu_n \leq bu,$$

akkor $Au = b$;

(3) *ha $u_n \rightharpoonup u$ és $Au_n \to b$ vagy $u_n \to u$ és $Au_n \rightharpoonup b$, akkor $Au = b$.*

Bizonyítás. Legyen $v = u - tw$, ha $t > 0$. Ekkor $(b - Av)(u - v) \geq 0$-ból

$$(b - A(u - tw))w \geq 0.$$

Ha $t \downarrow 0$, akkor $(b - Au)w \geq 0$ minden $w \in X$-re, így $Au = b$.

A (2) és (3) állítások bizonyításához vegyük észre, hogy

$$Au_nu_n - Avu_n - (Au_n - Av)v = (Au_n - Av)(u_n - v) \geq 0$$

minden $v \in X$-re. Ha $n \to \infty$, akkor

$$0 \leq bu - Avu - (b - Av)v = (b - Av)(u - v),$$

így, mivel (1) szerint A maximális monoton, $Au = b$.

30.8. Konvergencia trükk egyenletesen monoton operátorokra. *Ha $A\colon X \to X^*$ egyenletesen monoton az X reflexív valós Banach-téren, $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup Au$ és $Au_n u_n \to Auu$, akkor $u_n \to u$.*

Bizonyítás.

$$a(\|u-u_n\|)\|u-u_n\| \le (Au-Au_n)(u-u_n) = Auu - Auu_n - Au_n u + Au_n u_n \to 0.$$

30.9. Állítás. *Legyenek X, Y reflexív Banach-terek, $A\colon X \to Y$. Ekkor*

(1) *a A erősen folytonos, akkor kompakt;*

(lineáris operátorokra (1) megfordítása is teljesül, reflexivitás nélkül is)

(2) *ha A demifolytonos, akkor lokálisan korlátos.*

Bizonyítás. (1)-hez, legyen x_n korlátos sorozat X-ben. Ennek van $x_{n_k} \rightharpoonup x$ gyengén konvergens részsorozata. Erre $Ax_{n_k} \to Ax$.

(2)-höz, ha A demifolytonos, de nem lokálisan korlátos, akkor van olyan $x \in X$ és $x_n \to x$, hogy $\|Ax_n\| \to \infty$, de $Ax_n \rightharpoonup Ax$, ellentmondás.

30.10. Tétel. *Legyen X valós Banach-tér, $A\colon X \to X^*$. Ekkor*

(1) *ha A monoton, akkor lokálisan korlátos;*

(2) *ha A lineáris és monoton, akkor folytonos;*

(3) *ha A monoton és hemifolytonos, X reflexív, akkor A demifolytonos.*

Bizonyítás. Legyen A monoton, és tegyük fel indirekt, hogy nem lokálisan korlátos. Ekkor van olyan $u \in X$ és $u_n \to u$, amelyre $\|Au_n\| \to \infty$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u = 0$. Legyen

$$a_n = 1/(1 + \|Au_n\|\|u_n\|).$$

Az A operátor monotonitásából

$$(Au_n - A(\pm v))(u_n \mp v) \ge 0.$$

Ebből

$$\begin{aligned} \pm a_n Au_n v &\le a_n(Au_n u_n - A(\pm v)(u_n \mp v)) \\ &\le a_n\Big(\|Au_n\|\|u_n\| + \big\|A(\pm v)\big\|\|u_n \pm v\|\Big). \end{aligned}$$

Innen $\sup_n |a_n Au_n v| < \infty$ minden $v \in X$-re. Az egyenletes korlátosság tétele szerint $\sup_n \|a_n Au_n\| \le N$ valamely N-re. Legyen $b_n = \|Au_n\|$. Ekkor

$$b_n \le N/a_n = (1 + b_n\|u_n\|)N.$$

Mivel $\|u_n\| \to 0$, a b_n sorozat korlátos. Ez ellentmondás.

Most már (2) következik, mert lokálisan korlátos lineáris operátor korlátos. Végül ha $u_n \to u$, akkor Au_n korlátos. Ha $Au_{n_k} \rightharpoonup b$, akkor $Au_{n_k}u_{n_k} \to bu$ és a monotonitási trükk szerint $Au = b$. Mivel ez u_n minden részsorozatára is igaz, $Au_n \rightharpoonup Au$.

A következő tétel bizonyításában a Galjorkin-módszert használjuk, és szükségünk lesz nemlineáris egyenletrendszer megoldása létezésének bizonyítására. Erre a Brouwer-féle fixponttétel alábbi következményét fogjuk használni.

30.11. Állítás: megoldás létezése nemlineáris egyenletrendszerre. *Legyen a* $g\colon \mathbb{B}_R(0) \to \mathbb{R}^n$ *függvény folytonos, ahol* $\mathbb{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. *Ha minden* $x \in \mathbb{S}_R(0)$ *esetén* $\langle g(x), x\rangle \geq 0$, *akkor a* $g(x) = 0$ *egyenletrendszernek van megoldása* $\mathbb{B}_R(0)$*-ban.*

Bizonyítás. Indirekt: egyébként $f(x) = -Rg(x)/\|g(x)\|$ folytonos leképezése lenne $\mathbb{B}_R(0)$-nak önmagába, amelynek van egy x fixpontja. Erre $\|x\| = R$, de

$$\langle g(x), x\rangle = \frac{\|g(x)\|}{R}\langle f(x), x\rangle = -\frac{\|g(x)\|}{R}\|x\|^2 < 0.$$

30.12. Browder–Minty-tétel. *Legyen* $A\colon X \to X^*$ *monoton, kényszerítő, hemifolytonos operátor a valós, szeparábilis, reflexív Banach-téren. Legyen* $w_1, w_2, \ldots$ *egy lineárisan független sorozat, amelynek lineáris burka sűrű* X*-ben. Ekkor*

(1) *minden* $b \in X^*$*-ra az* $Au = b$ *egyenletnek van megoldása, a megoldáshalmaz korlátos, zárt és konvex;*

(2) *minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra az* $(Au_n - b)w_k = 0$, *ha* $k = 1, 2, \ldots, n$ *Galjorkin-egyenletrendszernek van* $u_n \in X_n$ *megoldása, ahol* X_n *a* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *lineáris burka, és az* u_n *sorozatnak van olyan részsorozata, amely gyengén konvergál az* $Au = b$ *egyenlet egy megoldásához;*

(3) *ha* A *szigorúan monoton, akkor az* u_n *és* u *megoldások egyértelműek;*

(4) *ha* A *szigorúan monoton, akkor* $A^{-1}\colon X^* \to X$ *is szigorúan monoton, demifolytonos és korlátos; ha még* A *egyenletesen monoton, akkor* A^{-1} *folytonos is, és ha* A *erősen monoton, akkor* A^{-1} *Lipschitz-függvény;*

(5) *ha* A *szigorúan monoton, akkor* u_n *gyengén konvergens, ha egyenletesen monoton, akkor konvergens.*

Az (1), (3), (4) és (5) állítások érvényben maradnak a nem szeparábilis esetben is. Ez alterek irányított halmazán értelmezett általánosított sorozatokkal bizonyítható.

Bizonyítás. Először (2)-t bizonyítjuk.

I. A Galjorkin-egyenletek megoldása. Legyen $g(u) = (Au-b)u$, $g_k(u) = (Au-b)w_k$. Mivel A kényszerítő, azaz $g(u)/\|u\| \to \infty$, amint $\|u\| \to \infty$, van olyan $R > 0$, hogy $g(u) > 0$ az $\mathbb{U}_R(0)$ gömbön kívül. A Galjorkin-egyenletek $g_k(u_n) = 0$, $u_n \in X_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ alakúak, ami egy nemlineáris egyenletrendszer az $u_n = c_{1,n}w_1 + c_{2,n}w_2 + \cdots + c_{n,n}w_n$-beli kombináló együtthatókra. Mivel egy előző állítás szerint A demifolytonos, az $u \mapsto g_k(u)$ leképezések folytonosak X-en, így az egyenletrendszer függvényei folytonosak a kombináló együtthatókban. Ha $u_n \in X_n$, $\|u_n\| = R$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(u_n)c_{k,n} = g(u_n) > 0.$$

Így a Galjorkin-egyenleteknek van megoldása.

II. A priori becslés. Ha u_n a Galjorkin-egyenletek megoldása, akkor $g(u_n) = 0$, amiből $\|u_n\| \leq R$ minden n-re. Ha u az $Au = b$ megoldása, akkor $\|u\| \leq R$.

III. Az Au_n korlátos. Egy előző állítás szerint A lokálisan korlátos, így van olyan $r, \delta > 0$, hogy $\|v\| \le r$-ből $\|Av\| \le \delta$. Mivel A monoton, $(Au_n - Av)(u_n - v) \ge 0$. Mivel $Au_n u_n = bu_n$ minden n-re, $|Au_n u_n| \le \|b\|\|u_n\| \le \|b\|R$ minden n-re. Az X^* normájának definíciója szerint

$$\|Au_n\| = \sup_{\|v\|=r} \frac{Au_n v}{r} \le \sup_{\|v\|=r} \frac{Avv + Au_n u_n - Avu_n}{r} \le \frac{\delta r + \|b\|R + \delta R}{r}.$$

IV. A Galjorkin-módszer konvergenciája. Az u_n sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata: $u_{n_k} \rightharpoonup u$. A Galjorkin-egyenletekből $Au_{n_k} w \to bw$ minden $w \in \cup_{n=1}^{\infty} X_n$-re. Mivel ez az unió sűrű X^*-ban és Au_{n_k} korlátos X^*-ban, $Au_{n_k} w \to bw$ minden $w \in X$-re, azaz $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ az X^*-ban. Mivel az u_n sorozat minden részsorozatából kiválasztható ilyen részsorozat, $u_n \rightharpoonup u$ az X-ben, és $Au_n \rightharpoonup b$ az X^*-ban. A monotonitási trükk miatt $Au = b$, azaz u megoldása az egyenletnek.

(1) bizonyításához legyen S a megoldáshalmaz adott $b \in X^*$-hoz. A IV. lépés szerint S nem üres és a II. lépés szerint korlátos. Legyen $u_1, u_2 \in S$, $u = t_1 u_1 + t_2 u_2$, $t_1, t_2 \ge 0$, $t_1 + t_2 = 1$. Ekkor

$$(b - Av)(u - v) = t_1(Au_1 - Av)(u_1 - v) + t_2(Au_2 - Av)(u_2 - v) \ge 0,$$

így a monotonitási trükk miatt $Au = b$. Végül, ha $Av_n = b$, $v_n \to u$, akkor

$$(b - Av)(u - v) = \lim_{n\to\infty} (Av_n - Av)(v_n - v) \ge 0$$

minden $v \in X$-re, így a monotonitási trükk szerint $Au = b$.

(3) bizonyításához, ha A szigorúan monoton, akkor $Au = Av$, $u \ne v$ esetén

$$(Au - Av)(u - v) > 0,$$

ellentmondás.

(4) bizonyításához, az $A^{-1}\colon X^* \to X$ operátor létezik,

$$(b - \tilde{b})(A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}) = (Au - A\tilde{u})(u - \tilde{u}) > 0,$$

ha $u \ne \tilde{u}$, azaz az inverz szigorúan monoton. Mivel A kényszerítő, ugyanúgy, mint az I. lépésben, kapjuk, hogy A^{-1} korlátos. Az A^{-1} demifolytonosságának bizonyításához legyen $v_n = A^{-1}b_n$ és tegyük fel, hogy $b_n \to b$. Mivel A^{-1} korlátos, v_n korlátos. Ha $v_{n_k} \rightharpoonup v$, akkor

$$(b - Aw)(v - w) = \lim_{k\to\infty} (b_{n_k} - Aw)(v_{n_k} - w) \ge 0,$$

így a monotonotási trükk miatt $Av = b$, azaz $A^{-1}b = v$. Mivel ez minden részsorozat valamely részsorozatára igaz, $v_n \rightharpoonup v$. Végül, ha A egyenletesen monoton is, akkor stabil, azaz $\|Au - Av\| \ge a(\|u - v\|)$ valamely $a\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ szigorúan monoton függvényre, amelyre $a(0) = 0$. Innen következik A^{-1} egyenletes folytonossága. Ha A még erősen monoton is, akkor $a(\|u - v\|) = c\|u - v\|$ választható, amiből A^{-1} Lipschitz.

Végül (5) következik az egyenletesen monoton operátorokra vonatkozó konvergenciatrükkből.

30.13. Példa. Tekintsük a

$$(1)\qquad \begin{aligned} G\colon & -\sum_{i=1}^{n}\partial_i(|\partial_i u|^{p-2}\partial_i u)+su=f,\\ \partial G\colon & u=0 \end{aligned}$$

peremérték-problémát, ahol $G\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $2\le p<\infty$, $1/p+1/q=1$, $s\ge 0$. Legyen $X=\mathcal{W}_0^{1,p}$, és legyen

$$a(u,v)=\int_G\Big((|\partial_i u|^{p-2}\partial_i u)\partial_i v+suv\Big),$$
$$b(v)=\int_G fv.$$

Az (1)-hez tartozó *általánosított probléma* a következő: adott $f\in\mathbb{L}^q$-hoz keressük azt az $u\in X$-et, amelyre $a(u,v)=b(v)$ minden $v\in X$-re. Formálisan, az általánosított problémát úgy kapjuk, hogy (1)-et szorozzunk $v\in\mathcal{D}(G)$-vel és parciálisan integrálunk. Az általánosított problémához tartozó *Galjorkin-egyenlet*ek

$$a(u_n,w_k)=b(w_k),\quad k=1,\dots,n,\quad \text{ahol}\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}c_{kn}w_k.$$

30.14. Állítás. *Az előző példa jelöléseivel az általánosított probléma ekvivalens az $Au=b$, $u\in X$ operátoregyenlettel, ahol $Auv=a(u,v)$ minden $u,v\in X$-re, és az $A\colon X\to X^*$ operátor folytonos, egyenletesen monoton, kényszerítő és korlátos.*

Az állítást nem bizonyítjuk, a bizonyítás megtalálható például Zeidler, [179], II/B kötet, 26.10.

30.15. Páros rendű kvázilineáris elliptikus egyenletek. Az

$$(Lu)(x)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha A_\alpha(x,\partial u(x))$$

operátort tekintjük, ahol $m\ge 1$ és $\partial u=\big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\le m}$, a

$$(1)\qquad \begin{aligned} G &: Lu=f,\\ \partial G &: \partial^\beta u=0,\quad \text{ha}\quad |\beta|\le m-1 \end{aligned}$$

problémával, ahol $G\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. A feltételek megfogalmazásához a $\partial=\big(\partial^\gamma\big)_{|\gamma|\le m}\in\mathbb{R}^M$ változót használjuk.

(H1) Carathéodory-feltétel: Minden $|\alpha|\le m$ esetén $A_\alpha\colon G\times\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}$-re $x\mapsto A_\alpha(x,\partial)$ mérhető minden $\partial\in\mathbb{R}^M$-re és $\partial\mapsto A_\alpha(x,\partial)$ folytonos majdnem minden $x\in G$-re.

Továbbá, legyen $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $g \in \mathbb{L}^p(G)$, $h \in \mathbb{L}^1(G)$, $c > 0$, $C > 0$, és tegyük fel, hogy $|\alpha| \le m$, $x \in G$, $\vartheta, \vartheta' \in \mathbb{R}^M$ esetén teljesül a

(H2) növekedési feltétel:

$$\big|A_\alpha(x,\vartheta)\big| \le C\Big(g(x) + \sum_{|\gamma|\le m} |\vartheta^\gamma|^{p-1}\Big);$$

(H3) monotonitási feltétel:

$$\sum_{|\alpha|\le m} (A_\alpha(x,\vartheta) - A_\alpha(x,\vartheta'))(\vartheta^\alpha - \vartheta'^\alpha) \ge 0;$$

(H4) kényszerítési feltétel:

$$\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x,\vartheta)\vartheta^\alpha \ge c \sum_{|\gamma|=m} |\vartheta^\gamma|^p - h(x).$$

30.16. Példa. Legyen $m = 1$, és $|\alpha| = 1$ esetén legyen $A_\alpha(x,\vartheta) = \vartheta^\alpha$. Az $|\alpha| = 0$ esetben az $A_\alpha = A_0$, $\vartheta^\alpha = \vartheta_0$ jelöléssel

$$(Lu)(x) = -\Delta u(x) + A_0(x, u, u'(x)),$$

az előző pont (H2), (H3) és (H4) feltételeiből pedig annyi marad, hogy

(2)
$$\big|A_\alpha(x,\vartheta)\big| \le C(g(x) + |\vartheta_0|^{p-1} + |\vartheta_1|^{p-1} + \cdots |\vartheta_n|^{p-1}\Big);$$

(3)
$$(A_0(x,\vartheta) - A_0(x,\vartheta'))(\vartheta_0 - \vartheta'_0) \ge 0;$$

(4)
$$A_0(x,\vartheta)\vartheta_0 + \vartheta_1^2 + \cdots + \vartheta_n^2 \ge d\sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^p - h(x).$$

A $p = 2$ esetben $|\alpha| = 1$ esetén a (2) feltétel teljesül. (A növekedési feltétel enyhíthető.)

30.17. Definíció. Legyen $X = \mathcal{W}_0^{m,p}$, ahol $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Az előző definíció (1) peremérték-problémájának megfelelő *általánosított probléma* a következő: Legyen $f \in \mathbb{L}^q(G)$ adott. Olyan $u \in X$ függvényt keresünk, amely az

$$a(u,v) = \int_G \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x, \vartheta u(x))\vartheta^\alpha v(x)\,dx,$$
$$b(v) = \int_G f(x)v(x)\,dx$$

jelölésekkel az

$$a(u,v) = b(v), \quad \text{ha} \quad v \in X$$

általánosított probléma megoldása. Formálisan, az általánosított problémát úgy kapjuk, hogy az egyenletet szorozzuk egy $v \in \mathcal{D}(G)$ függvénnyel és integrálunk. X választása megfelel annak, hogy elemei teljesítik a peremfeltételt általánosított értelemben minden $|\beta| \le m - 1$-re.

30.18. Állítás. *Az előző két definíció jelöléseivel, ha a (H1)–(H4) feltételek teljesülnek, akkor pontosan egy $A\colon X \to X^*$ operátor létezik, amire*

$$Auv = a(u,v), \quad \text{ha} \quad u, v \in X.$$

Az általánosított probléma ekvivalens az

$$Au = b, \quad u \in X$$

operátoregyenlettel. Az A operátor monoton, kényszerítő, folytonos és korlátos, így a Browder–Minty-tétel alkalmazható.

Az állítást nem bizonyítjuk, a bizonyítás megtalálható például Zeidler, [179], II/B kötet, 26.12. További feltételekből az A további tulajdonságaira (egyenletes monotonitás, erős folytonosság) is következtethetünk. A feltételeket lehet gyengíteni is.

A továbbiakban időtől függő egyenleteket kívánunk a monoton operátorok módszerével vizsgálni. Csak az (időben) elsőrendű egyenleteket vizsgáljuk, de erre visszavezethetők a másodrendűek is. Valós Hilbert-terekben fogunk dolgozni. Mivel ezek reflexívek, lényegében a helyzet speciális esete a fentieknek. Mivel azonban az operátor nem lesz mindenütt értelmezve, némi finomításra van szükség a definícióban.

30.19. Definíció. Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor

(1) *nemexpanzív*, ha $\|Ax - Ay\| \le \|x - y\|$ minden $x, y \in \operatorname{dmn}(A)$-ra;

(2) *monoton*, ha $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge 0$ minden $x, y \in \operatorname{dmn}(A)$-ra;

(3) *maximális monoton*, ha monoton és $\langle b - Ay, x - y\rangle \ge 0$ minden $y \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén $Ax = b$, azaz nincs valódi monoton kiterjesztése;

(4) *bővülő*, ha $\mathbb{I} + \mu A$ injektív, és az inverze nemexpanzív minden $\mu > 0$-ra;

(5) *maximális bővülő*, ha bővülő és $(\mathbb{I} + \mu A)^{-1}$ az egész H-n van értelmezve.

Vegyük észre, hogy ha A nemexpanzív, akkor $\mathbb{I} - A$ monoton, hiszen $x, y \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}\big\langle (x - Ax) - (y - Ay), x - y\big\rangle &= \langle x - y, x - y\rangle - \langle Ax - Ay, x - y\rangle \\ &\ge \|x - y\|^2 - \|Ax - Ay\|\|x - y\| \ge 0.\end{aligned}$$

30.20. Állítás. *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátor pontosan akkor monoton, ha bővülő.*

Bizonyítás. Nyilván

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| = \|x - y\|^2 + 2\mu\langle Ax - Ay, x - y\rangle + \mu^2\|Ax - Ay\|^2.$$

Innen

$$\big\|(x + \mu Ax) - (y + \mu Ay)\big\| \ge \|x - y\|^2$$

minden $\mu > 0$-ra pontosan akkor teljesül, ha $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge 0$.

30.21. Állítás. *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A \in H \to H$ operátorra ekvivalensek:*

(1) *A monoton és $\operatorname{rng}(\mathbb{1} + A) = H$;*

(2) *A maximális bővülő;*

(3) *A maximális monoton.*

Az, hogy (3)-ból következik (1), Minty tétele, és itt nem bizonyítjuk. Csak azt látjuk be, hogy (1)-ből következik (2) és (2)-ből következik (3), mert csak erre lesz szükségünk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (1) teljesül. A Banach-féle fixponttételt fogjuk használni. Az $R_\lambda = (\mathbb{1}+\mu A)^{-1}$ operátor nemexpanzív, így elég megmutatni, hogy $\operatorname{rng}(\mathbb{1}+\mu A) = H$ minden $\mu > 0$-ra. Az $x + \mu Ax = z$, $x \in H$ egyenlet ekvivalens az $x = L_z x$, $x \in H$ egyenlettel, ahol $L_z x = R_\lambda((1 - \lambda/\mu)x + (\lambda/\mu)z)$. Ha $\mu > \lambda/2$, akkor $|1 - \lambda/\mu| < 1$ és $\|L_z x - L_z y\| \le |1-\lambda/\mu|\|x-y\|$ minden $x, y \in H$-ra, így pontosan egy fixpont van. Kezdve $\lambda = 1$-gyel és indukcióval folytatva $\mu > \lambda/2^n$-re kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy A maximális bővülő. Ekkor A monoton. Tegyük fel, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \ge 0$ minden $y \in \operatorname{dmn}(A)$-ra. Legyen $y = y_t = (\mathbb{1} + A)^{-1}(u + b + tz)$, ha $t > 0$ és $z \in H$. Az $\langle x - y_t, x - y_t\rangle \ge 0$ egyenlőtlenséget hozzáadva a fentihez

$$\langle b - x - Ay_t - y_t, x - y_t\rangle \ge 0,$$

ahonnan $\langle z, x - y_t\rangle \le 0$. Ha $t \downarrow 0$, akkor innen

$$\big\langle z, x - (\mathbb{1} + A)^{-1}(b + x)\big\rangle \le 0$$

minden $z \in H$-ra, azaz $x = (\mathbb{1} + A)^{-1}(b + x)$.

30.22. Konvergenciatrükk maximális monotonitással. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A \in H \to H$ maximális monoton operátor. Ekkor ha $Ax_n \rightharpoonup b$ és $x_n \to x$ vagy $Ax_n \to b$ és $x_n \rightharpoonup x$, akkor $Ax = b$.*

Bizonyítás. Mivel $\langle Ax_n - Ay, x_n - y\rangle \ge 0$, kapjuk, hogy $\langle b - Ay, x - y\rangle \ge 0$ minden $y \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén.

30.23. Komura tétele. *Legyen H valós Hilbert-tér, és tegyük fel, hogy $A \in H \to H$ monoton és $\operatorname{rng}(\mathbb{1} + A) = H$. Ekkor minden $u_0 \in \operatorname{dmn}(A)$-ra létezik pontosan egy $u\colon [0, +\infty[\to H$ folytonos függvény, amelyre*

$$u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(t) + Au(t) = 0, \quad \text{ha} \quad 0 < t < +\infty,$$

a deriváltat gyenge értelemben értve. Továbbá erre az egyértelmű megoldásra

(1) *$u(t) \in \operatorname{dmn}(A)$, ha $t > 0$;*

(2) *u Lipschitz-függvény $[0, +\infty[$-en;*

(3) *majdnem minden $t > 0$-ra a derivált a szokásos értelemben is létezik, és teljesül a differenciálegyenlet, valamint $\|u'(t)\| \le \|Au_0\|$;*

(4) *a $t \mapsto u'(t)$ függvény általánosított deriváltja a $t \mapsto u(t)$ függvénynek, és $u'\colon [0, +\infty[\to H$ gyengén folytonos;*

(5) *minden $t \ge 0$-ra létezik az $u'_+(t)$ jobb oldali derivált és $u'_+(t) + Au(t) = 0$.*

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy az átviteli elv metrikus teret topologikus térbe képező függvény határértékére is érvényes marad.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az A-ra kirótt feltételek azzal ekvivalensek, hogy maximális monoton, illetve maximális bővülő.

Az unicitás bizonyítása nem nehéz: Legyen $u\colon [0,+\infty[\to H$ egy megoldás, amelyre u folytonos és u' létezik a gyenge értelemben. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\|u(t)\big\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{\langle u(t+h),u(t+h)\rangle - \langle u(t),u(t)\rangle}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, u(t)+u(t+h)\right\rangle = 2\langle u'(t),u(t)\rangle.\end{aligned}$$

Legyen v egy másik megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\|u(t)-v(t)\big\|^2 &= 2\langle u'(t)-v'(t),u(t)-v(t)\rangle\\ &= -2\langle Au(t)-Av(t),u(t)-v(t)\rangle \le 0,\end{aligned}$$

mivel A monoton. Innen

$$\big\|u(t)-v(t)\big\| \le \|u(0)-v(0)\|, \quad \text{ha} \quad t\ge 0. \tag{6}$$

Mivel $u(0)=v(0)$, $u(t)=v(t)$ minden $t\ge 0$-ra.

A létezés bizonyításának a kulcsa az $R_\mu = (\mathbb{1}+\mu A)^{-1}$, $\mu>0$ *nemlineáris rezolvens* használata, amely a feltételek szerint egy $H\to \mathrm{dmn}(A)$ bijektív és nemexpanzív leképezés minden $\mu>0$-ra. Ennek segítségével képezzük a nemlineáris

$$A_\mu = \frac{1}{\mu}(\mathbb{1}-R_\mu), \quad \mu>0$$

Yosida-közelítést. A bizonyítás számos lépésből áll.

I. Megmutatjuk, hogy minden $\mu>0$-ra és $u,v\in H$-ra $A_\mu u = AR_\mu u$, $\|A_\mu u - A_\mu v\| \le 2\|u-v\|/\mu$, és $\langle A_\mu u - A_\mu v\rangle \ge 0$, azaz A_μ monoton és Lipschitz-függvény, továbbá minden $\mu>0$-ra és $u\in \mathrm{dmn}(A)$-ra $R_\mu Au = A_\mu u$ és $\|A_\mu u\| \le \|Au\|$. Valóban,

$$A_\mu R_\mu^{-1} = (R_\mu^{-1}-\mathbb{1})/\mu = A$$

és hasonlóan $R_\mu^{-1}A_\mu = A$. Mivel R_μ nemexpanzív,

$$\|A_\mu u - A_\mu v\| = \frac{1}{\mu}\big\|(u-v)-(R_\mu u - R_\mu v)\big\| \le \frac{2}{\mu}\|u-v\|,$$

$$\|A_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\|u-R_\mu u\| = \frac{1}{\mu}\big\|R_\mu(\mathbb{1}-\mu A)u - R_\mu u\big\| \le \|Au\|.$$

Mivel R_μ nemexpanzív, $\mathbb{1}-R_\mu$ monoton, és így A_μ is monoton.

II. Rögzített $T > 0$-ra az A operátorból elkészítjük az $X = \mathbb{L}^2([0,T];H)$ tér $\tilde{A}$ operátorát az $(\tilde{A}u)(t) = Au(t)$ definícióval; az $\tilde{A}$ operátor azon u függvényekre van értelmezve, amelyekre $u(t) \in \operatorname{dmn}(A)$ majdnem minden t-re és $t \mapsto Au(t)$ az X-ben van. Megmutatjuk, hogy az $\tilde{A}$ operátor maximális bővülő. Az A monotonitásából

$$\langle \tilde{A}u - \tilde{A}v, u - v\rangle_X = \int_0^T \langle Au(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle\, dt \geq 0.$$

Megmutatjuk, hogy $\operatorname{rng}(\mathbb{I} + \tilde{A}) = X$. Legyen $w \in X$ és $u(t) = (\mathbb{I} + A)^{-1}w(t)$, $v = (\mathbb{I} + A)^{-1}(0)$. Mivel $(\mathbb{I} + A)^{-1}$ nemexpanzív, $\|u(t) - v\|^2 \leq \|w(t)\|^2$. Integrálva t szerint $u - v \in X$, azaz $u \in X$.

III. Az $u'_\mu + A_\mu u_\mu = 0$ egyenlet a Picard–Lindelöf-tétel szerint egyértelműen oldható meg bármely kezdeti feltételre a valós változós, H-ba képező folytonosan differenciálható függvények körében. Mint az unicitásnál,

$$\|u_\mu(t) - v_\mu(t)\| \leq \|u_\mu(0) - v_\mu(0)\|, \quad \text{ha} \quad t \geq 0,$$

mert A_μ monoton.

IV. Ebben a lépésben megmutatjuk, hogy minden $t, s \geq 0$-ra és $\mu, \lambda > 0$-ra

$$\|u'_\mu(t)\| = \|A_\mu u(t)\| \leq \|Au_0\|, \tag{7}$$

$$\|u_\mu(t) - u_\mu(s)\| \leq \|Au_0\||t - s|, \tag{8}$$

$$\|u_\mu(t) - R_\mu u_\mu(t)\| \leq \mu\|Au_0\|, \tag{9}$$

$$\|u_\mu(t) - u_\lambda(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda + \mu}t\|Au_0\|. \tag{10}$$

(7)-hez vegyük észre, hogy $t \mapsto u_\mu(t)$ mellett $t \mapsto u_\mu(t + h)$ is megoldás más kezdeti feltétellel, így $h > 0$ esetén

$$\|u_\mu(t) - u_\mu(t + h)\| \leq \|u_\mu(0) - u_\mu(h)\|.$$

Osztva h-val, ha $h \downarrow 0$, akkor

$$\|u'_\mu(t)\| \leq \|u'_\mu(0)\| = \|A_\mu u_0\| \leq \|Au_0\|.$$

(8) a középérték-egyenlőtlenségből és (7)-ből következik. Ugyancsak (7)-ből, felhasználva, hogy $A_\mu = (\mathbb{I} - R_\mu)/\mu$, kapjuk (9)-et. Végül legyen

$$\delta = \langle A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t), R_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda + u_\mu - R_\mu u_\mu(t)\rangle.$$

(7) és (9) szerint $|\delta| \leq 2(\mu + \lambda)\|Au_0\|$. Figyelembe véve a differenciálegyenletet, hogy $A_\mu = AR_\mu$, és A monotonitását,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t) - u_\lambda(t)\|^2 &= \langle u'_\mu(t) - u'_\lambda(t), u_\mu(t) - u_\lambda(t)\rangle \\
&= -\langle A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_\mu(t) - u_\lambda(t)\rangle \\
&= -\langle AR_\mu u_\mu(t) - AR_\lambda u_\lambda(t), R_\mu u_\mu(t) - R_\mu u_\lambda(t)\rangle + \delta \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Innen integrálással adódik (10).

V. Az előző lépés (10) állításából következik, hogy $u_\mu(t)$ konvergál valamilyen $u(t)$-hez, ha $\mu \downarrow 0$, éspedig minden kompakt intervallumon egyenletesen, (8)-ból pedig, hogy $\|u(t)-u(s)\| \le \|Au_0\||t-s|$.

VI. Az egyenletes konvergencia miatt $u_n \to u$ X-ben is, ha $\mu \downarrow 0$, és a $t \mapsto u(t)$ függvény Lipschitz-függvény. Innen a deriváltja majdnem mindenütt létezik, és $\|u'(t)\| \le \|Au_0\|$ majdnem minden t-re, azaz $u' \in X$. Továbbá u' általánosított deriváltja u-nak minden $]0,T[$-n. (7)-ből van olyan c konstans, hogy $\|u_\mu\|_X \le c$ minden $\mu > 0$-ra. Mivel X Hilbert-tér, reflexív. Részsorozatra áttérve $u_{\mu_n} \to u$ az X-ben és $u'_{\mu_n} \rightharpoonup w$ az X-ben, amint $\mu_n \downarrow 0$. Disztribúció értelemben $u' = w$, mert bármely $\varphi \in \mathcal{D}]0,T[$-re

$$\int_0^T \varphi' u_{\mu_n} = \int_0^T \varphi u'_{\mu_n}, \qquad \int_0^T \varphi' \langle u_{\mu_n}, v\rangle = \int_0^T \varphi \langle u'_{\mu_n}, v\rangle,$$

ahonnan $\mu_n \downarrow 0$-val

$$\int_0^T \varphi' \langle u, v\rangle = \int_0^T \varphi \langle w, v\rangle,$$

azaz

$$\left\langle \int_0^T \varphi' u, v \right\rangle = \left\langle \int_0^T \varphi w, v \right\rangle$$

minden $v \in H$-ra. Mivel

$$u'_\mu = -Au_\mu(t) = AR_\mu u_\mu(t),$$

(9) szerint $R_\mu u_\mu \to u$ és $-\tilde{A}R_\mu u_\mu \rightharpoonup w$ az X-ben, ha $\mu \downarrow 0$. A maximális monotonitás konvergencia-trükkje miatt azt az alapvető eredményt kapjuk, hogy $u \in \operatorname{dmn}(\tilde{A})$ és $w = -\tilde{A}u$, azaz $u' = -\tilde{A}u$. Így $u'(t) = -Au(t)$ majdnem minden $t > 0$-ra.

Most legyen $t > 0$. Mivel $\|AR_\mu u_\mu(t)\| \le \|Au_0\|$, az V. lépésben mondottak, valamint (7) és (10) szerint valamely részsorozatra

$$R_{\mu_n} u_{\mu_n}(t) \to u(t) \quad \text{és} \quad AR_{\mu_n} u_{\mu_n}(t) \rightharpoonup z \qquad (\mu_n \downarrow 0)$$

H-ban. Mivel A maximális monoton, $u(t) \in \operatorname{dmn}(A)$ és $Au(t) = z$, továbbá

$$\|Au(t)\| \le \liminf_{n\to\infty} \|AR_{\mu_n}(t)\| \le \|Au_0\|.$$

Ha $t \mapsto u(t)$ megoldása a kezdeti érték problémának, akkor $t \mapsto u(t+s)$ is az $u(s)$ kezdeti értékkel. Így $\|Au(t)\| \le \|Au(s)\|$, ha $t \ge s \ge 0$, azaz $t \mapsto \|Au(t)\|$ monoton csökkenő.

VII. Megmutatjuk, hogy a $t \mapsto Au(t)$ függvény jobbról folytonos a $\{t > 0\}$ halmazon. Tegyük fel, hogy $t_n \downarrow t$, ha $n \to \infty$. Ekkor $\|Au(t_n)\| \le \|Au(t)\|$. Részsorozatra áttérve

$$Au(t_{n_k}) \rightharpoonup z \qquad u(t_{n_k}) \to u(t), \quad \text{ha} \quad k \to \infty.$$

Mivel A maximális monoton, $Au(t) = z$. Az $\|Au(t_{n_k})\|$ sorozat monoton csökkenő, így konvergens, és $Au(t_{n_k}) \rightharpoonup Au(t)$ miatt

$$\|Au(t)\| \le \liminf_{k\to\infty} \|Au(t_{n_k})\| \le \|Au(t)\|,$$

azaz $\|Au(t_{n_k})\| \to \|Au(t)\|$. Így $Au(t_{n_k}) \to Au(t)$, amiből minden $t_n \downarrow t$ sorozat minden részsorozatának van olyan részsorozata, amire teljesül a konvergencia. Innen

$$\lim_{s\downarrow t} Au(s) = Au(t).$$

VIII. Jobboldali derivált létezése: Legyen $h > 0$. Integrálva

$$\frac{u(t+h) - u(h)}{h} = -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} Au(s)\,ds.$$

Az előző lépés szerint

$$\frac{d^+}{dt}u(t) = -Au(t), \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

IX. Gyenge folytonosság: Ugyanúgy, mint az V. lépésben kapjuk, hogy ha $t_n \to t$, akkor $Au(t_n) \rightharpoonup Au(t)$.

X. Gyenge derivált: Legyen $t, s \geq 0$, $\mu > 0$, és $w \in H$. Ekkor

$$\langle u_\mu(t), w\rangle = \langle u_0, w\rangle - \int_0^t \langle A_\mu u_\mu(s), w\rangle\,ds.$$

Mivel (7) szerint

$$\Big|\langle A_\mu u_\mu(s), w\rangle\Big| \leq \|Au_0\|\|w\|,$$

és mivel $A_\mu = AR_\mu$, az V. lépés szerint $A_\mu u_\mu(t) \rightharpoonup Au(t)$, amint $\mu \downarrow 0$. A IV. lépésben mondottak szerint $u_\mu(t) \to u(t)$, amint $\mu \downarrow 0$. Ezért a majorált konvergencia tétel szerint $\mu \downarrow 0$ esetén

$$\langle u(t), w\rangle = \langle u_0, w\rangle - \int_0^t \langle Au(s), w\rangle\,ds.$$

Mivel a IX. lépés szerint az integrandus folytonos,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\langle u(t+h), w\rangle - \langle u(t), w\rangle}{h} = -\langle Au(t), w\rangle.$$

Ez azt jelenti, hogy $u'(t) = -Au(t)$, ahol a derivált gyenge értelemben értendő.

Az alábbi következmény rávilágít a nemexpanzív félcsoportokkal való kapcsolatra.

30.24. Következmény. *Az*

$$S(t)u_0 = u(t), \quad \textit{ha} \quad t \geq 0, \quad u_0 \in \operatorname{dmn}(A)$$

definícióval $S(t)$, $t \geq 0$ egy nemexpanzív félcsoport $\operatorname{dmn}(A)$*-n, amely egyértelműen kiterjeszthető egy* $\operatorname{dmn}(A)$*-on értelmezett nemexpanzív félcsoporttá. Az $S(t)$, $t \geq 0$ generátora* $\operatorname{dmn}(A)$*-on $-A$, azaz*

$$-Aw = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)w - w}{t}.$$

Az $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in \overline{\operatorname{dmn}(A)}$ függvényt a differenciálegyenlet *általánosított megoldás*ának nevezzük.

Bizonyítás. I. Legyen $u_0, v_0 \in \operatorname{dmn}(A)$ és $t, s \geq 0$. Megmutatjuk, hogy

$$S(0)u_0 = u_0, \qquad S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0, \qquad \big\|S(t)u_0 - S(t)v_0\big\| \leq \|u_0 - v_0\|,$$

és $t \mapsto S(t)u_0$ folytonos a $[0, \infty[$-n. Definíció szerint, u az egyetlen megoldása az

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad u(0) = u_0$$

problémának. Legyen rögzített s-re v a probléma megoldása $v(0) = u(s)$ kezdeti feltétellel. Az egyértelműségből következik a függvényegyenlet. Az egyenlőtlenség az unicitás bizonyításánál levezetett (6) egyenlőtlenségből következik, a folytonosság a definícióból.

II. Mivel $S(t)$ nemexpanzív, egyértelműen kiterjeszthető $\overline{\operatorname{dmn}(A)}$-ra minden t-re. Innen határátmenettel a kiterjesztésre is teljesül a fenti négy feltétel.

III. Az előző bizonyítás VIII. lépése szerint

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)u_o - u_0}{h} = -Au_0, \quad \text{ha} \quad u_0 \in \operatorname{dmn}(A).$$

Ha $-B$ az $S(t)$ generátora $\overline{\operatorname{dmn}(A)}$-on, akkor $A \subset B$. De mivel $\mathbb{I} - S(t)$ monoton,

$$\big\langle u - S(t)u - (v - S(t)v), u - v \geq 0 \quad \text{minden} \quad u, v \in \overline{\operatorname{dmn}(A)}\text{-ra}.$$

Differenciálva t szerint $t = 0$-ban $\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq 0$, így B monoton. Mivel A maximális monoton, $B = A$.

30.25. Evolúciós hármas. Egy „$V \subset H \subset V^*$" *evolúciós hármas* alatt az alábbiakat értjük:

(1) V valós, szeparábilis, reflexív Banach-tér;

(2) H valós, szeparábilis Hilbert-tér;

(3) a $V \subset H$ beágyazás folytonos, azaz valamely c konstansra $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$ minden $v \in V$-re és V sűrű H-ban.

Vegyük észre, hogy a $\bar{h}(v) = \langle v, h\rangle$ összefüggéssel definiált lineáris funkcionál folytonos V-n minden $h \in H$-ra és a $V \subset H$ beágyazás folytonossága miatt teljesül, hogy

$$\big|\langle v, h\rangle\big| \leq \|v\|_H \|h\|_H \leq c\|v\|_V \|h\|_H.$$

Ez azt jelenti, hogy $\bar{h} \in V^*$, így $H \subset V^*$ és a beágyazás folytonos, mert $\|\bar{h}\|_{V^*} \leq c\|h\|_H$. Megmutatjuk, hogy a $h \mapsto \bar{h}$ leképezés injektív is. Ha $\bar{h} = 0$, akkor $\langle h, v\rangle = 0$ minden $v \in V$-re. De V sűrű H-ban, így $h = 0$. Az evolúciós hármasban a $H \subset V^*$ beágyazáson a $h \mapsto \bar{h}$ beágyazást értjük.

Az evolúciós hármas fogalmát főleg evolúciós egyenleteknél fogjuk használni.

30.26. Példa. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $V = \mathcal{W}_0^{m,p}(G)$, $H = \mathbb{L}^2(G)$, ahol $2 \leq p < \infty$ és $m \geq 1$.

30.27. Kapcsolat a Friedrichs-kiterjesztéssel. Legyen $A \in H \to H$ lineáris szimmetrikus pozitív operátor a H valós Hilbert-téren, $A_F \in H \to H$ a Friedrichs-kiterjesztése:

$$A \subset A_F \subset A_E, \quad H_E \subset H \subset H_E^*, \quad A_E \colon H_E \to H_E^*, \quad \operatorname{dmn}(A_F) \subset H_E.$$

A bizonyításban a $H_E \subset H \subset H_E^*$ evolúciós hármast használtuk. Ekkor A_F monoton, és mivel $\operatorname{rng}(\mathbb{I} + A_F) = H$, maximális monoton.

30.28. Állítás. *Legyen $A \in H \to H$ lineáris szimmetrikus monoton operátor a H valós Hilbert-téren, azaz $\langle Au, u\rangle \geq 0$ minden $u \in \operatorname{dmn}(A)$-ra. Az A pontosan akkor maximális monoton, ha önadjungált.*

Bizonyítás. Ha A önadjungált, akkor minden $\lambda < 0$ a rezolvens halmazban van, így $\operatorname{rng}(\mathbb{I} + A) = H$, azaz A maximális monoton. Megfordítva, legyen A maximális monoton. Ekkor $B = \mathbb{I} + A$ pozitív. Legyeb B_F a B Freidrichs-kiterjesztése. Ekkor $A \subset B_F - \mathbb{I}$. A $B_F - \mathbb{I}$ operátor önadjungált. Mivel A maximális monoton, nincs valódi monoton kiterjesztése. Így $A = B_F - \mathbb{I}$, azaz A önadjungált.

30.29. Általánosítás nemlineáris evolúciós egyenletekre. *Legyen*

(1) *$V \subset H \subset V^*$ evolúciós hármas;*

(2) *az $A_E \colon V \to V^*$ leképezés monoton, hemifolytonos és kényszerítő (és így a Browder–Minty-tétel szerint szürjektív);*

(3) *$A = \left(A_E^{-1}|_H\right)^{-1}$.*

Tekintsük az alábbi egyenleteket:

(4)
$$u(0) = u_0, \quad u'(t) + A_E u(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t > 0;$$

(5)
$$u(0) = u_0, \quad u'(t) + Au(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t > 0;$$

(6)
$$\frac{d}{dt}\langle u(t), w\rangle + a(u(t), w) = 0, \quad \text{ha} \quad W \in H,\ t > 0,$$

ahol $a(u, v) = A_E uv$.

Ekkor

(7) *az $A \in H \to H$ operátor maximális monoton;*

(8) *a (4) egyenlet minden megoldása megoldása (5)-nek. Minden $u_0 \in \operatorname{dmn}(A)$-ra az (5) egyenletnek egyetlen megoldása van, a deriváltat gyenge értelemben értve, és ez megoldása (6)-nak is.*

Bizonyítás. A monoton, $A_E + \mathbb{I} \colon V \to V^*$ monoton, hemifolytonos és kényszerítő, így a Browder–Minty-tétel szerint szürjektív, amiből $A + \mathbb{I}_H$ értékkészlete H, így A maximális monoton.

30.30. Alkalmazás kvázilineáris parabolikus egyenletekre. A

$$G\times]0,\infty[:\ u_t+Lu=0,\quad G:\ u(x,0)=u_0,\quad \partial G\times]0,\infty[:\ \partial^\beta u=0,\quad \text{ha}\quad |\beta|<m$$

vegyes feladatot tekintjük, ahol $G\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és

$$Lu(x,t)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha A_\alpha(x,\partial u(x,t)).$$

Legyen $H=\mathbb{L}^2(G)$, $2\le p<\infty$, és $V=\mathcal{W}_0^{m,p}$. Tegyük fel, hogy a differenciáloperátor teljesíti a 30.15 pont (H1)–(H4) feltételeit. Legyen

$$a(u,v)=\int_G\sum_{|\alpha|\le m}A_\alpha(x,\partial u(x))\partial^\alpha v(x)\,dx.$$

Szokás szerint, $u(0)=u_0$ kezdeti feltétellel parciális integrálással kapjuk a

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),w\rangle_H+a(u(t),w)=0,\quad \text{ha}\quad w\in V,\ 0<t<\infty$$

általánosított problémát. Létezik egyetlen monoton, folytonos és kényszerítő $A_E\colon V\to V^*$ operátor, amelyre

$$A_Euv=a(u,v),\quad \text{ha}\quad u,v\in V.$$

Legyen $A=(A_E^{-1}|_H)$, és tekintsük az

$$u(0)=u_0,\qquad u'(t)+Au(t)=0,\quad \text{ha}\quad 0<t<\infty$$

problémát. Eredményeink szerint ha $u_0\in\operatorname{dmn}(A)$, akkor létezik egyértelmű megoldás, a deriváltat gyenge értelemben értve, továbbá minden $u_0\in\overline{\operatorname{dmn}(A)}$-ra $u(t)=S(t)u_0$ egy általánosított megoldás. Megmutatható, hogy ha minden A_α egy $\mathcal{C}^\infty$-függvény, akkor $\mathcal{D}(G)\subset\operatorname{dmn}(A)$ és $\overline{\operatorname{dmn}(A)}=\mathbb{L}^2(G)$.

Irodalom

Mint a bevezetésben már volt róla szó, az anyag megértéséhez elegendő néhány halmazelméleti alapfogalomnak, valamint az analízis és lineáris algebra alapjainak ismerete, például úgy, ahogyan Rudin [139], illetve Halmos [62] könyvében szerepel. Természetesen más, hasonló szintű könyvek is jól használhatók, például a kifejezetten fizikusok számára írt Matolcsi–Gruber–Keresztfalvi [112] jegyzetsorozat, melynek anyaga részben át is fedi ezen könyv anyagát, a tanárszakosok számára írt kitűnő Laczkovich–T. Sós [100] könyv, a jól bevált Leindler–Schipp [103] és Pál–Schipp–Simon [122] jegyzetek, vagy a nagyobb anyagot tartalmazó Petruska [127] jegyzet, amely matematikus hallgatók számára készült. Az olvasó figyelmébe ajánlom még a Gelbaum–Olmsted [51] „ellenpéldatárat". Minden szükséges fogalom megtalálható a szerzőnek az ELTE IK Könyvtár honlapjáról szabadon letölthető [74] és [72] könyveiben.

Az alábbiakban az irodalom betűrendes felsorolása előtt utalunk az egyes témaköröket részletesebben tárgyaló munkákra, elsősorban a magyar nyelven is hozzáférhető irodalomra fordítva figyelmet. A matematikát a teljesség igényével tárgyaló, de töredékesen maradt munka Bourbaki [14] könyvsorozata. Bourbaki álnév, a könyvsorozatot fiatal francia matematikusok egy csoportja írta. A csoport egyik legismertebb tagja, Jean Dieudonné külön írt egy kilenc kötetes, nagyon alapos könyvet „A modern analízis alapjai" címmel (Dieudonné [27]). A Bourbaki csoport munkája ellen azt szokás felhozni, hogy a tárgyalásmód nagyon absztrakt. A matematika történetét tekinti át Dieudonné [29] könyve. A funkcionálanalízisnek – és így a modern analízis legfontosabb gondolatai fejlődésének – történetét tárgyalja Dieudonné [28] könyve. A tiszta matematika látképét adja Dieudonné [26] könyve.

A matematikai fizika klasszikus könyve: Frank–Mises [43]. Bár elsősorban nemlineáris funkcionálanalízissel foglalkozik Zeidler [179] négykötetes munkája, mégis inkább itt kell említenünk, mivel széles áttekintést ad, számos alkalmazással és rengeteg hivatkozással, utolsó kötete pedig elsősorban fizikával foglalkozik.

A modern témakörökhöz feladatokat Kirillov–Gvisiani [85] példatárában találhatunk. Elsősorban parciális differenciálegyenletekkel foglalkozik, de más jellegű feladatokat is tartalmaz a Vlagyimirov [171] példatár. Klasszikusabb témakörökkel kapcsolatban a régebbi példatárak is tartalmaznak feladatokat, lásd például Gjunter–Kuzmin [54] és Gyemidovics [57].

Mérték-és integrálelmélet. A leggyakrabban idézett könyv valószínűleg Halmos [61] munkája. Majdnem az összes itt felsorolt tételt bizonyítással tárgyalja a Járai [71] könyv. Jóval nagyobb anyagot ölel fel a Laczkovich [98] jegyzet. Feltétlenül érdemes elolvasni a gondolatébresztő Laczkovich [99] illetve Oxtoby [120] könyveket. Egy egészen más felépítést alkalmaz a Riesz–Szőkefalvi-Nagy [137] könyv, valamint a Szőkefalvi-Nagy [164] jegyzet. (Ez a felépítés adja az alapját Bourbaki

[14] és Dieudonné [27] tárgyalásmódjának is.) Mértékelméleti feladatok is találhatók Kirillov–Gvisiani [85] példatárában. A valószínűségszámítás első szigorú megalapozását tartalmazza Kolmogorov [88] kis könyve. A mértékelmélet egy másik felépítése megismerhető a Daróczy [23] jegyzetből. Számos más témával foglalkozó könyv is tartalmaz mértékelméleti anyagot, például Kolmogorov–Fomin [89] könyve. Valószínűségszámításról magyarul olvasható Feller [38] klasszikus könyvének első kötete, Rényi [135], Meszéna–Ziermann [113], Gihman–Szkorohod [53], Cseke [19] könyve és a Bognár–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász [12] példatár. Idegen nyelven klasszikus mértékelméleti munka Saks [143] könyve. Igen tömör fogalmazású Federer [37] könyve, amelynek 2. és 3. fejezete elsősorban geometriai jellegű anyagot tartalmaz. Morgan [117] könyve szemléletes alapokat ad a geometriai mértékelmélethez. Más, mértékelméleti anyagot is tartalmazó könyvek: Hewitt–Stromberg [66], Royden [138], Dunford–Schwartz [32].

Funkcionálanalízis. Kiváló topológia könyv magyarul Schubert [145] könyve. Általános topológiával kapcsolatban a szokásos hivatkozás Kelley [82] könyve. Modernebb Engelking [33]. Szemléletes bevezetés az algebrai topológiába Boltyanszkij–Jefremovics [13]. A geometriai kapcsolatra és a metrikus terekre koncentrál Engelking–Sieklucki [34]. Az operátorok elméletének nagyszerű tankönyve, amin egy nemzedék nevelkedett, Riesz–Szőkefalvi-Nagy [137] munkája. A funkcionálanalízis alapjait tárgyaló kitűnő bevezetés Losonczi [104] jegyzete. Csak a kompakt operátorokat tárgyalja a Losonczi [105] házi jegyzet. Haszonnal forgatható Kolmogorov–Fomin [89] könyve. Rengeteg feladat mellett az elméletet is összefoglalja Kirillov–Gvisiani [85] ragyogó példatára. A kvantummechanikai alkalmazások klasszikus tárgyalása Neumann [119] híres könyve. Idegen nyelven nagyon sok könyv hozzáférhető. Hatalmas munka a lineáris operátorokról Dunford–Schwartz [32]. Funkcionálanalízis könyvnek is tekinthető Dieudonné [27] könyve. A nemlineáris funkcionálanalízis modern bibliája Zeidler [179] ötkötetesre tervezett munkája (csak négy kötet jelent meg, az utolsó kötet főleg fizika). Nagyon érdekes, a legfontosabb gondolatokat összefoglaló könyvek Zeidler [180] és [181]. Bourbaki [14] munkájának egyik könyve topológiáról, egy másik topologikus vektorterekről, egy harmadik pedig a Banach-algebrák spektrálelméletéről szól. A funkcionálanalízis történetének nagyon érdekes tárgyalását adja Dieudonné [28]. Az operátorfélcsoportokra koncentrál Hille–Phillips [67] funkcionálanalízis könyve. Fontos könyv Kato [81], és ugyanígy Yosida [176] munkája. Más, ajánlható könyvek Triebel [168], [169], Reed–Simon [134], Richtmeyer [136], Schwarz [146], [147].

Vektoranalízis. A differenciálszámítást, a Stieltjes-integrált és a görbe menti integrált véges dimenzióban a legtöbb bevezető analízis könyv tárgyalja. Tetszőleges dimenzióban dolgozik például Zeidler [179] könyve. Elemi bevezetés a differenciálgeometriába a Szőkefalvi-Nagy–Gehér–Nagy [166] könyv. A sima sokaságok elméletéről a Szenthe [161] könyvben, a Riemann-geometriáról pedig a Szenthe [160] könyvben olvashatunk. A szokásos hivatkozás Kobayashi–Nomizu [90] de differenciálható sokaságokról, beleértve a fibrált tereket is, szóló könyvnek is tekinthető Dieudonné [27] könyve. A fizikával való kapcsolat szerepet kap a Choquet-Bruhat–DeWitt-Morette–Dillard-Bleich [16] könyvben. A differenciálható sokaságokon felépíthető egy újabb kohomológia elmélet, erről Dieudonné [27] vagy Federer [37] könyvében olvashatunk.

Komplex függvénytan. Magyar nyelven jó bevezetés Szőkefalvi-Nagy [165] jegyzete. Nagyon részletező Duncan [31] könyve. Petruska [126] jegyzete jóval nagyobb anyagot tartalmaz. Elsősorban az alkalmazásokra koncentrál Fuksz–Sabat [46] könyve. Más nyelveken nagyon sok könyv hozzáférhető. Dieudonné [27] könyve a több valós illetve komplex változós analitikus függvényekkel és sokaságokkal is foglalkozik. Egy változóra, valamint a valós függvénytannal való kapcsolatra koncentrál Rudin [141] könyve. Talán legtöbbet Ahlfors [2] könyvét idézik.

Fourier-elmélet. Az alapvető tényeket megtaláljuk a Szőkefalvi-Nagy [164] könyvben. Részletesebben lásd Pál [121] jegyzetét. Magyar nyelven hozzáférhető még Mikolás [115] könyve. Az absztrakt harmonikus analízis kiváló monográfiája Hewitt–Ross [65] könyv, illetve Kirillov [84] könyve. Óriási anyag talalható Dieudonné [27] könyvében is. Valószínűségi változók Fourier-transzformáltjaival kapcsolatban klasszikus munka Lukacs [106] könyve.

Variációszámítás. Magyar nyelven Kósa [93] jegyzete, illetve Kósa [92] könyve a legegyszerűbb problémákat tárgyalják aprólékos gonddal. A fontos eredmények bizonyítások nélküli áttekintése megtalálható a Kósa [94] szerkesztésében készült könyvben. A feltételes szélsőértékszámítással foglalkozik igen általános keretek között Páles [123] házi jegyzete. Zeidler [179] a variációszámítással is foglalkozik. Idegen nyelvű irodalmat ezen munkák irodalomjegyzékében találhatunk.

Közönséges differenciálegyenletek. Pontrjagin [130], illetve Arnold [4] könyvét ajánljuk elsősorban a magyarul is elérhető könyvek közül. Mélyebb ismereteket ad Arnold [5] másik könyve. Az Arnold [6] könyv a mechanikával való kapcsolattal foglalkozik. A Kósa [91] jegyzet csak a legegyszerűbb eseteket tárgyalja. Rengeteg idegen nyelvű könyv közül Coddington–Levinson [17] könyve a szokásos hivatkozás. Igen alapos de régies Kamke [77] munkája. Zwillinger [183] „szakácskönyve" sok receptet és hivatkozást tartalmaz.

Parciális differenciálegyenletek. Magyar nyelven elsősorban Vlagyimirov [170] könyvét és a hozzá tartozó Vlagyimirov [171] példatárat ajánljuk. Pontosabb, de nehezebben olvasható munka Simon–Baderko [150] könyve. Az elsőrendű egyenletekkel Székelyhidi [159] házi jegyzetéből ismerkedhetünk meg. A klasszikus tárgyalásmódot követik Czách–Simon [22] és Simon [149] jegyzetek. A modern tárgyalásmóddal kapcsolatban idegen nyelven Zeidler [179] könyvének I. és II. kötetét, Wloka [175] valamint Hörmander [68] könyvét ajánljuk. Újabb szokásos hivatkozás Evans [35].

Numerikus módszerek. Minden anyagrésznél tárgyaljuk az adott anyagrészhez szorosan kapcsolódó numerikus eljárásokat. A numerikus módszerek iránt érdeklődő olvasónak első ismerkedésként Henrici [64] könyvét ajánljuk. Tömör, jól átgondolt összefoglaló Szidarovszky [162] munkája. Bahvalov [7] könyvét a sok gyakorlati tapasztalat ismertetése, és a gondos elemzések teszik igen értékessé. Jegyzetek – például Kátai [79], Kátai [80], vagy a programozók számára írt Móricz [118] illetve Dringó [30] jegyzetek – is jól használhatók. Szokásos hivatkozás Ralston [133] könyve. A variációszámítás numerikus módszereit Michlin [114] könyve tárgyalja. A parciális differenciálegyenletek megoldásának – az eddig felsorolt munkákban nemigen tárgyalt – numerikus módszereivel

foglalkozik Marcsuk [107] és Szamarszkij [157] könyve, valamint Stoyan [156] jegyzete. Számos numerikus módszer és számtalan hivatkozás található Zeidler [179] négykötetes munkájában.

Fizika. Bár explicit módon nem tételezek fel – néhány feladat kivételével – fizikai, kémiai, vagy műszaki ismereteket, természetesen a természettudományok ismerete, szemléletmódja, elsősorban a fizika ismerete nagyon megkönnyíti az anyag megértését. Történeti áttekintésként Simonyi [151] csodálatos könyvét, a kísérleti fizika összefoglalásaként Budó [15] munkáját, az elméleti fizikába történő bevezetésként pedig Feynman–Leighton–Sands [41] híres tankönyvét forgattam sokat. Számos magyar kvantummechanika könyv közül Geszti [52] ajánlató (szabadon letölthető). A kapcsolódó fizikai anyag mélyebb tanulmányozásához elsősorban Zeidler [179] könyvének – a fizikai problémákat a matematikus szemszögéből tárgyaló – fizikai részeit használtam. Talán az elmaradt ötödik kötet pótlására Zeidler elkezdett írni egy hat kötetesre tervezett monográfiát [182], amely híd kívánt lenni a matematika és a fizika között. Sajnos, csak három kötet készült el, de ez is nagyon hasznos. Stenderd könyv Landau–Lifsic [101] monográfiája. Egyes kérdéseket a Fényes [39], Simonyi [152], Csurgay–Simonyi [21], Kittel [86], Sólyom [154], Gombás–Kisdi [55], Fényes (szerk.) [40] illetve Horváth–Trócsányi [69] könyvekben tanulmányoztam. Rendkívül érdekes a Penrose [125] (szabadon letölthető) könyv, amely szemléletes, de nem elemi áttekintés a részecskefizikáról és az ott felhasznált matematikáról.

[1] Aczél J.: *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, 1966.

[2] Ahlfors L. V.: *Complex analysis.* McGrow-Hill, 1966.

[3] Alexandrov, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[4] Arnold, V. I.: *Közönséges differenciálegyenletek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[5] Arnold, V. I.: *A differenciálegyenletek elméletének geometria fejezetei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988.

[6] Arnold, V. I.: *A mechanika matematikai módszerei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[7] Bahvalov, N. Sz.: *A gépi matematika numerikus módszerei. Analízis, algebra, optimalizálás, közönséges differenciálegyenletek.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1977.

[8] Benedetto, J. J.: *Spectral Synthesis.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[9] Benedetto, J. J.: *Real Variable and Integration.* Teubner, 1976.

[10] Benedetto, J. J.: *Harmonic Analysis and Applications.* CRC Press, New York, 1997.

[11] Bogmér A.–Horváth M.–Joó I.: *Riesz bases from exponentials and some of its applications.* Mathematical Institute of ELTE, Budapest, 1986.

[12] Bognár J.-né–Mogyoródi J.–Prékopa A.-Rényi A.–Szász D.: *Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[13] Boltyanszkij, V. G.–Jefremovics, V. A.: *Szemléletes topológia.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

[14] Bourbaki, N.: *Éléments de Mathématique. Théorie des Ensembles. Algèbre. Topologie générale. Functions d'une varieble réelle. Espaces vectoriels topologiques. Intégration. Algèbre commutative. Variétés différentielles et analytiques. Groupes et algèbres de Lie. Théories spectrales.* Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970. (Előző kiadások: 1957-től. Oroszul és angolul is.)

[15] Budó Á.: *Kísérleti fizika I–III.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[16] Choquet-Bruhat, Y.–DeWitt-Morette, C.–Dillard-Bleich, M.: *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland, 1977.

[17] Coddington, E. A. – Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955.

[18] Cormen, T. H.–Leiserson, C. E.–Rivest, R. L.–Stein, C.: *Új algoritmusok.* Scolar Informatika, Budapest, 2003.

[19] Cseke V.: *A valószínűségszámítás és gyakorlati alkalmazásai.* Dacia, Kolozsvár-Napoka, 1982.

[20] Csirmaz L.: *Nemsztenderd analízis.* TypoTEX, Budapest, 1999.

[21] CsurgayÁ.–Simonyi K.: *Az információtechnika fizikai alapjai. Elektronfizika.* BME Mérnöktovábbképző Intézet, Budapest, 1997.

[22] Czách L.–Simon L.: *Parciális differenciálegyenletek I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. J3-300.

[23] Daróczy Z.: *Mérték és integrál. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. J3-1005.

[24] Deák I., *Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[25] Dewaney, R. L.: *An introduction to chaotic dynamical systems.* Benjamin, 1986.

[26] Dieudonné, J.: *A Panorama of Pure Mathematics.* Academic Press, New York – London, 1982.

[27] Dieudonné, J., *Grundzüge der modernen Analysis I–IX.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971–1988.

[28] Dieudonné, J.: *History of Functional Analysis.* North-Holland Publishing Company, 1981.

[29] Dieudonné, J.: *Geschichte der Mathematik 1700–1900. Ein Abriss.* VEB Deutscher Verlag der Wissesschaften, Berlin, 1985.

[30] Dringó L.: *Numerikus analízis I–II. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[31] Duncan, J.: *Bevezetés a komplex függvénytanba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[32] Dunford, N.–Schwartz, J. T.: *Linear operators I–III.* Wiley-Interscience, New York–London–Sydney–Toronto, 1958–1971.

[33] Engelking, R.: *General topology.* Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[34] Engelking, R.–Sieklucki, K.: *Topology. A Geometric Approch.* Heldermann Verlag Berlin, 1992.

[35] Evans, L. C.:: *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[36] Farkas M.: *Speciális függvények.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

[37] Federer, H.: *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

[38] Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications I–II.* John Wiley & Sons, New York, 1971. Az első kötet magyarul is: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

[39] Fényes I., (szerk.) *Modern fizikai kisenciklopédia.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1971.

[40] Fényes T., (szerk.) *Atommagfizika I.–II.* Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2005, 2012.

[41] Feynman, R. P.–Leighton, R. B.–Sands, M.: *Mai fizika I–X.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

[42] Forsythe, G. E.–Moler, C. B.: *Lineáris algebrai problémák megoldása számítógéppel.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1976.

[43] Frank, Ph.–Mises, R. E.: *A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I–II.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966–1967.

[44] Fried E.: *Általános algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[45] Fuchs L.: *Algebra. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[46] Fuksz, B. A.–Sabat, B. V.: *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

[47] Gelfand, I. M.: *Előadások a lineáris algebrából.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

[48] Gathen, v. z., J.–Gerhard, J.: *Modern computer algebra.* Cambridge University Press, 1999.

[49] Geddes, K. O.–Czapor, S. R.–Labahn, G.: *Algorithms for computer algebra.* Kluwer, 1992.

[50] Gelbaum, B. R.: *Problems in analysis.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.

[51] Gelbaum, B. R.–Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis.* Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.

[52] Geszti T.: *Kvantummechanika.* TypoTeX, Budapest, 2007.

[53] Gihman, J. I.–Szkorohod, A. V.: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[54] Gjunter, N. M.–Kuzmin, R. O.: *Felsőbb matematikai példatár I–III.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

[55] Gombás P.–Kisdi D.: *Bevezetés az elméleti fizikába I–II.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

[56] Graham, R. L.–Knuth, D. E.–Patashnik, O.: *Konkrét Matematika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988.

[57] Gyemidovics, B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[58] Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[59] Hajnal A.–Hamburger P.: *Halmazelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[60] Halmos P. R.: *Introduction to Hilbert space.* Chelsea Publishing Company, New York 1, N.Y., 1957.

[61] Halmos P. R.: *Mértékelmélet.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[62] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[63] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet.* Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[64] Henrici, P.: *Numerikus analízis.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1985.

[65] Hewitt, E.–Ross, K. A.: *Abstract harmonic analysis I., II.* Springer, 1963, 1970.

[66] Hewitt, E.–Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1965.

[67] Hille, E.–Phillips, R. S.: *Functional analysis on semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, 1957.

[68] Hörmander, H.: *The Analysis of Linear Partial Differencial Operators I–IV.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokio, 1983.

[69] Horváth D.–Trócsányi Z.:: *Bevezetés az elemi részek fizikájába.* TypoTEX, Budapest, 2021.

[70] Hurewicz, W.–Wallman, H.: *Dimension Theory.* Princeton University Press, Princeton, 1948.

[71] Járai A.: *Mérték és integrál.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002. Letölthető az ELTE IK könyvtár honlapjáról.

[72] Járai A.: *Bevezetés a matematikába.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006. Letölthető az ELTE IK könyvtár honlapjáról.

[73] Járai A.: *Modern alkalmazott analízis.* TypoTEX, Budapest, 2007. Letölthető az ELTE IK könyvtár honlapjáról.

[74] Járai A.: *Kalkulus.* Eötvös Kiadó, Budapest, 2013. Letölthető az ELTE IK könyvtár honlapjáról.

[75] Járai A.: *Kedvenc matematikai kísérleteim.* Budapest, 2024. Letölthető az ELTE IK könyvtár honlapjáról.

[76] Jegorov, I. P.: *Geometria.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[77] Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, I–II.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.–G., Leipzig, 1951.

[78] Kantor, I. L.–Szolodovnyikov, A. Sz.: *Hiperkomplex számok.* Gondolat kiadó, Budapest, 1985.

[79] Kátai I.: *Numerikus analízis. Kézirat, ELTE TTK.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[80] Kátai I.: *Numerikus analízis. Kézirat, ELTE TTK.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[81] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1966.

[82] Kelley, J. L.: *General topology.* D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1955.

[83] Kingman, J. F. C.–Taylor, S. J.: *Introduction to measure and probability.* University Press, Cambridge, 1966.

[84] Kirillov, A. A.: *Elements of the theory of representations.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[85] Kirillov, A. A.–Gvisiani, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[86] Kittel, C.: *Bevezetés a szilárdtest-fizikába.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[87] Knuth, D. E.: *The art of computer programming. Vol. 1, 2, 3. Third edition.* Addison–Wesley, 1998.

[88] Kolmogorov, A. N.: *A valószínűségszámítás alapfogalmai.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[89] Kolmogorov, A. N.–Fomin, Sz. V.: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[90] Kobayashi, S.–Nomizu, K.: *Fundations of Differential Geometry I–II.* Interscience Publishers, 1963, 1969.

[91] Kósa A.: *Differenciálegyenletek.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. J3-569.

[92] Kósa A.: *Variációszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[93] Kósa A.: *Variációszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. J3-217.

[94] Kósa A. (Szerk.): *Optimumszámítási modellek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[95] Kuros, A. G.: *Felsőbb algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[96] Kurutzné K. M.–Scharle P.: *A végeselem módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[97] Kurzweil, J.: *Nichtabsolut konvergente Integrale.* Teubner, 1980.

[98] Laczkovich M.: *Valós függvénytan.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995.

[99] Laczkovich M.: *Sejtés és Bizonyítás.* TypoTEX, Budapest, 1998.

[100] Laczkovich M.–T. Sós V.: *Analízis I.–II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005–2007.

[101] Landau, L. D.–Lifsic, E. M.: *Elméleti fizika I–X.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[102] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Chelsea Publishing Company Inc., New York, 1948.

[103] Leindler L.–Schipp F.: *Analízis I. Egységes jegyzet. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[104] Losonczi L.: *Funkcionálanalízis I. KLTE TTK jegyzet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. J3-1170.

[105] Losonczi L.: *Teljesen folytonos operátorok Hilbert térben. Kézirat.* KLTE TTK. Debrecen, 1981. Ny.sz.: 307/81.

[106] Lukacs, E.: *Characteristic functions.* Griffin, London, 1969.

[107] Marcsuk, G. I.: *A gépi matematika numerikus módszerei. Parciális differenciálegyenletek.* Műszaki kiadó, Budapest, 1976.

[108] Máté L.: *Funkcionálanalízis.* Műszaki kiadó, Budapest, 1972.

[109] Máté L.: *Hilbert Space Methods in Science and Engineering.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

[110] Matolcsi T.: *Matematikai fizika I–II.* ELTE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[111] Matolcsi T.: *A Concept of Mathematical Physics I–II.* Akadémiai kiadó, Budapest, 1984.

[112] Matolcsi T.–Gruber T.–Keresztfalvi T.: *Analízis I–VIII.* ELTE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990. J3-1455, 1456, 1457, 1458, 1463. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995–1997.

[113] Meszéna Gy.–Ziermann M.: *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[114] Michlin, S. G.: *Numerische Realisierung von Variationsmethoden.* Akademia Verlag, Berlin, 1969.

[115] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[116] Mikusiński, J.: *Operátorszámítás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.

[117] Morgan, F.: *Geometric measure theory. A beginner's guide.* Academic Press, 1988.

[118] Móricz F.: *Numerikus analízis I–II.* JATE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990–1991.

[119] Neumann J.: *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[120] Oxtoby, J. C.: *Measure and category.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1971.

[121] Pál L. Gy.: *Ortogonális függvénysorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. J3-663.

[122] Pál J.–Schipp F.–Simon P.: *Analízis II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991. J3-960.

[123] Páles Zs.: *Feltételes szélsőértékszámítás.* Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1989.

[124] Penrose R.: *Road to Reality.* 2007. A .pdf fájl letölthető.

[125] Penrose, R.: *Techniques of Differential Topology in Relativity.* SIAM, Philadelphia, PA., 1972.

[126] Petruska Gy.: *Komplex függvénytan. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. J3-1288.

[127] Petruska Gy.: *Analízis I–II. Egyetemi jegyzet.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998–1999.

[128] Petz D.: *Lineáris analízis.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.

[129] Pólya Gy.: *Matematikai módszerek a természettudományokban.* Gondolat, Budapest, 1984.

[130] Pontrjagin, L. Sz.: *Közönséges differenciálegyenletek.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[131] Popper Gy.: *A végeselem módszer matematikai alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[132] Potter, M. H.–Morrey, C. B.: *A first course in real analysis.* Springer, 1977.

[133] Ralston, A.: *Bevezetés a numerikus analízisbe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.

[134] Reed, M.–Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics I–IV.* Academic Press, New York–London, 1972–1979.

[135] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[136] Richtmeyer, R.: *Principles of advanced mathematical physics I–II.* Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1978, 1981.

[137] Riesz F.–Szőkefalvi-Nagy B.: *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[138] Royden, H. L.: *Real Analysis.* Macmillan Co., New York, 1963.

[139] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[140] Rudin, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[141] Rudin, W., *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

[142] Safarevics, I. R.: *Algebra.* Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

[143] Saks, S.: *Theory of the integral.* Warszawa, G. E. Stechert Co., New York, 1937.

[144] Schipp F.: *Waveletek.* Egyetemi jegyzet. ELTE, Budapest, 2003.

[145] Schubert, H.: *Topológia.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[146] Schwarz, A. S.: *Topology for Physicists.* Springer-Verlag, 1994.

[147] Schwarz, A. S.: *Quantum Field Theory and Topology.* Springer-Verlag, 1994.

[148] Sikorski, R.: *Advanced calculus.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.

[149] Simon L.: *Parciális differenciálegyenletek II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. J3-803.

[150] Simon L.–Baderko, E. A.: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[151] Simonyi K.: *A fizika kultúrtörténete.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1978.

[152] Simonyi K.: *Elméleti Villamosságtan.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[153] Simonyi E.: *Digitális szűrők.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[154] Sólyom J.: *A modern szilárdtestfizika alapjai I-II-III.* ELTE Eötvös Kiadó, 2010.

[155] Stein, E. M.–Weiss, G.: *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[156] Stoyan, G.: *Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990, J3–1432.

[157] Szamarszkij, A. A.: *Bevezetés a numerikus módszerek elméletébe.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[158] Száz Á.: *Komplex függvénytan. Egyetemi jegyzet.* KLTE TTK, Debrecen, 1974.

[159] Székelyhidi L.: *Elsőrendű parciális differenciálegyenletek. Kézirat.* KLTE TTK, Debrecen, 1980.

[160] Szenthe J.: *A Riemann-geometria elemei. Egyetemi jegyzet.* ELTE TTK, Budapest, 1998.

[161] Szenthe L.: *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[162] Szidarovszky F.: *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[163] Szobol, I. M.: *A Monte Carlo-módszerek alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[164] Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[165] Szőkefalvi-Nagy B.: *Komplex függvénytan. Egységes jegyzet. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. J3-434.

[166] Szőkefalvi-Nagy Gy.–Gehér L.–Nagy P.: *Differenciálgeometria.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[167] Thomas, G. B.–Weir, M. D.–Hass, J.–Giordano, F. R.: *Thomas-féle Kalkulus I–III.* Typotex, Budapest, 2006–2007.

[168] Triebel, H.: *Höhere Analysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[169] Triebel, H.: *Analysis und mathematische Physik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.

[170] Vlagyimirov, V. Sz.: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[171] Vlagyimirov, V. Sz.: *Parciális differenciálegyenletek feladatgyűjtemény.* Műszaki Könyvkiadó, 1980.

[172] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra I.–II.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1959.

[173] van der Waerden, B. L.: *Group Theory and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1974.

[174] Widder, D. V.: *The Laplace Transform.* Princeton University Press, 1972.

[175] Wloka, J.: *Partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[176] Yosida, K.: *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

[177] Zaanen, A. C.: *Integration.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

[178] Zaanen, A. C.: *Linear analysis.* Groningen, Amsterdam, 1953.

[179] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its Application, I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[180] Zeidler, E.: *Applied Functional analysis. Applications to Mathematical Physics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[181] Zeidler, E.: *Applied Functional analysis. Main Principles and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[182] Zeidler, E.: *Quantum Field Theory, I–III.* Springer-Verlag, 2009.

[183] Zwillinger, D.: *Handbook of differential equations.* Academic Press, Boston – San Diego – New York – Berkeley – London – Sydney – Tokyo – Toronto, 1989.

Mutató

a posteriori hibabecslés *96*
— priori becslés 535
— — hibabecslés *96*
ábécé *78*
Abel tételei *116*
Abel, Niels Henrik (1802–1829) 116, 308
ablak függvény *412*
ablak Fourier-transzformált *412*
abszolút érték 126, *309*
— folytonos *50*, *59*, 62, 64, 248
— konvergens *113*, 114, 121, 311
— stabil 511, *515*
$|\,|$ *112*
abszolútérték-homogén *112*, 113
Aczél János 624
adaptív Newton-módszer *390*
addíciós formulák *315*
additív *128*
additivitás *16*, *38*
adjungált 172, *180*, 188, 467
— egyenlet *503*, 503, 550
A halmaz feletti integrál *35*
∂A *79*
Ahlfors, Lars Valerian (1907–1996) 623–624
A-homotóp *96*
Aitken, Alexander Craig (1895–1967) 99, 383
Aitken Δ^2-módszere *99*, 515
Aitken-féle eljárás *383*
Aitken–Steffensen-iteráció *99*
Alaoglu, Leonidas (1914–1981) 145
alapharmonikus 364
alapmegoldás 518, *547*, 547–550
alapprobléma *469*
alaprendszer *498*, *501*
Alekszandrov, Pavel Szergejevics (1896–1982) 81
Alexander tétele *104*, 105
Alexander, James Waddell (1888–1971) 104
Alexandrov tétele 93
Alexandrov, Pavel Szergejevics (1896–1982) 93, 624
$\overline{A}$ *79*
$\boldsymbol{\alpha}$ *28*
$\binom{\alpha}{n}$ *377*
$\boldsymbol{\alpha}(m)$ *28*
$\boldsymbol{\alpha}(n)$ 65
algebra *11*
— alaptétele *328*
algebrai egyenletek megoldása *246*
— művelet 12, 128
— struktúra 74
— topológia *111*
algoritmus 399
A-limesz *148*
állapot 209, 212
állapotfüggvény 209, 212, *440*
általános elsőrendű egyenlet *520*
— impulzus 209, *426*, *522*
— koordináta 209, *426*
— megoldás 520
— sebesség *426*
általánosított derivált 537
— függvény 75, *540*
— Lagrange-lemma *538*, 546
— megoldás 518, 536, *546*, 546–547, 553, *617*
— Parseval-egyenlőség *161*
— probléma *564*, *610–611*
altér *77*, *81*, *102*, 113, 174
alternáló forma 299, *302*, 302
altér-topológia *102*
alulról korlátos *566*
— — operátor *180*
amplitúdó 364

analitikus 178, *309*, 313, 323, 326, 341, 343
— folytatás elve *313*
analitikusan folytatható 344
analízis 75
analóg számítógép 467
Andronov, Alexandr Alexandrovics (1901–1952) 510
Andronov–Witt-tétel *510*
anizotróp 527
annullált *142*
annullátor *142*
antiszimmetrikus forma *302*
anyawavelet *417*
approximáció *378*
approximációelmélet 120, *378*
approximációs eljárás *40*
— lemma 32
áramsűrűség 526
arccos *319*
arch *319*
arcsin *319*
arctg *319*
arg *317*
argumentum-elv *342*
Arkhimédész (i.e. 287–212) 14
Arnold, Vlagyimir Igorjevics (1937–2010) 467–468, 473, 495, 522, 623–624
arsh *319*
arth *319*
Arzèla–Ascoli-tétel *122*
Arzèla [arzelá], Cesare (1847–1912) 122
Ascoli, Guilio (1843–1896) 122
asszociált Legendre-függvény *583*
asszociatív 303
aszimptotikus formula 69
aszimptotikusan stabilis *507*, 507, 509
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *44*
Atiyah, Sir Michael 7
átlag 71
atlasz *257*
átmérő *78*
átviteli elv *85*, *469*, 501, 503, 614
automatikus lépésközváltás *70*
— program 512
autonóm egyenlet *470*, 479, 497, 520
— normál rendszer 509
— rendszer 508
Baderko, Elena A. 527, 623, 630
Bahvalov, Nyikolaj Szergejevics 68, 512–513, 623–624
Baire [bẽr], René-Louis (1874–1932) 14, 93
Baire-tétel *93*
bal invariáns *127*
— oldali derivált *228*
— — határérték 85
B-algebra *130*
balról folytonos 27
Banach–Alaoglu-tétel *145*
Banach-algebra 75, *130*
Banach-féle fixponttétel *94*, 238, 484, 534, 613
Banach, Stefan (1892–1945) 26, 40, 75, 94, 112, 130, 139, 141, 144–145, 155
Banach–Steinhaus-tétel *144*
Banach–Tarski-paradoxon *26*
Banach-tér 40–41, 112, *113*, 114, 121–122, 126, 129, 310, 497, 507, 509, 517
Banach-térbeli értékű 126
Banach-térbeli értékű függvények integrálja *40*
Banach tétele a korlátos inverzről *155*
bázis *80*, *118*, 121–122, 125, 161, 301–302, 304
bázisfüggvény *573*
bázis, mértéktéré *124*
B*-algebra *181*
beágyazás 121, *262*
Bellman-függvény *445*
Bellman, Richard Ernest (1920–1984) 445
belseje 25, *79*
belső peremérték-feladat *528*
— pont 25, *79*
— — módszerek *460*
— regularitás *22*
— szorzat 126, *126*, *156*, 182, 194, 391
— — tér *156*, 161–162, 173
$\langle ., . \rangle_m$ *568*
belső szorzat terek szorzata *157*
belső szorzat tér teljes burka *158*
Benedetto, John Joseph 624

Beppo Levi tétele *37*, 43
$\mathbb{B}_\varepsilon(A)$ *78*
$\mathbb{B}_\varepsilon(x)$ *78*
Bernoulli [bernuli], Daniell (1700–1782) 7, 348, 519
Bernoulli-egyenlet *475*
Bernoulli [bernuli], Jacob (1654–1705) 117, 322, 475
Bernoulli [bernuli], Johann (1667–1748) 433
Bernoulli-polinom *117*
Bernoulli-szám *117*, 322
Bernstein tétele *320*
Bernstein-operátor *135*
Bernstein-polinom *135*
Bernstein, Szergej Natanovics (1880–1968) 135, 320
Bessel-egyenlet *581*, 582
Bessel-egyenlőtlenség *161*
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846) 161, 581
Bessel-függvény *581*, 584
β-integrál *346*
bilineáris funkcionál 299
binormális *249*
biortogonális *420*
Blackman-ablak *412*
$\mathbb{B}^n$ *78*
Bogmér A. 624
Bognár Jánosné 622, 624
Bohman, Harald 1920–1996 134
Bohman–Korovkin-tétel *134*
Bohnenblust, Henri Frederic 140
Bohnenblust–Sobczyk-tétel *140*
Bohr-féle atomsugár *585*
Bohr, Niels Henrik David (1885–1962) 585
Boltyanszkij, V. G. 622, 624
Bolyai János (1802–1860) 257
Bolyai–Lobacsevszkij-sík *257*
bolygómozgás 495
Bolzano tétele *88*
Bolzano, Bernard (1781–1848) 88, 119
Bolzano–Weierstrass-tétel *119*
Bolza, Oskar (1857–1942) 441
Bolza-probléma *441*
Borel, Félix Edouard Justin Émile (1871–1956) 14, 30
Borel-függvény *30*, 32, *200*, 200, 204
Borel-halmaz *21*, 21–22, 25–26, 29–30
Bourbaki, Nicolas 75, 104, 107, 127, 621–622, 625
bozon 210
bővített komplex szám 82
— valós értékű 31, 38
— — szám *12*, 16, 82
bővülő 17, *612*
brachisztochon-probléma *433*
Brouwer-féle fixponttétel *97*, 608
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881–1966) 97
Browder, Felix Earl (1927–2016) 608
Browder–Minty-tétel *608*, 612, 619
Budó Ágoston (1914–1969) 624–625
Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics (1804–1889) 156
$\mathcal{B}(X;Y)$ *91*, *121*
$\mathcal{C}[a,b]$ 75
Cantor, Georg (1845–1918) 25
Cantor-halmaz *25*, 25, 29
Carathéodory, Constantin (1873–1950) 18
Carathéodory-feltétel 610
Cardano [kardano], Gerolamo (1501–1576) 308
Carleman, Torsten (1892–1949) 172
Carleson tétele *358*
Carleson, Lennart 348, 358
Casorati, Felice (1835–1890) 340
casus irreducibilis 308
Cauchy exponenciális egyenlete *472*
— hatvány egyenlete *472*
— logaritmikus egyenlete *472*
Cauchy [kósi], Augustin (1789–1857) 39, 82, 115, 156, 228, 308, 311, 323, 327–328, 336, 467, 470, 472, 483, 528
Cauchy-egyenlet *472*
Cauchy-egyenlőtlenség 39, *328*
Cauchy-feladat *470*, 483, 490, 492, 497, 510, 518, *528*, 550, 553, 556–557
Cauchy-féle integrálformulák *327*
— integráltétel *323*
— középérték-tétel *228*

Cauchy–Hadamard-tétel *311*
Cauchy-kritérium *116*
Cauchy–Riemann-egyenletek *311*
Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség *156*
Cauchy-sorozat 33, 74, *82*, 82
Cauchy-szorzat *115*
Cauchy-tétel *336*
Cavalieri-elv *47*
Cavalieri [kavalieri], Francesco Bonaventura (1598?–1647) 47, 537
Cayley [kéli], Arthur (1821–1895) 179
Cayley–Hamilton-tétel 179
Cayley-transzformáció 172
Cesaro [csezáro], Ernesto (1859–1904) 148
Cesaro-féle limitálási eljárás *148*
Cesaro-limesz *148*
Choquet-Bruhat, Yvonne (1923–2025) 622, 625
Christoffel–Darboux-formula *375*
Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900) 375
ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszere *245*
ciklus *335*, 335–336, *508*, 509
— periódusa *508*
Clairaut [kler**o**], Alexis Claude (1713–1765) 478
Clairaut-egyenlet *478*
$\mathcal{C}^m$ *234*
$\mathcal{C}^{m,\alpha}$ *235*, *284*
$\mathcal{C}^m$-diffeomorfizmus *234*
$\mathcal{C}^m$-leképezés *234*
$\mathcal{C}^{0,1}$ *284*
Coddington, Earl Alexander 623, 625
Cormen, Thomas H. 625
Cotes, Roger (1682–1716) 66
Courant [kurã], Richard (1888–1972) 75
Crank, John (1916–2006) 603
Crank–Nicolson-módszer *603*
csatolás csökkentése 499
csavarvonal 243, 250
Csebisev tétele *393*
Csebisev-egyenlőtlenség *36*
Csebisev-kvadratúra *67*
Csebisev, Pafnutyij Lvovics (1821–1894) 36, 67, 393
Csebisev-polinom 386, 393
Cseke Vilmos 622, 625
$*$-algebra *181*
csillagpont *278*
csillagszerű *278*
Csirmaz László 625
csomópont *573*
csoport 206
csökkenési irány *448*
csövek 330
Csurgay Árpád 624–625
$\mathcal{C}(X;Y)$ *91*
Czách László 12, 623, 625
Czapor, Stephen R. 626
d 28, 126
$\mathcal{D}$ *234*
$d(A,B)$ *78*
D'Alembert-egyenlet *472*
D'Alembert-formula *556*
d'Alembert, Jean Baptiste le Rond (1717–1829) 7, 348, 472, 556
Darboux tétele *228*, *276*
Darboux, Jean-Gaston (1842–1917) 228, 249, 276, 375
Darboux-vektor *249*
Daróczy Zoltán 12, 622, 625
Deák István 73, 625
Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831–1916) 247
de la Vallée Poussin [dö làvàl**é** puszẽ], Charles Jean (1866–1962) 392
de la Vallée Poussin-tétel *392*
δ-függvény 74, 518
$\delta^m f$ *233*
demifolytonos *605*, 607–608
derivált 175, *227*, *233*, 243
Dewaney, Robert L. 625
DeWitt-Morette, Cécile (1922–1917) 622, 625
dielektromos állandó 211, 526
Dieudonné, Jean 74, 77, 112, 122, 128, 156, 215, 371, 483, 537, 545, 550, 621–623, 625
diffeomorf *259*
diffeomorfizmus *234*, 239, *259*
differencia *481*, 482

differenciaegyenlet *482*, 482, 506
differenciál *227*, *233*, 242
differenciálás 75, 155
— linearitása *230*
differenciálegyenlet 215–216, 374, 426, 467, *468*, 482, 546
differenciálegyenletek közelítő megoldása *510*
differenciálegyenlet-rendszer *468*, 512
differenciálforma *304*, 304–305
differenciálható 94, 175, *227*, 229–231, 244–245, 310–311
— sokaság 319
differenciálhatóan ekvivalens *471*, 493–494, 505
differenciáloperátor 74, 187, 216, 433, 467, 480, 527, 559
differenciálrendszer *264*
differenciamódszer 213, *575*, *602*
differenciaoperátor *481*
diffúzió 528, 600
diffúziós állandó 526
— egyenlet *526–527*, 529, 590–592, 600
digitális technika 467
Dillard-Bleich, Margaret 622, 625
dim *28*
dimenzió *109*, 220, *257*
dimenzió, Hausdorff *28*
dinamikus rendszerek 468
Dini-kritérium *354*
Dini-tétel *122*
Dini, Ulisse (1845–1918) 122, 354
dipólus *540*
Dirac-delta *538*, 539, 579
Dirac-mérték *27*, 43, 538
Dirac [dirák], Paul Adrien Maurice (1902–1984) 27, 74–75, 518, 537
direkt *542*
Dirichlet-elv *437*, 517–518
Dirichlet-feladat 437, 518, *528*, *567*, 571, 580
Dirichlet-féle generátorfüggvény *321*
— magfüggvény 150, *354*
Dirichlet-formula *353*, 358
Dirichlet [diriklé], Gustav Peter Lejeune (1805–1859) 321, 348, 353, 356, 437, 518, 528
Dirichlet-probléma 536
Dirichlet-tétel *356*
diszjunkt 23, 29
diszkrét 91
— Fourier-transzformáció *398*, 398
— metrika *78*
— topológia *101*
disztribúció 75, *264*, 429, 481, 518, 527, *538*, 538–540, 546–547, 563, 567, 579
— deriváltja *539*
— eltoltja *539*
— Fourier-transzformáltja *544*
— kiterjesztése *541*
— megfordítása *539*
— szorzása függvénnyel *539*
disztribúciók direkt szorzata *542*
— konvolúciója *542*
disztributív 303
div *285*, *527*
divergencia *285*
divergenciatétel 286, *287*, 291, 434, 562
divergens *113*, 311
div_x *526*
$\mathcal{D}_K$ *537*
dmn *12*
d_0 *33–34*
d a//*53*
$d\nu_a/d\mu$ *53*
d_p *126*
Dringó László 623, 625
Du Bois-Reymond-lemma *429*
duális kúp *448*
— probléma 439
— tér 300
dualitási módszer *439*
Du Bois-Reymond [düboá-rejmo], Paul (1831–1889) 429
Duncan, John 623, 625
Dunford, Nelson 622, 625
Dupin [düpẽ], Charles (1784–1873) 256
Dupin-féle indikátrix *256*
d_∞ *126*
$\mathcal{D}'$ *538*

$d(x, A)$ *78*
$d(x, y)$ 77
$\mathcal{E}$ *234*
egész függvény *309*, 328
— szám *12*
egy pont kompaktifikált *103*
egybevágóság *77*
egydimenziós hullámegyenlet *557*
egydimenziós rögzített peremű variációs probléma *427*
egyenirányítás 364
egyenlet 220, 308, 564
egyenletek megoldása 98
— számának csökkentése 499
egyenletes ekvivalencia *93*
— eloszlás 72
— korlátosság tétele *143*
egyenletesen folytonos 59, 74, *87*, 88, 94, *107*
— jó közelítések *392*
— konvergens 32–33, 43, *91*, 91–92, *121*, 122, 166, 311, 359
— konvex *146*
— legjobb közelítés *383*
— monoton *605*, 607–608
egyenletrendszer 215
egyenlő 126
— mértékben folytonos 122
egyenlőség kiterjesztésének elve *87*
egyenlőtlenség 568
— kiterjesztésének elve *87*
egyensúlyi helyzet *508*
egyértelmű 180, 547, 591, 593, 595
egyhez tart *541*
eglépéses módszer 515
egymás utáni bejárás *247*
egymásba folytonosan átdeformálható *96*
$\| \ \|_1$ *122*
egyparaméteres operátor csoport *587*, 600
— — félcsoport *587*, 600
egység felbontása 48, *90*
egységelemes normált algebra *130*
egységgyök 399
egyszeresen összefüggő 325
— — halmaz *278*
— — tartomány 327, 329–330, 334, 341–343, 476, 509
egyszerű függvény *30*, 40, 123, 190
— mérhető függvény 32
— réteg hőpotenciálja *551*
— — potenciálja 579
egyszerű réteg késleltetett potenciálja *556*
1-trükk *163*
egzakt *420*
— egyenlet *476*
egzisztencia-unicitás tétel *490*, 495
Einstein, Albert (1879–1955) 7, 9, 252
Einstein-konvenció *252*
ekvipotenciális 330
ekvivalenciareláció 25
ekvivalens 155
— előállítás *251*
— görbék *248*
— metrikák *78*, 86
— normák 78, *118*, 118–119, 157, 173
elégséges feltétel 427
elektron 211
elektronikai zaj 72
elemi cella *370*
— esemény *71*
— felületdarab *251*
— forrás 547
— hatás 547
— megoldási módszer *519*
elfajuló eset *456*
elforgatás 180
ellenáram 506
ellipszis 347
elliptikus 518, *523*, 524, *526–527*, 528, 559, 575
— differenciáloperátor *563*
— függvény *347*
— integrál *347*
elliptikus egyenletek elméletének főtétele *575*
elnyelődés 527–528
eloszlás 26
eloszlásfüggvény *63*, 63
eloszló fizikai mennyiség 538
első alapforma *252*
— alapmennyiségek *252*

— differencia *481*
— Green-formula *561*
— integrál *493*, 493–494, 520
— peremérték-feladat *528*
— variáció 427
elsőfajú Csebisev-polinom *153*
— szakadás *85*
elsőrendben *389*
elsőrendű egyenlet 469
eltérés 18, 44, *77*, 85, 93, 112, 126
eltéréscsaládból származó uniformitás *107*
eltolásinvariáns *112*, 113
eltolásoperátor *470*, 506, 509–510
eltolt *403*
eltűnik *541*
— a végtelenben *404*, 404–405
endomorfizmus 128
energia 493, 510
— belső szorzat *563*
energiaintegrál *562*, 563, *595*, 600
energiaintenzitás 526
energiaoperátor 210–211, 589
energiasűrűség 526
energiatér *563*
Enflo, Per 118
Engelking, Ryszard (1935–2023) 622, 625
ε-fixpont *225*
ε-háló *83*
ε-környezet *79*
ε-megoldás *488*
Erdmann Gottfried Georg (1837–1905) 445
érintkezési pont *79*
érintkeznek *259*
érintő egységvektor *249*
— módszer 512
érintőformula *67*, 68
érintőleképezés *260*
érintőnyaláb *262*
érintősík *251*, 257, 520
erősebb *101*
erősen folytonos *605*, 607
— monoton *605*, 606, 608
— pozitív definit *241*
erővonal 330
értékkészlet *12*
értelmezési tartomány *12*
esemény *71*
eseménytér *71*
Eukleidész ($\approx$i.e. 300) 308
Euler összegzési formulája *117*
— tétele *256*
Euler-egyenlet *503*
Euler-féle összefüggés *315*
— szorzat előállítás *346*
— töröttvonal *488*
Euler-konstans *117*, 346
Euler–Lagrange-egyenlet 426, *428*, *430*, 431, *434–435*, 518, 572
Euler, Leonhard (1707–1783) 117, 247, 251, 256, 308, 315, 346, 348, 425–426, 428, 430, 434, 467, 495, 510
Euler-módszer *510*, 514
Euler–Monge-féle előállítás *251*
Evans, Lawrence C. 623, 625
$\mathbb{E}$ várható érték *71*
evolúciós egyenlet *527*, 603, 618
— hármas *618*, 619
explicit egyenlet *469*
— előállítás *251*
— módszer *511*, 512, *603*
exponenciális függvény 308–309, *314*, 317
— generátorfüggvény *321*
— polinom *500*, 500
extenzív mennyiség 16, 26, 53
extraháló rendszer 506
Faber tétele *153*
Faber, Georg (1877–1966) 153
fajhő 526
faktorcsoport 101
faktortér *100*
Farkas Miklós 625
Fatou-lemma *37*, 41, 43
Fatou [fatu], Pierre (1878–1929) 37
fázistér *470*
$f * g$ *407*
F-differenciálható *227*
Federer, Herbert (1920–2010) 33, 60, 287, 540, 622, 626
$\{f = g\}$ *29*
Fejér tétele *359*, *367*
Fejér-féle közepek *358*

— magfüggvény *358*
Fejér Lipót (1880–1959) 348, 357–359, 367
fékezett Newton-módszer *243*
$f \overset{p}{\sim} g$ *239*
feladat részekre bontása *525*
felcserélhető 95, 192–193, 197, *204*, 207
félcsoport 517, 587
félérintő 355, 377
— irány *448*
felharmonikus 364
Feller, William (1906–1970) 622, 626
félmetrikus tér *77*, 112
félnorma *112*
félnormált tér *112*
félsík kondenzátor 331
felső korlát *139*
felszín 16, 27–28, 65
feltételes szélsőértékszámítás 427
— várható érték *71*
feltétlen bázis *420*
felület 520
felületdarab felszíne 252
felületelem *520*
felületi görbe *251*
— hőpotenciál *551*, 552
— normális *251*
— — egységvektor *251*
felülről korlátos *139*
— — operátor *180*
Fényes Imre (1917–1977) 624, 626
Fényes Tibor (1929–2025) 624, 626
Fermat [ferma], Pierre (1601–1665) 537
Fermi, Enrico (1901–1954) 71
fermion 210
Ferrari, Lodovico (1522–1565) 308
Ferro, Scipione del (?1465–1526) 308
Feynman, Richard Phillips (1918–1988) 624, 626
FFT *398*, 399
f''' *233*
Fibonacci, Leonardo Pisano (1170–1250) 320
Fibonacci-szám *320*
finomítás *109*, *272*
finomság *272*
Fischer, Ernst (1875–1959) 14, 123, 156
$\varphi(t, \tau, \xi)$ *470*
fixpont *94*, 94–96, 319, 510
— tulajdonság *96*
fixponttétel 94, 98
fizika 527
— variációs elvei *426*
fizikai jelentés 285, 547
— mennyiség 209, 212
fizikus nóta 172
f'' *233*
Floquet [floké] Gaston 509
Floquet-transzformáció *509*
Floquet-trükk 509
fluxus *286*
$f^{(m)}$ *233*
$\{f > a\}$ *29*
$\{f > g\}$ *29*
Fock, Vlagyimir Alexandrovics (1898–1974) 526
fokozatos közelítések módszere *214*
fokszámcsökkentés *394*
folytatás *468*
folytonos 12, 26–27, 30, 32, 56, 59, 74, 77, *85*, 86–88, 90, 92, 157, 175, 227, 233, 607
— beágyazás 563
— mátrix 74
— projekció 152
— spektrum *174*, 206
— wavelet transzformált *417*
folytonosan átdeformálhatók egymásba *278*
— differenciálható 59, 406
— függ 553, 556, 591, 593, 595
folytonos az $a \in A$ pontban *85*
folytonosság, mértéké *17*
Fomin, Szergej Vasziljevics (1917–1975) 622, 628
Fontana, Niccolo „Tartaglia” [tartajja] (?1500–1557) 308
formális adjungált *546*
forrás 526, 547
forrásintenzitás 286
Forsyth, George Elmer 213, 626
Fourier-együttható *160*, *163*, 353, *370*

Fourier-elmélet 517
Fourier-féle inverziós formula 403
Fourier [furié], Jean Baptiste Joseph (1768–1830) 75, 163, 348, 371, 397–398, 403, 412, 517, 519, 529, 543–544
Fourier-módszer 517–518, 527, *529–530*, 581, 592, 597
Fourier-sor 75, 151, *160*, *163*, 171, 216, *351*, *370*, 397, 546
Fourier-transzformáció 75, 352, 411, 537
Fourier-transzformált 71, 308, 371, 397, 403, *403*, 405–406, *544*, 545–546
főátló 220
főgörbület *255*
főirány *255*
főnormális *249*
főrész *340*
főrészében lineáris másodrendű egyenlet 522
főrészében lineáris parciális differenciálegyenlet *519*
$f(.,y)$ *12*
Fraenkel, Abraham Adolf (1891–) 26
fraktál *28*
frame *420*
Franklin, Joel N. 9
Frank, Phillip (1884–1966) 346–347, 377, 621, 626
Fraser-diagram *384*
Fraser, William 384
Fréchet-differenciálható *227*
Fréchet [frésé], René Maurice (1878–1973) 74, 77, 127, 227
Fréchet-terek *127*
Fredholm-alternatíva 215, *220*
Fredholm, Erik Ivar (1866–1924) 74–75, 215, 220–221
Fredholm-féle integrálegyenlet 579
— integráloperátor *221*, 222, 224
frekvencia 403
Frenet-formulák *249*
Frenet [frenét], Frederich Jean (1816–1868) 249
Fresnel [frẽnel], Augustin Jean (1788–1827) 325
Fresnel-féle integrál *325*
Fridli Sándor 12
Fried Ervin 626
Friedrichs-kiterjesztés 212, 563, *563*, *566*, 569, 576, 619
Friedrichs, Kurt Otto (1901–1982) 559, 563, 568
Friedrichs-tétel *563*
fT *539*
$\mathcal{F}_\sigma$ *21*
$\mathcal{F}_\sigma$-halmaz *21*, *25*
$f(T)$ *176*, 178, *204*
$\hat{f}$ *404*
Fubini, Guido (1879–1943) 44, 61
Fubini-tétel *44*, 46, 65
Fubini tétele monoton függvényekről 61
Fuchs László 11, 626
Fujita, Hiroshi 517
Fuksz, B. A. 623, 626
fundamentális csoport *109*
funkcionálanalízis 75, 112, 427, 518
funkcionális kifejezhetőség 493, *494*
független valószínűségi változók 322
függetlenség *71*
függvény *12*, *259*
függvényegyenlet *343*, 403
függvényegyüttható eset 548
— lineáris differenciáloperátor *525*
függvények közötti műveletek *12*
— — relációk *12*
függvény rendje egy pontban *340*
függvénysorozat 91
— tagonkénti differenciálása *231*
függvénytér 75, *91*, *121*
fűrészfog-feszültség 364
f' *227*
$f_{x_i}(x)$ *231*
$f(x,.)$ *12*
f_{xy} *233*
Gábor Dénes (1900–1979) 412
Gábor-transzformált *412*
Galilei, Galileo (1564–1642) 6
Galjorkin, Borisz Grigorjevics (1871–1945) 439, 571–573, 594, 601
Galjorkin-egyenlet *610*
Galjorkin-egyenletek 608

Galjorkin-egyenletrendszer 608
Galjorkin-módszer *571–572*, 572, 594, 601, 608
Galjorkin-séma *439*, *573*
Galois-elmélet 467
Galois [galoá], Évariste (1811–1832) 308
$\gamma_1 \vee \gamma_2$ *248*
gamma-függvény *343*, 345–346
$\mathbf{\Gamma}$ 28, *344*
$\check{\gamma}$ *248*
Gâteaux-differenciál *227*
Gâteaux-differenciálható *227*
Gâteaux, René (1889–1914) 227
Gathen, von zur, Joachim 626
Gauss-ablak *412*
Gauss, Carl Friedrich (1777–1855) 6, 67, 213–214, 247, 251, 255, 308, 345, 412, 437, 495, 518
Gauss-elimináció *213*
Gauss-féle előállítás *251*, *345*
— görbület *255*
— kiküszöbölés *213*, 213
Gauss-függvény *412*
Gauss-kvadratúra *67*
Gauss–Seidel-iteráció *214*
gázkromatográf 70
$\mathcal{G}_\delta$ *21*, 27
$\mathcal{G}_\delta$-halmaz *21*, *25*
G-differenciálható *227*
Geddes, Keith Oliver 626
Gehér László (1929–2011) 622, 631
Gelbaum, Bernard Russel 621, 626
Gelfand, Iszrail Mojszejevics (1913–2009) 626
generált topológia *102*
generátor *587*
generátorfüggvény *320–321*, 322, *377*
geometriai mérték 27
— valószínűség *71*
Gerhard, Jürgen 626
Geszti Tamás 624, 626
$\partial G \in \mathcal{C}^{m,\alpha}$ *283*
Gihman, Joszif Iljics 622, 626
Gilányi Attila 12
Giordano, F. R. 631
gitárhang 364
Gjunter, N. M. 621, 626
globális függés a paraméterektől *491*
Gombás Pál (1909–1971) 624, 626
Gordon, Walter 526
Goursat-feladat 557
gömb *78*, 86
— térfogata 28
gömbfelület *78*
gömbfüggvény *583*, 585
gömbi inga 472
— pont *255*
gömbre vonatkozó tükrözés *580*
görbe *247*
— alatti terület *47*
— kezdőpontja *247*
— menti integrál *276*
— végpontja *247*
görbék ekvivalenciája *248*
— szorzata *110*
görbület *249*, 250
görbületi vonal *255*
gőznyomás 392
gradiens *228*, 242, 294
— módszer *245*
Graham, Ronald Lewis 322, 626
Gram, Jorgen Pedersen (1850–1916) 162
Gram–Schmidt-ortogonalizálás *162*, 371
gravitációs potenciál 527
Green-féle előállítás *578*, 579
Green-formula *561*
Green-függvény 518, *547*, 550, 566, 577, *580*, 580
Green [grin], Georg (1793–1841) 291, 518, 547, 561
Green-tétel *291*
Grönwall-lemma *489*, 490, 508
Grönwall, Thomas Hakon (1877–1932) 489
Gruber Tibor 621, 629
$\hat{g}$ *404*
Gvisiani, Alekszej Dzsermenovics 621–622, 628
Gyemidovics, Borisz Pavlovics 621, 626
gyenge *589*
— csillag konvergencia *540*
— derivált 243

— differenciál *227*, *233*
— konvergencia 112, 145, *145*, *540*
— — tétel *366*
— megoldás 518, 530, *592*, 592, *597*, 597, 600
— parciális differenciál *233*
— szingularitású magfüggvény *225*
— topológia *145*
gyengébb *101*
gyenge* konvergál *145*
gyenge* konvergencia *145*
gyenge* topológia *145*
gyengén differenciálható *227*, 231
— konvergál *145*
gyors Fourier-transzformáció *398*
— osztás *401*
— polinomszorzás *400*
— szorzás *401*
gyorsan csökkenő *409*, *543*
— oszcilláló rész 66
gyök 243, 246, 373, 506
gyökkritérium 311
gyöktényező 246, *328*, 328, *329*
gyöktényezős alak *329*
Haar Alfréd (1885–1933) 14, 127, 167
Haar-féle ortonormált rendszer *167*
Haar-mérték *127*
Hadamard, Jacques (1865–1963) 308, 311
Hahn–Banach-tétel 26, *139*, *141*
Hahn, Hans (1879–1934) 75, 112, 139, 141
hajlítási síkrezgés 440
Hajnal András 626
Hajós György 626
halászat 472
H_α *94*, *235*
halmazelmélet 26
halmazfüggvény 16, 18, 20
halmazfüggvényhez tartozó külső mérték *20*
halmazok különbsége 17
halmazon vett integrál *40*
Halmos Pál R. 9, 11–12, 26, 139, 621, 627
halmozott hiba *510*
Hamburger Péter 626
Hamilton-elv *426*
Hamilton-függvény *210*, 445, *522*
Hamilton–Jacobi parciális differenciálegyenlet *522*
Hamilton–Jacobi-egyenlet *522*
Hamilton-operátor 210, *210*
Hamilton [hemiltn], William Rowan (1805–1865) 179, 210, 426, 522
Hamming, Richard Wesley (1915–1998) 512, 515
Hamming-ablak *412*
Hamming-módszer *512*, 515
Hamming-távolság *78*
Hankel-operátor *424*
Hanning-ablak *412*
Hardy, Godfrey Harold (1877–1947) 53
Hardy–Littlewood-féle maximál egyenlőtlenség *53*
harmadfokú egyenlet 308
harmadik peremérték-feladat *528*
hármas számrendszer 25
harmonikus 329, 518, *577*, 579
— oszcillátor 210–211
— sor *117*
— társ *329*, 329–330
háromszög-egyenlőtlenség *77*, *112*
háromszögmátrix 213
háromszögpálya *248*
Harsiladze 152–153
Harsiladze–Lozinszkij-tétel *152–153*
hash-transzformáció *322*
hasonló *179*, 215
hasonlóság 29, *78*
Hass, J. 631
határ *79*, 287
határa lokálisan Lipschitz *284*, 299
határérték 74, 77, *81*, 85, 91, 355
határfeltétel *440*, 517
határozatlan együtthatók módszere *480*
határpont *79*, 284
határtól határig halad *491*
hatás *426–427*, *434*, 547
hatásintegrál *426–427*, *434*
hatványozás, komplex *317*
hatványsor *309–310*, 313
Hausdorff külső mérték *28*, 28
Hausdorff-dimenzió *28*, 29
Hausdorff, Felix (1868–1942) 28, 85, 103

Hausdorff-mérhető 29
Hausdorff-mérték *28*, 29, 71
Hausdorff-távolság *85*
Hausdorff-tér *103*
Heaviside-függvény 27, 537, *539*, 547
Heaviside [heviszájd], Oliver (1850–1925) 27, 481, 539
Heisenberg-féle felcserélési összefüggés 184, *212*, 212
— határozatlansági reláció *212*
Heisenberg, Werner Karl (1901–1976) 75, 184, 212
Hellinger, Ernst (1883–1956) 186
Hellinger–Toeplitz-tétel *186*
Helly, Eduard (1884–1943) 112
Helmholtz-egyenlet 518, *527*
Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand (1821–1894) 518, 527
Helmholtz-operátor 548–549
hely 526
helyettesítés 520
helyettesítéses integrálás 63–64, 326
hemifolytonos *605*, 606–608
hengerfelület 101
Henrici, Peter K. 394, 398, 623, 627
Henry, Daniel Bauman 517
Hermite interpolációs polinom *383*
Hermite [ermit], Charles (1822–1901) 16, 180, 383
Hermite-féle operátor 74, *180*
Hermite-interpoláció *383*, 573
Hermite–Lagrange-interpoláció 512
Heun, Karl (1859–1929) 511
Heun-módszer *511*, 514
Hewitt, Edwin 26, 104, 127, 352, 622–623, 627
hiányos Lagrange-függvény *432*
hibabecslés 68–69, 512, *513*
hibabecslési tétel *490*, 513
hibafüggvény 391
hidrogénatom 210, 584
Hilbert, David (1862–1943) 9, 74–75, 125, 145, 157, 220–221, 323, 431, 517–518
Hilbert-kocka *125*, 125, *223*
Hilbert-összeg *190*, 195, 201
Hilbert–Schmidt-magfüggvény *221*, 222
Hilbert–Schmidt-tétel *220*
Hilbert-tér 74–75, 126, 128, 156, *157*, 157–158, 160, 162
Hilbert-tétel *431*
Hille, Carl Einar (1894–1980) 587, 622, 627
hiperbolikus *523*, 524, 528, 530, 550, 557, 595–596, 600–601
— függvény *316*
$\mathcal{H}^m$ *568*
$\mathcal{H}_0^m$ *568*
holomorf 176–177, 206, *309*, 323, 326–329, 331, 340, 342–343, 545
homeomorf 25
— terek *92*
homeomorfizmus *92*, 101
homogén *128*
— egyenlet *173*, 173, *473*
— lineáris differenciaegyenlet *505*
— — egyenlet *475*, 496, 520
— peremfeltétel *526*
— polinom 584
— probléma *526*
homogenitás *38*
homogén lineáris elsőrendű egyenlet *520*
homogén lineáris konstansegyüttható differenciaegyenlet *506*
homogén lineáris normál differenciálegyenlet *495*
homogén lineáris parciális differenciálegyenlet *519*
homológia *111*
homomorfizmus 403
homotóp *96*, *278*, 280, 323–324
homotópia *96*
— csoport *110*
Horner-elrendezés 246, *328–329*
Horner, William George (1786–1837) 328
Horváth Dezső 624, 627
Horváth Miklós 624
hossz 16, *248*
hőáramlás 330, 528
hőátadás 528
hőforrás 526, 528
Hölder-egyenlőtlenség *124*, 126
Hölder-folytonos 28, *94*

Hölder-konstans *28*, 235
Hölder-limesz *148*
Hölder, Otto (1859–1937) 94, 148, 235
hőmérséklet 526, 528
hőpotenciál *551*, 551
Hörmander, Lars 547, 555, 623, 627
hővezetés *526*, 528
hővezetési egyenlet 517–518, *527*
— — alapmegoldása *550*
— tényező 526
hullám 402
hullámegyenlet 517–518, *526*, 556
— alapmegoldása *555*
hullámfüggvény 209
hullámmozgás 526
Hunt, Richard Allen 358
Hurewicz, Witold (1904–1956) 627
húrmódszer *387*
Hurwitz tétele *333*
Hurwitz, Adolf (1859–1919) 333
$\mathcal{I}$ *40*
identikus operátor 130, 182, 217
idő 526
immerzió *262*
implicit egyenlet *469*, *477*
— függvény tétel *237*, 432, 484–485
— módszer *510*, 512, *603*
impulzus 493
impulzusmomentum 493
impulzusoperátor 211
index pályáé *324*
$\inf f_n$ 31
inga 472
inhomogén *527*, 528
— egyenlet *173*, 173
— lineáris differenciaegyenlet *506*
— — egyenlet *475*
— sajátértékprobléma *216*, 223, 565
instabilitás *514*
integrációs változó 36
integrál *35*, 37, *38*, *40*, 66, 71
— abszolút folytonossága *42*
— kiszámítása 341
— komplex *335*
— tulajdonságai 36, *41*
$\int_A f$ *35*
$\int_A f\,d\mu$ *35*, *38*
$\int_A f(x)\,d\mu(x)$ *35*, *38*
integrálás 519
$\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ *42*
integrál az A halmazon *38*
integrálegyenlet 75, 215–216, 222–223, 483, 485, 572, 577
$\int f$ *35*, *38*
$\int f\,d\mu$ *35*, *38*, 40
$\int f(x)\,d\mu(x)$ *35*, *38*
$\int f(x)\,dx$ *42*
$\int_\gamma f$ *276*
$\int_\gamma f(x)\,dx$ *276*
integrálható függvény *38*, 39, *40*, 41–43
$\int_I f$ *272*
$\int_I f(x)\,dx$ *272*
integrálközelítő összeg *35*
integrálkritérium 115
integráló szorzó *476*
integrálok közelítő számítása 71
integráloperátor 74, 131, 172, 216, 402, 550, 566
integrál σ-additivitása *42*
integráltranszformáció *402*
integráltranszformációs formula 28, *64*, 65, 267, 269, *275*, 278
$\oint_\gamma f$ *276*
$\oint_\gamma f(x)\,dx$ *276*
intenzitás 526
interpoláció 66, *382–383*
— hibája *385*
interpolációs polinom 179, 394
interpoláló polinom 153
intervallum 21, 26, 88
— additivitás *273*
— felezés *387*
invariáns *188*, 201
inverz 155, 216
— FFT *400*
— függvény tétel *239*
— interpoláció *387*
— keret *420*
inverzió *580*
inverziós tétel *410*

inverzképzés 237
involúció *181*
involutív *264*
irány mentén differenciálható *227*
irányítás *291*
irányítási feladat *440*
irányított határ *306*
iránykoszinusz 289
iránymenti csökkentés módszere *245*
— derivált *227*, 427
iránymező *264*, *470*
irracionális 21, 26, 86
irreducibilis reprezentáció 352
irreverzibilis 600
ismételt integrálás 70, *274*
iteráció *94*, 95, 99, 213, 243–246, 512, 515
ívhossz 16, 27–28, 65
ívszerűen összefüggő *110–111*, *278*, 278, 326
izolált pont *79*, 85, 341
— szingularitás *340*
izometria *77*, *92*, 121, 207
izometrikus halmazok 28
izomorf 162
izomorfizmus 77, 156
izotróp *527*, 528
Jacobi-azonosság *264*
Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) 214, 264, 425, 473, 522
Jacobi-determináns 498
Jacobi-módszer *214*
Járai Antal 11, 21, 27, 32, 53, 62–64, 105, 127, 134, 621, 627
Járai Zoltán 13
Jefremovics, V. A. 622, 624
Jegorov tétele *33*
Jegorov, Dmitrij Fjodorovics (1869–1931) 33, 627
jobb invariáns *127*
— oldali derivált *228*
— — határérték 85
John, Fritz (1910–1994) 323
jól vág ketté 18
Joó István 624
Jordan felbontási tétele *57*
Jordan-blokk *220*
Jordan [zsordã], Camille (1838-1922) 14, 57, 215, 220, 274
Jordan-mérhető *274*
Jordan-mérték *274*
Jordan-normálalak 215, *220*, 499, 505
Jost, Res 6
$\mathbb{K}$ *112*
Kamke, Erich (1890–1961) 480, 623, 627
Kantor, Iszaj Lvovics 627
Kantorovics tétele *244*
Kantorovics, Leonyid Vitaljevics (1912–1986) 244
karakter *403*
karakterisztikus differenciálegyenlet-rendszer *520*
— egyenlet 495, *502*, *524*
— függvény *12*, 40, *71*, *470*, 493, 498
Kátai Imre 623, 627
katasztrófaelmélet 239
Kato, Tosio (1917–1999) 209, 517, 622, 627
kauzális *412*
k-dimenziós tégla *271*
keletkezés 528
Kelley, John Leroy 622, 627
Kelvin, Lord (William Thomson, 1824–1907) 6, 349, 437, 580
Kelvin-transzformált *580*
kényszerítési feltétel 611
kényszerítő *605*, 608, 612, 620
képtér *128*
képzetes 308
— rész *309*
kerekítési hiba 513
Keresztfalvi Tibor 621, 629
keret *420*
— konstansok *420*
— sorfejtés *420*
késleltetett potenciál *556*
kettős réteg *540*
— — potenciálja 579
— sor tétel 114
— viszony *318*
kettős réteg késleltetett potenciálja *556*
kétváltozós másodrendű főrészében lineáris egyenlet *524*

keverés *303*
kezdeti feltétel *528*
kezdőpont *247*
χ^m *28*, 29
χ^m_δ *28*
kibocsátás 527
kiegyenesítési tétel *471*, 473, *493*, 494
Kingman, John Frank Charles 627
Kirchoff-formula *556*
Kirchoff, Gustav Robert (1824–1887) 556
Kirillov, Alekszander Alekszandrovics 621–623, 628
kis rezgések 472, 495
Kisdi Dávid 624, 626
kísérő tríéder *249*, 250
kitérés 526
kiterjesztés 20
kiterjeszthető *541*
Kittel, Charles 624, 628
kiválasztási axióma 26
kivonó módszer *72*
klasszikus Fourier-sor *350*
— ortogonális polinomok *377*
— Runge–Kutta-módszer *511*
— valószínűség *71*
Klein, Christian Felix (1849–1925) 8, 101, 265
Klein-féle kancsó *101*
Klein–Fock–Gordon-egyenlet *526*
Klein–Fock–Gordon-operátor 549
Klein, Oskar (1894–1977) 526
$\mathcal{K}^m$ *234*
Knuth, Donald Erwin 72–73, 322, 626, 628
Kobayashi, Shoshichi (1932–2012) 622, 628
kodimenzió 218, *218*, 220
kódszó *78*
Koebe-függvény *319*
Koebe, Paul (1882–1945) 319
kofelszín-képlet *65*
kohomológia *111*
Kolmogorov példája *358*
Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics (1903–1987) 14, 168, 358, 467, 622, 628
Kolmogorov–Arnold–Moser-elmélet 467
Kolmogorov-féle három sor tétel 168
Kolmogorov–Rademacher-tétel *168*
kombinált elem *574*
kommutatív 309
— Banach-algebra 407
kompakt 22, 29, 32, *83*, 83–85, 87–92, 102, 104–105, 119–120, 122, 137–138, 176, 192, 216, 220, 568, *605*, 607
— operátor 216, *216*, 217–221, 223–224, 563
— tartójú 90
— — disztribúció 541, 544
— terek szorzata 102
komplex 173, 246
— alak *352*, 370
— értékű 39
— függvény *309–310*, 310
— függvénytan 437, 468, 517–518, 545, 577
— potenciál *330*
— szám *309*, 309
komplexifikált *173*, 495
komplex szám trigonometrikus alakja *317*
komplexus műveletek *11*
komputer algebrai rendszer 480
Komura tétele 613
Komura, Yukio 613
koncentráció 526–527
kondenzátor 331
konfigurációs tér 209
konform *317*, 331
— ekvivalens *330*, 334
— leképezés *330*
— leképezések alaptétele *334*
konjugált *309*
— tér *129*
konstans görbe *248*
— variálás *475*, *496*, *502*, *506*
konstansegyütthatós egyenlet 503
— lineáris differenciaegyenlet *505*
— — differenciáloperátor *547*
— — egyenlet *519*
— másodrendű egyenlet *523*
konstansegyütthatós homogén lineáris egyenlet *497*, *501*

Konsztantyinov, N. N. 472
kontinuum 21, 23, 29
kontrakció 29, *94*, 94–96, 212, 510
konvergencia 31, 74
— kritérium *113*, *377*
— rendje *389*
— trükk *607*
konvergenciagyorsítás *99*
konvergenciasebesség *96*
konvergenciasugár *311*
konvergenciatartomány *311*, 313
konvergenciatétel *376*, 377
konvergenciatrükk maximális monotonitással 613
konvergens részsorozat 82
— sor *113*
— sorozat *81*, 119, *125*, 125, 131
konvex 21, 25, 126, 141, 278, *447*, 608
konvolúció 402, *407*, 409, *542*
konvolúcióoperátor *209*
konzervatív *426*
koordináta-függvény 30, 39, 86, 230
koordinátarendszer *257*
korlátos *78*, 82–84, 87, 91, 93, 119, *128*, 129, *232*, 233, *605*, 608
— jobbinverz *453*
— lineáris funkcionál 147, 159
— — operátor 144, 180, 184
— projekció 152
— szimmetrikus operátor 172
— változású *56*, 57, 59
Korovkin, Pavel Petrovics (1913–1985) 134
korrekt kitűzésű *215*, 216
korrektor formula *512*
korrelálatlan *71*
Kósa András 433, 623, 628
koszinusz *315*
— transzformált *404*
Kovalevszkaja, Szonja Vasziljevna (1850–1891) 8, 517
kölcsönösen egyértelmű 87, 208
körfrekvencia 403
környezet 25, *79*
környezetbázis *104*
körpálya *248*, 324
körtartó *319*
körüljárási szám *324*
körvezető 330
közelítés javítása *394*
közelítő differenciálás *401*
— egység *407*
— érték *510*
— felbontás 213
— integrálás *66*, 401, *401*
— megoldás *488*, *510*
— összeg *276*
— polinom 66
— sajátérték *205*
közelítőleg véges 83
középérték-egyenlőtlenség *229*, 229
középérték-tétel *579*
középpont módszer *511*, 512
közönséges differenciálegyenlet *468*, 519, 547
közönséges differenciálegyenletek elméletének főtétele *484*
közös gyök 373
kristály 370
kritikus sugár 73
Kronecker-delta *12*
ξ_A *12*
kulcs-cím leképezés *322*
kúp *448*
Kuros, Alekszander Gennagyevics (1908–1971) 628
Kurutzné Kovács Márta 574, 628
Kurzweil, Jaroslav 628
Kutta, Martin Wilhelm (1867–1944) 511
Kuzmin, R. O. 621, 626
különbség trükk *427*, *526*, 567
különbség, halmazoké 17
külső derivált *305*, 307
— erő 526
— mérték *18*, 18–21, 23, 28–29, 44, 47
— normális 12, *284*, 527
— peremérték-feladat *528*
— pont *79*
— regularitás *22*
— szorzat *302–303*
külső mérték, halmazfüggvényhez tartozó *20*

külső mértékre nézve mérhető *18*
kvadratikus forma 255
kvadratúra hibája 68
kvadratúraformula, összetett *68*
kvalitatív elmélet 467–468
kvantálási szabályok 209
kvantumelmélet 75, 209
kvantumfolyamat 600
kvantummechanika 74, 173, 527
kvantumstatisztika 173
kvaternió 265
kvázi Newton-módszer *388*
kvázilineáris elliptikus egyenlet *610*
— elsőrendű egyenlet *520*
— parabolikus egyenletek 620
— parciális differenciálegyenlet *519*
kvázipolinom *573*
L 427, 434
Labahn, George 626
Laczkovich Miklós 12, 26, 29, 621, 628
Lagrange háromszög-elem *574*
— középérték tétele *228*
— szimplex elem *574*
Lagrange-egyenlet *477*
Lagrange-elv *242*
Lagrange-függvény *426–427*, 432, *434*, *457*
Lagrange-interpoláció 66, *383*, 574
Lagrange, Joseph Louis (1736–1813) 228, 242, 308, 383, 425–430, 434, 456–457, 459, 467, 477, 495, 538
Lagrange-lemma *427*, 429
Lagrange-sűrűség 434
Lagrange-szorzó *456*
λ^n 23, *23*
λ_g *26*, 27
lánc *139*, *335*
láncszabály *53*, *230*
Landau, Edmund Georg Hermann (1877–1938) 628
Landau, Lev Davidovics (1908–1968) 8, 402, 426, 440, 522, 624, 628
Δ *433*
Laplace-egyenlet 437, 517, *527*, 577, 579–580
— alapmegoldása *578*
Laplace-féle differenciálegyenlet *481*
Laplace-operátor *294*, *433*, 550, 581–582, 584
Laplace, Pierre Simon, Marquis de (1749–1827) 294, 308, 349, 403, 433, 481, 527, 545
Laplace-transzformáció *545*
Laplace-transzformált *545*
Δ_x *526*
Laurent, Pierre Alphonse (1813–1854) 338
Laurent-sor *338*, 340, 352
Lebesgue felbontási tétele *53*, 53
— külső mérték *23*, 25
— példája *536*
— sűrűségi tétele *54*
— tétele *33*, *41*, *55*, *154*, *368*
Lebesgue-féle felbontás *53*, 55
— szinguláris függvény 61
Lebesgue-függvény 150
Lebesgue [löbeg], Henry Leon (1875–1941) 14, 26, 33, 35, 41–42, 47, 51, 53–55, 61, 74, 83, 150, 154, 273, 357, 368, 404, 438, 536
Lebesgue-integrál *42*, 43, *62*, 62, 64
Lebesgue-konstans *150*
Lebesgue-kritérium *273*
Lebesgue-mérhető *23*, 23, 25
Lebesgue-mérték 23–25, 27–28, 47, 184
Lebesgue-pont *54*, 368
Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel *51*
Lebesgue–Stieltjes külső mérték *26*
Lebesgue–Stieltjes-integrál *42*, 62, *62*, 63
Lebesgue–Stieltjes-mérhető 26
Lebesgue–Stieltjes-mérték *26*, 27, 55, 61
Lebesgue-sűrűség *54*, 284
Lebesgue-szám *83*, 84
leereszkedés módszere *530*
lefedés 104
— rendje *109*
lefedési dimenzió *109*
Legendre [lözsãdr], Adrien Marie (1752–1833) 167, 429, 431, 522, 583
Legendre-feltétel *429*, *431*
Legendre-polinom *167*, 583
Legendre-transzformáció *522*

legjobb approximáció *120*
— — Hilbert-térben *159*
legjobban approximáló elem *120*, 120–122
— közelít *379*
legjobb lineáris approximáció belső szorzat térben *160*
legkisebb négyzetek módszere *382*, *391*, *397*
$\mathbb{L}^1$ *122*, 125
$\mathbb{l}^1$ *125*
lehetetlen esemény *71*
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) 59, 62, 227, 425, 467, 537
Leibniz-szabály *62*
Leighton, Robert B. (1919–1997) 624, 626
Leindler László 11, 621, 628
Leiserson, Charles E. 625
leképezés *259*
lényegében megegyeznek *189*
— nulla *189*
— önadjungált *180*, 184, 209
lényeges értékkészlet *189*
— szingularitás *340*
lépéshiba *510*, 512
lépésköz 70, 512
létezés 600
létezik az integrál 38, 44
Levi [lévi], Beppo (1875–1961) 37–38, 40
Levinson, Norman (1912–1975) 623, 625
lezárt *80*, 188, 210
L'Hospital [lopitál], Guillaume François (1661–1704) 229
L'Hospital-szabály *229*
Lie-algebra *264*
Lie-csoport 467
Lie [li], Sophus (1842–1899) 264, 473
Lifsic, Jevgenyij Mihajlovics (1915–1985) 8, 402, 426, 440, 522, 624, 628
$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *81*
$\lim_{x\uparrow a} f(x)$ 85
$\lim_{x\downarrow a} f(x)$ 85
$\liminf f_n$ 31
limitálható *147*
$\limsup f_n$ 31
Lindelöf, Ernst Leonard (1870–1946) 533–535
lineáris algebra 467, 495
— altér 113
— differenciálegyenlet 467, 495
— — rendszer 495
— egyenlet 75, 243
— egyenletrendszer 213, 383
— funkcionál 75, *128*, 141, 299, 538
— határfeltétel *525*
— homeomorfizmus 218–219
— inhomogén differenciálegyenlet 497, 525
— interpoláció *386*, 387
— iteráció *212*
— izometrikus leképezés 232
— leképezés 174
— — komplexifikáltja *173*
— normál differenciálegyenlet *495*, 495, 497–498
— operátor 75, *128*, *174*, 180
— pálya *248*
— parciális differenciálegyenlet *519*
— — differenciáloperátor 518
— probléma 525
— programozási feladat 394
— relaxáció *99*
— tér 75, 156
linearitás *41*
Liouville-formula 502
Liouville, Joseph (1809–1882) 328, 371, 473, 498, 517, 577
Liouville-tétel 176, *328*, 330, *498*
Lip *94*
Lipschitz-feltétel 484, 533–534
Lipschitz-függvény 59, *94*, 244–245, 608, 613
Lipschitz-kritérium *355*, *377*
Lipschitz [lipsic], Rudolf Otto Sigismund (1832–1903) 94, 284, 355, 533–534
Lissajous-görbe 377
Lissajous [lisszazsu], Jules Antoine (1822–1880) 377
Littlewood [litlvud], John Edensor (1885–1977) 53
Ljapunov direkt módszere *510*
Ljapunov, Alexandr Mihajlovics (1857–1918) 467–468, 507, 510

Ljapunov-függvény *510*
Ljapunov-stabil *507*, 510, 514
Ljapunov-tétel *507*, 509
$\mathbb{L}^2$ 75, 126, *158*
$\mathbb{l}^2$ 75
$\mathbb{L}^1_{\text{loc}}$ *538*
$\mathbb{L}^0$ *33–34*, 126
Lobacsevszkij, Nyikolaj Ivanovics (1792–1856) 257
log *317*
logaritmus 509
lokális megoldás *456*
— minimum 427
— szélsőérték 427
— tulajdonság *89*
lokálisan egyenletes 231, 331, 407
— egyenletesen konvex *146*
— ekvivalens *239*, 239
— kompakt 47, *89*, 90–91, 120
— konvex *127*
— korlátos *605*, 607
— Lebesgue-integrálható *538*
— Lipschitz határú *284*
— Lipschitz-függvény 64–65
— összefüggő 89, 91
— teljesül *89*
— véges *22*, 538, 544
Losonczi László 12, 94, 113, 122, 127, 131, 133, 145, 157–158, 182, 224, 483, 622, 628
Lotka, Alfred James (1880–1949) 472
Lotka–Volterra-modell *472*
Lozinszkij, Szergej Mihajlovics (1914–1985) 152–153
lövöldözés módszere *445*
$\mathbb{L}^p$ 75, *122*, 123–126, *126*
$\mathbb{l}^p$ 75, *125*, 125
$\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 125
$\mathbb{L}^q$ 124
Lukacs, Eugene 623, 628
Luzin tétele *32*
Luzin, Nyikoláj Nyikolajevics (1883–1950) 32, 358
$\mathbb{L}^\infty$ *122*
$\mathbb{l}^\infty$ *125*, 125
$\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_m; Y)$ *232*
$\mathcal{L}(X; Y)$ *129*, 129
MacLaurin, Colin (1698–1746) 312
MacLaurin-sor *312*
mag *128*
magasabb derivált *233*
— differencia *481*
— differenciál *233*
— gyenge differenciál *233*
— parciális differenciál *233*
magasabb gyenge parciális differenciál *233*
magasabbrendű egyenlet *479*, 527
— lineáris differenciaegyenlet *505–506*
— — differenciálegyenlet *501*
magfüggvény *171*, 222, *402*
mágneses permeábilitás 526
majdnem 218
— biztosan *71*
— mindenütt *29*, 30, 34, 42, 71, 126, 407
— — differenciálható 55, 58, 64
— — konvergens 33, 166, 170
— ortogonális *120*
majorált konvergencia tétel *41*
majoráns kritérium *38*, *41*, 311
Makai Imre (1924–1994) 12
Maksa Gyula 12
Marcsuk, Jurij Ivanovics 575, 602, 624, 628
Marczinkiewicz tétele *356*
Marczinkiewicz, Józef (1910–1940) 356
Markov, Andrej Andrejevics (1856–1922) 68
Markov-kvadratúra *68*
másodfajú Bessel-függvény *581*
— szakadás *85*
második alapmennyiségek *253*
— Green-formula *561*
— konjugált tér 143
— peremérték-feladat *528*
másodrendben konvergens *389*
másodrendű egyenlet 517, *522–523*, *526*
Máté László 628–629
matematikai fizika 518
— inga *433*
Matolcsi Tamás 621, 629
Maurin, Krzysztof 226

maximálfüggvény 53, *53*
maximális bővülő *612*, 613–614
— elem *139*
— monoton 606, *612*, 613–614, 619
— szimmetrikus *208*
maximumelv *318*, *442*, 442–445, *579*, *591*
maximumfeltétel *442*
Mazur, Stanislaw (1905–1981) 75, 146
mechanika 426
mechanikai feszültség 526
m-edik differenciál *233*
m-edik variáció *233*
m-edrendű *538*
megegyeznek H-n *541*
megengedett függvények osztálya *427*, *433*
— irány *448*
megfordítás *247*, *403*
megmaradó mennyiség 493
megoldás *468*, *525*, 550, 553, 564, 566, 580
megoldás létezése nemlineáris egyenletrendszerre *608*
megosztás módszere *99*
megszámlálható *12*, 17, 21–22, 80, 90, 93–94
— additivitás 37
— bázis 32, 80
— nyílt lefedés 84
megszüntethető szakadás *85*
mellékfeltétel 520
membrán *439–440*
Mensov, Dmitrij Jevgenyovics (1892–1988) 169–170
Mensov-lemma *169*
mérés 209, 212
mérhető *17*, 17, *18*, 20–22, 27, 42, 71
— függvény 30–40, 44, 71, 126, 198
mérhető, külső mértékre nézve *18*
meromorf *341*, 342, 344
mérték 16, *17*, 21–22, 34, 71, 122, 124, 158, 191, 196, 271, 498
— folytonossága 17, 36
— természetes kiterjesztése *20*
mértékben konvergens *33*, 33, 44, 71, 166
mértékegység 12
mértéktér *17*, 18, 35–40, 42, 47, 70–71, 126, 189, 193
— bázisa *124*
— természetes kiterjesztése *20*
mértékterek szorzata *44*, 71
mértéktér, teljes *17*
mértéktér, véges *17*
Mertens tétele *115*, *166*
Mertens, Franz (1840–1927) 115, 166
Meszéna György 622, 629
metrika *77*, 91, 93, 112
metrikák ekvivalenciája *78*
metrikus külső mérték *29*, 29
— tér 21–22, 28–29, 34, 74, *77*, 90, 100, 112, 126
— — kúpja *100*
— terek szorzata *86*, 91
metrizálás *82*
metszet 17, 93–94
Meusnier tétele *253*
Meusnier [mönjé], Jean Baptista Marie Charles (1754–1793) 253
m-forma *300*
Michlin, Solomon Grigorjevics 439, 623, 629
Mikolás Miklós 623, 629
Mikusiński, Jan (1913–1987) 481, 629
Mikusiński-operátor *481*
Milne-módszer *515*
Milne, W. E. 515
mindenütt sűrű *80*
minimálfelület 440
minimális *420*
minimumelv 427, *591*
minimumfeladat *245*
Minkowski-egyenlőtlenség *122*
Minkowski-funkcionál *141*
Minkowski, Hermann (1864–1909) 122, 141
Minty, Georg James, Jr. (1929–1986) 608
Miranda, Carlo (1912–1982) 97
Miranda közbenső érték tétele *97*
Mises, Richard Edler von (1883–1953) 346–347, 377, 621, 626
Mittag-Leffler, Gösta Magnus (1846–1927) 342

m-lineáris *232*
m-lineáris forma *300*
m-lineáris funkcionál *300*
$\| \|_m$ *234*
modellezés 467
módosító formula *512*
módosított Newton-módszer *99*, *243*, *245*, *388*
Mogyoródi József (1933–1990) 622, 624
Moler, Cleve Barry 213, 626
Molnár Lajos 12
Monasztriszkij, Mihail Iljics 247
Monge [monzs], Gaspard (1746–1818) 251
monom *433*
monoton *605*, 606–608, 612, *612*, 613, 620
— lineáris funkcionál *47*, 47
— növekedő függvény 26–27, 55, 57, 61–63
— — sorozat 32, 37
— operátor *134*
— sorozat 122
monotonitás *16*, 17, *36*
monotonitási feltétel 611
— módszer *605*
— trükk *606*
Monte Carlo-módszer *71*
Montel, Paul Adrian Aristid (1876–1975) 333
Morera, Giacinto (1856–1909) 326
Morera-tétel *326*
Morgan, Frank 622, 629
Móricz Ferenc 623, 629
Morrey, Charles Bradfield, Jr. (1907–1984) 283, 629
$M^\perp$ *158*
$M \perp N$ *158*
Moser, Jürgen 467
mozgás 250
Möbius, August Ferdinand (1790–1868) 101
Möbius-szalag *101*
m-rektifikálható *125*
m-szer differenciálható *233*
multiindex *433*
multilineáris *232*, 233, *300*
— leképezés 303
multiplicitás *64*, *174*
μ-höz tartozó disztribúció *538*
μ-mérhető *18*, 20, 29
$\mu \times \nu$ *44*
művelet 129
művelet, függvények között *12*
∇ *527*
∇_x *526*
Nagy Péter 622, 631
nagy számok gyenge törvénye 47
naiv halmazelmélet 26
Nash-féle egyensúlypont *98*
Nash, John Forbes Jr. 98, 257
Navier, Claude-Louis (1785–1836) 517
Navier–Stokes-egyenlet 517
n-dimenziós Lebesgue-mérték *23*
n-dimenziós tégla 23
n-edrendű homogén lineáris egyenlet *501*
n-edrendű konstansegyütthatós lineáris egyenlet 502
n-edrendű lineáris egyenlet *501*, 503
negatív rész *38*
négy alapművelet 380
négyszög-egyenlőtlenség *77*
négyzetesen integrálható 71, 377, 563
nem folytatható *468*
— mérhető 23, *25–26*, 26
— üres 93, 176
nemelfajuló eset *456*
nemexpanzív *612*, 613
— félcsoport *617*
nemkonform *574*
nemkorlátos operátor 202, 204
nemlineáris evolúciós egyenletek 619
— funkcionálanalízis 75
— operátor 75
— relaxáció *99*
— rezolvens *614*
nemnegatív függvény 32
— halmazfüggvény 17, 20
— operátor *180*, 183, 205, 211
nemtangenciális határérték *422*
Neumann minimax tétele *98*
— tétele *194*
Neumann, Carl Gottfried (1832–1925) 175, 437, 517–518, 528

Neumann-feladat *528*, *567*
Neumann János (1903–1957) 71, 74–75, 98, 156, 172, 194, 348, 559, 587, 603, 622, 629
Neumann-sor *175*
Neumann-stabilitás *603*
Newton binomiális sora *318*, *320*
— interpolációs formulája *385*
Newton–Cotes-formula *66*
Newton [njútn], Isaac (1643–1727) 7, 59, 66, 99, 243, 245, 318, 320, 385, 388, 425, 467, 495, 537
Newton–Leibniz-formula *59*
Newton-módszer *99*, *243*, *388*, 515
Nicolson, Phyllis 603
Nikodym, Otto (1888–1974) 51, 53
Nomizu, Katsumi (1924–2008 622, 628
Nordheim, Lohar Wolfgang (1899–1985) 74
norma 112, *112*, *121*, 126, *128*, *156*, 215, *232*
normában való konvergencia 166
$\| \ \|_1$ *122*
$\| \ \|$ *112*, 122, 126
normál alak *523–524*
— autonóm egyenlet 510
— egyenlet *469*, *497*
— vektormező 295
normálgörbület *253*
normális *103*, *180–181*, 198
— eloszlás 73
— operátor 190, 192–193, 195, 199–202, 204–208, 216, 589
normálmetszet *253*
normálsík *249*, *253*
normált *112*
— algebra *130*
— tér 75, 112, *112*, 126, *156*, 173
— terek szorzata *118*
normálvektor 251
$\| \ \|_m$ *568*
$\| \ \|_{m,\alpha}$ *235*
$\| \ \|_{m,p}$ *568*
normanégyzet-egyenlet *472*
$\| \ \|_p$ *122*
$\| \ \|_\infty$ *122*
növekedési feltétel 611
0 12
nullhely 342
nulloperátor 130, 182
nullsorozat *125*, 125, 131, 223
nulltér *128*, 218
numerikus analízis 75
— eljárás 467
— instabilitás *514*
— integrálás 70
— megoldás 512
ν^m *28*
ν_δ^m *28*
ν^n 23
$\mathbf{n}(x, A)$ 284
nyelő 526
nyílt 21–23, 29, *79*, 79, 86, 90, 93, *101*, 175
— formula *66*
— intervallum 89
— leképezés 154, 317
— leképezések tétele *154*, *317*
nyújtott *403*
oktáv 265
oldjuk meg *473*
Olmsted, John M. H. 621, 626
$\omega(a, f)$ *340*
operátor 144
— alulról korlátos *180*
— felülről korlátos *180*
— nemnegatív *180*
— pozitív *180*
operátoralgebra 265
operátoregyenlet *215*, 243–244, 485, 496
orbitálisan ekvivalens *471*, 505
ortogonális 71, *158*, 161, 186, 208
— felbontási tétel *159*
— komplementer *158*, 180
— polinom 68, *371*, 372, 377, *377*
— projekció 195, 206
— rendszer *158*, 216
— sor 378, 517
ortogonalizációs eljárás 391
ortonormált bázis 162
— polinomrendszer 375
— rendszer *158*, 160, 350

— sorozat 161–162
Ostrowski, Alekszander Markovics (1893–1986) 8
oszcillációs függvény *86*
oszkuláló paraboloid *253*, 256
osztott differencia *384*, 482
Oxtoby, John C. 32, 93, 621, 629
önadjungált 172, *180*, 181, *181*, 182–185, 191, 194, 204–210, 220, 222, 559, 563, 587, 589
— projekció 184, 190, 196
összeférhető *257*
összefüggő *88*, 88–89, 91
— komponens *89*
— pontpár *103*
összeg *102*, *113*, 128
összeggörbület *255*
összehúzható *97*, *278*
összeragasztás 100
összetétel 239
összetett függvény mérhetősége *30*
— kvadratúraformula *68*
— Simpson–formula *68*
— trapézformula *68*
Páles Zsolt 12, 447, 623, 629
Pál Jenő 271, 275, 283, 621, 629
Pál László György (1929–1996) 171, 377, 623, 629
pálya *100*, *248*, *470*
— indexe *324*
pályatér *100*
parabolikus *523*, 524, *526*, 528, 592, 594
— interpoláció 67–68, *386*
paralelogramma-azonosság *157*
paraméteres integrál 428
— — differenciálása 275
paraméterezés 255
páratlan függvény 404
parazita megoldás *515*
parciális derivált 527
— differencia *482*
— differenciál *231*, *233*
— differenciálegyenlet 75, 145, 213, *468*
— differenciáloperátor 433
— függvény *12*
— gyenge differenciál *231*
— integrálás *62*, 62, *434*
— összegzés *116*
— törtekre bontás *342*, 342
$\partial^\alpha T$ *539*
$\partial_i f(x)$ *231*
$\partial_{x_i} f(x)$ *231*
$\partial_x \partial_y f$ *233*
páros függvény 404
Parseval-egyenlőség *161*, 351
Parseval [parszevál], Marc-Antoine des Chênes (1755–1836) 161
Patashnik, Oren 322, 626
Peano, Giuseppe (1858–1932) 14, 488
Peano–Jordan-mérték 14
Peano-tétel *488*, 510
Penrose, Roger 308, 624, 629
peremérték 568
peremérték-feladat *528*, 571
peremérték-probléma 579
peremfeltétel 427, 434, 520, 528, *528*, 528
perfekt *79*
periodikus 347, 351, 397, 510
— folytonos 151–153
— — függvények 139
— függvény közelítése *397*
— konvolúció *369*, 369
— megoldás 510
— — stabilitása *509*
periódus 316, 508
permanens *148*
permutáció 302
Petruska György 117, 320, 330, 345–346, 621, 623, 629
Petz Dénes (1953–2018) 629
Phillips, Ralph Saul 622, 627
π *315*
Picard, Charles Emile (1856–1941) 323, 467, 533–535
Picard–Lindelöf-tétel *533–535*, 615
pillangó művelet *398*, 400
Plancherel, Michel (1885–1967) 411
Plancherel-tétel *411*, 546
Planck-állandó *209*
Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858–1947) 209
$\| \ \|_p$ *122*

Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség *568*
Poincaré, Jules Henry (1854–1912) 16, 257, 305, 437, 467–468, 510, 517–518, 537, 568
Poincaré-leképezés *510*
Poincaré-modell *257*
Poincaré–Stokes-tétel *305*
Poisson-egyenlet *527*, 580
Poisson-formula *556*, *581*
Poisson [poaszõ], Simeon Denis (1781–1840) 371, 473, 518, 527, 556
polarizációs formula *182*
polárkoordináták 65
polinom 153, 380, 383, 433, 545
polinomközelítés 394
polinomosztás 401
polinomszorzás 401
pólus 220, *340*, 341–342
Pólya György 629
pontonként konvergens *91*, *121*, 122, 144, 166
pontozott tér *109*
Pontrjagin-függvény *442*, 445
Pontrjagin, Lev Szemjonovics (1908–1988) 442, 484, 510, 623, 629
pontspektrum *174*
pontszerű fizikai mennyiség 538
ponttöltés 330, 538
Popper György 629
potenciál *579*
potenciálegyenlet 517–518
potenciális áramlás 527
Potter, Murray Harold (1918–2008) 283, 629
pozitív definit *241*
— homogenitás *36*
— mértékű Cantor-halmaz *25*
— operátor *180*, 563
— rész *38*
— szemidefinit *242*
— természetes szám *12*
prediktor formula *512*
prediktor-korrektor módszer *512*, 512, 514
Prékopa András 622, 624
primitív függvény *228*, 229, 279–281, 312, 318, 476
projekció 30, *130*, 182, 206
— folytonos 86, 155
projektív tér *101*
proton 211
Prym, Fridrich Emil (1841–1915) 437
pszeudo véletlen sorozat *72*
pszeudo-differenciáloperátor 75
Püthagoras (i.e. 6. sz.) 160
Pythagoras-tétel *160*
$\mathbb{R}$ 80
racionális 21, 24, 27, 43, 86
— törtfüggvény 347, 380
rács 482
Rademacher tétele 64
Rademacher, Hans Adolf (1892–1969) 64, 167–168, 170
Rademacher–Mensov-tétel *170*
Rademacher-rendszer *167*
radioaktív bomlás 72
Radon, Johann (1858–1932) 51, 53, 146
Radon-mérték *22*, 22–23, 27, 32, 47, 53
Radon–Nikodym-derivált *53*, 55, 71
Radon–Nikodym-tétel *51*, *53*
ragadozó–áldozat *472*
Ralston, Anthony 515, 623, 630
rang tétel *239*, 494
reciprok cella *402*
— vektor *370*
redukálja *188*
redukált tömeg 211
Reed, Michael 622, 630
reflexív *143*, 145
reguláris *103*, *174*, 175, 179, 207, *450*
— disztribúció *538*, 539–540, 567
regularitás 536, 600
regularitási tétel *429*
rektifikálósík *249*
rekurzív formula *372*, 376
— sorozat 320
rekurzívan hívható 70
reláció *12*
reláció, függvények között *12*
relatív homotópia *96*
relativisztikus effektus 210
relaxáció 213–214
relaxációs paraméter *243*

Remes első algoritmusa *394*
Remes, Jevgenyij Jakovlevics 394
rend *340*, *468*
— csökkentése *502*, 503, *506*
reneszánsz 308
Rényi Alfréd (1921–1970) 168, 622, 624, 630
részcsoport 26
részhalmaz 17
részletösszeg *113*
részsokaság *262*
retraktum *96*
reverzibilis 600
rezgés 600
rezgések terjedése *526*
rezgő húr *440*, 517
— membrán 528
reziduális spektrum *174*, 206
reziduum *340*, 341
$\operatorname{Res}(a, f)$ *340*
reziduumtétel *341*, 341
rezolvens *470*, 496–498
R *470*, 496, *496*, 497
rezolvens egyenlet *496*
— halmaz *174*
$\overline{\mathbb{R}}$ 12, 82
Ricatti-differenciaegyenlet *482*
Riccati-egyenlet *475*
Riccati [rikkati], Jacopo Francesco (1676–1754) 475
Richtmeyer, Robert D. 587, 622, 630
Riemann átrendezési tétele *115*
Riemann- és Lebesgue-integrál *42*
Riemann-féle lokalizációs tétel *355*, *377*
— számgömb *319*
Riemann-felület 319
Riemann, Georg Friedrich Bernhardt (1826–1866) 42, 115, 247, 257, 271, 308, 311, 319, 323, 330, 334, 355, 404, 437, 518–519, 550
Riemann-integrál 265, *272*
Riemann–Lebesgue-lemma 355, *404*
Riemann-tér *257*
Riemann-tétel *330*, *334*
Riesz kiválasztási tétele *33*
— reprezentációs tétele *159*
Riesz-elmélet főtétele *219*
Riesz-féle reprezentációs tétel *47*, 51, *366*
Riesz–Fischer-tétel *123*, 156
Riesz–Fredholm-elmélet 215
Riesz Frigyes (1880–1956) 14, 33, 47, 59, 74–75, 112, 123, 128, 134, 146, 156, 159, 172, 204, 215, 218–219, 621–622, 630
Riesz-lemma *120*, *218*
Riesz-projekció *424*
Riesz-tétel *134*
ritka 213
Ritz-módszer *438*, 563, 570–571, 573
Ritz, Walther (1878–1909) 439, 570–571
Rivest, Ronald L. 625
R-közel *107*
rng *12*, 34
robbanás 472
Roberval, Gilles (1602–1675) 537
Rodrigues [rodrig], Benjamin Olinde (1794–1851) 374
Rodrigues-formula *374*
Rodriques-formula 377
Rolle, Michel (1652–1719) 228
Rolle-tétel *228*
Romberg, Werner (1909–2003) 69
Romberg módszere *69*
Ross, Kenneth Allen 127, 352, 623, 627
rotáció *294*, 307
Rouché [rusé], Eugène (1832–1910) 343
Rouché-tétel 246, *343*
Royden, Halsey Lawrence 131, 622, 630
$R(t, \tau)$ *470*
Rudin, Walter (1921–2010) 11, 202, 276, 283, 309, 621, 623, 630
Ruffini, Paolo (1765–1822) 308
Runge, Carl (1856–1927) 69, 511
Runge–Kutta-módszer *511*, 513–514
Runge-szabály *69*, 511
Russell, Bertrand (1872–1970) 7
S *409*, 427, 434
Sabat, B. V. 623, 626
Safarevics, Igor Rosztiszlavovics 630
sajátaltér *174*, 208, 219, 577, 585

sajátérték *174*, 186, 206, 208, 211, 216, 219–220, 371, 510, 548, 566, 569, 577, 585, 589
sajátértékek módszere *216*
sajátérték-feladat 530, 577
sajátérték-probléma *216*, 518, 527, 530, 581
sajátfüggvény 75, 212, 371, 519, 530, 569, 577, 581–582, 584
sajátvektor *174*, 186, 216, 220, 566, 570, 589
Saks, Stanisław 622, 630
Sands, Matthew 624, 626
sávfeltétel *520*
Scharle Péter 574, 628
Schauder első fixponttétele *225*
— második fixponttétele *225*
Schauder-bázis *118*
Schauder, Pawel Juliusz (1899–1943) 118, 225
Schipp Ferenc (1939–2024) 11–12, 271, 275, 283, 621, 628–630
Schmidt, Erhard (1876–1959) 75, 162, 172, 220–221
Schrödinger-egyenlet *210*, 527, *589*, 600
Schrödinger, Erwin (1887–1961) 75, 209–210, 527, 589
Schrödinger-operátor 549
Schrödinger-reprezentáció 209
Schubert, Horst 622, 630
Schwartz, Jacob T. 622, 625
Schwartz, Laurent (1915–2002) 537
Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921) 75, 156, 234, 329, 437, 517–518, 622, 630
Schwarz-lemma *329*
Schwarz-tétel *234*
Seidel, Phillip Ludwig von (1821–1896) 214
$\mathcal{S}_\varepsilon(x)$ *78*
sgn *317*
SI 12
Sieklucki, Karol 622, 625
Sierpiński-szőnyeg *29*
Sierpiński, Wacław (1882–1969) 29
Sigler, Laurence Edward 12, 26, 139, 627
síkinga 426
Sikorski, Roman 630
síkpont *255*
sima függvény *259*
— görbe *248*
— iránymező *264*
— leképezés *259*
— sokaság *258*
— vektormező *262*
simítás *392*, *407*
Simmons, George F. 9
Simon, Barry Martin 622, 630
Simon László 527, 623, 625, 630
Simon Péter 12, 271, 275, 283, 621, 629
Simonyi Ernő 398, 630
Simonyi Károly (1916–2001) 624–625, 630
Simpson-formula *67*, 68–69, 515
Simpson-formula, összetett *68*
Simpson, Thomas (1710–1761) 67
simulókör *250*
simulósík *249*
skalár *112*
skalármező *283*
skalárpotenciál 526
$\mathcal{S}^{n-1}$ *78*
Sobczyk, Andrew 140
sokaság *257*
Soloway, Robert M. 26
Sólyom Jenő 624, 630
Sommerfeld, Arnold (1868–1951) 519
sor 75
— konvergens *113*, *121*
sorfejtés 371
sorok átrendezése 115
sorompó módszer *460*
sorozat 85
spektrálanalízis *349*
spektrálelmélet 75, 156, 172, 517, 563
spektrálfelbontás 190, *199*, 200, *202*, 204, 206, 209, 587
spektrálintegrál *198*, 205
spektrális felbontás 402
spektrálkritérium *514*, 603
spektrálleképezés *174*, *177*, 206
spektrálleképezés-lemma *174*

spektrálmérték 190, *196*, 196, 198–199, 202
spektrálsugár *130*, *174*, 181, 223
spektrálsugár-formula *178*
spektrálszintézis *349*
spektráltétel *190*, 199, *202*, 205
— szorzat alakja *191*, *193*, *202*
spektrum 74, *130*, *174*, 175, 179, 205, 208, 509
spin 210
spline *574*
— interpoláció *574*
$S(s)$ *40*
$S(t)$ *470*, 470
stabil *605*
stabilitás 467, 497, 507, 509, 512–514
stacionárius *527*
statisztikai minta *71*
Stein, Clifford 625
Stein, Elias M. 630
Steinhaus példája *358*
— tétele *25*
Steinhaus, Hugo Dyonizy (1887–1972) 25, 75, 144, 358
Stieltjes-integrál 42, *265*
Stieltjes, Thomas Jan (1856–1894) 26, 42, 265
stiff *515*, 516
Stirling-formula *117*
Stirling [sztörling], James (1692–1770) 117
stochasztikusan konvergens *71*
Stokes tétele *294*
Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903) 283, 294, 305, 517
Stone tétele *137*
Stone [sztoun], Marshall Harvey (1903–1989) 137–138, 173
Stoyan, Gisbert 574–575, 602, 624, 630
Stromberg, Karl 26, 104, 622, 627
Sturm, Jacques Charles François (1803-1855) 371, 517, 577
Sturm–Liouville-probléma *577*
súly *66*
súlyfüggvény 68, 71, *158*, 371
$\sup f_n$ 31
$\operatorname{spt} T$ *541*
súrlódás 510
sündisznó tér *100*
sűrű 25–27, *80*, 80, 87–88, 93–94, 121, 123–124, 137–139, 143, 158, 161, 174, 180, 185, 190, 194, 213, 409
sűrűn definiált 181, 184, 189, 194, 198, 200
sűrűség 53, 538
sűrűsödési hely *81*, 83
$\mathcal{S}'$ *543*
S_y *542*
szabad tömegpont 472
Szabó György 12
szakadás *85*
szakaszonként folytonosan differenciálható *59*
— lineáris pálya *248*, 324
— síma *248*
Szamarszkij, Alexander Andrejevics 575, 602, 624, 630
számítási hibák 383
számláló mérték *17*, 23, 28, 43, 71, 125
számosság 29
szaporodás 472
— versengéssel 472
Szász Domokos 622, 624
Száz Árpád 12, 630
Szegő tétele *149*
Szegő Gábor (1895–1985) 149
Székelyhidi László 12, 623, 630
szekuláris egyenlet 495
szelőmódszer *387*
szélsőérték *241*, 241–242
szemidefinit 254
Szenthe János 622, 630
szeparábilis 30, 34, *80*, 80, 84–85, 87, 90–92, 113, 118, 124–126, 162
— altér 34, 41
— egyenlet *473*
— metrikus tér 21, 32–33
— normált tér 31–32
szétválasztja a pontokat *136*
Szidarovszky Ferenc 623, 631
$\sigma(A)$ 507
σ-additív *16*, 17

σ-algebra *17*, 21
σ-szubadditív *16*, 17, 20
σ-véges *17*, 23, 27, 43–44
szigorúan monoton *605*, 606, 608
— — növekedő 26–27, 63
— normált *126*, 126
szimmetria *77*
szimmetrikus bilineáris függvény 281
— forma *301*
— multilineáris forma 234
— operátor *180*, 184–185, 188, 208, 211, 527, 563, 570
szimplex 573
szimuláció *70*
szimultán közelítés módszere *214*
szinguláris *50*, 61, *174*, 179
— magfüggvény *222*
szingularitás 66, 70, 550
szinusz *315*
— transzformált *404*
Szkorohod, Anatolij Vlagyimirovics 622, 626
Szobol, Ilia M. 72, 631
Szoboljev beágyazási tétele *568*
Szoboljev, Szergej Lvovics (1908–1989) 75, 537, 567–568
Szoboljev-tér 438, 566, *567*
szokásos metrika *82*, *538*, *543*
— simító függvény *407*
Szolodovnyikov, Alexandr Szamuilovics 627
szórás 212
szórásnégyzet 322
szóródás 370
szóródási jelenség 527
szoros *420*
szorzás *265*, 276
szorzásoperátor 184, *189*, 190–191, 193, 202
szorzat *91*, 105, 128
— alak 206
— előállítás 216
szorzatgörbület *255*
szorzatmetrika *86*
szorzattopológia *102*
szög 252
Szőkefalvi-Nagy Béla (1913–1998) 55, 59, 61, 204, 329, 342, 345–346, 350, 355–357, 364, 377, 621–623, 630–631
Szőkefalvi-Nagy Gyula (1887–1953) 622, 631
szubadditivitás *16*
szubbázis *80*, 104
szubimmerzió *262*
szubmerzió *262*
szukcesszív approximáció *483*
szuperpozíció *173*, 495, 497, 501, 525
szükséges feltétel 427
szűkülő 17
szűrő *104*
szűrőbázis *104*
Tarski, Alfred (1902–1983) 26
tartó *87*, *541*
tartomány *88*, 278
Tauber tétele *149*
Tauber, Alfred (1866–1942) 149
$\tau_x T$ *539*
távolság 77, *77*
távolságtartó leképezés *77*
Taylor, Brook (1685–1731) 235–237, 311–312
Taylor-formula *235–237*
Taylor-polinom *235*
Taylor, S. James 627
Taylor-sor 175, *312*, 394, 480
Taylor-tétel *311*
$T_{\mathbb{C}}$ *173*
T^* *180*
$T * S$ *542*
tégla 23, 574
T_1-tér *103*
tehetetlenségi nyomaték 66
telegráf-operátor 549
telített atlasz *258*
teljes *82*, 82–83, 85, 91–94, 119, 121, 157, *162*, 361, 371, *468*, 540
— burok 121, *158*
— integrál *264*, *521*, 522
— — képe *264*
— megoldás *468*, 490–491, 495, 497–498, 501
— mértéktér *17*, 18, 27, 34, 41, 44

— metrikus burok *121*
— — tér 21, 23, 29, 33, 88, 93, 121
— ortogonális rendszer 583
— ortonormált rendszer 164, 186, 216, 220, 530, 566, 569–570, 577, 581, 589, 597
— Radon-mérték 47, 54
teljesen folytonos 216
— integrálható *264*
— korlátos *83*, 83–85, 91, 122
— reguláris *103*
temperált alapmegoldás 547
— disztribúció *543*, 544–545
tenzorszorzat *303*
térfogat 16, *23*, 23, 27, 65
térkép *257*
természetes egyenlet *250*
— irányítás 298
— kiterjesztés *20*, 23, 47
— leképezés *143*
— logaritmus *314*
— mérték *42*, 122
— paraméterezés *248*
— rendezés 12
természettudomány 426
terület 16
t és τ közötti leképezés *470*
tesztfüggvény *537*, 539
Theorema egregium *255*
Thomas, G. B. 631
Thomson, William (Lord Kelvin, 1824–1907) 437, 518
Tietze kiterjesztési tétele *105*
Tietze, Ulrich 105
Titchmarsh, Edward Charles (1899–1963) 481, 546
Titchmarsh-tétel *481*, *546*
T_2-tér *103*
$\check{T}$ *539*
T_4 tér 105
T_0-tér *102*
topológia 21, *93*, *101*, 468
topológiai invariáns *109*
topologikus algebrai struktúrák *127*
— csoport *127*
— faktortér *102*
— fogalmak *93*
— tér 74, *101*, 104
— vektortér 75, *127*
topologikusan ekvivalens *93*, *471*, 505
torlódási pont *79*, 83, 85, 219
tórusz 101
torzió *249*, 250
többdimenziós Fourier-sor *370*, 402
többdimenziós rögzített peremű variációs probléma *433*
többlépéses módszer 515
többrétű 319
többszörös integrál 70
többváltozós 433
— függvény 36
töltés 211
töltéssűrűség 526
tömeg 211
tömegpont 538
tömegsűrűség 526
Töplitz tétele *148*
Töplitz-operátor *424*
Töplitz, Otto (1881–1940) 148, 186
törtlineáris leképezés *318*
transzverzalitási feltétel *442*
trapéz módszer *510*, 512–514, 516
trapézformula *67*, 68–69
trapézformula, összetett *68*
trapézszabály 512
Trefftz, Erich (1888–1937) 439
Trefftz-módszer *439*
Triebel, Hans 212, 585, 622, 631
trigonometrikus alak 351
— függvény 308, *314*, *316*
— polinom *139*, 139, 153
— rendszer *166*, 361
— sor 365
triviális homotópia *278*
Trócsányi Zoltán 624, 627
T. Sós Vera 621, 628
$T \times S$ *542*
$\hat{T}$ *544*
t-től függő első integrál *493*
T_x *542*
Tyihonov tétele *91*, *102*, *105*

Tyihonov, Andrej Nyikolajevics (1906–1993) 91, 102–103, 105
Tyihonov-tégla *102*
Tyihonov-tér *103*
$\mathbb{U}_\varepsilon(A)$ *78*
$\mathbb{U}_\varepsilon(x)$ *78*
Ulam, Stanisław Marcin (1909–1984) 71
ultraszférikus polinom 583
$u_{\mathbf{n}}$ *527*
$\mathbb{U}^n$ *78*
unicitási tétel *360*, *410*
uniform altér *107*
— ekvivalencia *93*
— tér 74, *107*
— terek szorzata *107*
uniformitás *107*
unitér *181*, 587, 589
— operátor *180*, 183, 191, 193, 202, 205–207
Uriszon-lemma *90*, 90, *103*, *105*
Uriszon, Pável Szamojlovics (1898–1924) 90, 103, 105
valós FFT *400*
— idejű 467
— rész *309*
valószínűség 16, *71*, 209, 212
valószínűségi mérték *17*
— mértéktér 47
— mező *70*
— változó 63, *71*, 322
valószínűségszámítás 26, 63, *70*, 322
változás *56*
változó 540
változók szétválasztása 517, *529–530*
van der Waals állapotegyenlet 246
van der Waals, Jan Diderich (1837–1923)) 246, 390, 392
van der Waerden, Bartel Leendert (1903–1996) 112, 631
várható érték 71, 322
variáció *227*
variációs egyenlet *484*, *492*, 498
— egyenlőség *570*
— elv *426*
— probléma *427*, *433*, *564*, 566
variációszámítás 75, 145, *426*, 518
véges 104
— differencia 69
— dimenzió 118–120, 129, 216–220, 223
— kodimenzió 218, 220
— mérték 17, 33
— rangú 220
— szórású *71*
végeselem *573*
végpont *247*
∞ 12, 38
végtelen mátrix 74
— rendű *538*
— sokszor differenciálható 237
— szorzat *116*
$\|\ \|_\infty$ *122*
vegyes feladat 518, *528*, 529, 595–596
— módszerek *480*, *503*
— parciális derivált 243
— szorzat *249*
vegyes feladat hiperbolikus egyenletre *594*
vegyes feladat parabolikus egyenletre *590*
vektor *112*
— értékű 39
vektori szorzat *248*, 249
vektormező *262*, *283*, 299
— kiegyenesítése 467
— zérushelye 98
vektorpotenciál 526
véletlen keverés *72*
véletlenszám 72
véletlenszám-generátor *72*
vezérlési egyenlet *440*
— funkcionál *440*
— függvény *440*
— korlátozás *440*
Vilenkin, Naum Jakovlevics (1920–1991) 14
visszahúzás *82*
visszahúzó erő 526
Vitali, Giuseppe (1875–1932) 333
Vitali–Montel kiválasztási tétel *333*
Vlagyimirov, Vaszilij Szergejevics 440, 518, 524, 528, 540–545, 555–557, 579, 582, 621, 623, 631
Volterra-féle integráloperátor *223–224*
Volterra-integrálegyenlet 517

Volterra, Vito (1860–1940) 223, 463, 465, 472
Wade, William Raymond 348
Wallis-formula *346*
Wallis, John (1616–1703) 346
Wallman, Henry (1915–1992) 627
Walsh [vals], Joseph Leonard (1895–1973) 167
Walsh-rendszer *167*
waveletcsalád *417*
Weber, Wilhelm Eduard (1804–1891) 247
Weierstrass példája *327*, *439*
— tétele *87*
Weierstrass első approximációs tétele *135*
Weierstrass–Erdmann-féle törési feltétel *445*
Weierstrass–féle szorzat előállítás *346*
Weierstrass-feltétel *445*
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) 87, 119, 121, 135, 137–139, 327, 331, 340, 346, 437, 439, 445, 518
Weierstrass-kritérium *121*
Weierstrass második approximációs tétele *139*, *360*
Weierstrass–Stone-tétel *137–138*
Weierstrass-tétel *331*
Weinberg, Steven (1933–2021) 7
Weir, M. D. 631
Weiss, Guido 630
Weston-elem *392*
Weyl, Hermann (1885–1955) 6, 75
Widder, David Vernon 631
Wigner Jenő Pál (1902–1995) 6–7, 338
Witt, Alexandr Alekszandrovics (1902–1938) 510
Wloka, Joseph 527, 623, 631
$\mathcal{W}^{m,p}$ *568*
$\mathcal{W}_0^{m,p}$ *568*
Wronski-determináns *502*
Wronski, Hoené (1778–1853) 502
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ *17*
$X_{\mathbb{C}}$ *173*
X^* *129*
$X \to Y$ *12*
$x \perp y$ *158*
$x(\tau) = \xi$ *470*
$x' = A(t)x$ *495*
$x' = A(t)x + b(t)$ *495*
$x' = Ax$ *497*, *501*
$x' = f(t, x)$ *469*
$x' = f(x)$ *470*
Yosida, Kosaku 614, 622, 631
Yosida-közelítés *614*
$\mathbb{Z}$ *12*
Zaanen, Adriaan Cornelis 35, 631
z^w *317*
zárt 21, *79*, 80, 82, 84, 86, 90, 105, 118–119, *161*, 162, 175
— altér 118
— formula *66*, 69
— görbe *247*, 324
— gráf tétel *155*
— képtér tétel *453*
— operátor *155*, 155, 181, 194–195, 198, 200, 208, 216
— pálya *248*, 327, 341
Zeidler, Eberhard (1940–2016) 8, 10, 99, 141, 145, 206, 239, 244, 246, 439–440, 442, 447, 510, 522, 527, 568–570, 572–573, 575, 602, 605, 621–624, 631
Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand (1871–1953) 26
Zermelo–Fraenkel-axiómarendszer 26
zérushely *340*, 343
zérushelyek izoláltságának elve *313*
ζ *321*
Ziermann Margit 622, 629
Zorn-lemma 104, *139*
Zorn, Max August (1906–1993) 139
Zsukovszkij, Nyikolaj Jegorovics (1847–1921) 308, 331
Zsukovszkij-profil *331*
Zwillinger, Daniel 480, 623, 631