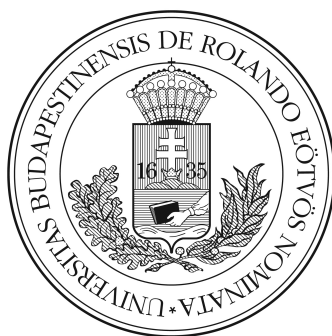


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI INTÉZET

DR. KERKOVITS KRISZTIÁN ANDRÁS

Vonatkozási rendszerek a térinformatikában

Jegyzet a Felsőgeodézia előadáshoz



Budapest, 2026.

Lektorálta: DR. GEDE MÁTYÁS

A jegyzet az ELTE IK 2026. évi tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán
elnyert forrás felhasználásával készült.

A jegyzet szedése a $\text{\LaTeX}$ 2_ε programban készült.

*Ez a jegyzet non-profit oktatási és kutatási célokra szabadon felhasználható és
terjeszthető az eredeti szerző és esetleges módosítás esetén azok egyértelmű
megjelölése mellett. Minden más célú, különösen az anyagi haszonszerzéssel járó
felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével lehetséges.*

Tartalomjegyzék

Előszó	5
I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája	7
I.1. A felsőgeodézia tudományága	7
I.2. A sík	7
I.3. A gömb	8
I.4. A forgási ellipszoid.	10
I.5. Geodéziai alapfeladatok ellipszoidon	12
II. Transzformációs paraméterek becslése	18
II.1. Mikor szükséges becsülő transzformáció?	18
II.2. Polinomos transzformáció.	19
II.3. Szögtartó transzformációk	21
II.4. Projektív transzformáció	23
III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk	25
III.1. Vízszintes dátumok	25
III.2. MOLOGYENSKIJ-traszformáció	29
III.3. BURŠA–WOLF-traszformáció	30
III.4. A korrekciós rács	31
III.5. Szélesség, hosszúság és magasság a térben	32
IV. Térképvetületek a térinformatikában	35
IV.1. Az EPSG-adatbázis	35
IV.2. Egyéni vetületek megadása	35
IV.3. A transzformációk jogi háttere	38
IV.4. Transzformációk a szomszéd országokban	40
V. A magasság és az északi irány meghatározása	41
V.1. Magassági dátumok	41
V.2. A földmágnesesség	45
V.3. Meridiánkonvergencia és irányredukciók	47
VI. Kozmikus geodézia	51
VI.1. Az égi vonatkoztatási rendszer	51

VI.2. Műholdas mérések	54
VI.3. Időmérés	56
VI.4. GNSS és klasszikus geodézia	58
Függelékek	60
A. Angol–magyar szószedet	60
B. Gyakorlati feladatok megoldásai	61
C. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására	66
D. A nehézségi erő	70
E. Tárgymutató	75

Előszó

A korábbi években megjelent, térképészeti matematikát tárgyaló jegyzetsorozat negyedik tagját a tantervi változások hívták életre. A 2022-ben indult geoinformatikus mesterképzés a korábbi Vetülettan előadások első félévét vette csak át a térképész mesterképzésből, azonban annak tananyaga bővült a vonatkozási rendszerek közötti transzformációs lehetőségek ismertetésével. Ezeket az ismereteket eleinte (átmeneti, gyors megoldásként) függelékként csatoltam a régi jegyzethez. Azonban az így létrejövő Térbeli referenciarendszerek című tárgy túlságosan megterhelőnek bizonyult a hallgatók számára, ezért a kurzust szétválasztottuk. A vonatkozási rendszereket tárgyaló anyagrész másik félévbe került át, és a Felsőgeodézia tárgynevet kapta. Jelen jegyzet ennek az új előadásnak leiratát tartalmazza. A fejezetek az egyes előadások időkereteibe próbálnak beleférni, ezért bár törekedtem arra, hogy a tananyag kövessen valamilyen tematikus rendező elvet, ezt nem lehetett mindenütt maradéktalanul megvalósítani.

Az új tantárgy időkerete szűkös (kéthetente egy előadás), ezért a jegyzetnek közel sem lehetett célja a felsőgeodézia teljes tudományterületét lefedni; ugyanakkor egy térképész vagy geoinformatikus hallgatónak nem is szükséges mélységeiben ismerni például a gravitációs rendellenességek modellezési lehetőségeit vagy a földrajzi koordináták LAPLACE-pontokon történő kiegyenlítésének módszerét. Nagyon is fontos ugyanakkor tisztában lennie az eltérő vonatkozási rendszerek létezésének tényéről, okairól és az átszámítás lehetőségeiről. Az ilyen átszámítások helytelen alkalmazásából az eltérő koordináta-rendszerű alapanyagok között nem kívánatos elcsúszások léphetnek föl. Ezért a jegyzet elsősorban ezekre a módszerekre hegyezi ki mondandóját, a felsőgeodézia további alkalmazásait csak érintőlegesen kívánja tárgyalni.

A szövegben található kék linkek kattinthatók, ezek könnyítik a navigációt a jegyzeten belül. A jegyzetben többfelé találkozhatunk színes képekkel. Ez a könnyebb megértést hivatott segíteni a bonyolult átalakítások során. Ha egy egyenlőségjel két oldalán azonos színű kifejezéseket látunk, akkor azok értéke megegyezik. Gyakran a törtek vagy egyenletek egyszerűsítése előtt vagy bővítését követően jelennek meg mindkét oldalon az azonos színű kifejezések az átalakítás kiemelésére. Ezért nem javasolt a jegyzet fekete-fehér nyomtatása.

Az alapismeretek fölelvenítése céljából az olvasónak ajánlatos az alapszakos tantárgy jegyzetét (Bevezetés a vetülettanba és a geodéziába) előzetesen átfutni. Ez a jegyzet többször hivatkozik az abban levezetett összefüggésekre. Kisebb mértékben, de az egyes vetületek leírásánál épít az őszi féléves vetülettani kurzus jegyzetére (Valódi vetületek) is.

Kívánom, hogy az olvasó élvezettel ismerhesse meg a vonatkozási rendszerek sokféleségét és az ebből adódó matematikai problémákat!

Első előadás

A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

I.1. A felsőgeodézia tudományága

A *felsőgeodézia* feladata, hogy a Föld alakját és méreteit meghatározza, továbbá vonatkozási rendszereket (felsőrendű alapponthálózatokat) alakítson ki. A felsőgeodézia tehát alapot szolgáltat az *általános geodézia* részére azzal, hogy a terepen megjelölt alaphálózatok pontjaihoz koordinátákat rendel. A felsőgeodézia segítségével határozhatók meg az azok az alapfelületi koordináták, amelyeket a *vetülettan* síkba tud képezni, ugyanakkor a felsőgeodézia vonatkozási rendszereit gyakran valamilyen vetületi síkon definiáljuk. A felsőgeodézia mérési módszerei erősen támaszkodnak a *csillagászat* és a *földfizika* (különösen a nehézségi erővel és földmágnesességgel kapcsolatos) eredményeire. A görbült felületek belső méretviszonyait a *differenciálgeometria* segítségével ismeri meg.

A felsőgeodézia számos tudományterületet foglal magába. A *kozmosz geodézia* foglalkozik a természetes és mesterséges égitestek segítségével végzett helymeghatározással. A *fizikai geodézia* a Föld azon fizikai jellemzőit vizsgálja, amelyek hasznosak a helymeghatározásban (pl. gravitáció, mágnesesség). A *szferoidikus geodézia* tárgyalja a gömb vagy forgási ellipszoid alakúnak tekintett Föld felszínén kialakuló mértani összefüggéseket. Ezen területek közös célja, hogy segítségükkel *geodéziai hálózatokat*, azaz a terepen megjelölt olyan alappontokat létesítsünk, amelynek mért koordinátái alapján részletpontjaink koordinátáit már egyszerűbb módszerekkel is le tudjuk vezetni. Az alapponthálózatok koordinátái által megvalósított vonatkoztatási rendszert *geodéziai dátumnak* nevezzük.

I.2. A sík

Elsőként ismerjük meg a Földet közelítő három legfontosabb felület tulajdonságait! Az itt leírtak az alapszakos tananyag ismétlése, bővebb információért vegye elő a régi jegyzetet!

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

Ha a Föld alakját síkkal helyettesítjük, akkor a koordinátákat általában derékszögű koordináta-rendszerben adjuk meg. Vigyázzunk, mert az, hogy x és y merre mutat, korántsem egyértelmű. A *matematikában szokásos koordináta-rendszer* esetén x jobbra, y fölfelé mutat, míg a számítástechnikában alkalmazott *pixel koordináta-rendszerben* a képernyő bal felső sarka az origó, x jobbra, y pedig lefelé mutat. A magyar geodéziai gyakorlatban két eltérő rendszer van használatban: az *északkeleti tájékozású rendszerben* x északra, y keletre mutat, míg a *délnyugati tájékozású rendszerben* x délre, y nyugatra áll.

A geodéziai műszerekkel elsősorban távolság és szög (irány) mérésére van lehetőség, míg nekünk a mért pont koordinátáira van szükségünk. Ezért igen gyakran fordul elő, hogy egy pontból mért azimut és távolság alapján meghatározzuk egy ismeretlen pont koordinátáit. Ezt *első* vagy *direkt geodéziai alapeladatnak*, esetleg *főfeladatnak* nevezzük. A műszerek tájékozásához és az északi irány kitűzéséhez alkalmazzuk ennek megfordítását, amikor koordinátákból számítunk távolságot és azimutot. Ez a *második* vagy *inverz geodéziai alapeladat*.

A direkt és inverz geodéziai alapeladatok képleteit északkeleti tájékozású rendszerben alapszakon vezettük le (a távolságot most t , az azimutot δ jelöli):

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + t_{AB} \cos \delta_{AB} \\y_B &= y_A + t_{AB} \sin \delta_{AB} \\t_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ \operatorname{tg} \delta_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{aligned}$$

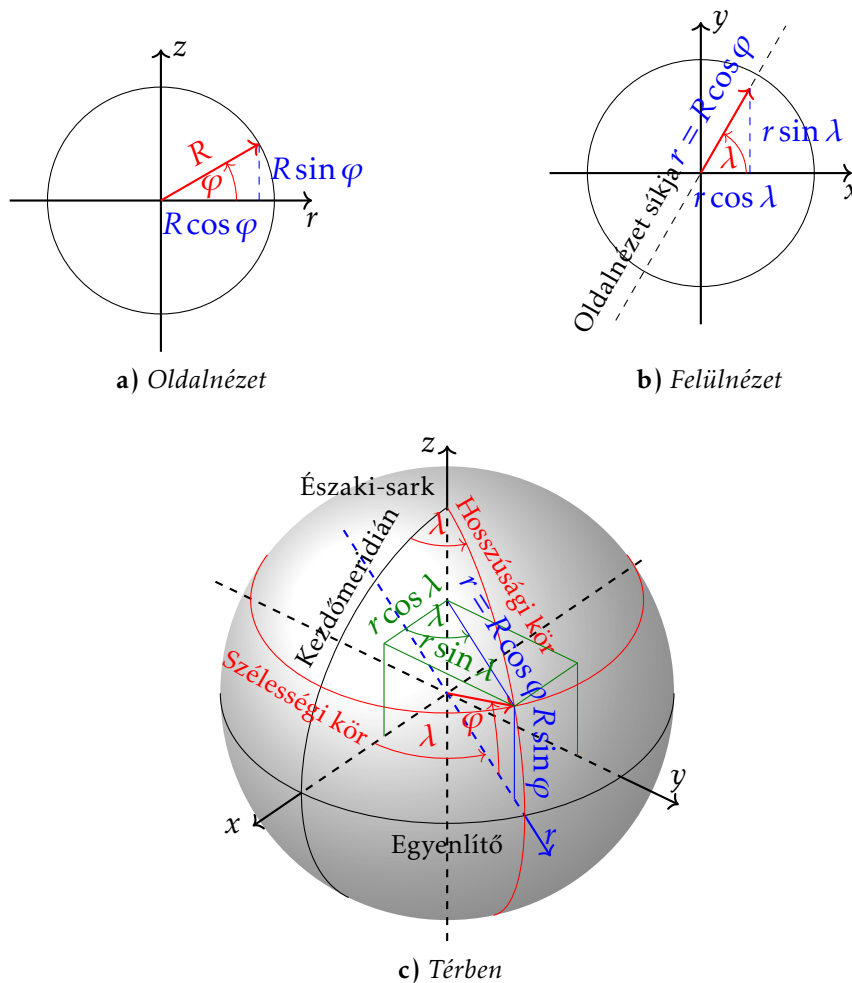
Vigyázzunk, hogy az azimut és a földrajzi hosszúság tangensét tartalmazó képleteknél az $\operatorname{arctg} 2$ függvény határozza meg egyértelműen az ismeretlen szöget.

I.3. A gömb

Ha Földet gömb alakúnak vesszük, leggyakrabban a *földrajzi koordináta-rendszert* alkalmazzuk, melynek koordinátái a φ *földrajzi szélesség* és a λ *földrajzi hosszúság*. Az I.1. ábra alapján felírható:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \cos \lambda \\y &= R \cos \varphi \sin \lambda \\z &= R \sin \varphi\end{aligned}$$

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája



I.1. ábra. Földrajzi koordináták a gömbön

Ha a derékszögű koordinátákból szeretnénk földrajzit kapni, az ábráról az is leolvasható, miszerint:

$$\sin \varphi = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}$$

A Föld esetében a z tengelyt a forgástengely irányában helyezzük el, így a szélességet az erre merőleges síktól mérjük. A 0° szélességi kör neve *Egyenlítő*. Ugyanakkor a hosszúságok mérése nem egyértelmű, mert az x tengelyt tetszőleges *kezdőmeridián* irányába is forgathatjuk. A gyakorlatban

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

leginkább a greenwich-i csillagvizsgálón átmenő meridiánt szoktuk kezdőmeridiánnak választani,^{*} de más kezdőmeridiánnal is találkozhatunk: A franciák például egészen a közelmúltig gyakran Párizstól kezdve tűntették föl a hosszúságokat,[†] régi térképeken pedig gyakran Ferrótól^{**} mért hosszúsággal találkozunk. A nemzeti földmérési munkálatokhoz a legtöbb ország saját kezdőmeridiánt is kijelölt, Magyarországon ez a Gellérthegyen, a Citadella Szabadság-szobor felé eső végénél található jelen halad át.

A gömbi geodéziai feladatok levezetése megtalálható az alapszakos jegyzetben, itt csak a végeredményt közöljük. s az A és B pont távolsága, α az A -ból B -be mutató azimut:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_B &= \sin \varphi_A \cos \frac{s^\circ}{R} + \cos \varphi_A \sin \frac{s^\circ}{R} \cos \alpha \\ \lambda_B &= \lambda_A + \arcsin \frac{\sin \alpha \sin(s/R)^\circ}{\cos \varphi_B} \\ \cos \frac{s^\circ}{R} &= \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)}\end{aligned}$$

I.4. A forgási ellipszoid

Forgási ellipszoidot kapunk, ha egy ellipszist valamelyik tengelye körül körbeforgatjuk. Az ellipszoidot két adattal, az a nagyfél-tengellyel és a b kislefél-tengellyel adhatjuk meg. A forgási ellipszoid alakját jellemezzük még az f lapultsággal, az e első excentricitással és az e' második excentricitással:

$$\begin{aligned}f &= \frac{a-b}{a} \\ e &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \\ e' &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}\end{aligned}$$

A lapultságnak általában a reciprokát szokás megadni ($f \approx 1/300$), míg az első excentricitásnak gyakran a négyzete szerepel a szakirodalomban.

^{*} Valójában a nemzetközi kezdőmeridián a csillagvizsgálótól 102 m-re keletre található a függővonal-elhajlás korrigálása érdekében (VI.3. fejezet).

[†] Ráadásul újfokban, így fokoztan figyeljünk!

^{**} Ez a kezdőmeridián definíció szerint Párizstól 20°-ra nyugatra található az Atlanti-óceánban.

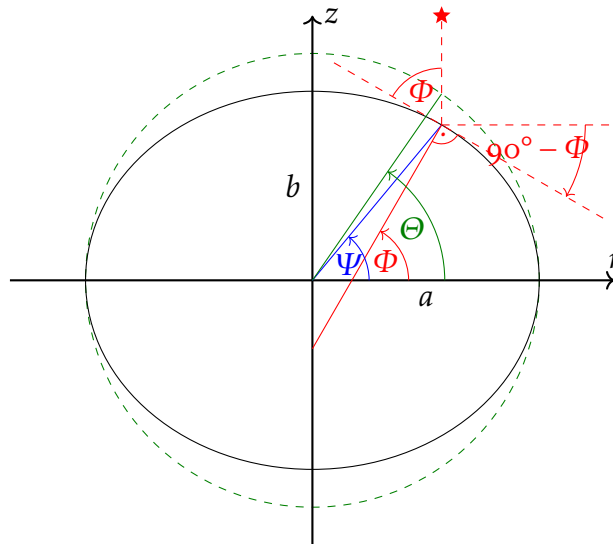
I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

Előfordul azonban, hogy az első és második excentricitást egyáltalán nem adják meg, ilyenkor nekünk kell kiszámítani a lapultságból. A második excentricitást ritkán adja meg a szakirodalom, ezért a következő, alapszakos jegyzetben levezetett összefüggéseket itt levezetés nélkül megismétljük:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{2f - f^2} \\ b &= a\sqrt{1 - e^2} \\ f &= 1 - \sqrt{1 - e^2} \\ e' &= \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}$$

Az ellipszoidon a Λ hosszúságot ugyanúgy értelmezzük, mint korábban a gömbön. Azonban háromféle szélességet is definiálhatunk (I.2. ábra):

- A Ψ *geocentrikus szélesség* az ellipszoid középpontjából a pontba mutató vektor és az Egyenlítő síkja között lévő szög.
- A Φ *geodéziai vagy földrajzi szélesség* a felület normálisa (helyi függőleges) és az Egyenlítő síkja között bezárt szög.
- A Θ *redukált szélesség* az a szélesség, amelyet az a sugarú gömbön mérnénk, ha az ellipszoidot a z tengely irányában a/b -szerésre nyújtjuk.



I.2. ábra. Ellipszoidi szélességek

A térképészeti gyakorlatban leginkább a földrajzi szélességet alkalmazzuk. Ennek oka, hogy csillagászati módszerekkel könnyű volt mérni: a földrajzi szélesség megegyezik az ellipszoid érintősíkja (helyi vízszintes) és

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

a Föld forgástengelyének iránya (Sarkcsillag) között mért szöggel. A három szélességdefiníció közötti átszámítását az alapszakos jegyzetben vezettük le:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \Psi &= \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \Phi \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{a}{b} \operatorname{tg} \Psi \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{b}{a} \operatorname{tg} \Phi\end{aligned}$$

Így bármelyik szélességből a másik kettő kiszámítható, továbbá az északi féltekén belátható a $\Psi \leq \Theta \leq \Phi$ összefüggés.

A forgási ellipszoidon történő számítások során gyakran lesz szükségünk az alapszakról ismerős $M(\Phi)$ meridiángörbületi sugárra és $N(\Phi)$ harántgörbületi sugárra:

$$\begin{aligned}N(\Phi) &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \\ M(\Phi) &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}\end{aligned}$$

A paralelkörök r sugara az ellipszoidon az alapszakos jegyzetből:

$$r = N(\Phi) \cos \Phi$$

1.5. Geodéziai alapfeladatok ellipszoidon

Vegyünk gondolatban egy pontszerű kiskocsit egy forgástest felületén és lökjük meg egységnyi kezdősebességgel! A kiskocsira csak a forgásfelület nehézségi ereje hat, a súrlódástól eltekintünk. A nehézségi erő mindenütt merőleges a potenciálfelületnek tekintett forgásfelületre, tehát a kiskocsi pályájára is. Így a kiskocsin a nehézségi erő nem végez munkát, sebessége mindvégig egységnyi marad. Mivel oldalirányú erő sem hat rá, ezért pályája a felületen belül egyenesnek tekinthető, azaz a kiskocsi a forgásfelület egy geodéziai vonala mentén halad.

Legyen a kiskocsi pályájának pillanatnyi azimutja α , ekkor a sebességének paralelkör irányú komponense $\sin \alpha$. Ez egyúttal a kiskocsinak a felület forgástengelyére vonatkozó kerületi sebessége is. A nehézségi erő iránya (a forgásfelület normálisa) a szimmetria miatt metszi a forgástengelyt, tehát a forgástengelyre vonatkozóan nincs forgatónyomatéka. Az ilyenkor érvényes perdületmegmaradás törvénye miatt a geodéziai vonal mentén haladó kiskocsi kerületi sebességének és a paralelkör r sugarának

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

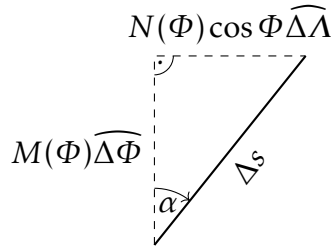
(azaz a forgástengelytől vett távolságnak) a szorzata állandó kell legyen (CLAIRAUT-tétel):^{*}

$$r \sin \alpha = \text{const.}$$

Első ránézésre nem sokat tudtunk meg a forgási ellipszoid geodéziai vonalairól, pedig pusztán ennyi információ elég lesz a pálya meghatározásához. Kezdjük a direkt geodéziai alapfeladattal! Az I.3. ábráról leolvasható, hogy:

$$\cos \alpha = \frac{M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi}}{\Delta s}$$

$$\sin \alpha = \frac{N(\Phi) \cos \Phi \widehat{\Delta \Lambda}}{\Delta s}$$



I.3. ábra. Az ellipszoidi geodéziai vonal elemi kis ívdarabja

Rendezzük át, tudva, hogy a végtelenül kis távolságok hányadosa határhelyzetben a differenciálhányados:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)}$$

$$\frac{d\Lambda}{ds} = \frac{\sin \alpha}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

^{*} Valójában a differenciálgeometria mélységeibe kerültünk. Az itt megkapott összefüggés szigorú bizonyításához variációszámítás és bonyolult differenciálegyenletek megoldása szükséges. A CLAIRAUT-tétel csak forgásfelületeken érvényes.

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

Szükségünk lesz a következő deriváltra is:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{ds} &= \frac{dN(\Phi) \cos \Phi}{d\Phi} \frac{d\Phi}{ds} = \left[\frac{dN(\Phi)}{d\Phi} \cos \Phi + N(\Phi) \frac{d \cos \Phi}{d\Phi} \right] \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= \left[\frac{ae^2 \sin \Phi \cos \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \cos \Phi - N(\Phi) \sin \Phi \right] \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= M(\Phi) \frac{e^2 \sin \Phi \cos^2 \Phi}{1 - e^2} \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} - N(\Phi) \sin \Phi \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= \frac{e^2 \cos^2 \Phi \sin \Phi \cos \alpha}{1 - e^2} - \frac{a(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2} \sin \Phi \cos \alpha}{a(1 - e^2) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} = \\
 &= \frac{e^2 (1 - \sin^2 \Phi) \sin \Phi \cos \alpha - (1 - e^2 \sin^2 \Phi) \sin \Phi \cos \alpha}{1 - e^2} = \\
 &= \frac{e^2 - e^2 \sin^2 \Phi - 1 + e^2 \sin^2 \Phi}{1 - e^2} \sin \Phi \cos \alpha = -\sin \Phi \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Ezt követően deriváljuk a CLAIRAUT-tételt is!

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{ds} \sin \alpha + r \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} &= 0 \\
 N(\Phi) \cos \Phi \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} &= \sin \Phi \cos \alpha \sin \alpha \\
 \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\tan \Phi \sin \alpha}{N(\Phi)}
 \end{aligned}$$

Egy akárhányszor differenciálható f függvény az $x = a$ pont környezetében tetszőleges pontossággal közelíthető az ő TAYLOR-sorával, azaz:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

Természetesen pontos egyenlőség csak akkor állna fenn, ha mind a végtelen sok tagot összeadnánk, azonban a sor gyorsan konvergál, így a sor végén álló kicsiny tagokat figyelmen kívül hagyhatjuk.* Most nézzük, miért

* A módszer minden sima függvénnyel működik, és bonyolult függvényeket hatékonyan közelíthetünk vele. A zsebszámológép is például TAYLOR-sorral számítja a szögfüggvényeket.

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

is volt erre szükség! Írjuk föl Φ_B -t és Λ_B -t, mint a Φ_A, Λ_A ponttól mért s távolság függvényét! Φ -t és Λ -t fejtsük TAYLOR-sorba $s = 0$ körül!

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \Phi_A + \frac{s}{1!} \frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2\Phi}{ds^2} \Big|_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3\Phi}{ds^3} \Big|_{s=0} + \dots \\ \Lambda_B &= \Lambda_A + \frac{s}{1!} \frac{d\Lambda}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2\Lambda}{ds^2} \Big|_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3\Lambda}{ds^3} \Big|_{s=0} + \dots\end{aligned}$$

Az első deriváltakat ismerjük, a magasabb rendű deriváltak az első deriváltak további deriválásából értelemszerűen adódnak. Ha megnézzük Φ és Λ deriváltjainak képletét, látszik, hogy azok α -n keresztül is függnék s -től, de ez sem probléma, hiszen α deriváltját is kiszámoltuk, láncszabállyal be tudjuk helyettesíteni.

Ez a módszer LEGENDRE nevéhez fűződik. Bár levezetése tanulságos és viszonylag egyszerűen érthető, a gyakorlatban nem igazán alkalmazható. Ennek oka, hogy igen lassan konvergál, a geodéziai pontossághoz a hatodik deriváltakra is szükség van, pedig ezek a magasabb rendű deriváltak rendkívül nehezen számíthatók. E mellett az s -ben magas foksámú tagok az inverz alapfeladat megoldását még jobban megnehezítik: Ekkor s az ismeretlen, és megoldóképlet csak s negyedik hatványát tartalmazó egyenletre van.

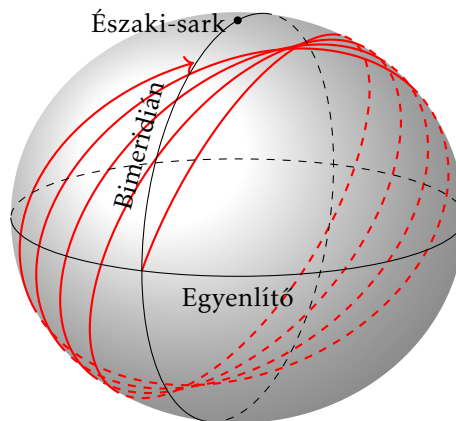
A geodéták jellemzően GAUSS módszerét használják, amely a két pont közti felezőpont körül fejti TAYLOR-sorba a függvényt, sokkal gyorsabb konvergenciát eredményezve (elegendő a második derivált figyelembe vétele). A módszer hátránya, hogy a felezőpont koordinátáit nem ismerjük, egy első tipp után fokozatos javításokkal juthatunk jobb eredményre.

Az előbb tárgyalt hatványsoros módszerek mind azt feltételezték, hogy s viszonylag rövid (< 1000 km). Hosszabb távolságoknál egzakt megoldásokra van szükség. Népszerűnek számít BESSEL megoldása, amely a problémát az egyszerűen megoldható gömbi geodéziai főfeladatokra vezeti vissza, majd a gömb és az ellipszoid közötti eltérést elliptikus integrálokkal korrigálja. BESSEL képleteit KARNEY alakította számítógépes futtatásra alkalmassá. A korszerű nyílt forrású térinformatikai szoftverek szinte kivétel nélkül az ő képleteit alkalmazzák, eredményük igen megbízhatónak számít, szemben a kissé régebbi csomagok VINCENTY-féle képleteivel. Utóbbiak nagyon hosszú (pl. közel átellenes pontokat összekötő) vonalakra már nem konvergálnak.

A hosszú geodéziai vonalak számítása fontos a légi közlekedésben és a tengeri határok kijelölésekor (két ország közötti középvonal vagy partvonal-tól adott távolság helyének számítása). Az ellipszoidon történő területmérés is részben visszavezethető a geodéziai alapfeladatokra.

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája

Az I.4. ábrán jól látszik, hogy a gömbtől eltérően az ellipszoidi geodéziai vonalak nem térnek vissza önmagukba, hanem hátráló mozgást végeznek. Ez alól csak a kör alakú Egyenlítő és az ellipszis alakú bimeridiánok jelentenek kivételt.

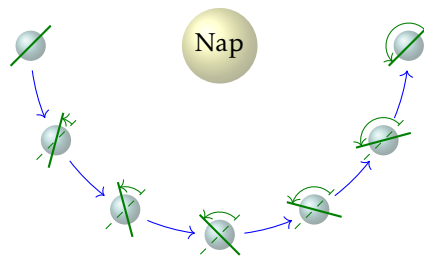


I.4. ábra. Geodéziai vonalak futása ellipszoidon ($f = 1/10$)

A műholdas távérzékelésben hasonló jelenséget tapasztalunk. A műholdak röppályája geodéziai vonal (emlékezzünk a kiskocsira)*. Az erőforráskutató műholdak *napszinkron pályán* keringenek, azaz az azonos megvilágítás érdekében mindig azonos helyi időben haladnak át a területek fölött. Mivel a Föld kering a Nap körül, a műhold pályasíkját folyamatosan változtatni kell, hogy az a Nappal állandó szöget zárjon be (azaz a műhold pályasíkjá éppén három hónap alatt fordul 90° -ot, lásd I.5. ábra). Gömb alakú Földön ez kivitelezhetetlen lenne, mert a gömbi főkörök síkgörbék, a műholdak nem változtatnák pályasíkjukat. Az ellipszoidon azonban csak a meridiánok és az Egyenlítő síkgörbék, a többi geodéziai vonal pályasíkjá hátrál. Ha a műhold pályája éppén csak egy kicsi szöget ($\sim 5^\circ$) zár be a meridiánokkal, akkor elérhető, hogy a geodéziai vonal kicsi hátrálása pont a nekünk szükséges mértékben módosítsa a műhold keringési síkját.

* Valójában ezek egy a földihez képest kevésbé lapult ellipszoid geodéziai vonalaira hasonlítanak, mert egyrészt a műholdra nem hat a Föld forgásából származó centrifugális erő, másrészt a Földtől távolodva annak gravitációs tere egyre gömbszerűbbé válik (D. függelék). Ezért van, hogy a pályasík viszonylag nagy dőlése is csak kis mértékű hátrálást okoz.

I. A Föld alakját helyettesítő felületek geometriája



I.5. ábra. Egy napszinkron pálya hátrálása

Második előadás

Transzformációs paraméterek becslése

II.1. Mikor szükséges becsülő transzformáció?

A térinformatikai gyakorlatban előfordul, hogy két koordináta-rendszer között nem lehetséges szabatos képletekkel átszámítani. Ilyen esetekben a két rendszer közötti kapcsolatot *illesztőpontok* segítségével adjuk meg, amelyeknek koordinátái mindkét rendszerben adottak, a további pontokra pedig valamilyen becsülő eljárást dolgozunk ki a két rendszer közötti átszámításhoz.

Megkülönböztetésül a két (eltérő felületen létrehozott) koordináta-rendszer között értelmezett szabatos függvénykapcsolatot *vetületnek*, míg az illesztőpontok alapján empirikusan becsült átszámítást *transzformációnak* nevezzük. A vetület mindig tökéletesen pontos, legfeljebb *torzulásai* vannak. A transzformáció viszont általában nem pontosan adja vissza a célrendszer koordinátáit, így a transzformációnak *hibája* van.

Alapvetően két fő esetben alkalmazunk transzformációt. Az egyik a georeferálás, ahol egy térkép digitalizálásakor vagy egy raszteres állomány (pl. légifelvétel) előállításakor a képeknek egyedi koordináta-rendszere keletkezik, és ezt kívánjuk egy meglévő referencia-rendszerhez illeszteni. Ebben az esetben az illesztőpontok szerepét ismert koordinátájú tereppontok vagy szkennelt térkép esetén a koordináta-hálózati vonalak metszéspontjai játszószák. Másik gyakori alkalmazás akkor történik, amikor az illesztőpontok koordinátáit a két koordináta-rendszerben egymástól független felmérésekkel határozzuk meg. Ilyen esetben többek között a mérési hibákból adódó ellentmondások feszülnek az illesztőpontok két rendszerben adott koordinátái között, így ezeket valamilyen becsülő eljárással kiegyenlítve kaphatunk átszámítási lehetőséget.

Mivel a két felhasználás tökéletesen azonos matematikai apparátust igényel, ezeket célszerűen együtt tárgyaljuk. A levezetések során $x; y$ -nal jelöljük a kiindulási koordinátákat (a kép pixelkoordinátáit vagy a kiindulási hálózatban mért síkkoordinátákat) és $x'; y'$ -vel a megfelelő vetületi

koordinátákat a célrendszerben. A kettő közötti kapcsolatot az $x'(x; y)$ és $y'(x; y)$ függvénypárral közelítjük.

II.2. Polinomos transzformáció

Levezetés szempontjából legegyszerűbb eljárás a *polinomos transzformáció*, amikor feltételezzük, hogy x' és y' x és y sima függvényei. Ilyenkor az új koordináták tetszőleges pontossággal közelíthetők a régi koordináták polinomjaival. Az x' és y' közelítéséhez tartozó együtthatók általános esetben függetlenek egymástól, ezért a két polinom együtthatói külön-külön is számíthatók. Közelítsük először az x' koordinátát n -ed fokú tagokig számolva:

$$x' = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^i y^j$$

A szummákat kifejtve látszik, hogy $m = (n+1)(n+2)/2$ féle a_{ij} ismeretlen együttható van, meghatározásukhoz ennyi egyenletre lesz szükségünk. A fenti egyenletet illesztőpontként egyszer tudjuk fölírni. Tehát lineáris illesztéshez (más néven *affin transzformáció*hoz) 3, másodfokúhoz 6, harmadfokúhoz 10, negyedfokúhoz pedig 15 illesztőpontot tudunk fölhasználni. A fokszám emelése egy ideig javítja a pontosságot, azonban a fák sem nőnek az égis: a nagyon magas fokszámú polinomok hirtelen kanyarodhatnak, az adatsorunkban található mérési hibákat nem kívánt mértékben fölnagyíthatják. Jellemzően negyedik fokig van értelme elmenni, már ez is igen kedvező, deciméteres pontosságot nyújthat országrésznyi területre.

Ritka, hogy nekünk éppen 3, 6, 10 vagy 15 illesztőpontunk lenne. Ilyenkor szelektálhatunk valamilyen megfontolással, például a leginkább kilógó méréseket eldobhatjuk, de próbálkozhatunk az összes pontunkat figyelembe véve közepes paraméterkészletet kapni. Tegyük föl, hogy pontjainkat *normális eloszlású* hibák terhelik! Ekkor a legnagyobb valószínűségű a_{ij} paraméterkészletet a *legkisebb négyzetek módszere* biztosítja. Legyen x' a tényleges x koordináta az új rendszerben, $\hat{x}'$ a becslés!

A becslés értékeit olyannak szeretnénk megkapni, hogy a becslés hibája az m darab illesztőpontunkra minimális legyen. A becslés hibáját úgy definiáljuk, hogy a k -adik illesztőpont tényleges x'_k koordinátájának és a transzformáció által becslés $\hat{x}'_k$ koordinátájának az eltérését négyzetre

* A mérési hibák a szabályos hibák kiküszöbölése után általában valóban közelítőleg normális eloszlásúak.

II. Transzformációs paraméterek becslése

emeljük (az abszolútérték nem jó, mert nem differenciálható), majd ezeket minden pontra összegezzük:

$$\sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2 \rightarrow \min$$

A fenti kifejezés ott minimális, ahol a deriváltja minden a_{ij} szerint zérus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2}{\partial a_{ij}} &= \sum_{k=1}^m 2(\hat{x}'_k - x'_k) \frac{\partial \hat{x}'_k}{\partial a_{ij}} = 0 \\ \sum_{k=1}^m \hat{x}'_k x_k^i y_k^j &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \\ \sum_{k=1}^m (a_{00} + a_{10} x_k + a_{01} y_k + \dots) x_k^i y_k^j &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \\ a_{00} \sum_{k=1}^m x_k^i y_k^j + a_{10} \sum_{k=1}^m x_k^{i+1} y_k^j + a_{01} \sum_{k=1}^m x_k^i y_k^{j+1} + \dots &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \end{aligned}$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk a_{ij} -re, hiszen i és j bármilyen értéket fölvehet. A megoldandó egyenletrendszer mátrix alakja:

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_k & \sum y_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & \dots & \sum y_k^n \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & \sum x_k^3 & \sum x_k^2 y_k & \dots & \sum x_k y_k^n \\ \sum y_k & \sum x_k y_k & \sum y_k^2 & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k y_k^2 & \dots & \sum y_k^{n+1} \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k^4 & \sum x_k^3 y_k & \dots & \sum x_k^2 y_k^n \\ \sum x_k y_k & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k y_k^2 & \sum x_k^3 y_k & \sum x_k^2 y_k^2 & \dots & \sum x_k y_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum y_k^n & \sum x_k y_k^n & \sum y_k^{n+1} & \sum x_k^2 y_k^n & \sum x_k y_k^{n+1} & \dots & \sum y_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_k \\ \sum x'_k x_k \\ \sum x'_k y_k \\ \sum x'_k x_k^2 \\ \sum x'_k x_k y_k \\ \vdots \\ \sum x'_k y_k^n \end{pmatrix}$$

A másik koordinátát hasonló képlettel jellemezhetjük:

$$y' = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} b_{ij} x^i y^j$$

A b_{ij} együtthatók megkaphatók ugyanazokból az illesztőpontokból a fenti egyenletrendszerbe a_{ij} helyett b_{ij} -t, x'_k helyére y'_k -t írva.

A módszerek elnevezése sajnos nem intuitív. A három illesztőpontot igénylő elsőfokú polinomos, *matematikában* lineárisnak nevezett transzformációt a térinformatikában Affine néven találunk.

II. Transzformációs paraméterek becslése

Az affin transzformáció tulajdonságaiban jelentősen eltér magasabb fokszámú társaitól. Megőrzi az egyeneseket és a párhuzamosságot, a szögeket viszont torzítja. Ezért elsődlegesen azonos vetületű rendszerek között alkalmazhatjuk, főleg akkor, amikor a szögek mérése nem megbízható. Például ha egy régi térképlap papírja szálirányban más megnyúlást szenvedett, mint rá merőlegesen, akkor egy hasonlósági transzformáció nem ad jó eredményt, de ha a nyúlás egyenletes, akkor azt affin transzformációval jól modellezhetjük.

Ezzel ellentétben a *térinformatikában* lineárisnak nevezett módszer nem mintavételezi újra a képet, hanem csak beleírja a térbeli felbontást. Ez az $x' = ax + b$ és $y' = cy + d$ egyenleteknek felel meg. Ez csak akkor ad elfogadható eredményt, ha a térkép nincs elfordulva, így csak digitális (nem szkennelt) térképekre jó. Két illesztőpontot igényel.

A magasabb fokszámú polinomos transzformációk előnye, hogy rendkívül rugalmasak, eltérő vetületeket alkalmazó rendszerek között is alkalmazhatók. Alkalmazásuk során a georeferált képet egy gumilepedőhöz hasonlóan torzítja az illesztőpontokra. Azonban, mivel a georeferálandó képek vetülete általában ismert, alkalmazásuk erre a célra többnyire szükségtelen. Viszont éppen ez a rugalmasságuk teszi hatékonyá a módszert eltérő vetületű alaphálózatok közötti átszámításra.

A polinomos transzformációk csak a topológiát (szomszédsági viszonyok) őrzik meg; azaz az egyenesség és a párhuzamosság elveszik, a szögeket nem tartják meg. A szögek torzulása miatt két szögtartó vetület között csak akkor érdemes alkalmazni, ha feltételezzük, hogy a két hálózat mért szögei között jelentős ellentmondások vannak.*

II.3. Szögtartó transzformációk

Szkennelt térképek georeferálásakor a térképlap rendszerint elfordul, ezt figyelembe kell vennünk. Ugyanakkor a szögek általában nem torzulnak. Erre való a *HELMERT-transzformáció*:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Itt a és b az eltolás, az elforgatás szöge δ , a nagyítás pedig s -szere. Ha bevezetjük a $p = s \cos \delta$ és $q = s \sin \delta$ jelöléseket, és a mátrixokat összeszorozuk,

* A geodéziai gyakorlatban a szögek még nagy távolságra lévő pontok között is közvetlenül és igen nagy pontossággal mérhetők, míg nagyobb távolságokat és területeket csak közvetve, egy rövidebb alapvonal mérésével tudunk meghatározni. Ezért a szögmérési adatok jóval megbízhatóbbak.

II. Transzformációs paraméterek becslése

akkor az egyenletrendszer lineárisává válik:

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= p x + q y + a \\ \hat{y}' &= -q x + p y + b\end{aligned}$$

Ez egy hasonlóság, ezért megőrzi a térképi szögeket és egyeneseket. Vegyük figyelembe, hogy illesztőpontként két egyenletünk van, így a négy ismeretlenhez legalább két illesztőpont szükséges.

A HELMERT-transzformáció esetén már x' és y' képleteiben közös együtt-hatók találhatók, így a legkisebb négyzetek módszere szerinti minimalizálást a két koordinátára egyszerre kell elvégezni.

$$\sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2 + (\hat{y}'_k - y'_k)^2 \rightarrow \min$$

A deriválva a $t \in \{a; b; p; q\}$ paraméter szerint:

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2 + (\hat{y}'_k - y'_k)^2}{\partial t} = \sum_{k=1}^m 2 \left[(\hat{x}'_k - x'_k) \frac{\partial \hat{x}'_k}{\partial t} + (\hat{y}'_k - y'_k) \frac{\partial \hat{y}'_k}{\partial t} \right] = 0$$

Ebből t helyére a négy paramétert rendre behelyettesítve négy egyenlet adódik:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m (p x_k + q y_k + a - x'_k) \mathbf{1} &= 0 \\ \sum_{k=1}^m (-q x_k + p y_k + b - y'_k) \mathbf{1} &= 0 \\ \sum_{k=1}^m (p x_k + q y_k + a - x'_k) x_k + (-q x_k + p y_k + b - y'_k) y_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^m (p x_k + q y_k + a - x'_k) y_k + (-q x_k + p y_k + b - y'_k) (-x_k) &= 0\end{aligned}$$

A zárójeleket kibontva, majd átrendezve lineáris egyenletrendszerre:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \sum x_k & \sum y_k \\ 0 & m & \sum y_k & \sum -x_k \\ \sum x_k & \sum y_k & \sum x_k^2 + y_k^2 & 0 \\ \sum y_k & \sum -x_k & 0 & \sum x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_k \\ \sum y'_k \\ \sum x'_k x_k + y'_k y_k \\ \sum x'_k y_k - y'_k x_k \end{pmatrix}$$

Előbbi transzformáció fontos előnye, hogy hasonlóság, azaz a térképi szögeket megőrzi, azonban két különböző szögtartó vetület közötti átszámításhoz kevésbé használható, mert a helyről-helyre változó területtorzulást

II. Transzformációs paraméterek becslése

nem modellezi. A polinomos transzformáció rugalmasan alakítható a területünkre, azonban a szögeket a két rendszer között torzítja. A két módszer előnyeit egyesíti a *komplex polinomos transzformáció*, melynek lényege, hogy a síkkoordinátákat egy ún. komplex szám valós és képzetes részének tekintjük, azaz bevezetjük a $z = y + ix$ és $z' = y' + ix'$ jelöléseket, ahol $i^2 = -1$.

A komplex számok analíziséből ismert, hogy a transzformáció szögtartásából a $z'(z)$ függvény differenciálhatósága következik, és viszont, a differenciálható komplex függvények szögtartók. (Bizonyítás a vetülettan jegyzet tavaszi félévének tizenegyedik előadásában olvasható.) Ezért két tetszőleges szögtartó vetület között kapcsolatot lehet teremteni egy differenciálható $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénnyel, amely tetszőleges pontossággal közelíthető polinommal:

$$\hat{z}' = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

Ha illesztőpontjainkra előírjuk, hogy $\sum (\hat{z}'_k - z'_k)^2$ minimális legyen, a levezetést mellőzve a lenti lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelyhez n fokszám esetén legalább $n + 1$ illesztőpont szükséges:

$$\begin{pmatrix} m & \sum z_k & \sum z_k^2 & \dots & \sum z_k^n \\ \sum z_k & \sum z_k^2 & \sum z_k^3 & \dots & \sum z_k^{n+1} \\ \sum z_k^2 & \sum z_k^3 & \sum z_k^4 & \dots & \sum z_k^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum z_k^n & \sum z_k^{n+1} & \sum z_k^{n+2} & \dots & \sum z_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum z'_k \\ \sum z'_k z_k \\ \sum z'_k z_k^2 \\ \vdots \\ \sum z'_k z_k^n \end{pmatrix}$$

Mivel az ismeretlenek és az együtthatók egyaránt komplex számok, fontos, hogy az algoritmust olyan környezetben implementáljuk, amely képes komplex számokkal dolgozni, ilyen például a Python programozási nyelv.

Szögtartó vetületű vonatkozási rendszerek között a komplex polinomos transzformáció gyakran jóval kevesebb illesztőpontból kisebb hibával tudja az átszámítást közelíteni, mint a valós számokkal levezetett polinomos transzformáció. Az elsőfokú komplex polinomos transzformáció azonos a HELMERT-transzformációval, arra az ott leírtak érvényesek. A magasabb fokszámú transzformációk az egyenességet és a párhuzamosságot nem őrzik meg. Bár eltérő felméréseken alapuló hálózatok között ez az egyik leghatékonyabb transzformáció, a komplex számok miatt nem terjedt el széles körben, a térinformatikai szoftverek csak elvétve támogatják.

II.4. Projektív transzformáció

Légifényképeknél fordul elő, hogy a kamera szöge ferdén áll, ezt korrigálja a *projektív transzformáció*. A GlobalMapperből hiányzik, de a többi

II. Transzformációs paraméterek becslése

program ismeri. Ez is megőrzi az egyeneseket, de a szögek és a párhuzamoság elvesznek. A legalább négy illesztőpontot igénylő módszer képletei:

$$\hat{x}' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_0}{c_1 x + c_2 y + 1}$$

$$\hat{y}' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_0}{c_1 x + c_2 y + 1}$$

Átrendezve (a jobb oldalakon a becsült koordináták helyére kis csalással a ténylegesen mért koordinátát írva):

$$\hat{x}' = a_1 x + a_2 y + a_0 - c_1 x x' - c_2 y x'$$

$$\hat{y}' = b_1 x + b_2 y + b_0 - c_1 x y' - c_2 y y'$$

Az előzőekkel azonos levezetés szerint folytatva a legkisebb négyzetek módszere szerinti végeredményt a következő egyenletrendszer szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_k & \sum y_k & 0 & 0 & 0 \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & 0 & 0 & 0 \\ \sum y_k & \sum x_k y_k & \sum y_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & \sum x_k & \sum y_k \\ 0 & 0 & 0 & \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k \\ 0 & 0 & 0 & \sum y_k & \sum x_k y_k & \sum y_k^2 \\ \sum -x'_k x_k & \sum -x'_k x_k^2 & \sum -x'_k x_k y_k & \sum -y'_k x_k & \sum -y'_k x_k^2 & \sum -y'_k x_k y_k \\ \sum -x'_k y_k & \sum -x'_k x_k y_k & \sum -x'_k y_k^2 & \sum -y'_k y_k & \sum -y'_k x_k y_k & \sum -y'_k y_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_k \\ \sum x'_k x_k \\ \sum x'_k y_k \\ \sum y'_k \\ \sum y'_k x_k \\ \sum y'_k y_k \\ \sum -x_k (x'_k)^2 - x_k (y'_k)^2 \\ \sum -y_k (x'_k)^2 - y_k (y'_k)^2 \end{pmatrix}$$

Harmadik előadás

Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

III.1. Vízsintes dátumok

A geoid bonyolultsága miatt a Föld alakját legnagyobb pontosság kívánalma esetén is forgási ellipszoiddal közelítjük. Ez a közelítés két okból nem egyértelmű. Egyfelől a különböző helyen végzett mérések alapján a Föld nagyféltengelyére és lapultságára más és más adatok jönnek ki. Másfelől nem biztos, hogy a jól illeszkedő forgási ellipszoid középpontja éppen a geoid tömegközéppontjába esik, sőt a forgástengelye is elfordulhat a Föld valós forgástengelyéhez képest. A forgási ellipszoid méreteit és elhelyezési adatait együttesen *geodéziai dátumnak* nevezzük. A különböző dátumokon értelmezett azonos földrajzi koordináták között akár ~ 100 m nagyságrendű eltérés is adódhat, ezért mindig fontos utánajárni, hogy adataink melyik dátumra vonatkoznak!

A régebbi forgási ellipszoidok (pl. az 1810-es ZÁCH–ORIANI) nagyféltengelye és lapultsága is kisebb volt a ma használtaknál (III.1. táblázat). Ennek oka, hogy az első mérések csak Európára korlátozódtak, és a geoid alakja itt ezeknek a méreteknak felel meg. A későbbi ellipszoidok (pl. az 1841-ben alkotott BESSEL) már több helyen végzett mérések átlagértékeit vették alapul, így közel állnak a ma ismert földalakhoz. A mai ellipszoidok (pl. WGS84) műholdas méréseken alapulnak.

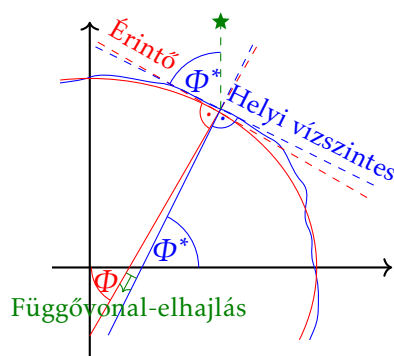
A helyi nehézségi erő iránya (*függővonal*), mely merőleges a geoidra, általában nem esik egybe az ellipszoid normálisával. Az eltérést *függővonal-elhajlásnak* nevezzük. Az I.4. fejezetből emlékeztünk, hogy a földrajzi szélesség fő előnye volt, hogy csillagászati úton mérhetőnek tekintettük. *Szintfelületi szélességnek* hívjuk a helyi vízszintes és a Föld forgástengelye (Sarkcsillag) között mért szöget, míg a *geodéziai szélesség* az ellipszoid normálisa és az Egyenlítő síkja között mért szög. A két szélesség azért nem egyezik meg, mert bár az Egyenlítő síkja merőleges a forgástengelyre, a helyi vízszintes és az ellipszoid normálisa éppen a függővonal-elhajlás okán nem pontosan merőleges. A szögműködés így éppen a függővonal-elhajlás

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

III.1. táblázat. Néhány földi ellipszoid mérete

Név	Év	a (m)	b (m)	$1/f$
ZÁCH–ORIANI	1810	6 376 130	6 355 561,839	310
BESSEL	1841	6 377 397,155	6 356 078,963	299,152 815
CLARKE	1880	6 378 249,145	6 356 514,870	293,465
HAYFORD	1924	6 378 388	6 356 911,946	297
KRASZOVSKIJ	1940	6 378 245	6 356 863,019	298,3
IUGG67	1967	6 378 160	6 356 774,516	298,247 167
WGS84	1984	6 378 137	6 356 752,314	298,257 224

észak–déli komponense (III.1. ábra). Ebben a jegyzetben a szintfelületi (csillagászati úton mérhető) koordinátákat csillag jelöli.

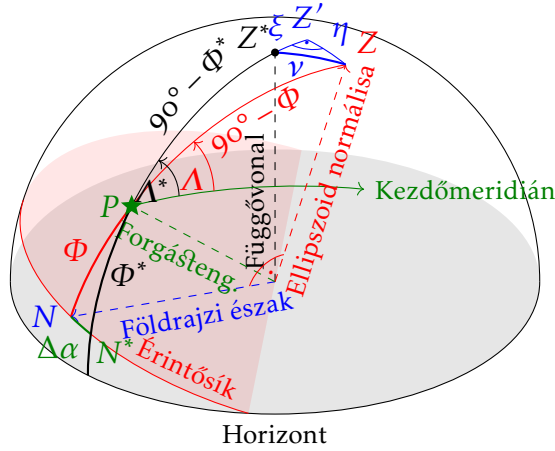


III.1. ábra. Szintfelületi és földrajzi szélesség

Ezen felül a csillagászati úton mérhető *szintfelületi hosszúságra* is hatással van a függővonal-elhajlás. A mérés módja ugyanis azon alapszik, hogy egy adott csillag delelése (amikor pontosan déli irányban látszik, vagyis zenitszöge éppen a legkisebb) milyen időpillanatban következik be (lásd VI.1. fejezet). Azonban a csillagászati úton meghatározott északi irány (a Föld forgástengelyét tartalmazó függőleges sík, a III.2. ábrán fekete) nem egyezik meg a földrajzi északkal (az ábrán vörössel jelölt meridiánsík).

Jelöljük rendre ξ és η betűkkel a ν függővonal-elhajlás észak–déli és kelet–nyugati komponensét! Mivel η igen kicsi (néhány szögmásodperc), ezért a $Z'Z$ szakasz közelíthető egy gömbi kiskör ívével, melynek középpontja a P pont, azaz merőleges a PZ' oldalra. Ez a kiskör azonban a PZ oldalra is merőleges, azaz a PZ' és a PZ oldal jó közelítéssel egyforma

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk



III.2. ábra. Szintfelületi koordináták és a függővonal-elhajlás

hosszú:

$$\begin{aligned} 90^\circ - \Phi^* + \xi &= 90^\circ - \Phi \\ \xi &= \Phi^* - \Phi \end{aligned}$$

A β pólustávolságú kiskörök sugara $R \cos(90^\circ - \beta) = R \sin \beta$. A PZ pólustávolságú $Z'Z$ kiskörív hossza az egységsugarú éggömbön a sugár $(\sin(90^\circ - \Phi))$ és a P csúcsnál található $\Lambda^* - \Lambda$ szög szorzata:

$$\eta = (\Lambda^* - \Lambda) \cos \Phi$$

Azaz, az η komponens határozza meg a szintfelületi és földrajzi hosszúságok eltérését. A függővonal-elhajlás mértékét a $ZZ'Z^*$ gömbháromszögből határozhatjuk meg, amely annyira picike, hogy síkbelinek tekinthetjük, és így fölírhatjuk a PITAGORASZ-tételt:

$$\nu = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

A függővonal-elhajlás váratlan tulajdonsága még, hogy az azimutok mérését is befolyásolja, hiszen a Sarkcsillagot tartalmazó függőleges síkhoz képest $\Delta\alpha$ szöggel nagyobb azimutot mérünk, mint az ellipszoid meridiánsíkjához képest. Ezért a csillagászati úton mért azimutokat korrigálnunk kell. Az NN^* szakasz, mely a PN oldalra merőleges, annyira rövid, hogy

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

ezt is jól közelíthetjük egy P középpontú kiskör ívdarabjával. Ennek pólustávolsága Φ , a P csúcsnál lévő szög pedig $\Lambda^* - \Lambda$:

$$\Delta\alpha = (\Lambda^* - \Lambda)\sin\Phi$$

Fönti azonosság neve *LAPLACE-egyenlet*, a geodéziai számítások során alapvető fontosságú. Időnként találkozni az ekvivalens $\eta = \Delta\alpha \operatorname{ctg} \Phi$ alakkal is, amely úgy kapható meg, hogy az oldal tetején található, η értékét megadó egyenletet elosztjuk a LAPLACE-egyenlettel.

A földi felméréseknél kizárólag a helyi mérések adataira tudunk támaszkodni, így az ellipszoidot lokálisan illesztjük a területünkhöz (*lokális dátum*). Ez alatt nem azt kell érteni, hogy az ellipszoid és a geoid közötti magasságkülönbség (*geoidunduláció*) minimális, hanem hogy a helyi függőleges iránya és az ellipszoid normálisa közötti eltérés (*függővonal-elhajlás*) az illesztéshez használt *LAPLACE-pontokon* a lehető legkisebb. Ezáltal a csillagokhoz képest mért és az ellipszoidon számított geodéziai szélességek közötti, fent bemutatott ellentmondás is minimálissá válik. Az így elhelyezett ellipszoid középpontja eltolódik (~ 100 m) a Föld tömegközéppontjához képest, forgástengelye pedig elfordul ($\sim 1''$) a Föld forgástengelyétől.

A helyi dátumot úgy adjuk meg, hogy megadjuk a kezdőpontban a mért szintfelületi és az illesztéssel számított ellipszoidi koordinátákat, valamint valamelyik jól megfigyelhető pont irányába megadott azimuttal definiáljuk a földrajzi észak irányát.

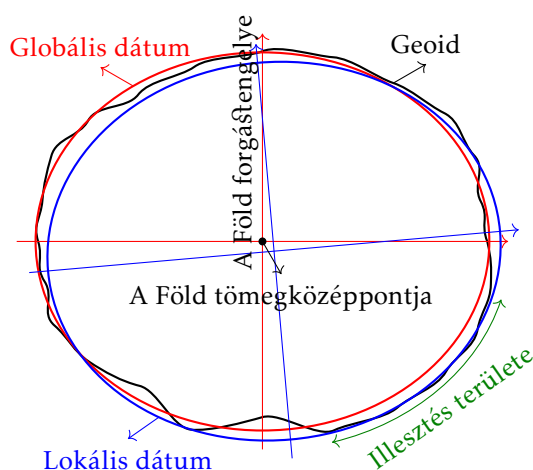
Fontos, hogy ilyenkor az ellipszoid paramétereit (nagyfőeltengely, lapultság) nem változtatjuk a folyamat során, az valamelyik korábbi, nemzetközi mérésen alapuló ellipszoid lesz. Magyarország területén a HD72 dátumot használjuk, amely az IUGG67 ellipszoid nagyfőeltengelyén és lapultságán alapszik. A Pilis község melletti Szőlőhegy alappont koordinátái $\Phi = 47^\circ 17' 32,6156''$; $\Lambda = 19^\circ 36' 9,9865''$; az Erdőhegy pont azimutja definíció szerint $209^\circ 55' 26,64''$.

Kisebb szigeteken, ahol nincs lehetőség kiterjedt hálózatok létrehozására, vagy régebbi felméréseknél gyakori a dátum *önkéntes elhelyezése*. Ez azt jelenti, hogy kizárólag egyetlen ponton végzünk csillagászati méréseket, és ezen a kezdőpontban a szintfelületi koordinátákat ellipszoidinak tekintjük, a függővonal-elhajlás és a geoidunduláció értéke itt zérus.*

* Külön szórakoztató tud lenni egy több, kis szigetből álló ország topográfiai térképeit georeferálni. Előfordul ugyanis, hogy az egyes szigeteken másik csillagászati kezdőponthoz kötött önkéntes elhelyezéssel számolnak. Ilyenkor, ha ugyanazon a szelvényen két sziget is található, egyszerre csak az egyik szigetre eső tartalmat tudjuk georeferálni, hiszen az eltérő függővonal-elhajlás okán a két sziget dátuma különbözik.

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

Űrgeodéziai (műholdas) felmérések esetén a Föld tömegközéppontja és forgástengelye jól mérhető, ezért az ellipszoidot úgy helyezzük el, hogy a középpontja és a forgástengelye a földi adatokkal egybeessen. Az így nyert dátumot *globális dátumnak* nevezzük, ez mindenütt egészen jól illeszkedik a Föld geoid alakjához (III.3. ábra). Példa a WGS84, amely az azonos nevű WGS84 ellipszoidon alapszik.*



III.3. ábra. A geoid és a dátumok kapcsolata

III.2. MOLOGYENSZKIJ-traszformáció

A térinformatikai gyakorlatban két eltérő dátumon értelmezett vetület között a transzformációt a legtöbbször úgy valósítjuk meg, hogy a koordinátákat visszaszámítjuk alapfelületi, majd térbeli derékszögű koordinátákra, végül ebből számítjuk a másik dátum térbeli derékszögű koordinátáit. A módszer jelentős nehézsége a korábban ismertetett síkbeli transzformációkkal szemben, hogy igényli az illesztőpontok ellipszoid feletti magasságát.

Előfordul, hogy az egyszerűség érdekében a dátumok közötti eltérésekből csak az eltolást vesszük figyelembe, a hiba ekkor jellemzően öt méter körüli. Ezt *MOLOGYENSZKIJ-transzformációnak* nevezzük, csak három paramétere

* A lokális dátumok realizációja olyan megjelölt földi pontokon nyugszik, amelyek szélességét és hosszúságát papíron rögzítjük, így a lokális dátum a kőzetlemezek vándorlásával az időben lassan elfordulhat eredeti helyzetéhez képest. Ennek jellemző mértéke kb. 25 évente egy méter. Ezzel szemben a Föld középpontjához rögzített dátumokon minden mozgó kőzetlemezen lévő pont koordinátája idővel változik. Például a WGS84 dátumon adott ausztráliai koordináták (ez a lemez nagyon gyorsan mozog) a jegyzet írásakor (40 évvel később) már kb. 2,8 m-rel mutatnak arrébb, mint a dátum eredeti definiálásakor!

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

van. Bár a MOLOGYENSKIJ-transzformációnak fölírható olyan alakja is, amely közvetlen kapcsolatot biztosít a két dátum földrajzi koordinátái között (*áthidaló transzformáció*), itt most az egyszerűség kedvéért a térbeli derékszögű alak szerepel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Fenti egyenletből egyenesen következik, hogy a $\Delta x; \Delta y; \Delta z$ paraméterek értékének számításához a két dátumon csak egyetlen illesztőpont szükséges. Ekkor a három paraméter a pont koordinátáinak különbsége a két rendszerben. A legkisebb négyzetek módszerével több illesztőpontra e koordináta-különbségek átlaga lesz a paraméterek értéke. Fontos odafigyelni, hogy ehhez az illesztőpontok *térbeli derékszögű* koordinátái szükségesek, miközben általában a szélesség, hosszúság és magasság az ismertek. Ezért a kétféle koordináta-rendszer közötti átszámításra még visszatérünk.

III.3. BURŠA–WOLF-transzformáció

A különböző dátumok közti átszámításnál 7 paramétert tudunk figyelembe venni: a $\Delta x; \Delta y$ és Δz eltolást a tér három irányában, az $\varepsilon_x; \varepsilon_y$ és ε_z elforgatást a három tengely körül és egy σ nagyítást*. Mivel az ε szögek kicsik, éljünk a $\sin \varepsilon \approx \widehat{\varepsilon}$; $\cos \varepsilon \approx 1$ és $\varepsilon_i \varepsilon_j \approx 0$ közelítéssel, így egyszerűbb alakban kapjuk meg a forgatómátrixot. Ezt követően az átméretezés egy skalárral való szorzást, míg az eltolás a megfelelő vektor hozzáadását jelenti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + (1 + \sigma) \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & -\widehat{\varepsilon}_y \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ \widehat{\varepsilon}_y & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Főnti átalakítás neve *BURŠA–WOLF-transzformáció*. Látható, hogy az átalakításhoz nem a földrajzi, hanem a térbeli derékszögű koordináták szükségesek. A modell egy tökéletes világban tökéletesen pontosan adná vissza a másik dátum koordinátáit; azonban minden dátum alapponthálózata hibával terhelt, a BURŠA–WOLF-transzformáció pedig ezeket az ellentmondásokat nem veszi figyelembe.

* A háromszöghálózatok mérési hibáinak kiegyenlítése miatt a lokális dátumok és a globális dátumok méretviszonyai egymásnak ellentmondanak, ezt az átszámításnál figyelembe vesszük, azonban a szögek mérési pontossága megbízhatóbb, ezért az átszámításnál ügyelünk ezek megőrzésére. Ezért választottunk hasonlósági transzformációt.

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

A hét ismeretlen meghatározásához illesztőpontonként három egyenlőnk van, azonban már három illesztőpont esetén is túlhatározottá válik az egyenletrendszer, így a paraméterek számítása kizárólag becsléssel, pl. a legkisebb négyzetek módszerével lehetséges. Az $a = (1 + \sigma)\widehat{\varepsilon}_x$; $b = (1 + \sigma)\widehat{\varepsilon}_y$; $c = (1 + \sigma)\widehat{\varepsilon}_z$ és $d = 1 + \sigma$ helyettesítést követő igen hosszadalmas levezetést mellőzve a végeredmény:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & \sum -z_k & \sum y_k & \sum x_k \\ 0 & m & 0 & \sum z_k & 0 & \sum -x_k & \sum y_k \\ 0 & 0 & m & \sum -y_k & \sum x_k & 0 & \sum z_k \\ 0 & \sum z_k & \sum -y_k & \sum y_k^2 + z_k^2 & \sum -x_k y_k & \sum -x_k z_k & 0 \\ \sum -z_k & 0 & \sum x_k & \sum -x_k y_k & \sum x_k^2 + z_k^2 & \sum -y_k z_k & 0 \\ \sum y_k & \sum -x_k & 0 & \sum -x_k z_k & \sum -y_k z_k & \sum x_k^2 + y_k^2 & 0 \\ \sum x_k & \sum y_k & \sum z_k & 0 & 0 & 0 & \sum x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_k \\ \sum y'_k \\ \sum z'_k \\ \sum y'_k z_k - z'_k y_k \\ \sum z'_k x_k - x'_k z_k \\ \sum x'_k y_k - y'_k x_k \\ \sum x'_k x_k + y'_k y_k + z'_k z_k \end{pmatrix}$$

A III.2. táblázatban olvasható néhány dátumról a WGS84 irányú transzformáció Magyarország területén érvényes paraméterkészlete. Vigyázzunk, mert jelen jegyzetben a koordináta-rendszert forgattuk el, azonban egyes térinformatikai szoftverek a pontba mutató helyvektort forgatják el. Ilyen esetben a forgatások előjelét meg kell fordítani! A fordított irányú transzformáció jól becsülhető mindegyik paraméter előjelének megfordításával.

III.2. táblázat. BURŠA–WOLF-paraméterek Magyarországon

Dátum	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)	ε_x (")	ε_y (")	ε_z (")	σ (ppm)
HD72	52,684	-71,194	-13,975	0,3120	0,1063	0,3729	1,0191
S42/83	-5,38	-91,75	-86,23	-0,988	-0,700	0,652	2,273
S42/58	17,20	-84,03	-60,97	-1,085	-0,682	0,473	-3,185
RDN1940	566,54	108,25	487,93	-2,2867	-2,6409	1,5194	-0,7365
HD1863	595,75	121,09	515,50	-8,2260	1,5193	5,0121	-2,6729

III.4. A korrekciós rács

Alternatív lehetőségként nagyobb pontosság érdekében *korrekciós rácsot* szoktak még a térinformatikai rendszerek biztosítani, amely gyakorlatilag egy raszteres állományból interpolálva helyről-helyre más értékeket ad hozzá vagy von ki a földrajzi koordinátákból. Ez akár centiméteres pontosságot eredményezhet, azonban kellemetlen tulajdonsága, hogy igen nagy méretű raszteres állományok letöltését és tárolását igényli.

III.5. Szélesség, hosszúság és magasság a térben

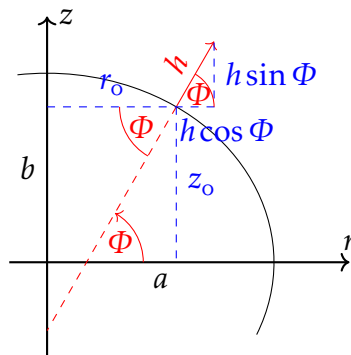
A műholdas helymeghatározás a műhold és a műszer közötti távolságot méri a jel beérkezési ideje alapján. Minden egyes műholdtól az ismert távolság egy gömbfelületet jelöl ki, amelyek közös metszéspontjában tartózkodunk. A metszéspont koordinátái egy $x; y; z$ térbeli derékszögű koordináta-rendszerben számíthatók ki. Hogyan kapunk ebből földrajzi koordinátákat?

Kevésbé izgalmas, azonban hasonlóan hasznos az a kérdés, hogy egy ismert pont térbeli derékszögű koordinátáit megkapjuk annak földrajzi koordinátáiból. Ilyenre, mint láttuk, akkor lehet szükségünk, ha különböző méretű és elhelyezésű ellipszoidokra vonatkoztatott pontokat szeretnénk egységes koordináta-rendszerben kezelni. Könnyen belátható, hogy a két probléma egymás megfordítása.

Először a második problémával foglalkozva rajzoljuk fel az ellipszoidnak azt a meridiánját az $r; z$ síkon, amelyiken tartózkodunk. Itt az r vízszintes koordináta az ellipszoid felszínén éppen a paralellkörök sugarával fog megegyezni, z pedig egybeesik a térbeli rendszer z tengelyével. Mi a Φ szélességen és h magasságban vagyunk az ellipszoid fölött. Kis magasságot feltételezve a magasságot az ellipszoidra merőlegesen, egyenes vonalban mérjük. Ekkor a III.4. ábráról leolvasható, hogy:

$$r = r_o + h \cos \Phi$$

$$z = z_o + h \sin \Phi$$



III.4. ábra. Pont koordinátái az ellipszoid felett h magasságban

A paralellkör r_o sugarát már ismerjük ($N(\Phi) \cos \Phi$), sőt z_o képletét is már kiszámoltuk alapszakon ($(1 - e^2)N(\Phi) \sin \Phi$). A földrajzi hosszúság

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

definíciójából (I.3. fejezet) tudjuk, hogy $x = r \cos \Lambda$ és $y = r \sin \Lambda$. Ennek ismeretében az előbbi összefüggések fölhasználásával kiszámítható, hogy:

$$\begin{aligned}x &= [N(\Phi) + h] \cos \Phi \cos \Lambda \\y &= [N(\Phi) + h] \cos \Phi \sin \Lambda \\z &= [(1 - e^2)N(\Phi) + h] \sin \Phi\end{aligned}$$

Most már tudjuk, hogy egy adott földrajzi koordinátájú pont hol helyezkedik el a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. A másik problémánál (azaz a GPS-es navigációnál) ennek megfordítása szükséges. A második egyenletet az elsővel osztva ezt kapjuk:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{y}{x}$$

Tehát a hosszúságot már ismerjük. Az első és a második egyenlet négyzetösszege:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= [N(\Phi) + h]^2 \cos^2 \Phi \\h &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - N(\Phi)\end{aligned}$$

Ezt helyettesítsük be z képletébe:

$$z = \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - e^2 N(\Phi) \right] \sin \Phi$$

Fenti képletet átalakítva egy $\operatorname{tg} \Phi$ -ben negyedfokú egyenletet kapunk. A negyedfokú egyenlet megoldható pl. a FERRARI-képlettel, ennek menete a C. függelékben olvasható. Ezt követően Φ ismeretében h már megkapható a kettővel ezelőtti fölírt képlettel. Fontos megjegyezni, hogy h itt nem a tengerszint, hanem az ellipszoid feletti magasságot jelöli, amelyet a GPS-készülékünk még korrigál a geoidunduláció értékével.

A lokális dátumokon a geoidunduláció értékét a kezdőpontban nullának szoktuk venni (történelmi okokból a HD72 geoidundulációja a Pilis-Szőlőhegy ponton +6,56 m), és mivel a függővonal-elhajlást minimalizáltuk, az ellipszoid közel párhuzamosan halad a geoiddal. Így a geoidunduláció pontos ismerete kevésbé fontos. Ezzel szemben globális dátumok geoidundulációja helyről-helyre változik, ezért az átszámításhoz geoidmodellre van szükség. Magyarország területén a WGS84 dátumhoz képest mért geoidunduláció $\sim +40$ m.

III. Geodéziai dátumok és térbeli transzformációk

A zárt alakú átszámítási képletek levezetése BORKOWSKI nevéhez fűződik. Bár a modern műholdas helymeghatározásban inkább a zárt alakú képleteket alkalmazzák, az egyszerűbb számítás érdekében megadjuk BOWRING képletét is, amely egy tetszőleges alkalommal pontosítható közelítést ad Φ -re. A rekurzív képlet:

$$\operatorname{tg} \Phi'' = \frac{z + (e')^2 b \sin^3 \Theta'}{\sqrt{x^2 + y^2} - e^2 a \cos^3 \Theta'}$$

Ahol a javított Φ -ből átszámított $\operatorname{tg} \Theta = b/a \operatorname{tg} \Phi$ redukált szélességet (I.4. fejezet) helyettesítjük vissza a fenti képletbe, hogy újabb javított Φ -t kapjunk. Θ javasolt kezdőértéke a $h \approx 0$ feltételből:

$$\operatorname{tg} \Theta \approx \frac{az}{b\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Általában már egy iteráció is meglepően jó pontosságot biztosít.

Negyedik előadás

Térképvetületek a térinformatikában

IV.1. Az EPSG-adatbázis

Egy térinformatikai csomagban egy vetület alkalmazásakor mindig szükséges az alapfelület és a leképezés egyértelmű megadása. Ennek gyors azonosítására szolgál az *EPSG-szám*, amely mögött egy adatbázisban tárolják a vetület fajtáját, paramétereit és az alapfelületet annak elhelyezésével. Néhány fontos EPSG-szám:

4326 ♦ WGS84 dátum, földrajzi koordináták

3857 ♦ Web Mercator / WGS84 dátum

23700 ♦ EOVS / HD72 dátum

32633 / 32634 ♦ UTM 33 / 34 zóna / WGS84 dátum

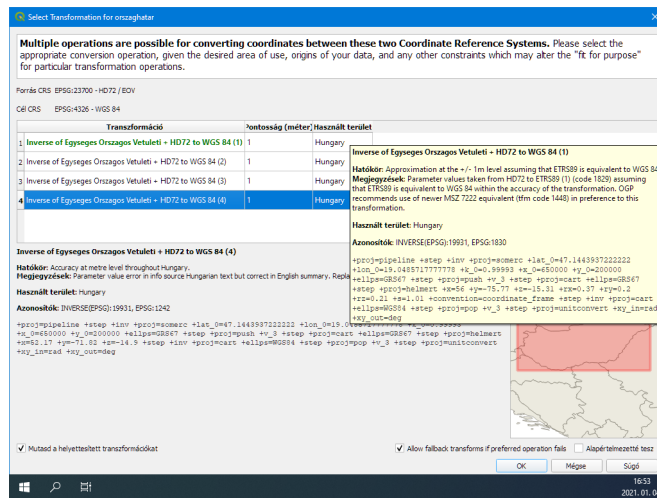
A QGIS alkalmazásban ha egy adott vetületet először alkalmazunk, egy párbeszédablakot dob föl, hogy az adatbázisban szereplők közül melyik transzformációt választjuk. Ha a paramétersor három paramétert tartalmaz, akkor MOLOGYENSKIJ, ha hét paramétert látunk, akkor a pontosabb BURŠA–WOLF-transzformációt fogja alkalmazni (III.1. fejezet). Előfordul, hogy egy adott dátumhoz több, nagy mértékben eltérő paraméterkészlet is rendelkezésre áll, ilyenkor általában az történik, hogy vízszintes értelemben ezek között a különbség elenyésző, azonban függőleges értelemben jelentős eltérések lesznek az eredményben. Ha 3D adatokat alakítunk át, különösen körültekintően kell eljárunk (lásd még az V.1. fejezetet)!

Példaként a IV.1. ábrán látható az EOVS esete. Az egyes számú (buborékban fölugró) transzformáció hét paraméteres, azonban a leírás szerint pontatlansága miatt nem javasolt alkalmazni. A kijelölt négyes számú (főablakban olvasható) transzformáció három paraméteres.

IV.2. Egyéni vetületek megadása

Ha egy térképvetületet a térinformatikai szoftverben nem találunk meg, jellemzően lehetőség van új vetület megadására. Míg a GlobalMapperben

IV. Térképvetületek a térinformatikában



IV.1. ábra. *Transzformáció beállítása QGIS-ben*

ez egy egyszerű párbeszédablak kitöltését jelenti, a többi szoftverben ez a WKT-formátum használatával lehetséges. Példaként nézzük meg az EOV definícióját az ArcGIS szoftverből:

```
PROJCS["HD72_EOV",
GEOGCS["GCS_HD72",
DATUM["D_Hungarian_1972",
SPHEROID["GRS_1967",6378160,298.247167427],
TOWGS84[52.17,-71.82,-14.9,0,0,0,0]],
PRIMEM["Greenwich",0],
UNIT["Degree",0.017453292519943295]],
PROJECTION["Hotine_Oblique_Mercator_Azimuth_Center"],
PARAMETER["latitude_of_center",47.14439372222222],
PARAMETER["longitude_of_center",19.04857177777778],
PARAMETER["azimuth",90],
PARAMETER["scale_factor",0.99993],
PARAMETER["false_easting",650000],
PARAMETER["false_northing",200000],
UNIT["Meter",1],
AXIS["Y",EAST],
AXIS["X",NORTH]]
```

Látható, hogy az ArcGIS a HD72 dátumot a TOWGS84 beállításban a MOLOGYENSZKIJ-féle három paraméteres alakban származtatja az IUGG67-es ellipszoid alapján. A leképezést HOTINE vetületével (lásd vetülettan jegyzet)

IV. Térképvetületek a térinformatikában

közelíti megfelelő paraméterezéssel. A WKT-formátum előnye, hogy precízen megadhatjuk a leképezés módját, ugyanakkor terjengős. A nyílt forrású programokban lehetőség van a tömörebb PROJ.4 formátum használatára is, amelyben kevesebb lehetőség van a vetület precíz definiálására, de ez a térinformatikai pontosságot általában nem veszélyezteti. Példaként álljon itt az EOVS definíciója a QGIS szerint:

```
+proj=somerc +lat_0=47.1443937222222  
+lon_0=19.0485717777778 +k_0=0.99993 +x_0=650000  
+y_0=200000 +ellps=GRS67 +towgs84=52.684,-71.194,-13.975,  
-0.312,-0.1063,-0.3729,1.0191 +units=m +no_defs
```

A towgs84 ezúttal hét paramétert tartalmaz, így BURŠA–WOLF-transzformációt használ.* A somerc a *Swiss Oblique MERCATOR*, azaz ROSENMUND vetületének rövidítése. Néhány vetület PROJ.4-es rövidítése:

aea ♦ ALBERS-vetület (*Albers Equal Area*)
aeqd ♦ POSTEL-vetület (*Azimuthal EQUiDiStant*)
eqdc ♦ DE L'ISLE-vetület (*EQUiDiStant Conic*)
laea ♦ LAMBERT síkvetülete (*LAMBERT Azimuthal Equal Area*)
lcc ♦ LAMBERT–GAUSS-vetület (*LAMBERT Conformal Conic*)
longlat ♦ Nincs vetület, földrajzi fókuszát
tmerc ♦ GAUSS–KRÜGER-vetület (*Transverse MERCATOR*)

Főnti ismereteinkkel georeferáljunk egy szelvényt példaként a budapesti katonai sztereografikus rendszerben! Sajnos ezt a vetületet a QGIS nem támogatja, nekünk kell megtanítani. A leképezés hasonlít az Amersfoort-vetületre (előző fél éves jegyzetben található), melynek kódja sterea. Alapfelület a BESSEL-ellipszoid, ezen alapul a HD1863 lokális dátum, melynek elhelyezését TIMÁR kiszámította három és hét paraméter használatával is. Mi az utóbbi paraméterkészletet alkalmazzuk, mert az pontosabb eredményt ad. A Gellérthegy kezdőpont szélessége és hosszúsága a szakirodalomban föllelhető, az eltolás 500 km. Ebből a szükséges definíció PROJ.4-formátumban:

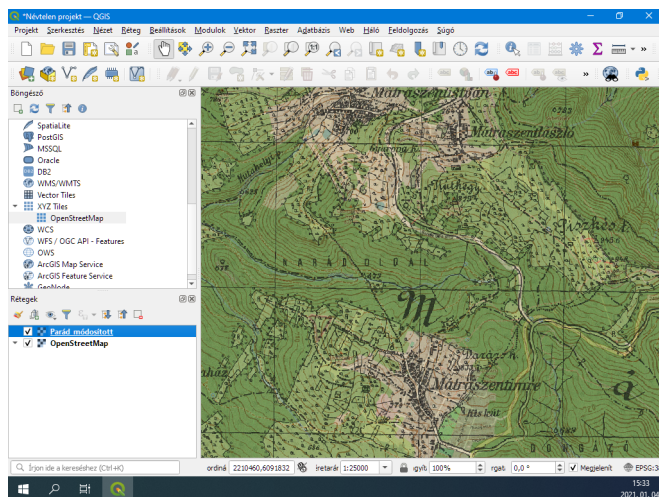
```
+proj=sterea +lat_0=47d29'9.6380" +lon_0=19d3'7.5533"  
+k=1 +x_0=500000 +y_0=500000 +ellps=bessel +towgs84=595.75,  
121.09,515.50,8.2270,-1.5193,-5.0121,-2.6729 +units=m  
+no_defs
```

Ezt beírva a QGIS egyéni vetület párbeszédablakába, a georeferálás elvégezhető (IV.2. ábra). A példán egy budapesti katonai sztereografikus

* Korrekciós rácsot (III.1. fejezet) a +nadgrids paraméterrel lehetne beállítani.

IV. Térképvetületek a térinformatikában

szelvényt transzformáltunk át a Web Mercator vetületbe, hogy összevethessük az OpenStreetMap adatbázissal. Mivel a pontosabban kimért belterületi részek vízszintes helyzete megegyezik a két térképen, az utak eltérő futása a topográfiai felmérés pontatlanságának és rajzi hibának tudható be. Georeferálásunk tehát elérte a kívánt térinformatikai pontosságot.



IV.2. ábra. OSM és régi topográfiai térkép összehasonlítása

IV.3. A transzformációk jogi háttere

Mivel az egyes vonatkozási rendszereknek és a köztük lévő átszámításnak jogi következményei lehetnek (gondoljunk például egy telekhatár sarokpontjának terepi kitűzésére), fontos, hogy azok alkalmazása jól szabályozott legyen. Magyarországon a releváns jogszabály a 15/2013. (III. 11.) VM rendelet a térképészetért felelős miniszter felelősségi körébe tartozó állami alapadatok és térképi adatbázisok vonatkoztatási és vetületi rendszeréről, alapadat-tartalmáról, létrehozásának, felújításának, kezelésének és fenntartásának módjáról, és az állami átvétel rendjéről.

A miniszteri rendelet előírja, hogy a földmérési és térképészeti tevékenységről szóló 2012. évi XLVI. törvény (Fttv.) hatálya alá tartozó állami alapadatok kizárólag a rendeletben meghatározott HD72 vonatkozási rendszerben rögzíthetők. Kivételt képeznek a térbeli geodéziai (jellemzően GNSS) alkalmazások, ahol az ETRS89 dátum használata engedélyezett. Ez a dátum a WGS84 egyik realizációja, amely 1989-ben elvben megegyezett a WGS84-gyel, azóta pedig az Európát hordozó kőzetlemezzel együtt mozog, így a benne adott koordináták változatlanoknak tekinthetők. A gyakorlati térinformatika számára a WGS84 és az ETRS89 közötti különbség a legtöbb

esetben elhanyagolható (max. 2 m eltérés), azonban ez idővel növekedni fog.

A két hivatalos dátum közötti transzformáció biztosítására létesítették az *Integrált Országos Geodéziai Alaphálózatot* (INGA). Az INGA pontjain az EOV- (és ezen keresztül HD72-) koordináták mellett ismert a Balti magasság és az ETRS89 Φ, Λ, h koordináta is.^{*} Ezek a pontok illesztőpontként szolgálnak a két dátum között. A rendelet mellékletei rögzítik a HD72 dátum elhelyezését a Pilis-Szőlőhegy ponton (III.1. fejezet) és az EOV vetületi paramétereit.

A fölmért illesztőpontok alapján a Lechner Tudásközpont egy EHT² (ETRS89–EOV Hivatalos Helyi Térbeli Transzformáció) nevű szolgáltatást tart fenn, amely a világhálón díjmentesen elérhető. A Fttv. hatálya alá tartozó tevékenységek során a két vonatkozási rendszer között kötelezően ez az átszámítás használandó. Az EHT² az országot kisebb részterületekre osztja föl. Mindegyik területrészen a közelben található illesztőpontok segítségével számítják ki a helyben érvényes BURŠA–WOLF-transzformáció hét paraméterét. Az EHT² pontossága a rendelet szövege szerint 3 cm.[†] Mivel RTK-méréseknél kényelmetlen minden egyes részletpontot az EHT²-be bepötyögni, a Lechner Tudásközpontnál igényelhetjük a fizetős VITEL nevű valós idejű transzformációt nyújtó szolgáltatást. A VITEL és az EHT² jogi szempontból egyenértékűnek számít, előbbivel viszont az is megvalósítható, hogy RTK-eszközünk a pillanatnyi koordinátáinkat HD72/EOV-rendszerben írja a kijelzőre.

Kisebbségi pontossági igény esetén értelemszerűen elegendő, ha a teljes országterületre egyetlen BURŠA–WOLF-transzformációt alkalmazunk. Ennek javasolt paramétereit az MSZ 7222 Magyar Szabvány rögzíti, azonban sajnos annak 2002-es változatában gépelési hibák találhatók. Szerencsére a vezető térinformatikai csomagokban javított paramétersor érhető el. Azonban vigyáznunk kell, hogy szabványos transzformáció igénye esetén a szabványra hivatkozó transzformációt válasszuk az elérhetőek közül; ugyanis számos szoftver több transzformációt is ismer a HD72 és az ETRS89 között. Ha például tévedésből a Pilis-Szőlőhegy pontra számolt MOLOGYENSKIJ-transzformációt választjuk, akkor néhány méteres hibával számolhatunk

^{*} Az INGA-pontokon e mellett gravimetriai méréseket is végeznek.

[†] Láthatjuk, hogy az EHT² pontossága bár igen jó, az eljárás rendkívül bonyolult, ráadásul a szoftver forráskódja zárt. Emlékezzünk, hogy ilyen, vagy akár jobb pontosságot egyetlen, országosan érvényes paraméterkészlettel is elérhetünk pl. (komplex) polinomos transzformációval. Ennek ellenére a Fttv. hatálya alá tartozó feladataink során kerülnünk kell az ilyen kreatív megoldásokat, még akkor is, ha a transzformációt pontosabban valósítják meg!

az országhatár közelében, ami bizonyos térinformatikai alkalmazásoknál már okozhat kellemetlenséget.

IV.4. Transzformációk a szomszéd országokban

Külföldi példákat tekintve igen heterogén képet találunk. Romániában például Magyarországhoz több szempontból hasonló a helyzet. Itt az állami alapadatok a KRASZOVSKIJ-ellipszoidon alapuló S42 dátumon adóttak. A helyi földmérési intézet (ANCPI) az ETRS89 irányú transzformációt az ingyenesen letölthető TransDatRo nevű programmal biztosítja, a valós idejű szolgáltatás itt is fizetős. Eltérés a magyar megoldáshoz képest, hogy az átszámítást végző program forráskódja nyílt; valamint az, hogy a vízszintes koordinátákat korrekciós ráccsal számítják át a két rendszer között.

Szlovákia esetén a felelős szerv (ÚGGK) a honlapján biztosít transzformációt a helyi S-JSTK és az ETRS89 dátumok között. A megoldás nyílt forrású eszközökkel történt. A transzformációt felbontották egy országosan érvényes BURŠA–WOLF-transzformációra és egy maradék ellentmondásokat tartalmazó korrekciós rácsra. Utóbbit szabványos formátumban közzétették, így azt több szoftver (köztük a QGIS és ArcGIS is) alapértelmezetten tartalmazza. Nincs szükség sem a fizetős, valós idejű transzformációra, sem külön transzformációs szoftverre. Felhívom ugyanakkor a figyelmet, hogy 2011 óta az újonnan mért pontok koordinátáit már az új JSTK03 dátumon kell megadni, amely az ETRS89 dátumból egyszerű térbeli eltolással és elforgatással megkapható. Így erre a dátumra a korrekciós rács nélkül is milliméter pontossággal tudunk átszámítani.

Érdekes a volt Jugoszlávia utódállamainak helyzete, ahol a '90-es években főlhagytak a helyi dátum (MGI) alkalmazásával, helyette minden geodéziai mérés az ETRS89 dátum helyi realizációiban történik. Így transzformációra csak régi adatok esetén van szükség.

Ötödik előadás

A magasság és az északi irány meghatározása

V.1. Magassági dátumok

A térinformatikában egyre nagyobb a háromdimenziós téradatak jelentősége. Ezért újabban már nem minden esetben kielégítő, ha adataink csupán vízszintes értelemben illeszkednek. Így a vetület és a geodéziai dátum mellett a magassági adatok vonatkozási felületének megadása is egyre fontosabbá válik.

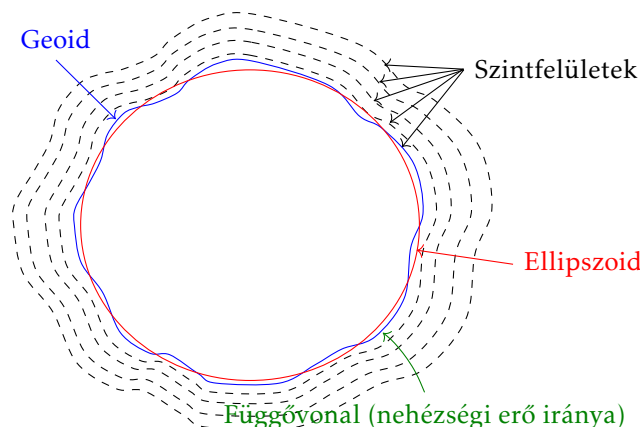
A Föld alakját a magasság mérésekor csak a műholdas helymeghatározás esetén szoktuk ellipszoidnak tekinteni. Ennek oka, hogy egyrészt földi mérésekkel az ellipszoid feletti magasság nehezen mérhető, másrészt kevésbé hasznos, hiszen a földi ellipszoid akár száz méter távolságban is húzódhat a tengerszinttől. E miatt az ellipszoid feletti magasságok alkalmazása téves következtetésekhez vezethet például árvízvédelmi alkalmazások esetén. Így kedvezőbb a magasságot a tengerszinthez képest mérni.

A tengerszintet a tengerparton elhelyezett vízmércén mérjük. Az időjárás, apály és dagály hatását kiküszöbölendő a tenger szintjét több éven keresztül följegyezzük. A mért adatok átlaga a vízmércén mért *középtengerszint*.

A nyugalomban lévő tenger vízszintje mindenütt merőleges a helyi nehézségi erőre, a vízszint mentén a helyzeti energia állandó. Az olyan felületeket, amelyek mentén a helyzeti energia nem változik, és mindenütt merőlegesek az erőtérré, *potenciálfelületnek* vagy *szintfelületnek* nevezzük. A szintfelületek egymást soha nem keresztezik, azonban egymástól vett távolságuk nem állandó: Mivel a nehézségi gyorsulás a pólusoknál nagyobb, mint az Egyenlítőnél (a centrifugális erő hatása miatt, lásd D. függelék), ezért ugyanannyi munkával (ugyanannyi helyzeti energiát nyerve) kisebb magasságkülönbséget érünk el a pólusoknál, mint az Egyenlítőnél. Ez azt mutatja, hogy a szintfelületek a pólusok közelében sűrűbben helyezkednek el. Azt a szintfelületet, amely a vízmércén mért közepes tengerszinten halad keresztül, *geoid* néven ismerjük, és a Föld alakjaként tekintjük a magasságmérések

V. A magasság és az északi irány meghatározása

során (V.1. ábra). *Függővonalnak* hívjuk azt a görbét, amelynek érintője minden pontban a nehézségi erő irányába mutat.



V.1. ábra. A Föld alakjának és nehézségi erőterének kapcsolata

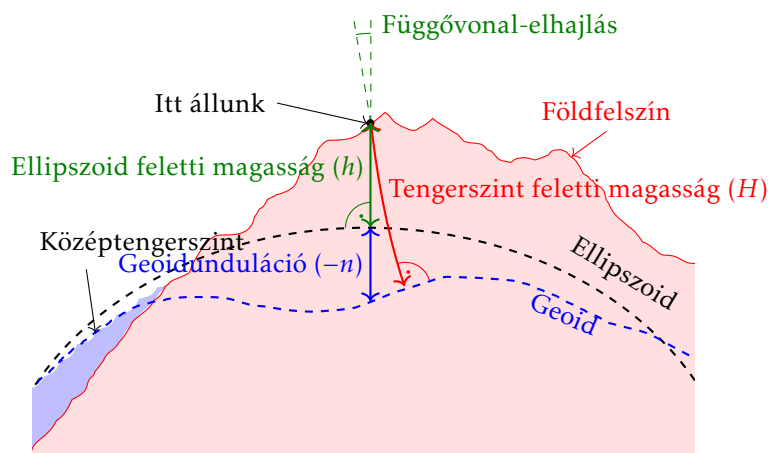
A tenger szintjét a víz hőmérséklete, sótartalma és az áramlási viszonyok egyaránt befolyásolják. Ezért az adott vízmércéhez rögzített geoid csak közelítően követi a középtengerszintet az óceán más pontjain. Ezért a különböző vízmércékhez illesztett szintfelületek egymással nem esnek egybe, azonban magasságkülönbségük az egy métert nem haladja meg. Magyarországon a '60-as évekig a trieszti (adriai magasság), azóta a kronštadti (balti magasság) vízmércét tekintjük kiindulópontnak. Az EU-ban amszterdami magasságot használnak, ha az államok közötti egységes rendszerre van szükség. Az adriai magasságok 67,5 cm-rel, az amszterdami magasságok 14 cm-rel nagyobbak a balti magasságoknál.

A geoid és a pontunk között a függővonal mentén mért távolság a H -val jelölt *tengerszint feletti magasság*. A geoid és az ellipszoid között az ellipszoid normálisa mentén mért távolság az n *geoidunduláció*. A geoidunduláció pozitív, ha a geoid az ellipszoid fölött halad (így Európa legtöbb részén), negatív, ha alatta fut (mint az V.2. ábrán), értéke általában ± 100 m között van. A h *ellipszoid feletti magasság*ot szintén az ellipszoid normálisa mentén mérjük. Az ellipszoid normálisa és a pontunkon áthalaladó függővonal között bezárt szög a *függővonal-elhajlás*.

Az ábra alapján leolvasható, hogy a műholdas helymeghatározásban számított ellipszoid feletti magasságból (III.5. fejezet) a geoidunduláció ismeretében a tengerszint feletti magasság jól becsülhető:

$$H \approx h - n$$

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.2. ábra. Tengerszint és ellipszoid feletti magasságok

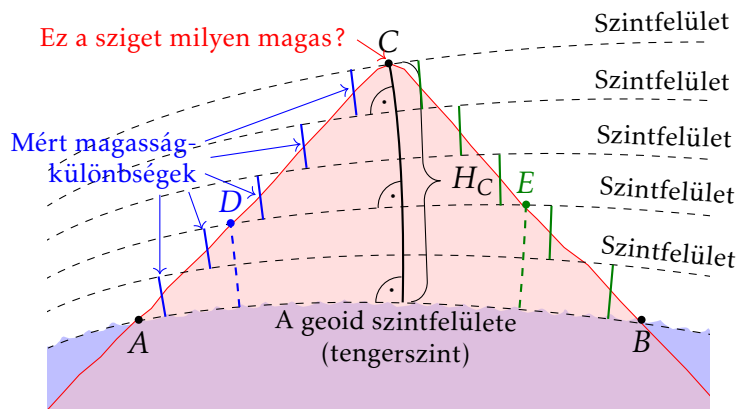
Pontos egyenlőség a függővonal-elhajlás miatt nem áll fenn, azonban az eltérés általában nem vagy alig haladja meg az egy millimétert, így a gyakorlatban ezt nem kell figyelembe vennünk (hiszen a geoidundulációt ritkán ismerjük ennyire pontosan).

Ha egy zárt görbe mentén körbehaladunk és a magasságkülönbségeket összeadjuk, akkor azt várjuk, hogy 0-at kapunk, hiszen ugyanabba a pontba értünk vissza. Tehát az lenne az intuitív, ha $\oint dH = 0$ bármely zárt görbe mentén. Ez az állítás azt jelentené (ahogyan ezt a józan ész is várna), hogy a mért magasságkülönbségek összege két adott pont között független az útvonaltól. A valóság ennél sokkal bonyolultabb.

Az V.3. ábrán próbáljuk meg meghatározni a sziget C-vel jelölt csúcsának H_C magasságát! A hegy méretei miatt ezt nem tudjuk egy lépésben elvégezni, az meg nyilvánvaló, hogy a mérés kedvéért nem fogunk a függővonal mentén a geoidig leásni. A kék léces brigád az A pontból egyenesen halad fölfelé a C pontba, míg a zöld léces előbb körbesétál a tengerparton a B pontba (közben nem észlel magasságkülönbséget, így B magasságát is nullának veszi), majd innen szinteznek föl a C pontba. Az ábráról leolvasható, hogy a zöld brigád összességében nagyobb magasságot mért a C pontig, ráadásul (még ha semmi mérési hibát nem ejtettek volna, akkor is) egyikük mért magasságkülönbségeinek összege sem azonos a C pont magasságával! Természetesen a jelenség csak igen nagy távolságoknál (országos felméréseknél) jelentős, azonban a pontok magasságát a különböző útvonalon végzett szintezések alapján nehéz szabatosan megmérni.

Mindemellett láthatjuk, hogy a D és E pontok azonos szintfelületen helyezkednek el. Ez azt jelenti, hogy ez a két pont lehet akár egy tó két partján, hiszen egymáshoz képest vízszintesen helyezkednek el. Mégis az E

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.3. ábra. A magasságmérés meglepő tulajdonságai

pont tengerszint feletti magassága nagyobb, mint a D ponté, azaz a víz tud a D pontból az E pontba *magasabbra* folyni! Ezt a Föld egyenetlen gravitációs mezeje okozza: az E pontban a szintfelületek ritkábban helyezkednek el. Egy Balaton méretű hegyvidéki tó vízszintjének különböző pontjai közt mért magasságkülönbség akár fél méter is lehet! Ez árvíz esetén már kellemetlen meglepetéseket okozhat!

Ezért nagy kiterjedésű (országos) felméréseknél érdekesebb az egységnyi tömegre jutó helyzeti energia (*potenciál*) különbségét mérni. A K potenciálkülönbség valóban független a mérés útvonalától, azonban a mérések során mindig mérni kell a ΔH_i magasságkülönbség mellett a g_i helyi nehézségi gyorsulást.

$$K = \sum_i g_i \Delta H_i$$

A mért potenciálkülönbségből magasságot így kaphatunk:

$$H = \frac{K}{\bar{g}}$$

$\bar{g}$ itt a függővonal menti átlagos nehézségi gyorsulás, azonban ennek méréséhez ismét nem fogunk leásni a hegy belsejébe. A tengerszint feletti magasság hagyományos, geometriai definíciója (a szakirodalomban *ortométeres magasság*) esetén ezt megkíséreljük modellezni (külföldön gyakran ezt alkalmazzák), míg a *normálmagasság* esetén $\bar{g}$ becslésekor egyszerűsítünk, a Földet ellipszoid alakúnak és egyenletes tömegeloszlásúnak tételezzük föl (D. függelék). A *dinamikai magasság* az azonos szintfelületen lévő pontokhoz azonos magasságot rendel, így fizikai értelmezése van. Ekkor $\bar{g}$ értékét a helytől függetlenül egységesnek választjuk meg. Az ebből fakadó eltérések deciméter körüliek, összetévesztésük csak mérnöki precizitás igénye

esetén problémás. Ezzel szemben a geoidunduláció akár 100 m is lehet, így az ellipszoid feletti magasságokat semmiképp se keverjük a tengerszint felettiakkal!

Egy térinformatikai szoftverben a magassági koordináták megadásakor tehát figyeljünk azok fajtájára (ellipszoid vagy tengerszint feletti, utóbbi esetben melyik fajta) és alapfelületére (melyik ellipszoid, melyik tengerszint)! Magyarország magassági alappontjai a kronštadti vízmércétől számított normálmagasságokat rögzítik. A magassági alappontok hálózatát *magassági dátumnak* nevezzük. Két ország magassági dátumai között az átszámítás centiméteres pontosság kívánalma esetén egyszerű eltolással is történhet. Figyelembe kell vennünk ugyanakkor, hogy a kéregmozgások miatt a magassági jegyek idővel elmozdulnak, így még az azonos tengerszintet használó országok magassági dátumai között is adódhat évtizedek múltán pár centiméteres eltérés. Az ellipszoid és tengerszint feletti magasságok közötti átszámításhoz szükséges szoftverünknek egy geoidmodellt is megadni, hogy a geoidunduláció számítható legyen.

V.2. A földmágnesesség

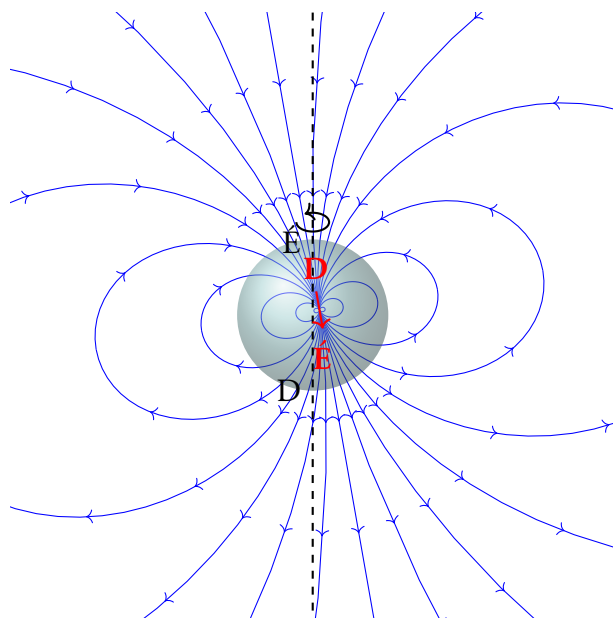
Az északi irányt szabatosan csak csillagászati úton, a Föld forgástengelyének irányát (a csillagok látszó körpályájának középpontját) kijelölve tudjuk meghatározni. A körülményes eljárás miatt gyorsabb, de pontatlanabb módszerre is szükségünk lehet. Régóta ismert például, hogy a felfüggesztett mágneštű az alacsony és közepes szélességeken közel észak–déli irányba áll be. Ennek oka a Föld mágneses tere.

Bár számunkra ismeretlen, hogy a Föld mágneses terét pontosan milyen mechanizmus hozza létre (erre több elmélet is létezik), a mágneses mező térerőssége jól mérhető és leírható. Megfigyeléseink alapján a Föld mágneses terének kb. 90 %-a jól modellezhető egy mágneses dipólus (végtelen kicsi rúd mágnes) mágneses terével. Az erre rakódó maradék 10 % szabálytalanságokat mutat, így összességében a Föld mágneses tere valójában igen bonyolult szerkezetű.

A mágneses mezőt szemléletesen erővonalakkal is ábrázolhatjuk. Ekkor a sűrűbb erővonalak nagyobb térerősséget jeleznek, az erővonalak érintője pedig a térerősség irányát jelöli. A Föld mágneses terét legjobban közelítő mágneses dipólus azonban az V.4. ábrán látható módon nem a Föld tömegközéppontjában helyezkedik el, és nem párhuzamos annak forgástengelyével.

Az ábrán látható, hogy a Föld mágneses térerőssége csak egy alacsony szélességeken haladó, a valóságban szabálytalan futású vonal mentén párhuzamos a Föld felszínével. Ezt a vonalat *mágneses egyenlítőnek* nevezzük.

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.4. ábra. A Föld mágneses mezeje dipólussal modellezve

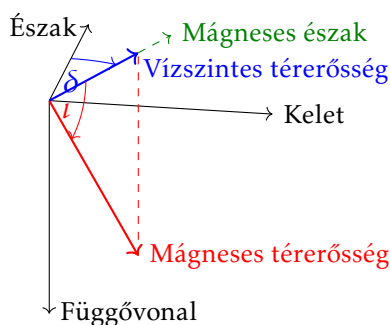
Az a két pont, ahol a mágneses térerősség iránya függőleges, a két *mágneses pólus* (ezek a mágneses tér szabálytalansága miatt nem esnek pontosan egybe a mágneses dipólus tengelyével). A mágneses térerősség iránya és a vízszintes sík hajlásszöge a *mágneses inklináció* vagy *lehajlás* (V.5. ábra).

A mágneses inklináció következtében az egyenletesen súlyozott iránytű nem vízszintesen áll be, ezért könnyen hozzáérhet a szelencéhez. (Magyarországon az inklináció értéke több, mint 60° !) Ezt megelőzendő az iránytűket súlyozzák, az északi féltekén a mágnesű déli fele nehezebb, mint az északi, a déli féltekén ez fordítva van. A gyártók 2-5 zónára osztják a Földet, és minden zónában az adott zónának megfelelően súlyozott iránytűt árusítanak. A Magyarországon vásárolt iránytűnek ezért kevés hasznát vehetjük pl. Argentínában.

Ötletes, de drágán kivitelezhető megoldással készíthető olyan iránytű, amely a térben szabadon tud mozogni. Ilyen iránytűt pl. repülőgépekbe szokás építeni, ahol nem életszerű az összes zónában külön-külön iránytű használata. Magas szélességeken bár a mágneses térerősség jellemzően erősebb, vízszintes komponense az inklináció okán így is túl gyenge ahhoz, hogy bármilyen iránytűt használni lehessen.

A mágneses térerősség vízszintes komponense nem esik egybe a csillagászati úton meghatározott északi iránnyal (V.5. ábra), hanem az ún. *mágneses észak* felé mutat. Ez az irány a mágneses tér szabálytalansága okán még csak nem is a mágneses pólus felé mutat! A mágneses és a földrajzi észak közötti

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.5. ábra. Mágneses deklináció (kék) és inklináció (vörös)

szög a *mágneses deklináció* vagy *elhajlás*. Értéke akkor pozitív, ha a mágneses észak a földrajzhoz képest keletre mutat. A földfelszín közelében található mágnesezhető kőzetek miatt a mágneses deklináció helyről-helyre gyors, szabálytalan változást mutathat. Ezért a deklináció pontos értékét nem egyszerű mindenütt meghatározni.

E mellett további nehézséget okoz, hogy a mágneses mezőnek a napszéllel való kölcsönhatása miatt van egy állandó napi járása, amelyre még szabálytalan mágneses háborgások is ráakódhatnak, a deklináció értékét akár egész fokkal is eltérítve. Ezek a mágneses viharok akár tartósan is megváltoztathatják a Föld mágneses terét, így annak megváltozását lehetetlen pontosan előrejelezni. Magyarországon a mágneses deklináció értéke a jegyzet írásakor kb. $+5^{\circ} 30'$ és növekvő tendenciát mutat.*

V.3. Meridiánkonvergencia és irányredukciók

Fentiek miatt a földrajzi északi irányt nagy pontossággal nem tudjuk mágneštűvel kijelölni, hiszen a pillanatnyi mágneses deklináció pontos értéke ismeretlen. E helyett az északi irányt közvetve határozzuk meg: Ismert koordinátájú álláspontunkról szögmérővel (pl. teodolittal) megmérjük egy másik ismert pont irányát, és a második geodéziai főfeladat segítségével kiszámítjuk az azimutot. A mért irányszög és a számított azimut különbsége elméletileg megegyezik az északi irány és a műszer o állása közötti szöggel.

Ha a fenti azimutot ellipszoidon számítjuk ki, akkor bár pontos eredményt kapunk, de meglehetősen pazarlóan bánunk a számítási erőforrá-

* Az I. katonai felmérés idején a térképeket gyakran nem a földrajzi, hanem a mágneses északi irányba tájolták. Azonban ebben az időben a mágneses deklináció kb. -15° volt, így az erdélyi szelvények nagyjából ekkora szöggel vannak elfordulva.

V. A magasság és az északi irány meghatározása

sokkal.* Ha síkon számolunk, akkor a számítás jelentősen leegyszerűsödik, azonban eredményünk három okból sem lesz helyes.

- A síkkordináta-rendszer függőleges tengelye csak a normális elhelyezéssű valódi hengervetületeken esik egybe mindenütt a földrajzi északkal. A kettő közötti eltérés a *meridiánkonvergenция*, melyet itt μ -vel jelölünk. Értéke akkor pozitív, ha a hálózati észak van keletebbre.
- A meridián képének érintője és a másik pontba mutató geodéziai vonal képének érintője között mért szög csak szögtartó vetületeken egyezik meg mindenütt az ellipszoidi azimuttal. A két szög közötti eltérés az *első irányredukció*.
- A geodéziai vonalak képe csak a gömbi gnomonikus vetületben lesz mindenütt egyenes. Egyébként a leképezett geodéziai vonal kezdőpontban vett érintőjének iránya nem esik egybe a két pontot összekötő térképi szakasszal. A két irány közti szög a *második irányredukció*, jele Δ .

Megállapodás szerint a két irányredukciót akkor tekintjük pozitív előjelűnek, ha hatásukra a síkon számított azimut *növekszik*. Megjegyezzük, hogy ezekkel a szögekkel akkor is korrigálnunk kell iránymérésünket, ha egy ismeretlen pont koordinátáit kívánjuk síkbeli geodéziai főfeladattal számítani. Az ellipszoidi azimutához a korrekciókat hozzáadjuk, a térképi azimutból pedig kivonjuk, hogy a másikat megkapjuk.

A három tényező közül a legjelentősebb a meridiánkonvergenция hatása, amely akár több fok nagyságú is lehet. A modern geodéziai vetületek meridiánkonvergenцияja a középmeridiánban zérus, az északi féltekén jellemzően keleti irányban növekszik. Transzverzális és ferdetengelyű elhelyezésű vetületekben jellemzően az Egyenlítőtől távolodva abszolútértéke növekedni szokott. A meridiánkonvergenция pontos értékét a következő képlet adja:

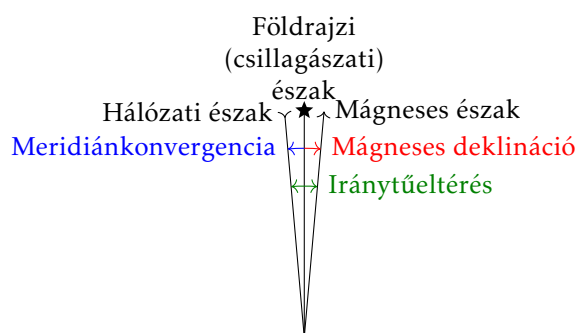
$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

Hogy síkbeli számításaink során ne kelljen a meridiánkonvergenцияval korrigálni, célszerű a földrajzi észak helyett a *hálózati észak*hoz képest mérni az azimutokat. A mágneses és hálózati észak közötti szög ($\delta - \mu$) az *iránytűeltérés*. (Az V.6. ábrán látható meridiánkonvergenция negatív!) A többféle északjelet tartalmazó térképeken a földrajzi északot a Sarkcsillag,[†]

* Az mondjuk igaz, hogy ha az ember rendelkezésére áll egy számítógép, akkor nehéz értelmes okot fölhozni, hogy miért ne számolnánk ellipszoidon. Ugyanakkor a mai építőmérnöki szoftverek még mindig laposfölddel számolnak.

† Valójában az ellipszoidi meridiánhoz képest számított azimut és a csillagászati úton mért *szintfelületi azimut* a LAPLACE-egyenlet (III.1. fejezet) miatt nem egyezik meg,

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.6. ábra. Északi irányok eltérései

a mágneses északot egy iránytű, a hálózati északot a függőleges tengelyre utaló γ betű stilizált ábrája szokta jelölni.

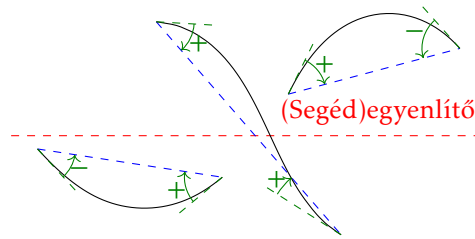
A ma használt geodéziai koordináta-rendszerek szögtartó vetületen alapulnak, így az első irányredukcióval nem kell számolnunk. A második irányredukció értéke rövid szakaszokon elhanyagolható, így ezzel is csak országos hálózatok számításakor kell számolnunk. Nagyságrendje 50 km körüli szakaszokon fél szögperc körüli szokott lenni.

A második irányredukció nagysága szögtartó valódi vetületekben a középparaleltól távolodva növekszik, előjele egyszerűen meghatározható (V.7. ábra):

- A geodéziai vonalak képei a sztereografikus vetületen a (segéd)pólustól kifelé görbülnek.
- A szögtartó kúp- és hengervetületeken a középparalelt ill. a (segéd)egyenlítőt nem metsző geodéziai vonalak e vonalaktól kifelé görbülnek.
- A középparalelt ill. a (segéd)egyenlítőt metsző geodéziai vonalak képei jellemzően S alakúak, inflexiós pontjuk e vonalakra esik.

így a földrajzi és a csillagászati észak sem ugyanaz az irány. Azonban míg a meridiánkonvergencia és a mágneses deklináció több fok is lehet, ez az eltérés alig haladja meg a néhány szögmásodpercet. Ha már a kákán is csomót keresünk, akkor ennyi erővel figyelembe kell vennünk, hogy a függővonal-elhajlás miatt a teodolit vízszintes köre nem párhuzamos az ellipszoid érintősíkjával (néhány század szögmásodperc hibát okoz) és a másik pontban az ellipszoid normálisa nem párhuzamos a mi pontunkban vett normálissal, így az ellipszoid fölött h magasságban lévő pont nem pontosan az ellipszoidi talppontja fölött látszik (néhány ezred szögmásodperc nagyságú mérési hiba). Nagy pontosság igénye esetén a függővonal-elhajlás és a célpont magasságának ismeretében ezek a korrekciók a szakirodalomban megtalálható képletekkel számíthatók.

V. A magasság és az északi irány meghatározása



V.7. ábra. A második irányredukció előjele *MERCATOR* vetületében

A geodéziai gyakorlatban a második irányredukciót a vetületre jellemző közelítő képletekkel szokás becsülni, nagyobb pontosság igénye esetén célszerű közvetlenül forgási ellipszoidon számítani.

Hatodik előadás

Kozmikus geodézia

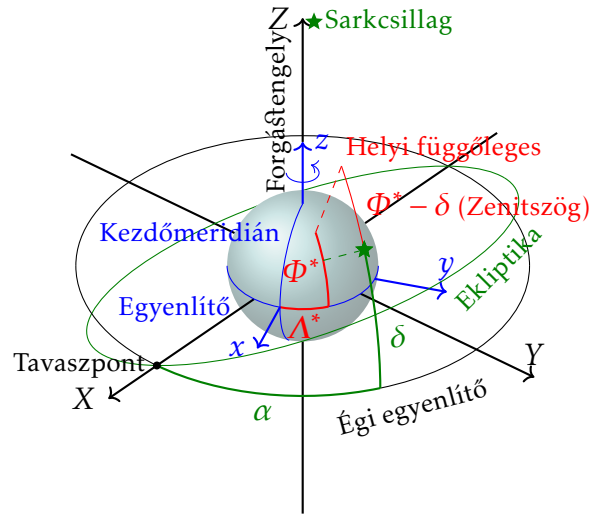
VI.1. Az égi vonatkoztatási rendszer

Kozmikus geodéziának nevezzük azt a tudományágat, amely a csillagok és műholdak megfigyeléséből kívánja kiszámítani az egyes pontok térbeli helyzetét. Mivel az általános geodézia módszerei csak már meglévő, ismert koordinátájú pontokból tudnak további pontokra koordinátákat levezetni; alapvető fontosságú, hogy a (természetes vagy mesterséges) égitestekre irányozva egy kerethálózat pontjainak helyzetét meg tudjuk határozni. Ha az irányzás természetes égitestekre történik, akkor *asztrogeodéziáról*, egyébként *szatellitageodéziáról* beszélünk.

Az eddig ismertetett térbeli koordináta-rendszereinket mind a Föld szilárd felszínéhez kötöttük a terepen megjelölt alappontok segítségével. Ennek következményeként a koordinátatengelyek a Földdel együtt folyamatosan forognak. Az álló helyzetűnek tekinthető csillagok koordinátái vagy a forgó földfelszínnel kapcsolatban nem álló műholdak pályaparaméterei egy ilyen forgó koordináta-rendszerben folyamatosan és gyorsan változnának. Ezért vezetjük be az *égi* vagy *inerciális koordináta-rendszert*.

Mivel a Föld forgástengelyének iránya az égbolt látszó elmozdulásából jól mérhető, célszerű a koordináta-rendszerünk egyik (Z) tengelyét ebben az irányban kijelölni. Ennek a megoldásnak előnye, hogy az égi és földi koordináta-rendszerünk z tengelyei egybeesnek* (VI.1. ábra).

* Természetesen ez sem teljesen igaz. Ennek oka, hogy a Föld nem a tehetetlenségi főtengelye körül forog, mint egy rosszul centírozott kerék. Ezért a földtest folyamatosan billeg a forgástengely körül, a forgástengely felszíni döféspontja kb. $0,3''$ -et (azaz néhány métert) ingadozik az időben. Erre még ráakodik, hogy a tehetetlenségi főtengely iránya sem állandó a Föld belső tömegátrendeződése miatt. Ezek következménye a *pólusmozgás*. Ha a földi koordinátáinkat a valós forgástengelyre vonatkoztatnánk, akkor alappontjaink koordinátái állandóan változnának a pólusmozgás miatt. Ezért megállapodás szerint a földi koordináta-rendszerek z tengelye a forgástengely 1900. és 1906. január 1. között mért irányainak átlaga felé mutat. Az égi koordináta-rendszer Z tengelye viszont a *valós* forgástengely, mert a forgástengely csillagokhoz képest mért irányát a pólusmozgás nem befolyásolja. Ezért a két z tengely között néhány tized szögmásodpercnyi eltérés tapasztalható, amelyet nagy pontossági igény esetén már figyelembe kell vennünk.



VI.1. ábra. Égi és földi koordináta-rendszerek

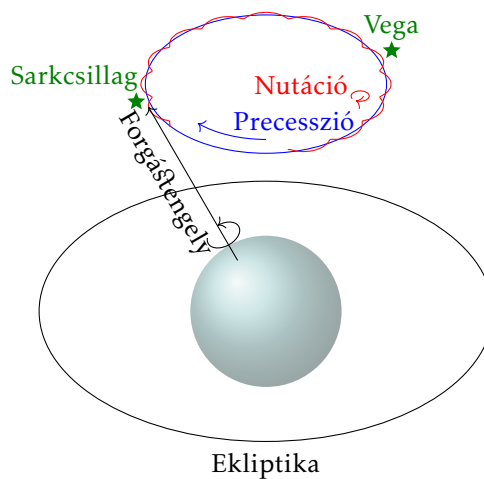
A csillagok távolsága geodéziai szempontból irreleváns, ezért ezeket egy egységsugarú éggömbön ábrázoljuk. Az éggömb Z tengelyre merőleges főkörét *égi egyenlítőnek* nevezzük. A Föld keringési pályasíkja (vagyis a Nap látszó pályája), az *eklíptika*, kb. $23,5^\circ$ -ot zár be vele. Az X tengely iránya a *tavaszpont*, azaz az eklíptika és az égi egyenlítő két metszéspontja közül az, ahol a Nap az északi félteke tavaszi napéjegyenlősége idején tartózkodik. Az Y tengely elhelyezése követi a jobbsodrású koordináta-rendszer konvencióját.

A csillagok helyzetét két koordinátával, az α *rektaszcenzióval* és a δ *deklinációval* jellemezzük. Előbbi a Föld forgástengelyénél kezdődő, a tavaszpontot, illetve a csillagot tartalmazó két félsík hajlásszöge; utóbbi a Föld középpontjából a csillag felé mutató félegyenes és az égi egyenlítő síkjának hajlásszöge.

A csillagok irányának ismerete fontos a helymeghatározásban. Mérhetjük például egy csillag helyi függőlegessel bezárt szögének szélsőértékét, így a mérés pillanatában a csillag dekl. Helyi függőlegesünk rektaszcenziója ekkor pont megegyezik a csillag rektaszcenziójával, míg a helyi függőleges és a csillag deklinációinak különbsége éppen a mért zenitszöggel egyezik meg. A helyi függőleges deklinációja (ha a z és Z tengely egybeesik) megfelel a Φ^* szintfelületi szélességnek. Ismerve a pontos időt és ebből kiszámítva, hogy a földi x koordináta-tengely a Föld forgása következtében éppen merre áll, a helyi függőleges és a földi x tengely rektaszcenzióinak különbsége (ha a z és Z tengely egybeesik) a Λ^* szintfelületi hosszúság. Fontos odafigyelnünk arra, hogy a helyi függőleges és az ellipszoid normálisa nem esik egybe, így

a kapott szélesség és hosszúság nem földrajzi koordináták!

Az égi koordináta-rendszer használata feltételezi, hogy a Föld forgástengelye a csillagokhoz képest időben állandó irányú. Azonban a Föld lapultsága miatt az Egyenlítőnél tömegtöbblet található, amelyre az ekliptika síkjában lévő Nap gravitációs erőt fejt ki. Az ebből származó forgatónyomaték a Föld forgástengelyét törekszik az Ekliptikára merőlegesen beállítani. A Föld forgási tehetetlensége és az előbbi erő eredőjeként a forgástengely iránya az égbolton a VI.2. ábrán látható, az Ekliptikával párhuzamos síkban lévő körpályát írja le. A jelenség neve *precesszió*, egy teljes kört a tengely a jelenlegi sebességével haladva kb. 25 800 év alatt írta le.



VI.2. ábra. Precesszió és nutáció

A Föld egyenlítői tömegtöbbletére a Naprendszer többi égitestje, különösen a Hold, is gyakorol tömegvonzást. Ezek a forgástengely szabályos mozgására különböző, rövidebb periódusú, kisebb amplitúdójú mozgásokat raknak, ezek neve *csillagászati nutáció*.

A precesszió és nutáció következtében a forgástengely nem fog mindig a Sarkcsillag felé mutatni,* a jelenlegi haladási sebességéből következtetve kb. 12 000 év múlva pl. az égbolton egészen más irányban található Vega vehetné át a Sarkcsillag szerepét. Viszont ez egyúttal azt jelenti, hogy a forgástengelyhez kötött égi koordinátatengelyek iránya is az időben folyamatosan változik, így a csillagok rektaszcenziója és deklinációja sem állandó!

* Az ókorban még a Sarkcsillag igen távol volt az égi pólustól, a görögök még nem tudták közvetlenül navigációra használni. Különös egybeesés, hogy a Sarkcsillag éppen a nagy földrajzi felfedezések idején kezdett a forgástengelyhez kellő mértékben közeledni.

A problémát úgy oldották meg, hogy a csillagok katalógusban szereplő égi koordinátái a forgástengely 2000. január 1. déli állapotának felelnek meg. Az égi koordináta-rendszer mai és 2000. évi helyzete közötti elfordulás szögei a csillagászati szakirodalomban megtalálhatók, ezzel minden időpontban lehetőség van a pillanatnyi és a rögzített koordináták között átszámítani. A mai digitális csillagkatalógusokban lehetőség van a dátum beírását követően a csillag adott időpontra vonatkozó koordinátáit lekérdezni.*

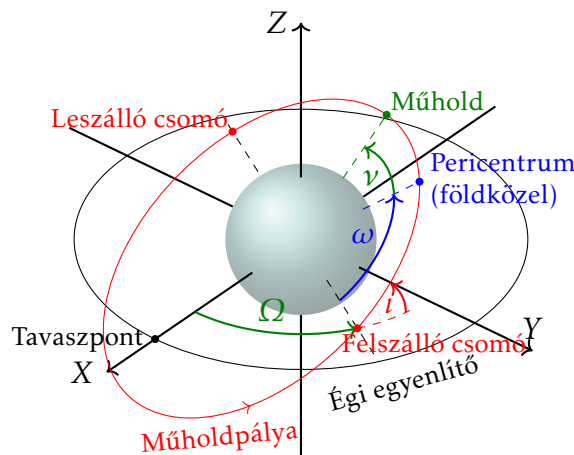
VI.2. Műholdas mérések

A *satellitageodézia* abban különbözik a hagyományos *asztrogeodéziától*, hogy az égi kerethálózatot nem természetes égitestek, hanem műholdak koordinátái realizálják. A műholdak aktuális pályaelemeit a földi követőállomások a csillagokhoz képest folyamatosan mérik és közzéteszik. Ez alapján minden időpontban nagy megbízhatósággal számítható a műhold helyzete az égi koordináta-rendszerben. A műholdaktól vett távolság mérését követően a mi készülékünk koordinátái ívmetszéssel (a műholdas navigációban szokásos korrekciókat figyelembe véve) számíthatók. A pontos idő ismeretében az égi koordináták elforgatással földi derékszögű koordinátákba számíthatók. Ebből a III.5. fejezetben található képletekkel ellipszoidi koordináták kaphatók.

A műholdak pályaparamétereit az égi koordináta-rendszerhez képest adjuk meg. Mivel a navigációs műholdak viszonylag nagy távolságra keringenek, ahol a Föld gravitációs erőtere már közel gömbszerű, így közelítőleg érvényesek rájuk a KEPLER-törvények. Ezért elegendő hat pályaelem megfigyelése: az ellipszis alakú műholdpálya nagyféltengelye, excentricitása, a műholdpálya és az égi egyenlítő síkja által bezárt szög (*inklináció*, a VI.3. ábrán i), a tavaszpont, valamint a műholdpályának és az égi egyenlítő síkjának metszéspontja között mért szög (*felszálló csomó hossza*, Ω), az előbbi metszéspont és a műholdpálya nagytengeleje (földközeli pontja) között mért szög (*pericentrum argumentuma*, ω) és a pericentrum-átmenet időpontja. Utóbbiból tetszőleges időpontra számítható (tudva, hogy a keringés során a műholdat és a Föld tömegközéppontját összekötő szakasz adott idő alatt

* Számunkra a csillagnak nem a valós, hanem a *látszó* iránya fontos, mert helyzetünket ehhez képest mérjük. Azonban a Föld keringése és forgása meglehetősen nagy sebességű, így a relativitáselmélet miatt a beérkező csillagfényt nem abból az irányból látjuk, amerre a csillag valójában tartózkodik. A jelenség neve *aberráció*. Míg a keringésből származó aberráció független az észlelő helyétől, így adott időpontra a csillagkatalógus ezzel korrigált értéket is tartalmazhat, a forgásból származó aberráció mértéke függ az észlelő földrajzi szélességétől. Utóbbival tehát a csillagok katalógusban szereplő koordinátáit nekünk kell megváltoztatni.

mindig ugyanakkora területet súrol), hogy a műhold a pályáján éppen milyen irányban tartózkodik (*anomália*, ν).



VI.3. ábra. KEPLER-féle pályaelemek

Mivel ezek a pályaelemek a távoli műholdakra csak lassan változnak, elégséges ezek folyamatos és pontos megfigyelése és közlése a műhold helyének meghatározásához. Emlékezzünk azonban, hogy a földközeli műholdaknál a Föld gravitációs tere már inkább ellipszoidikus, így ott a pályaparaméterek gyorsabban változnak (I.5. fejezet)! Az égi koordináta-rendszer használata miatt a műholdak koordinátái a csillagos égbolthoz képest ismertek, azaz valójában a szatellitageodéziában is (bár közvetett módon) a csillagokhoz képest határozzuk meg helyzetünket.

A műholdak pályaelemeinek változásából a Föld gravitációs terének szerkezetére tudunk következtetni. Ebből meg lehet határozni a geoid alakját. Mivel a számításhoz szükséges képletek egyfelől igen bonyolultak, másfelől pedig a Föld belső tömegeloszlásával kapcsolatos ismereteink hiányosak, ez a módszer a geoid alakját csak csekély pontossággal adja vissza. Másik lehetőség radarral megmérni a tengerszint és a műhold távolságát. Az ár-árpállyal korrigálva megkapjuk a középtengerszint helyét. Azonban a geoid nem esik tökéletesen egybe a középtengerszinttel, és ezzel a módszerrel a szárazföldek alatt nem lehet a geoid alakjára következtetni. E mérések alapján készülnek a *globális geoidmodellek*, amelyek a térinformatikai pontosságnak megfelelően, de mérnöki pontosságnak elégtelenül adják meg a geoidunduláció értékét.

A műholdas helymeghatározás pontosításához olyan bázisállomásokat használunk, amelyeknek koordinátái (hosszú idejű mérés átlagolásával) ismertek. Ezekről az állomásokról valós időben korrekciós jeleket sugároznak, így ezeket *aktív hálózatnak* nevezzük. A magyar aktív hálózat neve

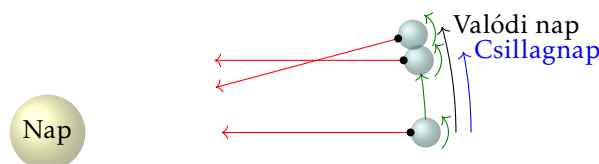
GNSSnet.hu. Ezen felül a transzformáció biztosításához HD72 dátumon is kimért, ismert Balti magasságú pontokon is nagy pontossággal megmérték az ETRS89-koordinátákat a műholdakhoz képest. Ez a hálózat az *Országos GPS Hálózat (OGPSH)*. Ezeken a pontokon nincs állandó vevő. Koordinátái viszont megalapozzák a HD72–ETRS89-transzformációt és a helyi, pontosabb geoidmodellt. Az OGPSH 1166, az aktív hálózat (a határon túli bekapcsolt pontokkal) 60 pontból áll.

VI.3. Időmérés

Hagyományos mérés esetén a szintfelületi hosszúság méréséhez meg kellett mérnünk a választott csillag delelésekor a pontos időt, hogy abból az égi és földi koordináta-rendszerek pillanatnyi elfordulását számíthassuk. Akár csak egyetlen ezredmásodpercnyi hiba az időmérésben a mért hosszúságot kb. $0,015''$ -cel változtatja meg, ez az Egyenlítő mentén közel fél méter hibához vezet. Műholdas rendszereknél a műholdtól mért távolságot a közel fénysebességgel terjedő jel beérkezési idejéből számítjuk. Egy ezredmásodpercnyi hiba ez esetben kb. 300 km eltérést okozhat. Látható, hogy az idő nagy pontosságú ismerete az utóbbi időben elengedhetetlenné vált.

Időmérésünk alapja a Nap két delelése között eltelt idő (*valódi nap*). A VI.4. ábrán látható, hogy ez az időtartam a Föld keringése következtében kissé (kb. négy perccel) hosszabb, mint amennyi idő alatt a Föld egy teljes fordulatot tesz. Azonban míg a Föld forgása viszonylag egyenletes, keringési sebessége nem:

- Az ekliptika síkja nem esik egybe az égi egyenlítő síkjával, ezért a Nap egységnyi elmozdulása az ekliptika mentén az égi egyenlítőre vetítve már nem mindenütt egyforma: a napéjegyenlőségek idején rövidebb, napfordulók idején hosszabb ívdaraboknak felel meg. Ezért júniusban és decemberben két delelés között több idő telik el, mint márciusban és szeptemberben.
- A Föld napközeli (januárban) gyorsabban kering, mint naptávoli (júliusban). Ezért télen két delelés között több idő telik el, mint nyáron.



VI.4. ábra. Csillagokhoz és a Naphoz képest mért nap hossza

Az akár fél percet is elérő egyenletlenség kiküszöbölésére kétfajta napot vezettek be. A *csillagnap* a Föld egy teljes fordulata a csillagokhoz (a gyakorlatban az égi koordinátákat meghatározó tavaszponthoz) képest. A *csillagidő* ekkor a helyi függőleges Egyenlítő síkjára vetített képe és a tavaszpont iránya között mért szög (a földi x és égi X koordináták közti szög). Látható, hogy a csillagidő földmérési célokra hasznos, mert egyrészt közel egyenletes (csak a Föld forgási sebességétől függ), másrészt két csillagvizsgáló hosszúságkülönbsége megegyezik a két helyen mért csillagidő különbségével. A csillagidő azonban a gyakorlati életben haszontalan, mert nem igazodik a nappalok és éjszakák ritmusához.

A *középnap* a valódi nap *átlagos* időtartama. Hossza úgy számítható, hogy egy év alatt pontosan eggyel több csillagnap telik el, mint középnap. A csillagnapok és az évek hosszát nagy pontossággal megmérve meghatároztuk a középnap hosszát, majd ezt 24 órára, az órákat az ismert módon percekre és másodpercekre bontva kapjuk a *középidőt*. A középnapok hossza egyforma, de a Nap csak a tavaszpontban tartózkodva delel déli tizenkét órakor a csillagvizsgáló fölött. A középidő függ a csillagvizsgáló szintfelületi hosszúságától (a helyi függőleges irányától), ezért az egységes időrendszer érdekében megállapodás szerint a greenwich-i csillagvizsgáló középidéjét *világidőnek* (UT_1 , azaz *Universal Time* vagy régebben *GMT*, azaz *Greenwich Mean Time*) nevezzük.

A középidő használata kis pontossági igény esetén már megfelelő egyenletességet biztosít. Azonban műholdas helymeghatározáshoz az időt olyan nagy pontossággal kell ismerjünk, hogy atomóra használata szükséges. Azonban az atomórához képest kimutatható, hogy a középidő segítségével definiált másodpercek hossza nem egyforma, mert a Föld forgása sem egyenletes. Az árapály-jelenség keltette sűrűlódás miatt a Föld forgása lassul. Erre rákódnak a Föld belső tömegátrendeződése okán különböző, szabálytalan változások. Ezért az atomórák másodpercét úgy definiálták, hogy az az 1955 és 1958 közötti középnapok átlagos hosszának $1/86\,400$ -ad része legyen.[†] Így viszont a világidő és az atomidő idővel több másodperccel eltávolodott egymástól.

Az ellentmondás feloldására hozták létre a *koordinált világidőt* (UTC , azaz *Universal Time Coordinated*). Eleinte minden évben előre meghatározták, hogy egy UTC másodperc az atomidő másodpercének hányszorosa. 1970

* A korábban említett pólusmozgás és nutáció miatt ezt kisebb korrekciókkal kell ellátni.

† Igen ám, de az atomórák nem a tengerszinten voltak, hanem magasabban, ahol a gravitáció gyengébb. A gravitáció időeltérítő hatása atomórával már mérhető, így ezzel a mérést korrigálni kell. Még nagyobb mértékű korrekciót kell alkalmaznunk a navigációs műholdon lévő atomórán, amely meglehetősen távol kering a Földtől.

óta az UTC és az atomidő másodperce egyforma hosszú, azonban ha az UT₁ világidő és az UTC különbsége várhatóan eléri a 0,9 másodpercet, akkor *szökőmásodpercet*^{*} iktatnak be. Tehát az UTC és az atomidő közötti különbség mindig valahány egész másodperc (így műholdas navigációhoz egyszerű a két rendszer között átszámítani). Fontos ugyanakkor, hogy a csillagászati mérésekhez a Föld forgásának ismerete továbbra is szükséges, melyet viszont középideőben vagy csillagideőben tudunk kifejezni, így az UT₁–UTC-eltérést a csillagászok folyamatosan követik.

A nemzetközi kezdőmeridián fogalma szorosan kötődik az időméréshez. Ez ugyanis a *forgási ellipszoid alakúnak tekintett* Föld azon meridiánja, amely fölött az elméletileg mérhető középideő megegyezik a világideővel. Greenwich csillagvizsgálójának tehát a szintfelületi, és nem a földrajzi hosszúságát tekintjük nullának. A nulla földrajzi hosszúságú kör a csillagvizsgálótól kb. 102 méterre keletre található, ráadásul a kőzetlemezek vándorlásával a helye még folyamatosan változik is.

VI.4. GNSS és klasszikus geodézia

Ha előbbieik alapján össze kívánjuk hasonlítani a klasszikus és műholdas mérések előnyeit és hátrányait, a következőkben tudjuk a félév anyagát összefoglalni.

A magasság klasszikus mérése szintezővel történik. Előnye, hogy geoid feletti magasságokat kapunk eredményül, amely a polgári életben hasznosabb (pl. a víz nem az ellipszoidhoz képest folyik lefelé). Hátránya, hogy a szabatos magasságméréshez a V.1. fejezetben jelzettek miatt szükséges a szintezett magasságkülönbségek mellett a nehézségi erő mérése is. További hátrány, hogy a módszer valójában magasságkülönbséget mér, a 0 magasságot valamely tengerszinthez önkényesen kötnünk kell.

A műholdas geodézia jelentősen kevesebb ráfordítással, de ellipszoid feletti magasságot szolgáltat eredményül, amely közvetlenül nem használható. Tengerszint feletti magasságot kaphatunk a geoidundulációval korrigálva, azonban a geoidunduláció meghatározása (jelen technológia mellett) szárazföldi területeken nagy pontossággal csak szintezéssel lehetséges. Ezért műholdas geodéziával a magassági pontjainkat csak meglévő szintezett kerethálózathoz képest tudjuk sűríteni.

A vízszintes helymeghatározás csillagászati módszerei szintfelületi koordinátákat adnak, amely a geoid bonyolult alakja miatt távolságok és irányok számítására alkalmatlan. Egyetlen pont koordinátáinak meghatározása (a

^{*} A jegyzet írásakor már tárgyalják a szökőmásodpercek kivezetését, mert az az informatikai rendszerekben gyakran váratlan problémákat okoz. Jelenleg nincs egyetértés az UTC jövőjéről.

mérésre alkalmas éjszakák megvárását és a mérés szükséges számú ismétlését is beleszámítva) akár egy hónapot is igénybe vehet. Több pont bemérése esetén a csillagászati úton mért és ellipszoidon távolság- és szögmérés segítségével (első geodéziai főfeladat)^{*} számított koordináták eltéréseiből megadható a függővonal-elhajlás. A függővonal-elhajlások minimalizálása után megkapjuk alappontjaink ellipszoidi koordinátáit egy helyi dátumon. A módszer hátránya, hogy rendkívül munkaigényes, azonban az eredmény tartós, mert meglévő alappontjaink az azt hordozó kőzetlemezzel együtt mozognak, az alappontok koordinátáinak megváltoztatására nincs szükség.

A műholdas helymeghatározás ezzel szemben a másodperc töredéke alatt szolgáltat ellipszoidi koordinátákat (igaz, nagy pontossági igény esetén érdemes a műszert hosszabb ideig az alapponton hagyni), így egy kerethálózat minimális ráfordítással létrehozható. Mindemellett a koordináták világszer-
te egyetlen közös dátumon vannak, nem szükséges közöttük transzformálni. Hátránya, hogy a műholdak nem a Föld szilárd felszínéhez, hanem a Föld tömegközéppontjához vannak kötve, így a kőzetlemezek vándorlásával a koordináták idővel megváltoznak, a kerethálózatot időnként újra kell mérni. Látható tehát, hogy egyelőre a klasszikus mérési módszereknek is van létjogosultsága, a két mérési módszertan teljesen eltérő előnyöket és hátrányokat tud felmutatni.

^{*} A függővonal-elhajlások iránya és nagysága valójában a geoid normálisait jelöli ki, így ismeretével a geoid alakja meghatározható. A műholdas mérések elterjedése előtt a geoidundulációt éppen a mért függővonal-elhajlásokból tudták számítani, a módszer neve *csillagászati szintezés*.

A. függelék

Angol–magyar szószedet

Az angol nyelvű térinformatikai szoftverek vetületi beállításaihoz érdemes megismerni a félév során tanult szakkifejezések angol megfelelőit. Álljon itt egy rövid gyűjtemény a leggyakoribb fogalmakból!

Affine transform ♦ Lineáris transzformáció

Astronomical coordinate ♦ Szintfelületi koordináta

Cartesian coordinate ♦ Derékszögű koordináta

Datum ♦ Geodéziai dátum

Direct geodesic problem ♦ Első geod. főfeladat

Ellipsoid of revolution ♦ Forgási ellipszoid

First eccentricity ♦ Első excentricitás

Geocentric latitude ♦ Geocentrikus szélesség

Geographic coordinate (geodetic coordinate) ♦ Földrajzi koordináta

Geoid height ♦ Geoidunduláció

Grid shift ♦ Korrekciós rács

HELMERT transform ♦ BURŠA–WOLF-transzformáció *(de néha tényleg a HELMERT-transzformációt jelöli!)*

HORNER polynomial ♦ Polinomos transzformáció *(lehet komplex polinom is!)*

Inverse flattening ♦ Lapultság reciproka

Inverse geodesic problem ♦ Második geod. főfeladat

Latitude ♦ Szélesség

Longitude ♦ Hosszúság

MOLODENSKY transform ♦ MOLOGYENSKIJ-transzformáció

Parametric latitude ♦ Redukált szélesség

Projected coordinate ♦ Térképi koordináta

Projective transform ♦ Projektív transzformáció

Radius ♦ Sugár

Reference frame ♦ Alapfelület

Semi-major axis ♦ Nagyféltengely

Semi-minor axis ♦ Kisféltengely

Sphere ♦ Gömb

Vertical datum ♦ Magassági dátum

Vertical deflection ♦ Függővonal-elhajlás

B. függelék

Gyakorlati feladatok megoldásai

1. gyakorlat Geodéziai alapeladatok

Milyen messze van egymástól Wellington (d. sz. $41^{\circ}17'$; k. h. $147^{\circ}47'$) és Lima (d. sz. $12^{\circ}3'$; ny. h. $77^{\circ}2'$)? Milyen azimutra kell indulni? Mekkora a hiba, ha ellipszoid helyett 6371 km sugarú gömbön számolunk?

WGS84: $s = 12\,531$ km; $\alpha = 131^{\circ}51'1''$. Gömb: $s = 12\,516$ km; $\alpha = 131^{\circ}43'13''$.

Hollókői vár koordinátái: EOVS $Y_A = 690\,046,50$ m; $X_A = 294\,960,67$ m; új GAUSS-gömb $\varphi_A = 47^{\circ}57'5,8501''$; $\lambda_A = 0^{\circ}32'13,1009''$; HD72 $\Phi_A = 47^{\circ}59'50,2217''$; $\Lambda_A = 19^{\circ}35'6,5690''$. A Sas-hegyéi: EOVS $Y_B = 647\,727,41$ m; $X_B = 237\,595,14$ m; új GAUSS-gömb $\varphi_B = 47^{\circ}26'15,5602''$; $\lambda_B = -0^{\circ}1'48,6344''$; HD72 $\Phi_B = 47^{\circ}28'57,2383''$; $\Lambda_B = 19^{\circ}1'6,3021''$. Milyen messze van egymástól a két pont? Milyen azimutra található Hollókőtől a Sas-hegy? Mekkora a torzulás, ha síkon vagy új GAUSS-gömbön számolunk? Mekkora a hiba, ha tévedésből WGS84-ellipszoidot használunk?

Sík: $s = 71\,286,11$ m; $\alpha = 233^{\circ}35'0,44''$. Új GAUSS-gömb és HD72: $s = 71\,287,01$ m; $\alpha = 216^{\circ}48'43,92''$. WGS84: $s = 71\,286,75$ m; $\alpha = 216^{\circ}48'43,91''$. Az Új GAUSS-gömb torzítása (~ 2 mm) kisebb, mint adataink pontossága.

2. gyakorlat Síkbeli transzformációk

Határozzon meg a táblázatban található pontok segítségével egy UTM₃₃→EOVS transzformációt! Ellenőrizze a transzformáció pontosságát az $Y_{UTM33} = 646\,461,604$; $X_{UTM33} = 523\,5130,087$ koordinátájú Sárvár pont transzformálásával! A valós koordináták $Y_{EOVS} = 490\,177,041$; $X_{EOVS} = 214\,297,362$.

A 22 pontból csak 6 esik a 33-as zónába. Ez valós számok használata esetén max. másodfokú közelítést engedne meg, ami gyenge pontosságú. Komplex polinom használatával a harmadfokú közelítés hibája csak 8,1 cm

($Y \approx 490\,177,111$; $X \approx 214\,297,403$). Magasabb fokszámnál a közelítés romlik.

3. gyakorlat Térbeli transzformációk

Határozzon meg a táblázatban található pontok segítségével egy HD72→WGS84 BURŠA–WOLF-transzformációt!

Mivel a HD72 fölötti geoidunduláció ismeretlen, minden pontra a Szőlő-hegyen megadott 6,56 m geoidundulációval számolunk. A paraméterek így magassági értelmében nem adnak kifogástalan eredményt. $\Delta x = 47,866$ m; $\Delta y = -69,206$ m; $\Delta z = -11,495$ m; $\varepsilon_x = 0,3016''$; $\varepsilon_y = -0,0533''$; $\varepsilon_z = 0,4719''$; $\sigma = 1,1682$ ppm.

Transzformálja a napfizikai megfigyelőterasz (WGS84 $\Phi = 47^\circ 28' 29,262''$; $\Lambda = 19^\circ 3' 43,303''$; $h = 187,58$ m) koordinátáit a fenti paraméterekkel HD72 rendszerbe!

$\Phi \approx 47^\circ 28' 30,229''$; $\Lambda \approx 19^\circ 3' 47,355''$; $H \approx 144,20$ m. A hiba szélességben $0,023''$, hosszúságban $0,075''$, magasságban 42 cm.

4. gyakorlat Georeferálás

Georeferálja a három kiadott térképszelvényt!

- Az első térkép UTM-vetületű (34-es zóna), ETRS89(WGS84) alapfelületű. EPSG:25834
- A második budapesti katonai sztereografikus. Egyéni vetület szükséges (IV.1. fejezet).
- A harmadik térkép polikónikus vetületű, yard mértékegységgel. CLARKE-ellipszoid, $\Lambda_0 = 122^\circ$. MOLOGYENSKIJ-paraméterek: -134 ; -83 ; -30 . Függőleges tengely eltolása 1 000 000 yard.

5. gyakorlat Összefoglalás

Transzformálja a napfizikai megfigyelőterasz koordinátáit S42/83 rendszerbe!

$\Phi \approx 47^\circ 28' 30,566''$; $\Lambda \approx 19^\circ 3' 49,271''$; $h \approx 144,36$ m.

A Kecskemét pont EOVS-koordinátái $Y = 699\,815,134$; $X = 173\,736,872$. Számolja át a pontot WGS84 rendszerbe! Hasonlítsa össze a koordinátákat az EHT² rendszerben kapott értékekkel!

Számított: $\Phi = 46^\circ 54' 21,6045''$; $\Lambda = 19^\circ 42' 4,8063''$. EHT²: $\Phi = 46^\circ 54' 21,6059''$; $\Lambda = 19^\circ 42' 4,8113''$.

6. gyakorlat ZH

Φ_{WGS84}	Λ_{WGS84}	h_{WGS84}	Y_{EOV}	X_{EOV}	H_{Balti}
48°28'04,42240"	20°31'12,57568"	456,256	758921,385	348214,269	414,121
46°51'56,81240"	19°35'41,95584"	166,947	691744,460	169203,850	123,827
47°28'56,27133"	19°01'02,25758"	309,547	647727,410	237595,140	265,820
46°19'10,43565"	20°40'14,78819"	142,509	775016,420	109637,020	99,910
45°53'01,01601"	18°13'01,80159"	314,432	585536,604	60221,292	269,704
46°04'19,83671"	18°08'07,94491"	293,988	579444,550	81252,210	249,060
46°53'02,04292"	17°29'28,87945"	191,701	531407,593	172254,298	146,298
47°43'14,89477"	17°44'28,35831"	162,997	552003,127	264931,481	119,170
47°50'17,06062"	21°30'48,38669"	161,608	834572,608	280059,946	121,331
47°59'49,26535"	19°35'02,48194"	419,039	690046,500	294960,670	375,860
46°22'08,20518"	17°05'26,27616"	285,411	499440,130	115716,240	240,274
46°53'22,51896"	16°23'45,40556"	325,630	447972,160	175133,800	279,730
47°23'07,40001"	16°28'59,38447"	634,935	456423,380	229998,590	588,850
47°09'27,51787"	21°37'13,25229"	137,514	845059,830	204711,120	96,286
48°04'36,69376"	20°29'51,52991"	826,731	758062,903	304703,360	784,115
47°15'20,47635"	18°37'09,29576"	234,660	617590,469	212491,260	190,518
46°18'48,83654"	19°38'46,68121"	170,994	696126,170	107849,365	127,207
47°47'22,56055"	19°16'53,48687"	291,792	667539,245	271786,719	248,260
47°17'29,75411"	19°36'06,57495"	270,584	691930,680	216542,440	227,727
46°33'47,96959"	18°20'48,38519"	209,588	596277,192	135678,234	165,196
48°22'37,26725"	21°37'56,47121"	155,800	841488,851	340246,742	115,916
47°38'44,16897"	16°36'14,94362"	320,550	466457,988	258621,351	275,100
48°07'46,37922"	22°32'56,93673"	193,622	910597,724	315396,390	154,721
47°22'14,59641"	20°32'12,98244"	136,029	762485,465	226261,009	94,145

B.1. táblázat. Illesztőpontok koordinátái (méterben) a gyakorlati feladatokhoz

B. Gyakorlati feladatok megoldásai

Zóna	Y_{UTM}	X_{UTM}	Φ_{HD72}	Λ_{HD72}
34	464530,996	5368418,133	48° 28' 05,36001"	20° 31' 16,73313"
34	392916,618	5191207,267	46° 51' 57,76157"	19° 35' 45,97472"
34	350627,950	5260667,672	47° 28' 57,23823"	19° 01' 06,30212"
34	474654,472	5129607,066	46° 19' 11,34964"	20° 40' 18,79447"
34	284069,985	5084882,660	45° 53' 02,00596"	18° 13' 05,72351"
34	278490,174	5106056,433	46° 04' 20,82750"	18° 08' 11,88232"
33	689812,763	5195275,890	46° 53' 03,05273"	17° 29' 32,86628"
33	705575,483	5288909,325	47° 43' 15,89315"	17° 44' 32,39174"
34	538420,021	5298430,503	47° 50' 17,95709"	21° 30' 52,51906"
34	394369,488	5316938,841	47° 59' 50,22173"	19° 35' 06,56903"
33	660801,512	5137165,105	46° 22' 09,23162"	17° 05' 30,22458"
33	606345,347	5193840,460	46° 53' 23,55656"	16° 23' 49,37765"
33	611943,892	5249058,818	47° 23' 08,43059"	16° 29' 03,38794"
34	547023,337	5222869,398	47° 09' 28,40904"	21° 37' 17,33269"
34	462582,485	5324964,931	48° 04' 37,62987"	20° 29' 55,65601"
34	319871,319	5236327,521	47° 15' 21,45419"	18° 37' 13,31653"
34	395774,022	5129778,187	46° 18' 49,78181"	19° 38' 50,66800"
34	371290,918	5294345,449	47° 47' 23,52195"	19° 16' 57,55616"
34	394283,574	5238517,125	47° 17' 30,70337"	19° 36' 10,62186"
34	296653,294	5160059,862	46° 33' 48,95658"	18° 20' 52,35968"
34	546825,871	5358398,832	48° 22' 38,16503"	21° 38' 00,65023"
33	620478,266	5278158,144	47° 38' 45,19532"	16° 36' 18,95693"
34	615268,428	5331859,839	48° 07' 47,24034"	22° 33' 01,11907"
34	465039,840	5246466,298	47° 22' 15,52284"	20° 32' 17,05537"

B.1. táblázat. (folytatás)

C. függelék

BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

A III.5. fejezetben levezettük, hogy:

$$z = \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - e^2 N(\Phi) \right] \sin \Phi$$

Ebből szeretnénk a földrajzi szélességet kifejezni. Először vegyünk észre, hogy:

$$\frac{1}{\cos^2 \Phi} = \frac{\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} = \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} + \frac{\cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} = \operatorname{tg}^2 \Phi + 1$$

Az eredeti képletbe helyettesítsük be a harántgörbületi sugár képletét, majd kezdünk el átrendezgetni! Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jelölést! Az átalakítás lényege, hogy a gyökjelet eltüntetjük úgy, hogy egy oldalra rendezzük, majd négyzetre emelünk; a törteket a nevezőkkel fölszorozva tüntetjük el, majd $\cos^4 \Phi$ -vel végigszorozva mindenből tangenst csinálunk.

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sin \Phi} &= \frac{r}{\cos \Phi} - \frac{ae^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \\ \frac{a^2 e^4}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} &= \frac{r^2}{\cos^2 \Phi} - 2 \frac{rz}{\cos \Phi \sin \Phi} + \frac{z^2}{\sin^2 \Phi} \\ a^2 e^4 \cos^2 \Phi \sin^2 \Phi &= r^2 \sin^2 \Phi - r^2 e^2 \sin^4 \Phi - 2rz \cos \Phi \sin \Phi + \\ &\quad + 2rze^2 \sin^3 \Phi \cos \Phi + z^2 \cos^2 \Phi - z^2 e^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \\ a^2 e^4 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} &= r^2 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^4 \Phi} - r^2 e^2 \frac{\sin^4 \Phi}{\cos^4 \Phi} - 2rz \frac{\sin \Phi}{\cos^3 \Phi} + \\ &\quad + 2rze^2 \frac{\sin^3 \Phi}{\cos^3 \Phi} + \frac{z^2}{\cos^2 \Phi} - z^2 e^2 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} \\ a^2 e^4 \operatorname{tg}^2 \Phi &= r^2 \operatorname{tg}^2 \Phi (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) - r^2 e^2 \operatorname{tg}^4 \Phi - 2rz \operatorname{tg} \Phi (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) + \\ &\quad + 2rze^2 \operatorname{tg}^3 \Phi + z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) - z^2 e^2 \operatorname{tg}^2 \Phi \end{aligned}$$

C. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

$$[(1 - e^2)r^2] \operatorname{tg}^4 \Phi + [(e^2 - 1)2rz] \operatorname{tg}^3 \Phi + \\ + [r^2 + z^2(1 - e^2) - a^2 e^4] \operatorname{tg}^2 \Phi + [-2rz] \operatorname{tg} \Phi + z^2 = 0$$

Ha bevezetjük a $t = \operatorname{tg} \Phi$ változót, akkor a fenti egyenlet szögletes zárójeleiben lévő kifejezéseket az ábécé nagybetűivel jelölve a következő negyedfokú egyenletet kapjuk az ismeretlen t -re:

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

A negyedfokú egyenlet megoldását FERRARI-képletnek nevezzük. Először vezessünk be egy új $u = t + B/4A$ változót a $t = u - B/4A$ helyettesítéssel! Behelyettesítés után az egyenletet A -val végigosztva, a zárójeleket kifejtve és u azonos kitevőit összegyűjtve a harmadfokú tag kiesik:

$$u^4 + \left(\frac{-3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A} \right) u^2 + \left(\frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A} \right) u + \left(\frac{-3B^4}{256A^4} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A} \right) = 0$$

A zárójeles együtthatókat görög betűkkel jelölve:

$$u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

Bármilyen v -re igaz az hogy:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v \right)^2 = 2vu^2 - \beta u + v^2 + \alpha v + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma$$

Ezt úgy ellenőrizhetjük, ha a fönti zárójelet kibontjuk és a tagokat egy oldalra rendezzük, akkor v kiesik és az előző egyenletet kapjuk vissza. A jobb oldalt tovább alakítva:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v \right)^2 = \left(\sqrt{2v}u - \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right)^2 - \frac{\beta^2}{8v} + v^2 + \alpha v + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma$$

Mivel a fenti egyenlet bármilyen v -re igaz, válasszuk ki azt a v -t, amelyikre a zöld kifejezés éppen nulla. Ekkor a vörös kifejezést V -vel, a kéket K -val jelölve $V^2 = K^2$, vagyis $V^2 - K^2 = 0$, tehát $(V + K)(V - K) = 0$, azaz a következő szorzat értéke nulla:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v + \sqrt{2v}u - \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right) \left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v - \sqrt{2v}u + \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right) = 0$$

A fönti szorzat azonban csak akkor lehet nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Ebből két, u -ban másodfokú egyenletet kapunk, melynek két-két megoldása lesz a hiányos negyedfokú egyenlet négy megoldása.

C. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

Ekkor a definíció alapján u négy gyökéből t -re is kapunk négy megoldást, tehát a negyedfokú egyenletet megoldottuk. Azaz megoldottuk volna, ha tudnánk, mennyinek is választottuk a v -t. A feltétel az volt, hogy a fönti zöld kifejezés legyen nulla. Akkor a zöld kifejezés v -vel szorozva is nulla:

$$v^3 + \alpha v^2 + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)v - \frac{\beta^2}{8} = 0$$

Harmadfokú egyenletet kaptunk, amelyet CARDANO képletével kell megoldanunk. Vezessük be a $w = v - (\alpha^2/4 + \gamma)/3$ segédváltozót, vagyis helyettesítsük be ezt: $v = w + (\alpha^2/4 + \gamma)/3$. Ekkor a zárójeleket kifejtve és a w -ben azonos fokszámú tagokat összegyűjtve a másodfokú tag kiesik:

$$w^3 + \left[\frac{\alpha^2}{4} - \gamma - \frac{\alpha^2}{3}\right]w + \left[-\frac{\beta^2}{8} - \frac{\alpha\left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}\right] = 0$$

Azaz elbetűzve a konstans együtthatókat:

$$w^3 + Pw + Q = 0$$

Legyen $w = W + Z$! Ekkor kifejtve a zárójeleket:

$$W^3 + Z^3 + (3WZ + P)(W + Z) + Q = 0$$

Mivel W és Z közül az egyiket szabadon megválaszthatom, legyen $3WZ + P = 0$! Ekkor a fönti egyenletből és a feltételünkből (mindent köbre emelve) két egyenlethez jutunk:

$$W^3 + Z^3 = -Q$$

$$W^3 Z^3 = -P^3/27$$

A fenti egyenletekből a VIÈTE-formulák miatt az következik, hogy W^3 és Z^3 a következő s -ben másodfokú egyenlet két megoldása:

$$s^2 + Qs - \frac{P^3}{27} = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$s_{1,2} = W^3, Z^3 = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

Azaz, mivelhogy $w = W + Z$, megkaptuk a hiányos harmadfokú egyenlet egyik gyökét:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

A lineáris helyettesítésünkkel így visszkapjuk az eredeti harmadfokú egyenlet v megoldását, amelyből már ismerjük a hiányos negyedfokú

C. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

egyenletből levezetett két másodfokú egyenletben szereplő v -t is. Így már a negyedfokú egyenletre is van négy u megoldásom, amelyből az eredeti negyedfokú egyenlet t -jére is kaptunk megoldást. Ez a földrajzi szélesség tangense, amelyet a [III.5.](#) fejezetben található képletekbe visszahelyettesítve még az ellipszoid fölötti magasságot is visszakaphatjuk. Gondoljunk bele, hogy ez a hatalmas számításömeg minden másodpercben lezajlik abban kis telefonba épített GPS-chipben is!

BORKOWSKI valójában nem teljesen a fent felvázolt úton jutott el a negyedfokú egyenletig. A kérdés még a mai napig aktív kutatási terület, hogy hogyan lehet olyan negyedfokú egyenletet kapni, amely numerikusan stabil képletekre vezet.

D. függelék

A nehézségi erő

A nehézségi erő mérése adja a felsőgeodézia alapját. Vízsintes helyzetünket a függővonalhoz képest mérjük, ennek iránya a nehézségi erő iránya. Nagypontosságú szintezéshez mindenütt mérnünk kellett a nehézségi gyorsulást. INGA-alapponthálózatunkon gravimetriai adatokat is találunk. Navigációs műholdjaink pályáira a Föld gravitációja alapvető hatással van. Ezért egy mérnök hallgató felsőgeodéziai ismereteit hagyományosan a nehézségi erőter ismertetésére hegyezik ki, minden mást ebből vezetnek le. Bár kartográfiai szempontból a fizikai geodézia jelentősége csekély, hiszen ennek ismerete nélkül is tudunk transzformációkat számítani; jelen jegyzet erősen hiányos lenne, ha nem tartalmazná legalább említés szintjén a legfontosabb alapismereteket.

Fizikából ismert, hogy ha koordináta-rendszerünk nem inerciális, hanem forog vagy gyorsuló mozgást végez, akkor a koordináta-rendszerben mozgó test úgy viselkedik, mintha rá *fiktív erők* hatnának.

A VI.1. fejezetben megismert égi vontkozottatási rendszer nem végez forgó mozgást. Azonban az EINSTEIN-féle relativitáselméletből ismert, hogy a tömeggel rendelkező testek a teret az időben maguk felé görbítik. Ha egy ilyen térben egy időben állandó koordináta-rendszert feszítünk ki, abban fiktív erőként *gravitáció* fog jelentkezni. Egy pontszerű, M tömegű test gravitációs mezeje úgy hat a többi, d távolságban lévő testre, hogy azoknak a gyorsulása:

$$a = \frac{GM}{d^2}$$

Itt G a tömegvonzási állandó. Az $\vec{a}$ gyorsulás valójában egy vektor, a képlet csak ennek hosszát adja meg. $\vec{a}$ iránya mindig a másik test felé mutat. Mint látható, a gravitáció mértéke kizárólag a pontszerű tömegtől vett távolságtól függ, azaz a pontszerű test gravitációs erőtere gömbszimmetrikus.

Mivel a fiktív erők által keltett gyorsulások vektormennyiségek, ezekkel nehéz számolni. Ezért vezetjük be a *potenciál* fogalmát. Egy erőter potenciálja egy olyan mennyiség, amelynek gradiense megegyezik az erőter által keltett gyorsulással. *Potenciálfelületnek* nevezzük azt a felületet, amely mentén a potenciál állandó. A definícióból következik, hogy az erő mindig

merőleges a potenciálfelületre, és az erő annál nagyobb, minél sűrűbben helyezkednek el egymáshoz képest a potenciálfelületek (minél gyorsabban változik a potenciál). A potenciálfelületek ábrázolása így szemléletesen mutatja meg az erőter szerkezetét.

A Föld elvben felbontható lenne elemi kis pontszerű tömegdarabokra, és így a kialakuló szabálytalan gravitációs erőteret ki lehetne számolni ezen kis tömegpontok gravitációs erőinek eredőjeként. Azonban erre a gyakorlatban nincs lehetőségünk, mert a Föld belső tömegeloszlása nem ismert. Ezért a Földet a gyakorlatban azt egy azonos tömegű, egyenletes tömegeloszlású forgási ellipszoiddal (a Föld *normálalakja*) helyettesítjük. Ennek gravitációs erőtere a *normál gravitáció*.

A D.1. ábrán kékkel láthatjuk, hogy egy ilyen forgási ellipszoid milyen gravitációs erőteret kelt maga körül. Ennek főbb tulajdonságai:

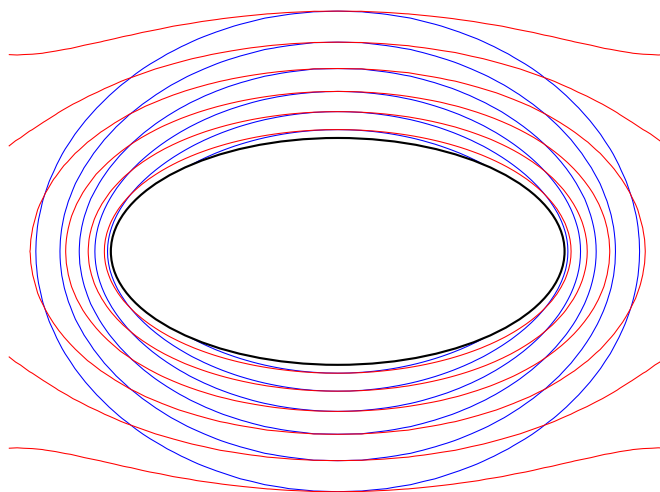
- A potenciálfelületek az Egyenlítőnél sűrűbben, a pólusoknál ritkábban helyezkednek el; a teőttől távolodva a potenciálfelületek egyre gömb-szerűbbé válnak. Ezért a Földtől távolabb keringő műholdak már úgy viselkednek, mintha a Föld közel gömb alakú lenne: pályájuk nagyjából síkban marad, egy gömbi főkör fölött haladnak ellipszis alakú pályán. A navigációs műholdakra már ez jellemző (VI.2. fejezet).
- Az ellipszoidhoz közel a potenciálfelületek is lapultabbá válnak, azonban a gravitációs erő nem merőleges az ellipszoid felszínére, egyes potenciálfelületek metszik az ellipszoidot. Ezért a földközeli műholdak már jó közelítéssel ellipszoidi geodéziai vonalak fölött fognak repülni, de a geodéziai vonalak hátrálása jelentősen kisebb lesz, mint a lapultabb földi ellipszoid geodéziai vonalaié (I.5. fejezet)

A földi koordináta-rendszer forgó mozgást is végez. Ennek következtében két fiktív erő, a csak mozgó testekre ható CORIOLIS-erő és a minden testre ható *centrifugális erő* jelentkezik fiktív erőként. Mivel geodéziai műszereink jellemzően állnak, ezért csak a centrifugális erőt kell figyelembe vennünk. Az általa keltett gyorsulás iránya merőleges a forgástengelyre, kifelé mutat. Nagysága egy ω szögsebességgel forgó rendszerben, a forgástengelytől r távolságban:

$$k = \omega^2 r$$

*Nehézségi erő*nek nevezzük a gravitációs és centrifugális erők vektorösszegzéssel számított eredőjét. A nehézségi gyorsulás is ennek megfelelően: $\vec{g} = \vec{a} + \vec{k}$. A D.1. ábrán vörös jelöli a normál nehézségi erőteret:

- A forgástengely mentén (azaz a pólusokon) nem lép föl centrifugális erő, a nehézségi és gravitációs erők itt egyformák. Az Egyenlítőn a



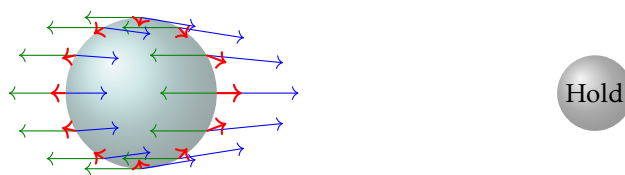
D.1. ábra. Egy gyorsan forgó, erőteljesen lapult forgási ellipszoid gravitációs (kék) és nehézségi (vörös) erőterének potenciálfelületei

legnagyobb a távolság a tengelytől, a centrifugális erő itt a gravitáció ellen hat. Abból látszik, hogy a nehézségi erő kisebb lett, hogy a potenciálfelületek ritkábban helyezkednek el.

- Az ellipszoid felszíne a nehézségi erő egy potenciálfelülete, azaz a normál nehézségi erő mindenütt merőleges az ellipszoidra. Ugyanakkor nagysága már nem egyenlő, mert a pólusokon sűrűbben, az Egyenlítőn ritkábban helyezkednek el a potenciálfelületek, a nehézségi erő az Egyenlítőn a legkisebb (V.1. fejezet).
- A nehézségi erőter szerkezete a Földtől távol igen bonyolult. Ezért a Föld körül keringő tárgyak mozgását nem érdemes a földi koordináta-rendszerben számolni. A műholdpályákat mindig égi koordináta-rendszerben számítjuk (VI.2. fejezet).

Mind az égi, mind a földi koordináta-rendszerben fiktív erőként jelentkezik még az *árapálykeltő erő*. Ez igazából két fiktív erő eredője. Egyfelől a Földön kívül más égitesteknek (Nap, Hold, nagyobb bolygók) is érzékelhető a gravitációs ereje. Viszont a Föld tömegközéppontjára (azaz koordináta-rendszerünk origójára) is hatnak ugyanezek az erők, ami miatt a koordináta-rendszerünk úgy gyorsul az égitestek irányába, hogy a gyorsulásból adódó tehetetlenségi erő a tömegközéppontban éppen kioltsa ezen égitestek gravitációs erejét. Viszont míg a tehetetlenségi erő (a D.2. ábrán zöld) a helytől független, az égitestek gravitációs ereje (az ábrán kék) már függ az égitest távolságától. A hatás annál erősebb, minél közelebb van az égitest (ennek oka, hogy a gravitáció négyzetesen függ a távolságtól), így a Földön elsősorban a Hold árapálykeltő erejének van jelentősége.

D. A nehézségi erő



D.2. ábra. Árapálykeltő erők

A Föld Hold felé néző oldalán a Hold gravitációja erősebb, mint a Föld tömegközéppontjában, ezért itt a Hold gravitációja erősebb a tehetetlenségnél, az árapálykeltő erő a Hold felé mutat. Az áttellenes oldalon a tehetetlenségi erő a nagyobb, így az árapálykeltő erő a Holdtól elfelé mutat. A Föld többi részén a Hold gravitációs erejének és a tehetetlenségi erőnek az iránya nem esik egybe, az eredőként előálló erő kissé oldalirányba vagy a Föld belseje felé mutat. Az oldalirányú erők hozzák mozgásba a tengervizet, amely a Hold felőli oldalon a Hold felé, a másik oldalon áttellenesen akar e miatt összegyűlni. Viszont mire odaér a víz, addigra a Föld és a Hold elfordul egymáshoz képest, így ezen a helyen a földfelszín a befelé mutató árapálykeltő erők miatt lesüllyed, az idezúduló víz miatt viszont a tengerszint megemelkedik, és dagály lesz. Ezért a közvélekedéssel ellenben nem a Hold felőli oldalon alakul ki dagály.

Az árapálykeltő erők nem csak a tengerszint ingadozása miatt fontosak: a relativitáselmélet szerint nem lehetséges olyan kísérletet végrehajtani, amellyel a különböző eredetű fiktív erők egymástól megkülönböztethetők lennének. Azaz a forgó Földön a nehézségi és árapálykeltő erők, a műholdakon a gravitációs és árapálykeltő erők *eredőjét* tudjuk csak mérni. Mivel az árapálykeltő erők időben a Föld forgása és a Hold keringése miatt gyorsan változnak, ezért ha a nehézségi erőterről pontos és időben állandó képet szeretnénk kapni, mindenképp korrigálnunk kell a mérést az árapálykeltő erő nagyságával.

A Földön mért nehézségi erő nagysága és iránya még az árapálykeltő erők kiejtése után is jellemzően kissé eltér a forgási ellipszoidon számolt normál nehézségi erőttől. Ennek vizsgálata rendkívül fontos, ugyanis ebből következtetni lehet a valós potenciálfelületek (így a geoid) alakjára. Az így mért nehézségi potenciálnak és az ellipszoid normál nehézségi potenciáljának eltérése a *potenciálzavar*. Ez a felsőgeodéziában alapvető fontosságú fogalom, mert a potenciálzavar okozza a függővonal-elhajlást, valamint az ortométeres és normálmagasságok közötti eltérést.

A nehézségi erő mérésére több módszer is létezik. A Föld egészének gravitációs mezejére a műholdak pályájából következtetünk. Ebből ki lehet számítani a Föld felszínén a potenciál értékét. A mért potenciált *geoid-*

modellek formájában publikálják, ez alapján térinformatikai pontossággal meg lehet határozni a geoidunduláció értékét is. A kisebb tárhelyigény érdekében az adatokat ún. gömbfüggvények együtthatóiként, tömören tárolják. Ilyen geoidmodell például az EGM2008. A hobbi GPS-készülékek a geoidundulációt globális geoidmodellel korrigálják. Vigyázzunk, hogy ezen geoidmodellek a mérnöki pontosságot nem érik el, a kis kiterjedésű gravitációs rendellenességeket nem tudják figyelembe venni.

Nagy pontosságú, helyi geoidmodelleket földi gravimetriai mérőeszközök segítségével, valamint a szintezett tengerszint feletti és GNSS-szel mért ellipszoid feletti magasságok összehasonlításával készíthetünk. A helyi geoidmodelleket rendszerint raszteres formában tároljuk (a pixelek értékei a geoidunduláció méterben). Az EHT² és a VITEL is az ellipszoid és a tengerszint feletti magasságok között ilyen geoidmodellel vált át. A legtöbb térinformatikai csomag alkalmas helyi geoidmodellek kezelésére, így téradataink harmadik koordinátáját nagy pontossággal át tudják váltani tengerszinti és ellipszoidi magasság között.

A nehézségi erő földi mérése történhet abszolút módon, ingával vagy szabadon eső tárgy mozgásának megfigyelésével. Ezen módszerek hátránya, hogy nagy pontosság eléréséhez igen költséges műszerek kellenek. Ezért a gyakorlatban inkább a nehézségi erő *változását* mérjük. A nehézségi erő változását mérő eszköz a *graviméter*, amely a műszerben levő súly feszítő erejét méri nagy pontossággal. Az *Eötvös-inga* ezzel szemben a nehézségi erő deriváltját, azaz a potenciálfelület alakját tudja megmérni. A zseniális műszer lényege, hogy a benne található, különböző magasságban felfüggesztett két súlyra ható nehézségi erő közötti finom eltérések tükrök segítségével olcsón és nagy pontossággal mérhetők meg.

E. függelék

Tárgymutató

A, Á

ALBERS-vet. 37

B

BESSEL, FRIEDRICH WILHELM
(1784–1846), német geodéta [beszöl] 15, 25, 37

BORKOWSKI, KAZIMIERZ M. [borkovszki], lengyel csillagász 34

BOWRING, BERNARD RUSSELL
[bauring] (1925–2006), angol geodéta 34

BURŠA–WOLF-transzformáció [bur-sa volf] 30, 35, 37

C

CLAIRAUT-tétel [klero] 13

CLARKE, ALEXANDER ROSS (1828–1914), brit geodéta 26

D

dátumtranszformáció

3 paraméteres lásd MOLOGYENSKIJ-transzformáció

7 paraméteres lásd BURŠA–WOLF-transzformáció

korrekciós rács 31, 37

DE L’ISLE-vet. 37

dekináció 52

deklináció 53

E, É

égi koordináta-rendszer 51–56, 70, 72

EHT² 39, 74

első excentricitás 10

EOV 35, 39

EPSG-szám 35

ETRS89 38–40, 56

F

függővonal-elhajlás 10, 25–28, 33, 42, 49, 59, 73

G

GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777–1855), német matematikus [gausz] 15

GAUSS–KRÜGER-vet. 37

geodéziai dátum 7, 25–31, 35, 37, 41, 56, 59

geodéziai vonal 12–16, 48, 49, 71

geoid 25, 29, 41–43, 55, 58, 73

geoidmodell 45, 55, 56, 74

geoidunduláció 28, 33, 42, 43, 45, 58

H

HELMERT-transzformáció 21, 23

hosszúság 8, 27, 32–34

szintfelületi 26, 52, 56

HOTINE-vet. [hotín] 36

I, Í

illesztőpontos transzformáció
 affin *lásd* lineáris transzformáció
 hasonlóság *lásd* HELMERT-transzformáció
 polinomos *lásd* polinomos transzformáció
 projektív *lásd* projektív transzformáció
 INGA 39, 70
 iránytűeltérés 48

K

KARNEY, CHARLES F. F., angol geodéta [kárni] 15
 kezdőmeridián 9, 58
 komplex polinomos transzformáció 23
 KRASZOVSKIJ, FEODOSZIJ NYIKOLAJEVICS [krászófszkij] (1878–1948), szovjet geodéta 26

L

LAMBERT-síkvet. 37
 LAMBERT-GAUSS-vet. 37
 LAPLACE-egyenlet 28, 48
 lapultság 10, 25, 28, 53
 LEGENDRE, ADRIEN-MARIE (1752–1833), francia matematikus [lözsandr] 15
 lineáris (affin) transzformáció 20

M

magassági dátum 45
 mágneses deklináció 47, 49
 mágneses inklináció 46

meridiánkonvergenca 48, 49
 MOLOGYENSKIJ-transzformáció [málágyénszkij] 29, 35, 36

O, Ó

OGPSH 56

P

polinomos transzformáció 19, 21, 23
 POSTEL-vet. 37
 potenciálfelület *lásd* szintfelület
 PROJ.4 37
 projektív transzformáció 23

R

rektaszcenzió 52, 53
 ROSENUND-vet. 37

Sz

szélesség
 geocentrikus 11
 geodéziai 11, 25, 32–34
 gömbi 8
 redukált 11, 34
 szintfelületi 25, 52
 szintfelület (potenciálfelület) 12, 41–44, 71–74
 sztereografikus vet. 37

U, Ú

UT₁ 57, 58
 UTC 57
 UTM 35

W

Web Mercator 35, 38
 WGS84 25, 29, 35, 36
 WKT 36