

Schipp Ferenc

RACIONÁLIS ORTOGONÁLIS  
RENDSZEREK

A JEL- ÉS KÉPFELDOLGOZÁSBAN ÉS A  
RENDSZER- ÉS IRÁNYÍTÁSELMÉLETBEN

ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2016

# BEVEZETÉS

Ebben a jegyzetben racionális ortogonális rendszerekkel foglalkozunk. Vizsgálatainkat az EKG görbék elemzése motiválta. Az alábbi ábrán egy 6 felvételt tartalmazó, valódi EKG felvételt mutatunk be. Mind a 6 felvétel, amelyeket az I,II,III, aVR, aVL, aVF betűkkel szokás jelölni, 3-3, nagyjából periódikusan ismétlődő szakaszból áll. Az a célunk, hogy ezeket a görbéket minél kevesebb paraméterrel írjuk le. Első közelítésben induljunk ki periódikus függvényekből. A görbék matematikai leírására eddig is különböző függvényosztályokat vettek alapul, mint pl. a trigonometrikus függvényeket, a spline függvényt, stb.

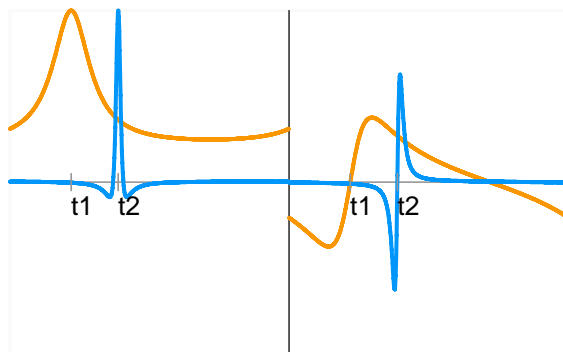
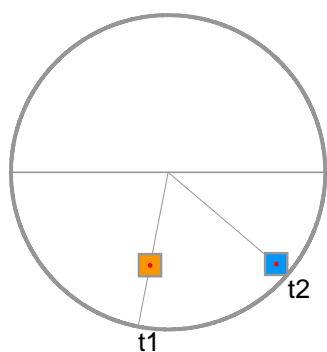


*A jegyzet az ELTE 2016. évi jegyzetpályázatának támogatásával készült*

Az EKG-görbék modellezéséhez racionális függvényeket fogunk használni. Ismeretes, hogy a komplex racionális függvények előállíthatók

$$r_a(z) := \frac{1}{1 - \bar{a}z}, \quad r_{a,n}(z) := r_a^{n+1}(z) \quad (z, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

alakú ún. **elemi racionális függvények** lineáris kombinációiként. Az  $a$  komplex szám  $a^* := 1/\bar{a}$  egységkörre vonatkozó tükörképe (más szóval: inverz képe) az  $r_{a,n}$  **pólusa**, az  $n + 1$  szám az  $a^*$  **pólus multiplicitása**. A továbbiakban az  $a$  paramétereket a  $\mathbb{D}$  diszkból választjuk és az  $r_{a,n}$  **inverzpólusának** nevezzük. Ekkor az  $r_{a,n}$  függvénynek a  $\mathbb{T}$  tóruszra vett  $r_{a,n}(e^{it})$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) leszűkítése egy  $2\pi$  szerint periódikus, analitikus függvény. Megmutatjuk, hogy az ilyen alakú függvények lineáris kombinációival a  $2\pi$ -szerint periódikus EKG-jelek jól approximálhatók. Az alábbi ábrán két elemi racionális függvény valós és képzetes részét szemléltetjük.

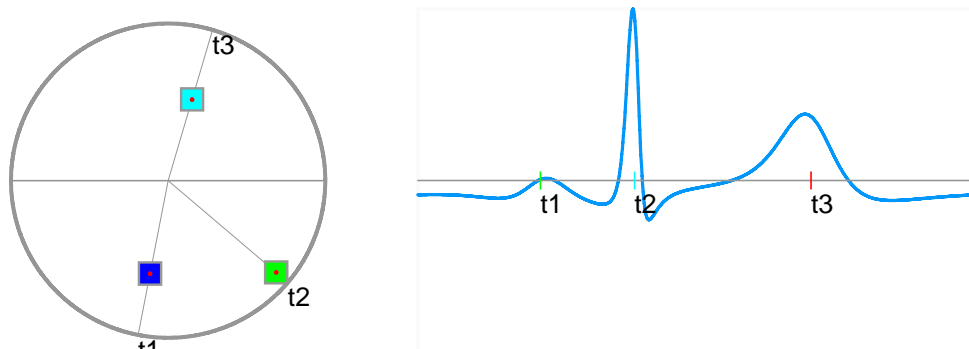


$$a_1 = \rho_1 e^{it_1} \quad a_2 = \rho_2 e^{it_2} \quad \text{Re } r_j(e^{it}) \quad \text{Im } r_j(e^{it}) \quad (j = 1, 2)$$

*Elemi racionális függvények valós- és képzetes része*

Az ábra bal oldali részén az  $a_j := \rho_j e^{it_j}$  ( $j = 1, 2$ ) pólusoknak megfelelő paramétereket szemléltetjük. A narancssárga színűnek 1, a kék színűnek 2 a multiplicitása. Az ábrákon feltüntettük a paraméterek argumentumait ( $t_1, t_2$ ). Könnyen ellenőrizhető és az ábrán is jól látható, hogy ezek az elemi racionális függvények valós részeinek szélsőérték helyei, képzetes részeinek a zérushelyei. Ezek hasonlítanak a bemutatott EKG-görbék egy-egy részéhez. Például a másodrendű pólushoz tartozó elemi függvény valós része a II-es, képzetes része az aVL görbe grafikonján fedezhető fel. Ennek alapján kézenfekvő, hogy az EKG-görbéket ilyen típusú elemi függvények, ún. *elemi hullámok* szuperpozíciójaként kisérjük meg előállítani.

Ebben a jegyzetben ennek a módszernek az *elméleti háttérével és a gyakorlati megvalósításával* foglalkozunk. Előzetesen egy valódi EKG-görbe említett típusú felbontásának végeredményét mutatjuk be.



$$\alpha_j = \rho_j e^{it_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{Re } r(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

*EKG-görbe előállítás elemi hullámokkal*

A bal oldalon szemléltetett három paraméter közül a második (a zöld színű) egy másodrendű pólushoz, a másik kettő első rendű pólushoz tartozik:  $m_2 = 2, m_1 = m_3 = 1$ . Az ezek által meghatározott elemi hullámok szerinti sorfejtést alkalmazva kaptuk az ábra jobb oldalán álló görbét:

$$r(t) := \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} r_{\alpha_j, k}(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vezessük be a komplex számsík alábbi részhalmazait:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \\ \mathbb{D}_- &:= \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}, \quad \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \end{aligned} \quad (2)$$

A  $\mathbb{D}$  halmazt, a komplex számsík nyílt egységkör-lemezét **diszknak**, a  $\mathbb{T}$  halmazt, a komplex számsík egységkörét, **tórusznak** szokás nevezni.

A jegyzetben racionális ortogonális rendszereket szerkesztünk. Jelöljük  $\mathfrak{R}$ -rel a  $\overline{\mathbb{D}}$  zárt diszken analitikus, racionális függvények algebráját,  $\mathfrak{R}_0$ -lal az  $\mathfrak{R}$ -beli valódi racionális függvények részalgebráját. A  $\mathfrak{R}_0$  azokból az  $r \in \mathfrak{R}$  függvényből áll, amelyekre  $\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$ . A  $\mathbb{D}$ -n analitikus, a  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon folytonos függvények halmazát, azaz a *diszkalgebrát* az  $\mathfrak{A}$  szimbólummal jelöljük. Nyilván  $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$ .

Az  $L^p$  terek mellett használni fogjuk a Hardy- és a Bergman-tereket. Jelölje  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  a  $\mathbb{D}$  diszken analitilus  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények osztályát és tetszőleges  $F \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$  függvényre és  $0 < r < 1$  számra vezessük be az

$$\begin{aligned} M_s(F, r) &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^s dt \right)^{1/s} \quad (0 < s < \infty), \\ M_0(F, r) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_+(|F(re^{it})|) dt, \\ M_\infty(F, r) &= \max_t |F(re^{it})| \end{aligned} \quad (3)$$

közepet és  $0 < s \leq \infty$  esetén a

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{D}) &:= \{F \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \|F\|_{H^s} := \sup_{r < 1} M_s(F, r) < \infty\}, \\ N(\mathbb{D}) &:= \{F \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \sup_{r < 1} M_0(F, r) < \infty\} \end{aligned} \quad (4)$$

függvénytereket. A  $H^s(\mathbb{D})$  ( $s > 0$ ) függvényosztályokat **Hardy-tereknek**, az  $N(\mathbb{D})$ -t **Nevanlinna-térnek** nevezzük. Ismeretes, hogy

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}(\mathbb{D}) \quad (0 < s < \infty),$$

továbbá minden  $F \in N(\mathbb{D})$  függvényre majdnem minden  $t \in [-\pi, \pi]$  pontban létezik az  $F(e^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1} F(re^{it})$  véges határérték, az  $F$  *peremfüggvénye*. Speciálisan  $1 \leq s \leq \infty$  esetén  $(H^s, \|\cdot\|_{H^s})$  Banach-tér,  $0 < s < 1$  esetén *kvázi Banach-tér*, továbbá minden  $F \in H^s(\mathbb{D})$  függvény peremfüggvényére  $F \in L^s(\mathbb{T})$  és  $\|F\|_{H^s} = \|F\|_{L^s}$ . A  $H^2(\mathbb{D})$  tér Hilbert-tér az

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) \overline{G(e^{it})} dt \quad (F, G \in H^2(\mathbb{T})) \quad (5)$$

skaláris szorzattal. A skaláris szorzat által indukált norma azonos a  $\|\cdot\|_{H^2}$  normával (lásd Móricz [G].)

A  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon analitikus, valódi racionális függvények  $\mathfrak{R}_0$  algebráját az  $r_a$  függvények generálják. Ezek  $r_a^k$  ( $a \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}^*$ ) hatványait  $\mathfrak{R}$ -beli **elemi racionális függvényeknek** nevezzük. Az  $r_{a,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) függvények által kifizített altérben célszerű egy másik bázist is használni. A

$$q_{a,k}(z) := \frac{z^k}{(1 - \bar{a}z)^{k+1}} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

függvényrendszerek  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  esetén ugyanazt az altereket feszítik ki mint az  $r_{\mathbf{a},k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) függvények:

$$\text{span}\{r_{\mathbf{a},k} : 0 \leq k \leq n\} = \text{span}\{q_{\mathbf{a},k} : 0 \leq k \leq n\},$$

továbbá

$$\mathfrak{R} = \text{span}\{q_{\mathbf{a},k} : \mathbf{a} \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}\}$$

a  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon analitikus racionális függvények halmaza.

A továbbiakban olyan rendszerekkel és alterekkel foglalkozunk, amelyek

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \quad (\mathbf{a}_n \in \mathbb{D}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$$

alakú sorozattal generálhatók. A szóban forgó sorozatok halmazát a  $\mathbf{A}$  szimbólummal jelöljük. Az

$$m_n := \sum_{\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_n, j \leq n} 1 \quad (7)$$

alapján értelmezett  $m_n$  számot az  $\mathbf{a}_n$  multiplicitásának nevezzük. Ez más szóval azt jelenti, hogy  $\mathbf{a}_n$  az  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  számok között pontosan  $m_n$ -szer fordul elő. Ha a sorozat tagjai páronként különbözők, akkor minden tag multiplicitása 1, ha az  $\mathbf{a}$  sorozat minden tagja megegyezik, akkor az  $\mathbf{a}_n$  multiplicitása  $n + 1$ . Ha valamely  $\ell \in \mathbb{N}^*$  számra  $\mathbf{a}_{n+\ell} = \mathbf{a}_n$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{a}$  sorozat  $\ell$ -szerint periódikus.

Ebben a jegyzetben elemi racionális függvényekből kiindulva és a (5) skaláris szorzatot használva, a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással származtatott racionális ortogonális rendszerekkel foglalkozunk. Bármely  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  sorozat esetén a  $q_{\mathbf{a}_n, m_n - 1}$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) függvények lineárisan függetlenek. Az ezekből előállítható ortonormált rendszert a svéd **Malmquist** [17] és a japán **Takenaka** [29] matematikusok egymástól függetlenül 1925-ben vezették be. Ennek a rendszernek a speciális eseteit a rendszer- és irányításelméletben újra felfedezik és a 70-es évektől kezdődően széles körben alkalmazzák. A szóban forgó MT-rendszerekből az  $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) *speciális esetben a trigonometrikus rendszert kapjuk*. Az MT-rendszereket generáló paramétereiket szabadon választhatjuk. Ezzel lehetőségünk van arra, hogy a feladatokhoz igazodó, az apriori információkat felhasználó adaptív rendszereket konstruáljunk. A nagyfokú flexibilitás mellett az MT-rendszerek

egy másik előnye, hogy jól használható, explicit formulákkal írhatók le. Ez lehetővé teszi a feladatok analitikus kezelését. Az MT-rendszerek ezen túlmenően a trigonometrikus rendszer számos fontos tulajdonságával rendelkeznek. Léteznek a rendszer valós és diszkrét változatai és paraméterek egy tág osztályára olyan rendszerek szerkeszthetők, amelyekre az FFT-hez hasonló algoritmusok érvényesek.

A jelfeldolgozás szempontjait figyelembe véve célszerű az EKG-görbét reprezentáló  $2\pi$ -szerint periodikus függvényeket minél kevesebb paraméterrel leírható függvényosztályok elemeivel közelíteni. A közelítés hibáját, a legjobban kezelhető esetet véve, függvények különbségének alkalmas Hilbert-térben vett normáival mérhetjük.

A közelítések alapját képező függvényosztályok az idők során többször is változtak. Kezdetben a *trigonometrikus rendszer és a klasszikus Fourier-analízis* képezte a közelítő eljárás matematikai hátterét. Később a trigonometrikus rendszer helyett *ortogonális polinomokból, spline-függvényekből, ill. waveletekből* indultak ki. Ezek a függvényosztályok általában több szabad paramétert tartalmaznak, és ezek optimalizálásával jobb approximációs eredményeket kapunk.

Az utóbbi évtizedben végzett kutatások azt mutatják, hogy EKG-görbék leírásához célszerű racionális függvényeket használni. Ezek a függvényosztályok végtelen sok paraméterrel jellemezhetők. A feladat matematikai megfogalmazásához rögzítsünk egy  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\ell-1}) \in \mathbb{D}^\ell$  vektort és vezessük be a racionális függvényekből álló

$$X^{\mathbf{a}} := \text{span}\{\mathbf{q}_{\mathbf{a}_k, m_k-1} : 0 \leq k < \ell\} \quad (8)$$

$\ell$ -dimenziós tereket. Az EKG-jeleket az  $L^2(\mathbb{T})$  Hilbert-térből választva  $X^{\mathbf{a}}$ -beli függvényekkel közelítjük. Ilyenkor az  $f \in L^2(\mathbb{T})$  legjobb közelítésének mértékét a

$$\Delta_\ell(f) := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^\ell} \inf_{g \in X^{\mathbf{a}}} \|f - g\|_2$$

számmal jellemezhetjük, ahol a  $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$  jelölést használtuk.

A belső infimum meghatározásának problémájával, tetszőleges Hilbert-tér esetén, az 1. Fejezetben foglalkoztunk. A különbség infimumát az  $f$  elem  $X^{\mathbf{a}}$  altérre vett  $f_0 := P_{X^{\mathbf{a}}}f$  ortogonális projekcióján veszi fel:

$$\inf_{g \in X^{\mathbf{a}}} \|f - g\|_2 = \|f - f_0\|_2.$$

Az  $a \in \mathbb{D}^\ell$  által generált MT-rendszer az  $X^a$  tér egy ortonormált bázisa. Ebben az esetben az ortogonális projekció az MT-rendszer szerint vett Fourier-sorfejtés  $\ell$ -edik részletösszegével egyenlő. Ez indokolja, hogy részletesen foglalkozunk MT-rendszerek szerinti sorfejtésekkel, kitérve a valós és diszkrét változatokra valamint a DFT-algoritmus analogonjára.

A külső infimum meghatározása, szemben az előzővel, nem-lineáris feladathoz vezet. Ezzel a problémával a jegyzet tervezett II. kötetében foglalkozunk, ahol többek között ismertetjük a pólusok meghatározására szolgáló *Nelder-Mead-féle algoritmus hiperbolikus változatát* valamint egy másodrendben konvergens iterációs eljárást. Itt most csak egy algoritmust mutatunk be, amelyben az MT-Fourier-együtthatók alapján határozzuk meg racionális függvények pólusait.

Az MT-rendszerek konstrukciójában kitüntetett szerepet játszanak a **Blaschke-függvények**. Azokat az alapvető tulajdonságokat, amelyek az MT-rendszerek szerkesztésében felhasználásra kerülnek, a 2. fejezetben foglaljuk össze. Mivel a Blaschke-függvények és az előzőekben említett algoritmusok háttérében hiperbolikus geometriai tulajdonságok állnak, külön fejezetben foglalkozunk a **Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-féle modelljeivel**.

Arra törekedtünk, hogy megvilágítsuk a bevezetésre kerülő fogalmak és a bemutatott eljárások szemléletes tartalmát és a matematika különböző fejezeteihez való kapcsolódását. Ezért számos ábrát és szemléltető programot készítettünk. A bizonyítások nagyobb részét a Függelékben részleteztük.



# TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés .....	1
Tartalomjegyzék .....	8
Jelölések .....	10
1. APPROXIMÁCIÓ HILBERT-TEREKBEN .....	14
1.1. Hilbert-tér, ortogonális rendszerek .....	15
1.2. Altértől vett távolság, alterek hajlásszöge .....	18
1.3. Fourier-sorok .....	26
1.4. Feladatok .....	32
2. A BLASCHKE-CSOPORT .....	33
2.1. A Blaschke függvények a diszken .....	33
2.2. A Blaschke-csoport .....	42
2.3. A Blaschke-csoport a tóruszon .....	49
2.4. A Blaschke-csoport reprezentációi .....	51
2.5. Blaschke-szorzatok, belső függvények .....	53
3. HIPERBOLIKUS GEOMETRIA .....	55
3.1. A Poincaré-féle diszk-modell .....	55
3.2. Szakaszok értelmezése és hossza .....	57
3.3. Hiperbolikus körök .....	60
3.4. Szakaszok felezéspontja, tükrözés egyenesre .....	61
3.5. Egyenesek metszéspontja .....	65
3.6. A Poincaré-féle félsík-modell .....	68

4. MALMQUIST–TAKENAKA-RENDSZEREK .....	70
4.1. MT-rendszerek a diszken .....	71
4.2. MT-rendszerek a felső félsíkon .....	74
4.3. MT-Fourier sorok, magfüggvények .....	77
4.4. Valós MT-rendszerek .....	80
4.5. Diszkrét MT-rendszerek .....	87
5. MODELLREDUKCIÓ .....	93
5.1. Hiperbolikus fedőkörök .....	95
5.2. Átviteli függvények approximációja .....	102
6. A Q-ALGORITMUS .....	106
6.1. Az $\ell_m^a$ sorozat .....	112
6.2. Az $\mathcal{U}$ mátrix és a Zernike-függvények .....	115
6.3. A Q algoritmus .....	118
7. FÜGGELÉK .....	121
7.1. Bizonyítások .....	121
7.2. Irodalomjegyzék .....	126

# JELÖLÉSEK

## Számhalmazok

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ : a természetes számok halmaza

$\mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$ : a pozitív egész számok halmaza

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ : az egész számok halmaza

$\mathbb{R}$ : a valós számok halmaza

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$ : az imaginárius egység

$\mathbb{C} := \{z = x + \mathfrak{i}y : x, y \in \mathbb{R}\}$ : a komplex számok halmaza

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $z = x + \mathfrak{i}y \in \mathbb{C}$ ): a  $z$  komplex szám abszolút értéke

$\bar{z} := x - \mathfrak{i}y$  ( $z = x + \mathfrak{i}y \in \mathbb{C}$ ): a  $z$  komplex szám konjugáltja

$\Re z := x$ ,  $\Im z := y$  ( $z = x + \mathfrak{i}y \in \mathbb{C}$ ): a  $z$  komplex szám valós és képzetes része

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ : a diszk

$\mathbb{D}_- := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ : a zárt diszk komplementere

$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ : a tórusz

$\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 1\}$ : a diszk valós része

$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ : a felső komplex félsík

$\overline{\mathbb{C}_+} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ : a felső komplex félsík lezárása

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$

## Függvények

$\mathcal{A}(\mathbb{D})$ : a  $\mathbb{D}$ -n analitikus függvények halmaza

$\mathcal{N}(\mathcal{A})$ : a Nevanlina osztály

$\mathfrak{A}$ : a diszk-algebra

$L^s(\mathbb{T})$  ( $0 < s \leq \infty$ ): a Lebesgue-terek a tóruszon

$H^s(\mathbb{D})$  ( $0 < s \leq \infty$ ): a Hardy-terek a diszken

$H^s(\mathbb{T})$  ( $0 < s \leq \infty$ ): a Hardy-terek a tóruszon

$\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L^s(\mathbb{T})}$ :  $L^s$ -normák (kvázinormák)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ : skaláris szorzat a  $H^2(\mathbb{D})$ ,  $H^2(\mathbb{T})$ ,  $L^2(\mathbb{T})$  Hilbert-tereken

$r_a(z) := 1/(1 - \bar{a}z)$ ,  $r_{a,n} = r_a^{n+1}$  ( $z, a \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ):

elemi racionális függvények

$q_{a,n}(z) := z^n/(1 - \bar{a}z)^{n+1}$  ( $a, z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ )

$\mathfrak{R} := \text{span}\{q_{a,n} : a \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$ : a  $\bar{\mathbb{D}}$ -n analitikus,  
racionális függvények

$\mathfrak{R}_0(\subset \mathfrak{R})$ : a  $\bar{\mathbb{D}}$ -n analitikus, valódi racionális függvények

## Blaschke-csoportok

$\mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ : a Blaschke-csoport paraméter tartománya

$B_a(z) := (z - a)/(1 - \bar{a}z)$  ( $a \in \mathbb{D}$ ,  $z \in \bar{\mathbb{D}}$ ): a Blaschke-  
függvények

$\eta_a(z) := (1 - z\bar{a})/(1 - \bar{z}a)$  ( $a \in \mathbb{D}$ ,  $z \in \bar{\mathbb{D}}$ )

$\eta_a := \bar{\epsilon}\eta_a$  ( $a = (a, \epsilon) \in \mathbb{B}$ ): a gyroművelet

$B_a := \epsilon B_a$  ( $a = (a, \epsilon) \in \mathbb{B}$ ): a kiterjesztett Blaschke-  
függvények

$\mathfrak{B} := \{B_a : a \in \mathbb{B}\}$ : a (kiterjesztett) Blaschke-  
függvények osztálya

$\alpha := \alpha_1 \circ \alpha_2$ , ( $\alpha = (a, \epsilon)$ ,  $\alpha_j = (a_j, \epsilon_j) \in \mathbb{B}$ ,  $j = 1, 2$ ):  
csoportművelet a  $\mathbb{B}$ -n

$$\mathbf{a} := \bar{\epsilon}_2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\epsilon_2)/(1 + \mathbf{a}_1\bar{\mathbf{a}}_2\bar{\epsilon}_2),$$

$$\epsilon = \epsilon_1\epsilon_2(1 + \mathbf{a}_1\bar{\mathbf{a}}_2\bar{\epsilon}_2)/(1 + \bar{\mathbf{a}}_1\mathbf{a}_2\epsilon_2)$$

$(\mathfrak{B}, \circ) \cong (\mathbb{B}, \circ)$ : a Blaschke-csoportok

$$\mathbb{B}_{\mathbf{a}_1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{a}_2} = \mathbb{B}_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}, \mathbb{B}_{\mathbf{a}^{-1}} = \mathbb{B}_{\mathbf{a}}^{-1} \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a} \in \mathbb{B})$$

$\mathbf{a}^{-1} = (-\epsilon\mathbf{a}, \bar{\epsilon})$ : az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}$  elem inverze

$\mathbf{e} = (\mathbf{0}, 1)$ : a  $(\mathbb{B}, \circ)$  egységeleme

$\tau_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1) := \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2^{-1}$  ( $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{B}$ ): transláció a  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoporton

$\tau_{\mathbf{a}_1}(\tau_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a})) = \tau_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}(\mathbf{a})$ :  $\tau_{\mathbf{a}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  reprezentáció

$$\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2^{-1} = (\mathbb{B}_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1), \epsilon_1\eta_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1)) \quad (\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_j, \epsilon_j) \in \mathbb{B}, j = 1, 2)$$

$\mathbb{B}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  ( $\mathbb{B} \in \mathfrak{B}$ ): a  $\mathbb{H} \in \{\mathbb{T}, \mathbb{D}, \bar{\mathbb{D}}\}$  halmazok a  $\mathfrak{B}$  invariáns halmazai

$$\mathfrak{B}(\mathbb{H}) := \{\mathbb{B}|\mathbb{H} : \mathbb{B} \in \mathfrak{B}\}, \quad (\mathfrak{B}(\mathbb{H}), \circ) \cong (\mathbb{B}, \circ)$$

$$\mathbb{B}_{\mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_1)}(\mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_2)) = \bar{\eta}_{\mathbf{a}}(z_2)\mathbb{B}_{z_1}(z_2),$$

$$\eta_{\mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_1)}(\mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_2)) = \bar{\eta}_{\mathbf{a}}(z_1)\bar{\eta}_{\mathbf{a}}(z_2)\eta_{z_1}(z_2)$$

( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ): invariancia tulajdonság

$\mathbb{B}_0 := \{(\mathbf{0}, \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}$ : egyparaméteres részcsoport

$\mathbb{B}_1 := \{(r, 1) : r \in \mathbb{I}\} \cong \mathbb{R}$ ,  $r \rightarrow \text{ath } r$  izomorfizmus

$$\mathbf{a} = (r\epsilon_1, \epsilon) \in \mathbb{B} \Rightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{0}, \epsilon_1\epsilon) \circ (r, 1) \circ (\mathbf{0}, \bar{\epsilon}_1) \Rightarrow$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \circ \mathbb{B}_1 \circ \mathbb{B}_0$$

## Hiperbolikus geometria

$$\rho_0(z_1, z_2) := |\mathbb{B}_{z_1}(z_2)| = |z_1 - z_2|/|1 - \bar{z}_1z_2| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}):$$

pszeudohiperbolikus metrika

$$\rho_0(\mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_1), \mathbb{B}_{\mathbf{a}}(z_2)) = \rho_0(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \mathbf{a} \in \mathbb{B}):$$

invariancia tulajdonság

$$\rho_1(z_1, z_2) = \text{arth } \rho_0(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}): \text{ hiperbolikus metrika}$$

$$\rho_0(z_1, z_2) \leq (|z_1| + |z_2|)/(1 + |z_1z_2|) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}):$$

a háromszögegyenlőtlenség speciális esete

$\mathcal{L}_a := B_a(\mathbb{I})$ ,  $\mathcal{L} := \{\mathcal{L}_a : a \in \mathbb{B}\}$ :

egyenesek a Poincaré-féle modellben

$\mathcal{K}_r(a) := \{B_a(z) : z \in \mathbb{D}, |z| = r\}$ ,

$\mathcal{K} := \{\mathcal{K}_r(a) : 0 < r < 1, a \in \mathbb{D}\}$ :

a hiperbolikus körök osztálya

$w \in \mathcal{K}_r(a) \Rightarrow w = B_a(z), |z| = r \Rightarrow$

$\rho_0(w, a) = \rho_0(B_a(z), B_a(0)) = \rho_0(z, 0) = r$

# 1. FEJEZET

## APPROXIMÁCIÓ HILBERT-TEREKBEN

Ebben a fejezetben az approximációelmélet egyik alapfeladatával foglalkozunk. A matematikában és alkalmazásaiban gyakran közelítünk bizonyos szempontok alapján bonyolultnak tekintett függvényeket, alakzatokat, stb. egyszerűbbekkel. Az ilyen típusú feladatok pontos matematikai megfogalmazásához a közelítendő objektumokat egy metrikus tér pontjaival modellezzük, a közelítésre használt, valamilyen szempont szerint kitüntetett objektumokat pedig a szóban forgó metrikus tér valamely részhalmazával reprezentáljuk. A feladat ilyenkor abban áll, hogy a tér adott eleméhez meghatározzuk a kitüntetett halmaz elemei közül azt, vagy azokat, amelyek az adott elemhez a tér metrikájában a legközelebb vannak.

Ezzel a feladattal összefüggésben számos fontos kérdés vetődik fel: van-e legközelebb eső elem a kitüntetett elemek között, egyetlen ilyen legjobban approximáló elem létezik-e, hogyan lehet ezt előállítani, stb.

Abban az esetben, ha pl. a háromdimenziós euklideszi térből indulunk ki és a kitüntetett elemek egy sík pontjai, a feladat a geometria eszközeivel egyszerűen megoldható. Nevezetesen bármely  $P \in \mathbb{R}^3$  pont esetén ennek az adott síkra vett merőleges vetülete van a legközelebb a  $P$ -hez a síkbeli pontok közül. Általánosítva az itt használt geometriai fogalmakat (altér, merőlegesség, vetület, stb.), a bevezetőben említett approximációs feladat euklideszi térben, elég általános esetekben megoldható. Ezzel foglalkozunk a következő pontban.

Ezt megelőzően a skaláris szorzattal rendelkező vektorterekkel, az ún. **euklideszi terekkel** kapcsolatban néhány alapvető tényt ismertetünk. A továbbiakban ezekkel összefüggésben külön kiemeljük a teljesség szerepét és szóhasználatban is különbséget teszünk a nem teljes

és a teljes euklideszi terek között. A *teljes euklideszi tereket* **Hilbert-tereknek** nevezzük. Ismeretes, hogy az  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  intervallumon folytonos függvények  $C[a, b]$  lineáris terén az  $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t) dt$  ( $f, g \in C[a, b]$ ) bilineáris funkcionál skaláris szorzat. Ez az euklideszi tér azonban nem teljes. Mivel a teljessé tétel a fogalmilag bonyolult Lebesgue-féle integrál, valamint az  $L^p$ -terek felhasználásával végezhető el, ezért ez utóbbi példáktól a bevezető jellegű első fejezetben eltekintünk. A folytonos és a szakszonként folytonos jelek vizsgálatához az itt ismertett elméleti háttér elegendő. Speciális Hilbert-terekkel kapcsolatban a Függelékre utalunk.

## 1.1. HILBERT-TÉR, ORTOGONÁLIS RENDSZEREK

Induljunk ki egy valós vagy komplex  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi térből és jelölje  $\theta$  az  $\mathbb{X}$  tér **nullvektorát**.  $\mathbb{X}$ -beli  $f_0, f_1, \dots, f_n$  elemeket tartalmazó legszűkebb lineáris alteret az  $f_0, f_1, \dots, f_n$  **vektorok lineáris burkának** nevezzük. A szóban forgó alteret a  $\text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$  szimbólummal jelöljük. Egyszerűen belátható, hogy ez a halmaz, amelyet az  $f_0, f_1, \dots, f_n$  által *kifeszített altérnek* is szokás nevezni, a következő alakban adható meg:

$$\text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_n\} = \{\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n : \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

A skaláris szorzatot felhasználva eldönthető, hogy a szóban forgó rendszer lineárisan független-e? Vezessük be a rendszer

$$G(f_0, f_1, \dots, f_n) := \begin{pmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle & \langle f_1, f_0 \rangle & \vdots & \langle f_n, f_0 \rangle \\ \langle f_0, f_1 \rangle & \langle f_1, f_1 \rangle & \vdots & \langle f_n, f_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle f_0, f_n \rangle & \langle f_1, f_n \rangle & \vdots & \langle f_n, f_n \rangle \end{pmatrix}$$

ún. *Gram-féle mátrixát*.

**1.Tétel.** Az  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{X}$  rendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha

$$\det G(f_0, f_1, \dots, f_n) = 0.$$



**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a szóban forgó rendszer lineárisan összefüggő. Ekkor léteznek olyan  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  nem mind 0 számok, hogy

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = \theta.$$

Innen  $f_j$ -vel való skaláris szorzás után

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (1)$$

Ezzel megmutattuk, hogy a (1) homogén lineáris egyenletrendszernek a  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  egy nemtriviális megoldása, következésképpen determinánsa 0.

Megfordítva, ha  $\det G(f_0, f_1, \dots, f_n) = 0$ , akkor az (1) lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Az (1)  $j$ -edik egyenletét a  $\bar{\lambda}_j$  számmal megszorozva és az egyenleteket összeadva

$$0 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle f_i, f_j \rangle = \left\| \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j \right\|^2$$

következik. Innen azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j f_j = \theta,$$

ahol nem minden együttható 0, következésképpen a szóban forgó rendszer lineárisan összefüggő.  $\square$

Ha az  $f_0, f_1, \dots, f_n$  rendszer *lineárisan független*, akkor az általa kifeszített  $Y := \text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$  altér minden  $f$  eleme *egyértelműen írható fel*

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

alakban. Ilyenkor a szóban forgó rendszert az  $Y$  altér egy **bázisának**, a  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  számokat az  $f$  vektor szóban forgó bázisára vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

A továbbiakban véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszereket vizsgálunk. Ennek megfelelően e rendszerek tagjait az  $\mathbf{N} := \{0, 1, \dots, m\}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) vagy a  $\mathbf{N} := \mathbb{N}$  halmaz elemeivel indexeljük.

Euklideszi terekben célszerű páronként egymásra merőleges egységvektorokból álló bázisokat felvenni. Ilyenekkel kapcsolatos az alábbi

**Definíció.** Akkor mondjuk, hogy az  $\mathbf{e}_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) rendszer **ortonormált**, ha bármely  $m, n \in \mathbf{N}$  indexpárra

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ 1, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

teljesül.

Bevezetve a

$$\delta_{mn} := \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ 1, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

ún. *Kronecker-féle szimbólumot*, az ortonormáltság feltétele

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

alakban adható meg.

Kiindulva valamely véges vagy végtelen, lineárisan független  $f_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) rendszerből az ún. *Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással* ortonormált rendszert konstruálhatunk.

**2. Tétel.** Legyen  $f_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) lineárisan független rendszer. Ekkor létezik olyan  $\mathbf{e}_k \in \mathbb{X}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) ortonormált rendszer, amelyre

$$\text{span}\{f_0, \dots, f_n\} = \text{span}\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n\} \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (2)$$

teljesül.

**Bizonyítás.** Legyen  $\mathbf{e}_0 := f_0 / \|f_0\|$ . Rekurziót alkalmazva tegyük fel, hogy az  $\mathbf{e}_k \in \mathbb{X}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) ortonormált rendszer már értelmezve van és erre  $n = 0, 1, \dots, m$  esetén fennáll (2). A normálást később elvégezve keressük az  $\mathbf{e}_{m+1}$ -gyel párhuzamos  $\tilde{\mathbf{e}}_{m+1}$  vektort

$$\tilde{\mathbf{e}}_{m+1} := f_{m+1} - \sum_{k=0}^m \lambda_k \mathbf{e}_k$$

alakban. Ekkor az  $\langle \tilde{\mathbf{e}}_{m+1}, \mathbf{e}_k \rangle = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) feltétel az  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) ortonormált tulajdonságát figyelembe véve azzal ekvivalens, hogy  $\lambda_k = \langle f_{m+1}, \mathbf{e}_k \rangle$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ). Innen következik,

hogy az

$$\tilde{\mathbf{e}}_{m+1} := \mathbf{f}_{m+1} - \sum_{k=0}^m \langle \mathbf{f}_{m+1}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

vektor ortogonális az  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_m$  vektorokra. Mivel ez utóbbi vektorok kifejezhetők az  $\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_m$  vektorok lineáris kombinációjaként, azért  $\tilde{\mathbf{e}}_{m+1}$  kifejezhető

$$\tilde{\mathbf{e}}_{m+1} = \mathbf{f}_{m+1} - \sum_{k=0}^m \mu_k \mathbf{f}_k$$

alakban. Mivel az  $\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_{m+1}$  vektorok lineárisan függetlenek, azért  $\tilde{\mathbf{e}}_{m+1} \neq \mathbf{0}$ , következésképpen az  $\mathbf{e}_{m+1} := \tilde{\mathbf{e}}_{m+1} / \|\tilde{\mathbf{e}}_{m+1}\|$  normált vektor ortogonális az  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_m$  vektorokra továbbá

$$\mathbf{f}_{m+1} \in \text{span}\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}\}, \quad \mathbf{e}_{m+1} \in \text{span}\{\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_m, \mathbf{f}_{m+1}\}.$$

Innen már egyszerűen következik, hogy (2)  $n = m + 1$  esetén is fennáll. Ezzel a tételt igazoltuk.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a most ismerttetett bizonyítás lépéseit követve program készíthető az ortogonalizációs eljárásra.

## 1.2. ALTÉRTŐL VETT TÁVOLSÁG, ALTEREK HAJLÁSSZÖGE

Induljunk ki egy  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi térből. Megmutatjuk, hogy fennáll az alábbi, ún.

**Parallelogramma-azonosság.** *Bármely két  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$  elemre*

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2).$$

**Bizonyítás.** A norma definíciójából kindulva és felhasználva a skaláris szorzat disztributivitását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2). \end{aligned}$$

A most igazolt azonosság geometriai tartalma a következő: a paralelogramma átlói fölé emelt négyzetek területeinek összege az oldalak fölé emelt négyzetek területének összegével egyenlő.  $\square$

A címben megfogalmazott feladatot két változatban is megoldjuk. Kiindulva valamely *teljes euklideszi tér zárt, lineáris alteréből* meghatározzuk és geometriailag jellemezzük pontoknak altértől vett távolságát. A második változatban ugyanezzel a feladattal foglalkozunk (nem feltétlenül teljes) *euklideszi térből kiindulva és véges dimenziós altereket alapul véve*.

**3.Tétel.** *Legyen  $Y$  az  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér egy zárt altere. Ekkor minden  $x \in \mathbb{X}$  ponthoz egyetlen olyan  $x_0 \in Y$  pont létezik, amelyre*

$$\|x - x_0\| = \rho(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}. \quad (3)$$

*Az  $x - x_0$  vektor merőleges az  $Y$  altérre, azaz*

$$\langle x - x_0, y \rangle = 0 \quad (y \in Y). \quad (4)$$

**Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy van olyan  $x_0 \in Y$ , amelynek  $x$ -től vett távolsága  $d := \rho(x, Y) = \|x - x_0\|$ . A  $d$  értelmezéséből következik, hogy minden  $n \in \mathbb{N}^*$  számhoz létezik olyan  $y_n \in Y$ , hogy

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Megmutatjuk, hogy az  $y_n \in Y$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) pontsorozat konvergens. Ehhez első lépésben belátjuk, hogy a szóban forgó sorozat Cauchy-sorozat. Az  $a := x - y_n, b := x - y_m$  vektorokra alkalmazva a paralelogramma-azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Minthogy az  $y_n, y_m$  elemekkel együtt ezek számtani közepe is az  $Y$  altérben van, azért a  $d$  értelmezése alapján

$$\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 > d^2,$$

következésképpen

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0, \quad \text{ha } n, m \rightarrow \infty.$$

Ezzel megmutattuk, hogy  $\mathbf{y}_n \in Y$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) Cauchy-sorozat, s ezért az  $\mathbb{X}$  tér teljessége miatt a sorozat konvergens. Legyen  $\mathbf{x}_0$  a szóban forgó sorozat határértéke. Mivel  $Y$  zárt altér, azért  $\mathbf{x}_0 \in Y$ , továbbá az  $\mathbf{x}_0$  értelmezése alapján

$$\mathbf{d} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\| + \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow \mathbf{d} \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahonnan  $\mathbf{d} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  következik. Ezzel a (3) állítást igazoltuk.

Most megmutatjuk, hogy csak egy olyan  $\mathbf{x}_0$  elem létezik az  $Y$  altérben, amelyre (3) teljesül. Ezzel az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az  $\mathbf{x}_0 \in Y, \mathbf{x}_1 \in Y$  elemek mindegyikére fennáll az (3) egyenlőség:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| = \mathbf{d}.$$

Az  $\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{b} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$  vektorokra alkalmazva a paralelogramma-azonosságot

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|^2 + 4\left\|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1}{2}\right\|^2 = 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|^2 = 4\mathbf{d}^2$$

adódi, ahonnan

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|^2 + 4\mathbf{d}^2 \leq 4\mathbf{d}^2, \quad \text{azaz } \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

következik.

Végül a (4) igazolásához legyen  $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . Tetszőleges  $\lambda$  számra és  $\mathbf{y} \in Y, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  altérbeli vektorra  $\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{y} \in Y$ , következésképpen a  $\mathbf{d}$  definíciója alapján

$$\mathbf{d}^2 \leq \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{y})\|^2 = \langle \mathbf{v} - \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v} - \lambda\mathbf{y} \rangle = \mathbf{d}^2 - \lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle - \bar{\lambda}\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle + |\lambda|^2\|\mathbf{y}\|^2$$

teljesül. Innen  $\lambda := \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle / \|\mathbf{y}\|^2$  választás mellett

$$0 \leq -2\frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2\frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^4} = -\frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

adódik, ahonnan  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = 0$  következik.

Ezzel az (4) állítást is igazoltuk.  $\square$

Azt, hogy a  $\mathbf{v} \in \mathbb{X}$  vektor merőleges az  $Y \subseteq \mathbb{X}$  altérre, azaz  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = 0$  ( $\mathbf{y} \in Y$ ), a  $\mathbf{v} \perp Y$  jelöléssel is kifejezésre juttatjuk.

Az 3. tétel következménye az alábbi

**Riesz-féle felbontási tétel.** Legyen  $Y$  az  $\mathbb{X}$  Hilbert-tér egy zárt altere. Ekkor minden  $x \in \mathbb{X}$  elem egyértelműen bontható fel  $x = x_0 + x_1$  alakban, ahol  $x_0 \in Y$  és  $x_1 \perp Y$ .

**Bizonyítás.** Legyen  $x_0 \in Y$  a 3. tételben bevezetett vektor,  $x_1 := x - x_0$ . Ekkor  $x = x_0 + x_1$  és (4) alapján  $x_1 \perp Y$ .

A felbontás unicitásának igazolásához tegyük fel, hogy az  $x = x_0 + x_1$  és  $x = z_0 + z_1$  az  $x$  elem két kívánt tulajdonságú felbontása, azaz legyen  $x_0, z_0 \in Y, x_1, z_1 \perp Y$ . Ekkor  $x_0 - z_0 \in Y, z_1 - x_1 \perp Y$ . Mithogy  $z := x_0 - z_0 = z_1 - x_1$ , azért  $z \in Y$  és  $z \perp Y$ , következésképpen  $\langle z, z \rangle = 0$ , azaz  $z = \theta$ . Innen  $x_0 = z_0$  és  $x_1 = z_1$  következik. Ezzel a felbontás egyértelműségét igazoltuk.  $\square$

Kiindulva a most igazolt felbontásból bevezetjük a projekciós operátor fogalmát.

**Definíció** Legyen  $Y$  az  $\mathbb{X}$  Hilbert-tér egy zárt altere és

$$x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in Y, x_1 \perp Y \quad (5)$$

az  $x \in \mathbb{X}$  elem ortogonális felbontása. A

$$Px := P_Y x := x_0 \quad (x \in \mathbb{X})$$

utasítással értelmezett  $P : X \rightarrow Y$  leképezést **ortogonális projekciónak** nevezzük.

Mithogy

$$\|x\|^2 = \langle x_0 + x_1, x_0 + x_1 \rangle = \|x_0\|^2 + \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_0 \rangle + \|x_1\|^2,$$

az  $x_0, x_1$  vektorok ortogonalitását figyelembe véve adódik az

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 \quad (x \in \mathbb{X}) \quad (6)$$

egyenlőség, amely a **Pitagorasz-tétel** Hilbert-térbeli változataként interpretálható.

Az alábbi állításban összefoglaljuk az ortogonális projekciók legfontosabb tulajdonságait.

**4. Tétel.** A  $P_Y : \mathbb{X} \rightarrow Y$  ortogonális projekció korlátos lineáris leképezés, amelyre

$$\|P_Y x\| \leq \|x\|, \quad \langle P_Y x, y \rangle = \langle x, P_Y y \rangle \quad (x, y \in \mathbb{X}). \quad (7)$$

**Bizonyítás.** Az additivitás igazolásához bontsuk fel az  $x, y \in \mathbb{X}$  elemeket

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1 \quad (x_0, y_0 \in Y, \quad x_1, y_1 \perp Y)$$

alakban. Ekkor  $x_0 + y_0 \in Y, x_1 + y_1 \perp Y$  továbbá

$$x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1),$$

következésképpen az ortogonális felbontás egyértelműsége miatt az  $x+y$  ortogonális projekciója az  $Y$  altérre  $x_0 + y_0$ . Ezzel megmutattuk, hogy

$$P_Y(x + y) = x_0 + y_0 = P_Y x + P_Y y.$$

A  $P_Y$  homogenitása hasonlóan igazolható.

A (7) első része (6) alapján nyilvánvaló:

$$\|P_Y x\|^2 = \|x_0\|^2 \leq \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 = \|x\|^2.$$

Az (7) második részének igazolásához felhasználjuk a (5) felbontást:

$$\begin{aligned} \langle P_Y x, y \rangle &= \langle x_0, y_0 + y_1 \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle = \\ &= \langle x_0 + x_1, y_0 \rangle = \langle x, P_Y y \rangle. \end{aligned}$$

Ezzel a 4. tételt igazoltuk.  $\square$

Gyakran szükség van valamely  $f \in \mathbb{X}$  Hilbert-térbeli vektort legjobban közelítő  $Y$  altérbeli elem explicit, numerikus szempontból is használható előállítására. Ha az  $Y$  altér véges dimenziós, akkor ilyen előállítás mindig megadható. Ebben az esetben ui.  $Y$  zárt altér és ezért az  $f$ -nek az  $Y$  altérre vett  $g := P_Y f$  vetülete lesz az  $f$ -et legjobban közelítő  $Y$  altérbeli elem.

Tegyük fel, hogy

$$Y = \text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_n\},$$

ahol az  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{X}$  vektorok lineárisan függetlenek. Ez a feltétel azzal ekvivalens, hogy a rendszer  $G(f_0, f_1, \dots, f_n)$  Gram-mátrixa nem szinguláris (lásd az 1. Tételt).

A  $g$  vetületet az jellemzi, hogy  $f - g \perp Y$ . Ez a feltétel azzal ekvivalens, hogy  $f - g$  ortogonális az  $Y$  alteret kifeszítő vektorok mindegyikére, azaz

$$\langle f - g, f_i \rangle = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

A  $g \in Y$  vektor felírható az  $Y$  alteret kifeszítő vektorok lineáris kombinációjaként:

$$g = \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j,$$

és (8) alapján az együtthatókra a

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j \langle f_j, f_i \rangle = \langle g, f_i \rangle = \langle f, f_i \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (9)$$

lineáris egyenletrendszer adódik. Minthogy ennek a mátrixa (a Gram-féle mátrix) nem szinguláris, azért (9)-nek pontosan egy megoldása létezik.

Speciálisan, ha az  $f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) rendszer ortonormált, akkor a szóban forgó mátrix az egységmátrix, és ilyenkor a (9) egyenletrendszer megoldása:

$$\lambda_i = \langle f, f_i \rangle \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ebben az esetben a legjobban közelítő altérbeli elemre

$$g = \sum_{i=0}^n \langle f, f_i \rangle f_i$$

adódik.

A most kapott véges dimenziós altérre vonatkozó eredmények euklideszi terekben is érvényesek, más szóval nem szükséges az  $\mathbb{X}$  teljességét feltennünk. Ez azért is érdekes számunkra, mert az állítás alábbi változata pl. az  $\mathbb{X} = C[a, b]$  euklideszi téren is érvényes, ahol a skaláris szorzatot az

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad (f, g \in C[a, b])$$

integrállal értelmeztük.



**Bessel-féle azonosság.** Legyen  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi tér,  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{X}$  ( $i \in \mathbf{I}$ ) egy **véges** ortonormált rendszer és jelölje

$$Y = \text{span}\{\mathbf{e}_i : i \in \mathbf{I}\}$$

az ezek által generált alteret. Ekkor

$$\inf_{\mathbf{h} \in Y} \|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{i \in \mathbf{I}} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle|^2, \quad (10)$$

ahol

$$\mathbf{g} = \sum_{i \in \mathbf{I}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i. \quad (11)$$

**Bizonyítás.** Kiindulva a

$$\mathbf{h} = \sum_{i \in \mathbf{I}} \lambda_i \mathbf{e}_i \in Y$$

előállításból számítsuk ki az  $\|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|^2$  eltérést. A skaláris szorzat disztributivitása alapján

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - \sum_{i \in \mathbf{I}} (\overline{\lambda}_i \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle + \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{f} \rangle) + \sum_{i, j \in \mathbf{I}} \lambda_i \overline{\lambda}_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Felhasználva az  $\mathbf{e}_i$  ( $i \in \mathbf{I}$ ) rendszer ortogonalitását, egyszerű átalakítás után

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|^2 &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - \sum_{i \in \mathbf{I}} (\overline{\lambda}_i \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle + \lambda_i \overline{\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle}) + \sum_{i \in \mathbf{I}} |\lambda_i|^2 = \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{i \in \mathbf{I}} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle - \lambda_i|^2 - \sum_{i \in \mathbf{I}} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

következik. Innen nyilvánvaló, hogy az  $\|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|^2$  eltérés akkor minimális, ha  $\lambda_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle$  ( $i \in \mathbf{I}$ ) és így a minimumra valóban (10), a minimumot szolgáltató helyre pedig (11) adódik.  $\square$

Ortonormált rendszerek indexelésére a természetes számok mellett néha célszerű az egész számokat is használni. Ezzel összhangban a továbbiakban  $\mathbf{N}$ -nel fogjuk jelölni az indexhalmazt, ahol  $\mathbf{N} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ .

A Bessel-féle azonosságból következik az alábbi

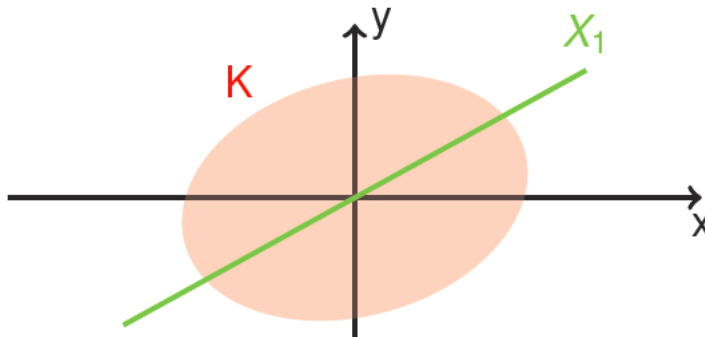
**Bessel-féle egyenlőtlenség.** Legyen  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy euklideszi tér,  $\mathbf{e}_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) egy ortonormált rendszer. Ekkor bármely  $\mathbf{f} \in \mathbb{X}$  vektorra

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_n \rangle|^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2.$$

Számos olyan feladat van, ahol több vektorból álló halmaz elemeit közelítjük valamely véges dimenziós tér elemeivel. Ezzel kapcsolatos a Kolmogorov által bevezetett **n-dimenziós szélesség** (**n-width**) fogalma, amellyel valamely  $K \subset \mathbb{X}$  halmaz elemeinek lineáris approximációját mérjük a  $\mathbb{X}$  Hilbert-tér **n**-dimenziós altereinek egy  $\mathcal{X}_n$  osztályából kiindulva. A

$$w_n(K, \mathcal{X}_n) := \inf_{X \in \mathcal{X}_n} \sup_{f \in K} \rho(f, X)$$

számot a  $K$  halmaz  $\mathcal{X}_n$  osztályra vonatkozó szélességének nevezzük. Ez a mennyiség azt fejezi ki, hogy a  $K$  halmaz elemei (a legrosszabb esetben is) milyen jól (milyen legkisebb eltéréssel) approximálhatók  $\mathcal{X}_n$ -beli **n**-dimeziós lineáris terek elemeivel. Megjegyezzük, hogy az eredeti, Kolmogorov-féle definícióban az  $\mathcal{X}_n$  osztály a  $\mathbb{X}$  tér valamennyi **n**-dimenziós alterét tartalmazza. Az alábbi ábrán  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ , **n** = 1 esetén szemléltetjük a definíciót,  $K$ -nak egy olyan ellipszist választva, amelynek a középpontja az origó és tengelyei nem esnek a koordinátarendszer tengelyeire. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben az esetben a minimumot szolgáltató altér a nagytengelyen áthaladó egyenes (az ábrán  $X_1$ -gyel jelölt altér), a Kolmogorov-féle szélesség az ellipszis kistengelyének hosszával egyenlő.



*Ellipszis Kolmogorov-féle szélessége*

Abban az esetben, ha  $K$  valamely altér egységömbje, akkor

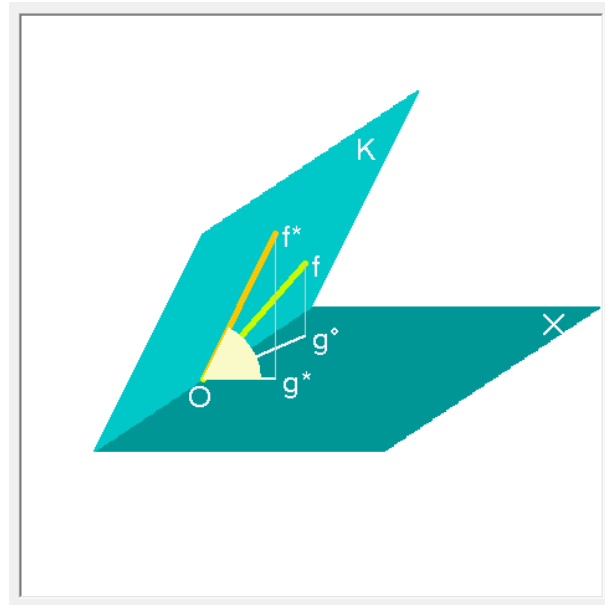
$$\max_{f \in K} \text{dist}(f, X) = \text{dist}(f^*, X) = \|f^* - g^*\| \quad (g^* = P_X f^*),$$

következésképpen ez a mennyiség az  $f^*$ ,  $g^*$  vektorok és ezzel együtt a  $K$  és  $X$  alterek  $\alpha = (K, X) \triangleleft$  hajlásszögének szinuszával egyenlő:

$$\sin((K, X) \triangleleft) = \max_{f \in K} \text{dist}(f, X).$$

Ennek alapján a Kolmogorov-féle szélesség kiszámítása a  $K$  altérrel legkisebb szöget bezáró  $X$  altér meghatározásához vezet:

$$w_n(K, \mathcal{X}_n) = \inf_{X \in \mathcal{X}_n} \sin((K, X) \triangleleft).$$



*Altér szöge*

Az 5. Fejezetben néhány fontos speciális esettel foglalkozunk, amelyben az optimumot szolgáltató  $X$  altér és a  $w_n$  szélesség expliciten meghatározható.

### 1.3. FOURIER-SOROK

Az előző pontban vizsgált minimumfeladat megoldásának együtthatóihoz a trigonometrikus rendszerrel kapcsolatban először Euler jutott el, majd később Fourier alkalmazta igen eredményesen az ezzel

összefüggő sorokat fizikai problémák megoldására. Erre utalnak a címben és az alábbi definícióban használt elnevezések.

**Definíció.** Az  $\langle f, e_n \rangle$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) számokat az  $f \in \mathbb{X}$  vektor  $E = (e_n, n \in \mathbf{N})$  ortonormált rendszer szerinti **Fourier-együtthatóinak**, a

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \langle f, e_i \rangle e_i \quad (\mathbf{N} = \mathbf{N}, \mathbf{Z})$$

végtelen sort az  $f$  elem  $E = (e_n, n \in \mathbf{N})$  rendszer szerint haladó **Fourier-sorának** nevezzük.

A Fourier-sor konvergenciájának vizsgálatához az  $\mathbf{N} = \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{Z}$  eseteket figyelembe véve vezessük be az alábbi *részletösszegeket*:

$$S_n f := \sum_{|i| \leq n} \langle f, e_i \rangle e_i \quad (n \in \mathbf{N}).$$

A háromdimenziós térben érvényes geometriai szemléletet kiterjesztve az  $E$  ortonormált rendszer vektorait egy derékszögű koordináta-rendszer koordináta-egységvektoraiként foghatjuk fel, az  $f$  vektor  $\langle f, e_i \rangle$  ( $i \in \mathbf{N}$ ) Fourier-együtthatói az  $f$ -nek az  $e_i$  egységvektor irányába eső *előjeles vetületeként* vagy az  $f$   $i$ -edik *koordinátájaként* interpretálhatók.

A matematika alkalmazásiban gyakran használunk függvényeket folyamatok, jelenségek modellezésére. Ezek a függvények sokszor valamely  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi tér vektoraiként interpretálhatók. A függvények helyett sok szempontból célszerű ezek valamely ortonormált rendszer szerinti Fourier-együtthatóiból, vagy geometriai szóhasználattal élve, valamely derékszögű koordináta-rendszerre vonatkozó koordinátáiból kiindulni. Ezzel összefüggésben felvetődik a kérdés, hogy milyen koordináta-rendszerek felelnek meg ennek a célnek. Nyilvánvaló, hogy valamely  $E = (e_n, n \in \mathbf{N})$  rendszer szerinti Fourier-együtthatók akkor jellemzik a tér vektorait, ha minden  $f, g \in \mathbb{X}$  esetén

$$\langle f, e_n \rangle = \langle g, e_n \rangle \quad \Rightarrow \quad f = g. \quad (12)$$

Ezzel a tulajdonsággal kapcsolatos a következő

**Definíció.** Akkor mondjuk, hogy az  $E = (e_n, n \in \mathbf{N})$  rendszer teljes, ha az

$$f \in \mathbb{X}, \quad \langle f, e_n \rangle = 0 \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (13)$$

feltételből  $f = \theta$  következik, ahol  $\theta$  az  $\mathbb{X}$  tér nullvektora.

Nyilvánvaló, hogy (12) ekvivalens az E rendszer teljességével. Valóban a (12) feltétel azzal ekvivalens, hogy  $\langle f - g, e_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Innen teljes E rendszer esetén  $f - g = \theta$ , azaz  $f = g$  következik. A fordított irányú állítás hasonlóan igazolható.

Rendszerek teljessége és zártsága szoros kapcsolatban van egymással. Emlékeztetve a definícióra akkor mondjuk, hogy valamely  $\mathbb{X}$ -beli  $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$  **rendszer zárt**, ha a rendszer lineáris burka mindenütt sűrű az  $\mathbb{X}$  térben, azaz  $F$  lineáris burkának lezártjára  $\overline{\text{span } F} = \mathbb{X}$  teljesül. Ez más szóval azt jelenti, hogy minden  $f \in \mathbb{X}$  vektorhoz és  $\epsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$  és  $g \in \text{span}\{f_0, \dots, f_n\}$ , hogy  $\|f - g\| < \epsilon$ .

**5.Tétel.** Legyen  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi tér.

Ha az  $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$   $\mathbb{X}$ -beli rendszer zárt, akkor  $F$  teljes.

Ha az  $\mathbb{X}$  tér és az  $F$  rendszer teljes, akkor  $F$  zárt rendszer.

**Bizonyítás.** 1. Induljunk ki abból, hogy az  $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer zárt és tegyük fel, hogy valamely  $f \in \mathbb{X}$  vektorra

$$\langle f, f_n \rangle = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. A skaláris szorzat linearitását és folytonosságát felhasználva innen következik, hogy

$$f \perp \overline{\text{span } F} = \mathbb{X}.$$

Speciálisan  $f \perp f$ , következésképpen  $f = \theta$ .

2. A fordított irányú állítás igazolásához, indirekt bizonyítást alkalmazva, tegyük fel, hogy  $F$  teljes de nem zárt. Ekkor  $Y := \overline{\text{span } F} \neq \mathbb{X}$ , következésképpen a Riesz-féle felbontási tétel alapján van olyan  $f \neq \theta$  vektora a  $\mathbb{X}$  térnek, amely merőleges  $Y$ -ra. Erre az  $f$  vektorra fennáll (13), ami ellentmond annak, hogy  $F$  teljes.  $\square$

Teljes rendszerek szerinti Fourier-együtthatókkal — amint azt korábban láttuk — jellemezhetjük az euklideszi tér vektorait. Ha zárt rendszerből indulunk ki, akkor a tér vektorai Fourier-együtthatóikból rekonstruálhatók. Ezzel kapcsolatos a következő állítás.

**6.Tétel.** Legyen  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi tér és  $e_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) egy zárt

ortonormált rendszer. Ekkor minden  $f \in \mathbb{X}$  vektorra

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, e_n \rangle|^2, \\ \text{ii)} \quad & \|f - S_n f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \tag{14}$$

**Bizonyítás.** A Bessel-féle azonosság alapján  $\|f - S_n f\|$  az  $f \in \mathbb{X}$  elemnek az  $Y_n := \text{span}\{f_i : i \in \mathbb{N}, |i| \leq n\}$  altértől vett távolsága, következésképpen  $n$ -nek egy monoton fogyó sorozata. Mivel a szóban forgó rendszer zárt, azért minden  $\epsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $N \in \mathbb{N}$  és olyan  $h \in Y_N$ , hogy  $\|f - h\| \leq \epsilon$ . Ezt és a Bessel-féle azonosságot figyelembe véve azt kapjuk, hogy minden  $n \geq N$  esetén

$$\|f\|^2 - \sum_{|i| \leq n} |\langle f, e_i \rangle|^2 = \|f - S_n f\|^2 \leq \|f - S_N f\|^2 \leq \|f - h\|^2 < \epsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a (14) mindkét állítása fennáll.  $\square$

Egyszerűen igazolható, hogy az

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n, n \in \mathbb{N}) : \|x\| := \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\} \tag{15}$$

sorozattér lineáris, az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n} \quad (x, y \in \ell^2(\mathbb{N}))$$

bilineáris funkcionál egy skaláris szorzat ezen a téren, amely a (15)-ben is szereplő normát indukálja. Ez a tér teljes és szeparábilis, azaz a *szeparábilis Hilbert-tereknek* egy példánya. Emlékeztetünk arra, hogy egy metrikus térről akkor mondjuk, hogy **szeparábilis**, ha van benne egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\left\{ x = (x_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_n \in \mathbb{Q} (n \in \mathbb{N}), \exists N \in \mathbb{N} \forall |n| \geq N : x_n = 0 \right\}$$

egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza az  $\ell^2(\mathbb{N})$  térnek. Hilbert-terek esetében létezik egy másik, jól használható kritérium a szeparabilitásra.

**7. Tétel.** *Egy Hilbert-tér akkor és csak akkor szeparábilis, ha létezik benne egy megszámlálható teljes ortonormált rendszer.*

**Bizonyítás.** 1. Legyen  $\mathbb{X}$  egy szeparábilis Hilbert-tér és válasszunk ebből egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmazt. A vektorokat sorozatba rendezve és azokat, amelyek az előzőekkel összefüggnek, elhagyva olyan megszámlálható, lineáris független  $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$  rendszert kapunk, amelynek a lineáris burka mindenütt sűrű az  $\mathbb{X}$ -ben. Ez utóbbi zárt rendszerre alkalmazva a Schmidt-féle ortogonalizációt, egy megszámlálható ortonormált rendszert kapunk, amelynek a lineáris burka ugyanaz lévén, mint az  $F$  rendszeré, maga is zárt. Alkalmazva az 5. Tételt az kapjuk, hogy ez az ortonormált rendszer teljes.

2. Megfordítva, ha  $\mathbb{X}$ -ben van egy megszámlálható, teljes ortonormált rendszer, akkor az 5. Tétel alapján ez a rendszer zárt. Könnyű megmutatni, hogy ennek racionális együtthatókkal véve a lineáris burkát egy megszámlálható, mindenütt sűrű halmazt kapunk.  $\square$

Ezek után megmutatjuk, hogy a szeparábilis Hilbert-terek között sem algebrai szempontból, sem metrikus tulajdonságaikat tekintve nincs különbség. Ennek pontos megfogalmazásához rögzítsünk egy  $e_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) megszámlálható, teljes ortonormált rendszert. Jelölje

$$\hat{f} := (\hat{f}(n), n \in \mathbb{N}), \quad \hat{f}(n) := \langle f, e_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N})$$

az  $f \in \mathbb{X}$  elem szóban forgó rendszer szerinti Fourier-együtthatóit. Az  $\mathcal{F}f := \hat{f}$  ( $f \in \mathbb{X}$ ) leképezést, amely (14) alapján  $\mathbb{X}$ -beli vektorokhoz  $\ell^2(\mathbb{N})$ -beli sorozatokat rendel **Fourier-transzformációnak** nevezik.

Ezt a leképezést felhasználva igazolható a

**Riesz-Fischer-tétel.** *Minden szeparábilis Hilbert-tér izomorf és izometrikus a  $\ell^2(\mathbb{N})$ -térrel, nevezetesen a*

$$\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$$

*Fourier-transzformáció egy lineáris izomorfia a két tér között, amelyre*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (f, g \in \mathbb{X}).$$

**Bizonyítás.** A skaláris szorzat tulajdonságai alapján

$$\langle f + g, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle + \langle g, e_n \rangle, \quad \langle \lambda f, e_n \rangle = \lambda \langle f, e_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N}),$$

következésképpen  $\mathcal{F}$  valóban lineáris:

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}f \quad (f, g \in \mathbb{X}, \lambda \in \mathbb{K}).$$

Az  $\mathbf{e}_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) rendszer teljességéből következik, hogy az  $\mathcal{F}$  leképezés injektív. Ehhez, figyelembe véve  $\mathcal{F}$  linearitását, elég megmutatni, hogy az  $\mathcal{F}f = \mathbf{0}$  feltételből  $f = \mathbf{0}$  következik. Valóban, minthogy az  $\mathbf{e}_n \in \mathbb{X}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) rendszer teljes, ezért  $\widehat{f}(n) = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) feltételből  $f = \mathbf{0}$  következik.

Annak igazolásához, hogy a  $\mathcal{F}$  szurjektív induljunk ki egy  $\mathbf{c} = (c_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2(\mathbb{N})$  sorozatból és mutassuk meg, hogy van olyan  $f \in \mathbb{X}$ , amelyre  $\widehat{f}(n) = c_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) teljesül. Ehhez bevezetjük a  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \mathbf{e}_k$  sor

$$s_n := \sum_{k=0}^n c_k \mathbf{e}_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegeit és megmutatjuk hogy ezek Cauchy-sorozatot alkotnak. Valóban, felhasználva az  $(\mathbf{e}_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer ortogonalitását és normált voltát azt kapjuk, hogy minden  $m > n$  indexre

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m c_k \mathbf{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2.$$

Minthogy  $\mathbf{c} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , azért  $(s_n, n \in \mathbb{N})$  valóban Cauchy-sorozat, s így az  $\mathbb{X}$  tér teljessége alapján konvergens. Jelöljük  $f$ -fel a szóban forgó sorozat határértékét, azaz  $s_n \rightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ) az  $\mathbb{X}$  tér normájában. Ekkor a skaláris szorzat folytonossága alapján

$$\widehat{f}(k) = \langle f, \mathbf{e}_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n, \mathbf{e}_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Minthogy minden  $n \geq k$  esetén  $\langle s_n, \mathbf{e}_k \rangle = c_k$ , azért  $\widehat{f}(k) = c_k$  minden  $k \in \mathbb{N}$  indexre. Ezzel megmutattuk, hogy a most konstruált  $f \in \mathbb{X}$  elemre  $\mathcal{F}f = \mathbf{c}$  teljesül.

A (14) alapján

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{f}(n)|^2 = \|\mathcal{F}f\|_{\ell^2}^2 \quad (f \in \mathbb{X}),$$

s ez geometriai szóhasználattal élve pontosan azt jelenti, hogy az  $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \ell^2$  bijekció távolságtartó, más szóval *izometria*.



Bármely euklideszi térben a skaláris szorzat kifejezhető a normával. Egyszerűen igazolható, hogy valós euklideszi tér esetén fennáll az

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{4} \left( \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|^2 - \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 \right) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{X})$$

azonosság. A komplex térre vonatkozó azonosságot illetően lásd a feladatot. Ezekből nyilvánvaló, hogy minden izometria egyben a skaláris szorzatot is megtartja.  $\square$

#### 1.4. FELADAT

1. Legyen  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  komplex euklideszi tér. Igazoljuk a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|^2 - \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 &= 4 \operatorname{Re} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle, \\ \|\mathbf{i}\mathbf{f} + \mathbf{g}\|^2 - \|\mathbf{i}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 &= 4i \operatorname{Im} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{X}). \end{aligned}$$

## 2. FEJEZET

# A BLASCHKE-CSOPORT

Ebben a fejezetben ismertetjük a racionális ortonormált rendszerek konstrukciójában fontos szerepet játszó **Blaschke-függvények** felhasználásra kerülő tulajdonságait, szemléltetjük az általuk létesített komplex leképezéseket. Foglalkozunk a Blaschke-függvényekkel képzett csoport tulajdonságaival, speciális részcsoportjaival és ezek reprezentációival.

### 2.1. A BLASCHKE-FÜGGVÉNYEK A DISZKEN

Az  $\mathbf{a}$  komplex paramétertől függő

$$B_{\mathbf{a}}(z) := \frac{z - \mathbf{a}}{1 - \bar{\mathbf{a}}z} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

leképezéseket **Blaschke-függvényeknek** nevezzük. Az  $\mathbf{a}$  szám a  $B_{\mathbf{a}}$  zérushelye, az

$$\mathbf{a}^* := \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

szám, az  $\mathbf{a}$ -nak az *egységkörre vonatkozó tükörképe (inverz képe)*, a  $B_{\mathbf{a}}$  pólusa. Ez indokolja a következő szóhasználatot: az  $\mathbf{a}$  paramétert a  $B_{\mathbf{a}}$  függvény **inverzpólusának** nevezzük. Néha célszerű  $\mathbb{C}$  helyett a  $\infty$  elemmel kibővített  $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  halmazból kiindulni és a  $B_{\mathbf{a}}$  értelmezését erre az alábbiak szerint kiterjeszteni:

$$B_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}^*) := \infty, \quad B_{\mathbf{a}}(\infty) := -\mathbf{a}^*.$$

A továbbiakban gyakran felhasználjuk az

$$1 - |B_{\mathbf{a}}(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\mathbf{a}|^2)}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2} \quad (\mathbf{a}, z \in \mathbb{C}, z \neq \mathbf{a}^*) \quad (2)$$

azonosságot, amely egyszerűen igazolható. Valóban

$$\begin{aligned} 1 - |B_{\mathbf{a}}(z)|^2 &= 1 - \frac{|z - \mathbf{a}|^2}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2} = \\ &= \frac{(1 - \bar{\mathbf{a}}z - \mathbf{a}\bar{z} + |\mathbf{a}|^2) - (|z|^2 - \bar{\mathbf{a}}z - \mathbf{a}\bar{z} + |\mathbf{a}|^2)}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2} = \\ &= \frac{(1 + |\mathbf{a}|^2) - (|z|^2 + |\mathbf{a}|^2)}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\mathbf{a}|^2)}{|1 - \bar{\mathbf{a}}z|^2}. \end{aligned}$$

Innen közvetlenül adódik, hogy  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  esetén

$$B_{\mathbf{a}}(z) \in \mathbb{D}, \text{ ha } z \in \mathbb{D}, \quad B_{\mathbf{a}}(z) \in \mathbb{T}, \text{ ha } z \in \mathbb{T}.$$

Megmutatjuk, hogy  $B_{\mathbf{a}} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  bijekció, amelynek inverze  $B_{\mathbf{a}}^{-1} = B_{-\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ ). Ez következménye az alábbi, egyszerűen igazolható azonosságnak:

$$B_{\mathbf{a}}(B_{-\mathbf{a}}(z)) = B_{-\mathbf{a}}(B_{\mathbf{a}}(z)) = z \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \mathbf{a} \in \mathbb{D}).$$

Valóban

$$B_{\mathbf{a}}(B_{-\mathbf{a}}(z)) = \frac{\frac{z + \mathbf{a}}{1 + \overline{\mathbf{a}}z} - \mathbf{a}}{1 - \overline{\mathbf{a}} \frac{z + \mathbf{a}}{1 + \overline{\mathbf{a}}z}} = \frac{z - |\mathbf{a}|^2 z}{1 - |\mathbf{a}|^2} = z.$$

A most igazolt azonosságot  $\mathbf{a}$  helyett  $-\mathbf{a}$ -ra alkalmazva kapjuk az állítás második részét.

Az utóbbi két azonosságból következik, hogy minden  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  esetén a

$$B_{\mathbf{a}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad B_{\mathbf{a}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$$

leképezések mindegyike bijekció és a  $B_{\mathbf{a}}$  inverzére  $B_{\mathbf{a}}^{-1} = B_{-\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ ) teljesül. A matematikai vizsgálatokban többnyire a  $\mathbb{D}$ -n értelmezett, analitikus függvények  $A(\mathbb{D})$  osztályát vesszük alapul, ugyanakkor bizonyos alkalmazásokban, mint pl. a rendszer- és irányításelméletben a  $\mathbb{D}_-$  halmazon analitikus függvényekből indulnak ki. A továbbiakban a matematikában elterjedt szokásokat követve az  $\mathbf{a}$  paramétert  $\mathbb{D}$ -ből választjuk. Ilyenkor valamennyi  $B_{\mathbf{a}}$  analitikus a  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon, ezért célszerű a szóban forgó függvényeket ezen a halmazon vizsgálni, ill. ennek bizonyos részhalmazaira (pl. a  $\mathbb{D}$ -re vagy a  $\mathbb{T}$ -re) leszűkíteni. Az  $\epsilon B_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}, \epsilon \in \mathbb{T}$ ) leképezések azonosíthatók a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-modelljében az egybevágósági transzformációkkal. Ennek a kapcsolatnak a részletes bemutatásával a 3. Fejezetben foglalkozunk.

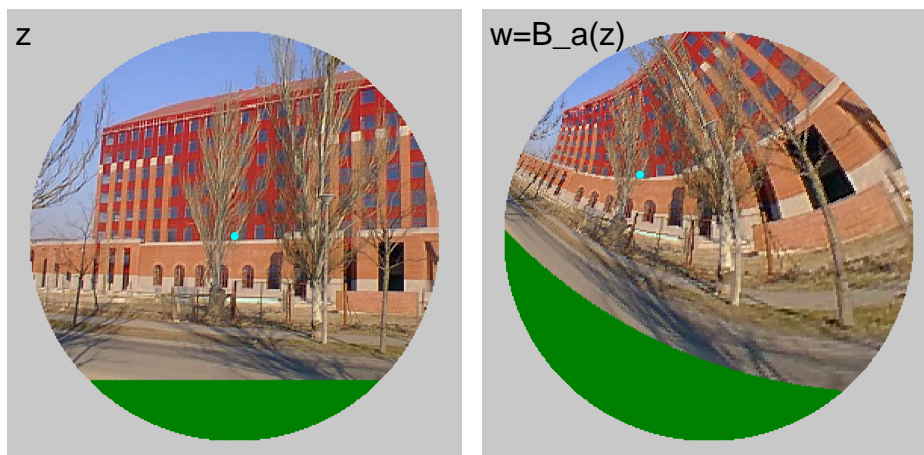
Az alábbi ábrán a  $B_{\mathbf{a}}$  leképezést szemléltetjük. Az  $\mathbf{a}$  paraméternek megfelelő pontot kék színnel ábrázoltuk a bal oldali ábrán.



1. ábra: Üdvözet a hiperbolikus síkról

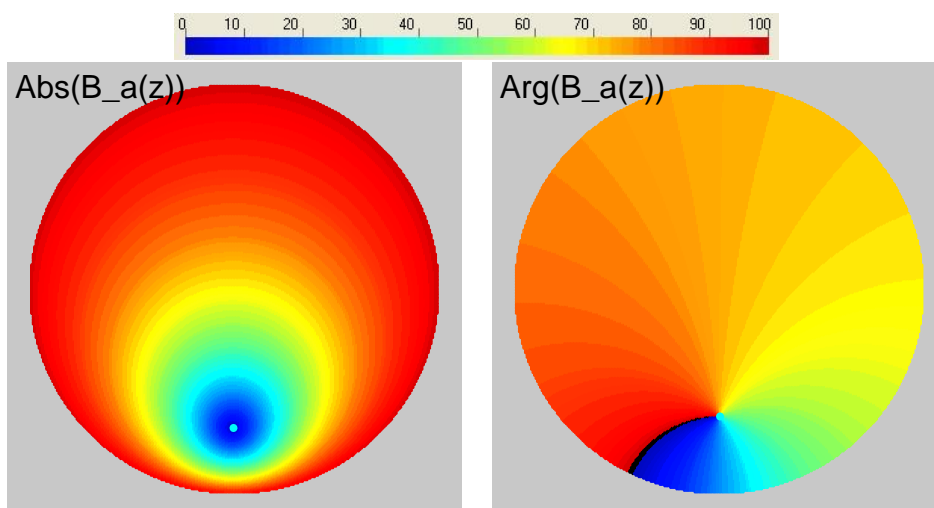
A leképezések geometriai tulajdonságaival összhangban (lásd a 3. Fejezetet) jól látható, hogy a Blaschke-függvények az egyenes szakaszokat körívekbe viszik át.

A következő képen azt mutatjuk be, hogy hogyan változik az Informatikai Kar épülete a hiperbolikus térben, ha egy  $B_a$  leképezésnek (egy eltolásnak) vetjük alá.



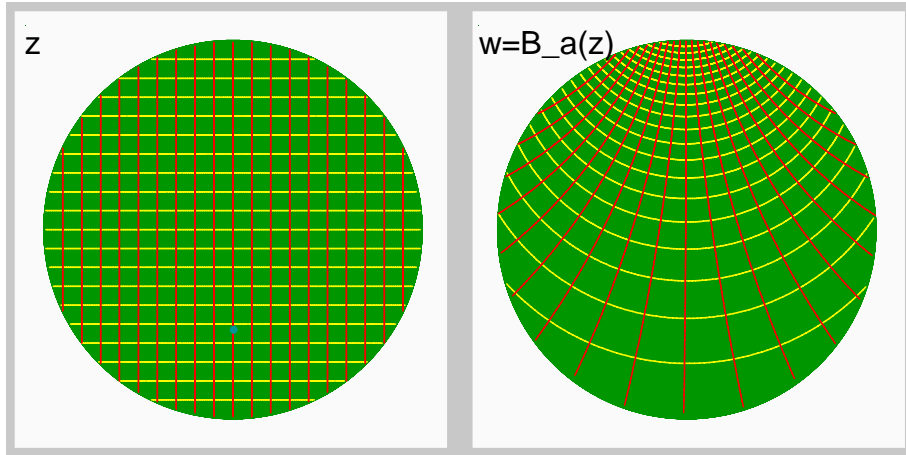
2.ábra: Az IK épülete a hiperbolikus térben

Az  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  típusú függvényeket több, egymástól különböző módon szokás szemléltetni. Gyakran a  $z \rightarrow \text{Abs}(F(z)), \text{Arg}(F(z))$  függvénytárak képe kellő információt nyújt a szóban forgó komplex leképezésről. Ezeket a leképezéseket pl. úgy ábrázolhatjuk, hogy a  $z$  helyen felvett függvényértéket egy adott színskálában neki megfelelő színnel szemléltetjük. Ezt mutatjuk be az alábbi ábrákon.

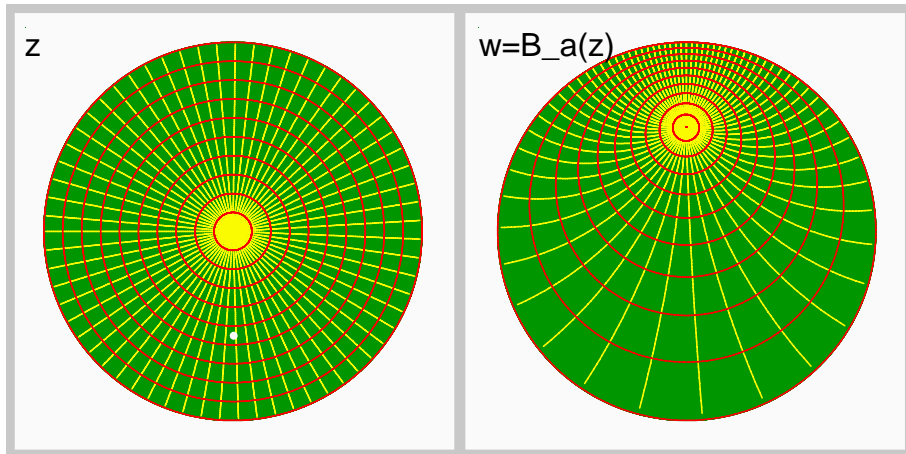


3.ábra: A  $B_a$  leképezés abszolút értéke és argumentuma

Az alábbiakban egy további ábrázolási módot választva négyzetrács és körrács képét szemléltetjük.



4. ábra: Négyzetrács képe a Blaschke leképezésben



5. ábra: Körrács képe a Blaschke leképezésben

A diszk mellett a felső komplex félsík és annak lezártja, a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_+ &:= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \Im z = y > 0\}, \\ \overline{\mathbb{C}_+} &:= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \Im z = y \geq 0\} \end{aligned}$$

halmazok is kitüntetett szerepet játszanak. A

$$z^\circ := C_y(z) := \frac{i - z}{i + z} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}) \quad (3)$$

**Caley-féle leképezéssel** a  $\mathbb{C}_+$  és a  $\mathbb{D}$  pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Nevezetesen a  $C_y$

$$C_y : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{D}, \quad C_y : \overline{\mathbb{C}_+} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}, \quad C_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \setminus \{-1\}, \quad C_y : i\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{I}$$

leszűkítései bijekciók, továbbá a  $C_y$  bijekció inverze

$$z^\bullet := C_y^{-1}(z) = i \frac{1 - z}{1 + z} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}).$$

Valóban, minthogy

$$1 - |C_y(z)|^2 = \frac{-4 \Im(iz)}{|i+z|^2} = \frac{4y}{|i+z|^2} \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq -i),$$

$$C_y(is) = \frac{1-s}{1+s} \quad (s > 0),$$

ezért innen nyilván következik a bijekciókra vonatkozó állítás.

A Caley-leképezés, az  $s \in \mathbb{R}$  paramétert használva a számegyenesen, a

$$C_y(s) = \frac{1+is}{1-is} = \frac{1+itg(\text{atg}(s))}{1-itg(\text{atg}(s))} = e^{2i \text{atg}(s)} \quad (4)$$

függvénnyel írható le.

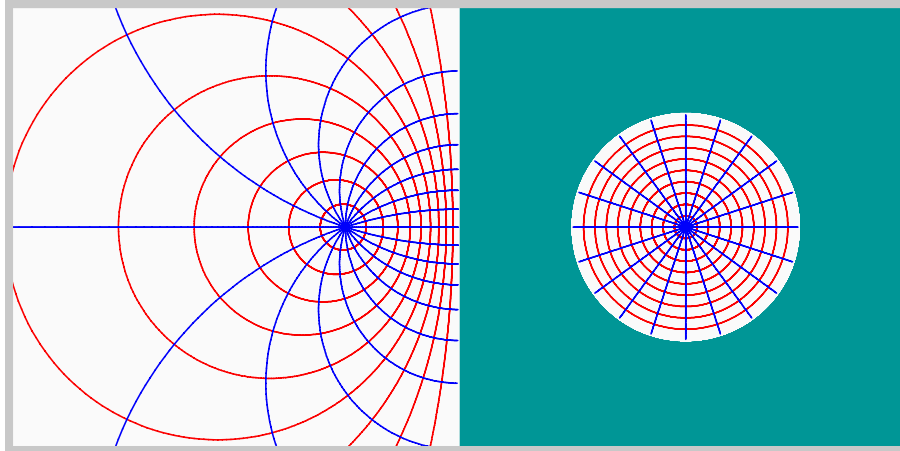
A Caley-leképezés helyett néha célszerű a

$$J(z) := \frac{z-1}{z+1} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

függvényt használni, amely egy  $\pi/2$  és egy  $\pi$  szöggel való elforgatás beiktatásával kifejezhető  $C_y$ -nal

$$J(z) = -C_y(iz) \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}).$$

Innen következik, hogy  $J$  a differenciálegyenletek stabilitása szempontjából kitüntetett  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$  bal félsíkot a  $\mathbb{D}$ -be, az  $i\mathbb{R}$  imaginárius tengelyt a  $\mathbb{T}$ -be viszi. A  $J$  leképezést felhasználva a differencia- és differenciálegyenletek stabilitása között teremethetünk kapcsolatot.



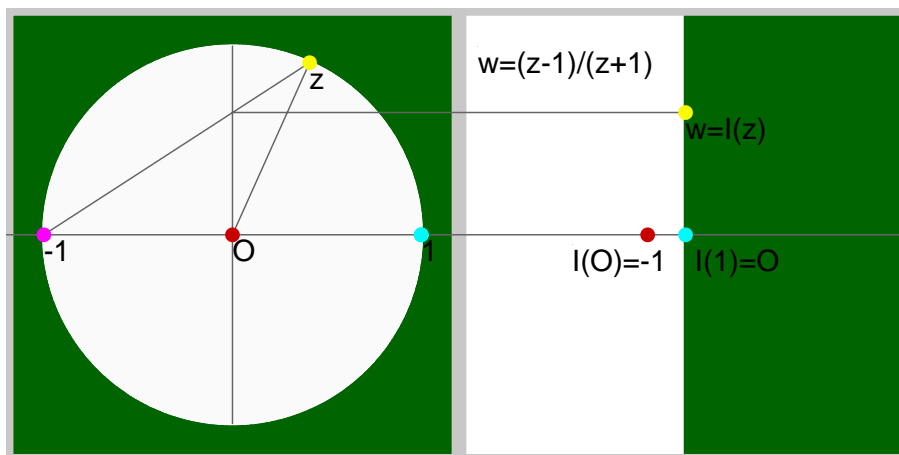
*Körrácsnak a  $J$  leképezés által létesített képe*  
6. ábra

A

$$J(e^{it}) = \frac{e^{it} - 1}{e^{it} + 1} = i \text{tg}(t/2) \quad (t \in \mathbb{R})$$

azonosságnak szemléletes geometriai jelentése van:  $w = J(e^{it})$  a  $z = e^{it}$  pontnak a  $c = -1$  centrumból képzett vetülete az imaginárius tengelyen. Mivel az  $\overrightarrow{Oz}$  szakasz a

valós tengellyel  $t$  szöget zár be, azért a  $\vec{cz}$  szakasznak a valós tengellyel bezárt szöge  $t/2$ , következésképpen a  $\vec{cz}$  vetítősugár egy  $\operatorname{tg}(t/2)$  hosszúságú szakaszt metsz ki a képzetes tengelyből.



7.ábra: A  $J$  leképezés a peremen

Az  $C_y$  leképezés segítségével a diszken analitikus függvények  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  osztálya és a felső félsíkon analitikus függvények  $\mathcal{A}(\mathbb{C}_+)$  osztálya között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk:

$$\mathcal{A}(\mathbb{D}) \ni F \rightarrow F \circ C_y \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_+),$$

amelynek inverze a  $G \rightarrow G \circ C_y^{-1}$  ( $G \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_+)$ ) leképezés. A  $B_a$  Blaschke-függvények  $B_a \circ C_y$  transzformáltjait kifejezhetjük a Blaschke-függvények felső félsíkbeli alábbi megfelelőivel:

$$b_a(z) := \frac{z - a}{z - \bar{a}} \quad (a \in \mathbb{C}_+, z \in \bar{\mathbb{C}}_+) \quad (5)$$

Nyilvánvalóan  $b_a \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_+)$ , ha  $a \in \mathbb{C}_+$ , továbbá

$$B_a \circ C_y = B_{-a}(1) b_a \bullet. \quad (6)$$

Valóban

$$\begin{aligned} B_a(C_y(z)) &= \frac{(1 + iz)/(1 - iz) - a}{1 - \bar{a}(1 + iz)/(1 - iz)} = \\ &= \frac{(1 - a) + iz(1 + a)}{(1 - \bar{a}) - iz(1 + \bar{a})} = -\frac{1 + a}{1 + \bar{a}} \frac{z - a \bullet}{z - \bar{a} \bullet}. \end{aligned}$$

A diszken értelmezett függvények  $H^s(\mathbb{D})$  ( $0 < s \leq \infty$ ) Hardy-terei mellett célszerű bevezetni a  $\mathbb{C}_+$  félsíkon értelmezett függvények  $H^s(\mathbb{C}_+)$  ( $0 < s \leq \infty$ ) Hardy-tereit:

$$H^s(\mathbb{C}_+) := \{F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_+) : \|F\|_{H^s(\mathbb{C}_+)} < \infty\},$$

ahol

$$\|F\|_{H^s(\mathbb{C}_+)} := \sup_{y>0} \left( \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^s dx \right)^{1/s} \quad (0 < s < \infty).$$

Bebizonyítható, hogy minden  $F \in H^s(\mathbb{C}_+)$  függvényre m.m.  $x \in \mathbb{R}$  pontban létezik a

$$F(x) := \lim_{y \rightarrow +0} F(x + iy)$$

peremfüggvény, amelyre  $F \in L^s(\mathbb{R})$  és  $\|F\|_{L^s(\mathbb{R})} = \|F\|_{H^s(\mathbb{R})}$ . Speciálisan  $H^2(\mathbb{C}_+)$  Hilbert-tér az

$$\langle F, G \rangle := \int_{\mathbb{R}} F(x) \overline{G(x)} dx \quad (F, G \in H^2(\mathbb{C}_+)) \quad (7)$$

skaláris szorzattal, és az ezáltal indukált norma azonos a  $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}$  normával. Az  $F \rightarrow F \circ C_y$  leképezés a  $H^2(\mathbb{D})$  térről a  $H^2(\mathbb{C}_+)$  térre korlátos, de nem tartja meg a normát. Megmutatjuk, hogy ennek

$$(If)(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{i+z} f(C_y(z)) \quad (z \in \overline{\mathbb{C}_+}, f \in H^2(\mathbb{D})) \quad (8)$$

módosítása izometria. Valóban a  $2 \operatorname{atg}(s) = t$  helyettesítéssel (4) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|If\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(C_y(s))|^2}{|i+s|^2} ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(e^{2i \operatorname{atg}(s)})|^2}{1+s^2} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2. \end{aligned}$$

A  $B_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{D}$ ) függvénycsaládot felhasználva racionális ortogonális rendszereket szerkeszthetünk a számegyenesen, ill. a számsíkon.

Mivel a  $B_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  ( $\alpha \in \mathbb{D}$ ) leképezés bijektív, ezért a Blaschke-függvények az egységkörön előállíthatók

$$B_\alpha(e^{it}) = e^{i\beta_\alpha(t)} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

alakban, ahol  $\beta_\alpha$  az  $\mathbb{R}$ -en értelmezett valós függvény.

Az alábbiakban explicit alakban adjuk meg a  $\beta_\alpha$  függvényt és összefoglaljuk legfontosabb tulajdonságait. Ehhez bevezetjük a következő, az  $s \in (0, \infty)$  paramétertől függő

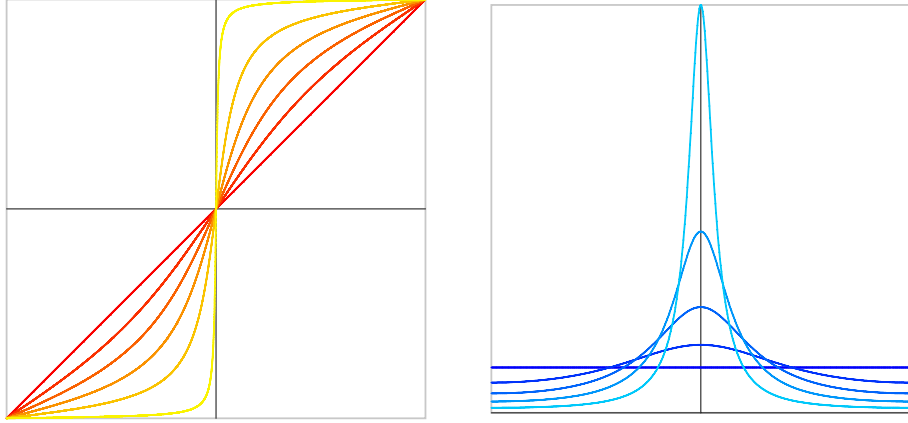
$$\gamma_s(t) := 2 \operatorname{atg}(s \operatorname{tg}(t/2)) \quad (t \in (-\pi, \pi), s \in (0, \infty)) \quad (10)$$

függvénycsaládot. Terjesszük ki a függvények értelmezését az  $\mathbb{R}$ -re az alábbiak szerint:

$$\gamma_s(-\pi) := -\pi, \quad \gamma_s(\pi) := \pi, \quad \gamma_s(t + 2\pi) = \gamma_s(t) + 2\pi \quad (s \in (0, \infty), t \in \mathbb{R}).$$

Ezzel, egy szigorúan monoton növekvő, differenciálható függvényt értelmeztünk. Megmutatjuk, hogy a  $\gamma_{s(r)}$  ( $s(r) = (1+r)/(1-r), 0 \leq r < 1$ ) deriváltja a Poisson-féle magfüggvény.





$\gamma_{s(r)}$                        $\gamma'_{s(r)}$  ( $r = kr_0, k = 0, \dots, 4$ )  
 8. ábra: A  $\gamma_{s(r)}, \gamma'_{s(r)}$  grafikonja a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon

**1. Tétel.** Legyen  $s(r) := (1+r)/(1-r)$  ( $0 \leq r < 1$ ). Ekkor a  $\gamma_{s(r)}$  függvény deriváltja a **Poisson-féle magfüggvény**:

$$\gamma'_{s(r)}(t) = P_r(t) := \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (11)$$

Legyen továbbá  $a = re^{i\alpha}$  ( $\alpha \in [-\pi, \pi), r \in [0, 1)$ ). Ekkor a  $B_a$  Blaschke-függvény előállítható

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} = e^{i(\gamma_{s(r)}(t-\alpha)+\alpha)} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (12)$$

alakban.

**Bizonyítás.** A  $\gamma_s$  definíciója alapján az  $s = s(r)$  jelölést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \gamma'_s(t) &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 \operatorname{tg}^2(t/2) + 1} \frac{1}{\cos^2(t/2)} = \frac{s}{s^2 \sin^2(t/2) + \cos^2(t/2)} = \\ &= \frac{\frac{(1+r)}{(1-r)}(1-r)^2}{(1+r)^2 \sin^2(t/2) + (1-r)^2 \cos^2(t/2)} = \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2 + 2r(\sin^2(t/2) - \cos^2(t/2))} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} = P_r(t). \end{aligned}$$

Ezzel a (11) azonosságot igazoltuk. A (12) igazolásához először megmutatjuk, hogy

$$B_r(e^{it}) = e^{i\gamma_s(t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Legyen

$$F(t) := B_r(e^{it}), \quad G(t) := e^{i\gamma_s(t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G'(t)}{G(t)}. \quad (13)$$

Valóban (11) alapján

$$\begin{aligned}\frac{G'(t)}{G(t)} &= i\gamma_s'(t) = i\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \frac{F'(t)}{F(t)} &= ie^{it} \left( \frac{1}{z-r} + \frac{r}{1-rz} \right) \Big|_{z=e^{it}} = \\ &= i\frac{(1-r^2)e^{it}}{(e^{it}-r)(1-re^{it})} = i\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \quad (t \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

s ezzel az (13) egyenlőséget igazoltuk. Ezt felhasználva

$$\left( \frac{F}{G} \right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2} = \frac{F'G - FF'G/F}{G^2} = 0.$$

Innen következik, hogy az  $F/G$  függvény állandó. Mivel  $F(0) = G(0) = 1$ , azért a (12) azonosság  $\alpha = 0$  esetén valóban fennáll. A (12) a speciális esetet felhasználva közvetlenül igazolható:

$$B_a(e^{it}) = \frac{e^{it} - re^{i\alpha}}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i\alpha} \frac{e^{i(t-\alpha)} - r}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i(\alpha + \gamma_s(t-\alpha))} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.  $\square$

A  $B_a$  Blaschke-függvények mellett gyakran használjuk az

$$R_a(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z} \quad (a \in \mathbb{D}, z \in \bar{\mathbb{D}}) \quad (14)$$

racionális függvényeket, amelyek kifejezhetők a Blaschke-függvényekkel:

$$\sqrt{1-|a|^2}R_a(z) = \bar{a}B_a(z) + 1 \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D}).$$

Az  $R_a$  ( $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}, 0 \leq r < 1, -\pi \leq \alpha < \pi$ ) függvény a  $\mathbb{T}$  peremen előállítható

$$R_a(e^{it}) = R_r(e^{i(t-\alpha)}) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

alakban, továbbá az  $R_r$  polárkoordinátái kifejezhetők a  $P_r$  és  $\gamma_s$  függvényekkel:

$$R_r(e^{it}) = P_r^{1/2}(t)e^{i(\gamma_s(r)(t)-t)/2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (15)$$

Valóban

$$R_a(e^{it}) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-re^{i(t-\alpha)}} = R_r(e^{i(t-\alpha)}).$$

Az  $R_r$  függvény abszolút értékére

$$|R_r(e^{it})| = \frac{\sqrt{1-r^2}}{|1-re^{it}|} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-2r\cos t+r^2}} = P_r^{1/2}(t).$$

Mint hogy

$$\frac{R_r(e^{it})}{|R_r(e^{it})|} = \frac{1-re^{-it}}{1-re^{it}} = e^{-it}B_r(e^{it}) = e^{i(\gamma_s(r)(t)-t)},$$

azért

$$\arg(\mathbb{R}_r(e^{it})) = (\gamma_s(t) - t)/2,$$

következésképpen (15) valóban fennáll.

## 2.2. A BLASCHKE-CSOPORT

A

$$B_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D})$$

**Blaschke-függvények** az  $\mathbb{X} \in \{\mathbb{D}, \bar{\mathbb{D}}, \mathbb{T}\}$  halmazt kölcsönösen egyértelműen önmagára képezik, következésképpen ugyanez érvényes a Blaschke-függvények kompozíciójára (a belőlük alkotott közvetett függvényekre) is.

A Blaschke-függvények kompozíciója kivezet a Blaschke-függvények köréből, nevezetesen a  $B_{a_1} \circ B_{a_2}$  közvetett függvény  $\epsilon B_a$  alakú, ahol  $\epsilon \in \mathbb{T}$ ,  $a \in \mathbb{D}$ . Ennek alapján a Blaschke-függvények helyett célszerű a bővebb

$$\mathfrak{B} := \{B_a := \epsilon B_a : a := (a, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}\} \quad (16)$$

függvényosztályból kiindulni, amely már *zárt a függvénykompozíció műveletére*. Ezt a Függelék 2.3. Tételében igazoljuk, amelyre a továbbiakban F-T 2.3. alakban hivatkozunk.

$$\begin{aligned} B_{a_1} \circ B_{a_2} &= B_a \quad (a = (a, \epsilon), a_j = (a_j, \epsilon_j) \in \mathbb{B}, j = 1, 2), \\ a &= \bar{\epsilon}_2 \frac{a_1 + a_2 \epsilon_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 \bar{\epsilon}_2} = \bar{\epsilon}_2 B_{-\epsilon_2 a_2}(a_1), \quad \epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{1 + a_1 \bar{a}_2 \bar{\epsilon}_2}{1 + \bar{a}_1 a_2 \epsilon_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Nyilvánvaló, hogy a  $B \in \mathfrak{B}$  függvények szintén  $B : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  bijekciók, az  $a^{-1} := (-\epsilon a, \bar{\epsilon}) \in \mathbb{B}$  paraméternek a  $B_a$  *inverzfüggvénye*, az  $\epsilon := (0, 1) \in \mathbb{D}$  paraméternek az *identikus leképezés* felel meg:

$$B_{a^{-1}} = B_a^{-1} \quad (a^{-1} := (-\epsilon a, \bar{\epsilon})), \quad B_\epsilon(z) = z \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, \epsilon := (0, 1)). \quad (18)$$

Innen következik, hogy a  $\mathfrak{B}$ -beli függvények a  $\mathbb{X}$  halmazon (transzformáció-) csoportot alkotnak a  $\circ$  függvénykompozíció műveletével, amelyet a  $\mathbb{X}$  halmaz **Blaschke-csoportjának** nevezünk és a  $(\mathfrak{B}(\mathbb{X}), \circ)$  szimbólummal jelöljük. A  $\mathbb{B}$  paraméter tartományban (17) alapján bevezetve az  $a_1 \circ a_2 := a$  ( $a_1, a_2 \in \mathbb{B}$ ) csoportműveletet a *Blaschke-csoporttal izomorf*  $(\mathbb{B}, \circ)$  *csoportot kapunk*. Valóban a definíció alapján az  $a \rightarrow B_a$  leképezés homorfizmus a  $(\mathbb{B}, \circ)$  és  $(\mathfrak{B}(\mathbb{X}), \circ)$  csoportok között, amelynek magja az  $\{\epsilon\}$ . Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy

$$a \in \mathbb{B}, B_a(z) = z \quad (\forall z \in \mathbb{X}) \quad \Rightarrow \quad a = \epsilon.$$

(lásd F-T 2.4.)

A  $B_a : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  bijekciók mellett célszerű bevezetni az

$$\eta_a(z) := \frac{1 - z\bar{a}}{1 - \bar{z}a}, \quad \bar{\eta}_a(z) := \bar{\epsilon} \eta_a(z), \quad (a = (a, \epsilon) \in \mathbb{B}, z \in \bar{\mathbb{D}}) \quad (19)$$

leképezést. Nyilvánvaló, hogy az  $\eta_{\mathbf{a}}$  leképezés az  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazt a  $\mathbb{T}$ -be viszi, továbbá (17) és (18) alapján az  $\tau_{\mathbf{a}_2} : \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2^{-1}$  (jobb oldali) translációra

$$\tau_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1) := \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2^{-1} = (\mathbf{B}_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1), \epsilon_1 \eta_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1)) \quad (\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_j, \epsilon_j) \in \mathbb{T}, j = 1, 2).$$

A  $\tau_{\mathbf{a}_2}$  a  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoport egy (belső) homorfizmusa (egy ún. automorfizmusa):

$$\tau_{\mathbf{a}_1}(\tau_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a})) = \tau_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{a} \circ \mathbf{a}_2^{-1}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{a}_2^{-1}) \circ \mathbf{a}_1^{-1} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2)^{-1} = \tau_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}(\mathbf{a}).$$

Áttérve a koordinátákra a következő, fentivel ekvivalens azonosságot kapjuk:

$$\tau_{\mathbf{a}_1}(\tau_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a})) = (\mathbf{B}_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{B}_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a})), \epsilon \eta_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}) \eta_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{B}_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{a}))) = (\mathbf{B}_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}(\mathbf{a}), \epsilon \eta_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}(\mathbf{a})).$$

Az első koordináták egyenlősége a  $\mathbb{B}$  csoportműveletének értelmezését adja vissza, a második koordináták egyenlősége azt jelenti, hogy az  $\eta_{\mathbf{a}} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{T}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) függvénysereg a  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoport egy multiplier reprezentációja (lásd a 2.4. pontot).

A  $\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(z)$  függvény nem szimmetrikus az  $\mathbf{a}$  és  $z$  változóiban. Az  $\eta_{\mathbf{a}}$  leképezéssel a paraméterek cseréje leírható:

$$\overline{\mathbf{B}_z(\bar{\mathbf{a}})} = -\eta_{\mathbf{a}}(z) \mathbf{B}_{\mathbf{a}}(z) \quad (\mathbf{a}, z \in \mathbb{B}).$$

Valóban

$$\overline{\mathbf{B}_z(\bar{\mathbf{a}})} = \frac{\mathbf{a} - z}{1 - \bar{z}\mathbf{a}} = -\frac{1 - \bar{\mathbf{a}}z}{1 - \mathbf{a}\bar{z}} \frac{z - \mathbf{a}}{1 - \bar{\mathbf{a}}z} = -\eta_{\mathbf{a}}(z) \mathbf{B}_{\mathbf{a}}(z).$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel további hasznos összefüggéseket vezethetünk le. Például a

$$(\mathfrak{z}_1 \circ \mathbf{a}^{-1}) \circ (\mathfrak{z}_2 \circ \mathbf{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2^{-1} \quad (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathbf{a} \in \mathbb{B})$$

azonosságot a koordinátákra átírva (lásd F-T 2.5)

$$\mathbf{B}_{\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_1)}(\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_2)) = \bar{\eta}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_2) \mathbf{B}_{\mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z}_2), \quad \eta_{\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_1)}(\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_2)) = \bar{\eta}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_1) \bar{\eta}_{\mathbf{a}}(\mathfrak{z}_2) \eta_{\mathfrak{z}_1}(\mathfrak{z}_2) \quad (20)$$

adódik.

A  $\mathbb{B}$  két kitüntetett

$$\mathbb{B}_0 = \{(0, \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{T}\}, \quad \mathbb{B}_1 := \{(r, 1) : -1 < r < 1\} \quad (21)$$

részhalmaza a  $(\mathbb{T}, \cdot)$  multiplikatív csoporttal, ill. a  $(\mathbb{R}, +)$  additív csoporttal izomorf **részcsoport**. Ennek az állításnak az első része nyilvánvaló, a második rész, felhasználva a  $(-1, 1) \ni r \rightarrow s := \operatorname{arth} r \in \mathbb{R}$  bijekciót, (17) alapján a következőképpen adódik:

$$\mathbf{r}_1 \circ \mathbf{r}_2 = \frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2} = \frac{\operatorname{th} s_1 + \operatorname{th} s_2}{1 + \operatorname{th} s_1 \operatorname{th} s_2} = \operatorname{th}(s_1 + s_2) \quad (\mathbf{r}_j := (r_j, 1), s_j = \operatorname{arth} r_j).$$

A  $(\mathbb{B}_0, \circ)$  részcsoporthoz a  $\mathbb{T}$ , a  $(\mathbb{B}_1, \circ)$  részcsoporthoz az  $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 1\}$  intervallum invariáns halmaza. Ezek a részcsoporthoz generálják a  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoportot. Nevezetesen minden  $\mathbf{a} = (r\epsilon_1, \epsilon) \in \mathbb{B}$  ( $0 \leq r < 1, \epsilon_1, \epsilon \in \mathbb{T}$ ) elem felírható

$$\mathbf{a} = (0, \epsilon_1 \epsilon) \circ (r, 1) \circ (0, \bar{\epsilon}_1) \quad (22)$$

alakban.

A

$$\rho_0(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} = |B_{z_2}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}) \quad (23)$$

leképezés metrika a  $\mathbb{D}$  diszken, amelyet **pszeudohiperbolikus metrikának** nevezzük. A (20) formulából következik, hogy ez a metrika invariáns a  $\mathfrak{B}$ -beli leképezésekkel szemben (lásd még F-T 2.5.):

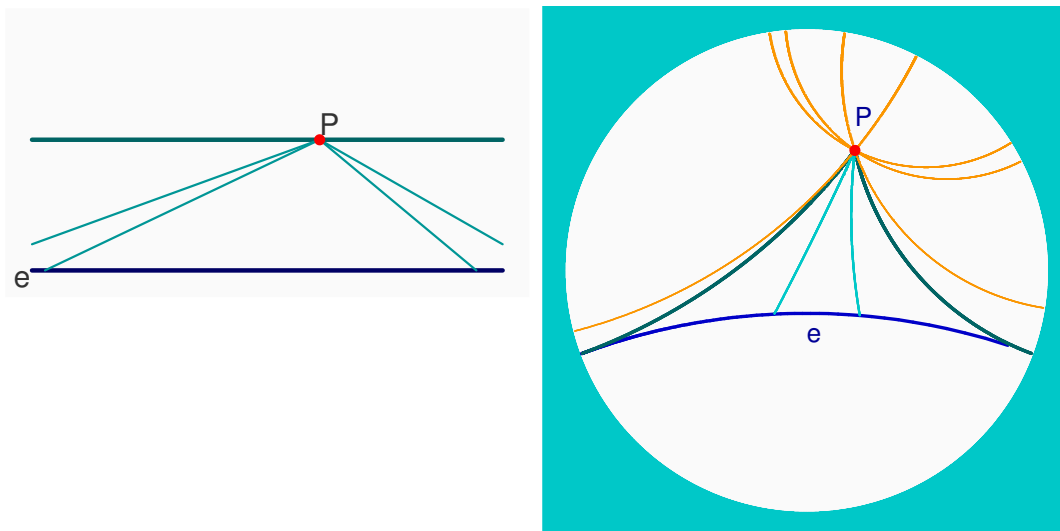
$$\rho_0(B_a(z_1), B_a(z_2)) = \rho_0(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, a \in \mathbb{B}). \quad (24)$$

A háromszög egyenlőtlenség ennek a tulajdonságnak és az (F-T 2.6.) egyenlőtlenség következménye (lásd F-T 2.7.) A  $\rho_0$  metrika mellett kitüntetett szerepet játszik a

$$\rho_1(z_1, z_2) := \text{ath}(\rho_0(z_1, z_2)) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

**hiperbolikus metrika** (lásd F-T 2.8.)

A Blaschke-csoport azonosítható a Bolyai-Lobacsevszkij geometria Poncaré-féle körmodelljében az egybevágósági transzformációk csoportjával. Ebben a geometriában az egyenesek  $\mathcal{L}$  osztálya az  $\mathbb{I}$  intervallumoknak a Blaschke-függvények által létesített képeivel azonosíthatók:  $\mathcal{L} := \{\mathcal{L}_a := B_a(\mathbb{I}) : a \in \mathbb{B}\}$ . Ezek egybeesnek a  $\mathbb{T}$  kört mérőlegesen metsző egyenesek és körök  $\mathbb{D}$ -be eső részeivel. A  $B_a(t)$  ( $t \in \mathbb{I}$ ) függvényt az  $\mathcal{L}_a$  egyenes egy paraméteres előállításának, a  $B_a(1), B_a(-1) \in \mathbb{T}$  pontokat a  $\mathcal{L}_a$  **egyenes végtelen távoli pontjainak** nevezzük.



*A hiperbolikus síkon nem érvényes a párhuzamossági axióma:  
a P ponton át végtelen sok e-t nem metsző egyenes húzható*

Mint ahogy bármely  $r \in \mathbb{I}$  valós számra  $B_r : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  bijekció, azért  $B_a$ -val együtt a  $B_a \circ B_r$  ( $r \in \mathbb{I}$ ) leképezések ugyanannak az egyenesnek a paraméterezései. Megmutatható, hogy ílymódon az  $\mathcal{L}_a$  valamennyi paraméteres előállítását megkaphatjuk. Az  $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{I}$  intervallum  $B_a(I)$  ( $a \in \mathbb{B}$ ) képeit **hiperbolikus szakaszoknak**, a  $z_j := B_a(t_j)$  ( $j = 1, 2$ ) pontokat a **hiperbolikus szakasz végpontjainak** nevezzük. Bebizonyítható, hogy a hiperbolikus metrikára vonatkozó

$$\rho_1(z_1, z_2) \leq \rho_1(z_1, z_3) + \rho_1(z_2, z_3) \quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D})$$

háromszögegyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $z_3$  a  $z_1, z_2$  pontokat összekötő hiperbolikus szakasz egy pontja. A szakasz végpontjainak hiperbolikus (ill. pszeudohiperbolikus) távolságát a szakasz hiperbolikus (ill. pszeudohiperbolikus) hosszának nevezzük. Speciálisan a  $\overline{z_1 z_2} = \overline{B_a(t_1) B_a(t_2)} \subset \mathbb{I}$  szakasz esetén a  $t = \text{th}(s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) transzformációt alkalmazva a szakasz hiperbolikus hosszára

$$\begin{aligned} \rho_1(z_1, z_2) &= \rho_1(t_1, t_2) = \\ &= \text{ath} \left( \frac{|t_1 - t_2|}{1 - t_1 t_2} \right) = \text{ath} \left( \frac{|\text{th}(s_1) - \text{th}(s_2)|}{1 - \text{th}(s_1) \text{th}(s_2)} \right) = \\ &= \text{ath}(|\text{th}(s_1 - s_2)|) = |\text{ath}(\text{th}(s_1 - s_2))| = |s_1 - s_2| \end{aligned}$$

adódik. Innen következik, hogy a szakasz hossza additív a  $\rho_1$  metrikára nézve. A  $B_a$  ( $a \in \mathbb{D}$ ) leképezések a hiperbolikus szakaszokat ugyanolyan hosszúságú szakaszba viszi. Ezeket a transzformációkat **hiperbolikus eltolásoknak** nevezzük. A  $z \rightarrow \epsilon z$  ( $\epsilon \in \mathbb{T}$ ) leképezéseknek mind az euklideszi, mind a hiperbolikus síkon origó körüli **forgatások** felelnek meg. Az euklideszi sík két eltolásának az eredője is eltolás. Ezzel ellentétben (17) alapján két *hiperbolikus eltolás szuperpozíciója egy origó körüli forgatással és egy eltolással helyettesíthető*:

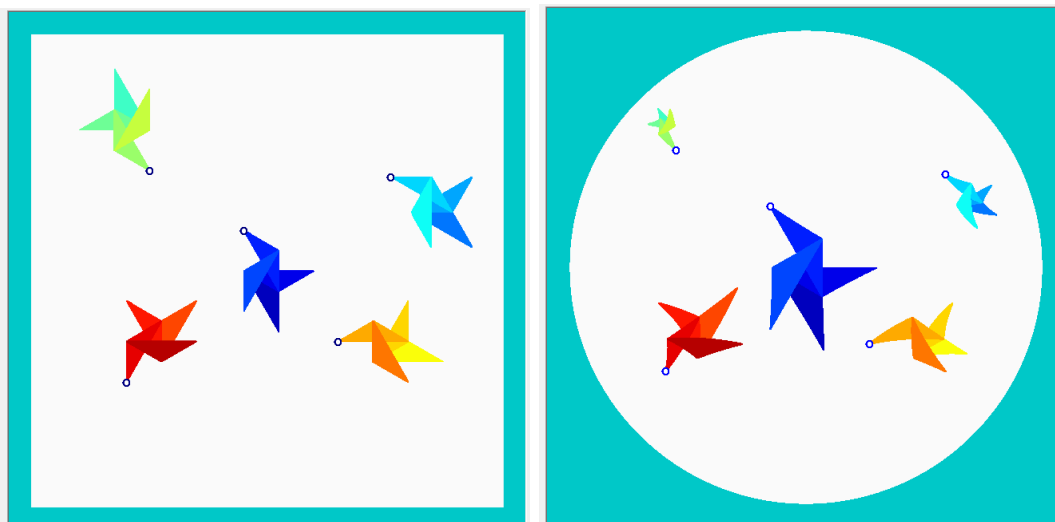
$$\begin{aligned} B_{a_1} \circ B_{a_2} &= \epsilon B_a, \quad a = \frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2} = B_{-a_2}(a_1), \\ \epsilon &= \eta_{-a_2}(a_1) = \frac{1 + a_1 \bar{a}_2}{1 + \bar{a}_1 a_2}. \end{aligned}$$

Ezzel összefüggésben vezették be a *gyro-műveletet*:

$$\text{gyr}[a_1, a_2] := \frac{1 + a_1 \bar{a}_2}{1 + \bar{a}_1 a_2} \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{D}).$$

A  $\mathbb{D}$ -beli elemekkel paraméterezett Blaschke függvények kompozícióját és a gyroműveletet alapul véve bevezették a gyrocsoport fogalmát [K], [30],[31],[32], amely kapcsolatba hozható a relativitáselmélettel. Ennek a bonyolult és mesterkéltnek tűnő algebrai struktúrájának a szerepét teljes egészében átveheti a  $(\mathbb{B} = \mathbb{D} \times \mathbb{T}, \circ)$  Blaschke-csoport, a gyroművelet pedig a  $\circ$  művelet második koordinátáját leíró  $\eta_a$  leképezéssel azonosítható. Ezen az alapon a [30], [31], [32] dolgozatokban levezetett összefüggések egyszerűen és természetesen módon adódnak.

Az euklideszi és hiperbolikus egybevágósági transzformációk összehasonlítására szolgál az alábbi ábra.



*Egybevágósági transzformációk az euklideszi és a hiperbolikus síkon*

Ebben a felfogásban a hiperbolikus geometriának egy könnyen kezelhető analitikus leírása adható, amely a modell grafikus szemléltetésére is nagyon jól használható. Az ezzel kapcsolatos elemi fogalmak és összefüggések ismertetésével, valamint ezek grafikus szemléltetésével röviden a hiperbolikus geometriáról szóló fejezetben foglalkozunk.

Az  $\mathbb{B} = \mathbb{D} \times \mathbb{T}$  paraméter tartományon bevezetve az euklideszi metrika által indukált szorzatmetrikát (17) és (18) alapján értelmezett  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a} \circ \mathbf{b}, \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^{-1}$  csoportműveletek folytonosak, következésképpen  $(\mathbb{B}, \circ)$  egy topológikus csoport.

A jegyzet fejezeteinek többségéhez VISUAL BASIC (VB) nyelven írt demonstrációs programok készültek. A programnyelv megválasztásánál, a szerző hiányos számítástechnikai esmeretein túlmenően, a VB kényelmes grafikai lehetőségei is szerepet játszottak. Ez a választás szükségessé tette komplex aritmetika bevezetését, kiegészítve komplex számok polárkoordinátás előállításával. A komplex számok leírására szolgáló *komplex* és *polár* típusok mellett használjuk a Blaschke-függvények leírására bevezetett *Blas* típust, és a csoportműveletekkel kapcsolatos alábbi rutinokat. Speciálisan  $\mathbf{ec} = \mathbf{1}, \mathbf{oc} = \mathbf{0}$  és  $\mathbf{eb}$  a Blaschke-csoport egységelemét jelöli. A *Bl* szubrutinnal a  $\mathbb{B}_b(z)$  ( $\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}, z \in \overline{\mathbb{D}}$ ) módosított Blaschke-függvények értékeit, a *Mult*( $w_1, w_2$ ) rutinnal a  $w_1, w_2 \in \mathbb{B}$  elemek  $w_1 \circ w_2 \in \mathbb{B}$  szorzatát, az *Inv*( $w$ ) szubrutinnal a  $w \in \mathbb{B}$  elem  $w^{-1} \in \mathbb{B}$  inverzét határozzuk meg.

### Public Type Komplex

Re As Single

Im As Single

### End Type

### Public Type Polar

Ro As Single

fi As Single

**End Type**

**Public Type Blas**

aa As Komplex

ep As Komplex

**End Type**

Global aa1 As Komplex

Global aa2 As Komplex

Global ec As Komplex

Global oc As Komplex

Global eb As Blas

Global ab As Blas

**Public Function Plr(z As Komplex) As Polar**

Plr.Ro = Sqr(z.Re<sup>2</sup> + z.Im<sup>2</sup>)

If Plr.Ro < 10<sup>-20</sup> Then

Plr.fi = 0

Else

If z.Re > 0 Then

If z.Im >= -10<sup>-15</sup> Then

Plr.fi = Atn((z.Im + 10<sup>-15</sup>)/z.Re)

Else

Plr.fi = Atn(z.Im/z.Re) + pi2

End If

ElseIf z.Re = 0 Then

If z.Im > 0 Then

Plr.fi = pi/2

ElseIf z.Im < 0 Then

Plr.fi = 3 \* pi/2

End If

Else

Plr.fi = Atn(z.Im/z.Re) + pi

End If

End If

**End Function**

**Public Function KO(n, a As Komplex, b As Komplex) As Komplex**

Dim w As Komplex

If n = 0 Then

w.Re = a.Re + b.Re : w.Im = a.Im + b.Im

ElseIf n = 1 Then

w.Re = a.Re - b.Re : w.Im = a.Im - b.Im

ElseIf n = 2 Then

w.Re = a.Re \* b.Re - a.Im \* b.Im : w.Im = a.Re \* b.Im + a.Im \* b.Re

ElseIf n = 3 Then

r = b.Re<sup>2</sup> + b.Im<sup>2</sup>



```

    If r > 0 Then
        w.Re = a.Re * b.Re + a.Im * b.Im :
        w.Im = -a.Re * b.Im + a.Im * b.Re :
        w.Re = w.Re/r : w.Im = w.Im/r
    End If
ElseIf n = 4 Then
    r = Plr(a).Rob.Re : fi = b.Re * Plr(a).fi
    w.Re = r * Cos(fi) : w.Im = r * Sin(fi)
ElseIf n = 5 Then
    w.Re = a.Re : w.Im = -a.Im
ElseIf n = 6 Then
    w.Re = -a.Re : w.Im = -a.Im
End If
KO = w
End Function

Public Function Bl(b As Blas, z As Komplex) As Komplex
    Dim w As Komplex
    w = KO(5, b.aa, oc)
    w = KO(1, ec, KO(2, w, z))
    w = KO(3, KO(1, z, b.aa), w)
    Bl = KO(2, w, b.ep)
End Function

Public Function Mult(w1 As Blas, w2 As Blas) As Blas
    Dim w As Komplex
    Dim z As Blas
    w = KO(5, w2.aa, oc)
    w = KO(6, w, oc)
    w = KO(2, w, w1.aa)
    z.aa = w
    z.ep = w1.ep
    Mult.ep = Bl(z, w2.ep)
    w = KO(5, w2.ep, oc)
    w = KO(2, w, w1.aa)
    z.aa = KO(6, w2.aa, oc)
    z.ep = ec
    Mult.aa = Bl(z, w)
End Function

Public Function Inv(w As Blas) As Blas
    Inv.ep = KO(5, w.ep, oc)
    Inv.aa = KO(6, KO(2, w.aa, w.ep), oc)
End Function

```

## 2.3. A BLASCHKE-CSOPORT A TÓRUSZON

Az előző pontban megmutattuk, hogy a  $\mathbb{T}$  tóruszt önmagára képező Blaschke-függvények  $\mathfrak{B}(\mathbb{T})$  osztálya csoportot alkot a függvénykompozíció műveletével. Ez a csoport izomorf az  $(\mathbb{B}, \circ)$  Blaschke-csoporttal. Ebben a pontban ennek a csoportnak a leírásával foglalkozunk, középpontba állítva a  $B_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  bijekció explicit előállítását.

Jelölje

$$\gamma_r(t) := \int_0^t P_r(s) ds, \quad P_r(s) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos s + r^2} \quad (-1 < r < 1, s, t \in \mathbb{R})$$

a Poisson-féle magfüggvény integrálfüggvényét. A  $2\pi$  szerint periódikus  $P_r$  függvény

$$P_r(s) = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 2r(1 - \cos t)} \geq 0, \quad P_{-r}(t) = P_r(t + \pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = 2\pi$$

tulajdonságaiból következik, hogy a folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növvő  $\gamma_r$  függvényre

$$\gamma_r(s + 2\pi) = \gamma_r(s) + 2\pi \quad (s \in \mathbb{R})$$

teljesül. A  $B_r$  Blaschke-függvény előállítható a  $\gamma_r$  függvénnyel (F-T 2.9, 2.10.):

$$B_r(e^{it}) = e^{i\gamma_r(t)} \quad (t \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1). \quad (25)$$

A  $\gamma_r$  függvény kifejezhető elemi függvényekkel (F-T 3.2.):

$$\begin{aligned} \gamma_r(t) &= 2atg(s(r)tg(t/2)) \quad (-\pi < t < \pi), \\ s(r) &:= (1 + r)/(1 - r), \quad -1 < r < 1, \end{aligned}$$

továbbá

$$\gamma_{-r} = \gamma_r^{-1} \quad (-1 < r < 1).$$

A

$$\begin{aligned} B_a(e^{it}) &= \frac{e^{it} - re^{i\alpha}}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i\alpha} \frac{e^{i(t-\alpha)} - r}{1 - re^{i(t-\alpha)}} = e^{i\alpha} B_r(e^{i(t-\alpha)}) \\ (\mathbf{a} = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (26)$$

azonosság alapján a  $B_a$  értékeinek kiszámítása visszavezethető a  $B_r$  ( $r \in \mathbb{I}$ ) értékeinek meghatározására. Ezt felhasználva a Blaschke-függvényekre a tóruszon a következő előállítás adódik:

$$\begin{aligned} B_a(e^{it}) &= \epsilon B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)}, \quad \beta_a(t) := \varphi + \alpha + \gamma_r(t - \alpha) \\ (\mathbf{a} = (re^{i\alpha}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{B}). \end{aligned}$$

A továbbiakban központi szerepet játszanak az  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoport elemeivel paraméterezett

$$(U_{\mathbf{a}^{-1}}f)(z) := \frac{\sqrt{\epsilon(1 - |\mathbf{a}|^2)}}{1 - \bar{\mathbf{a}}z} f(B_{\mathbf{a}}(z)) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}) \quad (27)$$

operátorok. Jelölje  $\mathcal{F}(\mathbb{X})$  a  $\mathbb{X} \in \{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{D}, \mathbb{T}\}$  halmazon értelmezett komplex értékű függvények,  $\mathcal{A}(\mathbb{X})$  a  $\mathbb{X}$  halmazon analitikus függvények lineáris terét. Nyilvánvaló, hogy az  $\mathbf{U}_a : \mathcal{F}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{X})$  ( $a \in \mathbb{B}$ ) leképezések lineáris operátorok, amelyek a  $\mathcal{A}(\mathbb{X})$  elemeit  $\mathcal{A}(\mathbb{X})$ -be viszik át.

Jelölje  $L^2(\mathbb{T})$  a tóruszon értelmezett, Lebesgue-mérhető és négyzetesen integrálható függvények terét. Az  $L^2(\mathbb{T})$ -tér Hilbert-tér az

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T}))$$

skaláris szorzattal és normával. Az  $e_n(z) := z^n$  ( $z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ ) hatványfüggvények, amelyek a tóruszon a komplex trigonometrikus rendszerrel azonosak, az  $L^2(\mathbb{T})$  tér egy ortonormált bázisát alkotják. Megmutatjuk, hogy minden  $a \in \mathbb{B}$  elemre  $\mathbf{U}_a : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  unitér operátor:

$$\|\mathbf{U}_{a^{-1}} f\| = \|f\| \quad (f \in L^2(\mathbb{T}), a \in \mathbb{B}). \quad (28)$$

Valóban egyszerűen belátható, hogy minden  $f \in L^2(\mathbb{T})$  függvényre  $\mathbf{U}_{a^{-1}} f$  mérhető. Minthogy  $a = (re^{i\alpha}, e^{i\varphi}) \in \mathbb{B}$  esetén (26) alapján

$$\begin{aligned} B_a(e^{it}) &= e^{i\beta_a(t)}, \quad \beta_a(t) = \varphi + \alpha + \gamma_r(t - \alpha), \\ \beta'_a(t) &= \gamma'_r(t - \alpha) = P_r(t - \alpha) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(t-\alpha)}|^2}, \end{aligned}$$

azért az integrálban az  $s = \beta_a(t)$  transzformációt alkalmazva

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_{a^{-1}} f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\mathbf{U}_{a^{-1}} f)(e^{it})|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(t-\alpha)}|^2} |f(e^{i\beta_a(t)})|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta'_a(t) |f(e^{i\beta_a(t)})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{is})|^2 ds = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy  $\mathbf{U}_a$  ( $a \in \mathbb{B}$ ) unitér operátorok az  $L^2(\mathbb{T})$  téren.

Jelölje  $H^2(\mathbb{T})$  az  $s = 2$  paraméternek megfelelő Hardy-teret a tóruszon. Ismeretes, hogy  $H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$  zárt altér, amelynek az  $e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) rendszer egy ortonormált bázisa. Ennek a bázisnak az  $\mathbf{U}_a$  operátor által létesített

$$L_m^a := \mathbf{U}_{a^{-1}} e_m \quad (m \in \mathbb{N}, a = (a, 1) \in \mathbb{B}) \quad (29)$$

képe, a **diszkrét Laguerre-rendszer**, fontos szerepet játszik rendszerek identifikációjában [D],[3],[4]. Az  $\mathbf{U}_a e_m \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$  függvények a  $\mathbb{T}$  halmazon a  $H^2(\mathbb{T})$  térhez tartoznak. Megmutatjuk (lásd az 5. Fejezetet), hogy az  $\mathbf{U}_{a^{-1}} e_m$  hatványsora

$$(\mathbf{U}_{a^{-1}} e_m)(z) := \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z} \left( \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_m^a(n) z^n \quad (z \in \overline{\mathbb{D}})$$

alakú, ahol az  $\ell_m^a$  együttható sorozat explicit előállításával és tulajdonságaival az 5. Fejezetben foglalkozunk. Innen következik, hogy a  $H^2(\mathbb{T})$  tér az  $U_a$  operátorok invariáns altere:

$$f \in H^2(\mathbb{T}), \mathbf{a} \in \mathbb{T} \Rightarrow U_a f \in H^2(\mathbb{T}).$$

## 2.4. A BLASCHKE-CSOPORT REPREZENTÁCIÓI

Ebben a pontban a Blaschke-csoport néhány reprezentációját fogjuk előállítani, a reprezentációk terének a  $\mathbb{X} \in \{\mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{I}\}$  téren értelmezett függvények bizonyos altereit választva. Legyen  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{X})$  az  $\mathbb{X}$  halmazon értelmezett komplex értékű függvényeknek egy Blaschke-transzformációkkal szemben invariáns altere, azaz tegyük fel, hogy minden  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$  függvényre,  $\lambda \in \mathbb{C}$  számra és minden  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$  Blaschke-függvényre  $f + g, \lambda f, f \circ B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$  teljesül. Jelölje  $\mathcal{GL}(\mathcal{F})$  a  $\mathcal{F}$  lineáris teret önmagára képező lineáris bijekcióinak osztályát. Ezek a leképezések csoportot alkotnak a függvénykompozíció (az operátorszorzás  $\cdot$ ) műveletére nézve, amelyet az  $\mathcal{F}$  általános lineáris csoportjának nevezünk. A

$$T_a f := f \circ B_a^{-1} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{B}, f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}))$$

lineáris operátorok kollekciónak a Blaschke-csoport *reguláris reprezentációjának* nevezük. Minthogy

$$\begin{aligned} T_{a_1}(T_{a_2} f) &= T_{a_1}(f \circ B_{a_2}^{-1}) = f \circ B_{a_2}^{-1} \circ B_{a_1}^{-1} = f \circ (B_{a_1} \circ B_{a_2})^{-1} = \\ &= f \circ B_{a_1 \circ a_2}^{-1} = T_{a_1 \circ a_2} f, \end{aligned}$$

azért az  $\mathbf{a} \rightarrow T_a$  leképezés homomorfizmus a  $(\mathbb{B}, \circ)$  és a  $(\mathcal{GL}(\mathcal{F}), \cdot)$  csoportok között, következésképpen  $T_e f = f$  ( $f \in \mathcal{F}$ ) és minden  $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$  elemre  $T_{\mathbf{a}^{-1}} = T_a^{-1}$ .

Amennyiben az  $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$  normált tér célszerű folytonos reprezentációkra szorítkozni. Akkor mondjuk, hogy a szóban forgó *reprezentáció folytonos*, ha a  $\mathbb{B} \ni \mathbf{a} \rightarrow T_a f \in \mathcal{F}$  leképezés a folytonos csoportról a lineáris normált térre minden  $f \in \mathcal{F}$  függvényre folytonos.

A továbbiakban a Blaschke-csoport unitér reprezentációit speciális  $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tereken vizsgáljuk. A számos fontos és érdekes eset közül itt most csak hármat említünk meg,  $\mathbb{X}$ -nek a  $\mathbb{T}, \mathbb{D}, \mathbb{I}$  halmazokat, Hilbert-tereknek az  $L^2$ -tereket, a  $H^2$  Hardy-tereket és a  $B^2$  Bergman-tereket választva.:

1.  $\mathcal{F}(\mathbb{T}) \in \{L^2(\mathbb{T}), H^2(\mathbb{T})\}$  (Lebesgue- és Hardy-tér a tóruszon)

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T})),$$

2.  $\mathcal{F}(\mathbb{D}) \in \{L^2_\sigma(\mathbb{D}), B^2_\sigma(\mathbb{D})\}$  (Lebesgue- és Bergman-tér a diszken)

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma(z) \quad (d\sigma(z) = dx dy, f, g \in L^2_\sigma(\mathbb{D})),$$

3.  $\mathcal{F}(\mathbb{I}) \in \{L^2(\mathbb{I}), H^2(\mathbb{I})\}$  (Lebesgue- és Hardy-tér a  $(-1,1)$  intervallumon)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt \quad (f, g \in L^2(\mathbb{I})).$$

További Blaschke-csoporttal kapcsolatos Hilbert-terek, mint pl. a súlyozott Bergman-terek, a [18], [22] dolgozatokban találhatók.

A  $T_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) reprezentációk folytonosak de nem unitér operátorok az említett Hilbert-terekben. Célszerű a reguláris reprezentációk mellett egy ezeknél tágabb osztályt, az ún. **multiplier reprezentációkat** bevezetni, amelyek egy  $F_{\mathbf{a}} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) függvénysereggel generálhatók  $F_{\mathbf{a}^{-1}}$ -gyel való szorzással:

$$M_{\mathbf{a}}f = F_{\mathbf{a}^{-1}} f \circ B_{\mathbf{a}}^{-1} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{B}). \quad (30)$$

Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{F}$  tér az  $M_{\mathbf{a}}$  operátornak invariáns altere és vizsgáljuk meg, milyen feltétel mellett lesz az  $M_{\mathbf{a}} \in \mathcal{GL}(\mathcal{F})$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) homorfizmus. Egyszerűen belátható, hogy ha az  $F_{\mathbf{a}} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) függvények analitikusak, akkor a fent említett Hilbert-terek mindegyike az  $M_{\mathbf{a}}$  operátorok invariáns altere, továbbá. a

$$M_{\mathbf{a}_1}(M_{\mathbf{a}_2}f) = M_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2}f \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{B}, f \in \mathcal{F}) \quad (31)$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az  $F_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) függvénysereg eleget tesz a következő multiplier feltételnek:

$$F_{\epsilon} = 1, \quad F_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2} = F_{\mathbf{a}_2} F_{\mathbf{a}_1} \circ B_{\mathbf{a}_2} \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{B}). \quad (32)$$

Egyszerű számolással adódik, hogy a  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon analitikus

$$F_{\mathbf{a}}(z) := \frac{\epsilon(1 - |\mathbf{a}|^2)}{(1 - \overline{\mathbf{a}}z)^2} = \frac{d}{dz} B_{\mathbf{a}}(z) \quad (\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}, z \in \overline{\mathbb{D}}) \quad (33)$$

függvénysereg kielégíti a multiplier feltételt az  $\mathbb{X} = \mathbb{D}$  esetben. Valóban a közvetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$F_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2} = B'_{\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2} = (B_{\mathbf{a}_1} \circ B_{\mathbf{a}_2})' = B'_{\mathbf{a}_2} B'_{\mathbf{a}_1} \circ B_{\mathbf{a}_2} = F_{\mathbf{a}_2} F_{\mathbf{a}_1} \circ B_{\mathbf{a}_2}.$$

Innen következik, hogy az  $F_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) függvénysereg az  $\mathbb{X} = \mathbb{D}, \mathbb{T}$  halmazon, az  $F_r$  ( $r \in \mathbb{I}$ ) függvénysereg az  $\mathbb{X} = \mathbb{I}$  halmazon kielégíti a multiplier feltételt, továbbá ezek hatványaira is teljesülnek a (33) feltételek. Bebizonyítható, hogy az

1.  $U_{\mathbf{a}}f := F_{\mathbf{a}^{-1}}^{1/2} f \circ B_{\mathbf{a}}^{-1}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}, f \in L^2(\mathbb{T})$ ) leképezés unitér reprezentáció az  $L^2(\mathbb{T})$  Hilbert-téren,

2.  $U_{\mathbf{a}}f := F_{\mathbf{a}^{-1}} f \circ B_{\mathbf{a}}^{-1}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}, f \in L^2_{\sigma}(\mathbb{D})$ ) leképezés unitér reprezentáció az  $L^2_{\sigma}(\mathbb{D})$  Hilbert-téren,

3.  $U_{\mathbf{a}}f := F_{\mathbf{a}^{-1}} f \circ B_{\mathbf{a}}^{-1}$  ( $\mathbf{a} = (r, 1), r \in \mathbb{I}, f \in L^2(\mathbb{I})$ ) leképezés unitér reprezentáció az  $L^2(\mathbb{I})$  Hilbert-téren.

A továbbiakban részletesen csak az 1. esettel foglalkozunk. A másik két esttel kapcsolatban a Függelékre utalunk. Az előző pontban vizsgált  $U_{\mathbf{a}}$  operátorok azonosak az 1. esetben felsoroltakkal. Az ott igazolt állításokat egybevetve a most mondottakkal azt kapjuk, hogy az  $U_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) operátorsereg a  $\mathbb{B}$  csoport egy-egy unitér

reprezentációja a  $H \in \{L^2(\mathbb{T}), H^2(\mathbb{T})\}$  Hilbert-tereken. A reprezentáció fogalmának szokásos értelmezését alapul véve ez a következőt jelenti:

- i)  $U_{\alpha_1 \circ \alpha_2} f = U_{\alpha_1}(U_{\alpha_2} f)$  ( $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{B}, f \in H$ ),
- ii)  $\|U_\alpha f\|_H = \|f\|_H$  ( $\alpha \in \mathbb{B}, f \in H$ ),
- iii)  $\mathbb{B} \ni \alpha \rightarrow U_\alpha f \in H$  minden  $f \in H$  függvényre folytonos.

A reprezentáció folytonosságát elegendő az  $\epsilon \in \mathbb{B}$  pontban igazolni. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy

$$\alpha_n \rightarrow \epsilon \ (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \|U_{\alpha_n} f - f\|_H \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \ (f \in H).$$

Mivel  $\|U_{\alpha_n}\| = 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), azért elég azt megmutatni, hogy a fenti limesz az  $e_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) zárt rendszeren teljesül. Egyszerűen igazolható, hogy

$$(U_{\alpha_n} e_m)(z) \rightarrow e_m(z) \ (z \in \mathbb{T}, m \rightarrow \infty), \ |(U_{\alpha_n} e_m)(z)| \leq c \ (|\alpha_n| \leq 1/2),$$

ahol  $c$  abszolút konstans. Ezt felhasználva a Lebesgue-tételt alkalmazva adódik az állítás.

## 2.5. BLASCHKE-SZORZATOK, BELSŐ FÜGGVÉNYEK

Az MT-rendszerek teljessége kapcsolatban van az

$$\mathbf{A}_0 := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbf{A} : \sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty \right\} \quad (34)$$

ún. **Blaschke-féle sorozatok** osztályával. Jelölje  $m := m_{\mathbf{a}}$  az  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_0$  sorozatban előforduló 0 tagok számát és minden ilyen sorozatra vezessük be a

$$B_{\mathbf{a}}(z) := z^{m_{\mathbf{a}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k \leq n, \alpha_k \neq 0} \left( \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} B_{\alpha_k}(z) \right) \ (z \in \mathbb{D}) \quad (35)$$

végtelen szorzatot. Ennek a konvergenciájával kapcsolatos a következő állítás (lásd [1] és [G] 8.1.Tétel):

**Blaschke-féle alaptétel.** Minden  $\mathbf{a} = (\alpha_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}_0$  sorozatra a (35) végtelen szorzat bármely  $K \subset \mathbb{D}$  kompakt halmazon egyenletesen konvergens. A  $B_{\mathbf{a}} \in H^\infty(\mathbb{D})$  függvényre  $|B_{\mathbf{a}}(e^{it})| = 1$  majdnem minden  $t \in [-\pi, \pi]$  pontban, továbbá a  $B_{\mathbf{a}}$  függvény zérushelyei az  $\alpha_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) számok azzal a multiplicitással, ahányszor az  $\mathbf{a}$  sorozatban előfordulnak.

A (34) feltétel kapcsolatban van analitikus függvények zérushelyeivel. Ismeretes, hogy  $A(\mathbb{D})$ -beli függvények zérushelyei a  $\mathbb{D}$  belsejében nem torlódhatnak. Ha az ennél szűkebb  $N(\mathbb{D})$  függvényosztályból indulunk ki, akkor a zérushelyek peremhez való tartásának a sebességére vonatkozóan érvényes a következő

**1. Állítás.** *Bármely  $F \in \mathbf{N}(\mathbb{D})$  függvény zérushelyeinek sorozatára  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_0$ . (lásd [G], 7.3. Tétel):*

Speciálisan minden  $\theta \neq F \in \mathbf{H}^p(\mathbb{D})$  esetén, kiindulva az  $F$  függvény zérushelyeiből képzett  $\mathbf{B}_a$  Blaschke-szorzatból, az  $F$  egy jól használható faktorizációja adódik [23].

**Riesz-féle faktorizációs tétel.** *Minden  $\theta \neq F \in \mathbf{H}^p(\mathbb{D})$  ( $0 < p \leq \infty$ ) függvény egy  $\mathbb{T}$ -beli faktortól eltekintve egyértelműen írható fel  $F = \mathbf{B}_a \mathbf{G}$  alakban, ahol  $\mathbf{B}_a$  az  $F$  függvény  $\mathbf{a}$  zérushelyeinek sorozata által generált Blaschke-szorzat, továbbá a  $\mathbf{G} \in \mathbf{H}^p(\mathbb{D})$  függvény nem tűnik el a  $\mathbb{D}$ -n és  $\|F\|_{\mathbf{H}^p} = \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{H}^p}$ .*

A  $\mathbf{H} \in \mathbf{H}^\infty(\mathbb{D})$  függvények közül azokat, amelyekre  $\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^\infty} = 1$  és  $|\mathbf{H}(z)| = 1$  m.m.  $z \in \mathbb{T}$  pontban, **belső függvényeknek** nevezzük. Minden  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_0$  sorozatra a  $\mathbf{B}_a$  Blaschke-szorzatok **belső függvények**. A **belső függvények** nemcsak az analitikus függvények között, hanem a rendszer- és irányításelméletben is kitüntetett szerepet játszanak. Jellemzésükkel kapcsolatban utalunk a [D] könyv 11. és 12. fejezetére.

# 3. FEJEZET

## HIPERBOLIKUS GEOMETRIA

A Blaschke-függvények nemcsak a Hardy-terek elméletében és az irányításelméletben játszanak fontos szerepet, hanem a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-féle diszk-modelljének (a PD-nek) az analitikus leírására is felhasználhatók.

### 3.1. A POINCARÉ-FÉLE DISZK-MODELL

A  $B_a$  ( $a \in \mathbb{D}$ ) leképezések a

$$\begin{aligned}\rho_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &:= |B_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{a}_2)| = \frac{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|}{|1 - \bar{\mathbf{a}}_1 \mathbf{a}_2|}, \\ \rho_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &:= \operatorname{ath} \rho_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{D})\end{aligned}$$

*kvázi-hiperbolikus, ill. hiperbolikus távolságot megtartják* és azonosíthatók a PD **eltolásaival**. A  $z \rightarrow \epsilon z$  ( $\epsilon \in \mathbb{T}, z \in \bar{\mathbb{D}}$ ) leképezés az origó körüli forgatásként interpretálható. Az  $\mathbb{R}^2$  sík két eltolásának szuperpozíciója egyetlen eltolással helyettesíthető. Ezzel szemben a

$$\begin{aligned}B_{\mathbf{a}_1}(B_{\mathbf{a}_2}(z)) &= \epsilon B_{\mathbf{a}}(z) \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{D}, z \in \bar{\mathbb{D}}) \\ \left( \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{1 + \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{a}}_2} \in \mathbb{D}, \quad \epsilon = \frac{1 + \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{a}}_2}{1 + \bar{\mathbf{a}}_1 \mathbf{a}_2} \in \mathbb{T} \right)\end{aligned}$$

azonosság úgy interpretálható, hogy a *hiperbolikus eltolások szuperpozíciója egy forgatás és egy hiperbolikus eltolás szorzataként állítható elő*. Ez a körülmény készítetett arra bennünket, hogy a Blaschke-függvények helyett a  $\bar{\mathbb{D}}$  halmazon értelmezett

$$\mathfrak{B} := \{B_{\mathbf{a}} := \epsilon B_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}\}$$

függvényosztályból induljunk ki. A  $\mathfrak{B}$  *függvényhalmaz már zárt a függvénykompozíció  $\circ$  műveletére nézve*, továbbá a  $\mathfrak{B}$ -beli függvények a  $\mathbb{X} \in \{\bar{\mathbb{D}}, \mathbb{D}, \mathbb{T}\}$  halmazokat kölcsönösen egyértelműen önmagukra képezik le. Innen következik, hogy a Blaschke-függvények **transzformáció csoportot** alkotnak az  $\mathbb{X}$  téren. A  $\mathbb{B}$  paraméter-tartományon bevezetve a  $\circ$  által indukált művelet a  $(\mathfrak{B}, \circ)$  **Blaschke-csoporttal** izomorf  $(\mathbb{B}, \circ)$  csoportot kapunk.



A

$$\rho_j(B_a(z_1), B_a(z_2)) = \rho_j(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, a \in \mathbb{B}, j = 0, 1)$$

tulajdonságot figyelembe véve az  $\mathbb{X} = \mathbb{D}$  esetben  $\mathfrak{B}$  azonosítható a PD egybevágósági transzformációinak csoportjával. Mivel

$$B'_a(z) = \frac{\epsilon(1 - |a|^2)}{(1 - \bar{a}z)^2} \neq 0 \quad (|z| \leq 1),$$

azért a  $B_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ( $a \in \mathbb{D}$ ) leképezés szögtartó. Valóban, legyen  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  egy folytonosan differenciálható függvény, amelyre  $\varphi'(t) \neq 0$ . A  $\varphi$  függvény értékkészlete egy  $\mathbb{D}$ -ben haladó, sima görbét reprezentál, továbbá a  $\varphi'(t)$  komplex szám ennek a görbének a  $z := \varphi(t)$  pontjában vont érintőjének egy irányvektora. Innen következik, hogy a szóban forgó görbe  $B_a$  által létesített

$$\phi(t) := B_a(\varphi(t)) \quad (t \in [-1, 1])$$

képének érintője, a

$$\phi'(t) := B'_a(z)\varphi'(t) \quad (z := \varphi(t))$$

differenciálási szabály szerint, az eredeti görbe érintőjéből a  $B'_a(z)$  komplex szám argumentumával való elforgatással adódik.

Ismeretes, hogy bármely  $\mathbb{C}$ -beli kör vagy egyenes lineáris törtfüggvény által létesített képe kör vagy egyenes. Speciálisan az

$$\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{D} : \Im z = 0\}$$

szakasz  $B_a$  által létesített képe egy origón átmenő egyenes szakasz vagy egy kör  $\mathbb{D}$ -be eső része. Mivel a  $B_a$  olyan szögtartó leképezés, amely a  $\mathbb{T}$ -t önmagába viszi és  $\mathbb{I}$  a  $\mathbb{T}$ -t merőlegesen metszi, azért a  $B_a(\mathbb{I})$  képek is merőlegesen metszik a  $\mathbb{T}$  peremet.

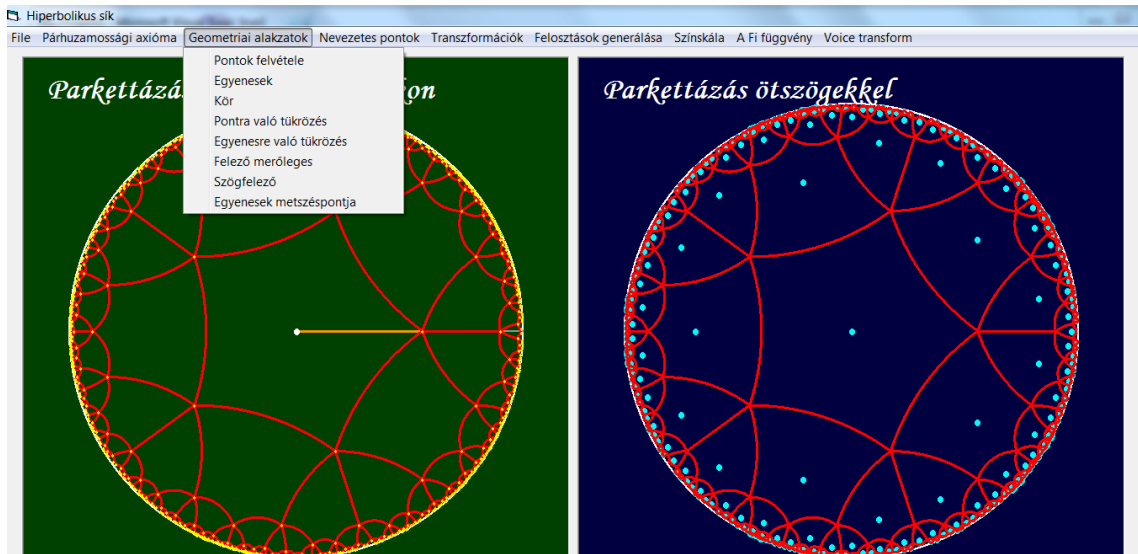
Az  $\mathbb{I}$  egyenes szakasz  $B_a$  által létesített

$$\mathcal{L}_a := \{B_a(z) : z \in \mathbb{I}\} \quad (a \in \mathbb{B})$$

képeket **hiperbolikus egyeneseknek**, az  $\mathbb{I}$  végpontjainak  $B_a(1), B_a(-1) \in \mathbb{T}$  képét az  $\mathcal{L}_a$  **végtelen távoli pontjainak** nevezzük. A mondottakkal összhangban bebizonyítható, hogy a hiperbolikus egyenesek azonosíthatók a  $\mathbb{T}$ -t merőlegesen metsző körök  $\mathbb{D}$ -be eső íveivel.

Jelöljük  $\mathfrak{L}$ -lel a PD egyeneseknek halmazát. A  $B_a$  leképezést az  $\mathcal{L}_a \in \mathfrak{L}$  egyenes paraméterezésének (paraméteres előállításának) nevezzük. Az  $\mathbb{B}_{\mathbb{I}} = \{(a, 1) : a \in \mathbb{I}\}$  halmaz a  $\mathbb{B}$  egy részcsoportja, amelynek megfelelő  $B_a$  leképezések a  $\mathbb{I}$ -t önmagára képezik. Innen adódik, hogy  $B_a$ -val együtt a  $B_a \circ B_{a_0} = B_{a \circ a_0}$  ( $a_0 \in \mathbb{B}_{\mathbb{I}}$ ) ugyanannak az egyenesnek egy másik paraméteres előállítása. Megmutatható, hogy az  $\mathcal{L}_a$  minden paraméterezése ilyen alakú. Ezzel a PD egyenesei és a  $\mathbb{B}$  csoport  $a \circ \mathbb{B}_{\mathbb{I}}$  jobb oldali mellékosztályai között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk.

A hiperbolikus geometria néhány fogalmának és összefüggésének a szemléltetésére készült a *HipGeom* nevű program, amelynek a menüpontjait az alábbi ábrán mutatjuk be.



A Hiperbolikus sík program

### 3.2. SZAKASZOK ÉRTELMEZÉSE ÉS HOSSZA

A szakasz és az egyenes értelmezésénél az alábbiakból indulunk ki.

**1.Állítás.** *Bármely két egymástól különböző  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  ponthoz egyetlen olyan  $\alpha = (\alpha, \epsilon) \in \mathbb{B}$  paraméter és  $p \in (0, 1)$  valós szám létezik, amelyre*

$$\text{i) } B_\alpha(0) = w_1, \quad \text{ii) } B_\alpha(p) = w_2. \quad (1)$$

*Nevezetesen legyen  $w := B_{w_1}(w_2)$ . Ekkor*

$$\text{i) } p = |w|, \quad \text{ii) } \epsilon = \frac{w}{|w|}, \quad \text{iii) } \alpha = -\bar{\epsilon}w_1. \quad (2)$$

**Bizonyítás.** Az (1) feltétel azzal ekvivalens, hogy  $-\epsilon\alpha = w_1$  s így (2) iii) valóban fennáll. Ezt figyelembe véve a (2) ii) feltétel átírható

$$\frac{\epsilon p - \epsilon\alpha}{1 - \bar{\epsilon}\alpha \epsilon p} = \frac{\epsilon p + w_1}{1 + \bar{w}_1 \epsilon p} = w_2$$

alakba. Ez ekvivalens az

$$\epsilon p = \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2} = B_{w_1}(w_2) = w$$

egyenlőséggel, ahonnan a (2) i), ii) állítások már következnek.  $\square$

A most igazolt állítás alapján értelmezhetjük a szakasz, a félegyenes és az egyenes fogalmát.

**Definíció.** Legyen  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}, w_1 \neq w_2$  két pont és jelölje  $\mathbf{a} \in \mathbb{B}, \mathbf{p} \in (0, 1)$  az ezekhez (2) alapján rendelt paramétereiket. A

$$\overrightarrow{w_1 w_2} := \{B_{\mathbf{a}}(t) : t \in [0, \mathbf{p}]\} \subset \mathbb{D} \quad (3)$$

halmazt a  $w_1, w_2$  pontokat összekötő szakasznak,  $w_1$ -et a szakasz kezdőpontjának,  $w_2$ -t a szakasz végpontjának nevezzük. A szóban forgó szakasz kezdő- és végpontjától különböző pontjait a szakasz belső pontjainak, az  $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$  elemet a szakasz  $B$ -paraméterének nevezzük.

Megmutatjuk, hogy a  $\rho_1$  hiperbolikus távolság szakaszokon additív.

**2. Állítás.** Legyen  $w_3$  a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakasz egy belső pontja. Ekkor

$$\rho_1(w_1, w_3) + \rho_1(w_3, w_2) = \rho_1(w_1, w_2). \quad (4)$$

**Bizonyítás.** A szakasz és a belső pont értelmezése szerint létezik olyan  $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$  paraméter, és olyan  $0 < s < \mathbf{p} := \rho_1(w_1, w_2)$  szám, hogy

$$B_{\mathbf{a}}(0) = w_1, \quad B_{\mathbf{a}}(s) = w_3, \quad B_{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) = w_2.$$

A hiperbolikus metrika tulajdonsága és definíciója alapján

$$\begin{aligned} \rho_1(w_1, w_3) &= \rho_1(0, s) = \operatorname{ath}(s), \quad \rho_1(w_1, w_2) = \rho_1(0, \mathbf{p}) = \operatorname{ath}(\mathbf{p}), \\ \rho_1(w_3, w_2) &= \rho_1(s, \mathbf{p}) = \operatorname{ath}\left(\frac{\mathbf{p} - s}{1 - \mathbf{p}s}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Innen következik, hogy (4) ekvivalens a

$$\operatorname{ath}\left(\frac{\mathbf{p} - s}{1 - \mathbf{p}s}\right) = \operatorname{ath}(\mathbf{p}) - \operatorname{ath}(s)$$

egyenlőséggel. Áttérve a  $\operatorname{th}$  függvényre ez az egyenlőség átírható a

$$\frac{\mathbf{p} - s}{1 - \mathbf{p}s} = \operatorname{th}(\operatorname{ath}(\mathbf{p}) - \operatorname{ath}(s))$$

ekvivalens alakra, amely a  $\operatorname{th}$ -ra vonatkozó

$$\operatorname{th}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{th}(\alpha) - \operatorname{th}(\beta)}{1 - \operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)}$$

azonosság alapján nyilván fennáll.  $\square$

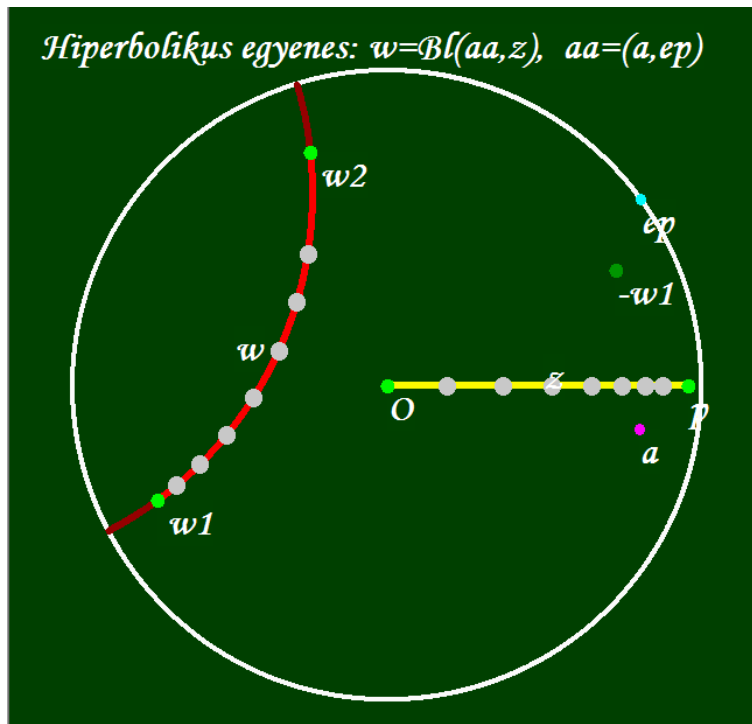
MEGJEGYZÉSEK.

1. A  $\rho_1$ -re vonatkozó háromszög egyenlőtlenségre tett megjegyzés alapján egyszerűen belátható, hogy érvényes a 2. Állítás következő megfordítása: Ha  $w_1, w_2, w_3$   $\mathbb{D}$ -beli pontokra fennáll a (4) egyenlőség, akkor  $w_3$  a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakasz belső pontja.

2. A  $\rho_0$  metrika nem additív. Legyen  $w_1 := -s, w_2 := s \in \mathbb{I}, w_3 = 0$ . Ekkor

$$\rho_0(w_1, w_2) = \frac{2s}{1-s^2} \neq 2s = \rho_0(w_1, w_3) + \rho_0(w_2, w_3).$$

3. Az alábbi ábrán a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  hiperbolikus szakaszt szemléltetjük, amely a  $[0, p] \subset \mathbb{I}$  szakasz  $B_a$  által létesített képe. Az  $\mathbf{a} = (a, \epsilon) \in \mathbb{P}$  paramétereket piros, ill. kék színű pontokkal szemléltetjük. A  $\overrightarrow{0p}$ , ill.  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakaszokon egy-egy egymásnak megfelelő hiperbolikus távolságban ekvidisztans pontrendszert is ábrázoltunk.



Hiperbolikus szakaszok

Az előzőek mintájára bevezethetjük a félegyenes és egyenes fogalmát.

**Definíció.** Legyen  $w_1, w_2$  a  $\mathbb{D}$  két egymástól különböző pontja és jelölje  $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$  a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakasz  $B$ -paraméterét. Ekkor a

$$\{B_a(t) : t \geq 0\} \quad \{B_a(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

halmazokat a  $w_1$ -ből induló,  $w_2$ -be mutató félegyenesnek, ill. a  $w_1, w_2$  pontokon áthaladó egyenesnek nevezzük. Az 1 és  $-1$  pontok  $B_a$  által létesített

$$B_a(1) = \epsilon \frac{1-a}{1-\bar{a}}, \quad B_a(-1) = -\epsilon \frac{1+a}{1+\bar{a}} \in \mathbb{T}$$

képeit a szóban forgó egyenes végtelen távoli pontjainak nevezzük.

Mivel

$$B'_a(z) = \epsilon \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \neq 0,$$

azért a  $B_a$  analitikus leképezés szögtaró.

Könnyen igazolható, hogy a  $\mathbb{D}$  az így bevezetett pont és egyenes definíciókkal eleget tesz az illeszkedési és rendezési axiómáknak (lásd [A], [H]).

A

$$B'_a(0) = \epsilon(1 - |a|^2)$$

formula alapján  $\epsilon$  a  $w_1$  pontban a  $\{B_a(t) : t \in \mathbb{I}\}$  euklideszi körív érintő egységvektora.

Az *EgyPar* szubrutinnal meghatározhatjuk a  $w_1, w_2$  pontjaival adott hiperbolikus egyenes  $a$  és  $p$  paraméterét.

**Public Sub EgyPar(w1 As Komplex, w2 As Komplex, a As Blas, p As Double)**

Dim w As Blas

Dim v As Komplex

Dim eps As Komplex

Dim fi As Double

w.aa = w1 : w.ep = ec

v = Bl(w, w2)

p = Plr(v).Ro

fi = Plr(v).fi

eps.Re = Cos(fi) : eps.Im = Sin(fi)

a.ep = eps

eps = KO(5, eps, oc)

eps = KO(6, eps, oc)

a.aa = KO(2, w1, eps)

**End Sub**

### 3.3. HIPERBOLIKUS KÖRÖK

A PD-modellben a hiperbolikus körök, a hiperbolikus egyenesekhez hasonlóan, leírhatók a Blaschke-függvények segítségével.

Mivel  $\rho_0(0, re^{it}) = r$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), azért az origó középpontú,  $r$  sugarú

$$\{z \in \mathbb{D} : |z| = r\} = \{re^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$$

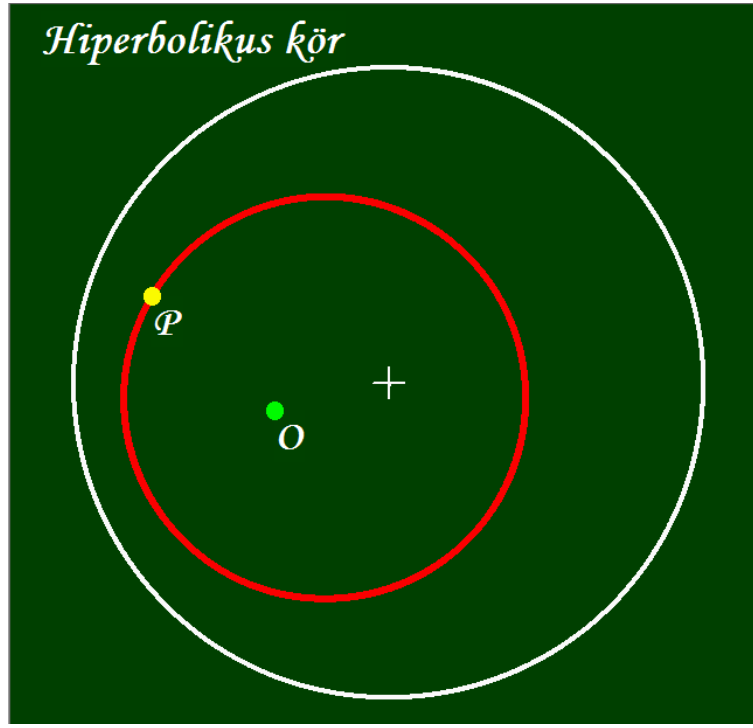
euklideszi kör egyben hiperbolikus kör is. A  $\varphi(t) := B_a(re^{it})$  ( $t \in [-\pi, \pi]$ ) görbe, amely euklideszi kör lineáris törzfüggvény által létesített képe, maga is euklideszi kör. Mivel a  $B_{-a}$  leképezés megtartja a pszeudohiperbolikus távolságot,  $B_{-a}(0) = a$ , továbbá  $B_a$  és  $B_{-a}$  egymás inverzei, azért  $\varphi(t)$ -nek az  $a \in \mathbb{D}$  ponttól mért pszeudohiperbolikus távolsága állandó, nevezetesen minden ( $t \in [-\pi, \pi]$ ) esetén

$$\rho_0(a, B_a(re^{it})) = \rho_0(B_{-a}(a), B_{-a}(B_a(re^{it}))) = \rho_0(0, re^{it}) = r.$$

Ennek alapján a szóban forgó görbét (euklideszi kört) **a középpontú, r sugarú hiperbolikus körnek** nevezzük és a

$$C_r(a) := \{B_a(re^{it}) : t \in [-\pi, \pi]\}$$

szimbólummal jelöljük. Amennyiben a hiperbolikus kör  $\mathfrak{a} = O$  középpontjával és valamely  $w = P$  pontjával adott, akkor  $r = \rho_0(\mathfrak{a}, w)$  alapján megkapjuk a hiperbolikus kör sugarát és paraméteres előállítását.



*Hiperbolikus körök*

### 3.4. SZAKASZOK FELEZÉSPONTJA, TÜKRÖZÉS EGYENESRE

Az alábbiakban megszerkesztjük az  $\overline{w_1 w_2}$  szakasz  $w_{1/2}$  felezéspontját. A  $\rho_1$  hiperbolikus metrika additivitása alapján a felezéspontra

$$\rho_1(w_1, w_{1/2}) = \frac{1}{2} \rho_1(w_1, w_2)$$

teljesül. Legyen a szóban forgó szakasz B-paramétere  $\mathfrak{a} \in \mathbb{T}$ . Ekkor a  $w_{1/2}$  pont  $B_{\mathfrak{a}}$  által létesített  $s$  ösképére

$$\text{ath}(s) = \rho(0, s) = \frac{1}{2} \rho(0, p) = \frac{1}{2} \text{ath}(p),$$

azaz

$$s = \text{th} \left( \frac{1}{2} \text{ath}(p) \right)$$

teljesül. Következésképpen

$$w_{1/2} = B_{\mathfrak{a}}(s).$$

Hasonló megfontolással adódik, hogy minden  $0 < \lambda < 1$  esetén a

$$w_\lambda = B_a(s_\lambda) \quad (s_\lambda = \text{th}(\lambda \text{ath}(p)))$$

a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakasznak az a pontja, amelyre

$$\rho(w_1, w_\lambda) = \lambda \rho(w_1, w_2)$$

teljesül. Az  $S_{tp}(t, p)$  függvénnyel a  $\lambda = t$  és  $p$  paramétereknek megfelelő  $s_\lambda$  értéket számíthatjuk ki.

**Public Function**  $S_{tp}(t \text{ As Double}, p \text{ As Double}) \text{ As Double}$

Dim s1 As Double

s1 = -0.5 \* Log((1 - p)/(1 + p))

s1 = 2 \* t \* s1

S<sub>tp</sub> = (Exp(s1) - 1)/(Exp(s1) + 1)

**End Function**

A hiperbolikus egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés leképezésének leírásához abból indulunk ki, hogy a valós tengelyre vonatkozó tükrözés a komplex konjugálásnak felel meg:

$$T_0(z) := \bar{z} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

**3. Állítás.** Legyen  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  két különböző pont és legyen  $a \in \mathbb{B}$  a  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  szakasz  $B$ -paramétere. Ekkor a

$$T := B_a \circ T_0 \circ B_a^{-1} \tag{6}$$

leképezés a  $w_1 w_2$  egyenesre vonatkozó tükrözést írja le.

**Bizonyítás.** Valóban, legyen  $w \in \mathbb{D}$ ,  $w' = T(w)$ ,  $z = B_a^{-1}(w)$  és jelölje  $z_f$  a  $z$  és  $z' = \bar{z}$  pontokat összekötő hiperbolikus egyenesnek a valós tengellyel alkotott metszéspontját. Ekkor

$$B_a(z) = w, \quad B_a(z') = B_a(T_0(B_a^{-1}(w))) = T(w) = w'.$$

Mivel a  $zz'$  hiperbolikus egyenes és a valós tengely egymásra merőlegesek, azért ezek  $B_a$  által létesített képei, azaz a  $w_1 w_2$  és  $ww'$  hiperbolikus egyenesek is merőlegesek egymásra. Mivel  $w_f := B_a(z_f)$  a szóban forgó egyenesek metszéspontja, és a  $\overrightarrow{zz'}$  szakasz felezéspontja, azért  $w_f$  a  $\overrightarrow{ww'}$  szakasznak felezéspontja.  $\square$

A  $w_1$  pont  $w_2$ -re vonatkozó  $w_3$  (hiperbolikus) tükörképét a  $PontTukor(w1, w2, w3)$  szubrutinnal számíthatjuk ki.

**Public Sub**  $PontTukor(w1 \text{ As Komplex}, w2 \text{ As Komplex}, w3 \text{ As Komplex})$

Dim a As Blas

Dim p As Double

Dim z As Komplex

Dim s As Double

CallEgyPar(w1, w2, a, p)

```

s = Stp(2, p)
z.Re = s : z.Im = 0
w3 = Bl(a, z)

```

**End Sub**

A  $w_1, w_2$  pontjaival adott egyenesre való (hiperbolikus) tükrözést az *EgyenesTukor*( $w_1, w_2, w, ww$ ) rutinnal valósítható meg, ahol  $ww$  a  $w$  tükörképét jelöli.

**Public Sub EgyenesTukor(w1 As Komplex, w2 As Komplex, w As Komplex, ww As Komplex)**

```

Dim a As Blas
Dim ai As Blas
Dim p As Double
Dim z As Komplex
CallEgyPar(w1, w2, a, p)
z = KO(2, a.aa, a.ep)
ai.aa = KO(6, z, ec)
ai.ep = KO(5, a.ep, ec)
z = Bl(ai, w)
z = KO(5, z, ec)
ww = Bl(a, z)

```

**End Sub**

A *FelezoPont*( $w_1, w_2, a, w, p$ ) rutinnal meghatározhatjuk a  $w_1 w_2$  hiperbolikus szakasz  $w$  felezőpontját és a szakasz  $a$  és  $p$  B-paramétereit.

**Public Sub FelezoPont(w1 As Komplex, w2 As Komplex, a As Blas, w As Komplex, p As Double)**

```

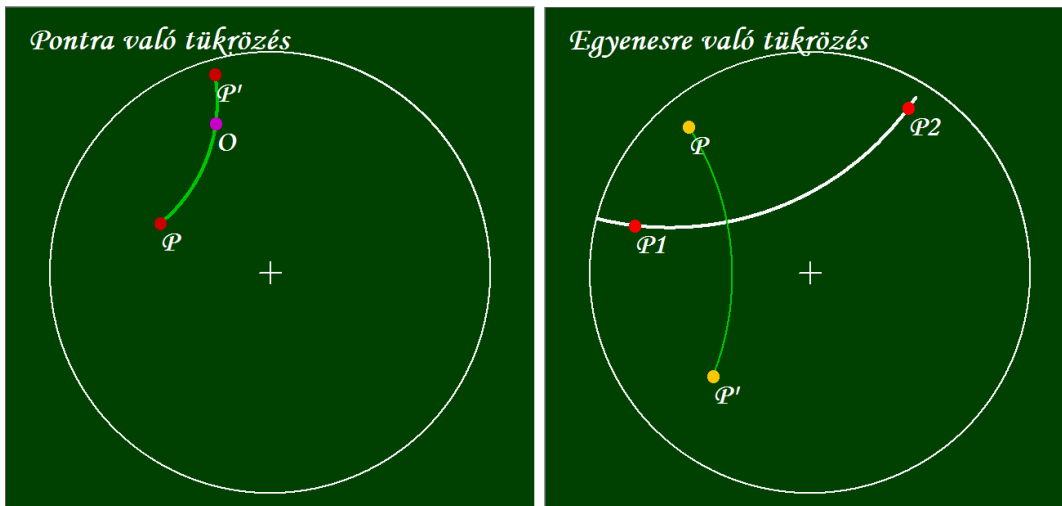
Dim a1 As Blas
Dim p1 As Double
Dim z As Komplex
CallEgyPar(w1, w2, a1, p1)
p = Stp(0.5, p1)
z.Re = p : z.Im = 0
w = Bl(a1, z)
CallEgyPar(w, w2, a, p)

```

**End Sub**



Ezek felhasználásával készültek az alábbi ábrák.



Tükrözés pontra és egyenesre

Szögek szögfelezője, szakaszok felezőmerőlegese hasonlóan értelmezhető mint az euklideszi geometriában.

A *SzogFelezo(w1,w2,w3,ww)* rutinnal a  $w_1w_2w_3$  hiperbolikus háromszög  $w_1$  csúcsából induló szögfelező  $w_1$ -től különböző  $ww$  pontját határozzuk meg.

**Public Sub SzogFelezo(w1 As Komplex, w2 As Komplex, w3 As Komplex, ww As Komplex)**

Dim a1 As Blas

Dim a2 As Blas

Dim p1 As Double

Dim p2 As Double

Dim w As Komplex

Dim z As Komplex

CallEgyPar(w1,w2,a1,p1)

CallEgyPar(w1,w3,a2,p2)

z.Re = p1 : z.Im = 0

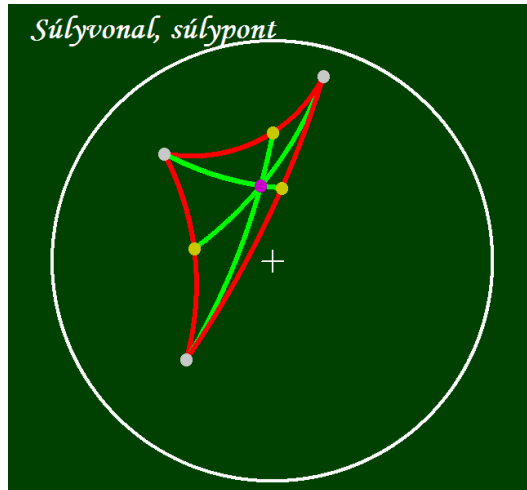
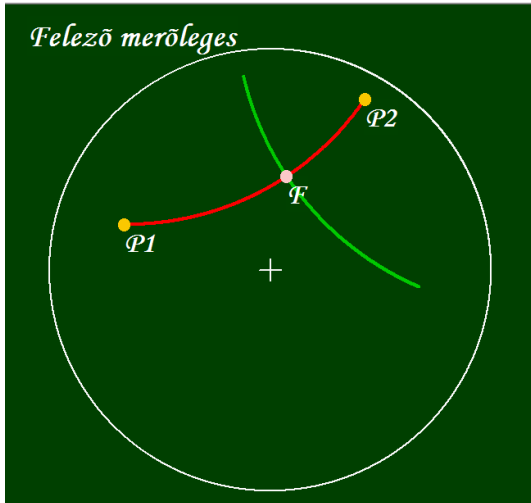
ww = Bl(a2,z)

CallEgyPar(w2,ww,a1,p1)

z.Re = Sp(0.5,p1) : z.Im = 0

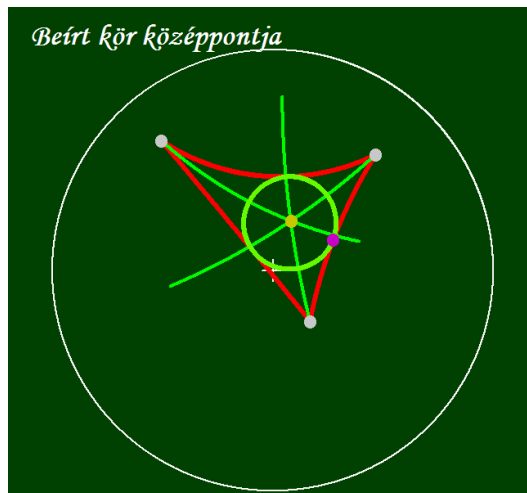
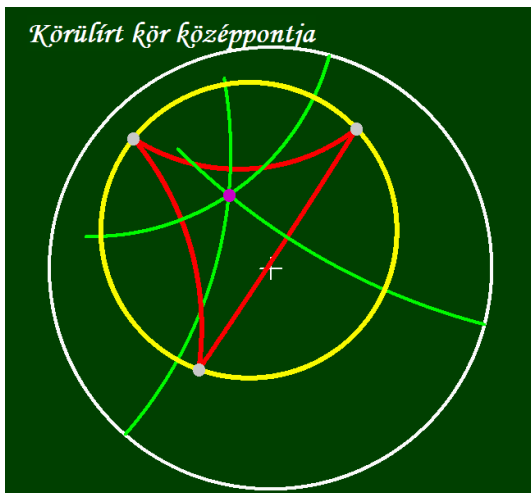
ww = Bl(a1,z)

**End Sub**



*Szakaszfelező merőleges, súlyvonal, súlypont*

Ezeket felhasználva bevezethetjük a háromszög súlypontjának, magasságpontjának, körülírt és beírt kör középpontjának a fogalmát.



*Körülírt kör, beírt kör középpontja*

### 3.5. EGYENESEK METSZÉSPONTJA

Ebben a pontban meghatározzuk a  $Z = z_1 z_2$ ,  $W = w_1 w_2$  egyenesek metszéspontját. Legyen  $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{B}$  a  $Z$ ,  $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{B}$  a  $W$  egyenes  $B$ -paramétere. A szóban forgó egyeneseknek a  $w \in \mathbb{D}$  pont akkor és csak akkor metszéspontja, ha létezik olyan  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  számpár, amelyre

$$B_{\mathbf{a}_1}(t_1) = B_{\mathbf{a}_2}(t_2), \text{ azaz } t_1 = B_{\mathbf{a}}(t_2)$$

$$(\mathbf{a} := \mathbf{a}_1^{-1} \circ \mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{D})$$

teljesül. Bevezetve az  $\mathbf{a} = r e^{i\alpha}$ ,  $\epsilon = e^{i\varphi}$  jelöléseket ez az egyenlet átírható

$$\mathbf{t}_1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \epsilon\mathbf{t}_2 - \epsilon\mathbf{a}$$

alakra. Bevezetve az  $s_j := r\mathbf{t}_j$  ( $j = 1, 2$ ) változókat azt kapjuk, hogy

$$s_1s_2 = e^{i\alpha}s_1 - e^{i(\alpha+\varphi)}s_2 + r^2e^{i(2\alpha+\varphi)}. \quad (7)$$

Áttérve a valós és képzetes részre a következő egyenletrendszeret kapjuk:

$$\begin{aligned} s_1s_2 &= s_1 \cos \alpha - s_2 \cos(\alpha + \varphi) + r^2 \cos(2\alpha + \varphi) \\ 0 &= s_1 \sin \alpha - s_2 \sin(\alpha + \varphi) + r^2 \sin(2\alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

A  $\sin \alpha \neq 0$  esetben szorozzuk meg az első egyenletet  $\sin \alpha$ -val majd a második egyenletből adódó

$$s_1 \sin \alpha = s_2 \sin(\alpha + \varphi) - r^2 \sin(2\alpha + \varphi)$$

kifejezést helyettesítsük az elsőbe. Ekkor

$$\begin{aligned} s_2(s_2 \sin(\alpha + \varphi) - r^2 \sin(2\alpha + \varphi)) &= \\ &= \cos \alpha(s_2 \sin(\alpha + \varphi) - r^2 \sin(2\alpha + \varphi)) - \sin \alpha(s_2 \cos(\alpha + \varphi) - \\ &- r^2 \cos(2\alpha + \varphi)) = \\ &= s_2 \sin \alpha - r^2 \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

Innen a

$$s_2^2 \sin(\alpha + \varphi) - s_2(\sin \alpha + r^2 \sin(2\alpha + \varphi)) + r^2 \sin(\alpha + \varphi) = 0$$

másodfokú egyenlet adódik.

Ekkor a  $\sin(\alpha + \varphi) \neq 0$  esetben a szóban forgó másodfokú egyenlet

$$s_2^2 - ps_2 + r^2 = 0 \quad \left( p = \frac{\sin \alpha + r^2 \sin(2\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \right)$$

alakú. Ha a diszkrimináns pozitív, akkor két valós gyök van, amelyek szorzata  $r^2$ . Következéskezképpen az egyik abszolút értéke  $r$ -nél kisebb, a másiké  $r$ -nél nagyobb. Innen következik, hogy ilyenkor egy olyan  $\mathbf{t}_2 = s_2/r$  szám létezik, amely megfelel a  $|\mathbf{t}_2| < 1$  feltételnek.

Ezek alapján készült a *MetszesPont*( $w1, w2, w3, w4, w$ ) szubrutin, amellyel a  $w1w2$  és  $w3w4$  egyenesek  $ww$  metszéspontját határozhatjuk meg. Az *OkPar* értéke a metszéspontok számáról nyújt felvilágosítást. Ha *OkPar* = 0, akkor a két egyenes metszi egymást, ha *OkPar* = 1, akkor a két egyenesnek nincs közös pontja, végül, ha *OkPar* = 2, akkor a két egyenes párhuzamos (a peremkörön metszik egymást.)

**Public Sub MetszesPont(w1 As Komplex, w2 As Komplex, w3 As Komplex, w4 As Komplex, ww As Komplex)**

```

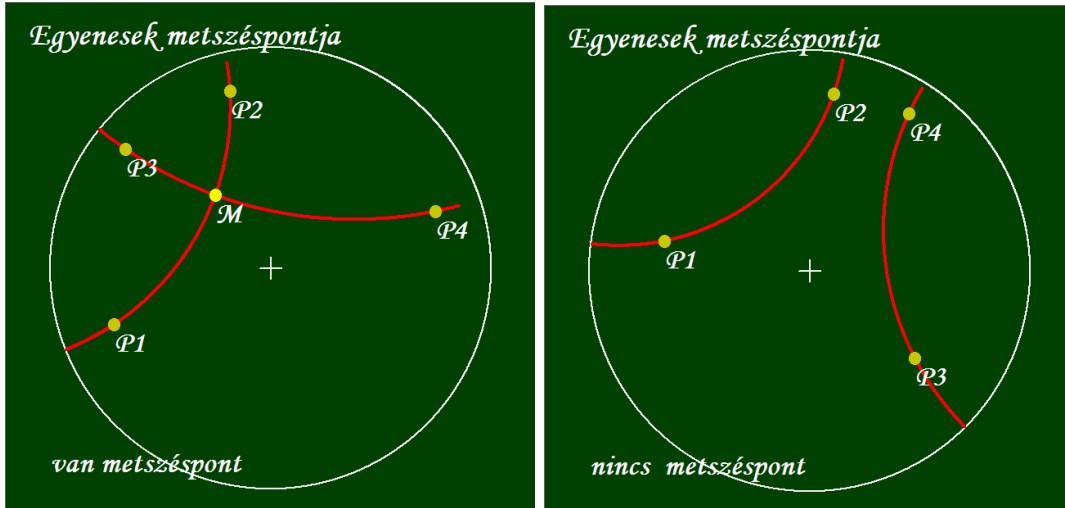
Dim a1 As Blas
Dim a2 As Blas
Dim a As Blas
Dim p1 As Double
Dim p2 As Double
Dim z As Komplex
Dim vfi As Double
Dim alfa As Double
Dim r As Double
CallEgyPar(w1, w2, a1, p1)
CallEgyPar(w3, w4, a2, p2)
a = Inv(a1)
a = Mult(a, a2)
vfi = Plr(a.ep).fi : alfa = Plr(a.aa).fi : r = Plr(a.aa).Ro
OkPar = 0
q = Sin(alfa + vfi)
If alfa = 0 Then
  If q <> 0 Then
    t2 = r
  Else
    OkPar = 1
  End If
ElseIf alfa = pi Then
  If q <> 0 Then
    t2 = r
  Else
    OkPar = -1
  End If
Else
  If q <> 0 Then
    p = (Sin(vfi) + r2 * Sin(2 * alfa + vfi))/q
    d = p2 - 4 * r2
    If d >= 0 Then
      d = Sqr(d)
      t21 = (p - d)/(2 * r) : t22 = (p + d)/(2 * r)
      If Abs(t21) > 1 Then
        t2 = t22
      ElseIf Abs(t21) < 1 Then
        t2 = t21
      Else
        t2 = t21
      OkPar = 2
    End If
  Else
    OkPar = 1
  End If

```

```

    End If
  Else
    t2 = 0
  End If
End If
If OkPar = 0 Or OkPar = 2 Then
  z.Re = t2 : z.Im = 0
  ww = Bl(a2, z)
End If
End Sub

```



*Hiperbolikus egyenesek metszéspontja*

### 3.6. A POINCARÉ-FÉLE FÉLSÍK-MODELL

A

$$z^\circ := C_y(z) := \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}_+)$$

Caley-féle leképezés  $z^\circ := C_y^{-1}(z)$  ( $z \in \mathbb{D}$ ) inverzét felhasználva a Poincaré-féle diszk-modellel (a PD-vel) kapcsolatban ismerttetett geometriai fogalmak és eredmények egyszerűen átvihetők a  $\mathbb{C}_+$  félsíkra. A **Poincaré-féle félsík-modellen** (a PS-modellben) a pontok a  $\mathbb{C}_+$ -beli pontokkal (a  $z^\circ$  ( $z \in \mathbb{D}$ ) komplex számokkal), az egyenesek a PD-beli  $\mathcal{L}_a$  ( $a \in \mathbb{B}$ ) egyenesek  $C_y^{-1}$  által létesített képeivel azonosíthatók:

$$\mathcal{L}^\circ := \{C_y^{-1}(\mathcal{L}_a) = \mathcal{L}_a^\circ : a \in \mathbb{B}\}.$$

Egyszerűen belátható, hogy a PS egyenesei a valós tengelyt merőlegesen metsző körök és egyenesek  $\mathbb{C}_+$ -ba eső részei. Ezek a  $\mathfrak{B}$  Blaschke-csoport PS-beli

$$\mathfrak{b} := \{\epsilon b_a : a \in \mathbb{C}_+, \epsilon \in \mathbb{T}\}$$

analogonjával is leírhatók. A

$$\rho_j^\circ(z_1, z_2) := \rho_j(z_1^\circ, z_2^\circ) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+)$$

utasítással bevezethetjük a hiperbolikus- és pszeudohiperbolikus metrikák analogonjait a PS modellben.

A *HipSik* programot kiegészítve a Caley-féle leképezéssel a PS modellezésére használható eljárásokat kapunk.

## 4. FEJEZET

# MALMQUIST–TAKENAKA RENDSZEREK

Ebben a fejezetben a  $H^2(\mathbb{D})$  Hilbert-térből kiindulva szerkesztünk racionális ortonormált rendszereket az

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt \quad (f, g \in H^2(\mathbb{D})) \quad (1)$$

skaláris szorzatot alapul véve. A továbbiakban gyakran felhasználjuk az alábbi **Cauchy-féle integrálformulát** [D]:

$$\frac{F^{(n)}(\mathbf{a})}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \mathbf{a})^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(e^{it}) e^{it} dt}{(e^{it} - \mathbf{a})^{n+1}}$$

$(n \in \mathbb{N}, \mathbf{a} \in \mathbb{D}, F \in H^1(\mathbb{D})).$

Legyen  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  és jelölje  $(m_n, n \in \mathbb{N})$  az  $\mathbf{a}$  multiplicitásainak sorozatát:

$$m_n := \sum_{\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_n, k \leq n} 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az MT-rendszereket az  $\mathbf{a}$  sorozattól függő, lineárisan független

$$q_{\mathbf{a}_n, m_n-1}(z) := \frac{z^{m_n-1}}{(1 - \bar{\mathbf{a}}_n z)^{m_n}} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, n \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

racionális függvényekből kiindulva szerkesztjük.

A  $q_{\mathbf{a}_n}$  függvénnyel való skaláris szorzás kifejezhető a differenciál-operátorokkal. Nevezetesen érvényes a következő állítás.

**1. Tétel.** *Tetszőleges  $f \in H^1(\mathbb{D})$  függvényre és  $n \in \mathbb{N}$  számra*

$$\langle f, q_{\mathbf{a}_n} \rangle = \frac{f^{(n)}(\mathbf{a})}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

**Bizonyítás.** Valóban a skaláris szorzat értelmezése szerint

$$\begin{aligned} \langle f, q_{\mathbf{a}_n} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) e^{-int}}{(1 - \mathbf{a} e^{-it})^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) e^{it}}{(e^{it} - \mathbf{a})^{n+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \mathbf{a})^{n+1}}. \end{aligned}$$

Innen, alkalmazva a Cauchy-féle alapformulát a (3) egyenlőséget kapjuk.  $\square$

## 4.1. MT-RENDSZEREK A DISZKEN

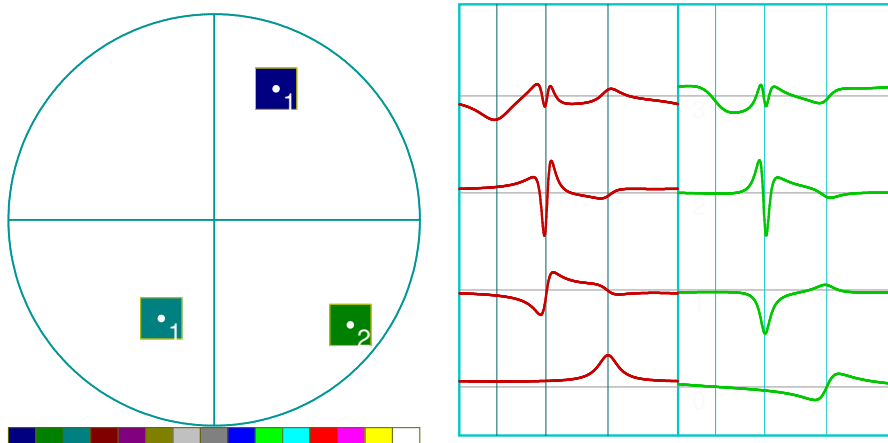
A  $(\mathbf{a}_{a_n, m_n-1}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  racionális függvényekből álló sorozatból kiindulva és a (1) skaláris szorzatot alapul véve a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással egy racionális függvényekből álló ortonormált rendszert szerkeszthetünk. Ez a rendszer, amely azonos a **Malmquist** és **Takenaka** által egymástól függetlenül bevezetett rendszerrel, kifejezhető az 2. fejezetben bevezetett  $B_a$  és  $R_a$  függvényekkel.

**Definíció.**  $A$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\mathbf{a}}(z) &:= \Phi_n(z) := \frac{\sqrt{1-|\mathbf{a}_n|^2}}{1-\bar{\mathbf{a}}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\mathbf{a}_k}{1-\bar{\mathbf{a}}_k z} = \\ &= R_{\mathbf{a}_n}(z) \prod_{k=0}^{n-1} B_{\mathbf{a}_k}(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (4)$$

*függvényrendszert az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  sorozat által generált **Malmquist-Takenaka-** (röviden: **MT**) **-rendszernek** nevezzük*

Az alábbi ábrán a jobb oldali ablakban az első 6 MT-függvény valós- és képzetes részét szemléltetjük a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon. A rendszert generáló pólusokat, multiplicitásukkal együtt, a bal oldali ablakon szemléltetjük. A pólusok sorrendjének szemléltetésére színskálát használtunk. A függőleges egyenesek a tengelyeket a pólusok argumentumainak megfelelő helyein metszik.



*A Malmquist-Takenaka-rendszer valós- és képzetes része*

Speciálisan az  $\mathbf{a}_n = 0$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) esetben a

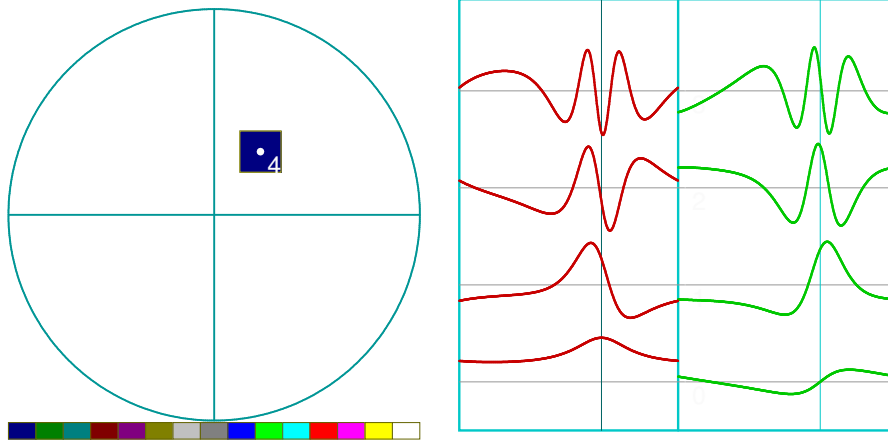
$$q_{0,\mathbf{n}}(z) = \Phi_{\mathbf{n}}(z) = z^{\mathbf{n}} \quad (z \in \mathbb{C}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$$

**hatványfüggvényeket** kapjuk. Az  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \in \mathbb{D}$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) speciális esetnek megfelelő

$$\Phi_n^{\mathbf{a}} := R_a B_a^n \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \quad (5)$$

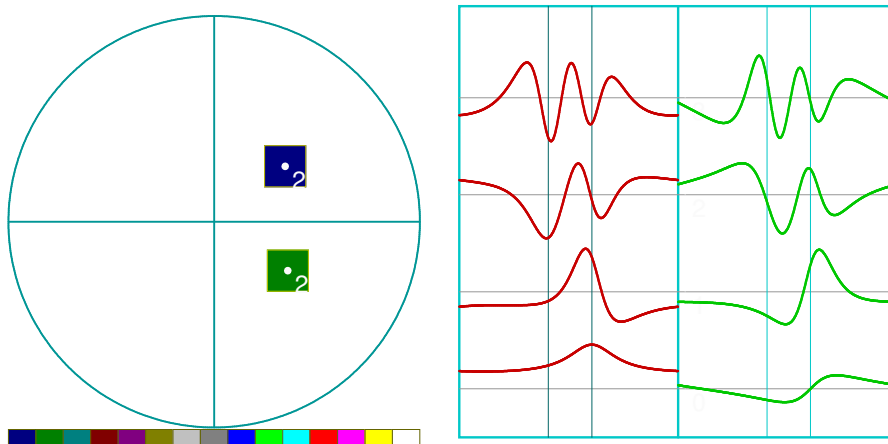


rendszer azonos a 2. fejezetben bevezetett **diszkrét Laguerre-rendszerrel**. Az elnevezéssel kapcsolatban az 5. fejezetre utalunk.



*A diszkrét Laguerre-rendszer valós- és képzetes része*

Az  $\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{D}$  paraméterek által generált  $\mathbf{a}_{2k} = \mathbf{a}, \mathbf{a}_{2k+1} = \bar{\mathbf{a}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sorozatnak megfelelő speciális MT-rendszert **Kautz** vezette be.



*A Kautz-rendszer valós- és képzetes része*

Az  $\ell \in \mathbb{N}^*$  szerint periódikus  $\mathbf{a}_{j+n\ell} := \mathbf{a}_j$  ( $0 \leq j < \ell, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) sorozat által generált rendszer **periódikus MT-rendszernek** nevezzük. Ilyenkor a rendszert az

$$\mathbf{a} := (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\ell-1}) \in \mathbb{D}^\ell$$

vektor generálja. Ezzel összhangban ebben a speciális esetben az alábbi jelöléseket ill. összefüggéseket fogjuk használni:

$$\mathbf{B}_\mathbf{a} := \prod_{i=0}^{\ell-1} \mathbf{B}_{\mathbf{a}_i}, \quad \Phi_\mathbf{k}^\mathbf{a} = \Phi_j^\mathbf{a} \mathbf{B}_\mathbf{a}^\mathbf{n} \quad (\mathbf{k} = \mathbf{j} + \ell \mathbf{n}, 0 \leq \mathbf{j} < \ell, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$$

Az MT-rendszerek ortonormáltak.

**2.Tétel.** *Bármely  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  sorozat esetén az MT-rendszer ortonormált a (1) skaláris szorzatra nézve:*

$$\langle \Phi_m^{\mathbf{a}}, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle = \delta_{mn} \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

**Bizonyítás.** Legyen  $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ . Minthogy  $z \in \mathbb{T}$  esetén  $|B_{a_j}(z)| = 1$ , azért

$$\langle \Phi_m^{\mathbf{a}}, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle = \langle FR_{a_m}, R_{a_n} \rangle,$$

ahol

$$F = \prod_{j=n}^{m-1} B_{a_j}, \quad \text{ha } \mathbf{n} < \mathbf{m}, \quad F = 1, \quad \text{ha } \mathbf{n} = \mathbf{m}.$$

Innen  $\mathbf{n} < \mathbf{m}$  esetén azt kapjuk, hogy  $F(\mathbf{a}_n) = 0$ , következésképpen (3) alapján  $\langle \Phi_n^{\mathbf{a}}, \Phi_m^{\mathbf{a}} \rangle = \sqrt{1 - |\mathbf{a}_n|^2} (FR_{a_m})(\mathbf{a}_n) = 0$ . Ha  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ , akkor

$$\langle \Phi_n^{\mathbf{a}}, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle = \sqrt{1 - |\mathbf{a}_n|^2} R_{a_n}(\mathbf{a}_n) = 1.$$

□

Könnyen igazolható, hogy

$$\text{span}\{\Phi_k^{\mathbf{a}} : 0 \leq k < n\} = \mathfrak{R}_n^{\mathbf{a}} := \text{span}\{q_{a_j, m_j-1} : 0 \leq j < n\}. \quad (7)$$

Innen következik, hogy az MT-rendszer 1 abszolút értékű faktoroktól eltekintve azonos a lineárisan független  $q_{a_j, m_j-1}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) rendszerből Schmidt-féle ortogonalizációval kapott rendszerrel.

Valóban, a racionális függvények parciális felbontására vonatkozó tétel alapján  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  felírható  $\Phi_k^{\mathbf{a}} = \sum_{j=0}^k \lambda_j q_{a_j, m_j-1}$  alakban, ahol  $\lambda_k \neq 0$ . Innen következik, hogy  $\Phi_k^{\mathbf{a}} \in \text{span}\{q_{a_j, m_j-1} : 0 \leq j \leq k\}$ , továbbá  $k$ -ra vonatkozó teljes indukcióval adódik a fordított irányú  $q_{a_k, m_k-1} \in \text{span}\{\Phi_j^{\mathbf{a}} : 0 \leq j \leq k\}$  reláció.

A 2.Tétel és a most idézett állítás következménye az alábbi

**3.Tétel.** *A  $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  MT-rendszer akkor és csak akkor teljes a  $H^2(\mathbb{D})$  Hilbert-téren, ha a generáló  $\mathbf{A}$ -beli sorozat nem Blaschke-sorozat, azaz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mathbf{a}_n|) = \infty. \quad (8)$$

**Bizonyítás.** Indirekt bizonyítást alkalmazva megmutatjuk, hogy a  $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  rendszer akkor és csak akkor nem teljes, ha teljesül a 2. fejezetben bevezetett

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\mathbf{a}_n|) < \infty$$

Blaschke-féle feltétel.

Valóban tegyük fel, hogy a rendszer nem teljes. Ekkor létezik olyan  $F \in H^2(\mathbb{D})$ ,  $F \neq \theta$  függvény, amelyre

$$\langle F, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle = 0 \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N})$$

teljesül. Innen (7) figyelembevételével adódik, hogy  $F$  ortogonális a  $\mathbf{q}_{\mathbf{a}_n, m_n}$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) függvényekre, következésképpen az 1.Tétel alapján  $\mathbf{a}_n$  az  $F$  függvénynek legalább  $m_n - 1$ -szeres gyöke. Ekkor a  $H^2(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}(\mathbb{D})$ -beli függvények zérushelyeire vonatkozó 2.5. pontbeli állítás szerint  $(\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  Blaschke-sorozat.

Megfordítva, most tegyük fel, hogy  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  Blaschke sorozat. Ekkor a 2.5. pontban idézett Blaschke-féle alaptételben bevezetett  $B_{\mathbf{a}} \in H^\infty(\mathbb{D})$  Blaschke-sorozat zérushelyei az  $\mathbf{a}_j$  számok, a multiplicitást is beszámítva. Innen (3) alapján azt kapjuk, hogy minden  $j \in \mathbb{N}$  index esetén  $\langle B_{\mathbf{a}}, \mathbf{q}_{\mathbf{a}_j, m_j-1} \rangle = B_{\mathbf{a}}^{(m_j-1)}(\mathbf{a}_j)/(m_j - 1)! = 0$ , következésképpen (7) alapján a  $B_{\mathbf{a}} \neq \theta$  függvény ortogonális a  $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  rendszer minden tagjára. Ezzel megmutattuk, hogy a szóban forgó rendszer nem teljes.  $\square$

## MÉGJEGYZÉS

1. A  $\mathbb{T}$ -n ortonormált MT-rendszerből egyszerű transzformációval olyan  $\mathfrak{R}$ -beli függvényekből álló rendszert szerkeszthetünk, amely az

$$r\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

körön ortogonális. Nevezetesen legyen

$$r\mathbf{a} := (r\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \quad (\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}).$$

Nyilvánvaló, hogy minden  $r \in [0, 1)$  számra a  $\mathbf{A} \ni \mathbf{a} \rightarrow r\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  leképezés bijekció, továbbá a

$$\Phi_{n,r}^{\mathbf{a}}(z) := \Phi_n^{r\mathbf{a}}\left(\frac{z}{r}\right) \quad (|z| \leq \frac{1}{r}, 0 < r \leq 1, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$$

racióális függvényeknek és a  $\Phi_n^{\mathbf{a}}$  függvényeknek ugyanazok a pólusai, s ezért ezek is a  $\mathfrak{R}$  függvényosztályba tartoznak. Az 1.Tételt az  $\mathbf{a}$  helyett az  $r\mathbf{a}$  sorozatra alkalmazva adódik a most bevezetett rendszer ortogonalitása az  $r\mathbb{T}$  körön:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{n,r}^{\mathbf{a}}(re^{it}) \overline{\Phi_{m,r}^{\mathbf{a}}(re^{it})} dt = \langle \Phi_n^{r\mathbf{a}}, \Phi_m^{r\mathbf{a}} \rangle = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

## 4.2. MT-RENDSZEREK A FELSŐ FÉLSÍKON

A diszkkal kapcsolatos eredmények a 2. fejezetben bevezetett

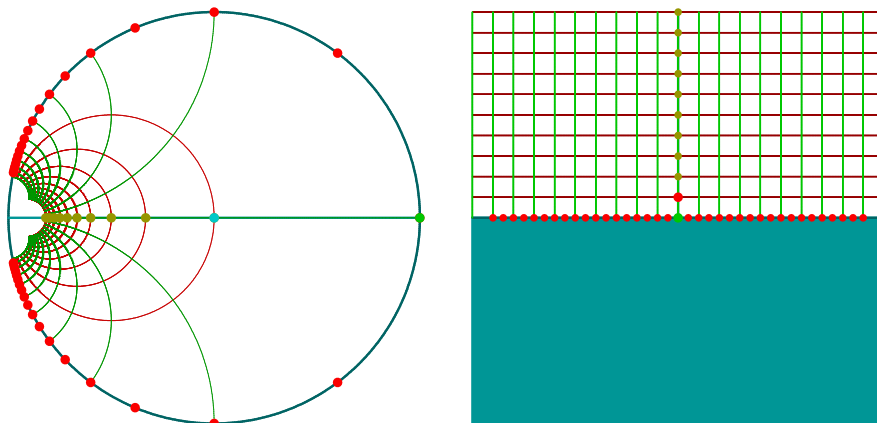
$$z^\circ := C_y(z) := \frac{i-z}{i+z}, \quad z^\bullet := C_y^{-1}(z) = i \frac{1-z}{1+z} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}) \quad (9)$$

Caley-transzformációkkal átvihetők a

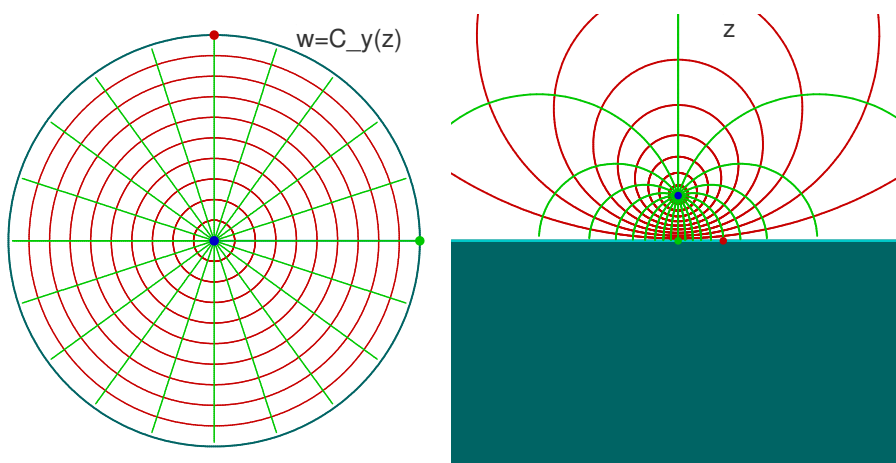
$$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$$

felső félsíkra, amely a számegegyenesen az alábbi függvénnyel írható le:

$$C_y(s) = e^{i2atg(s)} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (10)$$



Négyzetrács képe a Caley-féle leképezésben



Körrács inverzképe a Caley-féle leképezésben

Az  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  függvénynek a 2. fejezetben bevezetett

$$(If)(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{i+z} f(C_y(z)) \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}_+)$$

transzformációjával egy  $If : \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt rendelhetünk. A 2.1. pontban megmutattuk, hogy ez a leképezés izometria a  $H^2(\mathbb{D})$  és  $H^2(\mathbb{C}_+)$  Hilbert-terek között:

$$\|If\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} \quad (f \in H^2(\mathbb{D})).$$

Vezessük be a Blaschke-függvények

$$b_c(z) := \frac{z-c}{z-\bar{c}} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}_+, c \in \mathbb{C}_+)$$

és az MT-rendszerek

$$\phi_n^c(z) := \frac{\lambda_n}{z - \bar{c}_n} \prod_{j=0}^{n-1} b_{c_j}(z) \quad (c = (c_j, j \in \mathbb{N}) \in \mathbb{C}_+^{\mathbb{N}})$$

megfelelőit, ahol a  $\lambda_n$  állandókat a  $\|\phi_n^c\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} = 1$  normálási feltétel alapján határozzuk meg. Ez a feltétel  $|b_c(s)| = 1$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) és  $c_n := \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}_+$  figyelembevételével azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\lambda_n|^2} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{|s - \bar{c}_n|^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{(s - \alpha_n)^2 + \beta_n^2} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{s^2 + \beta_n^2} = \left[ \frac{1}{\beta_n} \operatorname{atg}(s/\beta_n) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\beta_n}. \end{aligned}$$

Ennek alapján

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{\Im c_n}}{\sqrt{\pi}}.$$

A  $b_c$  függvények az  $f \rightarrow f \circ C_y$  leképezéssel a  $B_{-a}(1) \in \mathbb{T}$  faktortól eltekintve a  $B_a$  Blaschke-függvényekből származtathatók, nevezetesen 2.1.(6) szerint

$$B_a(C_y(z)) = B_{-a}(1) b_{a^\bullet}(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{C}}_+, a \in \mathbb{D}),$$

továbbá minden  $a \in \mathbb{D}$  esetén

$$\begin{aligned} \frac{1}{i+z} r_a(C_y(z)) &= \frac{1}{(i+z) - \bar{a}(i-z)} = \\ &= \frac{1}{1+\bar{a}} \frac{1}{z + i(1-\bar{a})/(1+\bar{a})} = \frac{1}{1+\bar{a}} \frac{1}{z - \bar{a}^\bullet}. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a  $\Phi_n^a$  függvények az  $I : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}_+)$  által létesített képe a  $\phi_n^{a^\bullet}$  függvény számszorosa:

$$I(\Phi_n^a) = \nu_n \phi_n^{a^\bullet} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbf{A}).$$

Mivel a  $\Phi_n^a$  és ezzel együtt az  $I(\Phi_n^a)$  is normált, azért  $|\nu_n| = 1$ , következésképpen az  $(I(\Phi_n^a), n \in \mathbb{N})$  rendszerrel együtt a  $(\phi_n^{a^\bullet}, n \in \mathbb{N})$  rendszer is ortonormált a  $H^2(\mathbb{C}_+)$  téren:

$$\langle \phi_n^c, \phi_m^c \rangle := \int_{\mathbb{R}} \phi_n^c(s) \overline{\phi_m^c(s)} ds = \delta_{mn} \quad (c_n = a_n^\bullet, m, n \in \mathbb{N}).$$

Mivel az  $I$  leképezés izomorfizmus a  $H^2(\mathbb{D})$  és  $H^2(\mathbb{C}_+)$  terek között, következésképpen a  $(\phi_n^c, n \in \mathbb{N})$  rendszer akkor és csak akkor teljes, ha  $I$  szerint vett ősképe, a  $(\Phi_n^c, n \in \mathbb{N})$  rendszer is teljes, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |c_n^\bullet|) = \infty.$$

Egyszerűen bebizonyítható, hogy ez a feltétel a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Im c_n}{1 + |c_n|^2} = \infty \quad (11)$$

feltétellel ekvivalens.

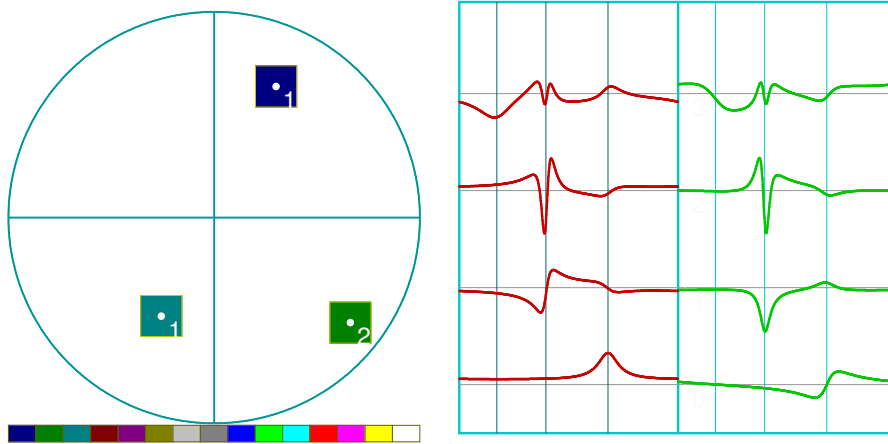
Összefoglalva az eddigieket a következőket igazoltuk:

**4. Tétel.** *Tetszőleges  $\mathbf{c} = (c_n \in \mathbb{C}_+, n \in \mathbb{N})$  sorozatra a*

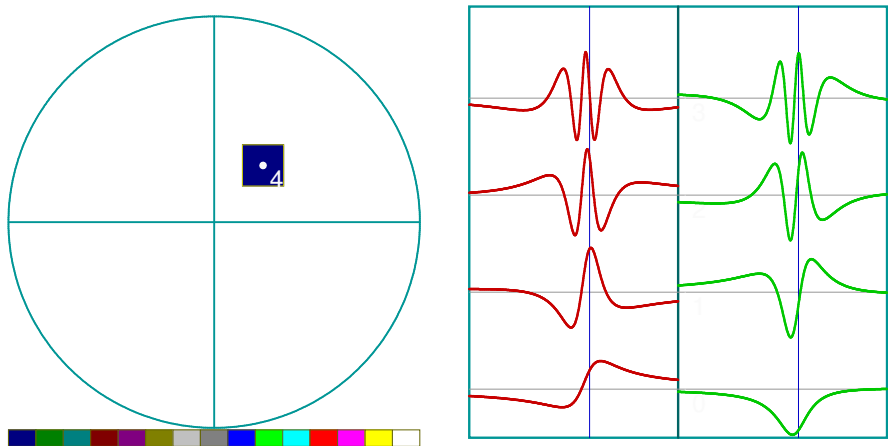
$$\Phi_n^c(z) := \frac{\sqrt{\Im c_n}}{\sqrt{\pi}(z - \bar{c}_n)} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{z - c_j}{z - \bar{c}_j} \quad (z \in \bar{\mathbb{C}}_+) \quad (12)$$

**felső félsíkon értelmezett MT-rendszer ortonormált a  $H^2(\mathbb{C}_+)$  téren.** *A rendszer akkor és csak akkor teljes, ha a  $\mathbf{c}$  sorozat kielégíti a (11) feltételt.*

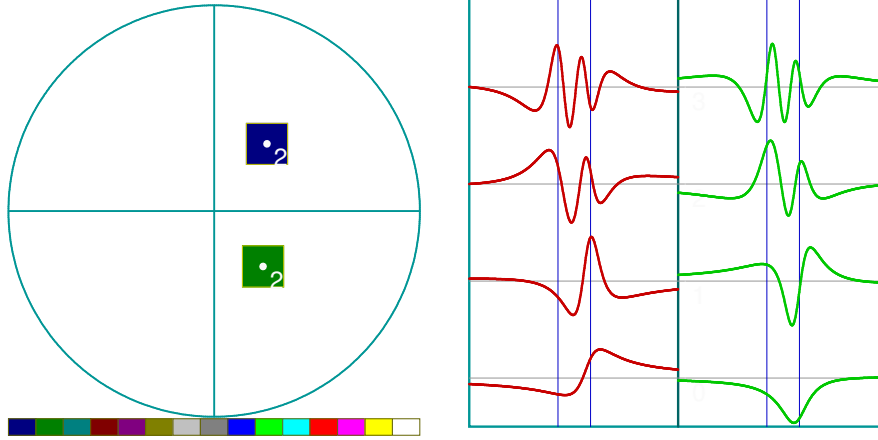
Az alábbi ábrákon a  $\Phi_n^a = I(\Phi_n^c)$  transzformáció alapján ábrázoltuk az  $\Phi_n^a$  függvényeket a számegyenes  $[-3, 3]$  intervallumán. Feltüntettük az  $\alpha_n/|\alpha_n| = e^{i\alpha_n} \in \mathbb{T}$  pontoknak megfelelő  $s_n := C_y^{-1}(e^{i\alpha_n}) = \text{tg}(\alpha_n/2)$  abszcisszákat.



*MT-rendszer a számegyenesen*



*Diszkrét Laguerre-rendszer a számegyenesen*



*Kautz-rendszer a számegyenesen*

### 4.3. MT-FOURIER SOROK, MAGFÜGGVÉNYEK

Ebben a pontban  $H^1(\mathbb{D})$ -beli függvények MT-rendszerek szerinti sorfejtésével foglalkozunk. A  $H^2(\mathbb{D})$  Hardy-tér teljes euklideszi tér az

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) \overline{G}(e^{it}) dt$$

skaláris szorzattal és az

$$\|F\| := \sqrt{\langle F, F \rangle} \quad (F, G \in H^2(\mathbb{D}))$$

indukált normával. Az

$$\widehat{F}_a(n) := \langle F, \Phi_n^a \rangle \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (13)$$

számokat az  $F$  **függvény MT-Fourier-együtthatóinak** nevezzük. Mivel  $\Phi_n^a \in H^\infty(\mathbb{D})$ , azért a (13) definícióban a szorzatintegrál a  $H^2(\mathbb{D})$ -nél tágabb  $H^1(\mathbb{D})$  tér  $F$  elemeire is létezik. Ezért a továbbiakban az MT-Fourier-együtthatók és MT-Fourier-sorok definíciójában a  $H^1(\mathbb{D})$  (a következő pontokban az  $L^1(\mathbb{T})$ ) függvényteret vesszük alapul. Az  $F$  függvény **MT-Fourier-sorának részletösszegeit** az

$$S_n^a F = \sum_{k=0}^{n-1} \langle F, \Phi_k^a \rangle \Phi_k^a \quad (F \in H^1(\mathbb{D}), n \in \mathbb{N}) \quad (14)$$

szimbólummal jelöljük. Az MT-Fourier sorfejtések részletösszegei a

$$K_n(z, \zeta) := K_n^a(z, \zeta) := \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^a(z) \overline{\Phi_k^a}(\zeta) \quad (n \in \mathbb{N}, z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}})$$

magfüggvényeket felhasználva integráloperátorként írhatók fel:

$$\begin{aligned}
(S_n^{\mathbf{a}}F)(z) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \langle F, \Phi_k^{\mathbf{a}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) \overline{\Phi_k^{\mathbf{a}}(e^{it})} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) K_n(z, e^{it}) dt.
\end{aligned} \tag{15}$$

A  $K_n$  magfüggvények egy jól használható explicit alakban állíthatók elő. A továbbiakban az  $\mathfrak{R}_m^{\mathbf{a}}$  alterek mellett az

$$\mathfrak{R}_{nm}^{\mathbf{a}} := \text{span}\{\Phi_k^{\mathbf{a}} : n \leq k < m\} \quad (0 \leq n < m)$$

altereket és az ezekhez tartozó

$$K_{nm}^{\mathbf{a}}(z, \zeta) := \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) \overline{\Phi_k^{\mathbf{a}}(\zeta)} \quad (z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}, n \leq m) \tag{16}$$

reprodukáló magokat is használni fogjuk. A reprodukáló magok a

$$\begin{aligned}
A_{nm}^{\mathbf{a}}(z) &:= A_{nm}(z) := \prod_{k=n}^{m-1} B_{a_k}(z), \quad A_m := A_{0m} \\
&(\mathbf{a} \in \mathbf{A}, z \in \overline{\mathbb{D}}, n < m)
\end{aligned}$$

Blaschke-szorzatok segítségével explicit alakban írhatók fel, ahol  $n = m$  esetén  $A_{nn} = A_0 := 1$ . Nyilván  $\mathfrak{R}_{0m}^{\mathbf{a}} = \mathfrak{R}_m^{\mathbf{a}}$ ,  $K_{0m} = K_m$ . Ehhez az MT-rendszerek  $\mathbf{A}$  paraméter tartományán bevezetjük a *shift operátort*:

$$\mathfrak{s}(\mathbf{a}) := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots) \quad (\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots) \in \mathbf{A}).$$

Nyilvánvaló, hogy az  $\mathfrak{s}$  hatványaira

$$\mathfrak{s}^k(\mathbf{a}) := (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots) \quad (k \in \mathbb{N}, \mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots) \in \mathbf{A})$$

teljesül. Az MT-rendszerek értelmezéséből azonnal következik az alábbi eltolási szabály:

$$\Phi_{n+k}^{\mathbf{a}} = A_n \Phi_k^{\mathfrak{s}^n(\mathbf{a})} \quad (n, k \in \mathbb{N}), \tag{17}$$

következésképpen

$$\mathfrak{R}_{nm}^{\mathbf{a}} = A_n \mathfrak{R}_{m-n}^{\mathfrak{s}^n(\mathbf{a})} \quad (0 \leq n < m).$$

Az  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  speciális esetben  $\mathfrak{s}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ ,  $\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) = z^n$  ( $z \in \overline{\mathbb{D}}, n \in \mathbb{N}$ ) a hatványfüggvények sorozata és (17) a

$$z^{n+k} = z^n z^k \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$$



azonossággal ekvivalens.

A reprodukáló magokra érvényes az alábbi

**5. Tétel.** Minden  $0 \leq n < m$  indexre

$$K_{nm}(z, \zeta) = A_n(z)\overline{A}_n(\zeta) \frac{A_{nm}(z)\overline{A}_{nm}(\zeta) - 1}{z\overline{\zeta} - 1} \quad (18)$$

$(z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}, z \neq \zeta, 0 \leq n < m).$

**Bizonyítás.** A (18) állítás (17) alapján visszavezethető az  $n = 0$  esetre. Ez utóbbi igazolásához felhasználjuk az

$$R_a(z)\overline{R}_a(\zeta) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{\zeta})} = \frac{B_a(z)\overline{B}_a(\zeta) - 1}{z\overline{\zeta} - 1} \quad (19)$$

$(z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}, z \neq \zeta, a \in \mathbb{D})$

azonosságot, amely egyszerűen igazolható. A (19) azonosság alapján nyilvánvaló, hogy a (18) állítás  $m = 1$ -re fennáll. Teljes indukciót alkalmazva tegyük fel, hogy (18)  $m$ -re teljesül. Ekkor felhasználva az indukciós feltételt és a (16) definíciót valamint a (19) azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K_{m+1}(z, \zeta) &= K_m(z, \zeta) + \Phi_m(z)\overline{\Phi}_m(\zeta) = \\ &= \frac{A_m(z)\overline{A}_m(\zeta) - 1}{z\overline{\zeta} - 1} + A_m(z)\overline{A}_m(\zeta)R_{a_m}(z)\overline{R}_{a_m}(\zeta) = \\ &= \frac{(A_m(z)\overline{A}_m(\zeta) - 1) + (A_{m+1}(z)\overline{A}_{m+1}(\zeta) - A_m(z)\overline{A}_m(\zeta))}{z\overline{\zeta} - 1} = \\ &= \frac{A_{m+1}(z)\overline{A}_{m+1}(\zeta) - 1}{z\overline{\zeta} - 1}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást  $(m + 1)$ -re is igazoltuk.  $\square$

A  $K_{nm}$  függvények  $z = \zeta = e^{it} \in \mathbb{T}$  esetén felírható a Poisson-féle magfüggvények segítségével:

$$K_{nm}(z, z) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k z|^2} = \sum_{k=n}^{m-1} P_{r_k}(t - \alpha_k) \quad (a_k = r_k e^{i\alpha_k}, z = e^{it}).$$

#### 4.4. VALÓS MT-RENDSZEREK

Ebben a pontban kibővítjük az MT-rendszereket,  $\mathbb{N}$  helyett az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmazát véve indexhalmaznak. Ismertes, hogy az  $e^{int}$  ( $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ ) komplex trigonometrikus rendszerrel együtt ennek valós és képzetes részeiből alkotott rendszer ortogonális és teljes az  $L^2(\mathbb{T})$  téren. Ebben a pontban ennek mintájára a  $\mathbb{T}$  tóruszon az MT-rendszereket negatív indexekre terjesztjük ki az alábbiak szerint:

$$\Phi_{-n}^{\mathbf{a}}(z) := \overline{\Phi_n^{\mathbf{a}}(z)} \quad (n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{T}). \quad (20)$$

Megmutatjuk, hogy ha az  $\mathbf{a}$  sorozat  $\mathbf{0}$ -nak választjuk, akkor a (20) szerint kiterjesztett rendszer ortonormált marad:

$$\langle \Phi_k^{\mathbf{a}}, \Phi_\ell^{\mathbf{a}} \rangle = \delta_{k\ell} \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}). \quad (21)$$

Innen már nyilvánvaló, hogy ebben az esetben az

$$\mathbf{U}_0^{\mathbf{a}} := 1, \mathbf{V}_0^{\mathbf{a}} := 0, \mathbf{U}_n^{\mathbf{a}} := \Re(\Phi_n^{\mathbf{a}}), \mathbf{V}_n^{\mathbf{a}} := \Im(\Phi_n^{\mathbf{a}}) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

rendszer is ortogonális és  $\langle \mathbf{U}_n^{\mathbf{a}}, \mathbf{U}_n^{\mathbf{a}} \rangle = \langle \mathbf{V}_n^{\mathbf{a}}, \mathbf{V}_n^{\mathbf{a}} \rangle = 1/2$ .

Ehhez felhasználjuk a trigonometrikus konjugált függvény néhány tulajdonságát. Az  $f \in L^2(\mathbb{T})$  függvény  $f^\sim$  trigonometrikus konjugáltját az  $f$  függvény

$$f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

trigonometrikus Fourier-sorából kiindulva az

$$f^\sim(e^{it}) := -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$$

sorral értelmezzük, ahol a fenti sorok  $L^2(\mathbb{T})$ -normában konvergensek. Ekkor az  $F := f + if^\sim$  függvény a  $H^2(\mathbb{T})$  térhez tartozik és trigonometrikus sorfejtése

$$F(e^{it}) := a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{int}$$

alakú. Ha az  $f$  függvény valós, akkor  $a_{-n} = \bar{a}_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) és ebben az esetben  $F$  az  $(\Im F = 0)$  feltételt kielégítő, egyértelműen meghatározott  $H^2(\mathbb{T})$ -beli függvény, amelynek valós részére  $\Re F = f$  teljesül.

A  $G \in H^2(\mathbb{T}), G(0) = 0$  feltételt kielégítő függvény és (algebrai) konjugáltjának

$$G(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{int}, \quad \bar{G}(e^{it}) := \overline{G(e^{it})} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n e^{-int},$$

valamint  $f$  és  $f^\sim$  trigonometrikus sorfejtését felhasználva valós  $f$  esetén a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}\langle f, G \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n, & \langle f, \bar{G} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n b_n, \\ \langle f^{\sim}, G \rangle &= -i \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n, & \langle f^{\sim}, \bar{G} \rangle &= i \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n b_n.\end{aligned}$$

Innen

$$\langle f, G \rangle = i \langle f^{\sim}, G \rangle, \quad \langle f, \bar{G} \rangle = -i \langle f^{\sim}, \bar{G} \rangle \quad (22)$$

következik. Ezeket felhasználva bebizonyítjuk a következő állítást.

**6.Tétel.** *Tegyük fel, hogy az  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  sorozat 0-adik tagjára  $a_0 = 0$  teljesül. Legyen*

$$\Phi_{-n}^{\mathbf{a}}(z) := \overline{\Phi_n^{\mathbf{a}}(z)} := \overline{\Phi_n^{\mathbf{a}}(z)} \quad (z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}^*).$$

*Ekkor  $\Phi_0^{\mathbf{a}} = 1$ , továbbá a  $\Phi_n^{\mathbf{a}} \in L^2(\mathbb{T})$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) rendszer ortonormált. Ha ezen túlmenően az  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  sorozatra teljesül a (8) feltétel, akkor  $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, n \in \mathbb{Z})$  teljes rendszer az  $L^2(\mathbb{T})$  téren.*

**Bizonyítás.** Minthogy

$$\langle \Phi_{-n}, \Phi_{-m} \rangle = \overline{\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle} = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

az ortonormáltsághoz elég megmutatni, hogy

$$\langle \Phi_n, \Phi_{-m} \rangle = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

Az  $a_0 = 0$  feltételből következik, hogy  $\Phi_n \overline{\Phi_{-m}}$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) felírható  $\Phi_n(z) \overline{\Phi_{-m}(z)} = zG(z)$  ( $z \in \mathbb{D}$ ) alakban, ahol  $G$  a  $\mathbb{D}$  halmazon analitikus függvény. Ezt felhasználva a Cauchy-féle alaptételből

$$\langle \Phi_n, \Phi_{-m} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} G(\zeta) d\zeta = 0$$

következik.

A teljesség igazolásához tegyük fel, hogy  $\langle f, \Phi_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Ekkor az  $f^{\sim}$  függvényre (22) alapján  $\langle f^{\sim}, \Phi_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), következésképpen az  $F = f + if^{\sim} \in H^2(\mathbb{T})$  függvényre  $\langle F, \Phi_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) teljesül. Innen a  $H^2(\mathbb{T})$ -re vonatkozó teljesség alapján  $F = \theta$ , ahonnan  $f = \theta$  következik.  $\square$

A továbbiakban kapcsolatot teremtünk a valós és a komplex MT-Fourier-együtthatók között. Felhasználva a (22) összefüggést

$$\langle f, \Phi_n \rangle = i \langle f^{\sim}, \Phi_n \rangle, \quad \langle f, \bar{\Phi}_n \rangle = -i \langle f^{\sim}, \bar{\Phi}_n \rangle$$

adódik, ahonnan

$$\langle f^{\sim}, U_0 \rangle = 0, \quad \langle f, U_n \rangle = \langle f^{\sim}, V_n \rangle, \quad \langle f, V_n \rangle = -\langle f^{\sim}, U_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

következik. Minthogy ennek alapján  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$  esetén

$$\begin{aligned}\langle F, \Phi_n \rangle &= \langle f + if^\sim, \mathbf{U}_n + i\mathbf{V}_n \rangle = \\ &= (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle + \langle f^\sim, \mathbf{V}_n \rangle + i(\langle f^\sim, \mathbf{U}_n \rangle - \langle f, \mathbf{V}_n \rangle)) = \\ &= 2(\langle f, \mathbf{U}_n \rangle - i\langle f, \mathbf{V}_n \rangle),\end{aligned}$$

azért

$$\begin{aligned}\langle F, \Phi_n \rangle \Phi_n &= 2(\langle f, \mathbf{U}_n \rangle - i\langle f, \mathbf{V}_n \rangle)(\mathbf{U}_n + i\mathbf{V}_n) = \\ &= 2(\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{U}_n + \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{V}_n) + i(\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{V}_n - \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{U}_n).\end{aligned}$$

Innen következik, az  $F = f + if^\sim \in H^2(\mathbb{D})$  függvénynek a komplex MT-rendszer szerint vett  $S_m F$  részletösszegei kifejezhetők az  $f$  függvénynek az  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) valós MT-rendszer szerinti  $s_m f$  részletösszegeivel:

$$\begin{aligned}\Re(S_m F) &:= \Re \left( \sum_{n=0}^{m-1} \langle F, \Phi_n \rangle \Phi_n \right) = \\ &= s_m f := \langle f, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0 + 2 \sum_{n=1}^{m-1} (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{U}_n + \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{V}_n).\end{aligned}$$

Az  $S_m F$  képzetes részére kifejezhető az  $f^\sim$  konjugált függvény valós részletösszegeivel:

$$\begin{aligned}\Im(S_m F) &= 2 \sum_{n=0}^{m-1} (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{V}_n - \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{U}_n) = \\ &= \langle f^\sim, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0 + 2 \sum_{n=0}^{m-1} (\langle f^\sim, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{U}_n + \langle f^\sim, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{V}_n) = s_m f^\sim.\end{aligned}$$

Mivel valós MT-rendszerek korlátos függvényekből állnak, azért az ezek szerint vett

$$\mathbf{u}_n := \langle f, \mathbf{U}_n \rangle, \quad \mathbf{v}_n := \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}), \quad \mathbf{w}_n := \langle f, \Phi_n \rangle \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$$

Fourier-együtthatók nemcsak  $L^2(\mathbb{T})$ -beli, hanem tetszőleges  $f \in L^1(\mathbb{T})$  függvényekre is értelmezhetők a fenti integrál formulával. Ezzel összhangban a következőkben  $L^1(\mathbb{T})$ -beli függvényeknek is tekinthetjük az MT-Fourier együtthatóit és MT-Fourier sorát.

A trigonometrikus Fourier analízisben szokásos szóhasználatot és jelölést követve az

$$f \sim \langle f, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{U}_n + \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{V}_n) \quad (23)$$

sort a valós  $f \in L^1(\mathbb{T})$  függvény MT-Fourier sorának, az

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{V}_n - \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{U}_n) \quad (24)$$

sort az  $f$  függvény konjugált MT-sorának nevezzük.

Ha  $f \in L^1(\mathbb{T})$  valós függvény, akkor a valós MT-FS részletösszegei a  $\zeta = e^{it}$  jelölést használva a  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  pontban felírhatók

$$\begin{aligned} (s_m f)(z) &= \langle f, \mathbf{U}_0 \rangle \mathbf{U}_0(z) + 2 \sum_{n=0}^{m-1} (\langle f, \mathbf{U}_n \rangle \mathbf{U}_n(z) + \langle f, \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{V}_n(z)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left( 1 + 2 \sum_{n=0}^{m-1} (\mathbf{U}_n(z) \mathbf{U}_n(\zeta) + \mathbf{V}_n(z) \mathbf{V}_n(\zeta)) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \mathbf{K}_m^R(z, \zeta) dt \end{aligned}$$

alakban, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m^R(z, \zeta) &:= 1 + 2 \sum_{n=0}^{m-1} (\mathbf{U}_n(z) \mathbf{U}_n(\zeta) + \mathbf{V}_n(z) \mathbf{V}_n(\zeta)) = \\ &= 1 + 2\Re \left( \sum_{n=0}^{m-1} \Phi_n(z) \overline{\Phi}_n(\zeta) \right) = 2\Re (\mathbf{K}_m(z, \zeta)) - 1. \end{aligned} \quad (25)$$

A  $\mathbf{K}_m^R$  magfüggvény is felírható zárt alakban. Valóban 2.1.(6) alapján

$$\mathbf{A}_m(e^{it}) \overline{\mathbf{A}}_m(e^{i\tau}) = e^{i(\theta_m(t) - \theta_m(\tau))} \quad (t, \tau \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\theta_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{a_k}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva (25) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m^R(e^{it}, e^{i\tau}) &= \Re \left( \frac{2e^{i(\theta_m(t) - \theta_m(\tau))} - e^{i(t-\tau)} - 1}{e^{i(t-\tau)} - 1} \right) = \\ &= \frac{\sin((\theta_m(t) - \theta_m(\tau)) - (t - \tau)/2)}{\sin((t - \tau)/2)} \end{aligned}$$

adódik.

Ezzel a következő állítást igazoltuk:

**7.Tétel.** A valós MT-rendszerek magfüggvényére  $t, \tau \in \mathbb{R}$  ( $t \neq \tau$ ) esetén érvényes a

$$\mathcal{K}_m^R(e^{it}, e^{i\tau}) = \frac{\sin((\eta_m(t) - \eta_m(\tau)))}{\sin((t - \tau)/2)} \quad (26)$$

formula, ahol

$$\eta_m(t) := \theta_m(t) - t/2.$$

Speciálisan az  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  esetben visszkapjuk a trigonometrikus rendszer Dirichlet-féle magfüggvényének ismert formuláját:

$$\mathcal{K}_m^R(e^{it}, e^{i\tau}) = \frac{\sin((2m - 1)(t - \tau)/2)}{\sin((t - \tau)/2)}.$$

A (8) teljességi feltétel fennállása esetén bármely  $f \in L^2(\mathbb{T})$  függvény (23) valós MT-Fourier sora  $\|\cdot\|_2$ -normában előállítja a függvényt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m f - f\|_2 = 0.$$

Ebben az esetben az  $f$  (24) konjugált MT-sora is konvergens  $L^2(\mathbb{T})$  normában. Az  $\tilde{f}$ -mal jelölt összegfüggvény az  $f$  függvény trigonometrikus konjugáltjával egyenlő, továbbá az  $f + i\tilde{f}$  függvény egy  $H^2(\mathbb{D})$ -beli függvény peremfüggvénye. Ebből a kapcsolatból kiindulva más osztályokhoz tartozó függvények esetén is előállíthatjuk a konjugált függvényt.

A bemutatott példák mindegyikében olyan  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  sorazokra szorítkozunk, amelyekre  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$  teljesül. Ilyenkor  $\Phi_0^{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$  és a negatív indexekre  $\Phi_{-n}^{\mathbf{a}} := \overline{\Phi_n^{\mathbf{a}}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) szerint kiterjesztett rendszer ortonormált marad az  $L^2(\mathbb{T})$  téren. Ha az  $\mathbf{a}$  sorozat kielégíti a (11) feltételt, akkor a rendszer teljes és a tér bármely eleme jellemezhető e rendszer szerinti

$$\mathbf{c}_n(f) := \langle f, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle \quad (f \in L^2(\mathbb{T}), n \in \mathbb{Z})$$

MT-Fourier-együtthatóival, tovább  $\mathbf{c}_{-n}(f) = \overline{\mathbf{c}_n(f)}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Az  $f$  függvény rekonstruálható a MT-Fourier-együtthatóiból, nevezetesen az  $f$  MT-Fourier-sorának

$$s_n^{\mathbf{a}} f := \sum_{k=-n}^n \mathbf{c}_k(f) \Phi_k^{\mathbf{a}}$$

részletösszegei az  $L^2(\mathbb{T})$   $\|\cdot\|_2$  normájában tartanak  $f$ -hez, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ezen túlmenően a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  ( $|k| \leq n$  lineáris kombinációi közül  $s_n^{\mathbf{a}} f$  közelíti a legjobban az  $f$  függvényt a tér normájában. Ez indokolja, hogy a jeleket (függvényeket) MT-sorfejtések részletösszegeivel approximáljuk. A közelítés mértékét a

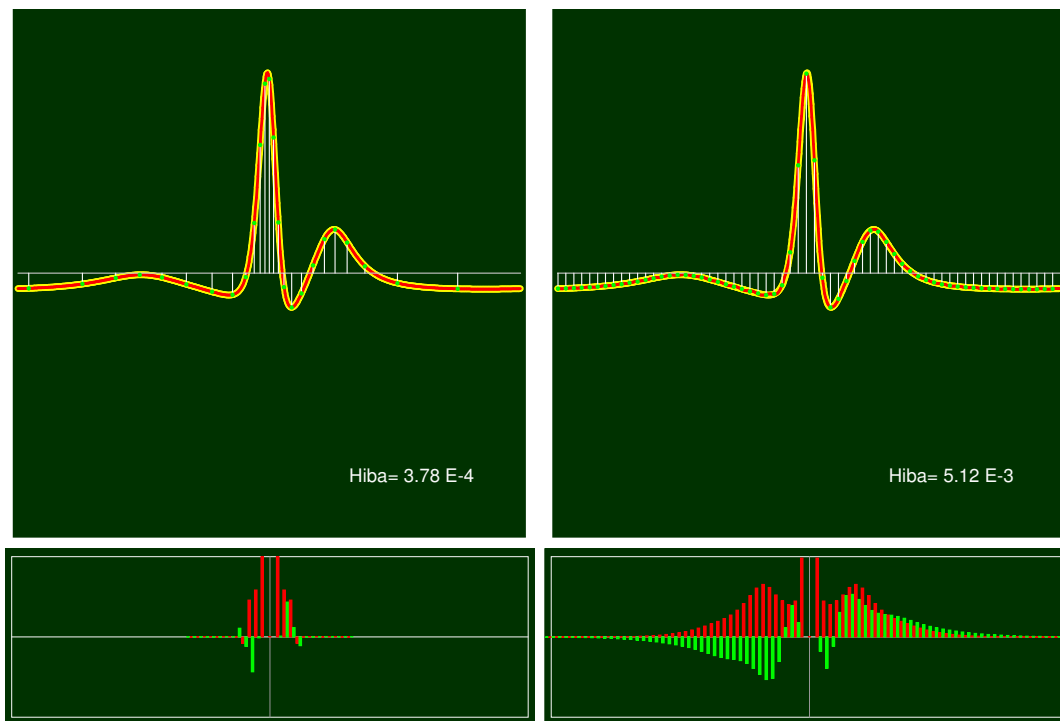
$$\Delta_n^{\mathbf{a}}(f) := \|f - s_n^{\mathbf{a}} f\|_2$$

számmal jellemezhetjük, amely az  $n$ -től és az  $\mathbf{a}$  sorozattól függ. Az adattömörítés kapcsán az a célunk, hogy olyan  $\mathbf{a}$  sorozatot találjunk, amellyel minél kisebb  $n$  mellett

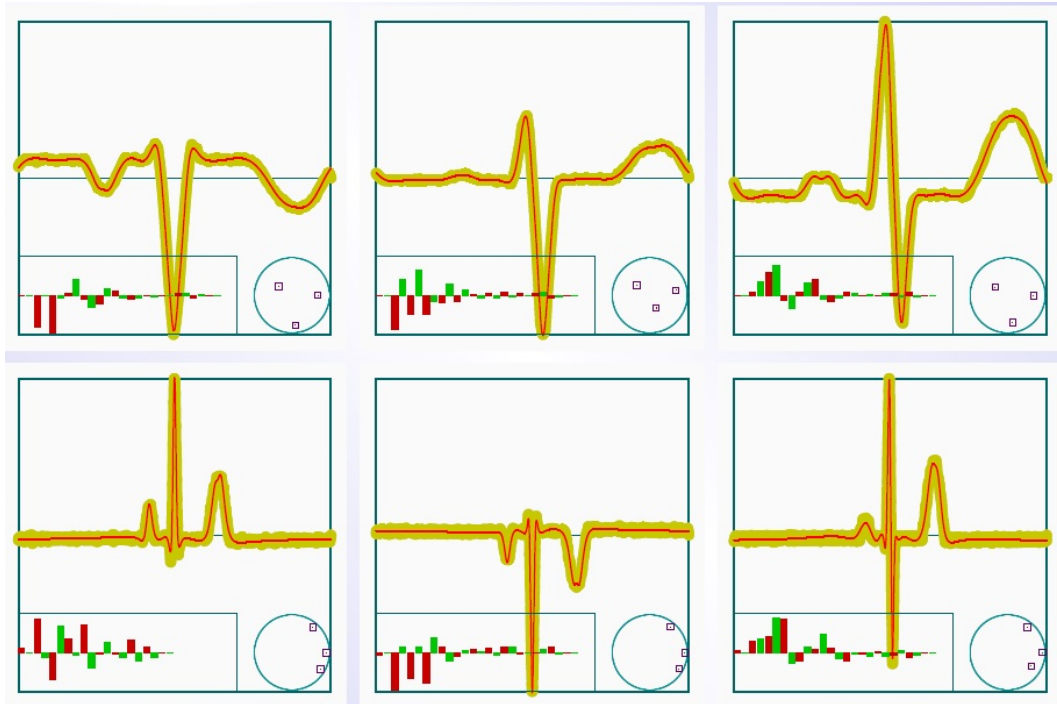
a megengedett hibahatáron belül maradjunk. Az MT-rendszerek alkalmazásának az a nagy előnye, hogy megfelelő  $\mathbf{a}$  sorozattal a tömörítés mértéke jelentősen növelhető.

Ezt illusztráljuk az alábbi példával. Ebben egy  $f$  racionális függvény MT-Fourier-sorát és trigonometrikus Fourier-sorát hasonlítjuk össze. Ha ismerjük a racionális függvény pólusait, akkor az ezek által generált MT-rendszer véges sok tagjával hiba nélkül állítható elő a függvény. Ugyanennek a függvénynek a trigonometrikus sorfejtését véve sokkal több tagot kell figyelembe venni, ha az adott pontosságot akarjuk elérni. A függvények grafikonjai alatt az MT-, ill. trigonometrikus Fourier-együtthatókat ábrázoltuk, piros színnel az együhatók valós, zölddel a képzetes részét. Az ábrákról leolvasható a  $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$  összefüggés. Ezt figyelembe véve elegendő a pozitív indexű együtthatókat tárolni. Ez az MT-rendszer esetén 6 komplex együtthatót jelent, a trigonometrikus rendszer esetén legalább 25 együtthatóra van szükség a kívánt pontosság eléréséhez.

Adott EKG-görbét jól közelítő racionális függvény és pólusainak meghatározása az eljárás legbonyolultabb része, amellyel a 6. fejezetben foglalkozunk. Ez más szóval azt jelenti, hogy a  $\Delta_n^{\mathbf{a}}(f)$  funkcionálnak az  $(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \in \mathbb{D}^n$  változóban keressük a minimumát. Például EKG görbék esetén a *Nelder–Mead-féle algoritmus* sikerrel alkalmazható. Ezzel a jegyzet tervezett 2. kötetében foglalkozunk. Az alábbi ábrákon néhány (sárga színnel ábrázolt) EKG görbe approximációját és tömörítését mutatjuk be. A közelítésre használt racionális függvényeknek egy kétszeres és két egyszeres pólusuk van. Az approximáló függvény grafikonját piros színnel ábrázoltuk, inverzpólusait és az MT-sorfejtés együtthatóit az ablak alján szemléltettük.



*Racionális függvény MT- és trigonometrikus sorfejtése*



*EKG görbék approximációja*

,



## 4.5. DISZKRÉT MT-RENDSZEREK

Ismeretes, hogy a komplex trigonometrikus rendszert a  $\mathbb{T}$  ekvidisztans pontrendszerre leszűkítve diszkrét ortogonális rendszert kapunk. Ezek a pontrendszerek a

$$z^m = \zeta_0^m \quad (\zeta_0 \in \mathbb{T}, m \in \mathbb{N}^*)$$

egyenlet megoldásainak halmazaként adódnak, ahol  $\zeta_0$  és  $m$  rögzített számok. Ezek a gyökök előállíthatók a következő alakban:

$$\{\zeta_k := \zeta_0 e^{2\pi i k/m} : 0 \leq k < m\}.$$

Ezt a konstrukciót általánosítva rögzítsünk az  $\mathbf{a} = (a_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  sorozatot és a  $0 \leq n < m$  természetes számokat. Az

$$A_{nm}(z) := A_{nm}^{\mathbf{a}}(z) := \prod_{k=n}^{m-1} B_{a_k}(z) \quad (0 \leq n < m, z \in \overline{\mathbb{D}})$$

Blaschke szorzatokból kiindulva vizsgáljuk az

$$A_{nm}(z) = A_{nm}(\zeta_0) \tag{27}$$

egyenlet megoldásait, ahol  $\zeta_0 \in \mathbb{T}$  egy előre rögzített szám. Megmutatjuk, hogy a (27) egyenletnek  $m - n$  páronként különböző megoldása van és ezek a  $\mathbb{T}$ -re esnek. Valóban, induljunk ki az  $A_{nm}$

$$A_{nm}(e^{it}) = e^{i\theta_{nm}(t)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

előállításból, ahol

$$\theta_{nm}(t) := \sum_{k=n}^{m-1} \beta_{a_k}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

szigorúan monoton növény, folytonos függvény (lásd 2.1. 1. Tétel). Legyen  $\tau_0 \in [-\pi, \pi]$  az a szám, amelyre  $e^{i\tau_0} = \zeta_0$  teljesül. Minthogy

$$\beta_{a_k}(t + 2\pi) = \beta_{a_k}(t) + 2\pi \quad (t \in \mathbb{R}),$$

azért

$$\theta_{nm}(\tau_0 + 2\pi) = \theta_{nm}(\tau_0) + 2\pi(m - n),$$

következésképpen minden  $k = 0, 1, \dots, m - n - 1$  esetén pontosan egy olyan  $\tau_k$  szám létezik a  $[\tau_0, \tau_0 + 2\pi)$  intervallumban, amelyre

$$\theta_{nm}(\tau_k) = \theta_{nm}(\tau_0) + 2\pi k \tag{28}$$

teljesül. Az ezekkel képzett

$$\zeta_k := e^{i\tau_k} \quad (k = 0, 1, \dots, m - n - 1)$$

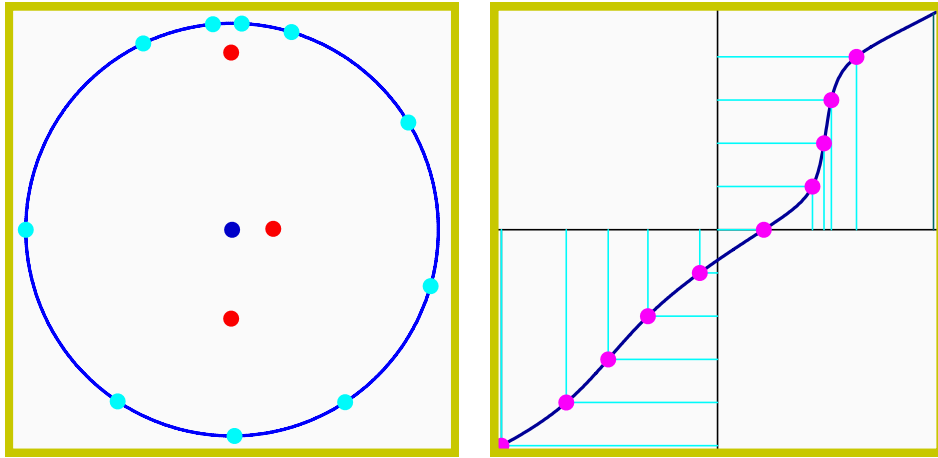
$\mathbb{T}$ -beli komplex számok (28) alapján kielégítik a (27) egyenletet:

$$\begin{aligned} A_{nm}(\zeta_k) &= A_{nm}(e^{i\tau_k}) = e^{i\theta_{nm}(\tau_k)} = e^{i(\theta_{nm}(\tau_0)+2k\pi)} = \\ &= e^{i\theta_{nm}(\tau_0)} = A_{nm}(e^{i\tau_0}) = A_{nm}(\zeta_0). \end{aligned}$$

Mivel a (27) egyenlet gyökei egyben a

$$P(z) := \prod_{k=n}^{m-1} (z - \mathbf{a}_k) - A_{nm}(\zeta_0) \prod_{k=n}^{m-1} (1 - \bar{\mathbf{a}}_k z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

$(m - n)$ -edfokú polinom zérushelyei, ezért a szóban forgó egyenletnek az  $(m - n)$  számú  $\zeta_k$ -n kívül nincs más megoldása.



*Pólusok által indukált diszkrét rendszer a  $\mathbb{T}$ -n és a  $\theta$  grafikonján*

Megjegyezzük, hogy a (28) egyenlet, amellyel a szóban forgó gyököket meghatároztuk, ezek numerikus előállítására is alkalmas. Ezen az alapon több program készült, amelyek a kiinduló pontját képezik a diszkrétizációs eljárásoknak.

Legyen

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{nm}^{\mathbf{a}} &:= \{\zeta \in \mathbb{T} \mid A_{nm}^{\mathbf{a}}(\zeta) = A_{nm}^{\mathbf{a}}(\zeta_0)\} = \\ &= \{\zeta_k = \zeta_0 e^{i\tau_k} \mid k = 0, 1, \dots, m - n - 1\}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  ( $n \leq k < m$ ) függvényeknek a  $\mathbb{T}_{nm}^{\mathbf{a}}$  halmazra való leszűkítései diszkrét ortogonális rendszert alkotnak a

$$\rho_{nm}(\zeta) := \rho_{nm}^{\mathbf{a}}(\zeta) = \frac{1}{K_{nm}^{\mathbf{a}}(\zeta, \zeta)} \quad (\zeta \in \mathbb{T})$$

súlyfüggvénnyel képzett

$$[F, G]_{nm} := [F, G]_{nm}^{\mathbf{a}} := \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_{nm}^{\mathbf{a}}} F(\zeta) \bar{G}(\zeta) \rho_{nm}^{\mathbf{a}}(\zeta) \quad (29)$$

diszkrét skaláris szorzatra nézve.

**8.Tétel.** A  $(\Phi_k^a, n \leq k < m)$  véges rendszer ortonormált a (29) skaláris szorzatra nézve, azaz

$$[\Phi_k^a, \Phi_\ell^a]_{nm}^a = \delta_{k\ell} \quad (n \leq k, \ell < m). \quad (30)$$

**Bizonyítás.** A diszkrét ortogonalitás egyszerű következménye a  $K_{nm}$  magfüggvény (18) előállításának és a (27) definíciónak:

$$\begin{aligned} K_{nm}(\zeta_k, \zeta_\ell) &= \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_k(\zeta_k) \bar{\Phi}_k(\zeta_\ell) = A_n(\zeta_k) \bar{A}_m(\zeta_\ell) \frac{A_{nm}(\zeta_k) \bar{A}_{nm}(\zeta_\ell) - 1}{\zeta_k \bar{\zeta}_\ell - 1} = \\ &= A_n(\zeta_k) \bar{A}_n(\zeta_\ell) \frac{A_{nm}(\zeta_0) \bar{A}_{nm}(\zeta_0) - 1}{\zeta_k \bar{\zeta}_\ell - 1} = 0 \quad (k \neq \ell). \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$w_{ks} := \frac{\Phi_k(\zeta_s)}{\sqrt{K_{nm}(\zeta_s, \zeta_s)}} \quad (n \leq k, s < m)$$

mátrixot, az oszlopvektorok skaláris szorzatára

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m-1} w_{kr} \bar{w}_{ks} &= \frac{1}{\sqrt{K_{nm}(\zeta_r, \zeta_r) K_{nm}(\zeta_s, \zeta_s)}} \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_k(\zeta_r) \bar{\Phi}_k(\zeta_s) = \\ &= \frac{K_{nm}(\zeta_r, \zeta_s)}{\sqrt{K_{nm}(\zeta_r, \zeta_r) K_{nm}(\zeta_s, \zeta_s)}} = \delta_{rs} \end{aligned}$$

adódik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a szóban forgó mátrix unitér, következésképpen

$$\begin{aligned} \delta_{rs} &= \sum_{k=n}^{m-1} w_{rk} \bar{w}_{sk} = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{K_{nm}(\zeta_k, \zeta_k)} \Phi_r(\zeta_k) \bar{\Phi}_s(\zeta_k) = \\ &= [\Phi_r, \Phi_s]_{nm} \quad (n \leq r, s < m). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt igazoltuk.  $\square$

A diszkrét MT-sorfejtésekkel interpolációs feladatokat oldhatunk meg. Ezt a lehetőséget az  $n = 0$  választás mellett a  $\Phi_k := \Phi_k^a$  ( $0 \leq k < m$ ) rendszerből kiindulva mutatjuk be. Mivel ezeknek a függvényeknek  $\mathbb{T}_m := \mathbb{T}_{0m}^a$ -re vonatkozó leszűkítései ortogonálisak a  $[\cdot, \cdot]_m := [\cdot, \cdot]_{0m}^a$  diszkrét skaláris szorzatra nézve, ezért lineárisan függetlenek. Ebből következik, hogy a szóban forgó rendszer kifeszíti a  $\mathbb{T}_m$ -en értelmezett függvények  $m$ -dimenziós terét, s ezért a  $\mathbb{T}_m$  halmaz pontjaiban bármely  $F : \mathbb{T}_m \rightarrow \mathbb{C}$  függvény alkalmas  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  ( $0 \leq k < m$ ) számokkal előállítható

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \Phi_k(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T}_m)$$

alakban. Innen az ortogonalitás alapján az együtthtókra  $\lambda_k = [F, \Phi_k]_m$  ( $0 \leq k < m$ ) adódik. Jelölje

$$S_n^D F := \sum_{k=0}^{n-1} [F, \Phi_k]_m \Phi_k \quad (0 \leq n \leq m)$$

az  $F$  függvény diszkrét MT-Fourier-sorfejtésének  $n$ -edik részletösszegét.

Összefoglalva a mondottakat a következő állítást igazoltuk:

**9.Tétel.** *Bármely  $\mathbb{T}$ -n értelmezett  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény diszkrét MT-sorfejtésének  $m$ -edik részletösszege interpolálja az  $F$  függvényt a  $\mathbb{T}_m$  halmaz pontjaiban:*

$$(S_m^D F)(\zeta) = F(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T}_m).$$

Speciálisan  $F \in \mathfrak{R}_m^a$  esetén  $S_m^D F(z) = F(z)$  minden  $z \in \bar{\mathbb{D}}$  pontban.

Az  $\mathfrak{R}_m^a$  lineáris téren a folytonos és diszkrét skaláris szorzat megegyezik:

$$\langle F, G \rangle = [F, G]_m^a \quad (F, G \in \mathfrak{R}_m^a). \quad (31)$$

Valóban, legyen

$$F = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \Phi_k^a, \quad G = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \Phi_k^a \in \mathfrak{R}_m^a.$$

Ekkor (30) és (6) alapján

$$\langle F, G \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \bar{\mu}_k = [F, G]_m^a.$$

A diszkrét skaláris szorzatot  $G = 1$  esetén felírva

$$[F, 1]_m := \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_m^a} F(\zeta) \rho_m^a(\zeta)$$

adódik. A jobb oldalon álló összeg az integrálok közelítésére használatos kvadratura formulának tekinthető. Speciálisan  $\alpha_0 = 0$  esetén  $\Phi_0 = 1 \in \mathfrak{R}_m^a$ . Ezt felhasználva és  $G = 1$  és  $F \in \mathfrak{R}_m^a$  esetén alkalmazva (31)-et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) dt = \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_m^a} F(\zeta) \rho_m^a(\zeta),$$

adódik, azaz a formula ebben az esetben az integrál pontos értékét adja.

A valós MT-rendszer diszkrét változatának felírásához a rendszer magfüggvényének (26) alakjából indulunk ki:

$$\mathcal{K}_m^R(e^{it}, e^{i\tau}) = \frac{\sin(\eta_m(t) - \eta_m(\tau))}{\sin((t - \tau)/2)} \quad (t, \tau \in \mathbb{R}, t \neq \tau)$$

Az  $\mathbf{a}_0 = 0$  feltételből alapján  $\beta_{\mathbf{a}_0}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$  ( $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ ), következésképpen az

$$\eta_m(\mathbf{t}) := \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}/2 = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{\mathbf{a}_k}(\mathbf{t}) + \mathbf{t}/2$$

függvény is szigorúan monoton nő. Mivel bármely  $\tau_0 \in [-\pi, \pi)$  esetén

$$\eta_m(\tau_0 + 2\pi) = \eta_m(\tau_0) + (2m - 1)\pi,$$

azért minden  $k = 0, 1, \dots, 2m - 2$  esetén pontosan egy olyan  $\tau_k^R \in [\tau_0, \tau_0 + 2\pi)$  szám létezik, amelyre

$$\eta_m(\tau_k^R) = \eta_m(\tau_0^R) + k\pi \quad (k = 0, 1, \dots, 2m - 2)$$

teljesül. Innen következik, hogy a

$$\mathbb{T}_m^R := \{\zeta_k^R := e^{i\tau_k^R} : k = 0, 1, \dots, 2m - 2\}$$

halmaz pontjaiban

$$\mathbf{K}_m^R(\zeta_k^R, \zeta_\ell^R) = 0 \quad (0 \leq k, \ell \leq 2m - 2, k \neq \ell).$$

A diszkrét (valós) skaláris szorzatot a

$$\rho_m^R(\zeta) := \frac{1}{\mathbf{K}_m^R(\zeta, \zeta)} \quad (\zeta \in \mathbb{T})$$

súlyfüggvényt és a  $\mathbb{T}_m^R$  diszkrétizációs halmazt felhasználva a következőképpen értelmezzük:

$$[f, g]_m^R := \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_m^R} f(\zeta)g(\zeta)\rho_m^R(\zeta) \quad (f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}). \quad (32)$$

Az előzőekhez hasonló megfontolással azt kapjuk, hogy az  $\mathbf{a}_0 = 0$  feltétel mellett az  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n$  ( $0 \leq n < m$ ) valós rendszer ortogonális erre a (32) skaláris szorzatra nézve. Jelölje

$$\mathbf{s}_n^R f := [f, \mathbf{U}_0]_m^R \mathbf{U}_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} ([f, \mathbf{U}_k]_m^R \mathbf{U}_k + [f, \mathbf{V}_k]_m^R \mathbf{V}_k)$$

az  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény valós diszkrét MT-Fourier-sorának részletösszegeit. A következő állításban összefoglaljuk a valós diszkrét MT-rendszerekkel kapcsolatban mondottakat.

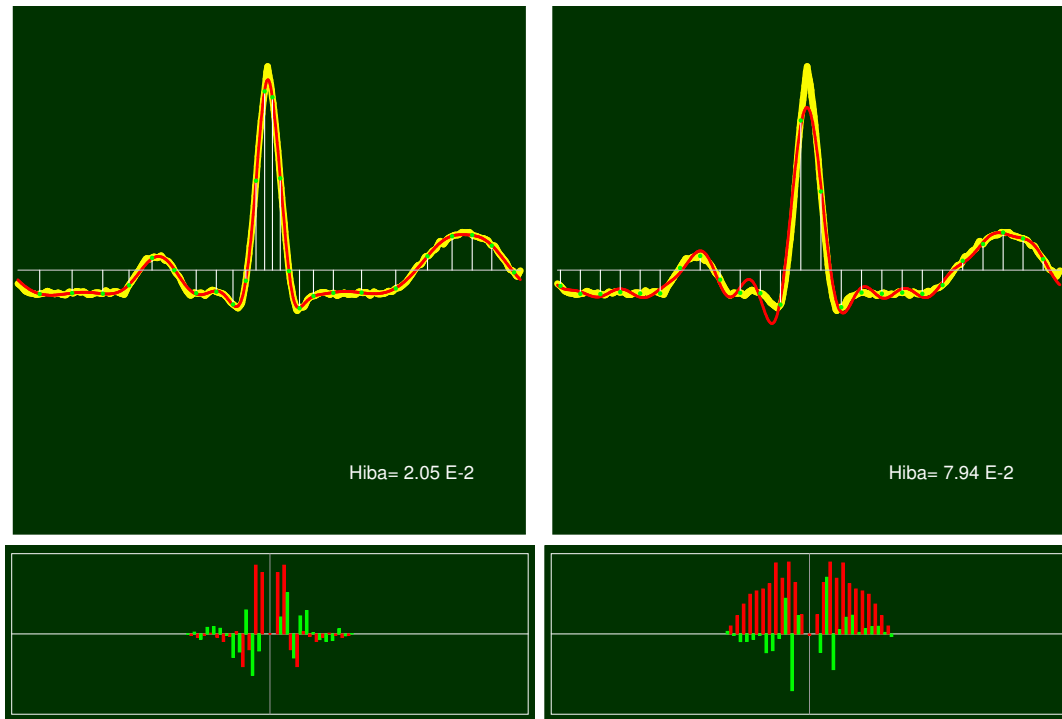
**10. Tétel.** *Az  $(\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, 0 \leq n < m)$  valós MT-rendszer ortogonális a (32) skaláris szorzatra nézve:*

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_\ell]_m^R &= [\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_\ell]_m^R = 0 \quad (k \neq \ell), \quad [\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_\ell]_m^R = 0 \quad (0 \leq k, \ell < m) \\ [\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0]_m^R &= 1, \quad [\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_k]_m^R = [\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_k]_m^R = 1/2 \quad (1 \leq k < m). \end{aligned}$$

Bármely  $\mathbb{T}$ -n értelmezett  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény diszkrét valós MT-sorfejtésének  $m$ -edik részletösszege interpolálja az  $f$  függvényt a  $\mathbb{T}_m^R$  halmaz pontjaiban:

$$(S_m^R f)(\zeta) = f(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T}_m^R).$$

Az alábbi ábrán egy EKG görbe diszkrét MT-rendszer és trigonometrikus rendszer szerinti sorfejtését szemléltetjük, feltüntetve a diszkretizációs pontokat. Látható, hogy ott ahol a függvény gyorsan változik a csomópontok sűrűbben helyezkednek el, továbbá a diszkrét MT-sorfejtések a csomópontokban interpolálnak. Ebből is következik a jó approximációs tulajdonság.



*EKG-jel diszkrét MT- és trigonometrikus sorfejtése*

,

# 5. FEJEZET

## MODELLREDUKCIÓ

Ebben a fejezetben az MT-sorfejtések konvergencia-sebességét vizsgáljuk. Ha a  $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, n \in \mathbb{N})$  rendszer teljes, vagy ami ezzel ekvivalens  $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_0$ , akkor minden  $f \in H^2(\mathbb{T})$  függvény esetén az MT-sorfejtés approximációs hibájára  $\|f - S_n^{\mathbf{a}}f\|_2 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). *Felhasználva az  $\mathbf{a}$  sorozat geometriai tulajdonságait explicit becslés adható a  $\|\cdot\|_q$  ( $1 \leq q \leq \infty$ ) normában vett hibákra, speciálisan a sok szempontból fontos egyenletes approximáció hibájára.* Az itt alkalmazott eljárás alapján redukálhatjuk az irányításelméletben használt matematikai modellek paramétereinek számát, kiindulva a különböző rendszerek átviteli függvényekkel történő reprezentációiból. *Stabil diszkrét rendszerekre szorítkozva az átviteli függvények olyan racionális függvényekkel írhatók le, amelyek analitikusak a  $\bar{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$  zárt diszken.* A továbbiakban olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek *átviteli függvényei valódi racionális függvények, egyszerűes, 1-nél nagyobb abszolút értékű pólusokkal.* Ezek halmaza azonos az

$$\mathfrak{R}_0 := \text{span}\{r_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{D}\}$$

függvényosztállyal. Rögzítsük a szóban forgó függvények inverzpólusainak egy  $P \subset \mathbb{D}$  véges halmazát és vezessük be az

$$\mathfrak{R}_P := \text{span}\{r_p : p \in P\} = \left\{ f_\lambda := \sum_{p \in P} \lambda_p r_p : \lambda = (\lambda_p, p \in P) \in \mathbb{C}^{|P|} \right\}$$

véges dimenziós lineáris tereket, ahol  $|P|$  a  $P$  elemeinek számát jelöli. Az  $f_\lambda \rightarrow \|\lambda\|_s := (\sum_{p \in P} |\lambda_p|^s)^{1/s}$  ( $1 \leq s \leq \infty$ ) leképezések mormák az  $\mathfrak{R}_P$  lineáris téren, amelyek ekvivalensek a szóban forgó véges dimenziós tér bármely más normájával, speciálisan  $\|f_\lambda\|_q \sim \|\lambda\|_s$ . Itt és a továbbiakban a  $\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{H^q(\mathbb{D})} = \|\cdot\|_{L^q(\mathbb{T})}$  jelölést használjuk.

A modellredukció esetünkben azt jelenti, hogy az  $\mathfrak{R}_P$ -beli függvényeket kevesebb pólussal rendelkező racionális függvénnyel helyettesítjük. Ismeretes, hogy rendszerek eltérését célszerű az átviteli függvényeik  $H^\infty(\mathbb{D})$ -normában vett eltéréseivel jellemezni. A  $H^\infty(\mathbb{D})$ -térben az approximációs feladatok sokkal bonyolultabb problémához vezetnek mint a  $H^2(\mathbb{D})$  Hilbert-térben.

Ha  $X \subset H^q(\mathbb{D})$  véges dimenziós altér, akkor minden  $f \in H^q(\mathbb{D})$  esetén egyetlen olyan  $g_0 \in X$  elem létezik, amelyre

$$\text{dist}_q(f, X) := \inf_{g \in X} \|f - g\|_q = \|f - g_0\|_q,$$

továbbá  $q = 2$  esetén  $g_0 = P_X f$  az  $f$ -nek az  $X$  altérre vett ortogonális projekciójával egyenlő.

Először azt vizsgáljuk, hogy az  $\mathfrak{R}_p$  elemei mennyire közelíthetők egyetlen (magasabbrendű) pólussal rendelkező racionális függvénnyel. Ezzel összefüggésben vezessük be az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  paramétertől függő  $X_n^{\mathbf{a}} := \text{span}\{r_{\mathbf{a}}^k : 1 \leq k \leq n\}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ )  $n$ -dimenziós lineáris terek osztályát. Ismeretes, hogy az  $X_n^{\mathbf{a}}$  térnek az  $L_k^{\mathbf{a}}$  ( $0 \leq k < n$ ) **diszkrét Laguerre-rendszer** egy ortonormált bázisa. Az  $\mathfrak{R}_p$  függvényosztály esetén a legjobb közelítés mértékét a

$$w_{n,q}(P) := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \sup_{f \in \mathfrak{R}_p, \|f\|_q \leq 1} \text{dist}_q(f, X_n^{\mathbf{a}}) \quad (1 \leq q \leq \infty)$$

mennyiséggel jellemezhetjük. A  $w_{n,q}(P)$  szám egyfajta Kolmogorov-féle szélességnek is tekinthető (lásd az 1. fejezetet). Megjegyezzük, hogy  $q = 2$  esetén a definícióban szereplő  $\sup_{f \in \mathfrak{R}_p, \|f\|_2 \leq 1} \text{dist}_2(f, X_n^{\mathbf{a}})$  szám a  $\mathfrak{R}_p$  által kifeszített altér és az  $X_n^{\mathbf{a}}$  altér  $(\mathfrak{R}_p, X_n^{\mathbf{a}}) \triangleleft$  hajlásszögének szinuszával egyenlő. Következésképpen ebben az esetben  $w_{n,2}(P)$  kiszámításának feladata az  $\mathfrak{R}_p$ -vel minimális hajlásszöget bezáró  $X_n^{\mathbf{a}}$  altér meghatározásával ekvivalens.

A legjobb közelítés mértéke a  $P$  halmaz hiperbolikus geometriai tulajdonságaitól, a  $P$  halmaz hiperbolikus fedőkörének sugarától függ. Nevezetesen legyen  $\rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := |B_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})|$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{D}$ ) a pszeudohiperbolikus távolság a diszken, és

$$\rho_0(\mathbf{a}, P) := \max_{p \in P} \rho_0(\mathbf{a}, p).$$

Az  $\rho_0(\mathbf{a}, P)$  annak az  $\mathbf{a}$  középpontú minimális sugarú zárt, hiperbolikus körlemeznek a sugara, amely lefedi a  $P$  halmazt. Megmutatjuk (lásd a következő pontot), hogy a  $\rho_0(\cdot, P)$  folytonos függvénynek egyetlen  $\mathbf{a}_P \in P \in \mathbb{D}$  minimumhelye létezik a  $\mathbb{D}$  diszken:

$$\tau_P := \rho_0(\mathbf{a}_P, P) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \rho_0(\mathbf{a}, P) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \max_{p \in P} \rho_0(\mathbf{a}, p).$$

A  $\{z \in \mathbb{D} : \rho_0(z, \mathbf{a}_P) \leq \tau_P\}$  zárt hiperbolikus körlemez **a  $P$  halmaz hiperbolikus fedőkörének nevezzük**. Nyilvánvalóan ez az a legkisebb hiperbolikus körlemez, amely a  $P$  halmazt lefedi.

Megmutatjuk, hogy  $w_{n,q}(P)$ -re fennáll a

$$w_{n,q}(P) \leq C \tau_P^n \quad (1)$$

becslés, ahol a  $C = C_{q,p}$  csak  $q$ -tól és a  $P$  halmaztól függő állandó. Ennek alapján a rendszer redukciójának a feladata, egy paraméter esetén, *viszszavezethető a hiperbolikus fedőkör meghatározására*.

A Blaschke-függvényekből alkotott  $\epsilon B_{\mathbf{a}}$  ( $(\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ ) leképezések bijekciók mind a  $\mathbb{D}$ , mind a  $\mathbb{T}$  halmazon, továbbá a  $\{\epsilon B_{\mathbf{a}} : (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}\}$  függvénycsalád csoportot alkot a függvénykompozíció műveletével. A  $\rho_0$  metrika invaráns a  $\mathfrak{B}$ -beli transzformációkkal szemben:  $\rho_0(B(p), B(q)) = \rho_0(p, q)$  ( $p, q \in \mathbb{D}, B \in \mathfrak{B}$ ). Ismeretes továbbá (lásd a 3. Fejezetet), hogy  $\mathfrak{B}$  azonosítható a Bolyai-geometria Poincaré-féle modelljében az egybevágósági transzformációk csoportjával. A  $\rho_0$  említett tulajdonságából következik, hogy a  $P$  és a  $B(P)$  ( $B \in \mathfrak{B}$ ) halmazok fedőkörének sugara



egyenlő, továbbá a  $B(P)$  fedőkörének középpontja  $B(\mathbf{a}_P)$ . Megmutatjuk, hogy a  $w_{n,2}$  hasonló invariancia tulajdonságokkal rendelkezik:

$$w_{n,2}(B(P)) = w_{n,2}(P) \quad (P \subset \mathbb{D}, B \in \mathfrak{B}).$$

Ennek alapján a  $w_{n,2}$  kiszámításánál speciális helyzetű  $P$  halmazból indulhatunk ki, pl. feltehetjük, hogy az  $P$  fedőkörének centruma az origó.

Ahhoz, hogy pontosabb redukciót kapjunk több különböző pólust tartalmazó racionális függvényt célszerű használnunk a közelítéshez, az egy paramétert tartalmazó diszkrét Laguerre-rendszer helyett a  $H^2(\mathbb{D})$  téren ortonormált *Malmquist-Takenaka-(MT)-rendszer*t véve. Legyen  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n \in \mathbb{D}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}$  egy tetszőleges számsorozat és jelölje  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) az  $\mathbf{a}$  sorozat által generált MT-rendszert. Speciálisan az  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) konstans sorozat esetén  $\Phi_k^{\mathbf{a}} = L_k^{\mathbf{a}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) a diszkrét Laguerre-rendszer. Ezzel összefüggésben vezessük be az  $n$ -dimenziós terek ( $n$  paramétertől függő)  $X_n^{\mathbf{a}} = \text{span}\{\Phi_k^{\mathbf{a}} : 0 \leq k < n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) osztályát. Mivel a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  függvények csak az  $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \in \mathbb{D}^n$  vektortól függenek, a  $\Phi_k^{\mathbf{a}}$  jelölést is használni fogjuk. Megmutatjuk, hogy ezekkel az alterekkel képzett

$$w_{n,q}(P) = \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n} \sup_{f \in \mathfrak{R}_P, \|f\|_q \leq 1} \text{dist}_q(f, X_n^{\mathbf{a}})$$

szélességre a (1)-höz hasonló becslés adható, felhasználva a hiperbolikus fedőkör sugarának következő általánosítását:

$$r_P := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^n} \sup_{p \in P} \prod_{j=0}^{n-1} |B_{a_j}(p)|.$$

Innen az  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) speciális esetben visszkapjuk a fedőkör definícióját. Nyitva maradt az  $r_P$  geometriai jelentésének tisztázása.

Az 5.1. pontban emlékeztetünk a hiperbolikus geometria felhasználásra kerülő eredményeire, és bevezetjük a hiperbolikus fedőkör és általánosításainak fogalmát. Az 5.2. pontban becsléseket adunk a  $w_{n,q}(P)$  mennyiségekre, felhasználva a  $P$  halmazok hiperbolikus fedőköreit.

## 5.1. HIPERBOLIKUS FEDŐKÖRÖK

Ebben a pontban az előzőekben bevezetett approximációelméleti fogalmak geometriai interpretációjával foglalkozunk, felhasználva a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria Poincaré-féle modelljét. Ismeretes, hogy a

$$B_{\mathbf{a}}(z) := \frac{z - \mathbf{a}}{1 - \bar{\mathbf{a}}z} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, z \in \bar{\mathbb{D}})$$

*Blaschke-függvények* bijekciók mind a diszken, mind a tóruszon, továbbá a  $B_{\mathbf{a}}$  leképezés inverze:  $B_{\mathbf{a}}^{-1} = B_{-\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ ).

A

$$\mathfrak{B} := \{\epsilon B_a : (a, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}\}$$

függvényosztályt, amely csoportot alkot a függvénykompozícióra nézve, **Blaschke-csoportnak** nevezzük. Az  $\mathbb{I} := (-1, 1) \subset \mathbb{D}$  intervallum  $B(\mathbb{I})$  ( $B \in \mathfrak{B}$ ) képei olyan  $\mathbb{D}$ -be eső körívek, ill. szakaszok, amelyek merőlegesen metszik a  $\mathbb{T}$  kört. Ezek azonosíthatók a *Bolyai-geometria Poincaré-féle körmodelljében az egyenesek osztályával*. Az  $I = [z_1, z_2] \subset \mathbb{I}$  zárt intervallumok  $B(I)$  ( $B \in \mathfrak{B}$ ) képeit hiperbolikus szakaszoknak nevezzük.

Ismeretes, hogy a

$$\rho_0(z, a) := |B_a(z)| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} \quad (a, z \in \mathbb{D})$$

függvény (az ún. pszeudóhiperbolikus távolság) metrika a  $\mathbb{D}$  halmazon, továbbá a  $B \in \mathfrak{B}$  leképezések távolságtartók:

$$\rho_0(B(z_1), B(z_2)) = \rho_0(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}, B \in \mathfrak{B}).$$

A Blaschke-függvények  $\mathfrak{B}$  osztálya azonos a szóban forgó hiperbolikus sík egybevágósági transzformációinak osztályával. A

$$\mathcal{C}_r := \{re^{it} : -\pi \leq t < \pi\}$$

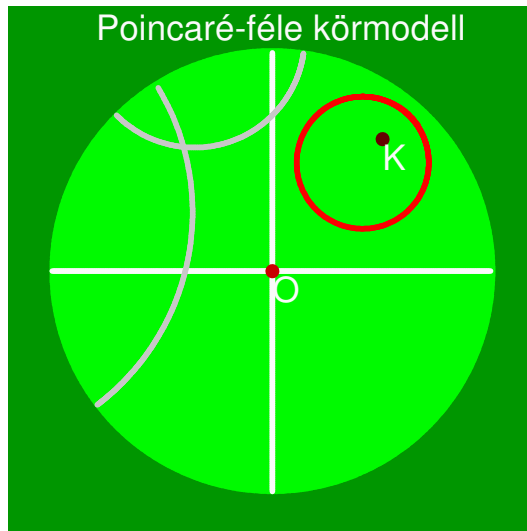
(euklideszi) kör

$$B(\mathcal{C}_r) = \{B(re^{it}) : t \in [-\pi, \pi]\} \quad (B \in \mathfrak{B})$$

képei is (euklideszi) körök a  $\mathbb{D}$ -ben. Mivel bármely  $t \in \mathbb{R}$  számra

$$\rho_0(B(0), B(re^{it})) = \rho_0(B^{-1}(B(0)), B^{-1}(B(re^{it}))) = \rho_0(0, re^{it}) = r,$$

azért a  $B(\mathcal{C}_r)$  minden pontjának a  $B(0)$  ponttól mért hiperbolikus távolsága az  $r$  állandóval egyenlő, következésképpen  $B(\mathcal{C}_r)$  egyben hiperbolikus kör a  $B(0)$  hiperbolikus középponttal. Megfordítva megmutatható, hogy minden hiperbolikus kör ily módon származtatható.



Hiperbolikus egyenesek és körök

A  $\rho_0$  metrika nem additív: az  $\mathbb{I}$  hiperbolikus egyenes  $-z < 0 < z$  pontjaira nyilván

$$\rho_0(-z, 0) + \rho_0(z, 0) = 2z \neq \rho_0(-z, z) = \frac{2z}{1+z^2}$$

teljesül. Ezért célszerű bevezetni a

$$\rho_1(z, \mathbf{a}) := \text{ath}(\rho_0(z, \mathbf{a})) = \log \left( \frac{1 + \rho_0(z, \mathbf{a})}{1 - \rho_0(z, \mathbf{a})} \right) \quad (\mathbf{a}, z \in \mathbb{D})$$

hiperbolikus metrikát. A  $\rho_1$  metrika a következő kitüntetett tulajdossággal rendelkezik: a  $\rho_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \rho_1(\mathbf{a}_1, z) + \rho_1(z, \mathbf{a}_2)$  egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a  $z$  az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  pontokat összekötő hiperbolikus szakasz pontja, következésképpen a  $\rho_1$  metrika additív a hiperbolikus egyeneseken.

A  $\rho_0$  és  $\rho_1$  metrikák lokálisan ekvivalensek a  $\mathbb{D}$  diszken az euklideszi metrikával:

$$\begin{aligned} \frac{|z_1 - z_2|}{1+r^2} &\leq \rho_0(z_1, z_2) \leq \frac{|z_1 - z_2|}{1-r^2} \quad (|z_1|, |z_2| < r < 1), \\ \rho_0(z_1, z_2) &\leq \rho_1(z_1, z_2) \leq \frac{\rho_0(z_1, z_2)}{1-r^2} \quad (\rho_0(z_1, z_2) \leq r). \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a  $\mathbb{D}$  mindkét metrikára nézve teljes metrikus tér továbbá a kompakt halmazok mindkét metrikában ugyanazok, nevezetesen a korlátos és zárt halmazokkal azonosak. Ismeretes, hogy a  $z \rightarrow \rho_j(z, \mathbf{a})$  ( $j = 0, 1$ ) függvények minden  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  esetén folytonosak. Jelölje

$$\mathbb{D}_r^j(\mathbf{a}) := \{z \in \mathbb{D} : \rho_j(\mathbf{a}, z) \leq r\} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, 0 \leq r < 1, j = 0, 1)$$

az  $\mathbf{a}$  középpontú,  $r$  sugarú hiperbolikus körlemezt a  $\rho_j$  metrikában.

Rögzítsünk egy  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{D}$  véges halmazt és vezessük be az

$$\rho_j(\mathbf{a}, P) := \max_{p \in P} \rho_j(\mathbf{a}, p) \quad (j = 0, 1, \mathbf{a} \in \mathbb{D})$$

függvényeket. Mivel ezek folytonos függvények felső burkolói, következésképpen maguk is folytonosak, továbbá

$$\rho_1(\mathbf{a}, P) = \text{ath}(\rho_0(\mathbf{a}, P)) \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}).$$

Az  $s_j = \rho_j(\mathbf{a}, P)$  szám annak az  $\mathbf{a}$  középpontú minimális sugarú körnek a sugara, amely a  $P$  halmazt tartalmazza:  $P \subset \mathbb{D}_{s_j}^j(\mathbf{a})$ . A  $\rho_0(\cdot, P)$  függvénynek (és ezzel együtt  $\rho_1(\cdot, P)$ -nek is) létezik a minimuma. Valóban legyen  $\mathbf{m} := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \rho_0(\mathbf{a}, P)$ ,  $\mathbf{m} < \mathbf{m}_1 < 1$  és vezessük be az  $A := \{\mathbf{a} \in \mathbb{D} : \rho_0(\mathbf{a}, P) \leq \mathbf{m}_1\}$  halmazt. Mivel  $A$  kompakt és  $\inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \rho_0(\mathbf{a}, P) = \inf_{\mathbf{a} \in A} \rho_0(\mathbf{a}, P)$ , azért a szóban forgó függvényeknek van minimuma továbbá  $\rho_0(\cdot, P)$  és  $\rho_1(\cdot, P)$  minimumhelyei megegyeznek. Létezik tehát legalább egy olyan  $\mathbf{a}' \in \mathbb{D}$  pont, amelyre

$$\rho_j(\mathbf{a}', P) = \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}} \rho_j(\mathbf{a}, P) \quad (j = 0, 1) \quad (2)$$

teljesül.

Az *egyértelmű minimum* létezése a  $z \rightarrow \rho_1(z, \mathbf{a})$  függvény *hiperbolikus konvexitásával* hozható kapcsolatba. Akkor mondjuk, hogy valamely  $\rho$  metrika **(szigorúan) hiperbolikusan konvex**, ha bármely  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$  esetén

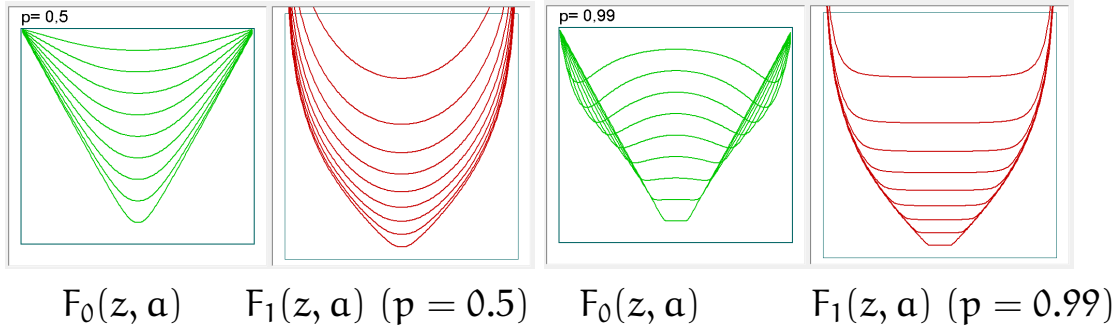
$$\frac{1}{2}(\rho(z_1, \mathbf{a}) + \rho(z_2, \mathbf{a})) > \rho(z, \mathbf{a}), \quad (3)$$

ahol  $z$  a  $z_1, z_2$  pontokat összekötő hiperbolikus szakasz felezőpontja. Más szóval a szóban forgó  $\Delta(z_1, \mathbf{a}, z_2)$  hiperbolikus háromszög  $\mathbf{a}$ -ból induló súlyvonalának hossza kisebb mint az  $\mathbf{a}$ -ból induló oldalak hosszának számtani közepe. A sík euklideszi távolsága nyilván rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ugyanakkor a  $\rho_0$  pszeudóhiperbolikus távolság nem konvex, viszont megmutatjuk, hogy a  $\rho_1$  *hiperbolikus metrika szigorúan konvex*.

Mivel bármely  $\Delta(z_1, \mathbf{a}, z_2)$  háromszög alkalmas  $B \in \mathfrak{B}$  egybevágósági transzformációval átvihető olyan háromszögbe, ahol a  $z_1, z_2$  felezőpontja az origóba, a  $z_1, z_2$  pontok a valós tengelyre kerülnek, azért a hiperbolikus konvexitás vizsgálatánál elegendő  $\Delta(-z, \mathbf{a}, z)$  alakú háromszögekre szorítkozni, ahol  $z \in \mathbb{I}, \mathbf{a} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{I}$ . Ezért a konvexitás azzal ekvivalens, hogy az  $F_j(z) := \rho_j(z, \mathbf{a})$  ( $z \in \mathbb{I}$ ) függvényre:

$$\frac{1}{2}(F_j(z, \mathbf{a}) + F_j(-z, \mathbf{a})) > F_j(0, \mathbf{a}) \quad (z \in \mathbb{I}). \quad (4)$$

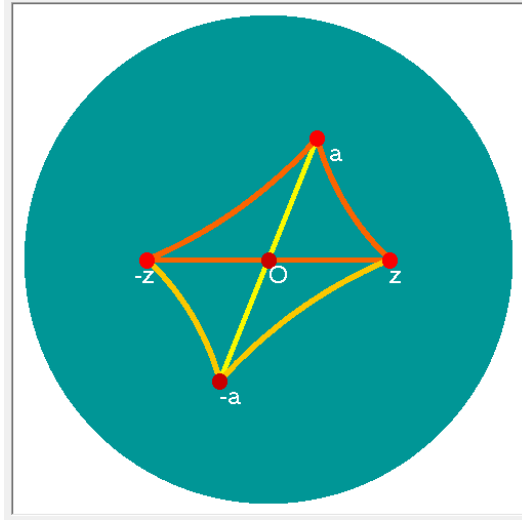
Az alábbi ábrákon az  $F_j$  függvények grafikonját szemléltetjük, ahol  $\mathbf{a} := re^{i\alpha}, p := \cos \alpha$ . A grafikonokon látható, hogy ha a  $p$  paraméter elég közel van a 1-hez, akkor  $F_0$ -ra nem teljesül a (4) feltétel. Az  $F_1$ -re felírva a feltételt egy bonyolult egyenlőtlenséget kapunk, amely közvetlenül nehezen igazolható.



Annál meglepőbb, hogy az egyenlőtlenségre nagyon egyszerű geometriai bizonyítás adható. Nevezetesen (3) ekvivalens a  $\rho_1$  metrikára vonatkozó háromszög egyenlőtlenséggel. Tükrözzük az  $\mathbf{a}$  pontot az origóra és a  $\Delta(\mathbf{a}, -z, -\mathbf{a})$ -ra alkalmazzuk a háromszög egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} 2\rho_1(0, \mathbf{a}) &= \rho_1(-\mathbf{a}, \mathbf{a}) < \rho_1(-\mathbf{a}, -z) + \rho_1(-z, \mathbf{a}) = \\ &= \rho_1(\mathbf{a}, z) + \rho_1(-z, \mathbf{a}) \quad (z \in \mathbb{I}, \mathbf{a} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{I}), \end{aligned}$$

s ezzel a (3) állítást igazoltuk.



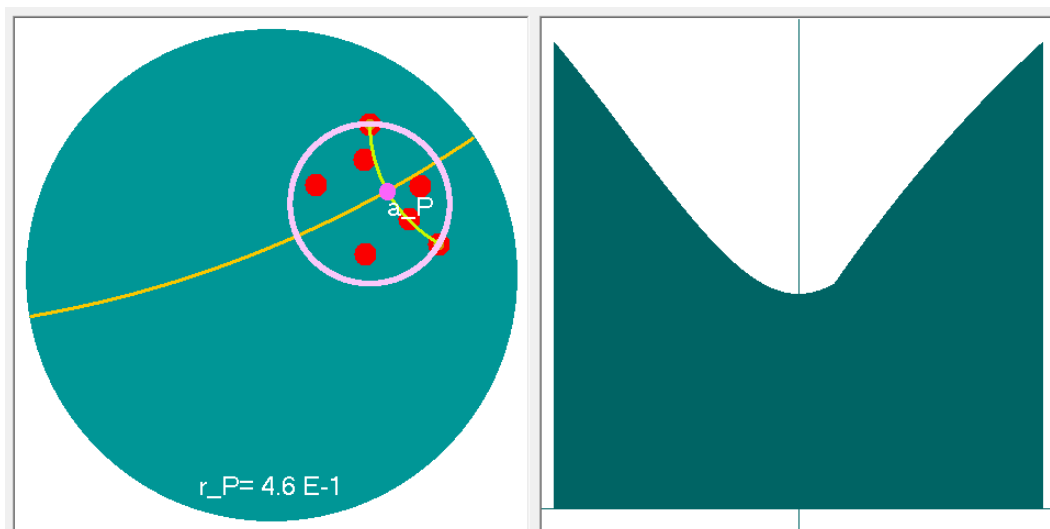
$$\rho_1(o, a) < (\rho_1(-z, a) + \rho_1(z, a))/2$$

Innen már következik, hogy  $\rho_1(\cdot, P)$  függvénynek egyetlen minimumhelye van. Valóban, mivel a szigorúan konvex  $\rho_1(\cdot, p)$  ( $p \in P$ ) függvények  $\rho_1(\cdot, P)$  felső burkolója is szigorúan konvex, azért  $\rho_1(\cdot, P)$ -nek nem lehet két egymástól különböző minimumhelye. Ekkor ui. a minimumhelyeket összekötő hiperbolikus szakasz felezéspontjában a  $\rho_1(\cdot, P)$  értéke a minimumnál kisebb volna. A továbbiakban a  $\rho_j(\cdot, P)$  függvények egyetlen közös minimumhelyét  $\mathbf{a}_P$ -vel fogjuk jelölni.

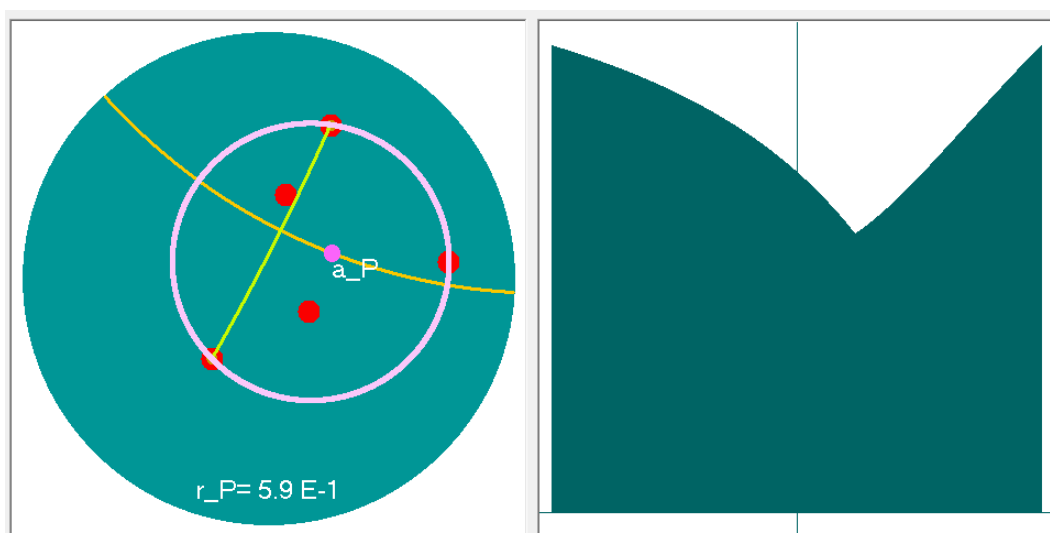
## MEGJEGYZÉSEK

1. Az egyértelműen meghatározott  $\mathbb{D}_P := \mathbb{D}_s^0(\mathbf{a}_P)$  ( $s = \rho_0(\mathbf{a}_P, P)$ ) kört a  $P$  halmaz **hiperbolikus fedőkörének** nevezzük. A fedőkör meghatározásához tehát a  $\rho_0(\cdot, P)$  függvény  $\mathbf{a}_P$  minimumhelyét, a fedőkör középpontját, és az  $r_P := \rho_0(\mathbf{a}_P, P)$  minimum értékét, a fedőkör sugarát kell meghatározni. A MatLab-ban igen általános és gyors algoritmusok találhatók min-max feladatok megoldására. Ebben a speciális esetben azonban nagyon egyszerű és szemléletes geometriai leírás adható a fedőkörre, amely alkalmas arra is, hogy meghatározzuk a fedőkör paramétereit.

A mondottakból következik, hogy a fedőkör egyértelmű. Bebizonyítható, hogy a fedőkör pereme a  $P$  halmaz legalább két pontját tartalmazza. Ha  $P$ -nek csak két pontja tartozik a peremhez (lásd az 1.ábrát), akkor a fedőkör középpontja a két pontot összekötő hiperbolikus szakasz felezőpontja. Általános esetben is mindig van olyan  $pq$  ( $p, q \in P$ ) szakasz, amelynek az  $\mathcal{F}$  hiperbolikus felezőmerőlegesén van a fedőkör  $\mathbf{a}_P$  középpontja. Ez a pont nyilván minimumhelye az  $\rho_0(\cdot, P)$  függvény felezőmerőlegesre vett (egyváltozós) leszűkítésének  $\rho_0(\mathbf{a}_P, P) = \min_{z \in \mathcal{F}} \rho_0(z, P)$ . Ennek alapján  $\mathbf{a}_P$  meghatározható.



1. ábra



2. ábra

Az 1.ábrán a fedőkör a  $pq$  szakasz fölé rajzolt hiperbolikus Thalesz-kör. A 2.ábrán a fedőkör peremén a  $P$  halmaznak 3 pontja van. A második ablakon az  $\rho_0(z, P)$  ( $z \in \mathcal{F}$ ) függvényt ábrázoltuk, ahol  $\mathcal{F}$  a  $pq$  hiperbolikus szakasz sárga színű felezőmerőlegese.

2. A fedőkör paramétereinek (középpontjának és sugarának) a meghatározására három lehetőséget is bemutatunk.

i) Az  $\rho_0(\mathbf{a}, P)$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^\ell$ ) függvény minimumának a meghatározására program készült, ahol  $P \subset \mathbb{D}$  véges,  $n_P := |P|$  számosságú halmaz és  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\ell) \in \mathbb{D}^\ell$ ,  $\ell := n_P$  az a vektor dimenziója:

$$\tau_P := \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^\ell} \max_{p \in P} \prod_{j=1}^{n_a} \rho_0(\mathbf{a}_j, p).$$

A szóban forgó

$$\text{Min}_{r_a P}(n_P, n_a, it, r_{\min})$$

szubrutinban az  $it$  paraméter az iterációk számát,  $r_{\min}$  az  $r$  függvény minimumát jelöli. A  $P$  halmaz pontjait a globális  $T_p(\cdot)$  tömbben, az  $r$  minimumhelyét a globális  $A_a(\cdot, 1)$  tömbben tároljuk. Ebben a pontban csak az  $\ell = 1$ -nek megfelelő egydimenziós változatot használjuk. Ilyenkor egyetlen minimumhely létezik. A többváltozós esetben általában több minimumhely létezik, hiszen bármely minimumhellyel együtt a koordináták permutációival adódó vektorok is minimumhelyet szolgáltatnak.

ii) A második módszer azon az észrevételen alapszik, hogy az  $\mathbf{a}_P$  minimumhely rajta van valamely  $pq$  hiperbolikus szakasz felezőmerőlegesén. Ez utóbbinak egy alkalmas  $\phi(\mathbf{t}) := B(\mathbf{t})$  ( $\mathbf{t} \in (-1, 1)$ )  $B \in \mathfrak{B}$  paraméterezését véve a feladat a  $\Phi(\mathbf{t}) := \rho_0(\phi(\mathbf{t}), P)$  ( $\mathbf{t} \in (-1, 1)$ ) egyváltozós függvény egyetlen  $\mathbf{t}^*$  minimumhelyének meghatározására redukálódik. Ilyenkor  $\mathbf{a}_P = \phi(\mathbf{t}^*)$ ,  $\mathbf{r}_P = \rho_0(\mathbf{a}_P, P)$ . Ezen az alapon készült a második eljárás. A  $\Phi$  függvényt az 1. és a 2. ábrán a második ablakban szemléltettük.

iii) A fedőkör geometriai leírása alapján készíthetünk egy további algoritmust, kiszámítva a  $pq$  ( $p, q \in P$ ) szakaszok felezéspontjaiban, és a  $\Delta(pqr)$  ( $p, q, r \in P$ ) háromszögek körülírt középpontjaiban a  $r(\cdot, P)$  függvény értékeit. Ezek közül a minimális függvényérték a fedőkör sugarát, az ehhez tartozó pont a fedőkör középpontját adja. Ehhez felhasználhatjuk a korábbi algoritmusokat, amelyekkel a hiperbolikus szakasz felezéspontját és a háromszög köré írt hiperbolikus kör középpontját határoztuk meg.

Az alábbi két táblázatban összehasonlítottuk a három eljárás eredményét. Nyilvánvaló, hogy a gyorsaság és pontosság tekintetében a harmadik a legjobb és az első a legrosszabb. Ez utóbbival azonban a 4.pontban tárgyalt általános eset is kezelhető.

	$r_{\min}$	$\text{Re}(\mathbf{a}^*)$	$\text{Im}(\mathbf{a}^*)$
i)	0.46383605	- 5.0629E - 02	- 1.36E - 02
ii)	0.46352460	- 5.0705E - 02	4.03E - 03
iii)	0.46352437	- 5.0702E - 02	3.56E - 03

	$r_{\min}$	$\text{Re}(\mathbf{a}^*)$	$\text{Im}(\mathbf{a}^*)$
i)	0.52993	- 1,4031E - 02	0,2116
ii)	0.52919	- 1,5414E - 02	0,2121
iii)	0.52913	- 1,5415E - 02	0,2119

A következő pontban megmutatjuk, hogy racionális függvényekkel kapcsolatban a  $w_n$  becslése visszavezethető a  $P$  halmaz hiperbolikus fedőkörének meghatározására.

## 5.2. ÁTVITELI FÜGGVÉNYEK APPROXIMÁCIÓJA

Az irányításelméletben vizsgált rendszereket, az idő tartományból áttérve a frekvencia tartományba, gyakran átviteli függvényükkel adjuk meg. Stabil, időinvariáns rendszerek esetén az átviteli függvények olyan racionális függvények, amelyek pólusai a zárt diszken kívül esnek. Egyszeres multiplicitású pólusokra szorítkozva az átviteli függvény benne van az  $r_p$  ( $p \in \mathbb{D}$ ) függvényosztály lineáris burkában. Első lépésben, rögzítve egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  inverzpólust, az átviteli függvények  $r_a^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) alakú függvények lineáris kombinációival való közelítését vizsgáljuk. Ezzel összefüggésben vezessük be az

$$\begin{aligned} X_n^{\mathbf{a}} &:= \text{span}\{r_a^k : 1 \leq k \leq n\} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}^*), \\ X^{\mathbf{a}} &:= \cup_{n=0}^{\infty} X_n^{\mathbf{a}} \subset \mathfrak{R}_0 \subset H^\infty(\mathbb{D}) \end{aligned}$$

lineáris tereket. Az  $X^{\mathbf{a}}$  azoknak a racionális függvényeknek a halmaza, amelyeknek az  $\mathbf{a}$  szám az inverzpólusa. A  $X^{\mathbf{a}}$  lineáris tér zárt a függvény-szorozásra nézve, következésképpen algebrát alkot. Az  $r_a^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) rendszerből a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva az  $L_k^{\mathbf{a}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ortonormált bázist, a diszkrét Laguerre-rendszert kapjuk, amely a következő explicit alakban írható fel:

$$L_k^{\mathbf{a}} = R_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{a}}^k \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}).$$

Az  $X^{\mathbf{a}}$  terek mellett célszerű ezek több paramétrtól függő változatát is használni, a diszkrét Laguerre-rendszer helyett az  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  sorozat által generált Malmquist–Takenaka-rendszert véve. Ismeretes, hogy az MT-rendszer függvényei előállíthatók a

$$\Phi_n^{\mathbf{a}} = R_{\mathbf{a}_n} \prod_{k=0}^{n-1} B_{\mathbf{a}_k} \quad (\mathbf{a} = (\mathbf{a}_k, k \in \mathbb{N}) \in \mathbf{A}, n \in \mathbb{N})$$

alakban. Speciálisan az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n = \mathbf{a}, n \in \mathbb{N})$  sorozatra visszkapjuk a diszkrét Laguerre-rendszert:  $\Phi_n^{\mathbf{a}} = L_n^{\mathbf{a}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Az  $X^{\mathbf{a}} := \text{span}\{\Phi_k^{\mathbf{a}} : k \in \mathbb{N}\}$  altér akkor és csak akkor sűrű a  $H^2(\mathbb{D})$  Hilbert-térben, vagy ami ezzel ekvivalens, az MT-rendszer ortonormált bázis a  $H^2(\mathbb{D})$  téren, ha  $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_0$ . Ismeretes, hogy az MT-rendszerek magfüggvényeire fennállnak a következő, Christoffel–Darboux-típusú formulák:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\Phi_k^{\mathbf{a}}(z)} \Phi_k^{\mathbf{a}}(\zeta) = \frac{1 - \prod_{j=0}^{n-1} \overline{B_{\mathbf{a}_j}(z)} B_{\mathbf{a}_j}(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta} \quad (n \in \mathbb{N}^*, z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}). \quad (5)$$

Jelölje

$$S_n^{\mathbf{a}} f := \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k^{\mathbf{a}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{a}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

az  $f \in H^2(\mathbb{D})$  MT-rendszer szerinti sorfejtésének részletösszegeit. Az  $S_n^{\mathbf{a}}$  operátorok ortogonális prjekciók  $H^2(\mathbb{D})$  térről a

$$X_n^{\mathbf{a}} := \text{span}\{\Phi_k^{\mathbf{a}} : 0 \leq k < n\} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$



$n$ -dimenziós altérre,

$$\text{dist}_2(f, \mathbf{X}_n^{\mathbf{a}}) := \inf_{g \in \mathbf{X}_n^{\mathbf{a}}} \|f - g\|_2 = \|f - \mathbf{S}_n^{\mathbf{a}} f\|_2 \quad (f \in H^2(\mathbb{D}), n \in \mathbb{N}^*),$$

továbbá  $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}_0$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \mathbf{S}_n^{\mathbf{a}} f\|_2 = 0 \quad (f \in H^2(\mathbb{D})).$$

Kiindulva az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{\ell-1}) \in \mathbb{D}^{\ell}$  vektorból vezessük be ennek az

$$\mathbf{a} := (\mathbf{a}_j, j \in \mathbb{N}), \quad \mathbf{a}_{k+\ell} = \mathbf{a}_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

**periodikus kiterjesztését** és a  $\mathbf{B}_a := \prod_{j=0}^{\ell-1} \mathbf{B}_{\mathbf{a}_j}$  Blaschke-szorzatot. Ekkor a  $\Phi_m^{\mathbf{a}}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) **periodikus MT-rendszer** teljes ONR a  $H^2(\mathbb{D})$  téren, továbbá

$$\Phi_j^{\mathbf{a}} = \Phi_k^{\mathbf{a}} \mathbf{B}_a^n, \quad j = n\ell + k \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < \ell).$$

Az itt felhasználásra kerő függvények és a komplex konjugálás kapcsolatára vonatkoznak az alábbi, nyilvánvaló azonosságok:

$$\begin{aligned} \overline{r_{p,m}(\zeta)} &= r_{\bar{p},m}(\bar{\zeta}), \quad \overline{\mathbf{B}_a(\mathbf{p})} = \mathbf{B}_{\bar{a}}(\bar{\mathbf{p}}), \quad \overline{\Phi_j^{\mathbf{a}}(\mathbf{p})} = \Phi_j^{\bar{\mathbf{a}}}(\bar{\mathbf{p}}) \\ (\bar{\mathbf{a}} := (\bar{\mathbf{a}}_0, \bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{\ell-1}) \in \mathbb{D}^{\ell}, \bar{\mathbf{a}} := (\bar{\mathbf{a}}_n, n \in \mathbb{B}) \in \mathbf{A}, \mathbf{p} \in \mathbb{D}, \zeta \in \mathbb{T}). \end{aligned} \quad (6)$$

Maguk a  $\mathbf{q}_{p,m}$  függvények és MT-Fourier-együtthatói  $r_p$ -ből és ennek MT-Fourier-együtthatóiból deriválással származtathatók:

$$\frac{\partial^m}{\partial \bar{\mathbf{p}}^m} r_p = m! \mathbf{q}_{p,m}, \quad \frac{\partial^m}{\partial \bar{\mathbf{p}}^m} \langle r_p, \Phi_j^{\mathbf{a}} \rangle = m! \langle \mathbf{q}_{p,m}, \Phi_j^{\mathbf{a}} \rangle \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (7)$$

Az első azonosság nyilvánvaló, a második az 1.Lemma, ill. a paraméteres integrál differenciálhatóságára vonatkozó tétel következménye.

Az alábbiakban a  $\mathbf{q}_{p,m}$  függvények periodikus MT-rendszerekkel való approximációjával foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy  $f = \mathbf{q}_{p,m}$  esetén az  $f - \mathbf{S}_{n\ell}^{\mathbf{a}} f$  eltérés felírható explicit alakban. Ezekből az azonosságokból kiindulva becslést adunk elemi racionális függvények MT-sorfejtéseinek hibáira.

**1.Tétel.** *Tetszőleges  $\mathbf{p} \in \mathbb{D}, \mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\ell}, m \in \mathbb{N}$  és  $\zeta \in \mathbb{T}$  esetén*

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad r_p(\zeta) - (\mathbf{S}_{n\ell}^{\mathbf{a}} r_p)(\zeta) &= \mathbf{B}_a(\zeta) \mathbf{B}_{\bar{a}}(\bar{\mathbf{p}}) r_p(\zeta), \\ \text{ii)} \quad \mathbf{q}_{p,m}(\zeta) - (\mathbf{S}_{n\ell}^{\mathbf{a}} \mathbf{q}_{p,m})(\zeta) &= \frac{\mathbf{B}_a(\zeta)}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \bar{\mathbf{p}}^m} (\mathbf{B}_{\bar{a}}(\bar{\mathbf{p}}) r_p(\zeta)). \end{aligned} \quad (8)$$

**Bizonyítás.** i) A bizonyításban rögzítjük az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}^{\ell}$  vektort és az MT-rendszerre, ha ez nem okoz félreértést, a  $\Phi_j := \Phi_j^{\mathbf{a}}$  jelölést fogjuk használni. Minthogy (6) és (7) alapján a  $\mathbf{q}_{p,m}$  függvény MT-együtthatóira

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_{p,m}, \Phi_j \rangle &= \overline{\Phi_j^{(m)}(\mathbf{p}) / m!}, \quad |\Phi_j(\mathbf{p})| = |\Phi_k(\mathbf{p})| |\mathbf{B}_a(\mathbf{p})|^n \\ (j = n\ell + k, \quad 0 \leq k < \ell, j, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

és  $|B_a(p)| < 1$ , azért az  $r_p = q_{p,0}$  függvény MT-Fourier-sora egyenletesen konvergens a  $\mathbb{T}$ -n és előállítja a függvényt. Innen felhasználva a (5) formulát azt kapjuk, hogy  $\zeta \in \mathbb{T}$  esetén

$$\begin{aligned} r_p(\zeta) - (S_{n\ell}^a r_p)(\zeta) &= r_p(\zeta) - \sum_{j=0}^{n\ell-1} \overline{\Phi}_j(p) \Phi_j(\zeta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \overline{\Phi}_k(p) \Phi_k(\zeta) \sum_{j=n}^{\infty} \overline{B}_a^j(p) B_a^j(\zeta) = \\ &= \frac{\overline{B}_a^n(p) B_a^n(\zeta)}{1 - \overline{B}_a(p) B_a(\zeta)} \sum_{k=0}^{\ell-1} \overline{\Phi}_k(p) \Phi_k(\zeta) = \\ &= \frac{\overline{B}_a^n(p) B_a^n(\zeta)}{1 - \overline{p}\zeta} = \overline{B}_a^n(p) B_a^n(\zeta) r_p(\zeta), \end{aligned}$$

ezzel az i) állítást igazoltuk.

A most igazolt

$$r_p(\zeta) - \sum_{j=0}^{n\ell-1} \langle f, \Phi_j^a \rangle \Phi_j^a(\zeta) = B_a(\zeta) \overline{B}_a(\overline{p}) r_p(\zeta)$$

egyenlőség mindkét oldalának véve az  $\overline{p}$  változó szerinti  $m$ -edik parciális deriváltját (7) alapján a bizonyítandó ii) egyenlőséget kapjuk. Ezzel a tételt igazoltuk.  $\square$

A (8) formulát felhasználva az eltérés  $H^q(\mathbb{D})$  normájára adódik a

**1.Következmény.** *Tetszőleges  $1 \leq q \leq \infty$  esetén*

$$\|r_p - S_{n\ell}^a r_p\|_q = |B_a(p)|^n \|r_p\|_q \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

**2.Következmény.** *Tetszőleges*

$$f_\lambda := \sum_{p \in P} \lambda_p r_p \in \mathfrak{R}_P$$

*függvényre*

$$f_\lambda(\zeta) - (S_{n\ell}^a f_\lambda)(\zeta) = B_a^n(\zeta) \tilde{f}_\lambda(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T})$$

*ahol*

$$\tilde{f}_\lambda := \sum_{p \in P} B_a^n(p) \lambda_p r_p.$$

**3.Következmény.** *Tetszőleges  $f_\lambda \in \mathfrak{R}_P$  függvényre  $1 \leq q \leq \infty$  esetén érvényes a*

$$\text{dist}_q(f_\lambda, X_{n\ell}^a) \leq \|f_\lambda - S_{n\ell}^a f_\lambda\|_q \leq \sum_{p \in P} |\lambda_p| |B_a(p)|^n \|r_p\|_q$$

*becslés.*

A szokásos  $\|\cdot\|_q$  norma helyett a vele ekvivalens

$$\|f_\lambda\|_{[q]} := \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} |\lambda_{\mathbf{p}}| \|r_{\mathbf{p}}\|_q \quad (9)$$

normát használva az  $\mathfrak{R}_{\mathbf{p}}$  téren az

$$\mathfrak{r}_{\mathbf{p}} := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^\ell} \sup_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} |\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathbf{p})|$$

általánosított hiperbolikus fedőkörrel a 2. Következmény alapján a  $\mathbf{C}$  faktort nem tartalmazó, egyszerű becslés adható: 2.Tétel. Tetszőleges  $1 \leq q \leq \infty$  paraméterre és

$n \in \mathbb{N}$  számra

$$\mathfrak{w}_{n\ell, [q]}(\mathbf{P}) := \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{D}^\ell} \sup_{f \in \mathfrak{R}_{\mathbf{p}}, \|f\|_{[q]} \leq 1} \text{dist}_{[q]}(f, \mathbf{X}_{n\ell}^{\mathbf{a}}) \leq \mathfrak{r}_{\mathbf{p}}^n, \quad (10)$$

Valóban, minthogy tetszőleges  $f_\lambda \in \mathfrak{R}_{\mathbf{p}}$  esetén

$$|f_\lambda - S_{n\ell}^{\mathbf{a}}(f_\lambda)| \leq \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} |\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathbf{p})|^n |\lambda_{\mathbf{p}}| \|r_{\mathbf{p}}\|_q \leq \max_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} |\mathbf{B}_{\mathbf{a}}(\mathbf{p})|^n \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} |\lambda_{\mathbf{p}}| \|r_{\mathbf{p}}\|_q,$$

ahonnan (10) következik.

Felhasználva a

$$\|r_{\mathbf{p}}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{p}|^2}}, \quad \|r_{\mathbf{p}}\|_\infty = \frac{1}{1 - |\mathbf{p}|} \quad (\mathbf{p} \in \mathbb{D})$$

becsléseket kapcsolatot teremthetünk a  $\|\cdot\|_q$  és  $\|\cdot\|_{[q]}$  normák között.

Az  $\mathfrak{r}_{\mathbf{p}}$  sugárra a  $\mathbf{P}$  halmaz bizonyos geometriai tulajdonságai alapján jól használható becslést adhatunk. Nevezetesen tegyük fel, hogy a  $\mathbf{P}$  halmaz lefedhető páronként diszjunkt  $\mathcal{C}_j(\mathbf{a}_j)$   $1 \leq j \leq m$  hiperbolikus körrel. Könnyen belátható, hogy ekkor

$$\mathfrak{r}_{\mathbf{p}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} r_j.$$

Speciálisan, ha  $\mathbf{P} = \{\mathbf{a}_j : 1 \leq j \leq n\}$ , akkor az  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) \in \mathbb{D}^m$  vektort véve  $S_m f_\lambda = f_\lambda$ .

## 6. FEJEZET

# A Q-ALGORITMUS

Az

$$L_m^a(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z} B_a^m(z) \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{D}) \quad (1)$$

diszkrét Laguerre-függvények a  $H^2(\mathbb{T})$  tér  $e_m(e^{it}) := e^{imt}$  ( $n \in \mathbb{N}, t \in [0, 2\pi)$ ) kanonikus bázisából a  $(\mathbb{B}, \circ)$  Blaschke-csoport

$$(U_{a^{-1}}f)(z) := \frac{\sqrt{\epsilon(1-|a|^2)}}{1-\bar{a}z} f(B_a(z)) \quad (f \in H^2(\mathbb{D}), z \in \bar{\mathbb{D}}) \quad (2)$$

unitér reprezentációja segítségével származtathatók, nevezetesen  $L_m^a = U_{a^{-1}}e_m$ , ahol  $a = (a, 1) \in \mathbb{B}, m \in \mathbb{N}$ . Ebből az összefüggésből a diszkrét Laguerre-rendszer számos fontos tulajdonsága, mint pl. ortogonalitása, teljessége, stb. a trigonometrikus rendszer hasonló tulajdonságaiból közvetlenül adódik. Ez a kapcsolat lehetővé teszi, hogy ezekben a vizsgálatokban felhasználhatunk olyan csoporttal kapcsolatos fogalmakat, mint invariáns mérték és invariáns (hiperbolikus) távolság, konvolúció stb.

Több olyan polinomok gyökeinek, ill. mátrixok sajátértékeinek meghatározására szolgáló klasszikus numerikus módszer ismert, amelyek irányításelméleti keretbe illeszthetők. Ilyen például a Bernoulli-módszer [C],[F], amellyel valós együtthatós polinom domináns gyökét határozhatjuk meg. Ebben a szóban forgó polinomot egy differenciáegyenlet karakterisztikus polinomjának (egy diszkrét SISO rendszer átviteli függvénye reciprokának) tekintve az egységimpulzus válaszsorozataként előállítjuk az átviteli függvény trigonometrikus Fourier-együtthatóinak sorozatát és ezekből, az egymást követő tagok hányadosának határértékeként megkaphatjuk a domináns gyököket. A módszer egy módosításával hasonló elvek alapján kiszámíthatók a domináns konjugált gyökpárok [C], [F].

Hasonlóan interpretálható a mátrixok domináns sajátértékeinek kiszámítására vonatkozó hatványiterációs (von Mises-féle) algoritmus [F], amelyben egy elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer megoldásaiból (egy speciális diszkrét MIMO rendszerből) indulunk ki.

Ebben a fejezetben diszkrét rendszerek identifikációjával kapcsolatos eredményekről adunk egy áttekintést. Az általunk kifejlesztett algoritmusokban az átviteli függvény trigonometrikus Fourier-együtthatói helyett a diszkrét Laguerre-Fourier-együtthatókból indulunk ki. Ezeknek az együtthatóknak a kiszámítása az átviteli függvény ismeretében argumentum transzformáció alkalmazásával visszavezethető a DFT ill. FFT algoritmusokra [24], [25], [28]. Gyakran előfordul, hogy nem az átviteli függvény, hanem (pl. a rendszer egységimpulzusra adott válaszsorozataként) annak trigonometrikus Fourier-együtthatói állnak közvetlenül rendelkezésünkre. Ilyenkor a trigonometrikus

Fourier-együtthatóiból egy  $\ell^2 \rightarrow \ell^2$  mátrix-transzformációval térhetünk át a diszkrét Laguerre-Fourier-együtthatókra. Ez az  $\mathcal{U}(\mathbf{a}) = [\langle \mathbf{U}_a \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle]_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  mátrix a Blaschke-csoport egy unitér reprezentációja a  $\ell^2$  Hilbert-téren. Ebből a mátrix-transzformációnak olyan fontos tulajdonságai következnek, amelyek a javasolt algoritmus elemzésében is jól használhatók.

A mátrix elemeinek több, egymástól különböző előállítását fogjuk levezetni. Többek között kifejezhetők a zárt diszken analitikus  $L_m^a$  függvények

$$L_m^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_m^a(n) z^n \quad (m \in \mathbb{N}, z \in \overline{\mathbb{D}}) \quad (3)$$

hatványsorának  $\ell_m^a(n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) együtthatóival. Közvetlenül látható, hogy  $\ell_0^a(n) = \sqrt{1 - |\mathbf{a}|^2} \bar{\mathbf{a}}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), továbbá tetszőleges  $m$  esetén érvényes az

$$\ell_m^a(n) \sim \bar{\mathbf{a}}^{n-m} \binom{n}{m} (1 - |\mathbf{a}|^2)^{m+1/2} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4)$$

aszimptotikus formula. A (4) összefüggés képezik a racionális függvények pólusainak meghatározására szolgáló Q algoritmus alapját.

A továbbiakban csak olyan *valódi racionális függvényekre szorítkozunk, amelyek analitikusak a zárt diszken*, más szóval, amelyek pólusai a zárt diszken kívül esnek. Ezek halmazát az  $\mathfrak{R}_0$  szimbólummal jelöljük. A parciális felbontással kapcsolatos ismert állítás szerint az  $r_{b,n}(z) := 1/(1 - \bar{\mathbf{b}}z)^{n+1}$  ( $\mathbf{b} \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$ ) elemi racionális függvények generálják az  $\mathfrak{R}_0$  függvényosztályt: minden  $\mathfrak{R}_0$ -beli függvény egyértelműen állítható elő elemi racionális függvények lineáris kombinációjaként. Könnyen belátható, hogy az  $r_k^b$  ( $0 \leq k < n$ ) elemi racionális függvények és az  $L_k^b$  ( $0 \leq k < n$ ) diszkrét Laguerre-függvények ugyanazt az alteret feszítik ki, ezen túlmenően a Laguerre-rendszer a szóban forgó altérnek egy ortonormált bázisa. Ebből következik, hogy minden  $f \in \mathfrak{R}_0$  függvény egyértelműen előállítható diszkrét Laguerre-függvények lineáris kombinációjaként:

$$f = \sum_{b \in P} \sum_{0 \leq m < \nu_b} \lambda_m^b L_m^b,$$

ahol  $P$  az  $f \in \mathfrak{R}_0$  inverzpólusainak halmazát,  $\nu_b$  a  $\mathbf{b}$  pólus multiplicitását jelöli. Ennek alapján az  $f \in \mathfrak{R}_0$  racionális függvény diszkrét Laguerre-Fourier-együtthatói felírhatók

$$\langle f, L_n^a \rangle = \sum_{b \in P} \sum_{0 \leq m < \nu_b} \lambda_m^b \langle L_m^b, L_n^a \rangle \quad (5)$$

alakban. A Q algoritmus geometriai háttérének megvilágítására, felhasználva a diszkrét Laguerre-rendszer  $L_n^a = \mathbf{U}_{a^{-1}} \mathbf{e}_n$  ( $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, 1) \in \mathbb{B}$ ) származtatását, valamint az unitér reprezentáció tulajdonságait, írjuk át az (5)-ben előforduló skaláris szorzatokat

$$\langle L_m^b, L_n^a \rangle = \langle \mathbf{U}_{b^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{U}_{a^{-1}} \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{U}_{a \circ b^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{U}_{c^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

alakba, ahol  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, 1), \mathbf{b} = (\mathbf{b}, 1) \in \mathbb{B}$  és a 2.2.(7) formula alapján  $\mathbf{c} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{B}_a(\mathbf{b}), \epsilon)$ . Innen a következő, a Q algoritmusban centrális szerepet játszó összefüggést kapjuk:

$$\langle L_m^b, L_n^a \rangle = \epsilon_b \ell_m^{c_b}(n) \quad (m, n \in \mathbb{N}, c_b = \mathbf{B}_a(\mathbf{b}), \epsilon_b \in \mathbb{T}), \quad (6)$$

ahol  $\epsilon_b \in \mathbb{T}$  csak az  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{T}$  paramétereiktől függ. Speciálisan

$$\langle L_0^b, L_n^a \rangle = \epsilon_b \sqrt{1 - |\mathbf{c}_b|^2} \bar{c}_b^n \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{c}_b = B_a(\mathbf{b})). \quad (7)$$

Abban az esetben, amikor az  $f \in \mathfrak{R}_0$  valamennyi pólusának a multiplicitása 1 az  $f$  függvény az  $L_0^b$  speciális Laguerre-függvények lineáris kombinációja. Egy pólus esetén az  $f$  függvény  $L_0^b$ -nek választható. Ilyenkor a (7) formulát alkalmazva azt kapjuk, hogy az egymásután következő Laguerre-Fourier-együtthatók hányadosa állandó:

$$\frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} = \bar{c}_b \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{c}_b := B_a(\mathbf{b})).$$

A  $\mathbf{c}_b$  ismeretében áttérve a  $B_a$  függvény  $B_a^{-1} = B_{-a}$  inverzére a  $\mathbf{b}$  pólus egyszerűen adódik:  $\mathbf{b} = B_{-a}(\mathbf{c}_b)$ .

Több egyszeres multiplicitású pólus esetén jelölje  $\mathbf{b}_0 \in \mathcal{P}$  azt az inverzpólust, amelynek az  $\mathbf{a}$ -tól mért pszeudohiperbolikus  $\rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := |B_a(\mathbf{b})|$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{D}$ ) távolsága a legnagyobb:  $\rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}_0) > \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ( $\mathbf{b} \in \mathcal{P}, \mathbf{b} \neq \mathbf{b}_0$ ). Ekkor bevezetve a  $\gamma_b := \lambda_b \epsilon_b \sqrt{1 - |\mathbf{c}_b|^2}$  ( $\mathbf{b} \in \mathcal{P}'$ ) jelölést a szóban forgó hányadosra (6), (7) és  $|\mathbf{c}_b/\mathbf{c}_{b_0}| = \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})/\rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}_0) < 1$  alapján

$$\frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} = \frac{\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{P}'} \gamma_b \bar{c}_b^{n+1}}{\sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{P}'} \gamma_b \bar{c}_b^n} = \frac{\gamma_{b_0} \bar{c}_{b_0} + \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{P}', \mathbf{b} \neq \mathbf{b}_0} \gamma_b \bar{c}_b^{n+1} / \bar{c}_{b_0}^n}{\gamma_{b_0} + \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{P}', \mathbf{b} \neq \mathbf{b}_0} \gamma_b \bar{c}_b^n / \bar{c}_{b_0}^n} \rightarrow \bar{c}_{b_0} \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty).$$

Kiindulva a (6) formulából hasonlóan igazolható, hogy egynél magasabb multiplicitású pólusokkal rendelkező  $f \in \mathfrak{R}_0$  függvényekre a  $\mathbb{D}$  diszk egy, a hiperbolikus geometriai fogalmaival jellemzhető, nullmértékű  $\tilde{\mathbb{D}}$  részhalmazának pontjait kivéve létezik a

$$(Qf)(\mathbf{a}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D} \setminus \tilde{\mathbb{D}}) \quad (8)$$

határérték, a  $\mathbb{D} \setminus \tilde{\mathbb{D}}$  halmaz felbomlik páronként diszjunkt  $\mathbb{D}_b$  ( $\mathbf{b} \in \mathcal{P}$ ) halmazok egyesítésére és ezeken a  $Qf$  állandó:  $(Qf)(\mathbf{a}) = \bar{B}_a(\mathbf{b})$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}_b$ ).

A diszkrét Laguerre-rendszer említett származtatása lehetővé teszi, hogy a  $Q$  operátorra és a  $\tilde{\mathbb{D}}$  és  $\mathbb{D}_b$  ( $\mathbf{b} \in \mathcal{P}$ ) halmazokra szemléletes geometriai interpretációt adjunk, kiindulva az  $f$  racionális függvény pólusainak az egységkörre vett tükörképeiből, az  $f$  inverzpólusainak  $\mathcal{P}$  halmazából. Nevezetesen a  $\tilde{\mathbb{D}}$  halmaz az inverzpólus-párok hiperbolikus felezőmerőlegeseinek uniójaként állítható elő:  $\tilde{\mathbb{D}} := \cup_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{P}'} \mathcal{M}_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}$ , ahol  $\mathcal{M}_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2} := \{\mathbf{a} \in \mathbb{D} : \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) = \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)\}$ . Ezek a felezőmerőlegesek felbontják a  $\mathbb{D}$  diszket páronként diszjunkt  $\mathbb{D}_b$  ( $\mathbf{b} \in \mathcal{P}$ ) tartományokra, ahol

$$\mathbb{D}_b = \{\mathbf{a} \in \mathbb{D} \setminus \tilde{\mathbb{D}} : \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > \rho_*(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max_{\mathbf{c} \in \mathcal{P}, \mathbf{c} \neq \mathbf{b}} \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{c})\}$$

és amelyeken a  $Qf$  függvény konstans. Innen követhet, hogy a most ismertett eljárással minden olyan  $\mathbf{b} \in \mathcal{P}$  inverzpólus rekonstruálható, amelyre  $\mathbb{D}_b \neq \emptyset$  ( $\mathbf{a} \in \mathcal{P}$  inverzpólus *nem rejtőzködő*.) A konvergencia sebessége kifejezhető az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  pontnak

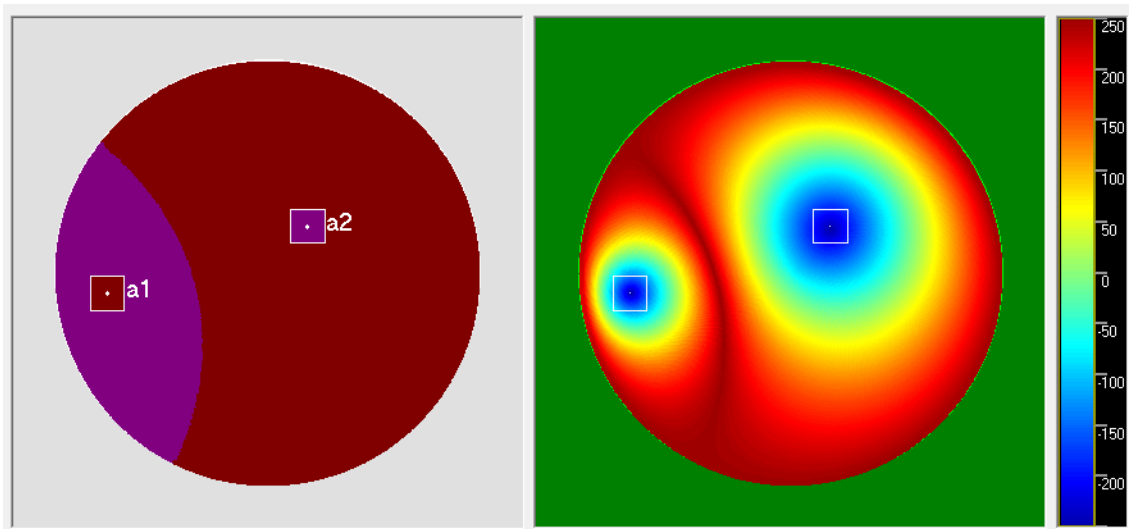
az inverzpólusoktól mért maximális hiperbolikus távolsággal [24], [25], nevezetesen pl. egyszeres pólusok esetén

$$\left| \frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} - \bar{B}_a(b) \right| = O(\kappa_a^n) \quad (a \in \mathbb{D}_b, n \rightarrow \infty), \quad \kappa_a := \rho_*(a, b) / \rho(a, b).$$

A (8) formulából következik, hogy

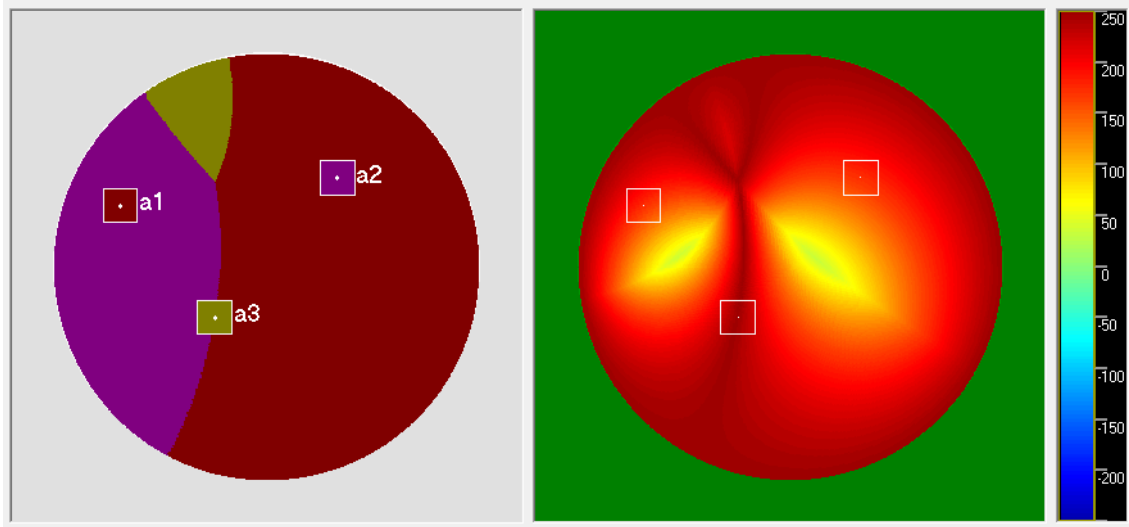
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\langle f, L_n^a \rangle)^{1/n} = (Qf)(a) = \bar{B}_a(b) \quad (a \in \mathbb{D}_b, b \in P).$$

Ez a formula, amely (6)-t felhasználva közvetlenül is igazolható, alapját képezheti egy pólusok rekonstrukciójára szolgáló másik algoritmusnak.



1.ábra

Az 1.ábra első képén az  $a_1, a_2$  inverzpólusok esetén szemléltetjük azokat a tartományokat, amelyeken a  $Q$  függvény állandó. A második képen színskálát alkalmazva szemléltetjük a  $Q$  algoritmus konvergencia sebességét leíró  $\kappa_a$  ( $a \in \mathbb{D}$ ) függvényt, amelynek értékei 0 és 1 közé esnek.



2.ábra

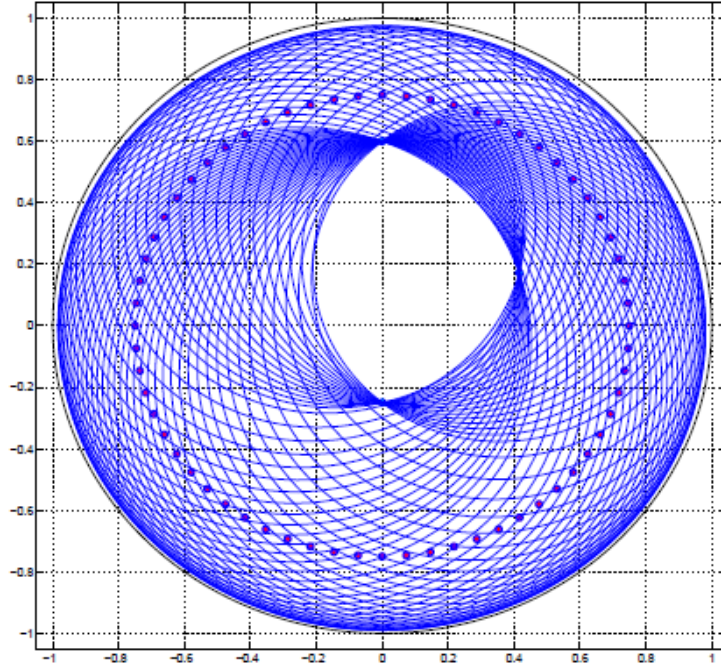
Az 3.ábra első képén az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  inverzpólusok esetén szemléltetjük azokat a tartományokat, amelyeken a  $Q$  függvény állandó. A második képen színskálát alkalmazva szemléltetjük a  $Q$  algoritmus konvergencia sebességét leíró  $\kappa_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ ) függvényt, amelynek értékei 0 és 1 közé esnek.

A nem rejtőzködő pólusok már a  $q_{\mathbf{a}} := |Qf(\mathbf{a})|$  abszolút érték ismeretében is meghatározhatók, felhasználva a Poincaré-féle modell hiperbolikus köreit. A

$$q_{\mathbf{a}} := |(Qf)(\mathbf{a})| = |B_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})| = \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{D})$$

egyenlőség úgy interpretálható, hogy a  $\mathbf{b} \in P'$  inverzpólus rajta van a  $q_{\mathbf{a}}$  sugarú  $\mathcal{C}_{q_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$  hiperbolikus körön. Ezt az észrevételt egy  $\mathbf{a}_1$  és egy  $\mathbf{a}_2$  pontból kiindulva alkalmazva adódik, hogy a  $\mathbf{b}$  pont a  $\mathcal{C}_{q_{\mathbf{a}_j}}(\mathbf{a}_j)$  ( $j = 1, 2$ ) körök egy metszéspontja feltéve, hogy  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{D}_{\mathbf{b}}$ . Ilyenkor a  $\mathbf{b}$  pólus a  $B_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{b}) = B_{\mathbf{a}_2}(\mathbf{b})$  egyenlet megoldása. Ez azzal ekvivalens, hogy  $B_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ , ahol  $\mathbf{c} = \mathbf{a}_2^{-1} \circ \mathbf{a}_1^{-1}$  ( $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1, 1), \mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_2, 1)$ ), azaz a  $\mathbf{b}$  pont a  $B_{\mathbf{c}}$  leképezés fixpontja. Ez az észrevétel képezi az alapját annak az algoritmusnak, amely a  $\mathbf{b}$  inverzpólusok meghatározására használható. Az alábbi ábrán egy három egyszeres pólussal rendelkező racionális függvény esetén szemléltetjük a módszert. Az origóval koncentrikus körön vettük fel az  $\mathbf{a}$  paramétert, mindegyikhez meghatároztuk a  $q_{\mathbf{a}}$  sugarat és ábrázoltuk a  $\mathcal{C}_{q_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$  hiperbolikus köröket. Ezek metszéspontjaiként szemléletesen kirajzolódik a három  $\mathbf{b}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) inverzpólusnak megfelelő  $\bar{B}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_j)$  három pont.





4.ábra

A (3) sorfejtés alapján, az  $n$  és  $m$  szerepét felcserélve, az  $f \in H^2(\mathbb{T})$  függvénynek a  $Q$  algoritmusban előforduló diszkrét Laguerre-Fourier-együtthatóit kifejezhetjük a trigonometrikus Fourier-együtthatóival:

$$\langle f, L_n^a \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\ell_n^a(m)} \langle f, e_m \rangle \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{D}). \quad (9)$$

Ezt az összefüggést használhatjuk abban az esetben, ha az átviteli függvény trigonometrikus Fourier-együtthatóit ismerjük, pl. a rendszer egységimpulzusra adott válaszsorozatáknaként.

A

$$(Qf)(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle f, L_n^a \rangle)^{1/n}$$

határértékek kiszámítása akár az  $f$  trigonometrikus-, akár diszkrét Laguerre-Fourier-együtthatóiból indulunk ki, számos numerikus problémát vet fel. Az ezzel kapcsolatos eredményeket a [24], [25] dolgozatokban publikáltuk.

Az 1.pontban a (3) hatványsor  $\ell_m^a$  együtthatóinak explicit előállításával és aszimptotikus viselkedésével foglalkozunk. Az  $\ell_m^a$  sorozatok a  $[0, \infty)$  intervallumon az  $e^{-\alpha t}$  ( $t \geq 0$ ) súlyfüggvényre ortogonális *Laguerre-féle polinomrendszer* analogonjának tekinthető. Többek között megmutatjuk, hogy az  $\ell_m^a$  sorozatra fennáll a *Rodrigues-formula diszkrét megfelelője* [J].

A 2.pontban megadjuk a Blaschke-csoport (2) reprezentációjának mátrixát a trigonometrikus rendszer bázisában. Megmutatjuk, hogy a mátrix elemei kifejezhetők a

Zernike-függvényekkel, amelyek széles körben alkalmazhatók, többek között az optikában és a szemészetben [10], [11], [21].

A 3.pontban részleteiben ismertetjük a Q-algortmust, amellyel racionális függvények pólusait és mátrixok sajátértékeit határozhatjuk meg.

## 6.1. AZ $\ell_m^a$ SOROZAT

Ebben a pontban előállítjuk az

$$L_m^a(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z} B_a^m(z) = \sqrt{1-|a|^2} \frac{(z-a)^m}{(1-\bar{a}z)^{m+1}} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D}, m \in \mathbb{N})$$

diszkrét Laguerre-függvények

$$L_m^a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_m^a(n) z^n \quad (|z| \leq 1) \quad (10)$$

hatványsorának együtthatóit. Az  $\ell_m^a(n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) számok a  $\mathbb{T}$  peremen vett  $L_m^a(z)$  ( $z \in \mathbb{T}$ ) diszkrét Laguerre függvények trigonometrikus Fourier-együtthatói. Ezekre bebizonyítjuk az alábbi aszimtotikus formulákat, amelyek alapján a (4) állítás igazolható:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \ell_0^a(n) = \sqrt{1-|a|^2} \bar{a}^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{D}), \\ \text{ii)} \quad & \ell_m^a(n) = \sqrt{1-|a|^2} \bar{a}^{n-m} \binom{n}{m} \left( (1-|a|^2)^m + \omega_m^a(n) \right) \\ & (|\omega_m^a(n)| \leq (1+|a|^2)^m M_m/n, n \geq m), \end{aligned} \quad (11)$$

ahol  $M_m$  csak  $m$ -től függő konstans. Innen látható, hogy az  $\ell_m^a$  sorozatból kiindulva az  $a$  paraméter rekonstruálható:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{\ell_0^a(n+1)}{\ell_0^a(n)} = \bar{a} \quad (a \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}), \\ \text{ii)} \quad & \frac{\ell_m^a(n+1)}{\ell_m^a(n)} - \bar{a} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty, m \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ezek az összefüggések képezik az átviteli függvények rekonstrukciójára szolgáló Q algoritmus háttérét.

Mint hogy az  $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$  paraméterre

$$\begin{aligned} L_m^a(z) &= \sqrt{1-|r|^2} \frac{(z-re^{i\alpha})^m}{(1-rze^{-i\alpha})^{m+1}} = e^{im\alpha} \sqrt{1-|r|^2} \frac{(ze^{-i\alpha}-r)^m}{(1-rze^{-i\alpha})^{m+1}} = \\ &= e^{im\alpha} L_m^r(ze^{-i\alpha}), \end{aligned}$$

azért

$$\ell_m^a(n) = e^{im\alpha} \ell_m^r(n) e^{-in\alpha} \quad (m, n \in \mathbb{N}, a = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}). \quad (12)$$

Ennek alapján elegendő  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$  ( $0 \leq \mathbf{r} \leq 1$ ) valós paraméterekre a diszkrét Leguerre-rendszer hatványsorát előállítani.

A binomiális sorfejtés képletét alkalmazva, továbbá

$$(-1)^k \binom{-\mathbf{m}-1}{k} = \binom{\mathbf{m}+k}{k} = \binom{\mathbf{m}+k}{\mathbf{m}} \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{N})$$

figyelembevételével hatványsorok szorzatát véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-rz)^{\mathbf{m}+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mathbf{m}+k}{\mathbf{m}} r^k z^k \quad (|z| \leq 1), \\ (z-r)^{\mathbf{m}} &= \sum_{\ell=0}^{\mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\ell} z^{\ell} (-r)^{\mathbf{m}-\ell} \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sqrt{1-r^2} \frac{(z-r)^{\mathbf{m}}}{(1-rz)^{\mathbf{m}+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}) z^n \quad (|z| \leq 1), \\ \ell_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}) &:= \sqrt{1-r^2} \sum_{\mathbf{n}-\mathbf{m} \leq k \leq \mathbf{n}} r^k \binom{\mathbf{m}+k}{\mathbf{m}} (-r)^{\mathbf{m}-\mathbf{n}+k} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}-k}, \end{aligned}$$

következésképpen

$$\ell_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}) = \sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \tilde{\ell}_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}), \quad \tilde{\ell}_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}) := \sum_{\ell=0}^{\mathbf{m}} (-1)^{\ell} r^{2\ell} \binom{\mathbf{n}+\ell}{\mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\ell} \quad (\mathbf{m} \leq \mathbf{n}). \quad (13)$$

Speciálisan

$$\begin{aligned} \ell_0^r(\mathbf{n}) &= \sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{n}} \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}), \\ \ell_1^r(0) &= -\sqrt{1-r^2} r, \quad \ell_1^r(\mathbf{n}) = \sqrt{1-r^2} (\mathbf{n} r^{\mathbf{n}-1} (1 - (1 + 1/\mathbf{n}) r^2)) \quad (1 \leq \mathbf{n}), \\ \ell_2^r(0) &= \sqrt{1-r^2} r^2, \quad \ell_2^r(1) = \sqrt{1-r^2} (3r^3 - 2r), \\ \ell_2^r(\mathbf{n}) &= \sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{n}-2} \left( \binom{\mathbf{n}}{2} - 2r^2 \binom{\mathbf{n}+1}{2} + r^4 \binom{\mathbf{n}+2}{2} \right) \quad (2 \leq \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$0 \leq \frac{\binom{\mathbf{n}+\ell}{\mathbf{m}}}{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}} - 1 \leq r_{\mathbf{m}}(\mathbf{n}) := \frac{\binom{\mathbf{n}+\mathbf{m}}{\mathbf{m}} - \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}}{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}} \leq \frac{M_{\mathbf{m}}}{\mathbf{n}} \quad (0 \leq \ell \leq \mathbf{m}),$$

ahol  $M_{\mathbf{m}}$  az  $x r_{\mathbf{m}}(x)$  ( $x \geq \mathbf{m}+1$ ) racionális függvénynek az  $[\mathbf{m}+1, \infty)$  intervallumon vett szuprémumát jelöli. Minthogy a szóban forgó racionális függvénynek a  $+\infty$ -ben létezik a véges határértéke, azért  $M_{\mathbf{m}} < \infty$ .

A fentiek alapján

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n})}{\sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}} &= \sum_{\ell=0}^{\mathbf{m}} (-1)^{\ell} r^{2\ell} \binom{\mathbf{m}}{\ell} + \sum_{\ell=0}^{\mathbf{m}} (-1)^{\ell} r^{2\ell} \binom{\mathbf{m}}{\ell} \left( \frac{\binom{\mathbf{n}+\ell}{\mathbf{m}}}{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}} - 1 \right) = \\ &= (1-r^2)^{\mathbf{m}} + \omega_{\mathbf{m}}^r(\mathbf{n}), \end{aligned}$$

ahol

$$|\omega_m^r(\mathbf{n})| \leq (1+r^2)^m \frac{M_m}{\mathbf{n}}.$$

Innen a (11) ii) állítás következik.

A Parseval formula alapján

$$\langle \mathbf{L}_{m_1}^a, \mathbf{L}_{m_2}^a \rangle_{H^2} = \langle \ell_{m_1}^a, \ell_{m_2}^a \rangle_{\ell^2} = \delta_{m_1, m_2} \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{N}), \quad (14)$$

következésképpen az  $\ell_m^a$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) sorozatok teljes ortonormált rendszert alkotnak a  $\ell^2$  Hilbert-téren.

Az (13) formulában bevezetett  $\tilde{\ell}_m^r$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) sorozatok a  $[0, \infty)$  intervallumon értelmezett  $\mathcal{L}_m := \mathcal{L}_m^0$  Laguerre-rendszer (lásd [J]) analogonjának tekinthető a sorozatok terében. Ennek alátámasztására megmutatjuk, hogy a (13) egyenlőség a Laguerre-polinomokra vonatkozó

$$\mathcal{L}_m(t) = \frac{e^{-t}}{m!} \left( \frac{d}{dt} \right)^m (e^{-t} t^m) \quad (t \in (0, \infty))$$

Rodrigues-formula diszkrét analogonjának tekinthető a  $\tilde{\ell}_m^r$  sorozatra. Valóban jelölje  $\mathfrak{l}$  az  $\mathbf{x} = (x_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$  komplex számsorozatok terét,  $\Delta : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$ ,  $(\Delta \mathbf{x})_n := x_{n+1} - x_n$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) a differencia operátort a sorozattéren. Egyszerűen igazolható, hogy

$$(\Delta^m \mathbf{x})_n = \sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell x_{n+\ell} \binom{m}{\ell} \quad (m, \mathbf{n} \in \mathbb{N}).$$

Vezessük be az

$$\chi^m(\mathbf{n}) := (\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+2) \cdots (\mathbf{n}+m) \quad (\mathbf{n}, m \in \mathbb{N}), \quad \exp_r(\mathbf{n}) = r^{2\mathbf{n}} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

sorozatokat, amelyek az  $t^m$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) hatványfüggvények és az exponenciális függvény diszkrét megfelelői. A  $\chi^m \exp_r$  sorozat a Rodrigues-formulában szereplő  $t^m e^{-t}$  függvény megfelelőjének tekinthető. A  $\Delta^m$  operátort erre a sorozatra alkalmazva (13) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_m^r(\mathbf{n}) &= r^{-2\mathbf{n}} \sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell r^{2(\mathbf{n}+\ell)} \binom{\mathbf{n}+\ell}{m} \binom{m}{\ell} = \\ &= \frac{\exp_r(-\mathbf{n})}{m!} (\Delta^m (\chi^m \exp_r))(\mathbf{n}) \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

következésképpen a  $\tilde{\ell}_m^r$  sorozatra érvényes a Rodrigues-formula következő diszkrét analogonja:

$$\tilde{\ell}_m^r = \frac{1}{m!} \exp_{-r} \Delta^m (\chi^m \exp_r) \quad (r \in [0, 1], \mathbf{n} \in \mathbb{N}). \quad (15)$$

Egyszerűbb formulát kapunk, ha az  $\mathbf{U}_a$  unitér reprezentáció definícióját az  $\mathbf{a}$  helyett a  $\mathbf{a}^{-1}$  paraméterre írjuk fel:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} e_m)(z) &= \frac{\sqrt{\epsilon(1-|\mathbf{a}|^2)}}{1-\bar{\mathbf{a}}z} (\epsilon B_a(z))^m = \epsilon^{m+1/2} L_m^a(z) \\ (\mathbf{a} &= (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}, m \in \mathbb{N}, z \in \bar{\mathbb{D}}), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = \epsilon^{m+1/2} \ell_m^{\mathbf{a}}(\mathbf{n}) \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}) \quad (16)$$

következik.

Jelölje  $\mathcal{U}(\mathbf{a})$  az  $\mathbf{U}_{\mathbf{a}} : \mathbb{H}^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{H}^2(\mathbb{T})$  operátor mátrixát az  $\mathbf{e}_n$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ) bázisban:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) := \left[ \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) \right]_{(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathbb{N}^2}, \quad \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) := \langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{B}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}). \quad (17)$$

A (12) azonosságot, valamint az  $\mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{a}}^*$  összefüggést felhasználva kifejezhetjük az  $\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a})$  számokat a  $\ell_m^{\mathbf{a}}(\mathbf{n})$  együtthatókkal:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{U}_{\mathbf{a}}^* \mathbf{e}_m \rangle = \overline{\langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle} = \\ &= \epsilon^{-(m+1/2)} \overline{\ell_m^{\mathbf{a}}(\mathbf{n})} \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \epsilon) \in \mathbb{B}), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) = \epsilon^{-(m+1/2)} e^{i(n-m)\alpha} \ell_m^r(\mathbf{n}) \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{a} = (re^{i\alpha}, \epsilon) \in \mathbb{B}). \quad (18)$$

Az  $\mathcal{U}(\mathbf{a})$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) mátrixsereg a Blaschke-csoport egy unitér reprezentációja a  $\ell^2$  téren:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \mathcal{U}(\mathbf{a}^{-1}) = \mathcal{U}^{-1}(\mathbf{a}) = \mathcal{U}^*(\mathbf{a}) \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{B}), \\ \text{ii)} \quad & \mathcal{U}(\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2) = \mathcal{U}(\mathbf{a}_1) \mathcal{U}(\mathbf{a}_2) \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{B}), \\ \text{iii)} \quad & \mathcal{U}(\epsilon) = \mathcal{I} = \left[ \delta_{mn} \right]_{(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathbb{N}^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Az  $\mathcal{U} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  függvény a Blaschke-csoport mátrix értékű exponenciális függvényének tekinthető. Mivel a  $\mathbb{B}_0$  és  $\mathbb{B}_1$  részcsoportok generálják a Blaschke-csoportot (lásd a 2.2. pontot), elegendő az  $\mathcal{U}$  függvényt az  $\mathbf{o} := (0, \epsilon) \in \mathbb{B}_0$ ,  $\mathbf{r} := (r, 1) \in \mathbb{B}_1$  pontokban meghatározni. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{o}) &= \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{U}_{\mathbf{o}^{-1}} \mathbf{e}_m \rangle = \langle \mathbf{e}_n, \epsilon^{1/2} \mathbf{e}_n \rangle = \epsilon^{-1/2} \delta_{mn}, \\ \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{U}_{\mathbf{r}^{-1}} \mathbf{e}_m \rangle = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \frac{(e^{-it} - r)^m}{(1 - re^{-it})^{m+1}} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Az  $\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a})$  mátrixelemek kifejezhetők a Zernike-függvényekkel, ill. a Jacobi polinomokkal [10], [11], [21]. Ezek az összefüggések felhasználhatók az  $\mathcal{U}$  elemeinek kiszámítására.

## 6.2. AZ $\mathcal{U}$ MÁTRIX ÉS A ZERNIKE-FÜGGVÉNYEK

Ebben a pontban előállítjuk a Blaschke-csoport  $\mathbf{U}_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$ ) unitér reprezentációjának

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) := \left[ \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) \right]_{(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathbb{N}^2}, \quad \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) := \langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \quad (21)$$

mátrixát a  $H^2(\mathbb{T})$  Hardy-tér  $\mathbf{e}_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) bázisában és a mátrix elemeket az eltolt speciális Jacobi-polinomokkal fejezzük ki [J]. Ezek azonosíthatók a Zernike-függvényekkel [10], [11], [21].

A  $\mathbb{B}$  csoportműveletének értelmezéséből következik, hogy

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \epsilon) &= (0, \epsilon) \circ (\mathbf{a}, 1), \quad (\mathbf{a}, 1) = (0, e^{i\alpha}) \circ (r, 1) \circ (0, e^{-i\alpha}) \\ &(\mathbf{a} = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}, \epsilon \in \mathbb{D}),\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} f)(z) &= \epsilon^{1/2} f(z) \quad (\mathbf{a} = (0, \epsilon) \in \mathbb{B}, z \in \mathbb{T}), \\ (\mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} f)(z) &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz} f(B_r(z)) \quad (\mathbf{a} = (r, 1) \in \mathbb{B}, z \in \mathbb{T}).\end{aligned}\tag{22}$$

Mivel  $\mathbf{U}_{\mathbf{a}}^* = \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}}$ , azért

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \overline{\langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle},$$

következésképpen

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) = \overline{\mathbf{u}_{nm}(\mathbf{a}^{-1})} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{B}, m, n \in \mathbb{N}).\tag{23}$$

A továbbiakban az  $\mathbf{U}_{\mathbf{a}} := \mathbf{U}_{(a,1)}$  ( $\mathbf{a} = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ ) jelölést használva a definíció alapján a  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t} + \alpha$  helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{U}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{U}_{\mathbf{a}^{-1}} \mathbf{e}_m \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \frac{(e^{-it} - re^{-i\alpha})^m}{(1 - re^{-i(t-\alpha)})^{m+1}} dt = \\ &= \frac{e^{-im\alpha} \sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \frac{(e^{-i(t-\alpha)} - r)^m}{(1 - re^{-i(t-\alpha)})^{m+1}} dt = \\ &= \frac{e^{i(n-m)\alpha} \sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \frac{(e^{-it} - r)^m}{(1 - re^{-it})^{m+1}} dt = e^{i(n-m)\alpha} \mathbf{u}_{mn}(r)\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) = e^{i(n-m)\alpha} \mathbf{u}_{mn}(r) \quad (\mathbf{a} = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}, n, m \in \mathbb{N}).\tag{24}$$

Az  $\mathbf{u}_{mn}(r)$  függvények kifejezhetők speciális eltolt Jacobi polinomokkal. Valóban a  $\zeta = re^{it}$  helyettesítéssel és Cauchy-féle integrálformula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{mn}(r) &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} \frac{(1 - re^{it})^m}{(e^{it} - r)^{m+1}} dt = \\ &= \frac{r^{m-n} \sqrt{1-r^2}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \zeta^n \frac{(1-\zeta)^m}{(\zeta - r^2)^{m+1}} d\zeta = \\ &= \frac{r^{m-n} \sqrt{1-r^2}}{m!} \frac{d^m}{dz^m} [z^n (1-z)^m]_{z=r^2}\end{aligned}$$

adódik. Innen nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{r})$  valós továbbá  $(\mathbf{r}, 1)^{-1} = (-\mathbf{r}, 1) = (\mathbf{r}e^{i\pi}, 1)$  figyelembevételével (23) és (24) alapján

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{nm}(\mathbf{r}e^{i\pi}) = (-1)^{n-m}\mathbf{u}_{nm} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathbf{r} \leq 1). \quad (25)$$

Legyen először  $\mathbf{n} = \mathbf{m} + \ell \geq \mathbf{m}$ . A transzformált Rodrigues-formula szerint (lásd [J])

$$\frac{1}{\mathbf{m}!} \frac{d^{\mathbf{m}}}{dz^{\mathbf{m}}} [z^{\mathbf{m}+\ell}(1-z)^{\mathbf{m}}] = z^{\ell} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(\ell,0)}(1-2z) \quad (0 \leq z \leq 1).$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{r}) &= \sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{m}-\mathbf{n}} r^{2\ell} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(\ell,0)}(1-2r^2) = \sqrt{1-r^2} r^{\ell} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(\ell,0)}(1-2r^2) \\ & \quad (\mathbf{n} = \mathbf{m} + \ell \geq \mathbf{m}, 0 \leq \mathbf{r} \leq 1). \end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy az  $\mathcal{U}$  mátrix elemei előállíthatók a következő alakban:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) &= \sqrt{1-r^2} r^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{m})\alpha} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(\mathbf{n}-\mathbf{m})}(1-2r^2) \quad (0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{n}, \mathbf{a} = \mathbf{r}e^{i\alpha} \in \mathbb{D}), \\ \mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) &= (-1)^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \overline{\mathbf{u}_{nm}(\mathbf{a})} \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{D}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (26)$$

Összefoglalva a két esetet:

$$\mathbf{u}_{mn}(\mathbf{a}) = (-1)^{\mathbf{m}} \sqrt{1-r^2} e^{i(\mathbf{n}-\mathbf{m})\alpha} r^{|\mathbf{n}-\mathbf{m}|} \mathbf{P}_{\min\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}}^{(0, |\mathbf{n}-\mathbf{m}|)}(2r^2 - 1) \quad (\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{r} \in [0, 1]).$$

A  $\mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(0,\ell)}(\mathbf{t})$  ( $\mathbf{t} \in [-1, 1], \mathbf{n}, \ell \in \mathbb{N}$ ) Jacobi-polinomakra fennállnak a következő rekurziós formulák (lásd [J]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^{(0,\ell)}(\mathbf{t}) &= 1, \quad \mathbf{P}_1^{(0,\ell)}(\mathbf{t}) = \frac{(\ell+2)\mathbf{t}}{4} - \frac{\ell}{4}, \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}+1}^{(0,\ell)}(\mathbf{t}) &= \frac{1}{\mathbf{a}_{\mathbf{m}}} \left( (2\mathbf{m}+1+\ell)(\mathbf{b}_{\mathbf{m}}\mathbf{t} - \ell^2)\mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(0,\ell)}(\mathbf{t})/2 - \mathbf{c}_{\mathbf{m}}\mathbf{P}_{\mathbf{m}-1}^{(0,\ell)}(\mathbf{t})/4 \right) \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathbf{m}} &= 2(\mathbf{m}+1)(\mathbf{m}+\ell+1)(2\mathbf{m}+\ell), \quad \mathbf{b}_{\mathbf{m}} = (2\mathbf{m}+\ell+2)(\mathbf{m}\mathbf{n}+\ell), \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m}} &= 2\mathbf{m}(\mathbf{m}+\ell)(2\mathbf{m}+\ell+2) \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Bevezetve az  $\alpha_{\mathbf{m}}^{\ell} := \alpha_{\mathbf{m}} := r^{\ell} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}^{(0,\ell)}(2r^2 - 1)$  ( $\mathbf{r} \in [0, 1], \mathbf{m}, \ell \in \mathbb{N}^*$ ) sorozatot, erre a következő rekurzió érvényes:

$$\begin{aligned} \alpha_0^{\ell} &= r^{\ell}, \quad \alpha_1 = \frac{r^{\ell}}{4}((\ell+2)(2r^2-1) - \ell), \\ \alpha_{\mathbf{m}+1} &= \frac{1}{\mathbf{a}_{\mathbf{m}}} \left( (2\mathbf{m}+1+\ell)(\mathbf{b}_{\mathbf{m}}(2r^2-1) - \ell^2)\alpha_{\mathbf{m}}/2 - \mathbf{c}_{\mathbf{m}}\alpha_{\mathbf{m}} - 1/4 \right) \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*) \end{aligned} \quad (27)$$

Ezek alapján az  $\mathcal{U}$  mátrix elemei kiszámíthatók.

### 6.3. A Q algoritmus

Ebben a pontban ismertetjük az összefoglaló fő eredményét jelentő Q algoritmus részletes bizonyítását. A bevezetésben a gyakorlati szempontból legfontosabb esetben, az egyszeres pólussal rendelkező racionális függvényekre mutattuk be az algoritmust, megvilágítva a geometriai hátterét.

Jelölje  $\mathfrak{R}_0$  a  $\overline{\mathbb{D}}$  zárt diszken analitikus valódi racionális függvények terét. Ezeknek a függvényeknek a pólusai a  $\overline{\mathbb{D}}$  halmazon kívül esnek. Az  $\mathfrak{R}_0$  függvényosztályt az  $r_{p,k}$  ( $p \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}$ ) elemi racionális függvények generálják. A racionális függvények parciális felbontására vonatkozó ismert tétel alapján minden  $f \in \mathfrak{R}_0$  függvény egyértelműen állítható elő

$$f = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{0 \leq k < v_p} \lambda_k^p r_{p,k}$$

alakban, ahol  $\mathbb{P} \subset \mathbb{D}$  az  $f$  pólusait,  $v_p$  a  $p \in \mathbb{P}$  pólus multiplicitását jelenti és  $\lambda_k^p \in \mathbb{C}$ . Mivel az  $r_{p,k}$  ( $0 \leq k < n$ ) elemi racionális függvények és az  $L_k^p$  ( $0 \leq k < n$ ) diszkrét Laguerre-függvények ugyanazt az alteret feszítik ki, ezért a továbbiakban a fenti helyett a

$$f = \sum_{p \in \mathbb{P}} F_p, \quad F_p := \sum_{0 \leq k < v_p} \lambda_k^p L_k^p \quad (28)$$

egyértelmű felbontást fogjuk használni. E lépés révén a [24] dolgozatban közölt bizonyítás jelentősen egyszerűsíthető. Az  $F_p$  függvények Laguerre-Fourier-együtthatói, felhasználva a Laguerre-függvények  $L_n^a = \mathbf{U}_{a^{-1}} \mathbf{e}_n$  ( $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, 1)$ ) előállítását, felírhatók

$$\langle F_p, L_n^a \rangle = \sum_{0 \leq k < v_p} \lambda_k^p \langle L_k^p, L_n^a \rangle = \sum_{0 \leq k < v_p} \lambda_k^p \langle \mathbf{U}_{p^{-1}} \mathbf{e}_k, \mathbf{U}_{a^{-1}} \mathbf{e}_n \rangle \quad (29)$$

alakban, ahol

$$\langle \mathbf{U}_{p^{-1}} \mathbf{e}_k, \mathbf{U}_{a^{-1}} \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{U}_a \mathbf{U}_{p^{-1}} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{U}_{(p \circ a^{-1})^{-1}} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle.$$

A bizonyítás döntő momentuma az itteni skaláris szorzatok egy átalakítása, amely során az előző pontokban igazolt alábbi összefüggéseket használjuk fel:

- i)  $\mathbf{c}_p := \mathbf{p} \circ \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{c}_p, \epsilon_p) \in \mathbb{B}, \mathbf{c}_p = \mathbf{B}_a(\mathbf{p})$  ( $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, 1), \mathbf{p} = (\mathbf{p}, 1) \in \mathbb{B}$ ),
- ii)  $\langle \mathbf{U}_{c^{-1}} \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle = \epsilon_p^{k+1/2} \ell_k^{c_p}(\mathbf{n})$  ( $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ),
- iii)  $\ell_k^{c_p}(\mathbf{n}) = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \bar{c}_p^{\mathbf{n}-\mathbf{k}} ((1 - |c_p|^2)^{m+1/2} + O(1/\mathbf{n}))$  ( $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ )
- iv)  $|c_p| = |\mathbf{B}_a(\mathbf{p})| = \rho_0(\mathbf{a}, \mathbf{p})$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{p} \in \mathbb{D}$ )

Ezek alapján

$$\langle F_p, L_n^a \rangle = \sum_{0 \leq k < v_p} \lambda_k^p \epsilon_p^{k+1/2} \ell_k^{c_p}(\mathbf{n}) \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}).$$

Legyen  $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{B}$  olyan inverzpólus, amelyre

$$\rho_0(\mathbf{p}_0, \mathbf{a}) > \max_{p \in \mathbb{P}, p \neq \mathbf{p}_0} \rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{a})$$



teljesül és vezessük be a

$$\kappa := \max_{p \in \mathbb{P}, p \neq p_0} \rho_0(p, \mathbf{a}) / \rho_0(p_0, \mathbf{a}) < 1$$

hányadost. Ekkor iii) alapján

$$\frac{\ell_k^{c_p}(\mathbf{n})}{c_{p_0}^n} = O\left(\binom{\mathbf{n}}{k} \kappa^n\right) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty, 0 \leq k < \nu_p, p \neq p_0),$$

következésképpen

$$\frac{\langle F_p, L_n^a \rangle}{c_{p_0}^n} \rightarrow 0 \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty, p \neq p_0). \quad (30)$$

A iii) relációból következik, hogy az  $\alpha_k^{c_p}(\mathbf{n}) = \ell_k^{c_p}(\mathbf{n}) / (\bar{c}_p^n n^s)$  sorozatra

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \alpha_k^{c_p}(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0 & (k < s), \\ (1 - |c_p|^2)^{s+1/2} / \bar{c}_p^s & (k = s). \end{cases} \quad (31)$$

Az (51) reláció  $p = p_0$  esetén nem érvényes. E helyett az  $s = \nu_b - 1$  jelöléssel

$$\gamma_n := \frac{\langle F_p, L_n^p \rangle}{\bar{c}_p^n n^s} \rightarrow d_p \neq 0 \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty). \quad (32)$$

. Valóban

$$\begin{aligned} \gamma_n &:= \frac{\langle F_p, L_n^a \rangle}{\bar{c}_p^n n^s} = \sum_{k=0}^s \lambda_k^p \epsilon_p^{k+1/2} \frac{\ell_k^{c_p}(\mathbf{n})}{\bar{c}_p^n n^s} = \\ &= \sum_{k=0}^s \lambda_k^p \epsilon_p^{k+1/2} \alpha_k^p(\mathbf{n}) \rightarrow d_p \neq 0. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{\langle F_{p_0}, L_{n+1}^a \rangle / \bar{c}_{p_0}^n}{\langle F_{p_0}, L_n^a \rangle / \bar{c}_{p_0}^n} = \\ &= \bar{c}_{p_0} \frac{\langle F_{p_0}, L_{n+1}^a \rangle / ((n+1)^s \bar{c}_{p_0}^{n+1})}{\langle F_{p_0}, L_n^a \rangle / (n^s \bar{c}_{p_0}^n)} = \bar{c}_p \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \rightarrow \bar{c}_p \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Végül ezek figyelembevételével

$$\frac{\langle f, L_{n+1}^a \rangle}{\langle f, L_n^a \rangle} = \frac{\langle F_{p_0}, L_{n+1}^a \rangle / c_{p_0}^n + \sum_{p \in \mathbb{P}, p \neq p_0} \langle F_p, L_{n+1}^a \rangle / c_{p_0}^n}{\langle F_{p_0}, L_n^a \rangle / c_{p_0}^n + \sum_{p \in \mathbb{P}, p \neq p_0} \langle F_p, L_n^a \rangle / c_{p_0}^n} \rightarrow \bar{c}_{p_0} = \bar{B}_a(p_0) \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty).$$

Ezzel a következő állítást igazoltuk.

**Q-algoritmus.** Legyen  $\mathbb{P}$  az  $f \in \mathfrak{R}_0$  racionális függvény inverzpólusainak a halmaza és tetszőleges  $p \in \mathbb{P}$  pólus esetén jelölje  $D_p$  azoknak az  $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$  pontoknak a halmazát, amelyekre

$$\rho_0(\mathbf{a}, p) > \max\{\rho(\mathbf{a}, \tilde{p}) : \tilde{p} \in \mathbb{P}, \tilde{p} \neq p\} \quad (33)$$

teljesül. Ekkor minden  $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_p$  pontra létezik a

$$(\mathbf{Q}f)(\mathbf{a}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle f, \mathbf{L}_{n+1}^{\mathbf{a}} \rangle}{\langle f, \mathbf{L}_n^{\mathbf{a}} \rangle} = \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) \quad (\mathbf{p} \in \mathbf{D}_b). \quad (34)$$

# FÜGGELÉK

Az alábbiakban részletezzük a jegyzetben megfogalmazott néhány állítás bizonyítását.

## 1. Bizonyítások

A felsorolt tételek és bizonyítások fejezetek szerinti felsorolásban következnek

## 2. A Blaschke-csoport

### T 2.1.

$$1 - |B_a(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \quad (z, a \in \mathbb{C}, z \neq a^*).$$

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} 1 - |B_a(z)|^2 &= 1 - \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |az|^2) - (|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} = \\ &= \frac{(1 + |az|^2) - (|z|^2 + |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \quad \square \end{aligned}$$

### T 2.2.

$$B_a(B_{-a}(z)) = B_{-a}(B_a(z)) = z \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D}).$$

**Bizonyítás.**

$$B_a(B_{-a}(z)) = \frac{\frac{z + a}{1 + \bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z + a}{1 + \bar{a}z}} = \frac{z - |a|^2z}{1 - |a|^2} = z$$

A most igazolt azonosságot  $a$  helyett  $-a$ -ra alkalmazva kapjuk az állítás második részét.  $\square$

### T 2.3.

Legyen  $a_1 = (a_1, \epsilon_1), a_2 = (a_2, \epsilon_2) \in \mathbb{B}$ . Ekkor

$$B_{a_1} \circ B_{a_2} = B_a \quad (a = (a, \epsilon) \in \mathbb{D}),$$

ahol

$$a = \epsilon_1 \frac{a_1 + \epsilon_2 a_2}{\epsilon_2 + a_1 \bar{a}_2} = \bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 B_{-a_2 \epsilon_2}(a_1), \quad \epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{1 + a_1 \bar{a}_2 \bar{\epsilon}_2}{1 + \bar{a}_1 a_2 \epsilon_2} = \epsilon_1 B_{-a_1 \bar{a}_2}(\epsilon_2).$$

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} B_{a_1}(B_{a_2}(z)) &= \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} - a_1}{1 - \bar{a}_1 \epsilon_2 \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}} = \epsilon_1 \frac{(\epsilon_2 + a_1 \bar{a}_2)z - (a_1 + \epsilon_2 a_2)}{1 + \epsilon_2 \bar{a}_1 a_2 - (\bar{a}_1 \epsilon_2 + \bar{a}_2)z} = \\ &= \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 + a_1 \bar{a}_2}{1 + \epsilon_2 \bar{a}_1 a_2} \frac{z - \frac{a_1 + \epsilon_2 a_2}{\epsilon_2 + a_1 \bar{a}_2}}{1 - \frac{\bar{a}_1 \epsilon_2 + \bar{a}_2}{1 + \epsilon_2 \bar{a}_1 a_2} z} = \epsilon \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \end{aligned}$$

ahol  $a$  és  $\epsilon$  a fent definiált számok.  $\square$

## T 2.4.

Legyen  $a \in \mathbb{B}$ . Tegyük fel, hogy minden  $z \in \mathbb{H} \in \{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{D}, \mathbb{T}\}$  esetén  $B_a(z) = z$ . Ekkor  $a = \epsilon$ .

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $B_a(z) = z$  ( $z \in \mathbb{D}$ ), ahol  $a = (a, \epsilon) \in \mathbb{B}$ . Innen  $z = 0$  választással  $a = 0$ , ill. bármely további  $z \neq 0$  esetén a feltételből  $\epsilon = 1$  következik. Ezzel megmutattuk, hogy  $a = \epsilon$ , következésképpen  $\mathbb{H} = \mathbb{D}, \overline{\mathbb{D}}$  esetén az állítást igazoltuk.

A  $\mathbb{H} = \mathbb{T}$  esetben induljunk ki a  $B_a(e^{it}) = e^{it}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) feltételből. Ekkor

$$\epsilon(e^{it} - a) = e^{it} - \bar{a}e^{2it} \quad (t \in \mathbb{R})$$

következik. Összehasonlítva a trigonometrikus polinomok együtthatóit  $a = 0$ ,  $\epsilon = 1$  adódik. Ezzel megmutattuk, hogy  $a = \epsilon$ .  $\square$

## T 2.5.

Legyen  $a = (a, \epsilon)$ ,  $\mathfrak{z}_j = (z_j, \zeta_j) \in \mathbb{D}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} B_{B_a(z_2)}(B_a(z_1)) &= \bar{\eta}_a(z_2) B_{z_1}(z_2), \\ \eta_{B_a(z_2)}(B_a(z_1)) &= \bar{\eta}_a(z_1) \bar{\eta}_a(z_2) \eta_{z_2}(z_1). \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Induljunk ki a

$$\mathfrak{z}_j \circ a^{-1} = (B_a(z_j), \zeta_j \eta_a(z_j)) =: a_j = (a_j, \epsilon_j) \quad (j = 1, 2)$$

összefüggésekből. Ekkor

$$\begin{aligned} (\mathfrak{z}_1 \circ a^{-1}) \circ (\mathfrak{z}_2 \circ a^{-1})^{-1} &= \mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2^{-1} = a_1 \circ a_2^{-1} = \\ &= (B_{a_2}(a_1), \epsilon_1 \eta_{a_2}(a_1)) = (\epsilon_2 B_{a_2}(a_1), \epsilon_1 \epsilon_2 \eta_{a_2}(a_1)) = \\ &= (\epsilon_2 B_{B_a(z_2)}(B_a(z_1)), \epsilon_1 \epsilon_2 \eta_{B_a(z_2)}(B_a(z_1))) = (\zeta_2 B_{z_2}(z_1), \zeta_1 \zeta_2 \eta_{z_2}(z_1)) \end{aligned}$$

Az utolsó két egyenletben összehasonlítva a koordinátákat a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.  $\square$

## T 2.6.

Bármely  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  esetén fennáll az

$$\frac{|w_1 - w_2|}{|1 - \overline{w_1}w_2|} \leq \frac{|w_1| + |w_2|}{1 + |w_1||w_2|} \leq |w_1| + |w_2| \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{D})$$

egyenlőtlenség. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a  $0$  pont a  $w_1w_2$  szakaszra esik.

**Bizonyítás.** A  $w_j = r_j e^{i\alpha_j}$  ( $j = 1, 2$ ),  $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$  jelöléseket használva négyzetre emelés után a bizonyítandó egyenlőtlenség átírható

$$f(\theta) := \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}{1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta} \leq \frac{(r_1 + r_2)^2}{(1 + r_1r_2)^2}$$

alakba. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy

$$f(\theta) \leq f(\pi) \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Mivel

$$f'(\theta) = \frac{2r_1r_2(1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \sin \theta}{(1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta)^2},$$

azért az  $f$  függvény szigorúan monoton nő a  $[0, \pi]$  zárt intervallumban. Ezzel egyúttal azt is megmutattuk, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $\theta = \pi$ , azaz a  $w_1$  és  $w_2$  komplex számok ellentétes irányúak.  $\square$

## T 2.7.

$$\rho_0(z_1, z_2) \leq \rho_0(z_1, z_3) + \rho_0(z_2, z_3) \quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D})$$

**Bizonyítás.** T 2.5. és T 2.6. alapján

$$\rho_0(z_1, z_2) = \rho_0(B_{z_3}(z_1), B_{z_3}(z_2)) \leq |B_{z_3}(z_1)| + |B_{z_3}(z_2)| = \rho_0(z_1, z_3) + \rho_0(z_2, z_3). \square$$

## T 2.8.

A

$$\rho_1(z_1, z_2) := \operatorname{ath}(\rho_0(z_1, z_2)) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \rho_0(z_1, z_2)}{1 - \rho_0(z_1, z_2)} \right) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D})$$

függvény metrika a  $\mathbb{D}$  halmazon.

**Bizonyítás.** Az előző mintájára elég a

$$\rho_1(w_1, w_2) \leq \rho_1(w_1, 0) + \rho_1(0, w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathbb{D})$$

egyenlőtlenséget igazolni. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \rho_0(w_1, w_2)}{1 - \rho_0(w_1, w_2)} \right) &\leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + |w_1|}{1 - |w_1|} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + |w_2|}{1 - |w_2|} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1 + |w_1|)(1 + |w_2|)}{(1 - |w_1|)(1 - |w_2|)} \right). \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$s = \rho(w_1, w_2)$$

jelölést a bizonyítandó állítással ekvivalens egyenlőtlenség felírható a következő alakban:

$$\frac{1 + s}{1 - s} \leq \frac{(1 + |w_1|)(1 + |w_2|)}{(1 - |w_1|)(1 - |w_2|)}.$$

Innen ekvivalens átalakítás után a már igazolt T 2.6. egyenlőtlenséget kapjuk.  $\square$

## T 2.9.

$$B_r(e^{it}) = e^{iy_r(t)} \quad (t \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1).$$

**Bizonyítás.** Legyen

$$X(t) := B_r(e^{it}), \quad Y(t) := e^{iy_r(t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Rutin számolással azt kapjuk, hogy

$$\frac{X'(t)}{X(t)} = \frac{Y'(t)}{Y(t)} = iP_r(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

teljesül. Valóban

$$\begin{aligned} \frac{X'(t)}{X(t)} &= \frac{ie^{it}}{e^{it} - r} + \frac{ire^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{i}{1 - re^{-it}} + \frac{ire^{it}}{1 - re^{it}} = \\ &= i \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = iP_r(t) \end{aligned}$$

és nyilvánvalóan

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = iP_r(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Mivel  $X(0) = Y(0) = 1$ , azért T.2.9 valóban fennáll.

## T 2.10.

A  $\gamma_r$  függvény kifejezhető elemi függvényekkel:

$$\gamma_r(t) = 2 \arctan(s(r) \tan t/2) \quad (-\pi < t < \pi, s(r) := (1+r)/(1-r), -1 < r < 1).$$

továbbá  $\gamma_{-r}$  a  $\gamma_r$  inverzfüggvénye:  $\gamma_r^{-1} = \gamma_{-r}$ .

**Bizonyítás.** Valóban

$$\begin{aligned} \gamma_r'(t) &= \frac{2}{1+s^2(r)\tan^2(t/2)} \frac{s(r)/2}{\cos^2(t/2)} = \frac{s(r)}{\cos^2(t/2) + s^2(r)\sin^2(t/2)} = \\ &= \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2\cos^2(t/2) + (1+r)^2\sin^2(t/2)} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r(\cos^2(t/2) - \sin^2(t/2))} = P_r(t). \end{aligned}$$

## 6. Az $\ell_m^a$ sorozat

### T 6.1.

- i)  $u_{mn}(a^{-1}) = \overline{u_{nm}(a)}$  ( $a \in \mathbb{B}, n, m \in \mathbb{N}$ )  
 ii)  $u_{mn}(a_1 \circ a_2) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{mk}(a_1)u_{kn}(a_2)$  ( $a_j \in \mathbb{B}, m, n \in \mathbb{N}$ )

**Bizonyítás.**

i) Mivel  $U_{a^{-1}} = U_a^*$ , azért

$$u_{mn}(a^{-1}) = \langle U_{a^{-1}}e_n, e_m \rangle = \langle e_n, U_a e_m \rangle = \overline{\langle U_a e_m, e_n \rangle} = \overline{u_{nm}(a)} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

ii) Az  $U_{a_1 \circ a_2} = U_{a_1} U_{a_2}$  alapján

$$u_{mn} = \langle U_{a_1 \circ a_2} e_n, e_m \rangle = \langle U_{a_2} e_n, U_{a_1^{-1}} e_m \rangle.$$

Mivel i) alapján

$$\begin{aligned} U_{a_2} e_n &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{kn}(a_2) e_k, \\ U_{a_1^{-1}} e_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{u_{mk}(a_1)} e_k, \end{aligned}$$

következésképpen

$$u_{mn}(a_1 \circ a_2) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{mk}(a_1) u_{kn}(a_2)$$

## 9. Irodalomjegyzék

- [A] COXETER, H.S.M., *Non-euclidian geometry*. University of Toronto Press, Toronto (1942)
- [B] DAUBECHIES, I., *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992)
- [C] HENRICI, P., *Numerikus analízis*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [D] HEUBERGER, S.C., VAN DEN HOF, P.M.J., WAHLBERG, B., *Modelling and Identification Rational Orthogonal Basis Functions*. Springer, London Limited (2005)
- [E] MEYER, Y., *Wavelets, algorithms and applications*. SIAM (1993)
- [F] MÓRICZ, F., *Bevezetés a numerikus matematikába*. Polygon, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2008.
- [G] MÓRICZ, F., *Harmonikus analízis a komplex egységkörlapon*. Polygon, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2013.
- [H] REIMANN ISTVÁN, *Geometria és határterületei*. Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház, 1999.
- [I] SCHIPP, F., WADE, W. R., SIMON, P., PÁL J. *Walsh series*. Adam Hilger, Bristol, New York (1990)
- [J] SZEGŐ, G., *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloquium Publications, **23** (1975)
- [K] SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA, *Valós függvények és függvénysorok*. Polygon könyvtár, Szeged, 2002.
- [L] SZABÓ, Z., BOKOR, J., *Non-Euclidian Geometries in Modelling and Control*. Széchenyi University Press, 2015.
- [M] WAWRZYNCZYK, A., *Group Representations and Special Functions*. Reidel, PWN (1983)

\* \* \*

- [1] BLASCHKE, W., *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen*. Math. Phys. Kl. Sächs. Gessel. der Wiss. Leipzig, **67**, 194-200 (1915)



- [2] BOKOR J., GIANONE L., SCHIPP F., *Approximate  $H^\infty$  identification using partial sum operators in the disc algebra basis*. Proc. Amer. Control Conf. Seattle, WA, 1995, IEEE Press, 1981-1985
- [3] BOKOR J., SCHIPP F.,  *$L^\infty$  system approximation algorithms generated by  $\varphi$  summation*. IFAC AUTOMATICA J. **33** (11), 2019-2024 (1997)
- [4] BOKOR J., SCHIPP F., *Approximate linear  $H^\infty$  identification in Laguerre and Kautz basis*. IFAC AUTOMATICA J. **34**, 463-468 (1998)
- [5] BOKOR J., SCHIPP F., *Rational bases generated by Blaschke product systems*. 13th IFAC Symposium on System Identification, SYSID-2003, 1351-1356 (CD)
- [6] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A. *Pole structure estimation from Laguerre representation using hyperbolic metric on the unite disc*. 50th IEEE Conf. on Decision and Control an European Control Conf.,Orlando, Florida, December 12-15, 2136-2141 (2011)
- [7] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A., *Applying Hyperbolic Wavelets in Frequency Domain Identification*. Int. Conference in Control Automation and Robotics, ICINCO 2012, July 28-30 Rome, Italy, 532-535 (2012)
- [8] BOKOR J., SCHIPP F., SOUMELIDIS A., *Realizing system poles identification on the unit disc based on Laguerre representations and hyperbolic metric*, 21st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Platinias-Chania, Crete, Greece, June 25-28, 1208-1213 (2013)
- [9] BOKOR J., SCHIPP F., SZABÓ Z., *Identification of rational approximate models in  $H^\infty$  using generalized orthonormal basis*.IEEE Trans. Autom. Control, **44** (1), 153-158 (1999)
- [10] FAZEKAS Z., PAP M., SOUMELIDIS A., SCHIPP F.,*Discrete orthogonality of Zernike functions and its application to corneal measurements*. Electronic engineering and computing technology. Lecture notes in electrical engineering 60, Springer, Dordrecht, 455-469 (2010)
- [11] FAZEKAS Z., PAP M., SOUMELIDIS A., SCHIPP F.,*Generic Zernike-based Surface Representation of Measured Corneal Surface Data*. Proc.IEEE International Symposium on Medical Measurments and Applications, MeMeA, Bari, Italy,148-153 (2011)
- [12] FRIDLI S., LÓCSI L., SCHIPP F., *Rational Function Systems in ECG Processing*. Computer Aided System Theory- EUROCAST 2011, 13th International Conference Las Palmas de Gran Canaria,Spain, February 2011, Revised Selected Papers, Part I, Springer LNCS 6927, 88-95
- [13] FRIDLI S., SCHIPP F., *Biorthogonal systems to rational functions*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **35**, 95-105 (2011)
- [14] FRIDLI S., GILIÁN Z., SCHIPP F., *Rational orthogonal system on the plane*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **39**, 63 - 77 (2013)

- [15] HAAR, A., *Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme*. Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1909), 1-49, Math. Annal. **69**, 331-271 (1910)
- [16] HARDY, G.H., *On the mean value of the modulus of an analytic function*. Proc. London. Math. Soc. **14**, 269-277 (1915)
- [17] MALMQUIST, F., *Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points*. Comptes Rendus du Sixieme Congres des mathhématiciens scandinaves, Copenhagen, Denmark, 253-259 (1925)
- [18] PAP M., *Multiresolution in Bergman space*. Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. **30**, 333-353 (2013)
- [19] PAP M., SCHIPP F., *Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions*. Mathematica Pannonica, **12**, 185-194 (2001)
- [20] PAP M., SCHIPP F., *Malmquist-Takenaka systems over the set of quaternions*. Pure Mathematics and Applications, **15**, 261-272 (2004)
- [21] PAP M., SCHIPP F., *Discrete orthogonality of Zernike functions*. Mathematica Pannonica, **16**, 137-144 (2005)
- [22] PAP M., SCHIPP F., *The voice transform on the Blaschke group I, II, III*. Pure Mathematics and Applications, **17** (3-4), 387-395 (2006)  
Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. **29**, 157-173  
Publ. Math. Debrecen, **75** (1-2), 263-283 (2009)
- [23] RIESZ, F., *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*. Math. Z. **18**, 87-95 (1923)
- [24] SCHIPP F., SOUMELIDIS A., *On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system*. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **34**, 223-233 (2011).
- [25] SCHIPP F., SOUMELIDIS A., *Eigenvalues of matrices and discrete Laguerre-Fourier coefficients*. Mathematica Pannonica, **23/1**, 147-157 (2012)
- [26] SZABÓ Z., BIRÓ ZS., BOKOR J., *Möbius transform and efficient LPV synthesis*. 51st IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2012.
- [27] SOUMELIDIS A., BOKOR J., SCHIPP F., *On hyperbolic wavelets*. 18 th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Milano, 2309-2314 (2011).
- [28] SOUMELIDIS A., BOKOR J., SCHIPP F., *Pole structure estimation from Laguerre representation using hyperbolic metric on the unit disc*. Proceedings of the 50 th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, CCD-ECC 2011, Orlando, FL, USA, 2136-2141 (2011).
- [29] TAKENAKA, S., *On the orhogonal functions and a new formula of interpolation*. Japanese Journal of Mathematics, II, 129-145 (1925)

- [30] UNGAR, A. A. *From Pythagoras to Einstein: The Hyperbolic Pythagorean Theorem*. Foundations of Physics, **28**(8) (1998), 1283-1321.
- [31] UNGAR, A. A. *Seeing The Möbius Disc-Transformation Group Like Never Before*. Computers and Mathematics with Application, **45** (2003), 805-822.
- [32] VERMEER J., *A geomtric interpretation of Ungar's addition and a gyration in the hyperbolic plane*. Topology and its Applications, **152**(2005), 226-242.