



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

Alkalmazott modul: Programozás

3. fejezet

Programozási tételek, rendezések

Giachetta Roberto

A jegyzet az ELTE Informatikai Karának 2015. évi
Jegyzetpályázatának támogatásával készült

Programozási tételek

Algoritmusok és programozási tételek

- Az egyszerű, sorozatokra alkalmazott algoritmusokat nevezzük *programozási tételeknek*, ezek a következők:
 - összegzés, számlálás
 - lineáris keresés
 - maximum keresés, feltételes maximumkeresés
 - bináris keresés
- A programozási tételek absztrakt módon fogalmazzuk meg, majd a feladatnak megfelelő átalakításokkal alkalmazzuk
 - az absztrakt megfogalmazást egész értékű sorozatokon fogalmazzuk meg, de lehetne általánosítani

Programozási tételek

Összegzés

- Az *összegzés programozási tétele* lehetővé teszi tetszőleges sorozat (a_1, \dots, a_n) adott függvény (f) szerint vett értékének összesítését (*sum*)

$$sum = \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

- az összegzés egy ciklusban történik, az összeget egy külön változóhoz adjuk hozzá minden lépésben, amelyet egy kezdeti értékkel inicializálunk
- általában az összegző művelet az összeadás, ekkor az összeg változó 0-ról indul
- a függvény sokszor az identitás, de lehet nagyon összetett is

Programozási tételek

Összegzés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, sum : \mathbb{Z})$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q = (\forall j \in [1..n] : (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (sum = \sum_{j=1}^n f(a_j))$$

$sum := 0, i := 1$
$i \leq n$
$sum := sum + f(a_j)$
$i := i + 1$

Programozási tételek

Összegzés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
int sum; // összeg változó

... // a sorozat elemei értéket kapnak

sum = 0; // az összeget kinullázzuk
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    sum = sum + f(a);
    // f tetszőleges egész függvény
}
// az eredmény a sum változóban található
```

Programozási tételek

Összegzés

Feladat: Adjuk meg az első n természetes szám összegét.

- ehhez az összegzés tételére van szükségünk, a forrás és az eredmény típusa egész, a művelet az összegzés, a kezdőérték nulla
- az értéket nem kell külön beolvasnunk, és nem kell külön eltárolnunk, ezek adott konstansok, csupán az intervallum végét, azaz n értékét kérjük be a felhasználótól
- egy számláló ciklusra lesz szükségünk, amely elmegy 1-től az n értékéig

Programozási tételek

Összegzés

Megoldás:

```
int main(){
    int sum = 0, n; // inicializálás
    cout << "Kérem n értékét: ";
    cin >> n; // beolvasás

    for (int i = 1; i <= n; i++) // összegzés
        sum += i;

    cout << "Az első " << n << " szám összege: "
         << sum << endl; // eredmény kiírása
    return 0;
}
```

Programozási tételek

Számlálás

- A *számlálás programozási tétele* lehetővé teszi, hogy tetszőleges (a_1, \dots, a_n) sorozatban megszámoljuk egy adott (logikai) felvételt (β) teljesítő elemek számát (c)

$$c = \sum_{\substack{i=1 \\ \beta(a_i)}}^n 1$$

- a feltétel tetszőleges logikai értékű függvény
- lényegében az összegzés egy speciális esetét végezzük, ahol vagy 1-t, vagy 0-t adunk hozzá az eddigi összeghez, függően a feltétel teljesülésétől
- ezt a végrehajtásban elágazás segítségével valósítjuk meg

Programozási tételek

Összegzés

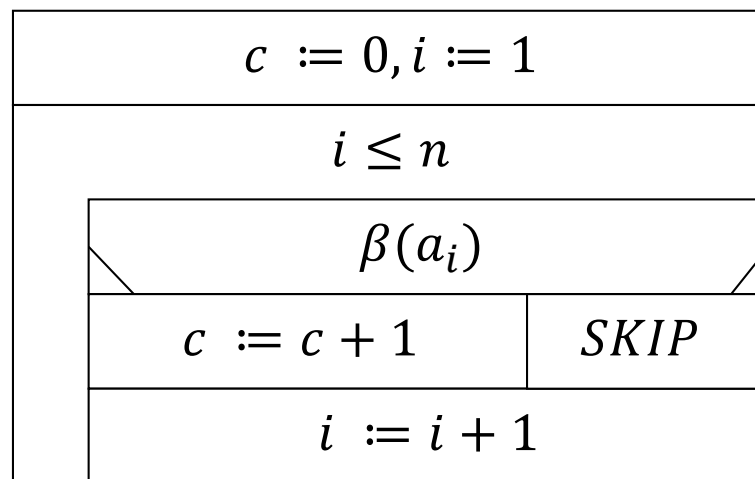
Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, c : \mathbb{N})$$

$$\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$$

$$Q = \left(\forall j \in [1..n] : (a_j = a'_j) \right)$$

$$R = Q \wedge \left(c = \sum_{j=1}^n \beta(a_j) \right)$$



Programozási tételek

Összegzés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
int c; // számláló változó

... // a sorozat elemei értéket kapnak

c = 0; // az számlálót kinullázzuk
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    if (beta(a[i])) // ha teljesül a feltétel
        c++; // növeljük a számlálót
}
// eredmény a c változóban található
```

Programozási tételek

Számlálás

Feladat: Generáljuk 100 véletlen számot 1 és 10 között, és számoljuk meg, hány páratlan van közöttük.

- használjuk a számlálás tételét, ahol a páratlanság biztosítja a feltételt (oszthatóságot a moduló segítségével ellenőrizhetünk, 2-vel osztva 1-t ad maradékul)
- a számot 0-9 közé generáljuk, majd hozzáadunk egyet
- szükségünk lesz egy számláló ciklusra

Megoldás:

```
int main(){  
    srand(time(0)); // véletlen generátor indítás  
    int nums[100]; // számok tömbje
```

Programozási tételek

Számlálás

Megoldás:

```
for (int i = 0; i < 100; i++) // generálás
    nums[i] = rand() % 10 + 1;
    // 1 és 10 közötti szám

int c = 0; // inicializálás
for (int i = 0; i < 100; i++) // számlálás
    if (nums[i] % 2 == 1) // ha páratlan a szám
        c++;

cout << "100 véletlen számból " << c
     << " volt páratlan. " << endl; // kiírás
return 0;
}
```

Programozási tételek

Lineáris keresés

- A *lineáris keresés* programozási tétele segítségével megállapíthatjuk, hogy van-e egy sorozatban egy adott feltételt teljesítő elem, és amennyiben több van, melyik az első ilyen elem.
 - a teljesüléshez szükségünk van egy logikai változóra (l), és megadhatjuk magát az értéket, vagy a helyét (ind)
 - amennyiben már teljesült a feltétel, akkor nincs értelme végignézni a további értékeket, hiszen a teljesülést nem befolyásolják
 - ezért a ciklust korábban is terminálhatjuk úgy, hogy a logikai változót is bevesszük a ciklusfeltételbe

Programozási tételek

Lineáris keresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L})$$

$$\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j)$$

$$R = Q \wedge \left(l = \exists j \in [1..n]: \beta(a_j) \wedge \right. \\ \left. l \rightarrow \left(ind \in [1..n] \wedge \beta(a_{ind}) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \forall j \in [1..ind - 1]: \neg \beta(a_j) \right) \right)$$

$l := \downarrow, i := 1$
$\neg l \wedge i \leq n$
$l := \beta(a_i), ind := i$
$i := i + 1$

Programozási tételek

Lineáris keresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
bool l = false; // teljesülés változója
int ind; // keresett hely változója

... // a sorozat elemei értéket kapnak

for (int i = 0; i < n && !l; i++)
    // a logikai érték is bekerül a feltételbe
    {
        l = beta(a[i]) // ha teljesül a feltétel
        ind = i; // növeljük a számot
    }
// eredmény az l és ind változókból található
```

Programozási tételek

Lineáris keresés

Feladat: 10 napon át megmértük a hőmérsékletet, mértünk-e fagypont alatti értéket, és ha igen, hányadik napon először.

- valós értékekkel dolgozunk, ugyanakkor az érték helye egész lesz
- lineáris keresést alkalmazunk, a feltétel a negatív érték

Megoldás:

```
int main(){  
    float t; // aktuális napi hőmérséklet  
    bool l = false;  
    int ind;
```


Programozási tételek

Lineáris keresés

Megoldás:

```
for (int i = 1; i <= 100 && !l; i++){
    cin >> t; // napi hőmérséklet beolvasása
    l = t < 0; // feltétel ellenőrzés
    ind = i;
}
// eredmény függvényében való kiírás
if (l) // ha teljesült
    cout << "A(z) " << ind << ". napon mértünk
        először negatív értéket. " << endl;
else // ha nem teljesült a feltétel
    cout << "Nem mértünk mínusz értéket."
        << endl;
return 0;
}
```

Programozási tételek

Maximumkeresés

- Egy sorozat (adott szempont szerinti) maximumát a *maximumkeresés* programozási tételével állapíthatjuk meg.
 - megadja a maximum értékét, illetve helyét
 - mindig összehasonlítjuk az új elemet a sorozat eddigi részének maximumával, és ha nagyobb nála, akkor ő lesz az új maximum
 - ehhez a maximum értéket kezdetben valamilyen extrémális értéktől indíthatjuk el (pl. ha csak pozitív számok vannak, akkor 0-tól), vagy rögtön ráállítjuk a sorozat első elemére, így a sorozat második elemétől indul a ciklus
 - a tétel könnyen átfogalmazható minimumra

Programozási tételek

Maximumkeresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, max : \mathbb{Z})$$

$$Q = (n \geq 1 \wedge \forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (max, ind = \max(a_j))$$

$ind := 1, max := a_1, i := 2$	
$i \leq n$	
$a_i > max$	
$ind := i, max := a_i$	$SKIP$
$i := i + 1$	

Programozási tételek

Maximumkeresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
... // a sorozat elemei értéket kapnak

int ind = 0, max = a[0];
    // maximum hely és érték változók, az első
    // elemre állnak
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (max < a[i]){ // ha nagyobb elemet találunk
        ind = i;    // újra beállítjuk őket
        max = a[i];
    }
}
// eredmény az ind és max változókbán található
```

Programozási tételek

Maximumkeresés

Feladat: Minden nap megmértük a hőmérséklet egészen addig, amíg fagypont alá nem estek. Keressük meg az addig tartó tartomány legnagyobb értékét, és hogy hányadik.

- maximumkeresést alkalmazunk
- előtesztelő ciklusban dolgozunk, amely 0-nál kisebb érték esetén megáll (számolnunk kell a napokat is, hogy megállíthassuk a maximum helyét)

Megoldás:

```
int main(){  
    float t; // aktuális napi hőmérséklet  
    cin >> t; // első érték beolvasása  
    int ind = 1, max = t, i = 1; // inicializálás
```

Programozási tételek

Maximumkeresés

Megoldás:

```
cin >> t; // beolvassuk a következő értéket
while (t >= 0) {
    // amíg nem lesz negatív az érték
    i++; // növeljük a sorszámot
    if (t > max) { // új maximum
        ind = i;
        max = t;
    }
    cin >> t; // beolvassuk a következő értéket
}
cout << "A maximum: " << max << ", a(z) "
      << ind << ". napon mértünk. " << endl;
return 0;
}
```

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

- A maximumkeresés tételének azon változatát, ahol csak a sorozat bizonyos elemei között keresünk maximumot, *feltételes maximumkeresés*nek nevezzük
 - adott egy feltétel, amelyet a sorozat minden elemére megvizsgálunk, ha az elem nem teljesíti a feltételt, akkor nem teszünk semmit
 - nem állíthatjuk rögtön az első elemre a maximumot, hanem csak az első olyan elemre, amely teljesíti ezt a feltételt
 - nem garantált, hogy van olyan eleme a sorozatnak, ami teljesíti a feltételt, ezért egy logikai értékkel jeleznünk kell, hogy találtunk-e ilyet

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, max : \mathbb{Z}, l : \mathbb{L})$$

$$\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$$

$$Q = (n \geq 1 \wedge \forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (l, max, ind = \max_{\beta(a_j)}(a_j))$$

$l := \downarrow, i := 1$		
$i \leq n$		
$\beta(a_i) \wedge \neg l$	$\beta(a_i) \wedge l$	
$l := \uparrow, ind := i,$ $max := a_i$	$a > max$	$SKIP$
	$ind := i, max := a_i$	
$i := i + 1$		

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
... // a sorozat elemei értéket kapnak

bool l = false;
    // kezdetben nincs a feltételnek eleget tevő
    // elem
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    if (beta(a[i]) && !l){ // első ilyen elem
        l = true; // mindent be kell állítanunk
        ind = i;
        max = a[i];
    }
}
```

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

Megvalósítás:

```
if (beta(a[i]) && max < a[i]){  
    // ha már volt ilyen elem, és az aktuális,  
    // feltételt teljesítő elem nagyobb nála  
    ind = i;  
    max = a[i];  
    // újra beállítjuk az indexet és  
    // maximumot  
}  
}  
// eredmény az l, ind és max változókbán található
```

Programozási tételek

Példa

Feladat: Olvassunk be 10 szót a bemenetről, és adjuk meg a legrövidebb, legalább 10 hosszú szavat.

- használjunk feltételes minimumkeresést, amelynek feltétele, hogy a szó legalább 10 hosszú
- a szavak hosszát hasonlítjuk össze, a legrövidebbet keressük

Megoldás:

```
int main(){  
    string word; // beolvasandó szó  
    bool l = false;  
    int ind;  
    string min;
```

Programozási tételek

Példa

Megoldás:

```
for (int i = 1; i <= 10; i++) {  
    cin >> word; // szó beolvasása  
    if (word.length() >= 10 && !l){  
        // hossz ellenőrzése  
        l = true;  
        ind = i;  
        min = word;  
    }  
    if (word.length() >= 10 &&  
        word.length() < min.length()) {  
        ind = i; min = word;  
    }  
}
```

Programozási tételek

Példa

Megoldás:

```
    if (1){
        // találtunk legalább 10 hosszú szavat
        cout << "A legrövidebb megfelelő szó "
              << min << " volt, amelyet " << ind
              << "-ként adtunk meg." << endl;
    }
    else {
        // nem találtunk
        cout << "Nem volt megfelelő szó." << endl;
    }

    return 0;
}
```

Programozási tételek

Bináris keresés

- Amennyiben egy értéket keresünk a bemenő sorozatban, és annak elemei növekvően (vagy csökkenően) rendezettek, lehetőségünk van *bináris (logaritmikus) keresést* használni
 - a bináris keresés nem sorrendben dolgozza fel a bemenetet, hanem felhasználja a sorozat rendezettségét
 - vegyünk egy elemet a sorozatból, ha az a keresett elem, akkor végeztünk, ha kisebb, mint a keresett, akkor csak az utána lévő tartományban lehet a keresendő elem, ha pedig nagyobb, akkor az előtte lévő tartományban
 - mindig felezzük a tartományt, és a középső elemet ellenőrizzük le, nem egyezés esetén vagy az első felét, vagy a második felét vesszük a tartománynak, és így tovább

Programozási tételek

Bináris keresés

- Pl. keressük a 73-as elemet az alábbi sorozatban:

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93



itt felezünk, a 40 kisebb, mint a 73, ezért következő lépésben a tartomány második felét vizsgáljuk

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93



03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93



03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93



Programozási tételek

Bináris keresés

- Ez az algoritmus hatékonyabb, mint a lineáris keresés, mivel esetenként sok elemet is át tud ugrani egyszerre
- A tartományt úgy szabályozzuk, hogy mindig nyilvántartjuk annak alsó, illetve felső határát, és ezt állítjuk a középső elem függvényében
- Az algoritmus addig halad, amíg meg nem találjuk az elemet, vagy üres nem lesz a tartomány (az alsó határ nagyobb, mint a felső határ)
- Csökkenő értékekkel is megfogalmazható, csak fordítani kell a relációkon

Programozási tételek

Bináris keresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L}, h : \mathbb{Z})$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j \wedge \forall j \in [1..n-1]: a_j \leq a_{j+1})$$

$$R = Q \wedge \left(l = \exists j \in [1..n]: a_j = h \wedge \right. \\ \left. l \rightarrow (ind \in [1..n] \wedge a_{ind} = h) \right)$$

$lowB := 1, highB := n, l := \downarrow$		
$\neg l \wedge lowB \leq highB$		
$ind := (lowB + highB)/2$		
$a_{ind} > h$	$a_{ind} < h$	$a_{ind} = h$
$highB := ind - 1$	$lowB := ind + 1$	$l := \uparrow$

Programozási tételek

Bináris keresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó monoton növény sorozat
int h; // keresett érték
... // a sorozat és keresett érték megadása

bool l = false;
int lowB = 0, highB = n-1; // kezdő határok
while (!l && lowB <= highB)
{
    int ind = (lowB + highB) / 2; // középre állás
    if (a[ind] < h) highB = ind - 1;
    if (a[ind] > h) lowB = ind + 1;
    if (a[ind] == h) l = true; // ha megtaláltuk
}
```

Rendezések

Típusai

- A rendezések feladata egy adott sorozat elemeinek növekvő, vagy csökkenő sorrendbe állítása
 - az egy elemű sorozat mindig rendezett, csak a nagyobb számúakat kell rendezni
- A rendezéseknek két típusát tartjuk nyilván:
 - *összehasonlító*: az elemek összehasonlításával állapítja meg az egymáshoz viszonyított sorrendjüket, ez önmagában a sorozat ismeretével levezethető
 - *nem összehasonlító*: abszolút sorrendiséget állapít meg kategóriák, és darabszámok megállapításával, amihez az elemeken felül további információk szükségesek

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

- A kiválasztásos rendezés kiválasztja a rendezetlen részsorozat minimális (vagy maximális) elemét, és azt a rendezett részsorozat elé (vagy mögé) helyezi
 - kicseréli azt a rendezetlen részsorozat első, vagy utolsó elemével, és növeli a rendezett részsorozat hosszát
 - a rendezetlen részsorozat kezdetben az egész sorozat, majd folyamatosan csökken
 - egy ciklussal növeljük a rendezett részsorozat hosszát, ezt elég az utolsó előtti elemig futtatni (hiszen az egy elemű sorozat mindig rendezett)
 - a kiválasztáshoz szükség van egy minimum-, vagy maximumkeresésre az adott részsorozatban

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

- Pl.: 10 03 09 04 15 04 12
↑

kiválasztjuk a 3-at a rendezetlen részsorozatból, és cserélünk

03 10 09 04 15 04 12
↑

a rendezett részsorozat hossza nő

03 04 09 10 15 04 12

03 04 04 10 15 09 12

03 04 04 09 15 10 12

03 04 04 09 10 15 12

03 04 04 09 10 12 15

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L}, h : \mathbb{Z})$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j)$$

$$R = \left(\begin{array}{l} \{a_1, \dots, a_n\} = \{a'_1, \dots, a'_n\} \wedge \\ \forall j \in [1..n-1]: a_j \leq a_{j+1} \end{array} \right)$$

$j := 1$
$j \leq n - 1$
$ind, max := minSearch(a[j \dots n])$
$swap(a_{ind}, a_j)$
$j := j + 1$

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó monoton növvő sorozat  
... // a sorozat megadása
```

```
for (int j = 0; j < n - 1; j++){  
    int ind = minSearch(a, j, n);  
    // minimumkeresés a résztömbön
```

```
    int temp = a[ind]; // két elem cseréje  
    a[ind] = a[j];  
    a[j] = temp;  
}
```

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

Feladat: Olvassunk be 10 sort a bemenetről, és rendezzük őket hossz szerint növekvő sorrendbe.

- használjunk maximumkiválasztásos rendezést a sor hosszára
- mivel a sorokat többször is fel kell dolgozni, mindenképpen el kell tárolnunk őket egy tömbbe

Megoldás:

```
int main(){  
    string lines[10]; // a sorok  
    for (int i = 0; i < 10; i++) // beolvasás  
        getline(cin, lines[i]); // soronként
```


Rendezések

Maximumkeresés

Megoldás:

```
for (int j = 0; j < 9; j++){ // rendezés
    int ind = j; // maximumkeresés
    for (int i = j; i < 10; i++){
        if (lines[i].length() >
            lines[ind].length()){
            ind = i;
        }
    }
    string temp = lines[ind]; // elemek cseréje
    lines[ind] = lines[j];
    lines[j] = temp;
}
return 0;
}
```

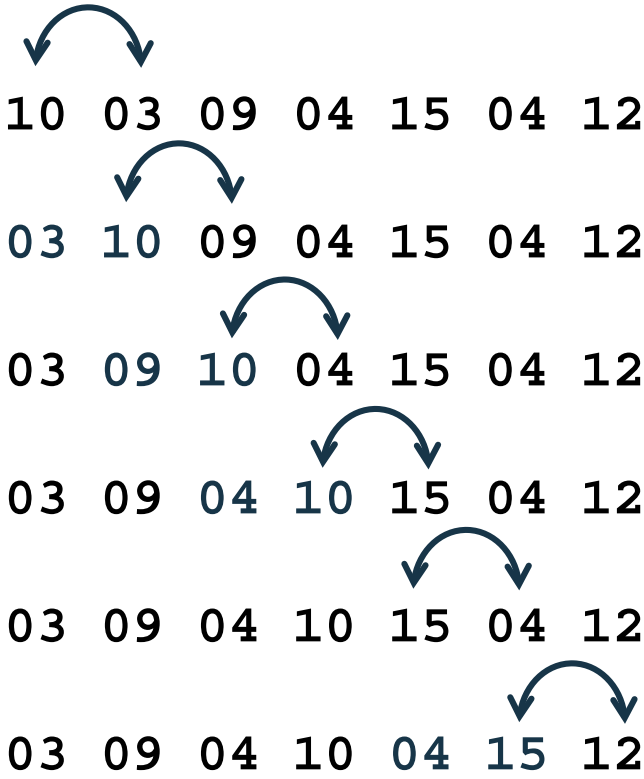
Rendezések

Buborékredezés

- A buborékredezés összehasonlítja egy elemet a rákövetkezővel, és amennyiben rossz sorrendben vannak, megcseréli őket
 - így az elemek „felbuborékolódnak” a rendezetlen részsorozat végére
 - egy külső ciklus szabályozza, hogy hány rendezetlen elem van még a sorozatban (ez a második elemig halad visszafelé, hiszen az egy hosszú sorozatot már nem kell rendezni)
 - a belső ciklus végighalad a rendezetlen részsorozaton az elejétől annak utolsó előtti eleméig, ellenőrzi, hogy az elemek rossz sorrendben vannak-e, és amennyiben igen, megcseréli őket

Rendezések

Buborékrendezés

- Pl.:

10 03 09 04 15 04 12 ← belső ciklus indul

03 10 09 04 15 04 12 ← ha rossz a sorrend, cserél

03 09 10 04 15 04 12

03 09 04 10 15 04 12

03 09 04 10 15 04 12

03 09 04 10 04 15 12

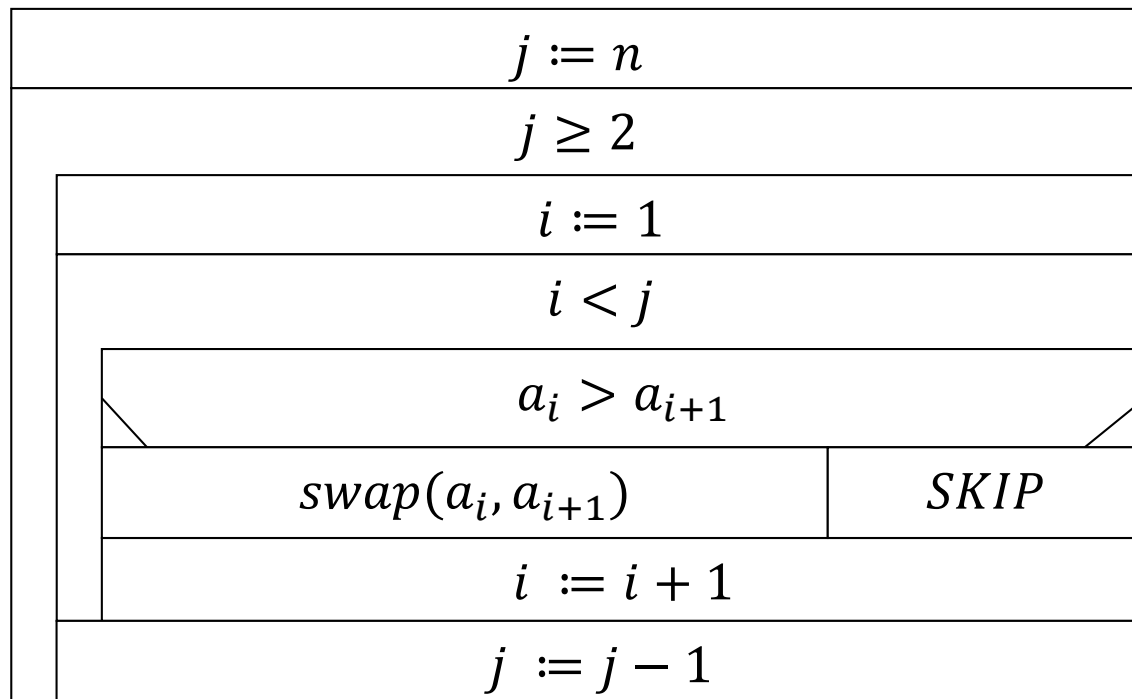
03 09 04 10 04 12 15 ← belső ciklus vége, a külső ciklus lép egyet vissza

...

Rendezések

Buborékredezés

Absztrakt leírás:



Rendezések

Buborékredezés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó monoton növäő sorozat
... // a sorozat megadása

for (int j = n - 1; j > 0; j--){ // külső ciklus
    for (int i = 0; i < j; i++){ // belső ciklus
        if (a[i] > a[i + 1]){
            // ha rossz a sorrend
            int temp = a[i]; // két elem cseréje
            a[i] = a[j];
            a[j] = temp;
        }
    }
}
```