EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Kovács Sándor

Funkcionálanalízis feladatokban

egyetemi jegyzet

Budapest, 2013

A tananyag az ELTE - PPKE informatika tananyagfejlesztési projekt
(TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0052) keretében valósult meg.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Lektorálta: Dr. Simonné dr. Gyarmati Erzsébet ny. egyetemi adjunktus

ISBN 978-963-284-445-9

Előszó

A funkcionálanalízis mint önálló matematikai diszciplína a 20. század szülötte és szinte minden alkalmazott matematikai terület – mint pl. numerikus analízis, approximációelmélet, harmonikus analízis, kvantummechanika, parciális differenciálegyenletek stb. – nélkülözhetetlen alapja.

Ez a jegyzet elsősorban az Eötvös Loránd Tudományegyetem programtervező informatikus és alkalmazott matematikus hallgatóinak készült, segédletként a Funkcionálanalízis az alkalmazott matematikában c. tárgyhoz, de haszonnal forgathatják fizikus-, ill. mérnökhallgatók is, akik megalapozott „elméleti" tudás birtokában szeretnének a gyakorlatban felmerülő problémák megoldásához segítséget kapni. Célunk, hogy a kurzust elvégző hallgatók képesek legyenek az előadásokon megszerzett ismereteiket a gyakorlatban alkalmazni és az ebben a témában fellelhető szakirodalmat megérteni.

Feltételezzük a bevezető matematikai kurzusok anyagának ismeretét, de azokra nem minden esetben építünk. Bizonyos – szükségesnek vélt – ismereteket a Függelékben dolgoztunk fel (ezek előzetes tanulmányozását az egyes fejezetekben való elmélyülés előtt kifejezetten ajánljuk), amelyekre aztán hivatkozás is történik, bizonyos – funkcionálanalízis-stúdiumba illő – alapvető ismeretek tekintetében pedig az irodalomjegyzékben lévő kitűnő szakkönyvekre, ill. monográfiákra utalunk (szögletes zárójelbe tett számokkal).

A jegyzet a következő fejezetekre tagolódik: térstruktúrák, szeparábilis terek, az approximációelmélet alapjai, lineáris operátorok és funkcionálok, operátorsorozatok, szimmetrikus és önadjungált operátorok, spektrum, fixponttételek, valamint a jegyzetben előforduló fogalmak és állítások megértéséhez szükséges ismereteket, ill. az egyes gyakorló feladatok megoldásait tartalmazó függelékek.

A szerző köszönetét fejezi ki Dr. Simonné dr. Gyarmati Erzsébetnek és Dr. Simon Péternek a jegyzet igen alapos és gondos lektorálásáért, továbbá értékes megjegyzéseikért.

Budapest, 2013. ősz

Kovács Sándor

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Térstruktúrák

1.1. Topologikus terek

1.1.1. Alapfogalmak

1.1.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ halmaz esetén az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ rendezett párt **topologikus tér**nek nevezzük, ha $\mathcal{G}$ **topológia** ($\mathcal{X}$-en), azaz $\mathcal{G}$ olyan $\mathcal{X}$-beli halmazrendszer $/\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})/$, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{G}$ és $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$;

(T2) bármely két $\mathcal{G}$-beli halmaz közös része is $\mathcal{G}$-ben van:

$$A,\ B \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B \in \mathcal{G};$$

(T3) $\mathcal{G}$-beli halmazok tetszőleges rendszerének egyesítése is $\mathcal{G}$-ben van:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \cup\mathcal{A} \in \mathcal{G}.$$

$\mathcal{X}$ elemeit **pont**oknak, a $\mathcal{G}$, ill. az

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \ A^c \in \mathcal{G}\}$$

halmazrendszer elemeit az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér **nyílt**, ill. **zárt halmaz**ainak nevezzük.

A $\mathcal{G}$, ill. az $\mathcal{F}$ jelölések a német *Gebiet* ('tartomány'), ill. a francia *fermé* ('zárt') szavakból származnak.
Könnyű belátni, hogy az alábbi két esetben teljesülnek a nyílt halmazra vonatkozó feltételek.

1.1.1. példa. Ha $|\mathcal{X}| = 2$ és $\mathcal{X} := \{a, b\}$, akkor

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}\}$$

topológia $\mathcal{X}$-en (**Sierpiński-topológia**).

1.1.2. példa. Ha $|\mathcal{X}| = 3$ és $\mathcal{X} := \{a, b, c\}$, akkor

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$$

topológia $\mathcal{X}$-en.

Az 1.1.1. definícióban a **(T3)** tulajdonság azt jelenti, hogy ha $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz, akkor

$$A_\gamma \in \mathcal{G} \quad (\gamma \in \Gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{G},$$

sőt a **(T2)** tulajdonság egyenértékű az

$$A_\gamma \in \mathcal{G} \quad \left(\gamma \in \widetilde{\Gamma}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} A_\gamma \in \mathcal{G}$$

állítással, ahol $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ véges (index)halmaz. Az 1.1.1. definícióbeli **(T1)** tulajdonság kiváltható a **(T2)**, ill. a **(T3)** tulajdonsággal, ha a $\Gamma = \emptyset$, ill. a $\widetilde{\Gamma} = \emptyset$ esetet megengedjük, ui.

$$\emptyset = \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{X} = \bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma.$$

Nyilvánvaló, hogy ugyanazon az $\mathcal{X}$ halmazon többféle topológia is megadható, ezáltal egymástól eltérő topologikus terek származnak e halmazból.

1.1.3. példa. Az $\mathcal{X} := \{0,1\}$ halmazon pl. pontosan négy topológia adható meg:

1. $\mathcal{G}_1 := \{\emptyset, \mathcal{X}\}$, 2. $\mathcal{G}_2 := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{0\}\}$, 3. $\mathcal{G}_3 := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{1\}\}$, 4. $\mathcal{G}_4 := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{0\}, \{1\}\}$.

Nevezetes topológiákat mutatnak be az alábbi példák.

1.1.4. példa. Bármely $\mathcal{X}$ halmaz esetén $\mathcal{G} := \mathcal{P}(\mathcal{X})$ topológia $\mathcal{X}$-en (**diszkrét topológia**).

1.1.5. példa. Bármely $\mathcal{X}$ halmaz esetén $\mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ topológia $\mathcal{X}$-en (**indiszkrét** vagy **kaotikus topológia**).

1.1.6. példa.

1. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$, akkor
$$\mathcal{G} := \{A \subset \mathcal{X} : \; a \in A \;\Rightarrow\; \exists\, x, y \in \mathbb{R} : \; a \in (x, y) \subset A\}$$
topológia $\mathcal{X}$-en ($\mathbb{R}$**-beli „szokásos" topológia**).
2. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$, akkor
$$\mathcal{G} := \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \cup \{(-\infty, a) \subset \mathbb{R} : \; a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} : \; a \in \mathbb{R}\}$$
topológia $\mathcal{X}$-en (**félegyenes-topológia**).
3. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ és
$$\mathbb{I} := \{[a, b) : \; -\infty < a < b < +\infty\},$$
akkor
$$\mathcal{G} := \{\cup\mathcal{H} : \; \mathcal{H} \subset \mathbb{I}\}$$
topológia $\mathcal{X}$-en (**Sorgenfrey-egyenes**).
4. Bármely $\mathcal{X}$ halmaz esetén
$$\mathcal{G} := \{\emptyset\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \; A^c \text{ legfeljebb véges}\}$$
topológia $\mathcal{X}$-en (**ko-véges topológia**).
5. Bármely $\mathcal{X}$ halmaz esetén
$$\mathcal{G} := \{\emptyset\} \cup \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \; A^c \text{ legfeljebb megszámlálható}\}$$
topológia $\mathcal{X}$-en (**ko-megszámlálható topológia**).

A De-Morgan-azonosságok egyszerű következményeként adódik az

1.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, akkor $\emptyset \in \mathcal{F}$ és $\mathcal{X} \in \mathcal{F}$, ill.

1. bármely két zárt halmaz egyesítése is zárt:
$$A,\, B \in \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad A \cup B \in \mathcal{F};$$
2. zárt halmazok tetszőleges rendszerének közös része is zárt, azaz igaz az
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad \cap\mathcal{A} \in \mathcal{F}$$
implikáció!

Útm. Mivel

$$\emptyset \in \mathcal{G} \quad \text{és} \quad \mathcal{X} \in \mathcal{G}, \qquad \text{ezért} \qquad \emptyset = \mathcal{X}^c \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \mathcal{X} = \emptyset^c \in \mathcal{F},$$

továbbá ha

1. $A,\, B \in \mathcal{F}$, akkor $A^c,\, B^c \in \mathcal{G}$, így

$$A \cup B = (\underbrace{A^c \cap B^c}_{\in \mathcal{G}})^c \in \mathcal{F}.$$

2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, akkor bármely $A \in \mathcal{A}$ esetén $A^c \in \mathcal{G}$, ahonnan

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c \in \mathcal{G}$$

   következik, így

$$\cap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c \right)^c \in \mathcal{F}. \quad \blacksquare$$

Adott topologikus terekből újabb topologikus terek képezhetők. Erre világít rá az

1.1.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, akkor a

$$\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}} := \{Q \cap \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) : \; Q \in \mathcal{G}\}$$

halmaz topológia $\mathcal{Y}$-on ($\mathcal{G}$ **nyom**a $\mathcal{Y}$-on)!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy

$$\emptyset = \emptyset \cap \mathcal{Y} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y},$$

így

$$\emptyset \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}.$$

2. lépés. Ha $A,\, B \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}$, akkor alkalmas $Q_A,\, Q_B \in \mathcal{G}$ halmazokkal

$$A = Q_A \cap \mathcal{Y}, \qquad \text{ill.} \qquad B = Q_B \cap \mathcal{Y}.$$

Így

$$A \cap B = (Q_A \cap \mathcal{Y}) \cap (Q_B \cap \mathcal{Y}) = \underbrace{(Q_A \cap Q_B)}_{\in \mathcal{G}} \cap \mathcal{Y} \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}.$$

3. lépés. Ha Γ tetszőleges indexhalmaz és

$$A_\gamma \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}} \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

akkor alkalmas $Q_\gamma \in \mathcal{G}$ esetén

$$A_\gamma = Q_\gamma \cap \mathcal{Y} \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

ezért

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(Q_\gamma \cap \mathcal{Y}) = \underbrace{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Q_\gamma\right)}_{\in\mathcal{G}} \cap \mathcal{Y} \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}. \quad \blacksquare$$

Ezét jogos az

1.1.2. definíció. Adott $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér és $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén az $(\mathcal{Y},\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ topologikus teret az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ **alterének** nevezzük.

1.1.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, akkor az $(\mathcal{Y},\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altér zárt halmazainak rendszere nem más, mint a

$$\{Z \cap \mathcal{Y} \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) : \ Z \in \mathcal{F}\}$$

halmazrendszer!

Útm. Valamely A halmaz pontosan akkor zárt az $(\mathcal{Y},\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altérben, ha $\mathcal{Y}\backslash A$ nyílt $(\mathcal{Y},\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$-ban, azaz $\mathcal{Y}\backslash A \in \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists Q \in \mathcal{G} : \quad \mathcal{Y}\backslash A = Q \cap \mathcal{Y}.$$

Így,

- ha $(*)$ teljesül, akkor az $M := \mathcal{X}\backslash Q$ halmaz zárt $(\mathcal{X},\mathcal{G})$-ben: $M \in \mathcal{F}$ és

$$M \cap \mathcal{Y} = (\mathcal{X}\backslash Q) \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}\backslash Q = \mathcal{Y}\backslash(\mathcal{Y} \cap Q) = \mathcal{Y}\backslash(\mathcal{Y}\backslash A) = A.$$

- ha $M \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $A = \mathcal{Y} \cap M$, akkor $Q := \mathcal{X}\backslash M$ nyílt $(\mathcal{X},\mathcal{G})$-ben: $Q \in \mathcal{G}$ és

$$Q \cap \mathcal{Y} = (\mathcal{X}\backslash M) \cap \mathcal{Y} = \mathcal{Y}\backslash M = \mathcal{Y}\backslash(\mathcal{Y} \cap M) = \mathcal{Y}\backslash A. \quad \blacksquare$$

1.1.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \mathcal{X},\mathcal{Y}$, továbbá $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, akkor

$$\mathcal{G}_f := \left\{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) : \ f^{-1}[Q] \in \mathcal{G}\right\}$$

topológia $\mathcal{Y}$-on (f indukálta vagy f szerinti **faktortopológia**)!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy

$$\emptyset \in \mathcal{G}_f \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} \in \mathcal{G}_f,$$

hiszen

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \in \mathcal{G} \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{Y}] = \mathcal{X} \in \mathcal{G}.$$

2. lépés. Ha $A,\ B \in \mathcal{G}_f$, akkor

$$f^{-1}[A \cap B] = \underbrace{f^{-1}[A]}_{\in \mathcal{G}} \cap \underbrace{f^{-1}[B]}_{\in \mathcal{G}} \in \mathcal{G},$$

így $A \cap B \in \mathcal{G}_f$.

3. lépés. Ha Γ tetszőleges indexhalmaz és

$$A_\gamma \in \mathcal{G}_f \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

akkor

$$f^{-1}\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A\gamma\right] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{f^{-1}[A\gamma]}_{\in \mathcal{G}} \in \mathcal{G},$$

ezért

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A\gamma \in \mathcal{G}. \qquad \blacksquare$$

1.1.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \mathcal{X}, \mathcal{Y}$, továbbá $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bijektív, akkor

$$\mathcal{G}^* := \{f[Q] \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) :\ Q \in \mathcal{G}\}$$

topológia $\mathcal{Y}$-on!

Útm.

1. lépés. $\emptyset \in \mathcal{G}^*$ és $\mathcal{Y} \in \mathcal{G}^*$, hiszen az $\emptyset \in \mathcal{G}$ elemre $f[\emptyset] = \emptyset$ és a szürjektivitás miatt az $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$ elemre $f[\mathcal{X}] = \mathcal{Y}$.

2. lépés. Ha $A,\ B \in \mathcal{G}^*$, akkor alkalmas $Q_A, Q_B \in \mathcal{G}$ halmazokkal

$$A = f[Q_A], \qquad B = f[Q_B].$$

Így f injektivitása miatt

$$A \cap B = f[Q_A] \cap f[Q_B] = f[Q_A \cap Q_B] \in \mathcal{G}^*.$$

3. lépés. Ha Γ tetszőleges indexhalmaz és

$$A_\gamma \in \mathcal{G}^* \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

akkor alkalmas

$$Q_\gamma \in \mathcal{G} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

halmazokkal

$$A_\gamma = f[Q_\gamma] \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

így – lévén, hogy $\mathcal{G}$ topológia –

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma \in \mathcal{G},$$

ill.

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f\left[Q_\gamma\right] = f\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} Q_\gamma\right] \in \mathcal{G}^*. \quad \blacksquare$$

1.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$, ill. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ topologikus tér,

$$\mathcal{B} := \left\{A \times B : \; A \in \mathcal{G}_\mathcal{X},\, B \in \mathcal{G}_\mathcal{Y}\right\},$$

akkor a

$$\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \{\cup\mathcal{H} : \; \mathcal{H} \subset \mathcal{B}\}$$

halmaz topológia $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on (**szorzattopológia**)!

Útm.

1. lépés. Mivel $\emptyset \in \mathcal{G}_\mathcal{X}$ és bármely $B \in \mathcal{G}_\mathcal{Y}$ esetén $\emptyset = \emptyset \times B$, ezért $\emptyset \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$. Az

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

állítás pedig abból következik, hogy $\mathcal{X} \in \mathcal{G}_\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y} \in \mathcal{G}_\mathcal{Y}$.

2. lépés. Ha $A, B \in \mathcal{G}_\mathcal{X}$, ill. $C, D \in \mathcal{G}_\mathcal{Y}$, akkor

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

következtében $\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ metszetstabil.

3. lépés. Az

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \qquad \Longrightarrow \qquad \cup\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

tulajdonság pedig a definíció egyenes következménye. $\blacksquare$

1.1.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha tetszőleges $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz esetén $(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma)$ topologikus tér $(\gamma \in \Gamma)$, továbbá $\mathcal{X} := \bigtimes_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{X}_\gamma$ és

$$\mathcal{G} := \left\{A \subset \mathcal{X} : \; \forall\, a \in A\; \exists\, \widetilde{\Gamma} \subset \Gamma \text{ véges és } \forall \gamma \in \widetilde{\Gamma}\; \exists A_\gamma \in \mathcal{G}_\gamma : \; a_\gamma \in A_\gamma \, (\gamma \in \mathcal{G}_\gamma)\right\},$$

akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ is topologikus tér!

Az így értelmezett $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus teret az $(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ **topologikus terek szorzatának** nevezzük. Véges (pontosabban kételemű) Γ esetén visszakapjuk az 1.1.6-beli feladatban értelmezett szorzattopológiát.

Mint ahogy az alábbi feladat is igazolja, az újabb topológiák képzésének megvannak a maga korlátai.

1.1.7. feladat. Igaz-e, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_1)$ és $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_2)$ topologikus terek esetén

$$(\mathcal{X},\, \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)\,, \qquad \text{ill.} \qquad (\mathcal{X},\, \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$$

topologikus tér?

Útm.

1. $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$ topologikus tér, ui.
   - $\emptyset \in \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$-ből és $\mathcal{X} \in \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$-ből következik, hogy
     $$\emptyset \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \qquad \text{és} \qquad \mathcal{X} \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2;$$
   - ha $H \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$, akkor $H \subset \mathcal{G}_1$ és $H \subset \mathcal{G}_2$, így
     $$\cup H \in \mathcal{G}_1 \qquad \text{és} \qquad \cup\, H \in \mathcal{G}_2,$$
     innen pedig következik, hogy
     $$\cup H \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2;$$
   - ha $H \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ véges, akkor $H \subset \mathcal{G}_1$ véges és $H \subset \mathcal{G}_1$ véges, így
     $$\cap H \in \mathcal{G}_1 \qquad \text{és} \qquad \cap\, H \in \mathcal{G}_2,$$
     ezért
     $$\cap H \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2.$$
2. $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$ nem feltétlenül topologikus tér, ui. ha pl.
   $$|\mathcal{X}| = 3 \;\text{ és }\; \mathcal{X} := \{a, b, c\}, \qquad \mathcal{G}_1 := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}\}, \qquad \mathcal{G}_2 := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{b\}\},$$
   akkor $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_1$ topológia $\mathcal{X}$-en, de
   $$\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}, \{b\}\}$$
   már nem topológia $\mathcal{X}$-en, hiszen
   $$\{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2. \quad \blacksquare$$

1.1.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz és $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\gamma)$ topologikus tér $(\gamma \in \Gamma)$, akkor

$$\mathcal{G} := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma$$

topológia $\mathcal{X}$-en!

Útm.

1. lépés. Mivel tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\emptyset \in \mathcal{G}_\gamma \quad \text{és} \quad \mathcal{X} \in \mathcal{G}_\gamma, \qquad \text{ezért} \qquad \emptyset \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma \qquad \text{és} \qquad \mathcal{X} \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma.$$

2. lépés. Ha
$$A, B \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma,$$
akkor
$$A, B \in \mathcal{G}_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma), \qquad \text{így} \qquad A \cap B \in \mathcal{G}_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma),$$
ezért
$$A \cap B \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma.$$

3. lépés. Ha
$$H \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma,$$
akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $H \subset \mathcal{G}_\gamma$, így
$$\bigcup H \in \mathcal{G}_\gamma, \qquad \text{ezért} \qquad \bigcup H \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma. \quad \blacksquare$$

A 1.1.8. feladatbeli $\mathcal{G}$ topológia minden $\mathcal{G}_\gamma$ topológiánál „durvább”:
$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Így minden $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\gamma)$ topologikus tér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ halmazrendszer esetén megadható olyan ($\mathcal{X}$-beli) – $\mathcal{G}(\mathcal{A})$-val jelölt – topológia, amely az $\mathcal{A}$ halmazrendszert tartalmazó topológiák közül a „legdurvább”:
$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{T} \supset \mathcal{A} : \ \mathcal{T} \text{ toplógia } \mathcal{X}\text{-en}\}.$$

Ezt a toloplógiát az $\mathcal{A}$ **halmazrendszer indukálta topológiának** nevezzük.

1.1.3. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_1)$ és $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_2)$ topologikus terek esetében azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}_1$ **gyengébb** vagy **durvább** $\mathcal{G}_2$-nél, ill. $\mathcal{G}_2$ **erősebb** vagy **finomabb** $\mathcal{G}_1$-nél, ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$.

Ezért valamely $\mathcal{X}$ halmazon bevezethető topológiák halmazán megadható egy rendezés: a $\mathcal{G}_2$ topológia „nagyobb”, mint a $\mathcal{G}_1$ topológia, ha $\mathcal{G}_1$ durvább $\mathcal{G}_2$-nél. A topológiák ily módon kapott rendezett halmazának van maximális eleme: a diszkrét topológia, és van minimális eleme: az indiszkrét topológia.

1.1.4. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{X}$ pont **környezete** a $K(x) \subset \mathcal{X}$ halmaz, ha alkalmas $A \in \mathcal{G}$ (nyílt) halmazzal $x \in A \subset K(x)$. Az $x(\in \mathcal{X})$ pont környezeteinek osztályát $\mathcal{U}(x)$ jelöli:
$$\mathcal{U}(x) := \{K(x) \subset \mathcal{X} : \ K(x) \text{ környezete } x\text{-nek}\} \qquad (x \textbf{ környezetrendszere}).$$

Az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz környezetének nevezzük az $U \subset \mathcal{X}$ halmazt, ha bármely $x \in A$ esetén $U \in \mathcal{U}(x)$.

1.1.5. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén vezessük be az alábbi fogalmakat.

1. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **belső pont**ja, ha x-nek van olyan $K(x)$ környezete, amelyre $K(x) \subset A$. Az
$$\mathrm{int}\,(A) := \{x \in \mathcal{X} : \ x \text{ belső pontja } A\text{-nak}\}$$
halmazt A **belsejének** nevezzük.

2. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **határpont**ja, ha x minden környezetében van eleme A-nak és A^c-nek is:
$$A \cap U \neq \emptyset \quad \text{és} \quad A^c \cap U \neq \emptyset \qquad (U \in \mathcal{U}(x)).$$
A
$$\partial A := \{x \in \mathcal{X} : \ x \text{ határpontja } A\text{-nak}\}$$
halmazt A **határ**ának nevezzük.

3. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **érintkezési pont**ja, ha x bármely környezete tartalmaz A-beli pontot:
$$A \cap U \neq \emptyset \qquad (U \in \mathcal{U}(x)).$$
Az A **érintkezési pont**jainak halmazát, azaz az
$$\overline{A} := [A] := \{x \in \mathcal{X} : \ x \text{ érintkezési pontja } A\text{-nak}\}$$
halmazt A **lezárás**ának nevezzük.

4. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **külső pont**ja, ha $x \notin \overline{A}$.

5. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **torlódási pont**ja, ha x tetszőleges környezete tartalmaz x-től különböző A-beli pontot:
$$A \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset \qquad (U \in \mathcal{U}(x)).$$
Az A tortlódási pontjainak halmazát, azaz az
$$A' := \{x \in \mathcal{X} : \ x \text{ torlódási pontja } A\text{-nak}\}$$
halmazt A **deriválthalmaz**ának nevezzük.

6. Az $x \in \mathcal{X}$ pont az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **izolált pont**ja, ha $x \in A \backslash A'$.

1.1.7. példa. Ha $|\mathcal{X}| = 3$ és $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$, akkor az 1.1.2. példabeli topologikus tér esetében az

$$\mathcal{U}(a) = \{\{a, b\},\, \mathcal{X}\}\,,$$

$$\mathcal{U}(b) = \{\{b\},\, \{a, b\},\, \{b, c\},\, \mathcal{X}\} \qquad \text{és}$$

$$\mathcal{U}(c) = \{\{b, c\},\, \mathcal{X}\}$$

halmazok az a, b és c egy-egy környezetrendszerét alkotják.

1.1.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér és $x \in \mathcal{X}$ pont esetén igazak az

1. $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$;
2. $A \in \mathcal{U}(x) \quad \Longrightarrow \quad x \in A$;
3. $A, B \in \mathcal{U}(x) \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{U}(x)$;
4. $(A \in \mathcal{U}(x) \ \wedge \ A \subset B \subset \mathcal{X}) \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathcal{U}(x)$;
5. $\forall A \in \mathcal{U}(x)\ \exists B \in \mathcal{U}(x)\ \forall y \in B : \ A \in \mathcal{U}(y)$

állítások!

Útm.

1.1.9. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén igazoljuk a $\mathcal{P}(\mathcal{X})$-beli halmazok belsejének, ill. lezártjának dualitására vonatkozó

$$\overline{A} = (\mathrm{int}\,(A^c))^c, \qquad \mathrm{int}\,(A) = \left(\overline{A^c}\right)^c \qquad (A \subset \mathcal{X})$$

állításokat!

Útm.

1. lépés. Bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x \in (\overline{A})^c \quad \Longleftrightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) : \ U \cap A = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) : \ U \subset A^c,$$

továbbá

$$\exists U \in \mathcal{U}(x) : \ U \subset A^c \quad \Longleftrightarrow \quad A^c \in \mathcal{U}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{int}\,(A^c),$$

azaz

$$\overline{A} = (\mathrm{int}\,(A^c))^c.$$

2. lépés. Az előbbiek alapján

$$\overline{A^c} = (\mathrm{int}\,(A))^c\,, \qquad \text{így} \qquad \mathrm{int}\,(A) = \left(\overline{A^c}\right)^c. \quad \blacksquare$$

Az egyes terekben a különböző ponttípusok igencsak különfélék lehetnek, amint ez az alábbiakban is látható.

1.1.8. példa.

1. A diszkrét topologikus térben (vö. 1.1.4. példa) (ahol minden $A \subset \mathcal{X}$ halmaz nyílt is és zárt is)
$$\mathrm{int}\,(A) = A = \overline{A}, \qquad \partial A = \emptyset = A'$$
teljesül.
2. Az indiszkrét topologikus térben (vö. 1.1.5. példa) bármely $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ halmazra
$$\mathrm{int}\,(A) = \emptyset, \qquad \overline{A} = \mathcal{X} = \partial A, \qquad \mathcal{U}(x) = \{\mathcal{X}\} \quad (x \in \mathcal{X})$$
teljesül. Ezért az ilyen topologikus teret szokás az **„összeragadt pontok" terének** is nevezni.
3. A Sierpiński-féle topologikus térben (vö. 1.1.1. példa) $\overline{\{a\}} = \mathcal{X}$, ill. $\overline{\{b\}} = \mathcal{X}$.

1.1.10. feladat. Adjuk meg az 1.1.2. példabeli topologikus tér zárt halmazainak rendszerét, majd határozzuk meg az $A := \{b\}$, a $B := \{a, c\}$, ill. a $C := \{a\}$ halmazok belsejét, lezárását, ill. határát!

Útm. A zárt halmazok rendszere:
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}\},$$
továbbá
$$\mathrm{int}\,(A) = \{b\}, \qquad \mathrm{int}\,(B) = \emptyset \qquad \text{és} \qquad \mathrm{int}\,(C) = \emptyset,$$
$$\overline{A} = \mathcal{X}, \qquad \overline{B} = B \qquad \text{és} \qquad \overline{C} = C,$$
ill.
$$\partial A = A, \qquad \partial B = B \qquad \text{és} \qquad \partial C = C. \quad \blacksquare$$

1.1.11. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér és $A, B \subset \mathcal{X}$ halmazok esetén igazak az

1. $\mathrm{int}\,(A) \subset A$ és $\mathrm{int}\,(A) \in \mathcal{G}$;
2. $\mathrm{int}\,(\mathrm{int}\,(A)) = \mathrm{int}\,(A)$;
3. $\mathrm{int}\,(A \cap B) = \mathrm{int}\,(A) \cap \mathrm{int}\,(B)$;
4. $\mathrm{int}\,(A \cup B) \supset \mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B)$

állítások!

Útm.

1. Az $\mathrm{int}\,(A)$ és $\mathcal{G}$ definíciója alapján triviális.
2. Mivel $\mathrm{int}\,(A) \in \mathcal{G}$, ezért (vö. 1.1.12/3. feladat)
$$\mathrm{int}\,(\mathrm{int}\,(A)) = \mathrm{int}\,(A).$$
3. Mivel
$$\mathrm{int}\,(A \cap B) \subset \mathrm{int}\,(A) \qquad \text{és} \qquad \mathrm{int}\,(A \cap B) \subset \mathrm{int}\,(B),$$
ezért
$$\mathrm{int}\,(A \cap B) \subset \mathrm{int}\,(A) \cap \mathrm{int}\,(B).$$
Fordítva, $\mathrm{int}\,(A) \cap \mathrm{int}\,(B)$ nyílt része $A \cap B$-nek, így (vö. 1.1.12/1. feladat)
$$\mathrm{int}\,(A) \cap \mathrm{int}\,(B) \subset \mathrm{int}\,(A \cap B).$$
4. Világos, hogy $\mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B)$ nyílt része $A \cup B$-nek (vö. 1.1.12/1. feladat), így
$$\mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B) \subset \mathrm{int}\,(A \cup B).$$
Ez esetben nem írható egyenlőség, ui. ha pl. $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával látjuk el (vö. 1.1.6/1. példa), akkor az
$$A := \mathbb{Q}, \qquad B := \mathbb{Q}^c$$
halmazokkal
$$\mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B) = \emptyset \subsetneqq \mathbb{R} = \mathrm{int}\,(\mathbb{R}) = \mathrm{int}\,(A \cup B). \quad \blacksquare$$

1.1.12. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely A halmaz

1. belseje azonos az A-beli nyílt halmazok egyesítésével:
$$\mathrm{int}\,(A) = \bigcup_{\substack{H \in \mathcal{G} \\ H \subset A}} H;$$
2. lezártja azonos az A-t tartalmazó zárt halmazok metszetével:
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{H \in \mathcal{F} \\ H \supset A}} H;$$
3. pontosan akkor nyílt, ha minden pontja belső pont:
$$A \in \mathcal{G} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \mathrm{int}\,(A);$$
4. pontosan akkor zárt, ha megegyezik lezártjával, ill. ha tartalmazza összes torlódási pontját:
$$A = \overline{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \mathcal{F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \supset A';$$
5. határára
$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathrm{int}\,(A)$$
teljesül!

Útm.

1. Az 1.1.11/1. gyakorló feladat következményeként
$$\mathrm{int}\,(A) \subset \bigcup_{\substack{H\in\mathcal{G}\\ H\subset A}} H.$$
Fordítva, ha valamely $H \in \mathcal{G}$ nyílt halmaz esetén $H \subset A$, akkor H minden pontjának környezete, azaz bármely $x \in H$ esetén
$$H \in \mathcal{U}(x).$$
$H \subset A$ miatt (vö. 1.1.1/4. gyakorló feladat) $A \in \mathcal{U}(x)$, azaz $H \subset \mathrm{int}\,(A)$. Tehát
$$\mathrm{int}\,(A) = H.$$

2. Mivel
$$\overline{A}^c = \mathrm{int}\,(A^c)$$
(vö. 1.1.9. feladat), ezért az 1.1.11/1. gyakorló feladat és a fentiek következtében
$$\mathrm{int}\,(A^c) = \bigcup_{\substack{B\in\mathcal{G}\\ B\subset A^c}} B = \bigcup_{\substack{B^c\in\mathcal{G}\\ B^c\subset A^c}} B^c = \bigcup_{\substack{H\in\mathcal{Z}\\ A\subset H}} H^c = \left(\bigcap_{\substack{H\in\mathcal{Z}\\ A\subset H}} H\right)^c,$$
így
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{H\in\mathcal{Z}\\ A\subset H}} H.$$

3. Világos, hogy $\mathrm{int}\,(A) \subset A$, ezért csak annyit kell belátni, hogy
$$A \in \mathcal{G} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset \mathrm{int}\,(A).$$
1. lépés. Ha
$$A \in \mathcal{G},$$
akkor $A = \mathrm{int}\,(A)$, hiszen az iménti állítás miatt $\mathrm{int}\,(A)$ a legbővebb A-beli nyílt halmaz.

2. lépés. Ha
$$A \subset \mathrm{int}\,(A),$$
akkor az 1.1.11/1. gyakorló feladatbeli állítás következtében
$$A = \mathrm{int}\,(A) \in \mathcal{G}.$$

4. Világos, hogy A pontosan akkor zárt, ha A^c nyílt, így (vö. 1.1.9. feladat)
$$A = \overline{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^c = (\overline{A})^c = \mathrm{int}\,(A^c)$$
miatt az állítás első része teljesül. Innen
$$\overline{A} = A \cup A'$$
figyelembe vételével azt kapjuk, hogy
$$A \in \mathcal{F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \cup A' = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A' \subset A.$$

5. Az 1.1.5. definíció alapján világos, hogy

$$\overline{A} = A \cup \partial A. \quad \blacksquare$$

1.1.13. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, $A \subset \mathcal{X}$, akkor $\partial A \in \mathcal{F}$, továbbá

$$\partial A = \partial(A^c)$$

teljesül!

Útm. Az 1.1.5. definíció alapján világos, hogy

$$\partial(A^c) = \partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c},$$

így ∂A, mint zárt halmazok metszete zárt (vö. 1.1.1. felaadat). ■

1.1.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér és $A, B \subset \mathcal{X}$ halmazok esetén igazak az

1. $\overline{A} \supset A$ és $\overline{A} \in \mathcal{G}$;
2. $A \subset \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathcal{F}$;
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
4. $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$;
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
6. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

állítások!

Útm.

1.1.6. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **nyílt lefedés**ének nevezzük a $\mathcal{H}$ halmazrendszert, ha alkalmas Γ indexhalmaz és

$$U_\gamma \subset \mathcal{G} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

(nyílt) halmazok esetén

$$\mathcal{H} = \{U_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\} \qquad \text{és} \qquad A \subset \bigcup \mathcal{H}.$$

1.1.9. példa. Ha $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával látjuk el (vö. 1.1.6/1. példa), akkor a

$$\{(k-1, k+1) : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

halmazrendszer az $\mathbb{R}$ egy nyílt lefedése.

Sokszor fordul elő az az eset, hogy Γ véges vagy megszámlálható (index)halmaz, azaz $\mathcal{H}$ **véges lefedés** vagy **megszámlálható lefedés**. $\mathcal{H}$-ra a továbbiakban az

$$(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$$

jelölést fogjuk használni.

1.1.2. $\mathcal{F}_\delta$- és $\mathcal{G}_\sigma$-halmazok

1.1.7. definíció. Adott $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $A\subset\mathcal{X}$ halmaz

1. $\mathcal{G}_\delta$**-halmaz**, ha előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként:
$$A\in\mathcal{G}_\delta \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, N_n\in\mathcal{G} \quad (n\in\mathbb{N}): \quad A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n;$$
2. $\mathcal{F}_\sigma$**-halmaz**, ha előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként:
$$A\in\mathcal{F}_\sigma \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, Z_n\in\mathcal{F} \quad (n\in\mathbb{N}): \quad A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Ezért,

1. ha tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén az
$$N_k\in\mathcal{G} \qquad (k\in\{1,\ldots,n\})$$
halmazokkal
$$A_n:=\bigcap_{k=1}^{n} N_k,$$
akkor $A_n\in\mathcal{G}$ és az (A_n) halmazsorozat monoton szűkülő, továbbá
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n=A$$
miatt
$$\lim(A_n)=A,$$
azaz minden $\mathcal{G}_\delta$-halmaz nyílt halmazok monoton szűkülő sorozatának határhalmaza.
2. ha tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén a
$$Z_k\in\mathcal{F} \qquad (k\in\{1,\ldots,n\})$$

halmazokkal
$$A_n := \bigcup_{k=1}^{n} Z_k,$$
akkor $A_n \in \mathcal{F}$ és az (A_n) halmazsorozat monoton bővülő, továbbá
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n = A$$
miatt
$$\lim(A_n) = A,$$
azaz minden $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz zárt halmazok monoton bővülő sorozatának határhalmaza.

3. a De-Morgan-azonosságok következtében
   - $A \in \mathcal{G}_\delta \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}_\sigma$, azaz
   $$\mathcal{G}_\delta = (\mathcal{F}_\sigma)^c := \{A^c \subset \mathcal{X} : \ A \in \mathcal{F}_\sigma\}\,;$$
   - $A \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow A^c \in \mathcal{G}_\delta$, azaz
   $$\mathcal{F}_\sigma = (\mathcal{G}_\delta)^c := \{A^c \subset \mathcal{X} : \ A \in \mathcal{G}_\delta\}\,.$$

1.1.14. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén

1. $\mathcal{G}_\delta$-halmazok (véges) uniója is $\mathcal{G}_\delta$-halmaz;
2. $\mathcal{F}_\sigma$-halmazok (véges) metszete is $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ha az $\mathcal{M}$ halmazrendszer metszetzárt, akkor $\mathcal{M}_\cup$ (vö. 11.1.2. definíció) is metszetzárt. Valóban, ha $A, B \in \mathcal{M}_\cup$, akkor van olyan $m, n \in \mathbb{N}$ és
$$A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}, \qquad \text{ill.} \qquad B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M},$$
hogy
$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad \text{és} \qquad B = \bigcup_{l=1}^{n} B_k,$$
így
$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{m} \left(A_k \cap \left(\bigcup_{l=1}^{n} B_l \right) \right) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{n} (A_k \cap B_l) = \bigcup_{\substack{1\le k\le m \\ 1\le l\le n}} \underbrace{(A_k \cap B_l)}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_\cup. \quad \blacksquare$$

2. lépés. Ha $A, B \in \mathcal{G}_\delta$, akkor alkalmas $m, n \in \mathbb{N}$, ill. $N_m, \widetilde{N}_n \in \mathcal{G}$ esetén

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} N_m, \qquad \text{ill.} \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{N}_n,$$

így

$$\begin{aligned} A \cup B &= \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} N_m\right) \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{N}_n\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(N_m \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{N}_n\right)\right) = \\ &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(N_n \cup \widetilde{N}_n\right) = \underbrace{\bigcap_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}}_{\text{szigma-metszet}} \underbrace{\left(N_n \cup \widetilde{N}_m\right)}_{\in\mathcal{G}} \in \mathcal{G}_\delta. \end{aligned}$$

3. lépés. Ha $A, B \in \mathcal{F}_\sigma$, akkor alkalmas $m, n \in \mathbb{N}$, ill. $Z_m, \widetilde{Z}_n \in \mathcal{F}$ esetén

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Z_m, \qquad \text{ill.} \qquad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{Z}_n,$$

így

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Z_m\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{Z}_n\right) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(Z_m \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{Z}_n\right)\right) = \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(Z_n \cap \widetilde{Z}_n\right) = \underbrace{\bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}}_{\text{szigma-unió}} \underbrace{\left(Z_n \cap \widetilde{Z}_m\right)}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_\sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.1.10. példa.

1. Ha $r \in \mathbb{Q}$, akkor $\{r\}$ $\mathcal{G}_\delta$-halmaz $\mathbb{R}$-ben, hiszen

$$\{r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right).$$

2. $\mathbb{Q}$ $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz $\mathbb{R}$-ben, hiszen $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}$.

1.1.8. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén a $\sigma(\mathcal{G})$ ($\mathcal{X}$-beli) szigma-algebrát (vö. [?]) **Borel-szigma-algebrának** nevezzük és $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$-szel (ill. $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$-szel) jelöljük. $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ elemeit a topologikus tér, ill. $\mathcal{X}$ **Borel-halmaz**ainak nevezzük.

1.1.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, akkor igaz a

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$$

állítás!

Útm. Világos, hogy ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $A^c \in \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$. Mivel $\sigma(\mathcal{F})$ szigma-algebra, ezért

$$A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{G}).$$

Így $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{G})$, ahonnan

$$\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$$

következik. Hasonlóan látható be, hogy $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{G})$, így $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{G})$. ■

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, akkor

1. $A \in \mathcal{G}_\delta \Longrightarrow A \in \mathfrak{B}_\mathcal{X}$, ui. ha $A \in \mathcal{G}_\delta$, akkor

$$\exists\, N_n \in \mathcal{G} \quad (n \in \mathbb{N}): \qquad A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n,$$

   továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N_n \in \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathfrak{B}_\mathcal{X},$$

   így, mivel $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ szigma-algebra, ezért

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{B}_\mathcal{X}.$$

2. $A \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$, ui. ha $A \in \mathcal{F}_\sigma$, akkor

$$\exists\, Z_n \in \mathcal{F} \quad (n \in \mathbb{N}): \qquad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n,$$

   továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$Z_n \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{B}_\mathcal{X},$$

   így, mivel $\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ szigma-algebra, ezért

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathfrak{B}_\mathcal{X}.$$

1.1.16. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor f szakadási pontjainak halmaza $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz (**Young-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\mathfrak{C}(f) := \{a \in \mathbb{R} :\ f \in \mathfrak{C}[a]\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathfrak{U}(f) := \{a \in \mathbb{R} :\ f \notin \mathfrak{C}[a]\},$$

akkor elég megmutatni, hogy $\mathfrak{C}(f) \in \mathcal{G}_\delta$, ui. $\mathfrak{U}(f) = \mathbb{R} \backslash \mathfrak{C}(f)$, ahonnan $\mathfrak{U}(f) \in \mathcal{F}_\sigma$ következik (vö. 1.1.7. definíció utáni 3.).

2. lépés. Megmutatjuk, hogy ha valamely $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén

$$K_r(a) := (a - r, a + r),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \ (x, y \in K_\delta(a) \ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ha

- $f \in \mathfrak{C}[a]$, akkor

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad (x \in K_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2)\,,$$

  így ha $y \in K_\delta(a)$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon;$$

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$(x, y \in K_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,,$$

  akkor az $a := y$ választással kapjuk, hogy $f \in \mathfrak{C}[a]$.

3. lépés. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$A_\varepsilon := \{a \in \mathbb{R} \,|\, \exists \delta > 0: \; x, y \in K_\delta(a) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$$

nyílt halmaz:
ha $a \in A_\varepsilon$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$x, y \in K_\delta(a) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

így $K_\delta(a) \subset A_\varepsilon$, hiszen ha $b \in K_\delta(a)$, akkor minden olyan $\widetilde{\delta} > 0$-ra, amelyre $K_{\widetilde{\delta}}(b) \subset K_\delta(a)$ teljesül, igaz, hogy

$$x, y \in K_{\widetilde{\delta}}(b) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

azaz $b \in A_\varepsilon$.

4. lépés. Világos, hogy

$$\mathfrak{C}(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon,$$

és mivel $A_{\widetilde{\varepsilon}} \supset A_\varepsilon$ $(\widetilde{\varepsilon} \geq \varepsilon)$, ezért f folytonossági pontjainak halmaza nem más, mint a

$$\mathfrak{C}(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$$

szigma-metszet, ahonnan $\mathfrak{C}(f) \in \mathcal{G}_\delta$ következik. ■

1.1.11. példa. Ha $\mathbb{R}$-et a szokásásos topológiával látjuk el, akkor $\mathbb{R}$ $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, hiszen a

$$D(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Dirichlet-függvény esetében $\mathfrak{C}(f) = \emptyset$, így $\mathfrak{U}(f) = \mathbb{R}$.

1.1.17. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $H \subset \mathbb{R}$-beli $\mathcal{G}_\delta$-halmazhoz van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\mathfrak{C}(f) = H$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha H nyílt halmaz ($H \in \mathcal{G}$) és

$$\overline{H} = \{x \in \mathbb{R} : \ \delta > 0 \implies K_\delta(x) \cap H \neq \emptyset\},$$

akkor az

$$f_H(x) := \begin{cases} 0 & \left(x \in H \cup \left(\mathbb{Q} \cap \overline{H}^c\right)\right), \\ \\ 1 & \text{(egyébként)} \end{cases}$$

függvényre $\mathfrak{C}(f_H) = H$, hiszen

- egyrészt $H \in \mathcal{G}$ miatt tetszőleges $a \in H$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $K_\delta(a) \subset H$, és így – lévén, hogy $f_H|_{K_\delta(a)}$ állandófüggvény – $f \in \mathfrak{C}[a]$, azaz $H \subset \mathfrak{C}(f_H)$,
- másrészt ha $x \notin H$, akkor két eset lehetséges:

  1. eset: $x \notin \overline{H}$. Ebben az esetben van olyan $\delta > 0$, hogy $K_\delta(x) \cap H = \emptyset$. Így, ha $y \in K_\delta(x)$ és $y \in \mathbb{Q}$ vagy $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, akkor $f_H(y) = 0$ vagy $f_H(y) = 1$, azaz $x \notin \mathfrak{C}(f)$.

  2. eset: $x \in \overline{H}$. Ekkor ugyan $f_H(x) = 1$, azonban tetszőleges $y \in K_\delta(x) \cap H \neq \emptyset$ esetén $f_H(y) = 0$, azaz $y \in \mathfrak{U}(f_H)$.

2. lépés. Ha $H \in \mathcal{G}_\delta$, akkor van olyan $N_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ (nyílt halmazokból álló) halmazsorozat, hogy

$$H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

Mivel nyílt halmazok metszete nyílt halmaz, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $N_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan monoton szűkülő halmazsorozat, amelyre $N_1 = \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_n \supset N_{n+1} \supset \ldots$$

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_{N_n} olyan függvény (vö. 1. **lépés.**), amelyre $\mathfrak{C}(f_{N_n}) = N_n$, és $0 < a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan számsorozat, amelyre

$$a_n > \sum_{i > n} a_i \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül (pl. $a_n := 1/n!$ $(n \in \mathbb{N})$), akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_{N_n}(x) \in \mathbb{R},$$

és a majoráns-kritérium miatt a konvergencia egyenletes. Ekkor $\mathfrak{C}(f) = H$, ui.

- $\mathfrak{C}(f) \supset H$, hiszen minden i esetén f_{N_i} folytonos a $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$ halmazon, így az egyenletes konvergencia miatt f is folytonos H-n.

- $\mathfrak{C}(f) \subset H$, hiszen ha $x \notin H$, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x \in N_n \backslash N_{n+1}$, akkor $x \in N_1, \ldots, N_n$, és így

$$f_{N_1}(x) = \ldots = f_{N_n}(x) = 0, \qquad \text{de} \qquad x \notin N_k \quad (n+1 \leq k \in \mathbb{N})$$

Két esetet különböztetünk meg:

1. eset: van olyan $\delta > 0$, hogy

$$K_\delta(x) \cap N_{n+1} = \emptyset,$$

ahonnan

$$x \notin \overline{N}_k \qquad (n+1 \leq k \in \mathbb{N})$$

következik. Mivel $x \in N_n$ és N_n nyílt, ezért feltehető, hogy $\delta > 0$ olyan, hogy $K_\delta(x) \subset N_n$. Ha

$$y \in K_\delta(x) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}),$$

akkor

$$f(y) > \sum_{i>n} a_i > 0,$$

mivel $y \notin N_{n+1}$ következtében

$$f_{n_i}(y) = 1 \qquad (i > n);$$

ha pedig

$$y \in K_\delta(x) \cap \mathbb{Q},$$

akkor $f(y) = 0$, mivel $y \notin \overline{N}_{n+1}$, ill. $y \in N_1, \ldots, N_n$ következtében $f_{N_i}(y) = 0$. Tehát $f \notin \mathfrak{C}[y]$.

2. eset: $x \in \overline{N}_{n+1}$. Ekkor $f(x) \geq a_{n+1}$, de tetszőleges

$$y \in K_\delta(x) \cap N_{n+1} \neq \emptyset$$

esetén

$$f(y) = \sum_{i>n+1} a_i < a_{n+1},$$

hiszen $y \in N_{n+1}$-gyel együtt $y \in N_j$, ill. $f_{n_j}(y) = 0$ is teljesül, ha $j \leq n+1$. Tehát ebben az esetben is $f \notin \mathfrak{C}[x]$. ■

1.1.3. Bázisok

Adott halmazon vett topológiák megadása lényegesen egyszerűbb lehet, ha az egész tolológia helyett csak annak egy részét – azaz a nyílt halmazoknak csak egy olyan rendszerét – kell megadni, amelyik már egyértelműen meghatározza az összes nyílt halmazt. Erre vonatkozik az

1.1.9. definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, ill. $x \in \mathcal{X}$ pont esetén

1. (**topologikus**) **bázis**nak nevezzük a $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ halmazrendszert, ha bármely $\mathcal{G}$-beli (nyílt) halmaz előállítható $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként, azaz

$$A \in \mathcal{G} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \mathcal{H} \subset \mathcal{B}: \ A = \cup \mathcal{H}.$$

2. **szubbázis**nak nevezzük az $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ halmazrendszert, ha $\mathcal{S}$ halmazaival képzett összes véges tagszámú metszetek bázist alkotnak.

3. az x pontra vonatkozó **környezetbázis**nak nevezzük a $\mathfrak{B}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{U}(x))$ halmazrendszert, ha x bármely környezete (részként) tartalmaz valamely $\mathfrak{B}_x$-beli elemet:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathfrak{B}_x : \quad V \subset U.$$

Bizonyos esetekben eleve a bázis segítségével definiáltuk magát a tolopógiát (vö. Sorgenfrey-egyenes, szorzattopológia).

1.1.12. példa. Ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér és $x \in \mathcal{X}$, akkor az

$$\{A \in \mathcal{G} : \ x \in A\}$$

halmazrendszer környezetbázisa x-nek, hiszen bármely $U \in \mathcal{U}(x)$ esetén van olyan $B \in \mathcal{G}$, hogy $x \in B \subset U$.

1.1.13. példa. Ha $\mathcal{G}$ a szoksásos topológia $\mathbb{R}$-en (vö. 1.1.6/1. példa), akkor

- a nyílt intervallumok rendszere (sőt a racionális végpontú nyílt intervallumok is) topologikus bázis ebben a térben;
- az
$$\{(r, +\infty), (-\infty, s) : \ r, s \in \mathbb{Q}\}$$
halmazrendszer szubbázis ebben a térben;
- bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén x környezetbázisa a
$$\mathfrak{B}_x := \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \subset \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$
halmazrendszer.

1.1.14. példa. Ha $\mathcal{G}$ a Sorgenfrey-egyenes, akkor a $\mathcal{B} := \mathbb{I}$ halmazrendszer (vö. 1.1.6/3. példa) bázis. Ez pl. azt jelenti, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén a $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, ill. az (a, b) intervallumok nyílt halmazok ebben a topológiában, hiszen:

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a-n, a)\,, \qquad [a, +\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a, a+n)\,, \qquad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right).$$

1.1.15. példa. Az 1.1.1. házi feladatban értelmezett topologikus térnek szubbázisa az

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{pr_\gamma^{-1}[N_\gamma] : \; N_\gamma \in \mathcal{G}_\gamma\}$$

halmazrendszer, ahol a

$$pr_\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_\gamma$$

leképezés az $\mathcal{X}_\gamma$-ra való projekció:

$$pr_\gamma(a) = a_\gamma \qquad (a \in \mathcal{X}_\gamma, \; \gamma \in \Gamma).$$

1.1.2. házi feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topopoligus terek esetén az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattér bázisa a

$$\mathcal{B} := \{A \times B : \; A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}, \; B \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}\}\,,$$

szubbázisa pedig az

$$S := \{A \times \mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \; A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}\} \cup \{\mathcal{X} \times B \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \; B \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}\}$$

halmazrendszer!

1.1.18. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ halmazrendszer pontosan akkor bázis, ha rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal!

(1) Minden $x \in \mathcal{X}$ ponthoz van olyan $B \in \mathcal{B}$ halmaz, amelyre $x \in B$ teljesül.

(2) Ha valamely $x \in \mathcal{X}$ pont és $B, C \in \mathcal{B}$ halmazok esetén $x \in B \cap C$, akkor van olyan $D \in \mathcal{B}$ halmaz, hogy

$$x \in D \subset B \cap C.$$

Útm.

1. lépés. Az **(1)** tulajdonság azt jelenti, hogy $\mathcal{X}$ előállítható $\mathcal{B}$-ből vett halmazok egyesítésével (hiszen $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$). A **(2)** tulajdonság pedig abból adódik, hogy $B \cap C \in \mathcal{G}$, ezért a $B \cap C$ halmaz $\mathcal{B}$-ből vett halmazok egyesítése.

2. lépés. Tegyük fel most, hogy teljesül az **(1)** és a **(2)** tulajdonság, és legyen $\widetilde{\mathcal{B}}$ olyan halmazrendszer, hogy

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\cup\mathcal{H} : \mathcal{H} \subset \mathcal{B}\}.$$

Ekkor $\emptyset, \mathcal{X} \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Továbbá, ha $A, B \in \widetilde{\mathcal{B}}$, akkor alkalmas Γ_A, Γ_B idexhalmazokkal és $A_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}$ halmazokkal

$$A = \bigcup_{\alpha\in\Gamma_A} A_\alpha \quad \text{és} \quad B = \bigcup_{\beta\in\Gamma_B} B_\beta, \qquad \text{így} \qquad A \cap B = \bigcup_{\alpha,\beta} A_\alpha \cap B_\beta.$$

A **(2)** tulajdonság következménye, hogy

$$A_\alpha \cap B_\beta \in \widetilde{\mathcal{B}} \qquad (\alpha \in \Gamma_A, \beta \in \Gamma_B),$$

ekkor azonban $A \cap B \subset \widetilde{\mathcal{B}}$. ■

Világos, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ szubbázis pontosan akkor bázis, ha

$$\forall U, V \in \mathcal{S}\, \forall x \in U \cap V\, \exists W \in \mathcal{S} : \ x \in W \subset U \cap V.$$

1.1.19. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$, akkor pontosan egy olyan topológia van $\mathcal{X}$-en, amelynek szubbázisa az $\mathcal{S}$ halmaz!

Útm. Ez a topológia nem más, mint

$$\mathcal{G}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bigcap_{k=1}^{n_\gamma} S_k^\gamma : \ S_k^\gamma \in \mathcal{S},\, n_\gamma \in \mathbb{N},\, \Gamma \text{ tetszőleges indexhalmaz} \right\},$$

hiszen – figyelembe véve, hogy az üres unió az üreshalmaz, az üres metszet pedig az egész tér – $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ topológia $\mathcal{X}$-en, ui. $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ unióstabilitása, $\emptyset \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ és $\mathcal{X} \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ triviálisan teljesül, továbbá bármely két $\mathcal{G}(\mathcal{S})$-beli halmaz metszete

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bigcap_{k=1}^{n_\gamma} S_k^\gamma\right) \cap \left(\bigcup_{\delta\in\widetilde{\Gamma}} \bigcap_{l=1}^{m_\delta} \widetilde{S}_l^\delta\right) = \bigcup_{(\delta,\gamma)\in\Gamma\times\widetilde{\Gamma}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_\gamma} S_k^\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{m_\delta} \widetilde{S}_l^\delta\right)\right)$$

következtében ismét $\mathcal{G}(\mathcal{S})$-beli, és indukcióval könnyen belátható, hogy $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ zárt a véges metszetre. ■

A $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ jelölés arra a tényre hívja fel a figyelmet, hogy a fenti topológia nem más, mint az $\mathcal{S}$ indukálta topológia.

1.1.3. gyakorló feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha adott $a \in \mathbb{Z}$ és $b \in \mathbb{N}$ esetén

$$N_{a,b} := \{a + kb \in \mathbb{Z} : \ k \in \mathbb{Z}\},$$

továbbá valamely $A \subset \mathbb{Z}$ esetén

$$A \in \mathcal{G} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall n \in A\, \exists b \in \mathbb{N} : \ N_{n,b} \subset A,$$

akkor $(\mathbb{Z}, \mathcal{G})$ topologikus tér!

Útm.

1.1.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ nem-üres halmaz, $a \in \mathcal{X}$, továbbá $\mathfrak{B}_a \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ olyan halmazrendszer, amelyre

1. $\forall U \in \mathfrak{B}_a : a \in U$;
2. $\forall U, V \in \mathfrak{B}_a \; \exists W \in \mathfrak{B}_a : \; W \subset U \cap V$;
3. $\forall U \in \mathfrak{B}_a \, \forall b \in U \, \exists V \in \mathfrak{B}_b : V \subset U$

teljesül, akkor

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \; \forall a \in A \, \exists U \in \mathfrak{B}_a : \; U \subset A\}$$

tolológia $\mathcal{X}$-en, és $\mathfrak{B}_a$ környezetbázisa a-nak!

Útm.

Így például, ha

- $\emptyset \neq H$, $\mathcal{X} := \mathbb{R}^H$, $F \subset H$ véges, $\varepsilon > 0$ és $f \in \mathcal{X}$, továbbá
$$U_{F,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathcal{X} : \; |f(s) - g(s)| < \varepsilon \; (s \in F)\},$$
akkor
$$\mathfrak{B}_f := \{U_{F,\varepsilon}(f) : \; F \subset H \text{ véges}, \; \varepsilon > 0\}$$
triviálisan rendelkezik a fenti 1. tulajdonsággal, sőt
$$U_{F_1 \cup F_2, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(f) \subset U_{F_1,\varepsilon_1}(f) \cap U_{F_2,\varepsilon_2}(f)$$
következtében 2. is teljesül. Továbbá, ha adott F, ill. ε esetén $g \in U_{F,\varepsilon}(f)$, akkor az
$$\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon - \max\{|f(s) - g(s)| : \; s \in F\} > 0$$
számmal
$$U_{F,\widetilde{\varepsilon}}(g) \subset U_{F,\varepsilon}(f),$$
azaz 3. is igaz. A megfelelő topológiát szokás **pontonkénti-konvergencia-topológiának** nevezni.
- $\mathcal{X} := \mathfrak{C}(\mathbb{R})$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $\varepsilon > 0$ és $f \in \mathcal{X}$, továbbá
$$U_{K,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathcal{X} : \; |f(s) - g(s)| < \varepsilon \; (s \in K)\},$$
akkor a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy
$$\mathfrak{B}_f := \{U_{K,\varepsilon}(f) : \; K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}, \; \varepsilon > 0\}$$
triviálisan rendelkezik a fenti $1-3$. tulajdonsággal (vegyük figyelembe, hogy f és g folytonossága, ill. K kompaktsága következtében
$$g \in U_{K,\varepsilon}(f) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup\{|f(s) - g(s)| \in \mathbb{R} : \; s \in K\} < \varepsilon$$
teljesül). A megfelelő topológiát szokás **egyenletes-konvergencia-topológiának** nevezni.

1.1.4. Sorozatok, folytonosság

1.1.10. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak **limeszpont**ja az $\alpha \in \mathcal{X}$ elem, ha

$$\forall U \in U(\alpha)\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : \ (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in U).$$

Az (x_n) sorozat limeszpontjainak halmazát a $\mathrm{Lim}\,(x_n)$ szimbólummal jelöljük.

1.1.16. példa.

1. Ha (x_n) kvázi-konstans sorozat, azaz alkamas $a \in \mathcal{X}$, ill. $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = a \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \{a\}.$$

2. A Sierpiński-féle topologikus térben (vö. 1.1.1. példa), ha

$$x_n := a \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill.} \qquad x_n := b \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \mathcal{X},$$

hiszen pl. a

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}\}$$

esetben

$$b \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$$

is igaz, ui. b-nek egyetlen környezete van:

$$\mathcal{U}(b) = \{\mathcal{X}\}.$$

3. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$, $\mathcal{G}$ pedig a kaotikus topológia:

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \mathcal{X}\},$$

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \mathcal{X}.$$

1.1.20. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz zártságának szükséges feltétele, hogy bármely A-beli sorozat limeszpontjai is A-ban legyenek, azaz igaz az

$$A \in \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad (\forall\, x_n \in A\ (n \in \mathbb{N}) : \ \mathrm{Lim}\,(x_n) \subset A)$$

implikáció!

Útm. Ha valamely

$$x_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén

$$\alpha \in \mathrm{Lim}\,(x_n) \backslash A, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha \in \mathcal{X} \backslash A \in \mathcal{G},$$

akkor alkalmas

$$U \in \mathcal{U}(\alpha)$$

környezet esetén

$$U \subset \mathcal{X} \backslash A.$$

Viszont

$$\alpha \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$$

következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$x_n \in U \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_n \in A \cap (\mathcal{X} \backslash A) = \emptyset,$$

ami nem lehetséges. ■

1.1.11. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat **konvergens**, ha alkalmas $\alpha \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \{\alpha\}.$$

Ezt az α elemet az $x := (x_n)$ sorozat **limesz**ének vagy **határelem**ének ($\mathcal{X} = \mathbb{K}$ esetén **határérték**ének) nevezzük, és konvergencia esetén a

$$\lim x := \lim(x_n) := \lim_{n\to\infty} x_n := \alpha, \qquad \text{ill. az} \qquad x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

jelölést használjuk.

1.1.17. példa. Ha alkalmas $a \in \mathcal{X}$, ill. $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = a \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz (x_n) kvázi-konstans sorozat (vö. 1.1.16/1. példa), akkor

$$\lim(x_n) = a.$$

1.1.12. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

leképezés

- **folytonos az** $a \in \mathcal{X}$ **pontban** /jelben $f \in \mathfrak{C}[a]$/, ha bármely

  $$V \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(a))$$

  ($\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$-beli) környezethez van olyan

  $$U \subset U_{\mathcal{Y}}(a)$$

  ($\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$-beli) környezet, amelyre

  $$f[U] \subset V;$$

- **folytonos az** $A \subset \mathcal{X}$ **halmazon** /jelben $f \in \mathfrak{C}(A)$/, ha bármely $a \in A$ esetén

  $$f \in \mathfrak{C}[a];$$

- **folytonos** /jelben $f \in \mathfrak{C}$/, ha folytonos az $A := \mathcal{X}$ halmazon.

Az alábbi, 1.1.21. feladat felhasználásával látható be az

1.1.1. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér, továbbá valamely $a \in \mathcal{X}$ pont esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$, akkor bármely

$$x_n \in \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad \lim(x_n) = a$$

sorozatra

$$\lim(f(x_n)) = f(a)$$

teljesül.

1.1.21. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér és

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

valamint $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ tetszőleges szubbázisa $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$-nak, akkor egyenértékűek az alábbi állítások (**Hausdorff-tétel**)!

(1) f folytonos: $f \in \mathfrak{C}$.

(2) Bármely $\mathcal{Y}$-beli nyílt halmaz f szerinti ősképe $\mathcal{X}$-beli nyílt halmaz:

$$A \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}[A] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}.$$

(3) Bármely $\mathcal{Y}$-beli zárt halmaz f szerinti ősképe $\mathcal{X}$-beli zárt halmaz:

$$A \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}[A] \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}.$$

(4) A képhalmaz valamely szubbázisának f szerinti ősképe $\mathcal{X}$-beli nyílt halmaz:

$$A \in \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}[A] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}.$$

(5) Bármely $A \subset \mathcal{X}$ lezártjának f-szerinti képe az A halmaz f-szerinti képének lezártjában van:

$$A \subset \mathcal{X} \qquad \Longrightarrow \qquad f\left[\overline{A}\right] \subset \overline{f[A]}.$$

(6) Bármely $A \subset \mathcal{Y}$ lezártjának f-szerinti ősképe tartalmazza az A halmaz f-szerinti ősképének lezártját:

$$A \subset \mathcal{X} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{f^{-1}[A]} \subset f^{-1}\left[\overline{A}\right].$$

Útm.

1. lépés. /(1) ⇒ (5)/ Ha

$$V \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(a))$$

és f folytonos, akkor alkalmas $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(a)$ esetén $f[U] \subset V$, így $a \in \overline{A}$ esetén $U \cap A \neq \emptyset$. Tehát

$$\emptyset \neq f[U \cap A] \subset f[U] \cap f[A] \subset V \cap f[A],$$

azaz $f(a) \in \overline{f[A]}$.

2. lépés. /(5) ⇒ (3)/ Tetszőleges $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ esetén legyen

$$F := f^{-1}[A].$$

Ekkor $f[F] \subset A$, tehát

$$f[\overline{F}] \subset \overline{f[F]} \subset \overline{A} = A,$$

így

$$\overline{F} \subset f^{-1}[A] = F,$$

azaz $f^{-1}[A] \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$.

3. lépés. /(3) ⇒ (2)/ Ha $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$, akkor $B^c \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$, azaz

$$(f^{-1}[B])^c = f^{-1}[B^c] \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}.$$

4. lépés. /(2) ⇒ (4)/ Triviális, hiszen $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$.

5. lépés. /(4) ⇒ (2)/ Ha $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$, akkor alkalmas Γ indexhalmaz, valamint $\widetilde{\Gamma}$ véges indexhalmaz esetén

$$B = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bigcap_{\beta \in \widetilde{\Gamma}} S_{\alpha\beta},$$

ahol

$$S_{\alpha\beta} \in \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \qquad (\alpha \in \Gamma,\, \beta \in \widetilde{\Gamma}).$$

Így

$$f^{-1}[B] = f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bigcap_{\beta \in \widetilde{\Gamma}} S_{\alpha\beta}\right] = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bigcap_{\beta \in \widetilde{\Gamma}} f^{-1}\left[S_{\alpha\beta}\right].$$

Mivel ármely $\alpha \in \Gamma$, ill. $\beta \in \widetilde{\Gamma}$ esetén

$$f^{-1}\left[S_{\alpha\beta}\right] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}},$$

ezért $f^{-1}[B] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$.

6. lépés. /(2) ⇒ (1)/ Ha $a \in \mathcal{X}$, akkor bármely

$$V \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(a))$$

halmazhoz van olyan $W \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$ halmaz, amelyre

$$f(a) \in W \subset V.$$

Mivel $a \in f^{-1}[W] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$, ezért $f^{-1}[W] \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(a)$, így $f[f^{-1}[W]] \subset V$.

7. lépés. /(3) ⇒ (6)/ Ha $A \subset \mathcal{Y}$, akkor

$$f^{-1}\left[\overline{A}\right] \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}.$$

Mivel

$$f^{-1}\left[A\right] \subset f^{-1}\left[\overline{A}\right],$$

ezért

$$\overline{f^{-1}\left[A\right]} \subset f^{-1}\left[\overline{A}\right]$$

is teljesül.

8. lépés. /(6) ⇒ (3)/ Ha $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$, akkor $\overline{A} = A$, így

$$f^{-1}\left[A\right] \subset \overline{f^{-1}\left[A\right]} \subset f^{-1}\left[\overline{A}\right] = f^{-1}[A],$$

ahonnan

$$f^{-1}\left[A\right] = \overline{f^{-1}\left[A\right]}$$

következik, ami azt jelenti, hogy $f^{-1}\left[A\right]$ zárt. ■

Következésképpen, ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér, $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor bármely

- $A\in\mathcal{G}$ esetén
$$\{x\in A:\ f(x)<\alpha\},\{x\in A:\ f(x)\neq\alpha\},\{x\in A:\ f(x)>\alpha\}\in\mathcal{G};$$
- $A\in\mathcal{F}$ esetén
$$\{x\in A:\ f(x)\leq\alpha\},\{x\in A:\ f(x)=\alpha\},\{x\in A:\ f(x)\geq\alpha\}\in\mathcal{F},$$

hiszen pl. az
$$\{x\in A:\ f(x)<\alpha\}=f^{-1}[(-\infty,\alpha)]\cap A$$
halmaz nyílt.

1.1.5. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér, $a\in\mathcal{X}$ és $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, akkor igaz az
$$f\in\mathfrak{C}[a]\qquad\Longleftrightarrow\qquad\forall V\in\mathfrak{B}_{f(a)}\ \exists U\in\mathfrak{B}_a:\ f[U]\subset V$$
ekvivalencia!

Útm.

Mint ahogy azt az alábbi példák is igazolják, egy adott leképezés folytonossága lényegében a topológiától függ. Ezért a topologikus terek közötti leképezésekre igen gyakran az
$$f:(\mathcal{X},\,\mathcal{G}_{\mathcal{X}})\to(\mathcal{Y},\,\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$$
jelölés (is) használatos.

1.1.18. példa. Ha $(\mathcal{X},\,\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\,\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér, $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ és

1. f olyan függvény, amelyre $\mathcal{R}_f$ egyelemű halmaz, azaz f állandófüggvény, akkor f szükségképpen folytonos, hiszen bármely $A\in\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$ esetén $f^{-1}[A]\in\{\emptyset,\mathcal{X}\}$.
2. $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}=\{\emptyset,\mathcal{Y}\}$, akkor f folytonos, hiszen $f^{-1}[\emptyset]=\emptyset\in\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$, ill. $f^{-1}[\mathcal{Y}]=\mathcal{X}\in\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$.
3. $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}=\mathcal{P}(\mathcal{X})$, akkor f folytonos, hiszen bármely $A\in\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$ esetén $f^{-1}[A]\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Ha $(\mathcal{X},\,\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\,\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér, $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ és $\mathcal{X}\subset\mathcal{Y}$, továbbá
$$f(x)=x\qquad(x\in\mathcal{X}),$$
akkor f folytonosságához szükséges és elegendő, hogy $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}\subset\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ teljesüljön, ui.

- ha f folytonos és $A \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}}$, akkor alkalmas $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ halmazzal $A = B \cap \mathcal{X}$, és így $f^{-1}[B] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$. Az f definíciója miatt azonban

$$f^{-1}[B] = B \cap \mathcal{X} = A,$$

ahonnan $A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$, azaz $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ következik.

- Ha viszont $\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ teljesül és $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$ tetszőleges, akkor

$$f^{-1}[B] = B \cap \mathcal{X} \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{X}},$$

ezért f folytonos.

Ebből az is következik, hogy ha

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{G}_{\mathcal{X}} =: \mathcal{G}_1, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{G}_{\mathcal{Y}} =: \mathcal{G}_2,$$

akkor a fenti függvény folytonosságához szükséges és elegendő, hogy $\mathcal{G}_1$ finomabb legyen, mint $\mathcal{G}_2$, azaz $\mathcal{G}_2 \supset \mathcal{G}_1$ teljesüljön.

Ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér,

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \qquad \text{és} \qquad \emptyset \neq A \subset \mathcal{X},$$

akkor f folytonossága maga után vonja $f|_A$ folytonosságát (ahol az értelmezési tartomány a $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}|_A$ nyomtopológiával van ellátva). Valóban, ha $x \in A$ és $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(x))$, akkor $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(x)$, így alkalmas $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ halmaz esetén $x \in B \subset f^{-1}[U]$, ahonnan

$$B \cap A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}|_A, \qquad \text{ill.} \qquad x \in A \cap B \subset A \cap f^{-1}[U] \subset (f|_A)^{-1}[U]$$

következik, azaz $(f|_A)^{-1}[U]$ környezete x-nek az $(A, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}|_A)$ topologikus térben, azaz $f|_A$ folytonos x-ben. Az $f|_A$ folytonosságából viszont nem következik f folytonossága, ui. ha $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \mathbb{R}$ és a topológia a szokásos, továbbá $A := [0, +\infty)$, akkor az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

függvényre $f \notin \mathfrak{C}[0]$, annak ellenére, hogy $f|_A \in \mathfrak{C}[0]$ ($f|_A$ állandófüggvény).

1.1.22. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathbb{R}$-et a szoksásos topológiával, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$-et pedig a pontonkénti-konvergencia-topológiával látjuk el, akkor bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) := f(a)$$

leképezés folytonos!

Útm. Tetszőleges $F \subset \mathbb{R}$ véges halmaz és $\varepsilon > 0$ szám esetén legyen

$$U_{F,\varepsilon}(f) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ |f(s) - g(s)| < \varepsilon \ (s \in F)\}\,.$$

Ekkor

$$\varphi\left[U_{\{a\},\varepsilon}(f)\right] \subset \{y \in \mathbb{R}: \; |y - f(a)| < \varepsilon\} =: V_\varepsilon,$$

azaz

$$\varphi^{-1}\left[V_\varepsilon\right] \subset U_{\{a\},\varepsilon}(f),$$

így $\varphi^{-1}\left[V_\varepsilon\right]$ környezete f-nek. ■

1.1.6. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ és $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}_\mathcal{Z})$ topologikus tér, a $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, ill. az $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ leképezés folytonos, akkor az $f \circ g : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ leképezés is folytonos!

Útm.

1.1.7. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ topologikus tér, valamint

$$p_1 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, \quad (x, y) \mapsto x \qquad \text{és} \qquad p_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}, \quad (x, y) \mapsto y$$

ún. **kanonikus projekciók** esetén a $\mathcal{G}|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ szorzattopológia az a legdurvább topológia $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on, amelyre p_1 és p_2 folytonos!

Útm.

1.1.23. feladat. Mutassuk meg, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ topologikus tér esetén a $\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ szorzattopológia az a legfinomabb topológia $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on, amelyre tetszőleges $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}_\mathcal{Z})$ topologikus tér, ill. $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ és $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ folytonos függvények esetén az

$$(f, g) : \mathcal{Z} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad (f,\, g)(z) := (f(z),\, g(z))$$

leképezés folytonos!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérnek megvan ez a tulajdonsága. Legyen tehát $A \in \mathcal{X}$ nyílt halmaz. Ekkor $A \times \mathcal{Y}$ a szorzattér egy szubbázisának eleme (vö. 1.1.2. házi feladat), így f folytonossága következtében

$$(f, g)^{-1}[A \times \mathcal{Y}] = f^{-1}[A]$$

nyílt halmaz.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{G}'$ topológia $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on, akkor az szükségképpen durvább, mint a $\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ szorzattopológia. Világos, hogy az

$$I : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}) \to (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}'), \qquad I(a) := a$$

leképezésre $I = (p_1, p_2)$ teljesül, és így p_1, ill. p_2 folytonos (vö. 1.1.7. gyakorló feladat). Mivel $\mathcal{G}'$ topológia $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-on, akkor $\mathcal{G}'$ szükségképpen durvább, mint a szorzattopológia (vö. 1.1.18/3. példa). ■

Az előző két gyakorló feladatbeli állítás következményeként elmondható tehát, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén az $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Descartes-szorzaton a szorzattopológia az egyetlen, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- a p_1 és p_2 kanonikus projekció folytonos;
- bármely $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{Z}})$ topologikus tér, valamint $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ és $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ folytonos függvények esetén az

  $$(f, g) : \mathcal{Z} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad (f,\, g)(z) := (f(z),\, g(z))$$

  leképezés folytonos.

Ezért – ha mást nem mondunk –, akkor az $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Descartes-szorzatot mindig a szorzattopológiával látjuk el.

1.1.24. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, $n \in \mathbb{N}$ és

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n,$$

továbbá valamely $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt akkor tekintünk nyíltnak, ha bármely $a \in A$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \rho^2(x, a) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 < \varepsilon^2 \right\} \subset A,$$

akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_k \in \mathfrak{C} \quad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

ekvivalencia!

Útm. Mivel bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a

$$p_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

függvény folytonos, ezért f folytonosságának és az 1.1.6. gyakorló feladat következményeként az

$$f_k := p_k \circ f$$

függvény folytonos. Fordítva, ha $a \in \mathcal{X}$ és V az $f(a)$ egy környezete, akkor feltehető, hogy

$$V = \{ y \in \mathbb{R}^n : \ |y_k - f_k(a)| < \varepsilon \, (k \in \{1, \ldots, n\}) \}.$$

Ha tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén f_k folytonos, akkor

$$U_k := f^{-1} \left[\{ y \in \mathbb{R} : \ |y - f_k(a)| < \varepsilon \} \right]$$

környezete a-nak, ezért

$$U := U_1 \cap \ldots \cap U_n$$

is az. Mivel $U = f^{-1}[V]$, ezért f folytonos. ■

Könnyen belátható, hogy nyílt, ill. zárt halmazok folytonos leképezések szerinti képe nem feltétlenül nyílt, ill. zárt. Az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y):=x$$

függvény esetében (a szokásos topológiákat feltételezve) pl. az

$$A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ xy\geq 1\right\}$$

halmaz f szerinti képe: $f[A]=(0,+\infty)$.

1.1.13. definíció. Adott $(\mathcal{X},\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ **nyílt**, ill. **zárt leképezés**, ha bármely $\mathcal{X}$-beli nyílt, ill. zárt halmaz f-szerinti képe $\mathcal{Y}$-beli nyílt, ill. zárt halmaz:

$$A\in\mathcal{G}_{\mathcal{X}}\quad\Longrightarrow\quad f[A]\in\mathcal{G}_{\mathcal{Y}},\qquad\text{ill.}\qquad A\in\mathcal{F}_{\mathcal{X}}\quad\Longrightarrow\quad f[A]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}.$$

1.1.3. házi feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X},\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$, valamint $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén az $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ leképezés pontosan akkor nyílt, ha tetszőleges $\mathcal{B}$ topologikus bázis esetén

$$A\in\mathcal{B}\qquad\Longrightarrow\qquad f[A]\in\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$$

teljesül.

A fenti feladatban a $\mathcal{B}$ topologikus bázis helyett nem írható $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ szubbázis, hiszen általában csak

$$f[A\cap B]\subset f[A]\cap f[B]$$

igaz (vö. 11.1.8. állítás).

1.1.4. házi feladat. Igazoljuk, hogy az 1.1.7. feladatbeli kanonikus projekciók nyílt leképezések!

1.1.14. definíció. Adott $(\mathcal{X},\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ leképezés **homeomorfizmus**, ill. az $(\mathcal{X},\mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ terek **homeomorf**ak, ha f bijektív, $f\in\mathfrak{C}$ és $f^{-1}\in\mathfrak{C}$ tejesül.

1.1.19. példa. A szokásos topológiát tekintve az

$$\operatorname{arctg}\,:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$$

leképezés homeomorfizmus.

1.1.20. példa. A szokásos topológiát tekintve, ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^n, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{Y} := \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y| < 1\},$$

akkor az

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad f(x) := \frac{x}{1+|x|}$$

leképezés homeomorfizmus.

1.1.21. példa. A $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli szokásos topológiát tekintve az

$$\mathcal{X} := \mathrm{SU}(2) := \left\{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \ AA^* = E, \det(A) = 1\right\}$$

és

$$\mathcal{Y} := \mathrm{S}^3 := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ |z|^2 + |w|^2 = 1\right\}$$

terek homeomorfak, hiszen

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A^{-1} = A^*, \quad \det(A) = 1),$$

tehát

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (d = \overline{a} \quad \text{és} \quad c = -\overline{b}),$$

így

$$A = \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix}, \qquad 1 = \det(A) = |z|^2 + |w|^2.$$

A $\mathbb{C}^4$ és az $\mathbb{R}^4$ közötti homeomorfiát felhasználva könnyen megmutatható, hogy az

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad f(A) := (z,w) = (\Re(z), \Im(z), \Re(w), \Im(w))$$

leképezés homeomorfizmus, melynek inverze az

$$f^{-1} : \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SU}(2), \qquad f^{-1}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) := \begin{bmatrix} \alpha + \beta\imath & \gamma + \delta\imath \\ -\gamma + \delta\imath & \alpha - \beta\imath \end{bmatrix}$$

leképezés.

1.1.22. példa. A szokásos topológiát tekintve, ha

$$\mathcal{X} := [0,2\pi) \subset \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{Y} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\right\},$$

akkor az

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad f(t) := (\cos(t), \sin(t))$$

leképezés nem homeomorfizmus, hiszen – annak ellenére, hogy f bijektív és folytonos – inverze nem folytonos az $(1,0)$ pontban, ui. ha

$$u_n := \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n+1}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n+1}\right)\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$u_n \longrightarrow (1,0) = f(0) \qquad (n \to \infty),$$

de

$$f^{-1}(u_n) = 2\pi - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 2\pi \neq 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha tehát az $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ leképezés homeomorfizmus, akkor valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha

$$f[A] = (f^{-1})^{-1}[A] \subset \mathcal{Y}$$

nyílt halmaz. Homeomorf terek ugyanazokkal a topológiai tulajdonságokkal rendelkeznek, ezért topológiai szempontból úgy tekinthetők, mint ugyanannak a térnek a „különböző példányai”.

1.1.15. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér esetén az $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvényt $\mathcal{X}$-nek $\mathcal{Y}$-ba való **beágyazás**ának nevezzük, ha $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}_f$ homeomorfizmus.

1.1.5. házi feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér, továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvény esetén f pontosan akkor beágyazás, ha f injektív, folytonos és bármely $A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ esetén $f[A]$ nyílt az $\mathcal{G}^*_{\mathcal{X}}$ altérben (vö. 1.1.5. feladat)!

1.1.25. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ homeomorfizmus, akkor igaz az

$$A \subset \mathcal{X} \qquad \Longrightarrow \qquad f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$$

implikáció!

Útm. Mivel f homeomorfizmus, ezért folytonos, így

$$\overline{f[A]} \supset f[\overline{A}]$$

(vö. 1.1.21/5. feladat). Mivel zárt halmazok f szerinti képe ismét zárt halmaz és

$$f[A] \subset f[\overline{A}] \in \mathcal{F}_Y, \qquad \text{ezért} \qquad \overline{f[A]} \subset f[\overline{A}]. \quad \blacksquare$$

1.1.8. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ és $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}_\mathcal{Z})$ topologikus terek esetén

1. az
$$\mathrm{id}_\mathcal{X} : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$$
leképezés homeomorfizmus;
2. ha
$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$$
homeomorfizmus, akkor
$$f^{-1} : (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$$
is homeomorfizmus;
3. ha
$$g : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad f : (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y}) \to (\mathcal{Z}, \mathcal{G}_\mathcal{Z})$$
homeomorfizmus, akkor
$$f \circ g : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Z}, \mathcal{G}_\mathcal{Z})$$
is homeomorfizmus!

Útm.

1.1.9. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$ topologikus terek, akkor tetszőleges
$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_\mathcal{Y})$$
folytonos és bijektív leképezés esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) f homeomorfizmus.

(2) f zárt leképezés.

(3) f nyílt leképezés.

Útm.

1.1.5. Szétválasztási axiómák

1.1.16. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér

1. T_0**-tér** vagy **Kolmogorov-tér** , ha $\mathcal{X}$ bármely két különböző pontja közül legalább az egyiknek van olyan környezete, amely a másik pontot nem tartalmazza, azaz

$$\forall\, a, b \in \mathcal{X},\ a \neq b\ \exists U \in \mathcal{G}:\ (a \in U,\ b \notin U\ \vee\ b \in U,\ a \notin U).$$

2. T_1**-tér**, ha $\mathcal{X}$ bármely két különböző pontját véve, mindkét pontnak van olyan környezete, amely a másik pontot nem tartalmazza:

$$\forall a, b \in \mathcal{X},\ a \neq b\ \exists U \in U(a), V \in U(b):\ (a \in U,\ b \notin U\ \wedge\ a \notin V,\ b \in V).$$

3. T_2**-tér** vagy **Hausdorff-tér**, ha $\mathcal{X}$ bármely két különböző pontjának vannak diszjunkt környezetei:

$$\forall\, a, b \in \mathcal{X},\ a \neq b\ \exists U \in U(a), V \in U(b):\ U \cap V = \emptyset.$$

4. T_3**-tér**, ha tetszőleges $\mathcal{X}$-beli pontnak és a pontot nem tartalmazó zárt halmaznak van diszjunkt környezete:

$$\forall\, A \in \mathcal{F}\, \forall b \in A^c\, \exists U, V \in \mathcal{G},\ U \cap V = \emptyset:\ A \subset U,\ b \in V.$$

5. $T_{3.5}$**-tér**, ha $\mathcal{X}$ bármely b pontja és bármely b-t nem tartalmazó A zárt részhalmaza esetén van olyan
$$f: \mathcal{X} \to [0,1]$$
folytonos függvény, amelyre $f(b) = 0$ és $f(a) = 1$ $(a \in A)$ teljesül:

$$\forall\, A \in \mathcal{F}\, \forall b \in A^c\, \exists\, f \in \mathfrak{C}(\mathcal{X}, [0,1]):\ (f(b) = 0\ \wedge\ f(a) = 1\ (a \in A)).$$

6. T_4**-tér**, ha benne bármely két diszjunkt zárt halmaz lefedhető diszjunkt nyílt halmazokkal:

$$\forall\, A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset\, \exists U, V \in \mathcal{G},\ U \cap V = \emptyset:\ (A \subset U\ \wedge\ B \subset V).$$

7. **reguláris**, ha T_1- és T_3-tér.
8. **teljesen reguláris**, ha T_1- és $T_{3.5}$-tér.
9. **normális**, ha T_1- és T_4-tér.

Azt is mondjuk, hogy (alkalmas $k \in \{0,1,2,3,4\}$ esetén) az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térre **teljesül a** T_k**-axióma**.

A *szétválasztási axiómák* elnevezést a pontok, ill. halmazok környezetekkel, ill. függvényekkel történő szétválasztása indokolja. A

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3 \quad \text{és a} \quad T_4$$

jelölések a német *trennen* ('elválaszt') szóból származnak.
Valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében nyilvánvalóan igazak az alábbi implikációk:

$$T_2\text{-tér} \implies T_1\text{-tér} \implies T_0\text{-tér} \qquad \text{és} \qquad T_{3.5}\text{-tér} \implies T_3\text{-tér}.$$

Az utóbbi implikáció a következő módon látható be. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $f : \mathcal{X} \to [0,1]$ olyan folytonos leképezés, amelyre tetszőleges $x \in A^c$ esetén $f(x) = 0$ és $f|_A = \widehat{1}$ teljesül, akkor az

$$U := f^{-1}\left[\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{és} \qquad V := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right]$$

halmazokra

$$U, V \in \mathcal{G}, \qquad U \cap V = \emptyset \qquad \text{és} \qquad x \in U, \qquad A \subset V.$$

Ha egy topologikus tér nem T_1-tér, akkor a véges sok pontból álló halmazoknak is lehet torlódási pontjuk. Így van ez pl. a Sierpiński-féle topologikus tér esetében is, ahol

$$b \in \{a\}', \qquad \text{ill.} \qquad a \in \{b\}'.$$

1.1.23. példa.

1. Tetszőleges kételemű halmaz a Sierpiński-topológiával ellátva T_0-tér, de nem T_1-tér.
2. Az $\mathcal{X}$ végtelen halmaz a ko-véges topológiával ellátva T_1-tér, de nem T_2-tér.
3. Tetszőleges kételemű halmaz a kaotikus topológiával ellátva sem nem T_0-, sem nem T_2-tér, viszont T_3-tér.
4. Ha
$$\mathcal{X} := \{1,2,3,4\} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\},$$
akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_4-tér, de nem T_1-tér, hiszen a zárt halmazok a következők:
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}\},$$
azaz bármely $A, B \subset \mathcal{X}$ diszjunkt és zárt halmazokra $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$ teljesül. $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ nem T_1-tér, hiszen $\{4\}$-t lefedő nyílt halmaz csak egy van: $\mathcal{X}$. Hasonlóan láltható be, hogy $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ nem T_3-tér ($A := \{4\}$, $b := 1$).

1.1.6. házi feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_0-tér.

(2) Bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ esetén $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

1.1.26. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_1-tér és $x \in \mathcal{X}$, valamint $A \subset \mathcal{X}$, akkor $x \in A'$ pontosan abban az esetben teljesül, ha bármely $U \in \mathcal{U}(x)$ esetén $A \cap U$ végtelen halmaz!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy ha tetszőleges $U \in \mathcal{U}(x)$ esetén az $A \cap U$ halmaz végtelen, akkor

$$A \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset,$$

azaz x torlódási pontja A-nak: $x \in A'$.

2. lépés. Legyen $x \in A'$ és tegyük fel (indirekt módon), hogy alkalmas $U \in \mathcal{U}(x)$ esetén $U \cap A$ véges. Ekkor $A \cap (U \backslash \{x\})$ is véges, és – lévén, hogy x torlódási pontja az A halmaznak –

$$A \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset.$$

Tehát alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ esetén

$$A \cap (U \backslash \{x\}) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Mivel T_1-térről van szó, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén van olyan $U_k \in \mathcal{U}(x)$, hogy $x_k \notin U_k$. Így a

$$V := \bigcap_{k=1}^{n} U_k$$

halmazra $x_k \notin V$ és $V \in \mathcal{U}(x)$. Ezért

$$A \cap (V \backslash \{x\}) = \emptyset,$$

ami ellentmond annak, hogy $x \in A'$. ■

1.1.27. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_1-tér.

(2) $\mathcal{X}$ minden egyelemű részhalmaza zárt.

(3) Bármely $H \subset \mathcal{X}$ esetén H a pontjainak környezeteiből alkotott halmazrendszer metszete.

Útm.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor bármely $y \in \mathcal{X}$, $y \neq x$ esetén van olyan $U \in \mathcal{G}$, hogy

$$y \in U \qquad \text{és} \qquad U \subset \mathcal{X} \backslash \{x\}$$

Tehát $\mathcal{X} \backslash \{x\}$ nyílt halmazok egyesítése, így maga is nyílt, amiből $\{x\}$ zártsága következik.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ha $H \subset \mathcal{X}$, akkor H nyilván részhalmaza pontjai környezeteiből alkotott halmazrendszer metszetének. Továbbá bármely $x \notin H$ esetén $\mathcal{X} \backslash \{x\}$ környezete H minden pontjának, hiszen $\{x\}$ zárt. Ez pedig azt jelenti, hogy x nincsen benne H pontjainak környezeteiből alkotott halmazrendszer metszetében.

(3) $\Rightarrow$ (1): Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor $\{x\}$ triviálisan pontjainak környeteiből alkotott halmazrendszer metszete, ezért bármely $y \in \mathcal{X} \backslash \{x\}$ esetén van olyan $U \in \mathcal{U}(x)$, hogy $y \notin U$. ■

1.1.10. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ a

1. diszkrét topologikus tér, akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ T_2-tér;
2. Sierpiński-topologikus tér (vö. 1.1.1. példa), akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ nem T_2-tér!

Útm.

1.1.11. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_2-tér.

(2) Bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén az $\{x\}$ halmaz az x zárt környezeteiből alkotott halmazrendszer metszete.

(3) A

$$\Delta_{\mathcal{X}} := \Delta := \{(x, x) : \; x \in \mathcal{X}\}$$

átló zárt halmaz az $(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}})$ szorzattérben.

Útm.

1.1.12. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér (T_2-tér), akkor bármely

1. $\emptyset \neq \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ esetén az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altér is Hausdorff-tér,
2. $x \in \mathcal{X}$ esetén $\{x\} \in \mathcal{F}$, azaz $\{x\}$ zárt halmaz!

Útm.

1.1.28. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ topologikus tér, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér (T_2-tér) és $f, g : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ folytonos függvények, akkor az

$$\{x \in \mathcal{X} : \ f(x) = g(x)\}$$

halmaz zárt $\mathcal{X}$-ben!

Útm. Mivel f és g folytonos, ezért az 1.1.7. feladat következtében a

$$h : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}}), \qquad x \mapsto h(x) := (f(x), g(x))$$

függvény folytonos. Az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér volta következtében a $\Delta_{\mathcal{Y}}$ átló zárt halmaz az $(\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben, így az

$$\{x \in \mathcal{X} : \ f(x) = g(x)\} = h^{-1}[\Delta_{\mathcal{Y}}]$$

halmaz zárt az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ topologikus térben. ■

1.1.13. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ topologikus tér, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér (T_2-tér) és $f : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ folytonos függvény, akkor az

$$\{(x, f(x)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \ x \in \mathcal{X}\}$$

halmaz (f **grafikon**ja vagy **gráf**ja) zárt az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben!

Útm.

1.1.29. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér, akkor az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattér is Hausdorff-tér!

Útm. Ha

$$(x, y), (u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \quad (x, y) \neq (u, v),$$

akkor $x \neq u$, vagy $y \neq v$. Ha $x \neq u$ (hasonlóan járunk el $y \neq v$ esetén), akkor alkalmas $U, V \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$ (nyílt) halmazokkal $x \in U$ és $u \in V$, továbbá $U \cap V = \emptyset$. Így

$$(U \times \mathcal{Y}) \cap (V \times \mathcal{Y}) = \emptyset,$$

ahol a $U \times \mathcal{Y}$ halmaz nyílt környezete az (x, y) pontnak és $V \times \mathcal{Y}$ nyílt környezete az (u, v) pontnak. ■

1.1.30. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_2-tér (Hausdorff-tér), akkor bármely $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra a $\mathrm{Lim}\,(x_n)$ halmaz legfeljebb egyelemű!

Útm. Ha valamely $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$, $\alpha \neq \beta$ esetén $\alpha, \beta \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$, akkor vannak olyan $N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ „küszöbindexek”, hogy ha $U \in \mathcal{U}(\alpha)$, ill. $V \in \mathcal{U}(\beta)$, akkor

$$x_n \in U \quad (N_\alpha \leq n \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill.} \qquad x_n \in V \quad (N_\beta \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel T_2-térről van szó, feltehető, hogy az U, V környezetek diszjunktak, ahonnan tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ esetén

$$x \in U \cap V = \emptyset$$

kövezkezik, ami nem lehetséges. ■

Ha tehát az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér, akkor $\mathrm{Lim}\,(x_n) \neq \emptyset$ esetén pontosan egy $\alpha \in \mathcal{X}$ elem van, amelyre

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \{\alpha\} = \{\lim(x_n)\}.$$

1.1.31. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_3-tér.

(2) Bármely $H \subset \mathcal{X}$ esetén x zárt környezetei környezetbázist alkotnak.

Útm.

(1) ⇒ (2): Ha $x \in \mathcal{X}$, $U \in \mathcal{U}(x)$ és $A \in \mathcal{G}$: $x \in A \subset U$, akkor $x \notin \mathcal{X} \backslash A$ és $\mathcal{X} \backslash A$ zárt halmaz. Így alkalmas

$$B, C \in \mathcal{G}, \qquad B \cap C = \emptyset$$

(diszjunkt nyílt) halmazokkal $x \in B$ és $\mathcal{X} \backslash A \subset C$. Tehát

$$x \in B \subset \mathcal{X} \backslash C \subset \mathcal{X} \backslash (\mathcal{X} \backslash A) = A \subset U,$$

azaz U lefedi x-nek $\mathcal{X} \backslash C$ zárt környezetét.

(2) ⇒ (1): Ha $x \in \mathcal{X}$ és $A \subset \mathcal{X}$ olyan zárt halmaz, amelyre $x \in A$, akkor $\mathcal{X} \backslash A$ környezete x-nek. Így a **(2)** feltétel következtében alkalmas $V \in U(x)$ zárt környezetre

$$x \in V \subset \mathcal{X} \backslash A.$$

Ezért $\mathcal{X} \backslash V$ nyílt környezete az A minden pontjának. Mivel V környezete x-nek és

$$V \cap (\mathcal{X} \backslash V) = \emptyset,$$

ezért **(1)** teljesül. ■

1.1.32. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_4-tér.

(2) Bármely $A \in \mathcal{F}$ és bármely $B \in \mathcal{G}$, $B \supset A$ esetén van olyan $C \in \mathcal{G}$, hogy

$$A \subset C \subset \overline{C} \subset B$$

teljesül.

Útm.

(1) ⇒ (2): Mivel $B \in \mathcal{G}$ és $B \supset A$, ezért

$$B^c \in \mathcal{F} \qquad \text{és} \qquad A \cap B^c = \emptyset.$$

Így, ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_4-tér, akkor alkalmas

$$U, V \in \mathcal{G}, \qquad U \cap V = \emptyset$$

halmazokkal

$$A \subset U \qquad \text{és} \qquad B^c \subset V,$$

ahonnan $V^c \subset B$ következik. Mivel

$$U \cap V = \emptyset,$$

ezért $U \subset V^c$, így V^c zártsága következtében $\overline{U} \subset V^c$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$A \subset U \subset \overline{U} \subset V^c \subset B, \qquad \text{azaz} \qquad A \subset U \subset \overline{U} \subset B.$$

(2) ⇒ (1): Legyen $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ zárt és $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Az

$$U := C \qquad \text{és a} \qquad V := \overline{U}^c$$

választással

$$U, V \in \mathcal{G}, \qquad U \cap V = \emptyset \qquad \text{továbbá} \qquad U \supset \mathcal{Y} \qquad \text{és} \qquad V \supset \mathcal{Z}. \quad \blacksquare$$

1.1.33. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér pontosan akkor T_4-tér, ha bármely

$$\emptyset \neq A, B \in \mathcal{F}: \qquad A \cap B = \emptyset$$

halmaz esetén van olyan

$$f : \mathcal{X} \to [0,1]$$

folytonos függvény, amelyre

$$f(x) = 0 \quad (x \in A) \qquad \text{és} \qquad f(x) = 1 \quad (x \in B)$$

teljesül (**Uriszon-lemma**)!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\emptyset \neq A, B \in \mathcal{F}: \qquad A \cap B = \emptyset,$$

továbbá $f : \mathcal{X} \to [0,1]$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$f[A] = \{0\} \qquad \text{és} \qquad f[B] = \{1\},$$

akkor az

$$U := f^{-1}\left[\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right], \qquad \text{ill.} \qquad V := f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right]$$

halmazokra

$$U, V \in \mathcal{G}, \qquad U \cap V = \emptyset \qquad \text{és} \qquad A \subset U, \qquad B \subset V,$$

azaz az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_4-tér.

2. lépés. Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_4-tér, továbbá

$$\emptyset \neq A, B \in \mathcal{F}: \qquad A \cap B = \emptyset.$$

(a) Megmutatjuk, hogy tetszőleges

$$r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

esetén van olyan $U_r \in \mathcal{G}$, hogy

$$A \subset U_0, \qquad U_1 \cap B = \emptyset,$$

továbbá bármely $0 \leq r < s \leq 1$ esetén $\overline{U_r} \subset U_s$. A T_4-tulajdonság következtében alkalmas

$$U, V \in \mathcal{G}, \qquad U \cap V = \emptyset$$

halmazokkal

$$A \subset U \qquad \text{és} \qquad B \subset V.$$

Így, ha

$$U_0 := U, \qquad U_1 := B^c,$$

akkor $\overline{U_0} \subset U_0$. Legyen

$$x : \mathbb{N} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

olyan bijektív sorozat, amelyre

$$x_0 := 0 \qquad \text{és} \qquad x_1 := 1.$$

Ha $n > 1$, akkor tetszőleges $i < n$ esetén U_{x_i} legyen olyan nyílt halmaz, amelyre

$$\overline{U_{x_i}} \subset U_{x_j} \quad (i, j < n,\ x_i < x_j)$$

teljesül. Ha az $\mathcal{R}_x$ halmaz nagyság szerinti rendezésében x_n-et közvetlenül közrefogó két tag x_i és x_j, akkor az 1.1.32. feladatbeli állítás alapján van olyan U_{x_n} nyílt halmaz, amelyre

$$\overline{U_{x_i}} \subset U_{x_n} \subset \overline{U_{x_n}} \subset U_{x_j}$$

teljesül.

(b) Ha $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} \inf\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} : \ t \in U_r\} & (x \in U_1), \\ \\ 1 & (x \notin U_1), \end{cases}$$

akkor

$$0 \leq f(t) \leq 1 \qquad (t \in [0,1])$$

és

$$f[A]=\{0\} \quad (\text{ui. } A\subset U_0), \qquad \text{ill.} \qquad f[B]=\{1\} \quad (\text{ui. } B\subset U_1),$$

továbbá f folytonos, hiszen

- $f^{-1}[(-\infty,s)]=\bigcup_{r<s} U_r$ $(s\in\mathbb{R})$, ui.

$$t\in f^{-1}[(-\infty,s)] \iff f(t)<s \iff \inf\{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}:\ t\in U_r\}<s$$

$$\iff \exists\, r_0<s:\ t\in U_{r_0} \iff t\in\bigcup_{r<s} U_r.$$

  Így

$$f^{-1}[(-\infty,s)]$$

  nyílt (nyílt halmazok egyesítése).

- $f^{-1}[(-\infty,s]]=\bigcap_{r>s} \overline{U_r}$ $(s\in\mathbb{R})$, ui.

$$t\notin f^{-1}[(-\infty,s]] \iff f(t)>s \iff \inf\{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}:\ t\in U_r\}>s$$

$$\iff \exists\, r_0>s:\ t\notin U_{r_0} \iff t\notin\bigcap_{r>s} \overline{U_r};$$

  továbbá

$$\bigcap_{r>s} U_r=\bigcap_{r>s}\overline{U_r},$$

  mivel a

$$\bigcap_{r>s} U_r\subset\bigcap_{r>s}\overline{U_r}$$

  tartalmazás triviálisan teljesül, és tetszőleges $\varepsilon\in(0,1]\cap\mathbb{Q}$ számra

$$\overline{U_r}\subset U_{r+\varepsilon},$$

  így

$$\bigcap_{r>s}\overline{U_r}\subset\bigcap_{r>s} U_{r+\varepsilon},$$

  ahonnan

$$\bigcap_{r>s}\overline{U_r}\subset\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{r>s} U_{r+\varepsilon}=\bigcap_{r>s} U_r$$

  következik. Tehát

$$f^{-1}[(-\infty,s]]$$

  zárt (zárt halmazok metszete). ■

1.1.7. házi feladat. Fogalmazzuk meg az előző feladatot úgy, hogy a $[0,1]$ intervallum helyett tetszőleges $[a,b]$ intervallum álljon!

1.1.34. feladat. Mutassuk meg tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ T_4-tér, valamint $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}$ halmaz esetén pontosan akkor van olyan folytonos $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$f^{-1}[\{0\}] = A$$

teljesül, ha az A halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz!

Útm.

1. lépés. Ha $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ olyan foyltonos függvény, amelyre $f[A] = \{0\}$, akkor

$$A = f^{-1}[\{0\}] = f^{-1}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right],$$

azaz A halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

2. lépés. Ha az A halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, akkor alkalmas

$$A_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra fennáll az

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

egyenlőség. Az 1.1.33. feladatbeli állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan folytonos $f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$f_n[A] = \{0\} \qquad \text{és} \qquad f_n[A^c] = \{1\}.$$

Ezért az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} f_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$f_n(x) \in [0,1] \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Így az

$$f := \lim(s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$$

függvény – mint folytonos függvények egyenletes limesze – folytonos. Ha tehát valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén

- $x \in A$, akkor $f_n(x) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $f(x) = 0$;
- $x \notin A$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f[A_n^c] = \{1\} \qquad \text{és} \qquad f(x) \geq 2^{-n} \neq 0 \quad \blacksquare$$

1.1.35. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ T_4-tér esetén, ha

1. $A \subset \mathcal{X}$, vagy $B \subset \mathcal{X}$ halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, akkor van olyan folytonos $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$f[A] = \{0\}, \qquad f[B] = \{1\}$$
és A-n, ill. B-n kívül f nem veszi fel a 0-t, ill. az 1-et;
2. $A \subset \mathcal{X}$, vagy $B \subset \mathcal{X}$ halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, akkor van olyan folytonos $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy
$$A = f^{-1}[\{0\}] \qquad \text{és} \qquad B = f^{-1}[\{1\}]$$
teljesül!

Útm. Világos, hogy elegendő a második állítást belátni. Mivel az abszolútérték-függvény folytonos és folytonos függvények kompozíciója is folytonos, ezért az 1.1.34. feladatbeli állítás fényében feltehető, hogy alkalmas
$$f, g : \mathcal{X} \to [0, +\infty)$$
folytonos függvények esetén
$$f^{-1}[\{0\}] = A \qquad \text{és} \qquad g^{-1}[\{0\}] = B.$$
Így, ha
$$h(x) := \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
akkor

- $x \in A$ esetén $f(x) = 0$, ezért
$$h(x) = \frac{0}{0 + g(x)} = 0$$
($g(x) > 0$, ui. $A \cap B = \emptyset$),
- $x \in B$ esetén $g(x) = 0$, ezért
$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 0} = 1$$
($f(x) > 0$, ui. $A \cap B = \emptyset$),
- $x \notin A \cup B$ esetén $f(x) > 0$ és $g(x) > 0$.

A h függvény triviálisan folytonos (vö. 1.1.18/1. példa), továbbá
$$h(x) \in [0,1] \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
sőt
$$h(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A,$$
$$h(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(x) + g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B$$
következtében
$$A = h^{-1}[\{0\}] \qquad \text{és} \qquad B = h^{-1}[\{1\}]. \quad \blacksquare$$

1.1.36. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ T_4-tér esetén, ha $H \in \mathcal{F}$, $r \in (0,+\infty)$ és $u : H \to [-r,r]$ folytonos függvény, akkor alkalmas

$$v : \mathcal{X} \to \left[-\frac{r}{3},\frac{r}{3}\right]$$

folytonos leképezés esetén teljesül az

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}r \qquad (x \in \mathcal{X})$$

egyenlőtlenség!

Útm. Az

$$A := u^{-1}\left[\left[-r,-\frac{r}{3}\right]\right] \qquad \text{és} \qquad B := u^{-1}\left[\left[\frac{r}{3},r\right]\right]$$

választással u folytonosságából az

$$A \cap B = \emptyset$$

egyenlőség következik. Ha

- $A = \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, akkor az

  $$f :\equiv 1 \qquad \text{és} \qquad v :\equiv \frac{r}{3}$$

  választás megfelelő;
- $A \neq \emptyset$ és $B = \emptyset$, akkor

  $$f :\equiv \frac{r}{3} \qquad \text{és} \qquad v :\equiv 1$$

  választás megfelelő;
- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, akkor az 1.1.33. feladatbeli állítás következtében alkalmas $f : \mathcal{X} \to [0,1]$ leképezés esetén

  $$f[A] = \{0\} \qquad \text{és} \qquad f[B] = \{1\}.$$

  Így, ha

  $$v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \frac{2}{3} \cdot r \cdot f(x) - \frac{r}{3},$$

  akkor

  $$v[\mathcal{X}] \subset \left[-\frac{r}{3},\frac{r}{3}\right].$$

  Ezért, ha
  - $x \in A$, akkor

    $$v(x) = -\frac{r}{3} \qquad \text{és} \qquad u(x) \in \left[-r,\frac{r}{3}\right],$$

    ahonnan

    $$|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}r$$

    következik.
  - $x \in B$, akkor

    $$v(x) = \frac{r}{3} \qquad \text{és} \qquad u(x) \in \left[\frac{r}{3},r\right],$$

ahonnan ismét

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}r$$

következik.

– $x \in H \backslash (A \cup B)$, akkor

$$u(x), v(x) \in \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right],$$

azaz

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}r. \quad \blacksquare$$

1.1.37. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ T_4-tér esetén, ha $H \in \mathcal{F}$ és $g : H \to [-1,1]$ folytonos, akkor alkalmas

$$g_n : \mathcal{X} \to \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

folytonos leképezésekből álló sorozat esetén teljesülnek az alábbi becslések!

1. $|g(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in H)$;

2. $|g(x) - g_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathcal{X})$.

Útm. Ha

- $n \in \{0,1\}$, akkor legyen

$$g_0 :\equiv 0,$$

továbbá az 1.1.36. feladatbeli állítás ($r = 1$, $u = g$) következtében alkalmas

$$g_0 : \mathcal{X} \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

folytonos leképezésssel tetszőleges $x \in H$ esetén

$$|g(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

Ezért g_1-re mind 1., mind pedig 2. teljesül.

- valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$g_1, \ldots, g_n$$

függvényekre teljesül 1. és 2., akkor 1. miatt a

$$g - g_n|_H : H \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

leképezés folytonos. Így az 1.1.36. feladatbeli állítás ($u := g - g_n|_H$, $r := (2/3)^{n+1}$) következtében alkalmas

$$v_n : \mathcal{X} \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

folytonos leképezéssel

$$|g(x) - g_n(x) - v_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Ezért a

$$g_{n+1} := g_n + v_n$$

leképezés folytonos, teljesül rá 1., és bármely $x \in H$ esetén

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) = g_n(x) + v_n(x) \quad &\in \quad \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \\ &= \quad \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right], \end{aligned}$$

ahonnan

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| = |v_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következik, azaz a g_{n+1} leképezésre 2. is teljesül. ■

1.1.38. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) T_4-tér.

(2) Bármely $H \in \mathcal{F}$ halmaz, $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ és $f : H \to [a, b]$ folytonos leképezés esetén van olyan $F : \mathcal{X} \to [a, b]$ folytonos leképezés, hogy

$$F(x) = f(x) \qquad (x \in H)$$

$/F \supset f/$, azaz F a f kiterjesztése (**Tietze-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha $\emptyset \neq A, B \in \mathcal{F}$: $A \cap B = \emptyset$ és $H := A \cup B$, akkor a

$$g : H \to [0,1], \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & (x \in A), \\ 1 & (x \in B) \end{cases}$$

leképezés esetén $g|_A$ és $g|_B$ állandófüggvény, így folytonos. Következésképpen g is folytonos (egyszerűen megmutatható, hogy zárt $\mathbb{R}$-beli halmazok g szerinti ősképe $\mathcal{F}$-beli). Így, ha alkalmas folytonos G leképezéssel

$$G \supset g,$$

akkor az 1.1.33. feladatbeli állítás következtében az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_4-tér.

2. lépés. Ha $H \in \mathcal{F}$, $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ és

$$f : H \to [a, b]$$

folytonos leképezés, akkor $a = b$ esetén $F := \widehat{a}$ megfelelő. Ha pedig $a < b$, akkor – lévén, hogy $[a, b]$ és $[-1,1]$ homeomorf – feltehető, hogy

$$a = -1 \qquad \text{és} \qquad b = 1.$$

Így, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az 1.1.37. feladatbeli sorozat ($g = f$), akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, hiszen

- tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$,$m > n$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1} f_{k+1}(x) - f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,
\end{aligned}$$

  így a Cauchy-kritérium következtében bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $(f_n(x))$ konvergens.

- ha

$$F(x) := \lim(f_n(x)) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

  akkor

$$F(x) \in [-1,1] \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

  mivel

$$f_n(x) \in [-1,1] \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

  Továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$|F(x) - f_n(x)| = |\lim_{m\to\infty}(f_m(x)) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

  azaz (f_n) egyenletesen konvergens.

Az F függvény folytonos, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n folytonos, továbbá

$$F(x) = f(x) \qquad (x \in H)$$

és teljesül az 1.1.37 feladatbeli 1. tulajdonság. Ennélfogva F a f folytonos kiterjesztése. ∎

1.1.6. Megszámlálhatósági axiómák

1.1.17. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér **szeparábilis**, ha van benne legfeljebb megszámlálható mindenütt sűrű halmaz, azaz alkalmas $\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$ legfeljebb megszámlálható halmaz esetén $\overline{\mathcal{Y}}=\mathcal{X}$.

1.1.39. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus térnek van legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa, akkor $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ szeparábilis!

Útm. Azt fogjuk belátni, hogy ha $\mathcal{B}$ bázisa az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ térnek, akkor tetszőleges $\emptyset\neq A\in\mathcal{B}$-ből kiválasztva egy $x_A\in A$ elemet, $\mathcal{X}$-beli mindenütt sűrű

$$\mathcal{Y}:=\{x_A\in\mathcal{X}:\ A\in\mathcal{B}\}$$

halmazt kapunk: $\overline{\mathcal{Y}}=\mathcal{X}$. Ha az állítással elllentétben $\mathcal{X}\backslash\overline{\mathcal{Y}}\neq\emptyset$, akkor $\mathcal{X}\backslash\overline{\mathcal{Y}}\in\mathcal{G}$ következtében alkalmas $\widetilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ halmazzal

$$\mathcal{X}\backslash\overline{\mathcal{Y}}=\bigcup_{A\in\widetilde{\mathcal{B}}}A.$$

Ha most

$$\emptyset\neq A\in\widetilde{\mathcal{B}},$$

akkor $x_A\in A$ következtében $x_A\in\mathcal{X}\backslash\overline{\mathcal{Y}}$, azonban $\mathcal{Y}$ definíciója miatt

$$x_A\in\mathcal{Y}\subset\overline{\mathcal{Y}},$$

ami nem lehetséges. ∎

1.1.24. példa.

1. Az $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ topologikus térnben nincsen megszámlálható bázis (hiszen minden egyelemű halmaz nyílt).
2. Az $(\mathbb{R},\{\emptyset,\mathbb{R}\})$ topologikus térben van megszámlálható bázis.

1.1.40. feladat. Igazoljuk, hogy van olyan szeparábilis topologikus tér, amelynek nincsen legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa!

Útm. A Sorgenfrey-egyenes (vö. 1.1.6/3. példa) szeparábilis: $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, de nincsen benne legfeljebb megszámlálható topologikus bázis. Egyszerűen megmutatható, hogy tetszőleges $\mathcal{B}$ topologikus bázis számossága kontinuum. Valóban, bármely $a\in\mathbb{R}$ esetén $[a,a+1)$ nyílt halmaz, azaz alkalmas $\widetilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ halmazzal

$$[a,a+1)=\bigcup_{A\in\widetilde{\mathcal{B}}}A,$$

így van olyan $B_a\in\widetilde{\mathcal{B}}$, hogy $a\in B_a\subset[a,a+1)$, ahonnan $\min(B_a)=a$ következik. Ez pedig azt jelenti, hogy ha $a,b\in\mathbb{R}$: $a\neq b$, akkor $B_a\neq B_b$, azaz $\mathcal{B}$-ben „legalább annyi” halmaz van, mint ahány valós szám. ∎

1.1.41. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

1. az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térben van legfeljebb megszámlálható bázis, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, akkor az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altérben is van megszámlálható bázis (vö. 1.1.2. feladat);
2. az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ és az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus térben van legfeljebb megszámlálható bázis, akkor az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben is van legfeljebb megszámlálható bázis (vö. 1.1.6. gyakorló feladat);
3. az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térben van legfeljebb megszámlálható bázis és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ szürjektív, nyílt leképezés (vö. 1.1.13. definíció), akkor az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_f)$ faktortopológiában is van megszámlálható bázis (vö. 1.1.4. feladat)!

Útm.

1. Ha $\mathcal{B}$ legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térben, akkor
$$\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} := \{B \cap \mathcal{Y} : \; B \in \mathcal{B}\}$$
(legfeljebb megszámlálható) halmaz bázis az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altérben. Ha ui. $\emptyset \neq V \subset \mathcal{Y}$ nyílt az altérben, akkor alkalmas $U \in \mathcal{G}$ halmazzal $V = U \cap \mathcal{Y}$, így van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ indexhalmaz, hogy
$$U = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{N}} U_\gamma,$$
ahol
$$U_\gamma \in \mathcal{B} \qquad (\gamma \in \mathcal{N}),$$
így
$$V = \left(\bigcup_{\gamma\in\mathcal{N}} U_\gamma\right) \cap \mathcal{Y} = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{N}} (U_\gamma \cap \mathcal{Y}).$$
2. Ha $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ topologikus térben, ill. $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus térben, akkor
$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \{U \times V : \; U \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, \, V \in \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}\}$$
legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{G}|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben.
3. Ha $\mathcal{B}$ legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térben, akkor f nyíltsága miatt
$$\mathcal{B}_f := \{f[U] : \; U \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{G}_f$$
legfeljebb megszámlálható bázis az $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_f)$ faktortopológiában, hiszen ha
$$\emptyset \neq V \in \mathcal{G}_f,$$
akkor f nyíltsága miatt $f^{-1}[V] \in \mathcal{G}$, azaz van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ indexhalmaz, hogy
$$f^{-1}[V] = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{N}} U_\gamma,$$

ahol

$$U_\gamma \in \mathcal{B} \qquad (\gamma \in \mathcal{N}),$$

így f szürjektivitása következtében

$$f[f^{-1}[V]] = V = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{N}} f[U_\gamma]. \quad \blacksquare$$

1.1.18. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér

1. M_1**-tér**, ha minden pontjának van megszámlálható környezetbázisa;
2. M_2**-tér**, ha van megszámlálható (topologikus) bázisa.

1.1.25. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ diszkrét topologikus tér M_1-tér, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathfrak{B}_x := \{\{x\}\}$$

környezetbázisa x-nek, de nem M_2-tér, ui. ellenkező esetben minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\{x\}$ nyílt halmaz előállna ezen bázis elemeinek egyesítéseként, ami nem lehetséges, mert $\mathbb{R}$ nem megszámlálható. $\blacksquare$

1.1.42. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér M_2-tér, akkor egyben M_1-tér is!

Útm. Ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér M_2-tér, amelynek $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ megszámlálható bázisa, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén a

$$Z_x := \{n \in \mathbb{N} : \ x \in B_n\} \subset \mathbb{N}$$

halmaz megszámlálható és a $(B_k)_{k\in Z_x}$ halmazrendszer x környezetbázisát alkotja. $\blacksquare$

1.1.7. Összefüggő terek

Valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus térben $\emptyset$ nyílt is és zárt is egyben: $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{F}$.

1.1.19. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$

1. topologikus tér **összefüggő**, ha $\mathcal{X}$-en és $\emptyset$-on kívül nincsen más nyílt és zárt halmaz;
2. topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **összefüggő**, ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}|_A)$ topologikus tér összefüggő.

Az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér tehát pontosan akkor összefüggő, ha $\mathcal{X}$ nem bontható fel két diszjunkt, nem-üres nyílt halmaz uniójára.

1.1.26. példa.

1. Tetszőleges nem-üres $\mathcal{X}$ halmaz esetén az $(\mathcal{X},\{\emptyset,\mathcal{X}\})$ indiszkrét topologikus tér triviálisan összefüggő.
2. Az $(\mathcal{X},\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ diszkrét topologikus tér pontosan akkor összefüggő, ha $\mathcal{X}$ egyelemű halmaz.
3. A Sierpienski-féle topologikus tér (vö. 1.1.1. példa) összefüggő.
4. $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával ellátva elmondható, hogy $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nem összefüggő, hiszen
$$\mathbb{R}\backslash\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

1.1.43. feladat. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$-ben (a szoksásos topológiát tekintve) valamely $A\subset\mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor összefüggő, ha A intervallum!

Útm.

1. lépés. Ha $A\subset\mathbb{R}$ nem intervallum, akkor alkalmas $a,b,c\in\mathbb{R}$ esetén $a,b\in A$, $c\notin A$ és $a<c<b$. Az
$$A\cap(-\infty,c)\neq\emptyset \qquad \text{és az} \qquad A\cap(c,+\infty)\neq\emptyset$$
halmazok nyíltak és diszjunktak A-ban, így az
$$A=(A\cap(-\infty,c))\cup(A\cap(c,+\infty)),$$
halmaz nem összefüggő.

2. lépés. Ha A intervallum,
$$\emptyset\neq B\subsetneqq A,$$
akkor alkalmas $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$ esetén $a\in A\backslash B$ és $b\in B$. Ha pl. $b<a$, akkor a
$$c:=\sup\{x\in B:\ x<a\}$$
valós számra
$$b\leq c\leq a,$$
így $c\in A$. Ha $c\notin B$, akkor B nem zárt. Ha $c\in B$, akkor
$$c<a \qquad \text{és} \qquad (c,a]\cap B=\emptyset,$$
azaz B nem nyílt. ■

1.1.44. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus térben az $A\subset\mathcal{X}$ halmaz összefüggő, akkor bármely $B\subset\mathcal{X}$ összefüggő, amennyiben $A\subset B\subset\overline{A}$ teljesül!

Útm. Ha B nem lenne összefüggő, akkor alkalmas $U,V\subset\mathcal{G}$ (nyílt) halmazokkal

$$(B\cap U)\cup(B\cap V)=B,\qquad B\cap U\cap V=\emptyset\qquad\text{és}\qquad B\cap U\neq\emptyset,\quad B\cap V\neq\emptyset$$

teljesülne. Így A összefüggősége következtében

$$(A\cap U)\cup(A\cap V)=A\qquad\text{és}\qquad A\cap U\cap V=\emptyset.$$

A feltételek miatt tetszőleges $x\in B\cap U$, ill. tetszőleges $y\in B\cap V$ esetén $x,y\in\overline{A}$. Ezért, ha $H\in\mathcal{G}$ olyan (nyílt) halmaz, amelyre $x,y\in H$, akkor $H\cap A\neq\emptyset$. Speciálisan $U\cap A\neq\emptyset$, ill. $V\cap A\neq\emptyset$ is igaz, ami ellentmond A összefüggőségének. ■

Ha tehát az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus térben valamely $A\subset\mathcal{X}$ halmazra $\overline{A}=\mathcal{X}$ és A összefüggő, akkor $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ összefüggő.

1.1.45. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér és $\emptyset\neq\Gamma$ indexhalmaz esetén az

$$A\gamma\subset\mathcal{X}\qquad(\gamma\in\Gamma)$$

olyan összefüggő halmazok, amelyekre

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\neq\emptyset,$$

akkor az

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\neq\emptyset$$

halmaz összefüggő!

Útm. Ha

$$x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\qquad\text{és}\qquad H\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$$

olyan halmaz, amely nyílt is és zárt is az

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$$

halmazban, akkor bármely $\gamma\in\Gamma$ esetén $H\cap A_\gamma$ nyílt és zárt A_γ-ban. Ha $H\neq\emptyset$, akkor belemetsz legalább egy A_γ-ba. Ha ennek indexe $\delta\in\Gamma$, akkor A_δ összefüggősége miatt

$$H\cap A_\delta=A_\delta.$$

Speciálisan $x\in H$ is igaz, így

$$H\cap A_\gamma\neq\emptyset\qquad(\gamma\in\Gamma).$$

Innen pedig

$$H\cap A_\gamma=A_\gamma\qquad(\gamma\in\Gamma)$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$H=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma. \quad \blacksquare$$

Az iménti feladatban az

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$$

feltétel nem hagyható el, hiszen pl.

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad A_1 := [0,1] \qquad \text{és} \qquad A_2 := [2,3]$$

esetén A_1 és A_2 összefüggő, $A_1 \cup A_2$ viszont nem összefüggő.

1.1.46. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G}_\mathcal{X})$ összefüggő topologikus tér, akkor bármely $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_\mathcal{Y})$ topologikus tér, ill. $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ folytonos függvény esetén az $f[\mathcal{X}]$ halmaz összefüggő!

Útm. Ha $f[\mathcal{X}]$ nem lenne összefüggő, akkor alkalmas $U,V\in\mathcal{G}_\mathcal{Y}$ (nyílt) halmazokkal

$$U\cap V=\emptyset \qquad \text{és} \qquad U\cup V=f[\mathcal{X}]$$

teljesülne. Így az $f^{-1}[U]$, ill. $f^{-1}[V]$ halmazok nem-üres, diszjunkt $\mathcal{G}_\mathcal{X}$-beli halmazok lennének, továbbá

$$f^{-1}[U]\cup f^{-1}[V]=\mathcal{X}$$

is igaz lenne, ami nem lehetséges. ■

1.1.47. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_\mathcal{Y})$ diszkrét topologikus tér, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) $(\mathcal{X},\mathcal{G}_\mathcal{X})$ összefüggő topologikus tér.

(2) Minden $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ folytonos függvény állandófüggvény.

Útm.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ha tetszőleges $(\mathcal{X},\mathcal{G}_\mathcal{X})$ topologikus tér, $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_\mathcal{Y})$ diszkrét topologikus tér esetén

$$f:(\mathcal{X},\mathcal{G}_\mathcal{X})\to(\mathcal{Y},\mathcal{G}_\mathcal{Y})$$

folytonos, és $a\in\mathcal{X}$, akkor az $\{f(a)\}$ halmaz nyílt is és zárt is $\mathcal{Y}$-ban. f folytonosságának következményeként ugyanez igaz az $\mathcal{X}$-beli

$$A:=f^{-1}[\{f(a)\}]$$

halmazra. Így, ha $(\mathcal{X},\mathcal{G}_\mathcal{X})$ összefüggő topologikus tér, akkor $a\in A$ miatt $A=\mathcal{X}$, ahonnan bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén $f(x)=f(a)$ következik, azaz f állandófüggvény.

(2) ⇒ (1): Ha az

$$(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}) := (\{0,1\},\mathcal{P}(\{0,1\}))$$

diszkrét topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ nem-üres halmaz nyílt is és zárt is, akkor az

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in A), \\ \\ 1 & (x \notin A^c) \end{cases}$$

függvény folytonos. Ha f állandófüggvény, akkor $A = \mathcal{X}$. ■

1.1.48. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ összefüggő topologikus tér, továbbá

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

folytonos függvény (ahol $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával látjuk el), akkor $f[X]$ vagy egyelemű vagy (valódi) intervallum, azaz tetszőleges

$$x, y \in f[\mathcal{X}], \qquad x < y$$

és bármely $b \in (x,y)$ esetén $b \in f[\mathcal{X}]$ teljesül (**Bolzano-tétel**)!

Útm. Az állítás az 1.1.43 és az 1.1.46. feladat alapján nyilvánvaló. ■

1.1.8. Kompakt halmazok

1.1.49. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus térben a $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ halmazrendszer bázis, akkor bármely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz bármely $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ nyílt lefedése esetén van olyan $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$, hogy

$$|\widetilde{\Gamma}| \leq |\mathcal{B}| \qquad \text{és} \qquad A \subset \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} U_\gamma$$

teljesül (**Lindelöf-lemma**)!

Útm. Mivel $\mathcal{B}$ bázis, ezért az A halmaz minden $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ nyílt lefedése esetén tetszőleges $\gamma \in \Gamma$-hoz van olyan Γ_γ indexhalmaz, ill.

$$B_{\gamma\delta} \in \mathcal{B} \qquad (\delta \in \Gamma_\gamma),$$

hogy

$$U_\gamma = \bigcup_{\delta\in\Gamma_\gamma} B_{\gamma\delta},$$

ahonnan

$$A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bigcup_{\delta\in\Gamma_\gamma} B_{\gamma\delta}$$

következik. Így a

$$\mathcal{B}_0 := \{B_{\gamma\delta} \in \mathcal{B} : \ \gamma \in \Gamma, \, \delta \in \Gamma_\gamma\}$$

halmazra
$$|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}|.$$
Ha tehát tetszőleges $B \in \mathcal{B}_0$ esetén $\gamma_B \in \Gamma$ olyan index, amelyre $B \subset U_{\gamma_B}$ és
$$\widetilde{\Gamma} := \{\gamma_B : \; B \in \mathcal{B}_0\},$$
akkor
$$|\widetilde{\Gamma}| \leq |\mathcal{B}| \qquad \text{és} \qquad A \subset \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} U_\gamma. \quad \blacksquare$$

1.1.20. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz

1. **kompakt**, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés, azaz
$$\left(U_\gamma \in \mathcal{G}\ (\gamma \in \Gamma): \quad A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma\right) \quad \Longrightarrow \quad \exists \widetilde{\Gamma} \subset \Gamma: \; |\widetilde{\Gamma}| < \infty, \; A \subset \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} U_\gamma;$$
2. **prekompakt** vagy **relatív kompkat**, ha $\overline{A}$ kompakt.

Ha speciálisan az $\mathcal{X}$ halmaz is kompakt, azaz
$$\left(U_\gamma \in \mathcal{G}\ (\gamma \in \Gamma): \quad \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \mathcal{X}\right) \quad \Longrightarrow \quad \exists \widetilde{\Gamma} \subset \Gamma: \; |\widetilde{\Gamma}| < \infty, \; \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} U_\gamma = \mathcal{X},$$
akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$-t **kompakt topologikus tér**nek nevezzük.

1.1.50. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ véges halmaz, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér kompakt!

Útm. Ha $\mathcal{X}$ véges halmaz, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$
így ha a $\mathcal{H}$ halmazrendszer $\mathcal{X}$-nek nyílt lefedése, akkor tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $U_k \in \mathcal{H}$ olyan halmaz, amelyre $x_k \in U_k$. Ekkor a
$$\mathcal{V} := \{U_1, \ldots, U_n\}$$
halmazra $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ és $\mathcal{V}$ lefedi $\mathcal{X}$-et. $\blacksquare$

1.1.27. példa. Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, és

1. $A \subset \mathcal{X}$ véges, akkor A kompakt (speciálisan $\emptyset$ kompakt);
2. $\mathcal{G}$ véges, akkor minden $A \subset \mathcal{X}$ halmaz kompakt (speciálisan az indiszkrét topologikus tér kompakt);
3. ha $\mathbb{R}$-et a szokásos tolopógiával látjuk el, akkor $\mathbb{R}$ nem kompakt, hiszen az
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-1, k+1) = \mathbb{R}$$
nyílt lefedésnek nincsen olyan véges része, amely még lefedné $\mathbb{R}$-et;
4. az $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ diszkrét topologikus tér esetén $\mathcal{X}$ pontosan akkor kompakt, ha véges.

1.1.14. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha

$$\left(V_\gamma \in \mathcal{F}\ (\gamma \in \Gamma) : \quad \bigcap_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma = \emptyset\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma : \ |\widetilde{\Gamma}| < \infty, \ \bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} V_\gamma = \emptyset$$

teljesül!

Útm.

1.1.51. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt topologikus tér és az

$$\emptyset \neq A_n \in \mathcal{F} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat monoton szűkülő, akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

teljesül (**Cantor-tétel**)!

Útm. Ha az

$$\emptyset \neq A_n \in \mathcal{F} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra

$$A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

akkor a De-Morgan-azonosságok miatt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \mathcal{X},$$

így a kompaktság miatt alkalmas véges $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ halmaz esetén

$$\bigcup_{n\in\mathcal{N}} A_n^c = \mathcal{X}.$$

Mivel

$$A_n^c \subset A_{n+1}^c \qquad (n \in \mathcal{N}),$$

ezért van olyan $N \in \mathcal{N}$ index, hogy

$$\mathcal{X} = A_N^c,$$

ahonnan $A_N = \emptyset$ következik, ami nem lehetséges. ■

Az iménti feladat speciális esete a következő feladatban megfogalmazott egyik állításnak.

1.1.52. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén egyenértékűek az alábbi állítások (**Riesz-féle metszet-tétel**)!

(1) $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt.

(2) Valamely Γ indexhalmaz és

$$A_\gamma \subset \mathcal{F} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

zárt halmazok esetén, ha $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ véges, akkor

$$\bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A_\gamma \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$

Útm.

(1) $\Rightarrow$ **(2):** Ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt, továbbá valamely Γ indexhalmaz és

$$A_\gamma \subset \mathcal{F} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

zárt halmazok esetén

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \emptyset,$$

akkor

$$\mathcal{X} = \emptyset^c = \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c,$$

ezért $(A_\gamma^c)_{\gamma\in\Gamma}$ nyílt lefedése $\mathcal{X}$-nek. Így a kompaktság következtében alkalmas $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ véges indexhalmaz esetén

$$\bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A_\gamma^c = \mathcal{X}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A\gamma = \emptyset.$$

(2) ⇒ (1): Ha valamely Γ indexhalmaz, $N_\gamma \subset \mathcal{G}$ $(\gamma \in \Gamma)$ esetén

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma = \mathcal{X},$$

akkor a De-Morgan-azonosságok következtében

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma^c = \emptyset.$$

Mivel

$$N_\gamma^c \in \mathcal{F} \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

ezért a feltételek miatt tetszőleges $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ véges indexhalmaz esetén

$$\bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} N_\gamma^c = \emptyset,$$

ahonnan ismét a De-Morgan-azonosságok felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} N_\gamma = \mathcal{X},$$

azaz

$$\bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} N_\gamma$$

véges fedése $\mathcal{X}$-nek, tehát $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt. ■

1.1.53. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, és $A \subset \mathcal{X}$ kompakt, akkor minden $B \subset A$ végtelen halmaznak van A-beli torlódási pontja!

Útm. Ha valamely végtelen $B \subset A$ halmaz esetén

$$A \cap B' = \emptyset,$$

akkor minden $x \in A$ esetén $x \notin B'$, így alkalmas (feltehető, hogy) nyílt $U_x \in \mathcal{U}(x)$ környezettel

$$B \cap (U_x \backslash \{x\}) = \emptyset.$$

Mivel az

$$\{U_x : \ x \in A\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése A-nak, ezért A kompaktsága következtében van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in A$, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}.$$

Így

$$B = B \cap A = \bigcup_{k=1}^{n} \left(U_{x_k} \cap B\right).$$

Mivel

$$x_k \notin B' \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $U_{x_k} \cap B$ halmaz legfeljebb egyelemű:

$$U_{x_k} \cap B = \emptyset \qquad \text{vagy} \qquad U_{x_k} \cap B = \{x\},$$

így a B halmaz is véges, ami nem lehetséges. ■

1.1.54. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, és $A \subset \mathcal{X}$ kompakt, akkor minden $B \subset A$ zárt halmaz esetén B is kompakt! Igaz-e, hogy minden $A \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz zárt?

Útm. Ha az $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ halmazrendszer nyílt lefedése a B halmaznak, akkor a

$$B^c \cup \{U_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}$$

nyílt feledése A-nak, ezért A kompaktsága miatt alkalmas $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ véges indexhalmazzal

$$/B \subset /A \subset B^c \cup \{U_\gamma : \ \gamma \in \widetilde{\Gamma}\}.$$

Így

$$B^c \cap B = \emptyset$$

következtében $(U_\gamma)_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}}$ nyílt lefedése B-nek, azaz B kompakt.
A Sierpiński-féle topologikus tér (vö. 1.1.1. példa) esetén, ha pl.

$$\mathcal{G} := \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\},$$

akkor a $\{b\}$ halmaz nyilvánvalóan kompakt, de nem zárt, hiszen

$$\{b\}^c = \{a\} \notin \mathcal{G}. \quad ■$$

1.1.55. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér (T_2-tér), akkor bármely $A \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz és bármely $x \in A^c$ ponthoz vannak olyan $U, V \in \mathcal{G}$ (nyílt) halmazok, hogy

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{és} \qquad x \in U, \qquad \text{ill.} \qquad A \subset V$$

tejesül!

Útm. Mivel $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér, ezért bármely $a \in A$ esetén vannak olyan (feltehető, hogy) nyílt $U_a \in \mathcal{U}(x)$ és $V_a \in \mathcal{U}(a)$ környezetek, hogy $U_a \cap V_a = \emptyset$. Mivel a

$$\{V_a : \ a \in A\}$$

halmazrendszer az A egy nyílt lefedése, ezért A kompaktsága miatt akalmas $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén

$$V := \bigcup_{l=1}^{n} V_{a_l} \supset A.$$

Így, ha

$$U := \bigcap_{k=1}^{n} U_{a_k},$$

akkor $U, V \in \mathcal{G}$, $x \in U$ és $A \subset V$, továbbá

$$U \cap V = \left(\bigcap_{k=1}^{n} U_{a_k}\right) \cap \left(\bigcup_{l=1}^{n} V_{a_l}\right) = \bigcup_{l=1}^{n}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_{a_k}\right) \cap V_{a_l}\right) \subset \bigcup_{l=1}^{n} (U_{a_k} \cap V_{a_l}) = \emptyset. \quad \blacksquare$$

1.1.56. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér (T_2-tér), akkor bármely

1. $A \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz zárt;
2. $A \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz és bármely $Z \in \mathcal{F}$ halmaz esetén $A \cap Z$ kompakt!

Útm.

1. Az 1.1.55. feladatbeli állítás következtében minden $x \in A^c$ belső pontja A^c-nek, tehát $A^c \in \mathcal{G}$, ahonnan $A \in \mathcal{F}$ következik.
2. Mivel $A, Z \in \mathcal{F}$, ezért $A \cap Z \in \mathcal{F}$, így az 1.1.54. feladatbeli állítás felhasználásával látható, hogy $A \cap Z$ kompakt. $\blacksquare$

1.1.57. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér, akkor kompakt halmazok (tetszőleges) metszete és véges egyesítése kompakt!

Útm.

1. lépés. Ha $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz és $A_\gamma \subset \mathcal{X}$ kompakt, akkor (vö. 1.1.56. feladat) bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{F}$. Így (vö. 1.1.1. feladat)

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{F}.$$

Ennélfogva, ha $\delta \in \Gamma$, akkor

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

zárt része a $(A_\delta, \mathcal{G}|_{A_\delta})$ kompakt térnek, ezért (vö. 1.1.1. feladat)

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

kompakt.

2. lépés. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_k \subset \mathcal{X}$ kompakt ($k \in \{1, \ldots, n\}$), és

$$A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

akkor $A = \emptyset$ esetén A triviálisan kompakt, ha pedig $A \neq \emptyset$ és

$$\mathcal{U} := \{U_\gamma \in \mathcal{G} : \ \gamma \in \Gamma\}$$

fedőrendszere A-nak:

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma,$$

akkor bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mathcal{U}$ az A_k halmaznak is fedőrendszere. Az

$$A_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

halmazok kompaktsága következtében mindegyiknek van $\mathcal{U}$-beli véges, nyílt fedőrendszere: $\mathcal{V}_1$, …, $\mathcal{V}_n$. Ha

$$\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n\},$$

akkor $\mathcal{V}$ véges és $\mathcal{V} \supset A$, azaz A kompakt. ■

Az 1.1.57. feladatbeli első állítás, miszerint kompakt halmazok metszete is kompakt, már nem igaz minden topologikus térben. Ha pl. $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$ és

$$\mathcal{G} := \left\{\mathbb{R}^2, \emptyset, \mathbb{R}\right\} \cup \{I_a : \ a \in (0, +\infty)\} \cup \{S_b : \ b \in (0, +\infty)\},$$

ahol

$$I_a := (-\infty, a) \quad (a \in (0, +\infty)), \qquad \text{ill.} \qquad S_b := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < b\right\} \quad (b \in (0, +\infty)),$$

akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, hiszen

- $\emptyset \in \mathcal{G}$, $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$;
- bármely $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ esetén

  $$I_a, I_b \in \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad I_a \cap I_b = I_a \in \mathcal{G}, \qquad S_a, S_b \in \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad S_a \cap S_b = S_a \in \mathcal{G},$$

  ill.

  $$I_a, S_b \in \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad I_a \cap S_b = I_a \in \mathcal{G}.$$

- $\mathcal{G}$-beli
  - intervallumok tetszőleges halmazának egyesítése a halmazbeli legbővebb intervallum vagy $\mathbb{R}$, és ezek mind nyíltak: $\mathcal{G}$-beliek;
  - félsíkok tetszőleges halmazának egyesítése a halmazbeli legbővebb félsík vagy $\mathbb{R}^2$, és ezek mind nyíltak: $\mathcal{G}$-beliek;
  - intervallumok, ill. félsíkok tetszőleges halmazának egyesítése a halmazbeli legbővebb félsík vagy $\mathbb{R}^2$ (ui. minden félsíkban benne vannak az intervallumok), és ezek mind nyíltak: $\mathcal{G}$-beliek.

Ha

$$A := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,1)\}, \qquad B := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(2,2)\},$$

akkor $A, B \subset \mathcal{X}$ kompakt halmazok, hiszen pl. A minden nyílt fedőrendszerében benne van valamely $a > 1$ esetén S_a, így erre az a-ra $\{S_a\}$ véges, nyílt fedőrendszere A-nak. Hasonlóan látható be B kompaktsága is. Az

$$A \cap B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{X}$$

halmaz nem kompakt, hiszen

$$\{S_a : \ a \in (0, +\infty)\}$$

olyan nyílt fedőrendszere $A \cap B$-nek, amelyből nem választható ki véges, nyílt halmazokból álló fedőrendszer.

1.1.58. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ kompakt topologikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor van olyan $a, b \in \mathcal{X}$, hogy

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül (**Weierstraß-tétel**)!

Útm. Ha pl.

$$\alpha := \sup \{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}\}$$

és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $f(x) < \alpha$, akkor az

$$A_n := \left\{x \in \mathcal{X} : \ f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokból álló halmazrendszerre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathcal{X},$$

így a kompaktság következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \mathcal{X}.$$

Ekkor azonban bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami nem lehetséges. ■

1.1.59. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ topologikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ folytonos függvény esetében az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz ($\mathcal{X}$-beli) kompaktsága maga után vonja az $f[A] \subset \mathcal{Y}$ képhalmaz ($\mathcal{Y}$-beli) kompaktságát (**Hausdorff-tétel**)!

Útm. Ha a

$$V_\gamma \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

halmazokra

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma \supset f[A],$$

akkor f folytonossága miatt az

$$U_\gamma := f^{-1}[V_\gamma] \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

halmazokra

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \supset A.$$

Az A halmaz kompaktsága következtében van olyan $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ véges indexhalmaz, hogy

$$\bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} U_\gamma \supset A.$$

Így

$$f[A] \subset f\left[\bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} U_\gamma\right] = \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} \underbrace{f\left[f^{-1}[V_\gamma]\right]}_{\subset V_\gamma} \subset \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} V_\gamma. \qquad \blacksquare$$

1.1.60. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ kompakt topologikus tér, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér, $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{Z}})$ pedig tetszőleges topologikus tér, továbbá az $f : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ leképezés szürjektív és folytonos, akkor a $g : (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}) \to (\mathcal{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{Z}})$ leképezés folytonosságának elégséges feltétele a $g \circ f : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{Z}})$ leképezés folytonossága!

Útm. Ha $g \circ f$ folytonos és $A \subset \mathcal{Z}$ zárt halmaz: $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}$, akkor a

$$H := f^{-1}[g^{-1}[A]] = (g \circ f)^{-1}[A] \subset \mathcal{X}$$

halmaz zárt. H kompaktsága, ill. f folytonossága következtében $f[H]$ is kompakt, így az 1.1.56. feladatbeli állítás következményeként zárt is: $f[H] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$. Mivel f szürjektív, ezért

$$f[H] = g^{-1}[A]. \quad \blacksquare$$

1.1.61. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ kompakt topologikus tér, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér, továbbá a $h : (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ leképezés bijektív és folytonos, akkor h homeomorfizmus!

Útm. Ha az 1.1.60 feladatban $f := h$ és $g := h^{-1}$, akkor a $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ leképezés folytonosságából egyszerűen látható, hogy h^{-1} is folytonos. $\blacksquare$

1.1.62. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus térben az $\mathcal{S}\subset\mathcal{G}$ halmazrendszer szubbázis (vö. 1.1.9. definíció) és ha $\mathcal{X}$-nek $\mathcal{S}$ halmazaival történő lefedéséből kiválasztható véges lefedés, akkor $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ kompakt (**Alexander-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ nem kompakt, akkor alkalmas Γ indexhalmaz és

$$N_\gamma\in\mathcal{G}\quad(\gamma\in\Gamma),\qquad \bigcup_{\gamma\in\Gamma}N_\gamma=\mathcal{X}$$

halmazok esetén nincsen olyan $\widetilde{\Gamma}\subset\Gamma$ véges indexhalmaz, hogy $\bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}}N_\gamma=\mathcal{X}$. Így a

$$\mathcal{H}:=\{\mathcal{A}\subset\mathcal{G}:\ \mathcal{A}\text{ olyan lefedése }\mathcal{X}\text{-nek, amelyből nem választható ki véges lefedés}\}$$

halmazrendszer nem üres és ha

$$(A,B)\in\rho\qquad :\Longleftrightarrow\qquad A\subset B\qquad (A,B\in\mathcal{H}),$$

akkor $(\mathcal{H},\rho)$ rendezett halmaz. Ha $\mathcal{J}\subset\mathcal{H}$ – a ρ rendezéssel – láncszerűen rendezett részhalmaz és

$$\mathcal{G}':=\bigcup\{A:\ A\in\mathcal{J}\},$$

akkor a $\mathcal{G}'$ halmazrendszer is olyan lefedése $\mathcal{X}$-nek, amelyből nem választható ki véges lefedés. Valóban, ha alkalmas $n\in\mathbb{N}$ esetén az $U_1,\ldots,U_n\in\mathcal{G}'$ halmazrendszer lefedné $\mathcal{X}$-et, akkor lennének olyan $J_1,\ldots,J_n\in\mathcal{J}$ halmazok, amelykre

$$U_k\subset J_k\qquad (k\in\{1,\ldots,n\})$$

teljesülne, viszont $\mathcal{J}$ láncszerűen rendezett, így a

$$\widetilde{\mathcal{G}}:=\bigcup_{k=1}^{n}J_k\in\mathcal{J}\subset\mathcal{H}$$

halmazrendszerre vonatkozóan $\{U_1,\ldots,U_n\}$ véges fedőrendszer lenne, ami nem lehetséges. Ezért $\mathcal{G}'$ felső korlátja $\mathcal{J}$-nek, ahonnan a Zorn-lemma (vö. 11.1.1. tétel) felhasználásával egy $\mathcal{A}_0\in\mathcal{H}$ maximális elem létezése következik.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a fenti $\mathcal{A}_0$ halmazrendszer esetén az

$$\mathcal{A}_\mathcal{S}:=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{S}$$

lefedése $\mathcal{X}$-nek. Ha

$$x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_{A\in\mathcal{A}_\mathcal{S}}A,$$

akkor – lévén, hogy $\mathcal{A}_0$ nyílt halmazokból álló fedőrendszere $\mathcal{X}$-nek – van olyan $V\in\mathcal{A}_0$, amelyre $x\in V$. Mivel $\mathcal{S}$ szubbázis $\mathcal{X}$-ben, ezért alkalmas $n\in\mathbb{N}$, ill. $S_1,\ldots,S_n\in\mathcal{S}$ esetén $x\in S_1\cap\ldots\cap S_n$. Viszont $S_1,\ldots,S_n\notin\mathcal{A}_0$, hiszen ellenkező esetben

$$S_1,\ldots,S_n\in\mathcal{A}_\mathcal{S}=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{S}$$

lenne, ami x választása miatt nem lehetséges. $\mathcal{A}_0$ maximalitása következtében bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $\mathcal{A}_0 \cup \{S_k\}$ halmaz lefedhető véges sok halmazzal:

$$\bigcup \{A_{1k}, \ldots, A_{mk}, S_k\} \supset \mathcal{A}_0 \cup \{S_k\},$$

így

$$\mathcal{X} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} \underbrace{A_{kl}}_{\in \mathcal{A}_0} \right) \bigcup \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k \right)}_{\subset V \in \mathcal{A}_0},$$

ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{A}_0$-ból nem választható ki véges fedőrendszer. ■

1.1.63. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz esetén $(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma)$ topologikus tér $(\gamma \in \Gamma)$, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus szorzattér pontosan akkor kompakt, ha bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén $(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma)$ kompakt (**Tyihonov-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén a pr_γ kanonikus projekció folytonos (vö. 1.1.7. feladat), ezért az 1.1.59. feladatbeli állítás következtében $\mathcal{X}$ kompaktsága maga után vonja az

$$\mathcal{X}_\gamma = pr_\gamma[X]$$

halmaz kompaktságát $(\gamma \in \Gamma)$.

2. lépés. Ha bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén $(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma)$ kompakt topologikus tér, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ értelmezése alapján (vö. 1.1.15. példa)

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{ pr_\gamma^{-1}[N_\gamma] : \; N_\gamma \in \mathcal{G}_\gamma \}$$

a szorzattopológia szubbázisa, ahol tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$pr_\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_\gamma, \qquad pr_\gamma(f) := f_\gamma.$$

Elég tehát igazolni (vö. 1.1.62. feladat), hogy $\mathcal{X}$ bármely $\mathcal{S}$-beli halmazokból álló $\mathcal{U}$ lefedéséből kiválasztható véges lefedés. Ha $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\mathcal{U}_\gamma := \left\{ N_\gamma \in \mathcal{G}_\gamma : \; pr_\gamma^{-1}[N_\gamma] \in \mathcal{U} \right\},$$

akkor alkalmas $\alpha \in \Gamma$ index esetén az $\mathcal{U}_\alpha$ halmaz lefedi $\mathcal{X}_\alpha$-t, különben lenne olyan $f \in \mathcal{X}$, hogy egyetlen $\gamma \in \Gamma$ esetén sem teljesülne $pr_\gamma(f) \subset \mathcal{U}_\gamma$ és ekkor $f \notin \mathcal{U}$ lenne, ami nem lehetséges, hiszen feltettük, hogy $\mathcal{U}$ lefedi $\mathcal{X}$-et. Mivel $\mathcal{U}_\alpha$ lefedi $\mathcal{X}_\alpha$-t, ezért alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_k,$$

ahonnan

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{n} pr_\alpha^{-1}[\mathcal{U}_k]$$

következik, azaz van $\mathcal{U}$-beli halmazokbó álló véges lefedés. ■

1.1.64. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$ topologikus tér, $(\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ folytonos függvény, akkor tetszőleges $A \subset \mathcal{X}$ prekompakt halmaz esetén $f[A] \subset \mathcal{Y}$ kompakt!

Útm. Ha $A \subset \mathcal{X}$ prekompakt, azaz $\overline{A}$ kompakt, akkor $f[\overline{A}] \subset \mathcal{Y}$ is kompakt (vö. 1.1.59. feladat). Mivel $f[\overline{A}]$, mint $\mathcal{Y}$-beli kompakt halmaz zárt (vö. 1.1.56. feladat), ezért $f[A] \subset f[\overline{A}]$ következtében

$$\overline{f[A]} \subset f[\overline{A}].$$

Következésképpen az $\mathcal{Y}$-beli $\overline{f[A]}$ zárt halmaz egyben kompakt is (vö. 1.1.54. feladat). ■

1.1.21. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}$, ill. $a_{k_1,\ldots,k_d} \in \mathbb{R}$ számok esetén a

$$p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad p(x_1, \ldots, x_d) := \sum_{k_1,\ldots,k_d} a_{k_1,\ldots,k_d} \cdot x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{k_d}$$

függvényt d**-változós polinom**nak nevezzük.

Világos, hogy p folytonos, hiszen bármely $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén, ha valamely

$$x^{(n)} := \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^d \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim \left(x^{(n)}\right) = a$, azaz bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $\lim \left(x_k^{(n)}\right) = a_k$, akkor

$$\begin{aligned} p(x^{(n)}) &= \sum_{k_1,\ldots,k_d} a_{k_1,\ldots,k_d} \cdot \left(x_1^{(n)}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(x_d^{(n)}\right)^{k_d} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \sum_{k_1,\ldots,k_d} a_{k_1,\ldots,k_d} (a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (a_d)^{k_d} = p(a) \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

1.1.22. definíció. Azt mondjuk, hogy a $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **trigonometrikus polinom** $/T \in \mathcal{T}/$, ha alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $A_0, A_k, A_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$ esetén

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy bármely T trigonometrikus polinom 2π-periodikus folytonos függvény: $T \in \mathfrak{C}_{2\pi}$. A tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ esetén fenálló

$$\cos(kx)\cos(lx) = \frac{\cos((k-l)x) - \cos((k+l)x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(kx)\sin(lx) = \frac{\cos((k-l)x) + \cos((k+l)x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\sin(kx)\cos(lx) = \frac{\sin((k-l)x) + \sin((k+l)x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságok felhasználásával könnyen belátható, hogy két trigonometrikus polinom szorzata is trigonmetrikus polinom. Így például, ha $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, akkor a

$$t(x) := p(\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény trigonometrikus polinom.

1.1.23. definíció. Valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ halmaz **egységelemes, szeparáló részalgebra** $\mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$-ben, ha az $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ függvényhalmazra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- bármely $f, g \in \mathfrak{A}$, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{A}$;
- tetszőleges $f, g \in \mathfrak{A}$ függvénypárra $f \cdot g \in \mathfrak{A}$;
- $\widehat{1} \in \mathfrak{A}$;
- ha $u, v \in \mathcal{X} : u \neq v$, akkor alkalmas $f \in \mathfrak{A}$ függvényre $f(u) \neq f(v)$.

1.1.28. példa. Ha $d \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, akkor az

$$\mathfrak{A} := \{f : H \to \mathbb{R} : \text{ alkalmas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ d\text{-változós polinomra } f = p|_H\}$$

halmaz egységelemes szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}(H, \mathbb{R})$-ben, hiszen $\mathfrak{A}$ zárt a lineáris kombinációra, továbbá a

$$p(x_1, \ldots, x_d) := 1 \qquad (x \in H)$$

polnomra: $p \in \mathfrak{A}$, ill. a szeparáló tulajdonság a

$$p_k(x_1, \ldots, x_d) :\equiv x_k$$

polinomok segítségével látható be.

1.1.29. példa. Ha

$$\mathbb{T} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\},$$

akkor

$$\varphi : \mathfrak{C}_{2\pi} \to \mathfrak{C}(\mathbb{T}), \qquad \varphi(s) := (\cos(s), \sin(s))$$

izometrikus izomorfizmus, tehát a trigonometrikus polinomok a $\mathbb{T}$ kompakt halmazon értelmezett kétváltozós polinomok. Így a trigonometrikus polinomok halmaza egységelemes szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}_{2\pi}$-ben.

1.1.30. példa. Ha $I \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, akkor az

$$\mathfrak{A} := \{f : I \to \mathbb{R} : \text{ alkalmas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinomra } f = p|_I\}$$

halmaz egységelemes szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$-ben.

1.1.65. feladat. Igazoljuk bármely $u, v \in \mathcal{X}$: $u \neq v$ pont és tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számok esetén van olyan $h \in \mathfrak{A}$, hogy

$$h(u) = \alpha \qquad \text{és} \qquad h(v) = \beta$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy alkalmas $f \in \mathfrak{A}$ függvényre $f(u) \neq f(v)$, így a

$$h(x) := \alpha \cdot \frac{f(x) - f(v)}{f(u) - f(v)} + \beta \cdot \frac{f(x) - f(u)}{f(v) - f(u)} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

függvény megfelelő választás. ■

A 1.1.65. feladat útmutatójában megadott h függvény létezését a következő okoskodással is ki lehet mutatni. Feltehető, hogy $f(v) \neq 0$. Ha

- $f(u) \neq 0$ és $h := f^2 - xf$, akkor a

  $$h(u) = f^2(u) - xf(u) = \alpha, \qquad h(v) = f^2(v) - xf(v) = \beta$$

  egyenletrendszert x-re megoldva azt kapjuk, hogy

  $$x = \frac{\alpha - \beta}{f(v) - f(u)} + f(u) + f(v)$$

- $f(u) = 0$, akkor alkalmas $g \in \mathfrak{A}$ függvényre $g(u) \neq 0$. Ekkor pedig a

  $$h := \frac{\alpha}{g(u)} g + \frac{\beta g(u) - \alpha f(v)}{g(u) f(v)} f$$

  választás megfelelő.

1.1.66. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $a \in \mathcal{X}$ pont, ill. $U \in \mathcal{U}(a)$ nyílt halmaz esetén van olyan $U \supset V \in \mathcal{U}(a)$ nyílt halmaz, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $f \in \mathfrak{A}$ elemmel

1. $f(x) \in [0,1]$ $(x \in \mathcal{X})$;
2. $f(x) < \varepsilon$ $(x \in V)$;
3. $f(x) > 1 - \varepsilon$ $(x \in \mathcal{X} \backslash U)$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos (vö. 1.1.65. feladat), hogy bármely $v \in \mathcal{X}\backslash U$ ponthoz van olyan $h_v \in \mathfrak{A}$ függvény, hogy

$$h_v(v) = 1 \qquad \text{és} \qquad h_v(a) = 0.$$

A kompaktság következtében (vö. 1.1.58. feladat)

$$\|g\|_\infty := \sup\{|g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}\} < +\infty \qquad (g \in \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})),$$

így a

$$p_v := \frac{1}{\|h_v^2\|_\infty} \cdot h_v \in \mathfrak{A}$$

függvényre

$$p_v(v) > 0, \qquad p_v(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad p_v(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Ennélfogva az 1.1.21. feladat utáni megjegyzés értelmében az

$$U(v) := \{x \in \mathcal{X} : \ p_v(x) > 0\}$$

halmaz nyílt környezete a $v \in \mathcal{X}\backslash U$ pontnak. Ezért (vö. 1.1.54. feladat) $\mathcal{X}\backslash U$ kompakt, így alkalmas $m \in \mathbb{N}$, ill. $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{X}\backslash U$ esetén

$$\mathcal{X}\backslash U \subset U(v_1) \cup \ldots \cup U(v_m).$$

A

$$p := \frac{1}{m}\left(p_{y_1} + \ldots + p_{y_m}\right) \in \mathfrak{A}$$

függvényre szintén

$$p(x) > 0 \quad (x \in \mathcal{X}\backslash U), \qquad p(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad p(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Az $\mathcal{X}\backslash U$ halmaz kompaktságát ismét felhasználva elmondható, hogy (vö. 1.1.58. feladat) alkalmas $\delta \in (0,1)$ szám esetén

$$p(x) \geq \delta \qquad (x \in \mathcal{X}\backslash U).$$

Világos, hogy a

$$V := \{x \in \mathcal{X} : \ p(x) < \delta/2\}$$

halmaz nyílt környezete az a pontnak (1.1.21. feladat) és $V \subset U$.

2. lépés. Az iménti $\delta \in (0,1)$ szám esetén, ha

$$k := \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1,$$

akkor $1 < k\delta < 2$. Így a

$$q_n(x) := (1 - p^n(x))^{k^n} \qquad (x \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatra nyilvánvalóan

$$q_n \in \mathfrak{A}, \qquad q(a) = 1, \qquad q_n(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül, továbbá

$$kp(x) < k\frac{\delta}{2} < 1 \qquad (x \in V).$$

Ezért a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával tetszőleges $x \in V$ esetén fennállnak az

$$1 \geq q_n(x) > 1 - k^n p^n(x) = 1 - (kp(x))^n \geq \left(k\frac{\delta}{2}\right)^n$$

becslések. Így $k\delta/2 < 1$ következtében V-n

$$q_n \rightrightarrows 1 \qquad (n \to \infty).$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség ismételt felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{X}\backslash U$ esetén

$$\begin{aligned}
0 \leq q_n(x) &= \frac{1}{k^n p^n(x)} \left(1 - p^n(x)\right)^{k^n} k^n p^n(x) \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{kp(x)}\right)^n \left(1 - p^n(x)\right)^{k^n} \left(1 + k^n p^n(x)\right) \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{kp(x)}\right)^n \left(1 - p^n(x)\right)^{k^n} \left(1 + k^n p^n(x)\right)^{k^n} = \\
&= \left(\frac{1}{kp(x)}\right)^n \left(1 - p^{2n}(x)\right)^{k^n} \leq \left(\frac{1}{k\delta}\right)^n .
\end{aligned}$$

Ezért – felhasználva, hogy $k\delta/2 < 1$ –, azt kapjuk, hogy $\mathcal{X}\backslash U$-n

$$q_n \rightrightarrows 0 \qquad (n \to \infty).$$

3. lépés. A (q_n) függvénysorozat egyenletes konvergenciája következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy ha $N \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$q_n(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X}), \qquad q_n < \varepsilon \quad (x \in \mathcal{X}\backslash U), \qquad q_n > 1 - \varepsilon \quad (x \in V).$$

Így elegendően nagy n index esetén az

$$f := 1 - q_n$$

függvény megfelelő. ■

1.1.67. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$: $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathcal{F}$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $f \in \mathfrak{A}$ függvény, hogy

1. $f(x) \in [0,1]$ $(x \in \mathcal{X})$;
2. $f(x) < \varepsilon$ $(x \in A)$;
3. $f(x) > 1 - \varepsilon$ $(x \in B)$

teljesül!

Útm. Ha

$$U := \mathcal{X} \backslash B,$$

akkor bármely $v \in A$ esetén van v-nek $V(v)$ nyílt környezete (vö. 1.1.66. feladat útmutatója). Így (vö. 1.1.54. feladat) alkalmas $m \in \mathbb{N}$, ill. $v_1, \ldots, v_m \in A$ esetén

$$A \subset V := V(v_1) \cup \ldots \cup V(v_m).$$

Tetszőleges $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén $V(v_i)$ megválasztása következtében (vö. 1.1.66. feladat) van olyan $f_i \in \mathfrak{A}$, hogy

$$f_i(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X}), \qquad f_i(x) < \frac{\varepsilon}{m} \quad (x \in V(v_i)), \qquad f_i(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{m} \quad (x \in \mathcal{X} \backslash U = B).$$

Így az

$$f := f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$$

függvényre

$$f(x) \in [0,1] \quad (x \in \mathcal{X}), \qquad f(x) < \frac{\varepsilon}{m} \leq \varepsilon \quad (x \in V \supset A),$$

teljesül, és a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$f(x) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^m \geq 1 - \varepsilon \qquad (x \in B). \quad \blacksquare$$

1.1.9. Baire-terek

1.1.24. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **(mindenütt) sűrű** ($\mathcal{X}$-ben), ha $\overline{A} = \mathcal{X}$.

Mivel $\overline{A}$ nem más, mint A érintkezési pontjainak halmaza, ezért A pontosan akkor lesz mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben, ha $\mathcal{X}$ bármely nem-üres nyílt halmaza tartalmaz A-beli elemet.

1.1.31. példa. Mivel minden intervallumban van racionális, ill. irracionális szám, ezért a racionális, ill. az irracionális számok halmaza mindenütt sűrű halmazt alkot a valós számok terében:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \overline{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

1.1.25. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **sehol sem sűrű** ($\mathcal{X}$-ben), ha $\overline{A}$-nak nincsen nem-üres nyílt része: $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

1.1.32. példa. $\mathbb{R}$-ben (a szokásos topológiát feltételezve) sehol sem sűrű pl.

1. minden véges halmaz vagy az egész számok halmaza;
2. $\mathbb{N}^{-1} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\}$, ui.

$$\operatorname{int}(\overline{\mathbb{N}^{-1}}) = \operatorname{int}(\mathbb{N}^{-1} \cup \{0\}) = \emptyset.$$

Világos (vö. 1.1.12/4. feladat), hogy bármely $A \in \mathcal{F}$ (zárt) halmaz esetén A pontosan akkor lesz sehol sem sűrű, ha

$$\operatorname{int}(A) = \emptyset$$

teljesül.

1.1.68. feladat. Mutassuk meg, hogy valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor lesz sehol sem sűrű $\mathcal{X}$-ben, ha

$$\forall\, N \in \mathcal{G}\backslash\{\emptyset\} \;\; \exists M \in \mathcal{G}\backslash\{\emptyset\} : \quad M \subset N, \; M \cap A = \emptyset,$$

azaz ha $\mathcal{X}$ bármely nem-üres nyílt részhalmaza tartalmaz olyan nem-üres nyílt részhalmazt, amelynek nincsen A-beli pontja!

Útm.

1. lépés. Ha A sehol sem sűrű, akkor $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$, azaz $\overline{A}$-nak nincsen belső pontja, ezért tetszőleges $\emptyset \neq N \in \mathcal{G}$ halmazzal $N \not\subset \overline{A}$, tehát

$$N \cap \overline{A}^c \neq \emptyset.$$

Ha pl.

$$x \in N \cap \overline{A}^c,$$

akkor $N \cap \overline{A}^c$ nyíltsága miatt alkalmas $x \in M \in \mathcal{G}$ halmazzal

$$M \subset N \cap \overline{A}^c.$$

Ez azt jelenti, hogy M olyan nem-üres nyílt része N-nek, amelyre

$$M \cap A = \emptyset \quad /M \subset \overline{A}^c \subset A^c/\,.$$

2. lépés. Ha $\mathcal{X}$ bármely nem-üres nyílt részhalmazának van olyan nem-üres nyílt részhalmaza, amelynek nincsen A-beli pontja, akkor $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Ellenkező esetben alkalmas $y \in \operatorname{int}(\overline{A})$ esetén egy y-t tartalmazó (így nem-üres) N nyílt halmaz is $\overline{A}$-ban volna, így N bármely nem-üres, nyílt M részhalmaza tartalmazna A-beli elemet (ui. M tartalmazza A egy érintkezési pontját), ami nem lehetséges. ■

1.1.69. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor lesz sehol sem sűrű $\mathcal{X}$-ben, ha $\overline{A}^c$ mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben!

Útm. Mivel

$$\mathrm{int}\,(\overline{A}) = \mathcal{X}\backslash\overline{\mathcal{X}\backslash\overline{A}},$$

(vö. 1.1.9. feladat), ezért A sehol sem sűrűsége (azaz $\mathrm{int}\,(\overline{A}) = \emptyset$) egyenértékű azzal, hogy $\overline{\mathcal{X}\backslash\overline{A}} = \mathcal{X}$, ami azt jelenti, hogy

$$\overline{A}^c = \mathcal{X}\backslash\overline{A}$$

mindenütt sűrű. ■

1.1.70. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében, ha az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz

1. nyílt és mindenütt sűrű, akkor A^c zárt és sehol sem sűrű;
2. zárt és sehol sem sűrű, akkor A^c nyílt és mindenütt sűrű!

Útm.

1. Ha $A \in \mathcal{G}$ és $\overline{A} = \mathcal{X}$, akkor persze $A^c \in \mathcal{F}$ és mivel

   $$\mathcal{X} = \overline{A} = \overline{\mathcal{X}\backslash A^c} = \overline{\mathcal{X}\backslash\overline{A^c}},$$

   ezért

   $$\mathrm{int}\,(A^c) = \mathrm{int}\,(\overline{A^c}) = \emptyset.$$

2. Ha $A \in \mathcal{F}$ és $\mathrm{int}\,(\overline{A}) = \emptyset$, akkor persze $A^c \in \mathcal{G}$ és

   $$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}\backslash\overline{A}} = \overline{\mathcal{X}\backslash A} = \overline{A^c}. \quad ■$$

1.1.71. feladat. Mutassuk meg adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetében, ha

1. A mindenütt sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, akkor A^c sehol sem sűrű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz;
2. A sehol sem sűrű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, akkor A^c mindenütt sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz!

Útm.

1. Ha A mindenütt sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, akkor alkalmas

   $$A_n \in \mathcal{G}, \quad \overline{A_n} = \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   halmazsorozattal

   $$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

   így

   $$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

   sehol sem sűrű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz.

2. Ha sehol sem sűrű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, akkor alkalmas

$$A_n \in \mathcal{F}, \quad \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozattal

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

így

$$A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

mindenütt sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz. ■

1.1.72. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbb{R}^2$-et az **euklideszi topológiával** látjuk el, azaz valamely $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt akkor tekintünk nyíltnak, ha bármely $a \in A$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \rho^2((x, y), a) := (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \varepsilon^2\right\} \subset A,$$

akkor bármely $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonja sehol sem sűrű halmaz!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy a

$$G_f := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x) = y\right\}$$

halmazra $\overline{G_f} = G_f$. Világos, hogy $\overline{G_f} \supset G_f$, ezért a fordított irányú tartalmazáshoz tegyük fel, hogy

$$a := (u, v) \in \overline{G_f}.$$

Így $\overline{G_f}$ zártsága miatt (mint ahogy azt később látni fogjuk: vö. 1.2.30. feladat) alkalmas

$$a_n := (u_n, v_n) \in G_f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(a_n) = a$, azaz

$$\lim(u_n) = u \qquad \text{és} \qquad \lim(v_n) = v.$$

Az f folytonossága következtében

$$f(u) = \lim(f(u_n)) = \lim(v_n) = v,$$

ezért

$$a = (u, v) \in G_f,$$

ahonnan $\overline{G_f} \subset G_f$ következik.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén nincsen olyan

$$K(a,\varepsilon) := \left\{b \in \mathbb{R}^2 : \; \rho^2(a,b) < \varepsilon^2\right\}$$

halmaz, amelyre $K(a,\varepsilon) \subset G_f$. Ellenkező esetben ui. létezne olyan

$$L := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \; \alpha = u, \; v - \varepsilon < \beta < v + \varepsilon\right\} \subset K(a,\varepsilon)$$

hamaz, amelyre $L \subset G_f$ teljesülne, ami nem lehetséges, hiszen $\varepsilon > 0$ és f függvény. ■

1.1.73. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér, $A, B \subset \mathcal{X}$ sehol sem sűrű halmazok, akkor

$$A \cup B \subset \mathcal{X}$$

is sehol sem sűrű halmaz!

Útm. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq N \in \mathcal{G}$. Ekkor (vö. 1.1.68. feladat) alkalmas

$$\emptyset \neq M_A \in \mathcal{G}, \qquad \text{ill.} \qquad \emptyset \neq M_B \in \mathcal{G}$$

halmazzal

$$M_A \subset N, \; M_A \cap A = \emptyset, \qquad \text{azaz} \qquad M_A \subset N \backslash A,$$

ill.

$$M_B \subset M_A \backslash B \subset N \backslash (A \cup B), \qquad \text{azaz} \qquad M_A \cap (A \cup B) = \emptyset. \quad ■$$

Ez azt jelenti, hogy véges sok, sehol sem sűrű halmaz egyesítése sehol sem sűrű halmaz. Megszámlálható sok halmaz esetében ez már nem igaz. Előfordulhat ui., hogy sehol sem sűrű halmazok megszámlálható egyesítése mindenütt sűrű. Ilyen pl. a racionális számok halmaza, hiszen minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\{a\}$ sehol sem sűrű ($\mathbb{R}$-ben a szokásos topológiával), viszont

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \{a\}$$

mindenütt sűrű.

1.1.26. definíció. Adott $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ halmazt **első kategóriájú**nak nevezzük, ha A sehol sem sűrű ($\mathcal{X}$-beli) halmazok megszámlálható egyesítése:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{int}\,(\overline{A_n}) = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt mondjuk, hogy A **második kategóriájú**, ha nem első kategóriájú.

Ezt a két fogalmat még René Bair vezette be (vö. [3]). A **Bourbaki-csoport** azonban az első kategóriájú halmazok elnevezésére a – nyelvileg könnyeben kezelhető és kifejezőbb – *sovány* kifejezést javasolta.

1.1.33. példa.

1. Világos, hogy minden sehol sem sűrű halmaz első kategóriájú, ill. ha $A \subset \mathcal{X}$ zárt és $\mathrm{int}\,(A) = \emptyset$, akkor A első kategóriájú;
2. $\mathbb{R}$-ben (a szokásos topológiát feltételezve) minden, legfeljebb megszámlálható halmaz (így pl. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ill. $\mathbb{Q}$) első kategóriájú, hiszen $\mathbb{R}$ egyelemű részhalmazai sehol sem sűrűek.
3. Ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér T_1-tér és $\mathcal{X}$-ben nincsen izolált pont, akkor $\mathcal{X}$ minden, legfeljebb megszámlálható része első kategóriájú.
4. A racionális együtthatójú polinomok grafikonjainak egyesítése első kategóriájú $\mathbb{R}^2$-ben, hiszen $\mathbb{Q}$ megszámlálható és a polinomok folytonos függvények, így grafikonjaik sehol sem sűrűek $\mathbb{R}^2$-ben.

1.1.74. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha van olyan $A_n \in \mathcal{F}$, A_n sehol sem sűrű $(n \in \mathbb{N})$, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha A első kategóriájú, és

$$B_n \subset \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sehol sem sűrű halmazok olyan sorozata, amelyre

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

akkor a

$$\overline{B_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat mindegyik tagja sehol sem sűrű zárt halmaz, továbbá

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n},$$

azaz az

$$A_n := \overline{B_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

választás megfelelő.

2. lépés. Ha

$$A_n \subset \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sehol sem sűrű halmazok olyan sorozata, amelyre

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

akkor

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$$

és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A \cap A_n$$

sehol sem sűrű, tehát A első kategóriájú. ■

1.1.8. házi feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén

1. ha $A \subset B \subset \mathcal{X}$ és B első kategóriájú, akkor A is első kategóriájú;
2. első kategóriájú $\mathcal{X}$-beli halmazok minden megszámlálható egyesítése első kategóriájú;
3. ha $(\mathcal{Y}, \sigma)$ topologikus tér és $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ homeomorfizmus, úgy $A \subset \mathcal{X}$ pontosan akkor első kategóriájú /$(\mathcal{X}, \mathcal{G})$-ben/, ha $\varphi[A]$ első kategóriájú az $(\mathcal{Y}, \sigma)$ topologikus térben!

1.1.75. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\overline{A} = \mathbb{R}$ és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az A halmazon, akkor f szakadási helyeinek $\mathfrak{U}(f)$ halmaza első kategóriájú!

Útm. Világos, hogy

$$\mathfrak{U}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ahol

$$x \in A_n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\,(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \lim(x_k) = x, \ |f(x_k) - f(x)| > \frac{1}{n} \ \ (k \in \mathbb{N}).$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n sehol sem sűrű. Ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén A_N nem lenne sehol sem sűrű, akkor $\overline{A} = \mathbb{R}$ miatt lenne olyan $y_0 \in A$, hogy $f \in \mathfrak{C}[y_0]$ és y_0 érintkezési pontja volna A_N-nek (később látni fogjuk, hogy ekkor van A_N-ben y_0-hoz konvergáló sorozat), így alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$(y \in \mathbb{R}, \quad |y - y_0| < \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y) - f(y_0)| < \frac{1}{2N}$$

teljesülne és volna olyan $x_0 \in A_N$, hogy $|x_0 - y_0| < \delta$. Ha most a fenti (x_k) sorozatra $x_k \in A_N$ $(n \in \mathbb{N})$ és

$$\lim(x_k) = x_0,$$

akkor elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f(x_k) - f(x_0)| \le \underbrace{|f(x_k) - f(y_0)|}_{<\frac{1}{2N}} + \underbrace{|f(y_0) - f(x_0)|}_{<\frac{1}{2N}} < \frac{1}{N}.$$

Így elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f(x_k) - f(x_0)| > \frac{1}{N} \qquad \text{és} \qquad |f(x_k) - f(x_0)| < \frac{1}{N},$$

ami nem lehetséges. Ezért az $\mathfrak{U}(f)$ halmaz – mint sehol sem sűrű halmazok megszámlálható egyesítése – első kategóriájú. ■

1.1.76. feladat. Bizonyítsuk meg, hogy a valós számok halmaza egy (Lebesgue-)nullmértékű és egy első kategriájú halmaz egyesítése!

Útm. Ha

$$r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

bijektív sorozat, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(r_k - \frac{1}{n2^k}, r_k + \frac{1}{n2^k} \right)$$

halmaz nyílt (ui. nyílt halmazok egyesítése), mindenütt sűrű (ui. $\mathbb{Q} \subset G_n$), továbbá

$$\mu_1(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k+1}}{n} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{n},$$

ahol μ_1 jelöli az egydimenziós Lebesgue-mértéket. Ezért az

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

halmaz esetén $B := \mathbb{R} \backslash A$ első kategóriájú, hiszen

$$B = \mathbb{R} \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \backslash G_n),$$

és

$$\text{int}\,(\overline{\mathbb{R} \backslash G_n}) = \text{int}\,(\mathbb{R} \backslash G_n) = \mathbb{R} \backslash \overline{G_n} = \emptyset.$$

A nullmértékű, hiszen

$$\mu_1(A) \le \lim(\mu_1(G_n)) = 0$$

következtében $\mu_1(A) = 0$. ■

Megjegyezzük, hogy az iménti feladatbeli B halmaz sovány, de nem nullmértékű, elllenkező esetben ui.

$$+\infty = \mu_1(\mathbb{R}) = \mu_1(A) + \mu_1(B) = 0 + 0 = 0$$

teljesülne.

1.1.77. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér esetén valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz A^c komplementere pontosan akkor első kategóriájú, ha alkalmas

$$A_n \in \mathcal{G}, \qquad \overline{A_n} = \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(nyílt, mindenütt sűrű halmazokból álló) halmazsorozatra

$$A \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

teljesül!

Útm. Bármely $A \subset \mathcal{X}$ esetén A^c pontosan akkor lesz első kategóriájú, ha

$$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ahol

$$\operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ez pedig

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

miatt pontosan akkor teljesül, ha

$$A \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n,$$

ahol

$$N_n \in \mathcal{G}, \quad N_n \subset A_n, \quad \overline{N_n} = \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

1.1.78. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér esetében az alábbi négy állítás egyenértékű!

(1) Bármely $\emptyset \neq A \in \mathcal{G}$ halmaz második kategóriájú.

(2) Megszámlálható sok, nyílt, mindenütt sűrű halmaz metszete is mindenütt sűrű:

$$A_n \in \mathcal{G},\ \overline{A_n} = \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \mathcal{X}.$$

(3) Ha valamely $A \subset \mathcal{X}$ esetén A^c első kategóriájú, akkor $\overline{A} = \mathcal{X}$.

(4) Megszámlálható sok, zárt, sehol sem sűrű halmaz egyesítése is sehol sem sűrű:

$$A_n \in \mathcal{F},\ \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset.$$

Útm.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ha $\mathcal{X}$-ben minden nem-üres nyílt halmaz második kategóriájú, és az

$$A_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokra

$$\overline{A_n} = \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{de} \qquad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \mathcal{X},$$

akkor az

$$\emptyset \neq N \in \mathcal{G}, \qquad N \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \emptyset$$

halmazra $N \backslash A_n$ sehol sem sűrű (hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(N \backslash A_n)^c \supset A_n$$

és A_n nyílt, mindenütt sűrű),

$$N = N \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (N \backslash A_n),$$

így N nyílt és első kategóriájú, ami nem lehetséges.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ha bármely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz A^c komplementere első kategóriájú, és alkalmas

$$\emptyset \neq N \in \mathcal{G}$$

halmaz esetén $N \cap A = \emptyset$, akkor van olyan

$$D_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mindenütt sűrű halmazsorozat, amelyre

$$N \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

(vö. 1.1.77. feladat). Mivel $N \cap A = \emptyset$, ezért

$$N \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) = \emptyset.$$

Mivel

$$D_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mindenütt sűrű halmazsorozat, így ha

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

is sűrű, akkor

$$N \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \neq \emptyset,$$

ami nem lehetséges. Így nincsen olyan nem-üres, nyílt N halmaz, amely ne tartalmazna A-beli elemet, azaz A mindennütt sűrű.

(3) $\Rightarrow$ (4): Tegyük fel, hogy

$$A_n \in \mathcal{F}: \quad \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és bármely $\mathcal{X}$ bármely részhalmazának komplementere első kategóriájú, továbbá

$$\operatorname{int}\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \neq \emptyset.$$

Ekkor alkalmas

$$\emptyset \neq N \in \mathcal{G}$$

halmazzal

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

így

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

nem mindenütt sűrű. Mivel

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

első kategóriájú (hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n zárt, $\operatorname{int}(A_n) = \emptyset$, tehát A_n^c nyílt és mindenütt sűrű, így A_n sehol sem sűrű), ezért

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

mindenütt sűrű, ami nem lehetséges, ahonnan

$$\operatorname{int}\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \emptyset$$

következik.

(4) $\Rightarrow$ (1): Ha minden megszámlálható sok zárt, sehol sem sűrű $\mathcal{X}$-beli részhalmaz egyesítése is sehol sem sűrű, és az

$$\emptyset \neq N \in \mathcal{G}$$

halmaz első kategóriájú, azaz alkalmas

$$A_n \subset \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sehol sem sűrű halmazokkal

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

, akkor

$$\operatorname{int}\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \emptyset.$$

Így, mivel

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

nem-üres és nyílt, ezért

$$\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset,$$

ami nem lehetséges. Tehát N nem lehet első kategóriájú. ■

1.1.79. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a valós számok halmaza a szokásos topológával ellátva második kategóriájú!

Útm. Tegyük fel – az állítással ellentétben –, hogy $\mathbb{R}$ első kategóriájú, azaz alkalmas sehol sem sűrű

$$A_n \subset \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

tagokból álló halmazsorozatra

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

teljesül. Az 1.1.78. feladatbeli **(3)** állítás következményeként elegendő belátni, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}$ első kategóriájú halmazra A^c sűrű $\mathbb{R}$-ben. Mivel A_1 sehol sem sűrű:

$$\mathrm{int}\,(\overline{A_1}) = \emptyset,$$

így bármely $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset \overline{A_1}.$$

Ezért van olyan

$$x_1 \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \qquad \text{és} \qquad 0 < \varepsilon_1,$$

hogy

$$B_1 := [x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\backslash\overline{A_1}.$$

Mivel A_2 sehol sem sűrű:

$$\mathrm{int}\,(\overline{A_2}) = \emptyset,$$

így

$$B_1 \not\subset \overline{A_2},$$

ezért alkalmas

$$x_2 \in (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \qquad \text{és} \qquad 0 < \varepsilon_2$$

esetén

$$B_2 := [x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2] \subset B_1\backslash\overline{A_2}.$$

Teljes indukcióval így egy egymásba skatulyázott (antiton) kompakt intervallumokból álló,

$$B_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozathoz jutunk. Az elemi analízisből ismeretes Cantor-féle közösrész-tétel szerint ekkor

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Így alkalmas $b \in B$ esetén egyrészt

$$b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon),$$

másrészt pedig

$$b \notin A_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz $b \notin A$, ahonnan

$$b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A^c$$

következik. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén x érintjezési pontja A^c-nek, azaz A^c mindenütt sűrű. ■

Az 1.1.8. házi feladatbeli 3. állítás következményeként azt kapjuk, hogy ha $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával látjuk el, akkor az irracionális számok $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ halmaza második kategóriájú, hiszen ellenkező esetben

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

is első kategóriájú lenne (vö. 1.1.33/1. példa), ami nem lehetséges (vö. 1.1.79. feladat).

1.1.27. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér **Baire-tér**, ha az 1.1.78. feladatbeli állítások közül valamelyik teljesül.

1.1.34. példa.

1. Ha $\mathcal{X}$ véges halmaz, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér Baire-tér, hiszen ekkor $\mathcal{G}$ is véges, és véges sok, mindenütt sűrű, nyílt halmaz metszete mindenütt sűrű.
2. A szokásos topológiával ellátva $\mathbb{Q}$ nem Baire-tér, hiszen az egy pontból álló halmazok megszámlálható egyesítése.

Világos, hogy ha az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér Baire-tér, akkor $\mathcal{X}$ – mint nyílt halmaz – második kategóriájú. Ez azt jelenti, hogy ha valamely

$$A_n \in \mathcal{F} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\operatorname{int}(A_N) \neq \emptyset.$$

1.1.80. feladat. Valamely $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ topologikus tér és $\mathcal{T} := \mathcal{G}\backslash\{\emptyset\}$ ismeretében két játékos a következő játékot játssza. Váltakozva választanak egy $\mathcal{T}$-beli halmazt úgy, hogy bármely játékos által választott halmaz része kell, hogy legyen az ellenfél előtte választott halmazának. A B játékos kezd és így azt választ, amit akar. A játék tehát valamely

$$H_n \supset H_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

antiton halmasorozatból áll. A B játékos pontosan akkor nyer, ha

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \emptyset$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ha B-nek nincsen nyerő stratégiája, akkor $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ Baire-tér! Nyerő stratégián a (H_1, f) párt értjük, ahol $H_1 \in \mathcal{T}$,

$$f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

pedig olyan függvény, hogy

- $f(H) \subset H$ $(H \in \mathcal{T})$;
- bármely $H_2, H_4, H_6 \ldots \in \mathcal{T}$:

$$H_1 \supset H_2 \supset H_3 = f(H_2) \supset H_4 \ldots$$

  halmazsorozat esetén

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \emptyset$$

(**Banach-Mazur-játék**).

Útm. Ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ nem Baire-tér, akkor alkalmas

$$A_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra

$$\overline{A_n} = \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \mathcal{X},$$

így van olyan

$$\emptyset \neq H_1 \in \mathcal{G}$$

halmaz, hogy

$$H_1 \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Ha

$$f : \{H_2, H_4, H_6, \ldots\} \to \mathcal{T}, \qquad f(H_{2n}) := H_{2n} \cap A_n,$$

akkor, lévén, hogy

$$H_{2n} \in \mathcal{G}, \qquad A_n \in \mathcal{G} \qquad \text{és} \qquad \overline{A_n} = \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

a

$$H_{2n} \cap A_n$$

halmaz nem-üres és nyílt:

$$\emptyset \neq H_{2n} \cap A_n \in \mathcal{G} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A (H_n) sorozat antiton tulajdonsága következtében

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n \subset H_1 \cap \left[\bigcap_{n=2}^{\infty} (H_{2n} \cap A_n)\right] \subset H_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset. \quad \blacksquare$$

1.1.81. feladat. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ nem $\mathcal{G}_\delta$-halmaz $\mathbb{R}$-ben, az irracionális számok viszont $\mathcal{G}_\delta$-halmazt alkotnak $\mathbb{R}$-ben!

Útm.

1. lépés. Mivel

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

így, ha a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza $\mathcal{G}_\delta$-halmaz volna $\mathbb{R}$-ben, akkor az irracionális számok $\mathbb{Q}^c$ halmaza sehol sem sűrű $\mathcal{F}_\sigma$-halmazt alkotna, amiből

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} \cup \mathbb{Q}^c$$

következne, azaz $\mathbb{R}$ lefedhető lenne megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmazokból álló rendszerrel. Ez azonban nem lehetséges (vö. 1.1.79. feladat).

2. lépés. Az

$$R(x) := \begin{cases} 1/q & (x \in \mathbb{Q},\ q = \min\{n \in \mathbb{N} :\ nx \in \mathbb{Z}\}), \\ \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Riemann-függvény esetében

$$\mathfrak{U}(f) = \mathbb{Q}, \qquad \text{így} \qquad \mathfrak{C}(f) = \mathbb{Q}^c,$$

és a $\mathfrak{C}(f)$ halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz (vö. 1.1.16. feladat). $\blacksquare$

1.1.82. feladat. Igazoljuk, hogy nincsen olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos!

Útm. A $\mathfrak{C}(f)$ halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz (vö. 1.1.16. feladat) és $\mathbb{Q}$ nem $\mathcal{G}_\delta$-halmaz $\mathbb{R}$-ben. $\blacksquare$

1.2. Metrikus terek

1.2.1. A metrikus tér fogalma. Példák

1.2.1. definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{X}$ halmaz esetén az $(\mathcal{X}, \rho)$ rendezett párt **félmetrikus tér**nek nevezzük, ha ρ **félmetrika** ($\mathcal{X}$-en), azaz $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

(M1) $\rho(x, y) \geq 0$ és $\rho(x, x) = 0$ $(x, y \in \mathcal{X})$;

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $(x, y \in \mathcal{X})$;

(M3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ $(x, y, z \in \mathcal{X})$.

Ha még

(M1′) $\rho(x, y) > 0$ $(x, y \in \mathcal{X} : x \neq y)$

is teljesül, akkor ρ-t **metrikának** (**távolságfüggvény**nek), ill. $(\mathcal{X}, \rho)$-t **metrikus tér**nek nevezzük. $\mathcal{X}$ elemeit **pont**oknak, a $\rho(x, y)$ nemnegatív számot pedig az x és y pontok **távolság**ának hívjuk. Az **(M1)** – **(M3)**, ill. az **(M1+1′)** – **(M3)** tulajdonságok a félmetrika, ill. a metrika **alaptulajdonság**ai (axiómái). Az **(M1)**, ill. az **(M1′)** a félmetrika, ill. a metrika **pozitív szemidefinit**, ill. **pozitív definit** tulajdonságát, az **(M2)** a (fél)metrika **szimmetriáját** fejezi ki, az **(M3)** pedig az ún. **háromszög-egyenlőtlenség**.

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor félmetrikus tér is egyben, így a félmetrikus terekre vonatkozó állítások metrikus terekre is érvényesek.

1.2.1. példa. Az abszolútértékre vonatkozó elemi állítások felhasználásával belátható, hogy a

$$\rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{K})$$

függvény metrika.

1.2.2. példa. Bármely $\emptyset \neq \mathcal{X}$ halmaz esetén megadható olyan $\rho : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus, ill. metrikus tér, hiszen a

$$\rho_{\text{indiszkr}}(x, y) := 0 \quad (x, y \in \mathcal{X}), \qquad \text{ill. a} \qquad \rho_{\text{diszkr}}(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ \\ 0 & (x = y) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

függvény félmetrika, ill. metrika $\mathcal{X}$-en (**indiszkrét félmetrika**, ill. **diszkrét metrika**).

Nem nehéz igazolni, hogy az indiszkrét félmetrika pontosan akkor lesz metrika, ha $\mathcal{X}$ egyelemű halmaz.

Az alábbi példák igen fontos szerepet játszanak az analízisben.

1.2.3. példa.

1. Ha $\emptyset \neq H$ tetszőleges halmaz, akkor $(\mathcal{K}(H), \rho_\infty)$ metrikus tér, ahol
$$\mathcal{K}(H) := \mathcal{K}(H, \mathbb{K}) := \left\{ f : H \to \mathbb{K} : \sup_H |f| < +\infty \right\}$$
(H-n értelmezett **korlátos függvény**ek halmaza), ill.
$$\rho_\infty(f, g) := \sup_H |f - g| \qquad (f, g \in \mathcal{K}(H)).$$
2. $\mathcal{X} := \mathbb{K}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ és $p \in [1, +\infty)$ esetén
$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \qquad \left(x := (x_1, \ldots, x_d),\ y := (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d\right)$$
metrika $\mathcal{X}$-en ($p = 1$ esetén **Minkowski-metrika**, $p = 2$ esetén **euklideszi metrika**, ill.
$$\rho_\infty(x, y) := \max\left\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} :\ k \in \{1, \ldots, d\}\right\} \quad \left(x, y \in \mathbb{K}^d\right)$$
esetén **Csebisev-metrika**).
3. A korlátos sorozatok
$$l_\infty := \mathcal{K}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$
halmazán metrika a
$$\rho_\infty(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| \qquad (x = (x_n),\ y = (y_n) \in l_\infty)$$
függvény.

1.2.1. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy az 1.2.3. példabeli függvények valóban metrikák!

Útm.

1.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $d \in \mathbb{N}$ és $x, y \in \mathbb{K}^d$ esetén teljesül a

$$\rho_\infty(x, y) = \lim_{p \to +\infty} (\rho_p(x, y))$$

határérték-reláció!

Útm. Mivel bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\begin{aligned}
(\max\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\})^p &= \max\{|x_k - y_k|^p \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p \leq \\
&\leq d \cdot \max\{|x_k - y_k|^p \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} = \\
&= d \cdot (\max\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\})^p,
\end{aligned}$$

ezért

$$\rho_\infty(x, y) \leq \rho_p(x, y) \leq d^{1/p} \cdot \rho_\infty(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{K}^d),$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. ■

A **relativitáselmélet**ben használatos ún.

$$f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - cx_4y_4$$

Minkowski-metrikának nevezett függvény nem metrika, ahol $c :=$ a fény sebessége vákuumban, hiszen pl. az $x := (1{,}0{,}0{,}1)$ vektorra $f(x, x) = 1 - c \neq 0$.

1.2.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a metrikus tér definíciójában szereplő $(M1 + 1') - (M3)$ tulajdonságok függetlenek!

Útm. A $\rho_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ euklideszi metrika esetén a

$$d_1(x, y) := \rho_2(x, y) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló első tulajdnság nem teljesül, a másik kettő igen. A

$$d_2(x, y) := \begin{cases} |x| - |y| & (|x| > |y|), \\ \\ |x - y| & (|x| \leq |y|) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló második tulajdnság nem teljesül, a másik kettő igen, ahol tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}.$$

A

$$d_3(x, y) := \begin{cases} \rho_2(x, y) & (\rho_2(x, y) \leq 1), \\ \\ 2\rho_2(x, y) & (\rho_2(x, y) > 1) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló harmadik tulajdonság nem teljesül, a másik kettő igen. ■

1.2.3. feladat. Adott $\emptyset \neq \mathcal{X}$ halmaz és $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény esetén mutassuk meg, hogy ρ pontosan akkor metrika, ha minden $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x,y) = 0 \iff x = y \qquad \text{és} \qquad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy ha ρ metrika, akkor teljesül a két állítás. Ha bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

- $x = y$, akkor $2\rho(x,z) \geq \rho(x,x) = 0$, és így ρ értékei nemnegatív számok;
- ha most $z = x$, akkor $\rho(x,y) \leq \rho(y,x)$, majd x és y szerepét felcserélve $\rho(y,x) \leq \rho(x,y)$ adódik, amiből $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ következik. ■

1.2.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) := \begin{cases} |x-y| & (\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \quad x = \lambda y \ \text{ vagy } \ y = \lambda x), \\ \\ |x| + |y| & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

függvény metrika (**vasutas metrika**)!

Útm.

1.2.3. gyakorló feladat. Igaz-e, hogy az alábbi $\mathcal{X}$ halmaz és ρ függvény esetében az $(\mathcal{X}, \rho)$ rendezett pár metrikus tér?

1. $\mathcal{X} := \mathfrak{C}(0,1)$,

$$\rho(f,g) := \sup\{|f(t) - g(t)| \in \mathbb{R} : \ t \in (0,1)\} \qquad (f, g \in \mathcal{X});$$

2. $\mathcal{X}$ tetszőleges nem-üres halmaz, $d : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$ metrika,

$$\rho(x,y) := \min\{1, d(x,y)\} \qquad (x, y \in \mathcal{X});$$

3. $\mathcal{X} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ polinom}\}$,

$$\rho(x,y) := |p(0) + p'(1) - q(0) - q'(1)| \qquad (p, q \in \mathcal{X});$$

4. $\mathcal{X} := \left\{n \in \mathbb{Z} : \ -n \in \mathbb{N}, \ \left|\frac{1}{n} - 1\right| < 1\right\}$,

$$\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) := |e^x - e^y|.$$

Útm.

1.2.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér, akkor bármely

1. $x, y, u, v \in X$ esetén
$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, v)$$
(**négyszög-egyenlőtlenség**);
2. $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén
$$|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leq \rho(y, z)$$
(a háromszög-egyenlőtlenség egy változata);
3. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n \in X$
$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(z_i, z_{i+1}) + \rho(z_n, y)$$
(**sokszög-egyenlőtlenség**)!

Útm.

1. A háromszög-egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával
$$\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y) \qquad (x, y, u, v \in \mathcal{X}),$$
azaz
$$\rho(x, y) - \rho(u, v) \leq \rho(x, u) + \rho(v, y) \qquad (x, y, u, v \in \mathcal{X})$$
adódik. Az x és az u, valamint az y és a v szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy
$$\rho(u, v) - \rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(y, v) = \rho(x, u) + \rho(v, y) \qquad (x, y, u, v \in \mathcal{X}).$$
Ez utóbbi két egyenlőtlenségből következik az állítás.
2. Az imént bizonyított egyenlőtlenségből következik az $u := x$ és a $v := z$ választással.
3. Az $n = 2$ esetben a háromszög-egyenlőtlenség kérszeri alkalmazásával kapjuk, hogy
$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z_1) + \rho(z_1, y) \leq \rho(x, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, y).$$
Ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás és $z_{n+1} \in \mathcal{X}$, akkor
$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(z_i, z_{i+1}) + \rho(z_n, y) \leq \\ &\leq \rho(x, z_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(z_i, z_{i+1}) + \rho(z_n, z_{n+1}) + \rho(z_{n+1}, y) = \\ &= \rho(x, z_1) + \sum_{i=1}^{n} \rho(z_i, z_{i+1}) + \rho(z_{n+1}, y). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.5. feladat. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, amelyre

$$f(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'(t) > 0,\ f''(t) \leq 0 \quad (t > 0)$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathcal{X},\ f \circ \rho)$ is metrikus tér!

Útm.

1. lépés. Mivel

$$f'(t) > 0 \qquad (t > 0),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő a $[0, +\infty)$ intervallumon, így $f(0) = 0$ következtében

$$f(t) \geq 0 \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Így bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) \geq 0.$$

Továbbá

$$(f \circ \rho)(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

hiszen egyrészt

$$\rho(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

másrészt pedig

$$f(0) = 0$$

és f szigorúan monoton növekedő a $(0, +\infty)$ intervallumon.

2. lépés. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén – felhasználva ρ szimmetrikusságát –

$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) = f(\rho(y, x)) = (f \circ \rho)(y, x),$$

azaz $f \circ \rho$ szimmetrikus.

3. lépés. Ha $x, y, z \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned}
&(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) \leq f(\rho(x, z) + \rho(z, y)) = \\
= \quad & f(\rho(x, z)) + \int_{\rho(x,z)}^{\rho(x,z)+\rho(z,y)} f'(t)\, dt = f(\rho(x, z)) + \int_0^{\rho(z,y)} f'(\underbrace{s + \rho(x, z)}_{\geq s})\, ds \leq \\
\leq \quad & f(\rho(x, z)) + \int_0^{\rho(z,y)} f'(s)\, ds = f(\rho(x, z)) + f(\rho(z, y)) = (f \circ \rho)(x, z) + (f \circ \rho)(z, y). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2.4. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\rho(x,y) := \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

leképezés metrika!

Útm.

1.2.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & (x\geq 0), \\ 5x-2 & (x<0) \end{cases}$$

akkor a

$$\rho_f(x,y) := |f(x)-f(y)| \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvény metrika $\mathbb{R}$-en!

Útm. Az abszolútérték-függvény tulajdonságai következtében ρ_f szemidefinit és szimmetrikus, továbbá tetszőleges $x,y,z\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \rho_f(x,y) &= |f(x)-f(y)| = |f(x)-f(z)+f(z)-f(y)| \leq |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)| = \\ &= \rho_f(x,z)+\rho_f(z,y). \end{aligned}$$

Ha valamely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén $\rho_f(x,y)=0$, akkor

$$f(x)=f(y)$$

és f injektivitása következtében $x=y$, azaz ρ_f definit. ■

1.2.5. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő függvény, akkor az

$$\rho_f(x,y) := |f(x)-f(y)| \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

függvény metrika!

Útm.

Így pl. metrikák $\mathbb{R}$-en az alábbi leképezések:

$$\rho(x,y) := |\mathrm{arctg}\,(x) - \mathrm{arctg}\,(y)| \qquad (x,y\in\mathbb{R}),$$

$$\rho(x,y) := |e^x - e^y| \qquad (x,y\in\mathbb{R}),$$

ill.

$$\rho(x,y) := |\sin(x)-\sin(y)| \qquad (x,y\in[-1,1]).$$

1.2.7. feladat. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

- f monoton növő,
- $f(t) = 0 \iff t = 0$,
- $f(s+t) \leq f(s) + f(t) \quad (s, t \in [0, +\infty))$.

Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathcal{X},\ f \circ \rho)$ is metrikus tér!

Útm. Az első, a második, ill. a $D_f = [0, +\infty)$ tulajdonság következménye, hogy ha $t \in [0, +\infty)$, akkor $f(t) \geq 0$. Minden x, y, z esetén

- $f \circ \rho$ pozitív definit:
$$(f \circ \rho)(x, y) \geq 0$$
és
$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) = 0 \qquad \iff \qquad \rho(x, y) = 0 \qquad \iff \qquad x = y;$$
- $f \circ \rho$ szimmetrikus:
$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) = f(\rho(y, x)) = (f \circ \rho)(y, x);$$
- $f \circ \rho$-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:
$$\begin{aligned}(f \circ \rho)(x, y) \quad &= \quad f(\rho(x, y)) \leq f(\rho(x, z) + \rho(z, y)) \leq \\ &\leq \quad f(\rho(x, z)) + f(\rho(z, y)) = (f \circ \rho)(x, z) + (f \circ \rho)(z, y). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

1.2.6. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$f(x) := \begin{cases} -1 & (x = -\infty)\,, \\ \dfrac{x}{1 + |x|} & (x \in \mathbb{R})\,, \\ 1 & (x = +\infty) \end{cases}$$

akkor a

$$\rho(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad \left(x, y \in \overline{\mathbb{R}}\right)$$

függvény metrika $\overline{\mathbb{R}}$-on!

Útm.

1.2.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \in (0, +\infty)$, $\mu \in (0,1]$ esetén az

1. $f(x) := x^{\mu} \quad (x \in [0, +\infty))$
2. $f(x) := \dfrac{x}{1 + x} \quad (x \in [0, +\infty))$,
3. $f(x) := \ln(1 + x) \quad (x \in [0, +\infty))$
4. $f(x) := \min\{a, x\} \quad (x \in [0, +\infty))$

függvények eleget tesznek az 1.2.7. feladat feltételeinek!

1.2.7. gyakorló feladat. Döntsük el, hogy metrikák-e a $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények!

1. $\rho(x,y) := |x-y|^p \ (x,y \in \mathbb{R},\ p \geq 0)$;
2. $\rho(x,y) := \cos^2(x-y)\ (x,y \in \mathbb{R})$;
3. $\rho(x,y) := |\ln(x/y)|\ (0 < x,y \in \mathbb{R})$.

Útm.

1.2.8. gyakorló feladat. Döntsük el, hogy metrikák-e a $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények!

1. $\rho(x,y) := (x-y)^2$; 2. $\rho(x,y) := \sqrt{|x-y|}$; 3. $\rho(x,y) := |x^2 - y^2|$;
4. $\rho(x,y) := |x-2y|$; 5. $\rho(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$; 6. $\rho(x,y) := |x^n - y^n|\ \ (n \in \mathbb{N})$;
7. $\rho(x,y) := |a^x - a^y|$; $(a > 1)$; 8. $\rho(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|^2}$.

Útm.

1.2.9. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 1 & (x_1 \neq y_1), \\ \min\{1, |x_2 - y_2|\} & (x_1 = y_1) \end{cases} \qquad \left(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény metrika!

Útm.

1.2.10. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy

1. ha $\emptyset \neq \mathcal{X}$ véges halmaz, akkor a

$$\rho_H(x,y) := |\{k \in \{1,2,\ldots,n\} :\ x_k \neq y_k\}| \qquad (x,y \in \mathcal{X}^n)$$

függvény metrika (**Hamming-metrika**);

2. ha $\mathcal{X} = \mathbb{R} \times [0,1]$ és bármely $(x,y),(u,v) \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho((x,y),(u,v)) := \begin{cases} |y-v| & (x = u), \\ |x-u| + y + v & (x \neq u), \end{cases}$$

akkor ρ metrika (**szögesdrót-metrika**)!

Útm.

1.2.2. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ és bármely $(x_n), (y_n) \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho((x_n),(y_n)) := \begin{cases} 0 & (x_n = y_n \ (n \in \mathbb{N})), \\ \dfrac{1}{\min\{n \in \mathbb{N}: \ x_n \neq y_n\}} & (\text{egyébként}), \end{cases}$$

akkor ρ metrika (**Baire-metrika**)!

1.2.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ és bármely $(x_n), (y_n) \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho((x_n),(y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

akkor ρ metrika!

Útm. Világos, hogy

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{így} \qquad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \in \mathbb{R},$$

sőt az is látható, hogy

$$\rho((x_n),(y_n)) = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n = y_n$. Az abszolútérték-függvény homogenitásából következik ρ szimmetriája. A háromszög-egyenlőtlenség pedig a következő módon látható be. Ha $(z_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, akkor

$$\begin{aligned} & (1 + |y_n - z_n|)(1 + |x_n - z_n|)|x_n - y_n| + (1 + |x_n - y_n|)(1 + |x_n - z_n|)|y_n - z_n| = \\ = \ & |x_n - y_n| + |y_n - z_n| + 2|x_n - y_n||y_n - z_n| + |x_n - z_n||x_n - y_n| + |x_n - z_n||y_n - z_n| + \\ & +2|x_n - y_n||y_n - z_n||x_n - z_n| \geq \\ \geq \ & |x_n - z_n| + |x_n - z_n||x_n - y_n| + |x_n - z_n||y_n - z_n| + |x_n - y_n||y_n - z_n||x_n - z_n| = \\ = \ & |x_n - z_n| (1 + |x_n - y_n|)(1 + |y_n - z_n|). \end{aligned}$$

Így

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|} \geq \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\rho((x_n),(y_n)) + \rho((y_n),(z_n)) \geq \rho((x_n),(z_n))$$

következik. ■

1.2.3. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,+\infty)$ és bármely $f,g \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho\,(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \max\left\{\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \in \mathbb{R} :\ x \in [0,n]\right\},$$

ill.

$$\widetilde{\rho}\,(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \min\left\{1, \max\left\{|f(x)-g(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,n]\right\}\right\},$$

akkor ρ, ill. $\widetilde{\rho}$ metrika!

1.2.11. gyakorló feladat. Milyen tulajdonságú $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén lesz a

$$\rho(x,y) := |f(x)-f(y)| \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

leképezés metrika $\mathbb{R}$-en?

Útm.

1.2.4. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $2 \leq d \in \mathbb{N}$, $\infty \notin \mathbb{R}^d$, továbbá

$$\tau : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \longrightarrow \left\{y \in \mathbb{R}^{d+1} :\ \left|y - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\right\},$$

$$\tau(x) := \begin{cases} \dfrac{(x,|x|^2)}{1+|x|^2} & (x \in \mathbb{R}^d), \\[2ex] (0,1) & (x = \infty), \end{cases}$$

akkor a

$$\rho(x,y) := |\tau(x)-\tau(y)| \qquad \left(x,y \in \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}\right)$$

leképezés metrika!

A fenti τ leképezés inverzét: τ^{-1}-et szokás **sztereografikus projekció**nak nevezni.

1.2.12. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\rho)$ félmetrikus tér, $\emptyset \neq \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, akkor a

$$\rho|_{\mathcal{Y}} := \rho|_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \rho(x,y)$$

függvény félmetrika $\mathcal{Y}$-on, és $\rho|_{\mathcal{Y}}$ pontosan akkor metrika, ha ρ is metrika!

Útm.

Az $(\mathcal{Y},\rho|_{\mathcal{Y}})$ (fél)metrikus teret az $(\mathcal{X},\rho)$ (fél)metrikus tér **alterének** is szokás nevezni. Az egyszerűség kedvéért sok esetben $\rho|_{\mathcal{Y}}$ helyett ρ-t írunk.

1.2.4. példa.

1. Ha $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ és $\mathcal{X} := \mathbb{C}^d$, akkor a $(\mathbb{C}^d, \rho_p)$ metrikus tér egy altere az $(\mathbb{R}^d, \rho_p)$ metrikus tér.
2. A $(\mathcal{K}([a,b]), \rho_\infty)$ metrikus tér altere $(\mathfrak{C}[a,b], \rho_\infty)$, ahol

$$\mathfrak{C}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : \ f \text{ folytonos}\}.$$

1.2.5. házi feladat. Igazoljuk, hogy $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, $n \in \mathbb{N}_0$, akkor a

$$\rho(f,g) := \sum_{k=0}^{n} \max\left\{\left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\right\} \qquad (f, g \in \mathfrak{C}^n[a,b])$$

függvény metrika (vö. 1.3.115. feladat)!

1.2.9. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér és

$$\Omega^* := \{A \in \Omega : \ \mu(A) < +\infty\}$$

esetén a

$$\rho(A,B) := \mu\,(A \vartriangle B) \qquad (A, B \in \Omega^*),$$

függvény félmetrika (vö. 11.1.6. definíció)!

Útm.

- Mivel minden $A, B \in \Omega^*$ esetén
$$A \vartriangle B \subset A \cup B,$$
ezért $A \vartriangle B \in \Omega$ és
$$0 \leq \mu\,(A \vartriangle B) \leq \mu\,(A \cup B) \leq \mu\,(A) + \mu\,(B) < +\infty,$$
így $A \vartriangle B \in \Omega^*$, azaz $\rho(A,B) \in [0, +\infty)$.
- Tetszőleges $A \in \Omega^*$ esetén
$$\rho(A,A) = \mu\,(A \vartriangle A) = \mu\,(\emptyset) = 0.$$
- Ha $A, B \in \Omega^*$, akkor
$$\rho(A,B) = \mu\,(A \vartriangle B) = \mu\,(B \vartriangle A) = \rho(B,A).$$
- Mivel minden $A, B \in \Omega^*$ esetén
$$A \vartriangle B \subset (A \vartriangle C) \cup (B \vartriangle C)$$

(vö. 11.1.2. állítás), ezért

$$\begin{aligned} \rho(A,B) &= \mu(A \triangle B) \le \mu((A \triangle C) \cup (B \triangle C)) \le \mu(A \triangle C) + \mu(B \triangle C) = \\ &= \rho(A,C) + \rho(B,C). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.6. házi feladat. Igazoljuk, hogy az 1.2.9. feladatbeli félmetrika nem feltétlenül metrika, azaz alkalmas (X, Ω, μ) mértéktér és $A, B \in \Omega^*$, $A \neq B$ halmazok esetén

$$\mu(A \triangle B) = 0$$

teljesül!

1.2.7. házi feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \varphi)$, $(\mathcal{X}, \psi)$ félmetrikus terek és $\alpha \in (0, +\infty)$ szám esetén a

$$\tilde{\varphi} := \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \min\{\alpha, \varphi(x,y)\}$$

utasítással értelmezett $\tilde{\varphi}$ függvény félmetrika, és pontosan akkor metrika, ha φ metrika!

1.2.13. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \varphi)$, $(\mathcal{X}, \psi)$ félmetrikus terek és $\alpha \in (0, +\infty)$ szám esetén

1. $\alpha \cdot \varphi$ félmetrika, és pontosan akkor metrika, ha φ metrika;
2. $\varphi + \psi$ félmetrika, és pontosan akkor metrika, ha

$$\varphi^2(x,y) + \psi^2(x,y) \neq 0 \qquad (x, y \in \mathcal{X} : x \neq y);$$

3. a

$$\max\{\varphi, \psi\} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \max\{\varphi(x,y), \psi(x,y)\}$$

utasítással értelmezett $\max\{\varphi, \psi\}$ függvény félmetrika, és pontosan akkor metrika, ha bármely $x, y \in \mathcal{X} : x \neq y$ esetén teljesül a

$$\varphi^2(x,y) + \psi^2(x,y) \neq 0$$

egyenlőtlenség!

Útm.

1.2.8. házi feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus tér, akkor a

$$\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2)$$

függvény metrika!

Félmetrikus terekből könnyen kaphatunk metrikus tereket, ha pontjaikat ekvivalencia-osztályokba soroljuk, és az ekvivalenciaosztályok halmazán a félmetrika által generált metrikát értelmezünk.

1.2.10. feladat. Legyen $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér. Bizonyítsuk be, hogy

1. $\sim := \left\{(x, y) \in \mathcal{X}^2 : \ \rho(x, y) = 0\right\}$ ekvivalencia;
2. ha $\tilde{\mathcal{X}} := \mathcal{X}/\sim$, akkor
   (a) bármely $u, v \in \mathcal{X}$ és bármely $x, y \in \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{X}}$, ill. $w, z \in \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{X}}$ esetén $\rho(x, w) = \rho(y, z)$;
   (b) a
   $$\tilde{\rho}\,(\tilde{u}, \tilde{v}) := \rho(x, y) \qquad \left(\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{X}} : x \in \tilde{u}, y \in \tilde{v}\right)$$
   utasítással értelmezett $\tilde{\rho}$ függvény metrika!

Útm.

1. Bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén
   - $x \sim x$, hiszen ρ félmetrika, így $\rho(x, x) = 0$ $(x \in \mathcal{X})$;
   - $x \sim y \quad\Longrightarrow\quad y \sim x$, hiszen ρ szimmetrikus;
   - $(x \sim y \ \text{ és } \ y \sim z) \quad\Longrightarrow\quad x \sim z$, mivel a
   $$\rho(x, y) = 0 \qquad \text{és} \qquad \rho(y, z) = 0$$
   egyenlőségekből a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával
   $$\rho(x, z) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) = 0,$$
   azaz $\rho(x, z) = 0$ következik,
2. Mivel
   $$(x \sim y, \quad w \sim z) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \rho(x, y) = \rho(w, z) = 0,$$
   ezért
   $$\rho(x, w) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, w) = \rho(y, z).$$
   Ugyanígy látható be az is, hogy $\rho(x, w) \geq \rho(y, z)$.
3. $\tilde{\rho}$ triviálisan örökli ρ-tól a pozitív szemidefinitséget, a szimmetriát és a háromszög-egyenlőtlenséget. Továbbá $\tilde{\rho}$ definit is, hiszen ha $\tilde{u} \neq \tilde{v}$, akkor
   $$\tilde{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \rho(x, y) \neq 0,$$
   különben $x \sim y$, azaz $\tilde{u} = \tilde{v}$ lenne. ■

Az 1.2.10. feladatban értelmezett $(\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\rho})$ metrikus teret az $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér **faktorterének** vagy **hányadosterének** nevezzük. Két $\mathcal{X}$-beli ekvivalencia-osztály egyenlőségét a következő módon értelmezzük:

$$\tilde{u} = \tilde{v} \quad (\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{X}}) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \sim y \quad (x \in \tilde{u}, y \in \tilde{v}).$$

1.2.5. példa. A $p \in [1, +\infty)$ paraméterrel

$$\rho_p : \mathfrak{R}[a,b] \times \mathfrak{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \rho_p(f,g) := \left(\int_a^b |f-g|^p \right)^{1/p}$$

függvény félmetrika, hiszen ρ_p pozitív szemidefinit, szimmetrikus, továbbá teljesül a háromszög-egyenlőtlenség is (vö. **[?]** 110. old.). ρ_p nem metrika, hiszen ha $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ és véges sok $x \in [a,b]$ kivételével $f(x) = g(x)$, akkor

$$g \in \mathfrak{R}[a,b], \qquad f \neq g \qquad \text{és} \qquad \rho_p(f,g) = 0,$$

ui. $f(x) - g(x)$ csak véges sok $x \in [a,b]$ pontban különbözik zérustól. Az 1.2.10. feladatban ismertetett eljárás alkalmazható az $(\mathfrak{R}[a,b], \rho_p)$ félmetrikus térre. A megfelelő ekvivalencia ebben az esetben:

$$f \sim g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \left(\int_a^b |f-g|^p \right)^{1/p} = 0.$$

1.2.14. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \mathcal{X}$, akkor

1. bármely $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ félmetrika esetén a

$$\widetilde{\rho} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{\rho}(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

   függvény félmetrika $\mathcal{X}$-en;

2. az $\mathcal{X}$-beli félmetrikák tetszőleges (ρ_n) sorozata esetén a

$$\rho_F(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)} \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

   függvény félmetrika $\mathcal{X}$-en (**félmetrikák Fréchet-kombinációja**)!

Útm.

A fenti ρ_F félmetrika pontosan akkor lesz metrika, ha bármely $x, y \in \mathcal{X} : x \neq y$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\rho_N(x,y) > 0$, hiszen $\rho_F(x,y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz $\rho_n(x,y)=0$ $(n\in\mathbb{N})$.

1.2.6. példa. Ha

$$\mathfrak{C}(\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}:\ f \text{ folytonos}\}$$

akkor $(\mathfrak{C}(\mathbb{R}),\rho_\infty)$ nem altere a $(\mathcal{K}(\mathbb{R}),\rho_\infty)$ metrikus térnek. A Fréchet-kombináció segítségével azonban $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$-en is értelmezhető metrika. Mivel tetszőleges $k\in\mathbb{N}$ esetén ρ_∞ metrika $\mathcal{K}[-k,k]$-n, ezért a

$$\rho_k:\mathfrak{C}(\mathbb{R})\times\mathfrak{C}(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\qquad (f,g)\mapsto \sup\{|f(x)-g(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[-k,k]\}$$

függvény félmetrika. Így ezeknek a félmetrikáknak a ρ_F Fréchet-kombinációja szintén félmetrika $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$-en. Sőt, ρ_F metrika is, hiszen bármely $f,g\in\mathfrak{C}(\mathbb{R})$ esetén

$$f\neq g \quad\Longleftrightarrow\quad \exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)\neq g(x),$$

így alkalams $k\in\mathbb{N}$ esetén $x\in[-k,k]$, ahonnan

$$\sup\{|f(x)-g(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[-k,k]\}>0,$$

azaz $\rho_F(f,g)>0$ következik.

1.2.9. házi feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\rho:\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R},\qquad \rho((x_n),(y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$$

függvény metrika!

1.2.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\rho(n,m) := \begin{cases} 0 & (n=m), \\ 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m} & (n\neq m) \end{cases} \qquad (n,m\in\mathbb{N}),$$

akkor $(\mathbb{N},\rho)$ metrikus tér!

Útm. Világos, hogy ρ pozitív definit és szimmetrikus, így csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell belátni. Ha $k=n$ vagy $k=m$, akkor

$$\rho(n,k)+\rho(m,k)=\rho(n,m),$$

ha pedig $k\neq n$ és $k\neq m$, akkor

$$\begin{aligned}\rho(n,k)+\rho(m,k) &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+1+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\geq \\ &\geq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\rho(n,m). \quad\blacksquare\end{aligned}$$

1.2.12. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$\rho(n,m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

akkor $(\mathbb{N}, \rho)$ metrikus tér!

Útm. Világos, hogy bármely $m, n, l \in \mathbb{N}$ esetén

- $\rho(n,m) \geq 0$ és $\rho(n,m) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \quad \Longleftrightarrow \quad m = n;$
- $\rho(n,m) = \rho(m,n);$
- $\rho(n,m) \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{l}\right| + \left|\frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right| = \rho(n,l) + \rho(l,m).$ ■

1.2.10. házi feladat. Lássuk be, hogy ha valamely $\alpha \in [0, +\infty)$, ill. $-\infty < a < b < +\infty$ esetén

$$\rho_\alpha(f,g) := \max\left\{e^{-\alpha x}|f(x) - g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\right\} \qquad (f, g \in \mathfrak{C}[a,b])$$

akkor $(\mathfrak{C}[a,b], \rho_\alpha)$ metrikus tér (vö. 1.3.14. feladat)!

1.2.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, μ véges és

$$\mathcal{M} := \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : \ f \text{ mérhető}\},$$

akkor metrikák az alábbi leképezések!

1. $\rho(f,g) := \inf\{\varepsilon \in (0, +\infty) : \ \mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon\}$ $(f, g \in \mathcal{M});$
2. $\rho(f,g) := \displaystyle\int \frac{|f-g|}{1 + |f-g|}\, d\mu$ $(f, g \in \mathcal{M}).$

Útm.

1. Világos, hogy
   - ha $f, g \in \mathcal{M}$, akkor az
     $$A_n := \{|f - g| \geq n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
     halmazsorozat antiton és
     $$\lim(A_n) = \emptyset$$
     (vö. [?], 21. old.), így
     $$\lim(\mu(A_n)) = 0.$$
     Ez azt jelenti, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ szám esetén
     $$\mu(\{|f - g| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon$$
     amiből $\rho(f,g) < +\infty$ következik.

- ρ szimmetrikus, azaz bármely $f, g \in \mathcal{M}$ esetén

$$\rho(f,g) = \rho(g,f).$$

- ha $f, g, h \in \mathcal{M}$, és az $\varepsilon, \delta > 0$ számokkal

$$\mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon, \qquad \text{ill.} \qquad \mu(\{|h-g| \geq \varepsilon\}) \leq \delta,$$

akkor

$$\begin{aligned} \mu(\{|f-g| \geq \varepsilon+\delta\}) &\leq \mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\} \cup \{|h-g| \geq \delta\}) \leq \\ &\leq \mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\}) + \mu(\{|h-g| \geq \delta\}), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\rho(f,g) \leq \mu(\{|f-h| \geq \varepsilon\}) + \mu(\{|h-g| \geq \delta\})$$

következik. Így

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g). \quad \blacksquare$$

2. **Házi feladat.**

1.2.2. Metrikus terek topológiája

1.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér esetén valamely $a \in \mathcal{X}$ pont ($\varepsilon > 0$-sugarú) **környezet**ének (a **középpontú,** ε**-sugarú nyílt gömb**nek) nevezzük a

$$K(a) := K_\varepsilon(a) := \{x \in \mathcal{X} : \ \rho(x,a) < \varepsilon\}$$

halmazt.

Ha nem egyértelmű, hogy melyik (fél)metrikáról van szó, akkor $K_\varepsilon(a)$ helyett a $K_\varepsilon^\rho(a)$ szimbólumot használjuk.

1.2.7. példa. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ az indiszkrét félmetrikus tér, akkor tetszőleges $a \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(a) = \mathcal{X}$.

1.2.8. példa. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor tetszőleges $a \in \mathcal{X}$ esetén

$$K_\varepsilon(a) = \begin{cases} \mathcal{X} & (\varepsilon > 1), \\ \{a\} & (0 < \varepsilon \leq 1). \end{cases}$$

1.2.9. példa. Az 1.2.12. feladatbeli metrikus tér esetében

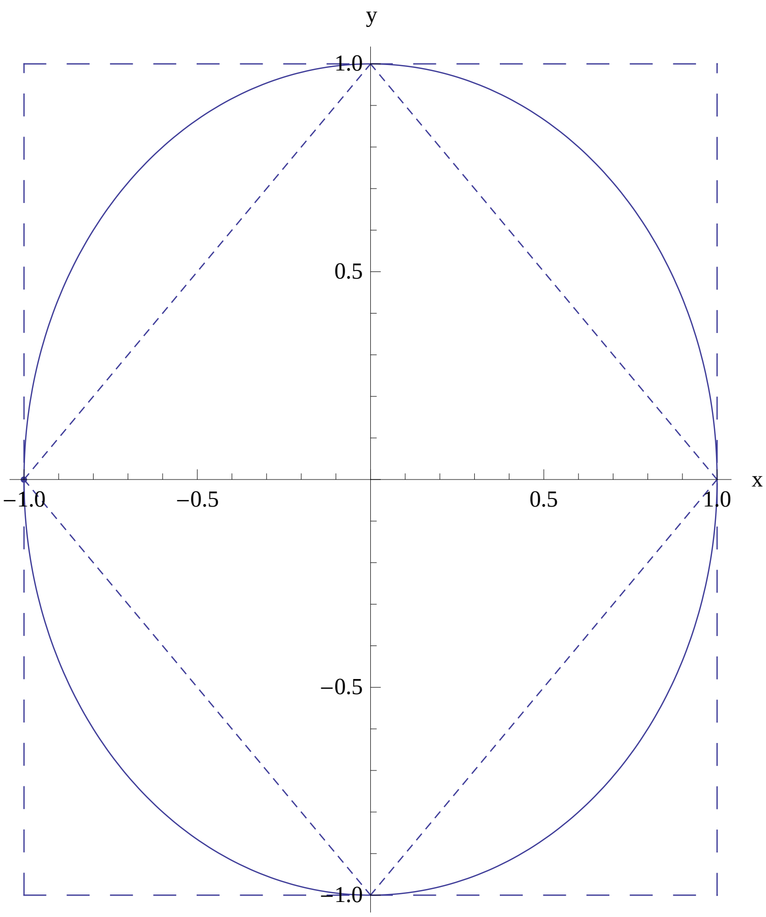
$$K_{1/2}(2) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \right\} = \mathbb{N},$$

$$K_{3/4}(1) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| 1 - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{3}{4} \right\} = \{1,2,3,4\}.$$

1.2.10. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$, $p \in \{1,2,\infty\}$, továbbá $\varepsilon := 1$, akkor

$$\begin{aligned} K_1^{\rho_1}(0) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| < 1\}, \\ K_1^{\rho_2}(0) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\}, \\ K_1^{\rho_\infty}(0) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| < 1 \text{ és } |x_2| < 1\} \end{aligned}$$

(vö. 1.2.1. ábra).



1.2.1. ábra. A $0 \in \mathbb{R}^2$ pont környezetei az $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ metrikus terekben.

1.2.14. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén mutassuk meg, hogy

1. bármely $a \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $a \in K_\varepsilon(a)$;
2. ha $a \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ és $x \in K_\varepsilon(a)$, akkor alkalmas $\delta > 0$ esetén
$$K_\delta(x) \subset K_\varepsilon(a);$$
3. minden $a, b \in \mathcal{X}$, $a \neq b$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy
$$K_\varepsilon(a) \cap K_\varepsilon(b) = \emptyset$$
teljesül!

Útm.

1. $\rho(a, a) = 0$ miatt igaz az állítás.
2. Ha
$$\delta := \varepsilon - \rho(x, a) \qquad \text{és} \qquad b \in K_\delta(x),$$
akkor a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy
$$\rho(b, a) \leq \rho(b, x) + \rho(x, a) < \delta + \rho(x, a) = \varepsilon,$$
ahonnan $b \in K_\varepsilon(a)$, azaz $K_\delta(x) \subset K_\varepsilon(a)$ következik.
3. Ha
$$\varepsilon := \rho(a, b)/2 \qquad \text{és} \qquad K_\varepsilon(a) \cap K_\varepsilon(b) \neq \emptyset,$$
akkor alkalmas $x \in K_\varepsilon(a) \cap K_\varepsilon(b)$ esetén
$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \rho(a, b)$$
ami nem lehetséges. ■

1.2.15. gyakorló feladat. Határozzuk meg az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben a
$$K_1(0), \qquad K_2(1), \qquad K_4(1), \qquad K_2(4), \qquad K_3(4) \qquad \text{és} \qquad K_4(4)$$
környezetet, ha
$$\mathcal{X} := [0,1] \cup (2,4], \qquad \rho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathcal{X})$$
teljesül!

Útm.

1.2.16. gyakorló feladat. Ábrázoljuk a $0 \in \mathbb{R}^2$ pont 1-sugarú környezetét az

$$(\mathbb{R}^2, \rho_0), \qquad (\mathbb{R}^2, \rho_1), \qquad (\mathbb{R}^2, \rho_2), \qquad \text{ill. az} \qquad (\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$$

metrikus terekben, ahol ρ_0 a diszkrét metrikát jelöli!

Útm.

1.2.15. feladat. Adjunk példát olyan $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térre és olyan $a, b \in \mathcal{X}$ elemekre, ill. $R > r > 0$ számokra, hogy $K_R(a)$ valódi részhalmaza legyen $K_r(b)$-nek!

Útm. Ha $\mathcal{X} := \{1; 2; 3\}$ és

$$\rho(x, x) := 0 \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ill.

$$\rho(2{,}3) := \rho(3{,}2) := 2, \qquad \rho(x, y) := 1$$

(egyéb $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ esetén), akkor könnyű belátni, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és minden

$$0 < \beta < \alpha < 1$$

esetén

$$K_{1+\alpha}(2) = \{1; 2\} \subsetneqq \{1; 2; 3\} = K_{1+\beta}(1). \quad \blacksquare$$

1.2.3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus térben az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz

1. **nyílt**, ha minden $a \in A$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(a) \subset A$;
2. **zárt**, ha A^c nyílt.

1.2.11. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ tetszőleges félmetrikus tér, akkor $\emptyset$ és $\mathcal{X}$ nyílt is és zárt is $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, hiszen minden $a \in \mathcal{X}$ esetén $K_1(a) \subset \mathcal{X}$, továbbá $\mathcal{X}^c = \emptyset$, ill. $\emptyset^c = \mathcal{X}$.
2. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ az indiszkrét félmetrikus tér, akkor valamely $A \subset \mathcal{X}$ pontosan akkor nyílt $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, ha $A = \mathcal{X}$ vagy $A = \emptyset$. Valóban, $\mathcal{X}$ és $\emptyset$ nyílt halmazok, továbbá ha $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, akkor alkalmas $a \in A$ és $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(a) \subset A$, ahonnan $K_\varepsilon(a) = \mathcal{X}$ következtében $A = \mathcal{X}$.
3. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor minden $A \subset \mathcal{X}$ halmaz nyílt, hiszen ha $A \neq \emptyset$, akkor bármely $a \in A$ esetén

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \subset A.$$

4. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ tetszőleges félmetrikus tér, akkor bármely $a \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(a)$ nyílt halmaz (vö. 1.2.14/2. feladat). Ezért jogos $K_\varepsilon(a)$-ra a *nyílt gömb* jelző.

1.2.16. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ (fél)metrikus tér és

$$\mathcal{G}_\rho := \{A \subset \mathcal{X} : \ A \text{ nyílt}\},$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Tetszőleges $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz esetén

$$A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho \quad (\gamma \in \Gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho.$$

2. Bármely véges $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ indexhalmaz esetén

$$A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho \quad \left(\gamma \in \widetilde{\Gamma}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho.$$

Útm.

1. Ha $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz és
$$A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho \qquad (\gamma \in \Gamma),$$
akkor tetszőleges
$$a \in A := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$
esetén van olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $a \in A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho$. Mivel A_γ nyílt, ezért alkalmas $\delta > 0$ esetén
$$K_\delta(a) \subset A_\gamma \subset A,$$
azaz $A \in \mathcal{G}_\rho$.
2. Ha $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ véges indexhalmaz és
$$A_\gamma \in \mathcal{G}_\rho \qquad (\gamma \in \widetilde{\Gamma}),$$
akkor tetszőleges
$$a \in A := \bigcap_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} A_\gamma$$
esetén $a \in A_\gamma$ $(\gamma \in \widetilde{\Gamma})$, azaz alkalmas $\delta_\gamma > 0$ számmal $K_{\delta_\gamma}(a) \subset A_\gamma$. Ha
$$\delta := \min\left\{\delta_\gamma > 0 : \ \gamma \in \widetilde{\Gamma}\right\},$$
akkor bármely $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$ esetén
$$K_\delta(a) \subset K_{\delta_\gamma}(a) \subset A_\gamma,$$
azaz $K_\delta(a) \subset A$. ■

Ezért bármely $(\mathcal{X}, \rho)$ (fél)metrikus tér esetén $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\rho)$ topologikus tér. A $\mathcal{G} := \mathcal{G}_\rho$-t szokás a ρ **(fél)metrika indukálta topológiának** nevezni, ill. erre az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \equiv (\mathcal{X}, \rho)$ jelölést használni (vö. [?]).

1.2.12. példa.

1. Az indiszkrét félmetrika által generált topológia az indiszkrét topológia.
2. A diszkrét metrika generálta toplológia a diszkrét topológia.

1.2.4. definíció. Az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus teret **metrizálható**nak nevezzük, ha alkalmas $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén $(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \equiv (\mathcal{X}, \rho)$ teljesül.

1.2.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor az $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\rho)$ topologikus tér T_4-tér!

Útm. Ha

$$A := \emptyset \qquad \text{és} \qquad B := \mathcal{X},$$

akkor A és B diszjunkt zárt halmazok, így a $\emptyset$, ill. $\mathcal{X}$ diszjunkt, nyílt fedőhalmazok.
Ha $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$ diszjunkt, zárt halmazok, akkor az

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$$

folytonos függvényre (vö. 1.1.35. feladat)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A), \\ \\ 1 & (x \in B) \end{cases}$$

teljesül, ahol valamely $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$ halmaz, ill. $x \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\rho(x, H) := \inf \{\rho(x, h) \in \mathbb{R} : \ h \in H\}.$$

Így az

$$U := f^{-1}\left[\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right], \qquad \text{ill.} \qquad V := f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right]$$

(nyílt) környezetekre

$$U \cap V = \emptyset \qquad \text{és} \qquad A \subset U, \qquad B \subset V. \quad \blacksquare$$

Nem minden topologikus tér metrizálható. A Sierpiński-féle topologikus tér esetében (vö. 1.1.1. példa) pl. nincs olyan metrika, ami ezt a topológiát indukálná. Ha ui.

$$|\mathcal{X}| = 2, \qquad \mathcal{X} = \{a, b\} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{G} := \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}\}$$

esetén ρ olyan metrika volna, amelyre $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\rho$, akkor $r := \rho(a,b)$ mellett $\mathcal{G}_\rho$ definíciója alapján

$$\mathcal{G}_\rho \ni K_r(b) = \{b\}$$

teljesülne, ami $\{b\} \notin \mathcal{G}_\rho$ miatt nem lehetséges. Az 1.2.14. feladat szerint tehát valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér esetén a **metrizálhatóság szükséges feltétele** az, hogy $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ Hausdorff-tér legyen.

1.2.18. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén

1. $\mathcal{G}_\rho \subset \mathcal{F}_\sigma$, azaz minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként;
2. $\mathcal{F}_\rho \subset \mathcal{G}_\delta$, azaz minden zárt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként!

Útm.

1. Ha A nyílt halmaz ($A \in \mathcal{G}_\rho$) továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor az

$$A_n := \left\{ x \in \mathcal{X} : \; \rho(x, A^c) \geq \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_\rho$$

halmazsorozatra:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_\sigma.$$

2. Ha A zárt halmaz ($A \in \mathcal{F}_\rho$) továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor az

$$A_n := \left\{ x \in \mathcal{X} : \; \rho(x, A) < \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{G}_\rho$$

halmazsorozatra:

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_\delta. \quad \blacksquare$$

Metrikus térben tehát minden zárt halmaz és minden nyílt halmaz **ambigus** (vö. [20]): egyszerre $\mathcal{G}_\delta$- és $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz.

1.2.19. feladat. Igazoljuk, ha $(\mathcal{X}, \rho)$ (fél)metrikus tér, $\mathcal{G}_\rho$ az indukált topológia, továbbá $x \in \mathcal{X}$ és $U \subset \mathcal{X}$, akkor igaz az

$$U \in \mathcal{U}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \varepsilon > 0 : \; K_\varepsilon(x) \subset U$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés. /$\Longrightarrow$/ Ha $U \in \mathcal{U}(x)$, akkor alkalmas $A \in \mathcal{G}_\rho$ esetén $x \in A \subset U$. Így a nyílt A (és vele együtt U is) tartalmaz egy x-körüli ε-sugarú nyílt gömböt.

2. lépés. /$\Longleftarrow$/ $K_\varepsilon(x)$ olyan nyílt halmaz, amely lefedi $\{x\}$-et (vö. 1.2.14. feladat). $\blacksquare$

Így a topologikus terek esetében tárgyalt alapvető fogalmak mindegyike azonnal átvihető metrikus terekre. Ezért pl. valamely $A \subset \mathcal{X}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists y \in A: \ \rho(x,y) < \varepsilon,$$

$$x \in A' \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists y \in A \backslash \{x\}: \ \rho(x,y) < \varepsilon,$$

$$x \in \operatorname{int}(A) \iff \exists \varepsilon > 0: \ K_\varepsilon(x) \subset A.$$

1.2.13. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ az indiszkrét félmetrikus tér, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mathcal{U}(x) = \{\mathcal{X}\}.$$

2. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subset \mathcal{X}: \ x \in U\},$$

hiszen a diszkrét toplogikus térben minden halmaz nyílt.

3. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$, akkor a

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathcal{X}: \ \rho(a,x) \leq \varepsilon\}$$

halmazra $B_\varepsilon(a) \in \mathcal{U}(a)$, hiszen $K_\varepsilon(a) \subset B_\varepsilon(a)$.

1.2.11. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ (fél)metrikus tér, $x \in \mathcal{X}$ és $\alpha_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\lim(\alpha_n) = 0,$$

akkor a

$$\{K_\varepsilon(x): \ \varepsilon > 0\}, \qquad \left\{K_{\frac{1}{n}}(x): \ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \{K_{\alpha_n}(x): \ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{B_\varepsilon(x): \ \varepsilon > 0\}, \qquad \left\{B_{\frac{1}{n}}(x): \ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \{B_{\alpha_n}(x): \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmazok mindegyike környezetbázisa x-nek!

1.2.20. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $A \subset \mathcal{X}$ és $a \in \mathcal{X}$, akkor $a \in A'$ pontosan akkor teljesül, ha a-nak bármely környezetében A-nak végtelen sok eleme van!

Útm.

1. lépés. Ha a minden környezetében A-nak végtelen sok eleme van, akkor nyilvánvalóan $a \in A'$.

2. lépés. Ha $a \in A'$ és alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(a) \cap A$ véges halmaz, akkor, mivel

$$(K_\varepsilon(a) \backslash \{a\}) \cap A \neq \emptyset,$$

ezért alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ esetén

$$(K_\varepsilon(a) \backslash \{a\}) \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Így, ha

$$\delta := \min \{\rho(x_k, a) \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\},$$

akkor

$$(K_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap A = \emptyset,$$

ami nem lehetséges. ■

Ez azt is jelenti, hogy ha $A \subset \mathcal{X}$ véges halmaz, akkor $A' = \emptyset$.

1.2.21. feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathbb{R}^d, \rho)$-ban a nyílt intervallumok nyílt halmazok, a zárt intervallumok pedig zárt halmazok!

Útm. Ha $a, b \in \mathbb{R}^d$: $a < b$ és $x \in (a, b)$, akkor az

$$\varepsilon := \min \{x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n, b_1 - x_1, \ldots, b_n - x_n\} > 0$$

számra $K_\varepsilon(x) \subset (a, b)$, azaz (a, b) nyílt halmaz. Ha $x \notin [a, b]$, akkor alkalmas $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k < a_k$ vagy $x_k > b_k$. Így ezen k-ra, ha $\delta := a_k - x_k$ vagy $\delta := b_k - x_k$, akkor

$$K_\delta(x) \subset \mathbb{R}^d \backslash [a, b],$$

azaz $R^d \backslash [a, b]$ nyílt, tehát $[a, b]$ zárt. ■

1.2.22. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 1$, akkor a

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathcal{X} : \ \rho(a, x) \leq \varepsilon\}$$

halmaz zárt halmaz! Igaz-e, hogy ez a halmaz megegyezik $K_\varepsilon(a)$ lezártjával?

Útm. Ha $x \in \mathcal{X} \backslash B_\varepsilon(a)$, akkor $\rho(x, a) > \varepsilon$. Így a

$$\delta := \rho(x, a) - \varepsilon$$

számra $\delta > 0$, és bármely $y \in K_\delta(x)$ esetén $y \in \mathcal{X} \backslash B_\varepsilon(a)$, hiszen ellenkező esetben a háromszög-egyenlőtlenség következményeként

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \delta + \varepsilon = \rho(x, a)$$

adódna, ami nem lehetséges. Így

$$K_\delta(x) \subset \mathcal{X} \backslash B_\varepsilon(a),$$

azaz $\mathcal{X}\backslash B_\varepsilon(a)$ nyílt halmaz, amiből $B_\varepsilon(a)$ zártsága következik.
Ha $\mathcal{X}$ végtelen halmaz, $(\mathcal{X},\rho)$ a diszkrét metrikus tér és $a\in\mathcal{X}$, akkor

$$K_1(a)=\overline{K_1(a)}=\{a\} \qquad \text{és} \qquad B_1(a)=\mathcal{X}. \quad \blacksquare$$

1.2.17. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b],\rho_\infty)$ metrikus térben az

$$A:=\{f\in\mathfrak{C}[a,b]:\ \inf f[[a,b]]>0\}, \qquad \text{ill. a} \qquad B:=\{f\in\mathfrak{C}[a,b]:\ f(a)=0\}$$

halmaz nyílt, ill. zárt!

Útm.

1.2.18. gyakorló feladat. Határozzuk meg $(\mathbb{R}^2,\rho_E)$-ben az

$$A:=\left\{\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\in\mathbb{R}^2:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

halmaz deriválthalmazát!

Útm.

1.2.19. gyakorló feladat. Határozzuk meg az $A:=[0,1]\times(-1,1)$ halmaz belsejét, lezártját, ill. határát az $(\mathbb{R}^2,\rho_E)$ és az $(\mathbb{R}^2,\rho)$ metrikus terekben, ahol ρ az 1.2.9. gyakorló feladatbeli metrika!

Útm.

1.2.20. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az

$$A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0\right\}$$

halmaz nyílt az $(\mathbb{R}^2,\rho_E)$ metrikus térben, majd határozzuk meg A érintkezési pontjainak, valamint határpontjainak a halmazát!

Útm.

1.2.21. gyakorló feladat. Határozzuk meg az

$$A:=\{1/n\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\}$$

halmaz belsejét, határát és lezárását az $(\mathbb{R},\rho_E)$ metrikus térben!

Útm.

1.2.5. definíció. Az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **átmérőjén** a

$$\operatorname{diam}(A) := \begin{cases} 0 & (A = \emptyset), \\ \\ \sup\{\rho(x, y) \in \mathbb{R} : \ x, y \in A\} & (A \neq \emptyset) \end{cases}$$

számot vagy $+\infty$-t értjük. Azt mondjuk továbbá, hogy A **korlátos**, ha $\operatorname{diam}(A) < +\infty$.

Világos, hogy adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha alkalmas $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $A \subset K_\varepsilon(x)$ teljesül.

1.2.14. példa. Az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben, ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, akkor az

$$A := \{x_1, \ldots, x_n\}$$

halmaz átmérője:

$$\operatorname{diam}(A) = \max\{\rho(x_k, x_l) \in \mathbb{R} : \ x_k, x_l \in A, \ k, l \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Speciálisan, ha A egyelemű halmaz, akkor $\operatorname{diam}(A) = 0$.

1.2.15. példa. Az $(\mathcal{X}, \rho)$ diszkrét metrikus tér és $A \subset \mathcal{X}$ esetén

$$\operatorname{diam}(A) = \begin{cases} 0 & (A = \emptyset \text{ vagy } A \text{ egyelemű}), \\ \\ 1 & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

1.2.16. példa. Ha

$$A := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \ f(0) = 1\},$$

akkor a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben $\operatorname{diam}(A) = +\infty$.

1.2.23. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $A, B \subset \mathcal{X}$ halmazok esetén lássuk be, hogy

1. $A \subset B \Longrightarrow$ (ha B korlátos, akkor A is korlátos, és $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$);
2. igaz a
$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$$
egyenlőség!

Útm. Az első állítás triviális (vö. [31] 49. old.). A második pedig a következő módon látható be. Mivel $A \subset \overline{A}$, ezért

$$d := \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A}) =: D.$$

Ha $A = \emptyset$ vagy A nem korlátos, akkor az egyenlőség nyilván teljesül. Ha $A \neq \emptyset$ és $d < D$, akkor az

$$\varepsilon := D - d > 0$$

számhoz van olyan $x, y \in \overline{A}$, hogy

$$\rho(x, y) > D - \varepsilon/2.$$

Mivel x és y érintkezési pontja A-nak, ezért alkalmas $a, b \in A$ esetén

$$\rho(x, a) < \varepsilon/4 \qquad \text{és} \qquad \rho(y, b) < \varepsilon/4.$$

Így

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y),$$

azaz

$$\rho(a, b) \geq \rho(x, y) - \rho(x, a) - \rho(y, b) > D - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d,$$

ami nem lehetséges. ∎

1.2.24. feladat. Igazoljuk, hgy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor véges sok korlátos halmaz egyesítése korlátos halmaz!

Útm. Ha adott $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$A_1, \ldots, A_n \subset \mathcal{X}$$

halmazok korlátosak, akkor alkalmas $x \in \mathcal{X}$ elem és $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ számok esetén

$$A_k \subset K_{\varepsilon_k}(x) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Így az

$$\varepsilon := \max\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0$$

számra

$$A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_{\varepsilon_k}(x) \subset K_\varepsilon(x),$$

azaz A korlátos. ∎

1.2.3. Sorozatok, folytonosság

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ az indiszkrét félmetrikus tér, akkor bármely

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$$

sorozat esetében $\mathrm{Lim}\,(x_n) = \mathcal{X}$, hiszen bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $\mathcal{U}(x) = \{\mathcal{X}\}$. Mivel minden metrikus tér egyben Hausdorff-tér is (vö. 1.2.14/3. feladat), ezért metrikus terek esetében $\mathrm{Lim}\,(x_n)$ legfeljebb egyelemű halmaz. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Ezzel kapcsolatos az

1.2.25. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér, és bármely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat esetén $\mathrm{Lim}\,(x_n)$ legfeljebb egyelemű halmaz, akkor ρ metrika!

Útm. Ha ρ nem metrika, akkor alkalmas $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$ esetén

$$\rho(u, v) = 0.$$

Ekkor azonban az

$$x_n := u \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\mathrm{Lim}\,(x_n) = \{u, v\},$$

hiszen (x_n) kvázikonstannssága következtében $u \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$, másrészt pedig $\rho(u, v) = 0$ miatt $v \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$ teljesül. ■

1.2.26. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozatra az alábbi három állítás egyenértékű!

(1) (x_n) konvergens $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, azaz alkalkmas $a \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lim(x_n) = a.$$

(2) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor

$$x_n \in K_\varepsilon(a).$$

(3) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor

$$\rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Útm. Mivel a (2) és a (3) állítás nyilvánvalóan ekvivalens, ezért elegendő csak az első kettő egyenértékűségének belátása.

1. lépés. /(1) ⇒ (2)/ Minden x-körüli nyílt gömb környezete x-nek.

2. lépés. /(2) ⇒ (1)/ Ha $U \in \mathcal{U}(a)$ és bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ indexre

$$x_n \in K_\varepsilon(a),$$

akkor (vö. 1.2.19. feladat) alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén

$$K_\delta(a) \subset U,$$

így alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \in K_\delta(a) \subset U \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\lim(x_n) = a. \quad ■$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat esetén (x_n) pontosan akkor konvergens, ha alkalmas $a \in \mathcal{X}$ esetén a $(\rho(x_n, a))$ sorozat nullsorozat.

1.2.12. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $(\mathcal{Y}, \rho|_\mathcal{Y})$ pedig $(\mathcal{X}, \rho)$ altere és $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{Y}$, akkor igaz az alábbi két állítás!

1. Ha (x_n) konvergens $(\mathcal{Y}, \rho|_\mathcal{Y})$-ban és
$$\lim(x_n) = \alpha \, / \in \mathcal{Y} / \, ,$$
akkor (x_n) konvergens $(\mathcal{X}, \rho)$-ban és határértéke α.
2. (x_n) konvergens $(\mathcal{X}, \rho)$-ban és
$$\lim(x_n) = \alpha \in \mathcal{X},$$
úgy (x_n) pontosan akkor konvergens $(\mathcal{Y}, \rho|_\mathcal{Y})$-ban, ha $\alpha \in \mathcal{Y}$.

1.2.13. házi feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér,
$$x_n, y_n, z_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
úgy ha (x_n) kvázikonstans, azaz alkalmas $\alpha \in \mathcal{X}$, ill. $N \in \mathbb{N}$ esetén
$$x_N = \alpha \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$
akkor konvergens és határértékére
$$\lim(x_n) = \alpha$$
teljesül!

1.2.14. házi feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér,
$$x_n, y_n, z_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
úgy (x_n) konvergens és (y_n) az (x_n) egy átrendezése, azaz alkalmas $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén
$$y_n = x_{\varphi(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor (y_n) is konvergens és határértékére
$$\lim(y_n) = \lim(x_n)$$
teljesül!

1.2.15. házi feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér,

$$x_n, y_n, z_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

úgy alkamas $\alpha \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lim(x_n) = \alpha = \lim(y_n) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_{(z_n)} = \mathcal{R}_{(x_n)} \cup \mathcal{R}_{(y_n)},$$

akkor (z_n) is konvergens és határértékére $\lim(z_n) = \alpha$teljesül!

1.2.27. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathcal{K}(H), \rho_\infty)$ metrikus tér, ill.

$$f, f_n \in \mathcal{K}(H) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetén igaz a

$$\lim(\rho_\infty(f_n, f)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (n \to \infty) \quad (x \in H)$$

implikáció!

Útm. Az állítás nyilvánvaló, hiszen bármely $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in H\} = \rho_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

teljesül. ■

1.2.28. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \rho_\infty)$ metrikus tér, ill.

$$f, f_n \in \mathfrak{C}[a,b] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetén igaz a

$$\lim(\rho_\infty(f_n, f)) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \rightrightarrows f \quad (n \to \infty)$$

ekvivalencia!

Útm. Az állítás nyilvánvaló, hiszen

$$\rho_\infty(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\} \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \;\; (x \in [a,b]). \quad ■$$

1.2.29. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$ és $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ esetén igazak az alábbi állítások!

(1) $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists\, (x_n) : \mathbb{N} \to A \colon \lim(x_n) = a.$

(2) $a \in A' \Longleftrightarrow \exists\, (x_n) : \mathbb{N} \to A \backslash \{a\} \colon \lim(x_n) = a.$

(3) $a \in \mathrm{int}\,(A) \Longleftrightarrow \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X} \colon (\lim(x_n) = a \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, N \leq n \in \mathbb{N} \colon x_n \in A).$

Útm.

(1) Ha alkalmas $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozat esetén $\lim(x_n) = a$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén az

$$\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \notin K_\varepsilon(a)\}$$

halmaz véges, így bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in K_\varepsilon(a)\} \neq \emptyset,$$

ahonnan $a \in \overline{A}$ következik. Ha $a \in \overline{A}$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén alkalmas

$$x_n \in A \cap K_{\frac{1}{n}}(a)$$

elemmel

$$\rho(x_n, a) < \frac{1}{n},$$

így $\lim(x_n) = a$.

(2) Ez a bizonyítás az **(1)** állítás bizonyításához hasonlóan történik, figyelembe véve, hogy

$$x_n \neq a \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valamint

$$(A \backslash \{a\}) \cap K_{\frac{1}{n}}(a) \neq \emptyset.$$

(3) Ha $a \in \operatorname{int}(A)$, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(a) \subset A$, és így tetszőlegs

$$x_n \in \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(x_n) = a$$

sorozat esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \in K_\varepsilon(a) \subset A.$$

Fordítva, ha $a \notin \operatorname{int}(A)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$K_{\frac{1}{n}}(a) \backslash A \neq \emptyset.$$

Így, ha

$$x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \backslash A \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\lim(\rho(x_n, a)) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim(x_n) = a. \quad \blacksquare$$

1.2.30. feladat. Bizonyítsuk be, hogy valamely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ esetén A pontosan akkor zárt halmaz, ha minden konvergens $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozatra

$$\lim(x_n) \in A$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Az 1.1.20. feladat következtében az A halmaz zártságnak ez a szükséges feltétele.

2. lépés. Ha A nem zárt, azaz $A \neq \overline{A}$, akkor alkalmas $a \in \overline{A}$ esetén $a \notin A$, és az 1.2.29/1. feladatbeli állítás következtében van olyan $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = a. \quad \blacksquare$$

1.2.22. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq \mathcal{X}$, továbbá valamilyen $m \in \mathbb{N}$ esetén $\rho_1, \ldots, \rho_m$ metrika $\mathcal{X}$-en és

$$\widetilde{\rho} := \sum_{k=1}^{m} \rho_k,$$

akkor egy $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat pontosan akkor lesz konvergens $(\mathcal{X}, \widetilde{\rho})$-ban, ha minden $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén konvergens $(\mathcal{X}, \rho_k)$-ban!

Útm.

1.2.31. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor valamely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat pontosan akkor lesz konvergens $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, ha konvergens $(\mathcal{X}, \widetilde{\rho})$-ban, ahol $\widetilde{\rho}$ az 1.2.14/1. feladatbeli metrika!

Útm.

1. lépés. Ha az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben $\lim(x_n) = a \in \mathcal{X}$, akkor a

$$0 \leq \widetilde{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \leq \rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

becslés és a Sandwich-tétel felhasználásával a

$$\lim(\rho(x_n, a)) = 0$$

egyenlőségből

$$\lim(\widetilde{\rho}(x_n, a)) = 0$$

következik.

2. lépés. Ha az $(\mathcal{X}, \widetilde{\rho})$ metrikus térben $\lim(x_n) = a \in \mathcal{X}$, akkor bármely ε számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\widetilde{\rho}(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel bármely $\alpha > 0$ esetén

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{-1} < \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < \varepsilon,$$

ezért

$$\rho(x_n, a) < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz $(\mathcal{X}, \rho)$-ban

$$\lim(x_n) = a. \quad \blacksquare$$

1.2.32. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, (ρ_n) pedig $\mathcal{X}$-beli metrikák tetszőleges sorozata, akkor valamely $(x_m) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat pontosan akkor lesz konvergens $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, ha konvergens $(\mathcal{X}, \rho_F)$-ben, ahol ρ_F az 1.2.14/2. feladatbeli metrika!

Útm.

1. lépés. Ha az $(\mathcal{X}, \rho_F)$ metrikus térben $\lim(x_m) = a \in \mathcal{X}$, akkor a

$$0 \leq 2^{-n} \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)} \leq \rho_F(x, y) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathcal{X})$$

becslés és a Sandwich-tétel felhasználásával a $\lim(\rho_F(x_m, a)) = 0$ egyenlőségből bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$2^{-n} \frac{\rho_n(x_m, a)}{1 + \rho_n(x_m, a)} \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty),$$

és ebből tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim_{m \to \infty} (\rho_n(x_m, a)) = 0$$

következik.

2. lépés. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathcal{X}, \rho_n)$ metrikus térben $\lim(x_m) = a \in \mathcal{X}$, akkor

$$\lim(\rho_n(x_m, a)) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$2^{-n} \frac{\rho_n(x_m, a)}{1 + \rho_n(x_m, a)} \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty).$$

Megmutatjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\rho_F(x_m, a) < \varepsilon \qquad (N \leq m \in \mathbb{N})$$

teljesül. Mivel tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)} \leq 1,$$

ezért

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x_m, a)}{1 + \rho_n(x_m, a)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N} \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

így alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x_m, y)}{1 + \rho_n(x_m, y)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Ha $m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{N}$ olyan indexek, amelyekre

$$\rho_n(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \{1, \ldots, N\},\ m \geq m_n)$$

telesül, akkor bármely

$$m \in \mathbb{N}, \qquad m \geq m_0 := \max\{m_1, \ldots, m_N\}$$

indexre

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n(x_m, a)}{1 + \rho_n(x_m, a)} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{2^{-n}}{1 + \rho_n(x_m, a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{\varepsilon}{2},$$

ahonnan

$$\rho_F(x_m, a) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(x_m, a)}{1 + \rho_n(x_m, a)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (m_0 \leq m \in \mathbb{N})$$

következik. ■

Valamely $\emptyset \neq \mathcal{X}$ halmazon többféle metrikát is értelmezhetünk. Ha ρ és σ metrika $\mathcal{X}$-en, akkor mindkettőhöz társítható nyílt halmazoknak egy $\mathcal{G}_\rho$, ill. $\mathcal{G}_\sigma$ rendszere. Előfordulhat, hogy $\mathcal{G}_\rho \neq \mathcal{G}_\sigma$, mint ahogy azt az

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}, \qquad \rho := \rho_E, \qquad \text{ill.} \qquad \sigma := \rho_{\text{diszkr}}$$

példája is mutatja:

$$\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Ha ρ és σ metrikák esetén $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{G}_\sigma$, akkor – annak ellenére, hogy a nyílt gömbök $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\rho)$-ban, ill. $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_\sigma)$-ban különböznek – a pontok környezetei ugyanazok a halmazok. Így valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz érintkezési, torlódási stb. pontjai szintén megegyeznek: a két tér **topológiailag azonos**. Ennek a ténynek egy elégséges feltételét fogalmazza meg az

1.2.6. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{X}, \sigma)$ metrikus terek esetén azt mondjuk, hogy a ρ és a σ metrika **ekvivalens** $/\rho \sim \sigma/$, ha alkalmas $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ esetén

$$\lambda\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \mu\sigma(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

1.2.33. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{X}, \sigma)$ metrikus terek esetén $\rho \sim \sigma$, akkor

1. bármely $a \in \mathcal{X}$ pont és
   (a) bármely $r \in (0, +\infty)$ számhoz van olyan $s \in (0, +\infty)$ szám, hogy $K_s^\sigma(a) \subset K_r^\rho(a)$;
   (b) bármely $s \in (0, +\infty)$ számhoz van olyan $r \in (0, +\infty)$ szám, hogy $K_r^\rho(a) \subset K_s^\sigma(a)$;
2. teljesül a $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{G}_\sigma$ egyenlőség!

Útm.

1. (a) Ha $\rho \sim \sigma$, $a \in \mathcal{X}$ és $r \in (0,+\infty)$, akkor az $s := r/\mu$ számmal tetszőleges $x \in K_s^{\sigma}(a)$ esetén $\sigma(a,x) < s$, azaz

$$\rho(a,x) < \mu s = \mu \frac{r}{\mu} = r,$$

így $x \in K_r^{\rho}(a)$, azaz

$$K_s^{\sigma}(a) \subset K_r^{\rho}(a).$$

(b) Ha $\rho \sim \sigma$, $a \in \mathcal{X}$ és $s \in (0,+\infty)$, akkor az $r := s\lambda$ számmal tetszőleges $x \in K_r^{\rho}(a)$ esetén $\rho(a,x) < r$, azaz $\sigma(a,x) < r/\lambda = s$, így $x \in K_s^{\sigma}(a)$, azaz

$$K_r^{\rho}(a) \subset K_s^{\sigma}(a). \quad \blacksquare$$

2. Ha $A \in \mathcal{G}_\rho$ és $a \in A$, akkor alkalmas $r, s \in (0,+\infty)$ szám esetén $K_r^{\rho}(a) \subset A$, ill.

$$K_s^{\sigma}(a) \subset K_r^{\rho}(a), \qquad \text{azaz} \qquad K_s^{\sigma}(a) \subset A,$$

ahonnan $A \in \mathcal{G}_\sigma$ következik. Ha viszont $B \in \mathcal{G}_\sigma$ és $b \in B$, akkor alkalmas $r, s \in (0,+\infty)$ szám esetén

$$K_s^{\sigma}(b) \subset B, \qquad \text{ill.} \qquad K_r^{\rho}(b) \subset K_s^{\sigma}(b),$$

azaz $K_e^{\rho}(b) \subset B$, ahonnan $B \in \mathcal{G}_\rho$ következik. $\blacksquare$

Ez azt is jelenti, hogy ha $\rho \sim \sigma$, akkor bármely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat

$$\text{konvergens } (\mathcal{X},\rho)\text{-ban} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{konvergens } (\mathcal{X},\sigma)\text{-ban.}$$

A $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{G}_\sigma$ egyenlőség persze akkor is teljesülhet, ha ρ és σ nem ekvivalens. Ezt igazolja az alábbi

1.2.34. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér, σ pedig az 1.2.14/1. feladatnak megfelelő metrika, akkor ugyan $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{G}_\sigma$, de ρ nem ekvivalens σ-val!

Útm. Ha az $(\mathbb{R}, \rho_E)$ metrikus tér esetén $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(x,y) := \frac{\rho_E(x,y)}{1+\rho_E(x,y)} \qquad (x,y \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $\sigma(x,y) \leq \rho_E(x,y)$ és bármely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat

$$\text{konvergens } (\mathbb{R},\rho_E)\text{-ben} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{konvergens } (\mathbb{R},\sigma)\text{-ban}$$

(vö. 1.2.31. feladat). Az

$$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\sigma(x,0)}{\rho_E(x,0)} = \frac{1}{1+x}$$

függényre $\lim_{\infty} f = 0$, ezért nincsen olyan $\lambda \in (0,+\infty)$, amellyel

$$\lambda\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

teljesülne. $\blacksquare$

1.2.35. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér, $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N} \colon n \geq N$, akkor $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$.

(2) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N$, akkor $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Útm.

(1) $\Rightarrow$ **(2):** Ha $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\rho(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N$ esetén

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_N) + \rho(x_N, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ **(1):** Az $m := N$ választással az állítás nyilvánvaló. ■

1.2.7. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér esetén azt mondjuk, hogy $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ **Cauchy-sorozat**, ha az (x_n) az 1.2.35. feladatbeli bármelyik tulajdonságnak eleget tesz.

Könnyen belátható, hogy (x_n) pontosan akkor lesz Cauchy-sorozat, ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén $\lim(\rho(x_n, x_N)) = 0$, ezért az 1.2.35. feladat fényében arra, hogy (x_n) Cauchy-sorozat, gyakran a

$$\rho(x_m, x_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

jelölést használjuk.

1.2.36. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor tetszőleges $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ Cauchy-sorozat kvázikonstans!

Útm. Ha $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ Cauchy-sorozat, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

így bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén $\rho(x_n, x_N) = 0$, azaz $x_n = x_N$. ■

1.2.37. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér, $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha (x_n) konvergens, akkor (x_n) Cauchy-sorozat.
2. Ha (x_n) Cauchy-sorozat és alkalmas (x_{ν_n}) részsorozat esetén $\lim(x_{\nu_n}) = \alpha \in \mathcal{X}$, akkor (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$.

Útm.

1. Ha (x_n) konvergens és $\lim(x_n) =: \alpha \in \mathcal{X}$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor
$$\rho(x_n, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Így bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$ esetén
$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, \alpha) + \rho(\alpha, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
azaz (x_n) Cauchy-sorozat.

2. Ha az (x_n) Cauchy-sorozat (x_{ν_n}) részsorozatára $\lim(x_{\nu_n}) = \alpha \in \mathcal{X}$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy
$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N})$$
és van olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy
$$\rho(x_{\nu_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (M \leq k \in \mathbb{N}).$$
Így, ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq M$, továbbá $\nu_k \geq N$, akkor
$$\rho(x_n, \alpha) \leq \rho(x_n, x_{\nu_k}) + \rho(x_{\nu_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N})$$
következik, azaz (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$. ■

1.2.8. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat esetén azt mondjuk, hogy (x_n) **korlátos**, ha az
$$\{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$
halmaz korlátos.

1.2.38. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ legalább kételemű halmaz, $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor van olyan $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat, amely korlátos, de nem konvergens!

Útm. Ha $a, b \in \mathcal{X}$: $a \neq b$ és
$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}, \qquad x_n := \begin{cases} a & (n \text{ páros}), \\ \\ b & (n \text{ páratlan}), \end{cases}$$
akkor (x_n) triviálisan korlátos, de nem konvergens, hiszen van két olyan konvergens részsorozata, amelyek határértéke különböző. ■

1.2.39. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat esetén (x_n) Cauchy-sorozat, akkor (x_n) korlátos!

Útm. Ha (x_n) Cauchy-sorozat, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén
$$\rho(x_N, x_n) < 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Így az

$$\varepsilon := \max\{1, \rho(x_N, x_k) \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, N\}\}$$

számmal tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_N, x_n) < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad x_n \in K_\varepsilon(x_N)$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az

$$\{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz korlátos. ■

1.2.40. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, valamint $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat esetén (x_n) pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha az

$$A_n := \{x_k \in \mathcal{X} : \ k \geq n \in \mathbb{N}\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra

$$\lim(\mathrm{diam}\,(A_n)) = 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha (x_n) Cauchy-sorozat, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq N$, akkor

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2,$$

ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ indexre A_n bármely két elemének távolsága kisebb, mint $\varepsilon/2$. Ezekre az n-ekre $\mathrm{diam}\,(A_n) < \varepsilon$, azaz

$$\lim(\mathrm{diam}\,(A_n)) = 0.$$

2. lépés. A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a

$$\lim(\mathrm{diam}\,(A_n)) = 0$$

feltételből (x_n) Cauchy-sorozat volta következik. ■

1.2.41. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \rho_\mathcal{Y})$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$ továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X},\ \lim(x_n) = a \ \text{ sorozatra } \ \lim(f(x_n)) = f(a)$$

állítás!

Útm.

1. lépés. Ha az $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ metrikus térben

$$\lim(x_n) = a \qquad \text{és} \qquad U \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}}(f(a)),$$

akkor f-nek a-beli folytonossága következtében

$$f^{-1}[U] \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}_{\mathcal{X}}}(a).$$

Így az (x_n) konvergenciája miatt alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ indexre

$$x_n \in f^{-1}[U], \qquad \text{azaz} \qquad f(x_n) \in U \quad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\lim(f(x_n)) = f(a)$$

következik.

2. lépés. Ha

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(a) := \{V_n \subset \mathcal{X} : \; n \in \mathbb{N}\}, \qquad \text{ahol} \qquad V_n := \left\{x \in \mathcal{X} : \; \rho_{\mathcal{X}}(a, x) < \frac{1}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 1.2.11. házi feladat) és $f \notin \mathfrak{C}[a]$, akkor alkalmas

$$U \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}}(f(a))$$

esetén bármely $n \in \mathbb{N}$-hez található olyan $x_n \in V_n$, amelyre $f(x_n) \notin U$. Így V_n definíciója alapján

$$\lim(\rho_{\mathcal{X}}(a, x_n)) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim(x_n) = a.$$

Viszont

$$f(x_n) \nrightarrow f(a) \qquad (n \to \infty)$$

az $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ metrikus térben, hiszen U nem tartalmazza ennek a sorozatnak egyetlen tagját sem. ■

1.2.23. gyakorló feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$ továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall\, x \in X : \; (\rho_{\mathcal{X}}(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{Y}}(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

állítás!

Útm.

1.2.42. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ metrikus tér, A (mindenütt) sűrű $\mathcal{X}$-ben, továbbá $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ olyan folytonos függvények, amelyekre

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in A),$$

akkor igaz az $f = g$ egyenlőség!

Útm. Ha $a \in A^c$ és A sűrű, akkor $a \in A'$, ezért alkalmas

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozattal $\lim(x_n) = a$. Mivel $f, g \in \mathfrak{C}[a]$, ezért

$$\lim(f(x_n)) = f(a) \qquad \text{és} \qquad \lim(g(x_n)) = g(a).$$

Így

$$f(x_n) = g(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan $f(a) = g(a)$ következik. ■

1.2.43. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, továbbá

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \inf \{\rho(x, a) \in \mathbb{R} : \; a \in A\},$$

akkor f folytonos függvény!

Útm. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\rho_E(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljesül. Valóban, ha $x, y \in \mathcal{X}$ és $a \in A$, akkor

$$f(y) \leq \rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a),$$

így

$$f(y) \leq \rho(x, y) + f(x), \qquad \text{azaz} \qquad f(y) - f(x) \leq \rho(x, y).$$

x és y szerepét felcserélve az iméntiekből azt kajuk, hogy

$$f(x) - f(y) \leq \rho(y, x) = \rho(x, y),$$

így

$$\rho_E(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y).$$

Ha most $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$, akkor a $\delta := \varepsilon$ választással tetszőleges $y \in \mathcal{X}$, $\rho(x, y) < \delta$ esetén

$$\rho_E(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y) < \delta = \varepsilon. \quad ■$$

1.2.24. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-et az 1.2.8. feladatbeli metrikával látjuk el, továbbá

$$f : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \qquad f((x_n)) := (x_{n+1} - x_n),$$

akkor f folytonos függvény!

Útm.

1.2.44. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f zérushelyeinek a halmaza, azaz az

$$A := \{x \in \mathcal{X} : \ f(x) = 0\}$$

halmaz zárt (vö. 1.1.28. feladat)!

Útm. Ha A nem zárt, akkor van olyan $a \in \mathcal{X}$, hogy $a \in A' \backslash A$, azaz $f(a) \neq 0$, továbbá alkalmas

$$(x_n) : \mathbb{N} \to A$$

sorozattal $\lim(x_n) = a$. Mivel f folytonos, ezért

$$f(a) = f(\lim(x_n)) = \lim(f(x_n)) = 0,$$

ami nem lehetséges. ■

1.2.9. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$, $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus terek esetén az $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvényt

1. **egyenletesen folytonos**nak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\rho(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2. **Lipschitz-folytonos**nak nevezzük, ha alkalmas $L \geq 0$ számmal

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljesül. Az L számot **Lipschitz-állandó**nk nevezzük.

Világos, hogy minden Lipschitz-folytonos függvény egyenletesen folytonos (a $\delta := \varepsilon/L$ választás megfelel), és minden egyenletesen folytonos függvény folytonos (ugyanaz a δ megfelel minden $a \in \mathcal{X}$-re).

1.2.45. feladat. Lássuk be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos függvény, akkor f **Luzin-tulajdonságú**, azaz bármely $N \subset [a, b]$ (Lebesgue-)nullmértékű halmaz f szerinti képe ugyancsak nullmértékű!

Útm. Ha $N \subset [a, b]$ nullmértékű halmaz, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan

$$I_n := [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

intervallumsorozat, amelyre

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

teljesül. Mivel alkalmas $L \geq 0$ számra

$$|f(b_n) - f(a_n)| \leq L|b_n - a_n|,$$

ezért (vö. 11.1.8. állítás)

$$f[N] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f[I_n], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(f[I_n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} L(b_n - a_n) < L\varepsilon,$$

azaz $\mu_1(f[N]) = 0$. ■

1.2.25. gyakorló feladat. Döntsük el, hogy egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények, ha a metrika mindkét téren az euklideszi metrika!

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2x - 5y + 1$;

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2}$;

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x + y^2$.

Útm.

1.2.26. gyakorló feladat. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{X}$, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ esetén mutassuk meg, hogy az

$$f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \rho(x, a), \quad g(x) := \inf\{\rho(a, x) \in \mathbb{R} : \ a \in A\}$$

függvények egyenletesen folytonosak!

Útm.

1.2.46. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\mathrm{rec} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{rec}(x) := 1/x$$

függvény folytonos, de nem egyenletesen folytonos, az

$$\mathrm{add} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{add}(x,y) := x + y$$

függvény egyenletesen folytonos, a

$$\mathrm{szor} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{szor}(x,y) := x \cdot y$$

függvény folytonos, de nem egyenletesen folytonos!

Útm.

1. lépés. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, továbbá

$$\delta := \min\left\{\frac{|x|}{2}, \frac{|x|^2 \cdot \varepsilon}{2}\right\},$$

akkor

$$(y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| < \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |y| \geq \frac{|x|}{2},$$

és így

$$|\mathrm{rec}(x) - \mathrm{rec}(y)| = \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|} < \frac{2\delta}{|x|^2} \leq \varepsilon.$$

Ha pedig $\varepsilon := 1$ és valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $1/2n < \delta$, akkor

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| < \delta \qquad \text{és} \qquad \left|\mathrm{rec}\left(\frac{1}{n}\right) - \mathrm{rec}\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = n \geq \varepsilon.$$

2. lépés. Ha $x, y, w, z \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, továbbá $\delta := \varepsilon/2$, akkor

$$\rho_E((x,w),(y,z)) = \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2} < \delta$$

következtében

$$|x-w| < \delta \qquad \text{és} \qquad |y-z| < \delta,$$

és így

$$|(x+y) - (w+z)| \leq |x-w| + |y-z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. lépés. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, továbbá

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|x| + |y| + 1}\right\},$$

akkor

$$\big((w,z) \in \mathbb{R}^2, \quad \rho_E((x,y),(w,z)) < \delta\big) \qquad \Longrightarrow \qquad (|x-w| < \delta, \quad |y-z| < \delta),$$

ill. $|w| \leq |x| + 1$, és így

$$\begin{aligned} |x \cdot y - w \cdot z| &\leq |xy - wy| + |wy - wz| = \\ &= |y| \cdot |x - w| + |w| \cdot |y - z| \leq \\ &\leq (|y| + |x| + 1) \cdot \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ha pedig $\varepsilon := 1$ és valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $1/n < \delta$, akkor az

$$u_n := (n{,}0), \quad v_n := \left(n, \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra

$$\rho_E(u_n, v_n) < \delta \qquad \text{és} \qquad |\text{szor}\,(u_n) - \text{szor}\,(v_n)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

1.2.47. feladat. Igazoljuk, hogy, ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, továbbá $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ folytonos, valamint $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad \lambda f$$

függvények is folytonosak!

Útm. Az 1.1.24. feladat következményeként folytonos f és g esetén a

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^2, \quad p(x) := (f(x), g(x))$$

függvény folytonos, így (vö. 1.2.46. feladat) pl. az

$$\text{add} \circ p = f + g$$

függvény is az. $\blacksquare$

1.2.27. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$, továbbá

$$x_n, y_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor igaz a

$$(\lim(x_n) = \alpha, \quad \lim(y_n) = \beta) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(\rho(x_n, y_n)) = \rho(\alpha, \beta)$$

implikáció!

Útm.

1.2.48. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ metrikus tér, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ folytonos függvény, és $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ Cauchy-sorozat, akkor

$$f(x_n) \in \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

nem feltétlenül Cauchy-sorozat!

Útm. Ha pl.

$$\mathcal{X} := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{R},$$

továbbá

$$\rho_{\mathcal{X}} := \rho_E, \qquad \text{ill.} \qquad \rho_{\mathcal{Y}} := \rho_E,$$

akkor a

$$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos, és az

$$x_n := \operatorname{arctg}(n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat teljesíti a feltételeket. ■

1.2.49. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus tér, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ egyenletesen folytonos függvény és az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat Cauchy-sorozat, akkor az

$$f(x_n) \in \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

is Cauchy-sorozat!

Útm. Ha f egyenletesen folytonos, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\rho(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

Ha (x_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq N$ indexre

$$\rho(x_m, x_n) < \delta.$$

Tehát bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma(f(x_m), f(y_n)) < \varepsilon,$$

azaz $(f(x_n))$ Cuachy-sorozat $(\mathcal{Y}, \sigma)$-ban. ■

1.2.50. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér,

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Cauchy-sorozat, továbbá az

$$a_n := \rho(x_n, x_{n+1}) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra $(a_n) \in l_1$, akkor (x_n) Cauchy-sorozat!

Útm. A háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával adódik a

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k = |s_{n+m-1} - s_{n-1}|$$

becslés, ahol

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

$(a_n) \in l_1$ azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty,$$

azaz (s_n) Cauchy-féle. ■

Az 1.2.50. feladatbeli állítás megfordítása nem igaz, ui. ha pl.

$$\rho(x,y) := \begin{cases} \max\{|x|,|y|\} & (x \neq y), \\ \\ 0 & (x = y) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

akkor az $(\mathbb{R}, \rho)$ metrikus tér esetében, az

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-féle, de az

$$a_n := \rho(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $(a_n) \notin l_1$.

1.2.4. Teljes metrikus terek

Bizonyos metrikus terekben nem konvergens sorozatok is lehetnek Cauchy-sorozatok. Így van ez a $(\mathbb{Q}, \rho_E)$ metrikus térben is, ui. ha pl.

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

olyan sorozat, hogy

$$x_n \geq x_{n+1}, \quad 0 < x_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor (x_n) Cauchy-sorozat, hiszen bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$|x_m - x_n| < \max\left\{\frac{1}{10^m}, \frac{1}{10^n}\right\} \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \; m, n \geq \ln(1/\varepsilon)),$$

de nem konvergens, hiszen ellenkező esetben alkalmas $\alpha \in \mathbb{Q}$ elemmel

$$|\alpha - \sqrt{2}| \leq |\alpha - x_n| + |x_n - \sqrt{2}| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

telesülne, ami nem lehetséges, mert

$$\alpha = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Sőt, az $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \rho_E)$ metrikus térben az

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(harmonikus) sorozat Cauchy-sorozat, hiszen

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{|m-n|}{mn} \leq \frac{m+n}{mn} \leq \frac{2\max\{m,n\}}{mn} = \frac{2}{\min\{m,n\}} \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de nem konvergens.

1.2.10. definíció. Az $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus teret **teljes**nek nevezzük, ha $(\mathcal{X}, \rho)$-ban bármely Cauchy-sorozat konvergens.

1.2.17. példa. Ha

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) := |\text{arctg}\,(x) - \text{arctg}\,(y)|,$$

akkor az $(\mathbb{R}, \rho)$ metrikus tér nem teljes, hiszen az

$$x_n := n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-sorozat, mivel

$$\lim(\text{arctg}\,(n)) = \frac{\pi}{2}$$

miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_m, x_n) = |\text{arctg}\,(m) - \text{arctg}\,(n)| < \varepsilon,$$

viszont nem konvergens, ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\text{arctg}\,(x) - \text{arctg}\,(n)| \longrightarrow \left|\text{arctg}\,(x) - \frac{\pi}{2}\right| > 0 \qquad (n \to \infty).$$

1.2.18. példa. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ az indiszkrét félmetrikus tér, akkor $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes, hiszen az indiszkrét metrikus térben minden sorozat konvergens.

1.2.19. példa. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes, ui. a diszkrét metrikus térben valamely sorozat pontosan akkor konvergens, ha kvázi-kontans, és diszkrét metrikus terekben a Cauchy-sorozatok kvázi-konstans sorozatok (vö. 1.2.36. feladat).

1.2.20. példa. Tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén a $(\mathbb{K}^d, \rho_E)$ metrikus tér teljes.

Az 1.2.48. feladatbeli példának a segítségével belátható, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{X}, \sigma)$ olyan metrikus terek, hogy $\rho \sim \sigma$, akkor $(\mathcal{X}, \rho)$ teljességéből nem feltétlenül következik $(\mathcal{X}, \sigma)$ teljessége. Metrikus terek teljessége tehát a metrikának és nem az általa generált topológiának a függvénye. Erre a tényre úgy is szokás hivatkozni, hogy metrikus terek teljessége nem **topologikus fogalom**.

1.2.51. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha

1. $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes félmetrikus tér, $\emptyset \neq \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ zárt, akkor az $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$ altér teljes.
2. $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$ az $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes altere, akkor $\mathcal{Y}$ zárt.
3. $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér, de nem metrikus tér, akkor $(\mathcal{X}, \rho)$-ban mindig van olyan teljes $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$ altér, hogy $\mathcal{Y}$ nem zárt.

Útm.

1. Megmutatjuk, hogy ha
$$(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{Y}$$
Cauchy-sorozat az $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$ altérben, akkor alkalmas $\beta \in \mathcal{Y}$ esetén
$$\lim(y_n) = \beta.$$
1. lépés. Világos, hogy (y_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \rho)$-ban is, így $(\mathcal{X}, \rho)$ teljessége következtében alkalmas $\beta \in \mathcal{X}$ esetén
$$\lim(y_n) = \beta.$$
2. lépés. Mivel $\beta \in \overline{\mathcal{Y}}$, ezért $\mathcal{Y}$ zártsága következtében
$$\beta \in \overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y},$$
tehát (y_n) konvergens az $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$ altérben (vö. 1.2.12. házi feladat).
2. Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{Y}$ nem zárt, akkor $(\mathcal{Y}, \rho)$ nem teljes.

   1. lépés. Ha $y \in \overline{\mathcal{Y}} \backslash \mathcal{Y}$, akkor van olyan
$$(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{Y}$$
sorozat, hogy
$$\lim(y_n) = y$$
/$(\mathcal{X}, \rho)$-ban/. Így (y_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \rho)$-ban, és triviálisan $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}})$-ban is.

2. lépés. Ha (y_n) konvergens volna $(\mathcal{Y},\rho)$-ban, akkor lenne olyan $\beta\in\mathcal{Y}$, hogy

$$\lim(y_n)=\beta, \qquad \text{azaz} \qquad \rho(y_n,\beta)\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

teljesülne. Ez pedig azt jelentené, hogy $(\mathcal{X},\rho)$-ban

$$\lim(y_n)=\beta, \qquad \text{azaz} \qquad y=\beta\in\mathcal{Y}$$

lenne, ami nem lehetséges.

3. Ha ρ olyan félmetrika $\mathcal{X}$-en, ami nem metrika, akkor alkalmas $\alpha,\beta\in\mathcal{X}$, $\alpha\neq\beta$ esetén $\rho(\alpha,\beta)=0$. Így ha $\mathcal{Y}:=\{\beta\}$, akkor $(\mathcal{Y},\rho|_{\mathcal{Y}})$ triviálisan teljes, hiszen $\mathcal{Y}$-ban a konstans sorozat az egyetlen sorozat, amely konvergens. Másrészt viszont ez a sorozat $(\mathcal{X},\rho)$-ban α-hoz konvergál, hiszen $\rho(\alpha,\beta)=0$. Így $\alpha\in\overline{\mathcal{Y}}$, azaz $\mathcal{Y}$ nem zárt. ■

Ez azt jelenti, hogy valamely **teljes metrikus tér altere pontosan akkor teljes, ha zárt**.

1.2.52. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathcal{K}(H),\rho_\infty)$ metrikus tér teljes!

Útm. Ha (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{K}(H),\rho_\infty)$-ben, azaz bármely $\varepsilon>0$ esetén van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy ha $m,n\in\mathbb{N}$ és $m,n\geq N$, akkor

$$\sup\{|f_m(x)-f_n(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in H\}<\varepsilon.$$

Mivel tetszőleges $x\in H$ esetén

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leq\sup\{|f_m(y)-f_n(y)|\in\mathbb{R}:\ y\in H\},$$

ezért $(f_n(x))$ Cauchy-sorozat $(\mathbb{K},\rho_E)$-ben, ami teljes, így létezik a $\lim(f_n(x))\in\mathbb{K}$ határérték. Azt kell tehát már csak igazolni, hogy az

$$f:H\to\mathbb{K}, \qquad f(x):=\lim(f_n(x))$$

függvény korlátos: $f\in\mathcal{K}(H)$ és

$$f_n\longrightarrow f \qquad (n\to\infty)$$

a $(\mathcal{K}(H),\rho_\infty)$ térben.

1. lépés. Világos, hogy az $\varepsilon:=1$ választással alkalmas $N\in\mathbb{N}$ esetén, ha $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq N$, akkor

$$|f_m(x)-f_n(x)|<1 \qquad (x\in H).$$

Így, ha $n:=N$, akkor tetszőleges $x\in H$ esetén

$$|f_m(x)|\leq 1+|f_N(x)|\leq 1+\rho_\infty(f_N,0) \qquad (N\leq m\in\mathbb{N}).$$

Ezért az $m\to\infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$|f(x)|\leq 1+\rho_\infty(f_N,0) \qquad (x\in H),$$

azaz $f\in\mathcal{K}(H)$.

2. lépés. Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq N$, akkor

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (x \in H),$$

azaz

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < |f(x) - f_m(x)| + \varepsilon.$$

Így az $m \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \qquad (x \in H),$$

ahonnan

$$\rho_\infty(f, f_n) = \sup\{|f(x) - f_n(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in H\} \leq \varepsilon$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$f_n \longrightarrow f \qquad (n \to \infty)$$

a $(\mathcal{K}(H), \rho_\infty)$ térben. ■

1.2.53. feladat. Igazoljuk, hogy az (l_∞, ρ_∞) metrikus tér teljes!

Útm. Ez a $H := \mathbb{N}$ választással az 1.2.52. feladat speciális esete. ■

1.2.54. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}[a, b], \rho_\infty)$ metrikus tér teljes!

Útm. Mivel bármely $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ függvény korlátos, ezért a tér teljes (vö. 1.2.52. feladat). ■

1.2.55. feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{C}[a, b], \rho_1)$ nem teljes metrikus tér!

Útm.

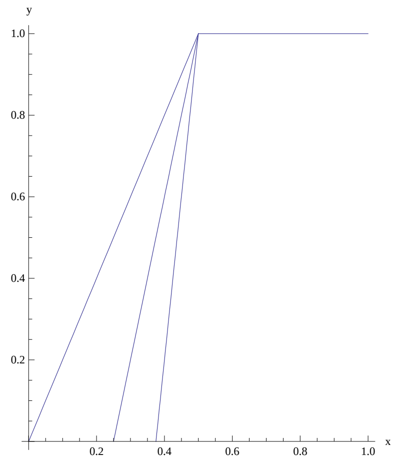
1. lépés. Megmutatjuk, hogy a

$$\rho_1(f, g) := \int_a^b |f - g| \qquad (f, g \in \mathfrak{C}[a, b])$$

függvény metrika. Világos, hogy ρ_1 pozitív szemidefinit és szimmetrikus. Az intergandus folytonossága és nemnegativitása következtében $\rho_1(f, g) = 0$-ból $f = g$ következik. A háromszög-egyenlőtlenség pedig az

$$|f - g| \leq |f - h| + |h - g|$$

becslés, valamint az integrál monotonitásának és additivitásának a következménye.



2. lépés. Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \left(x \in \left[0, \dfrac{n-1}{2n}\right)\right), \\[2ex] 2n\left(x - \dfrac{n-1}{2n}\right) & \left(x \in \left[\dfrac{n-1}{2n}, \dfrac{1}{2}\right]\right), \\[2ex] 1 & \left(x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_1)$-ben, hiszen ha $n, N \in \mathbb{N}\colon n \geq N$, akkor

$$\begin{aligned} \rho_1(f_N, f_n) &= \int_0^1 |f_N - f_n| = \int_0^1 (f_N - f_n) = \int_0^1 f_N - \int_0^1 f_n = \\ &= \frac{1}{4N} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4N}, \end{aligned}$$

így bármely $\varepsilon > 0$ esetén ha $N \in \mathbb{N}\colon N > 1/4\varepsilon$, úgy

$$\rho_1(f_N, f_n) \leq \frac{1}{4N} < \varepsilon.$$

Ha

$$f_n \longrightarrow f \qquad (n \to \infty)$$

a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_1)$ térben, akkor

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{1/2} |f| &\leq \int_0^{1/2} |f_n| + \int_0^{1/2} |f - f_n| = \\ &= \frac{1}{4n} + \int_0^{1/2} |f - f_n| \leq \frac{1}{4n} + \int_0^1 |f - f_n| = \\ &= \frac{1}{4n} + \rho_1(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

azaz

$$\int_0^{1/2} |f| = 0,$$

és így

$$f(x) = 0 \qquad (x \in [0,1/2]).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{1/2}^1 |f-1| \quad &\leq \quad \int_{1/2}^1 |f_n - 1| + \int_{1/2}^1 |f - f_n| = \\ &= \quad 0 + \int_{1/2}^1 |f - f_n| \leq \rho_1(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

azaz

$$\int_{1/2}^1 |f-1| = 0,$$

és így

$$f(x) = 1 \qquad (x \in [1/2,1]),$$

ami nem lehetséges. ■

1.2.56. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.2.9. feladatbeli félmetrika teljes!

Útm. Ha $A_n \in \Omega^*$ $(n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat, azaz

$$\begin{aligned} \rho(A_m, A_n) \quad &= \quad \mu(A_m \bigtriangleup A_n) = \int \chi_{A_m \triangle A_n} \, \mathrm{d}\mu = \\ &= \quad \int |\chi_{A_m} - \chi_{A_n}| \, \mathrm{d}\mu = \|\chi_{A_m} - \chi_{A_n}\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty), \end{aligned}$$

akkor a Lebesgue-tétel következtében alkalmas $f \in L^1$ függvénnyel, (ν_n) indexsorozattal, valamint egy $N \in \Omega^*$: $\mu(N) = 0$ halmazzal

$$\|f - \chi_{A_n}\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ill.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_{\nu_n}}(x) \qquad (x \in X \backslash N).$$

Világos, hogy bármely $x \in X \backslash N$ esetén

$$\chi_{A_{\nu_n}}(x) \in \{0,1\}, \qquad \text{így} \qquad f(x) \in \{0,1\},$$

sőt az $x \in X$ elemre, ill. a

$$B := \lim\inf(A_{\nu_n})$$

halmazra

$$x \in B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \chi_{A_{\nu_n}}(x) = 1$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in(X\backslash N)\cap B),\\ \\ 0 & (x\in(X\backslash N)\backslash B),\end{cases}$$

így a

$$g:=\chi_{(X\backslash N)\cap B}$$

függgvényre

$$g(x)=f(x)\qquad(x\in X\backslash N)$$

teljesül. Így $g=f$ μ-m.m., következésképpen

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\int g\,\mathrm{d}\mu,$$

ahonnan

$$\|f-\chi_{A_{\nu_n}}\|_1=\|g-\chi_{A_{\nu_n}}\|_1\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

következik. Így az

$$A:=(X\backslash N)\cap B$$

halmazra

$$\rho(A_n,A)=\|\chi_{A_n}-\chi_A\|_{L^1}=\|g-\chi_{A_n}\|_{L^1}\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty),$$

azaz (A_n) konvergens halmazsorozat. ■

1.2.16. házi feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér esetén az $(\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\rho})$ faktortér pontosan akkor teljes, ha $(\mathcal{X},\rho)$ teljes!

1.2.57. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X}:=\{(x_n):\mathbb{N}\to\mathbb{K}:\ \exists N\in\mathbb{N}\,\forall N\leq k\in\mathbb{N}:\ x_k=0\},$$

akkor az $(\mathcal{X},\rho_\infty)$ metrikus tér nem teljes!

Útm. Olyan $(\mathcal{X},\rho_\infty)$-beli $(x^{(n)})$ Cauchy-sorozatra adunk példát, amely nem konvergens $(\mathcal{X},\rho_\infty)$-ben. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$x^{(n)}=\left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

olyan sorozat, amelyre

$$x_k^{(n)}:=\begin{cases}1/k & (k\leq n),\\ \\ 0 & (k>n),\end{cases}$$

teljesül, azaz

$$x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots\right).$$

- Világos, hogy $\left(x^{(n)}\right)$ olyan $(\mathcal{X},\rho_\infty)$-beli sorozat, amelyre tetszőleges $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$ indexek esetén

$$\begin{aligned}\rho_\infty\left(x^{(m)},x^{(n)}\right) &= \sup\left\{\left|x_k^{(m)}-x_k^{(m)}\right|\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{N}\right\}=\\ &= \sup\left\{\frac{1}{k}\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{N}:\ m<k\leq n\right\}=\frac{1}{m+1}.\end{aligned}$$

  teljesül. Így, ha $\varepsilon>0$, akkor az $N\in\mathbb{N}$, $N>1/\varepsilon$ indexre

$$\rho_\infty\left(x^{(N)},x^{(n)}\right)=\frac{1}{N+1}<\varepsilon\qquad(N\leq n\in\mathbb{N}),$$

  azaz $\left(x^{(n)}\right)$ Cauchy-sorozat $(\mathcal{X},\rho_\infty)$-ben.

- Ha $(x_k^{(n)})$ konvergens lenne $(\mathcal{X},\rho_\infty)$-ben, akkor alkalmas $x:=(x_k)\in\mathcal{X}$ sorozatra

$$\rho_\infty\left(x^{(n)},x\right)\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

  teljesülne. Ekkor

$$x_k=\frac{1}{k}\qquad(k\in\mathbb{N})$$

  lenne, hiszen ha valamely $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$x_k\neq\frac{1}{k},$$

  akkor tetszőleges $n\in\mathbb{N}$, $n\geq k$ mellett

$$\rho_\infty\left(x^{(n)},x\right)=\sup\left\{\left|x_k^{(n)}-x_k\right|\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{N}\right\}\geq\left|\frac{1}{k}-x_k\right|>0.$$

  Ez viszont ellentmondana a

$$\rho_\infty\left(x^{(n)},x\right)\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

  határérték-relációnak. Ennélfogva $x\notin\mathcal{X}$. ■

1.2.58. feladat. Igazoljuk, hogy ha ρ az 1.2.4. gyakorló feladatbeli metrika, úgy van olyan $(\mathbb{R},\rho)$-beli Cauchy-sorozat, amely nem Cauchy-sorozat $(\mathbb{R},\rho_E)$-ben!

Útm. Ha

$$x_n:=n\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

akkor (x_n) nem Cauchy-sorozat $(\mathbb{R},\rho_E)$-ben, hiszen ha $m,n\in\mathbb{N}$ és $m\neq n$, akkor

$$\rho_E(x_m,x_n)=|m-n|\geq 1.$$

Ugyanakkor (x_n) Cauchy-sorozat $(\mathbb{R},\rho)$-ban, hiszen $(\mathbb{R},\rho_E)$-ben az

$$y_n:=\frac{1}{x_n}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

sorozat konvergens, így $(\mathbb{R}, \rho_E)$ teljessége következtében (y_n) Cauchy-sorozat $(\mathbb{R}, \rho_E)$-ben, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$, akkor

$$|y_m - y_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Így

$$\frac{n}{n+1} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következtében bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$ esetén

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &= \left|\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{m}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = \left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{m}\right)}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| = \\ &= \frac{mn}{(m+1)(n+1)}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq 1 \cdot \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.2.59. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\rho(n, m) := \begin{cases} 0 & (n = m), \\ 1 + \dfrac{1}{m+n} & (n \neq m) \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

akkor $(\mathbb{N}, \rho)$ teljes metrikus tér!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ρ metrika. Valóban, ρ pozitív definit és szimmetrikus, így csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell belátni. Ha $m, n, p \in \mathbb{N}$, akkor

- $m = n$ esetén
$$\rho(m, n) = 0 \leq \rho(m, p) + \rho(p, n).$$
- $m \neq n$ esetén, ha
  - $p = m$, akkor $p \neq n$ és
  $$1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{p+n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m+n} \leq \frac{1}{p+n} \quad \Leftrightarrow \quad p + n \leq m + n \quad \Leftrightarrow \quad p \leq m;$$
  - $p = n$, akkor $p \neq m$ és
  $$1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{p+m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m+n} \leq \frac{1}{p+m} \quad \Leftrightarrow \quad p + m \leq m + n \quad \Leftrightarrow \quad p \leq n;$$
  - $p \notin \{m, n\}$, akkor
  $$1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{m+p} + 1 + \frac{1}{n+p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{n+p},$$
  ami nyilvánvalóan igaz.

2. lépés. Ha

$$x_n \in \mathbb{N} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, azaz

$$\rho(x_m, x_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

akkor mivel tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $\rho(x_m, x_n) > 1$, így

$$\rho(x_m, x_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

azzal egyenértékű, hogy

$$(\exists \alpha \in \mathbb{N} \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad (N \leq m, n \in \mathbb{N} \implies x_m = x_n = \alpha)),$$

azaz (x_n) kvázikonstans, így konvergens. ■

1.2.60. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$\Sigma_2 := \{x = (x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : \ x_n \in \{0,1\} \, (n \in \mathbb{N}_0)\}$$

továbbá

$$\rho(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \qquad (x, y \in \Sigma_2),$$

akkor (Σ_2, ρ) teljes metrikus tér!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy (Σ_2, ρ) metrikus tér. Mivel bármely $x, y \in \Sigma_2$ esetén

$$|x_n - y_n| \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < +\infty,$$

ezért

$$\rho(x, y) \in \mathbb{R} \qquad (x, y \in \Sigma_2).$$

Világos, hogy bármely $x, y \in \Sigma_2$ esetén

$$\rho(x, y) \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \rho(y, x) = \rho(x, y).$$

Ha pedig $x, y, z \in \Sigma_2$, akkor

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

így

$$\begin{aligned}
\rho(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - z_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \frac{|y_n - z_n|}{2^n} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n - z_n|}{2^n} = \\
&= \rho(x, y) + \rho(y, z).
\end{aligned}$$

2. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\rho(x,y) \le \frac{1}{2^n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_k = y_k \quad (k \in \{0,\ldots,n\})$$

teljesül. Valóban, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

- $x_k = y_k$ $(k \in \{0,\ldots,n\})$, akkor

$$\rho(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

- Ha bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\rho(x,y) \le \frac{1}{2^n} \qquad \Longrightarrow \qquad x_k = y_k \quad (k \in \{0,\ldots,n\}),$$

azaz alkalmas $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \le n$ esetén

$$x_m \ne y_m \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(x,y) \ge \frac{1}{2^n},$$

akkor

$$\rho(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \ge \frac{|x_m - y_m|}{2^m} = \frac{1}{2^m} \ge \frac{1}{2^n}.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy a (Σ_2, ρ) metrikus tér teljes. Ha

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat (Σ_2, ρ)-ban, akkor bármely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\rho\left(x^{(m)}, x^{(n)}\right) < \frac{1}{2^k} \qquad (N \le m, n \in \mathbb{N}_0).$$

Így a fentiek alapján

$$x_l^{(m)} = x_l^{(n)} \qquad (\mathbb{N}_0 \ni l \le k,\ N \le m, n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz

$$x_l^{(m)} = x_l^{(N)} \qquad (\mathbb{N}_0 \ni l \le k,\ N \le m \in \mathbb{N}_0).$$

Ezért már csak azt kellmegmutatni, hogy

$$x := (x_l) := \left(x_l^{(N)}\right) \quad (\mathbb{N}_0 \ni l \le k) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

teljesül. Ha $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $k \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$\frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Mivel

$$x_l^{(m)} = x_l \qquad (\mathbb{N}_0 \ni l \le k,\ N \le m \in \mathbb{N}_0),$$

ezért a fentiek alapján

$$\rho\left(x^{(m)}, x\right) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon \qquad (N \le m \in \mathbb{N}_0). \quad \blacksquare$$

1.2.61. feladat. Igazoljuk, hogy ha $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{l+n} = x_l \qquad (l \in \mathbb{N}_0),$$

azaz

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, \ldots),$$

akkor vn olyan $(y_n) \in \Sigma_2$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x,$$

azaz az n-periodikus $0-1$-sorozatok sűrűn vannak Σ_2-ben!

Útm. Ha

$$y_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor (y_n) $(n+1)$-periodikus sorozat Σ_2-ben, és az előző feladatbeli meggondolások alapján

$$\rho(y_n, x) \leq \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = x$$

következik. ■

1.2.62. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér pontosan akkor teljes, ha bármely, az

$$\emptyset \neq A_n \subset \mathcal{X}, \quad A_n \text{ zárt}, \quad A_{n+1} \subset A_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim(\text{diam}\,(A_n)) = 0$$

tulajdonságokkal rendelkező (A_n) (**egymásba skatulyázott**) halmazsorozat esetén

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér és (A_n) olyan $\mathcal{X}$-beli halmazsorozat, amelyre teljesülnek a feltételek, akkor alkalmas

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$$

sorozat esetén

$$x_n \in A_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így, ha $\varepsilon > 0$, akkor a

$$\lim(\text{diam}\,(A_n)) = 0$$

feltételből egy olyan $N \in \mathbb{N}$ index léte következik, amelyre

$$\text{diam}\,(A_n) < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ha $M \in \mathbb{N}$, $M > N$, akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > M$ indexekre

$$\rho(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(A_M) < \varepsilon,$$

azaz (x_n) Cauchy-sorozat. A tér teljessége és az A_n halmazok zártsága $(n \in \mathbb{N})$ folytán tehát alkalmas $\alpha \in \mathcal{X}$ elemmel

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

2. lépés. Ha bármely

$$\emptyset \neq A_n \subset \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

zárt, egymásba skatulyázott és a

$$\lim(\operatorname{diam}(A_n)) = 0$$

tulajdonsággal rendelkező (A_n) halmazsorozat esetén

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset,$$

továbbá

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$$

Cauchy-sorozat, akkor a

$$H_n := \{x_k \in \mathcal{X} : \ k \geq n \in \mathbb{N}\}$$

halmazokra

$$H_n \neq \emptyset, \quad H_{n+1} \subset H_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért (vö. 1.2.40. feladat)

$$\lim(\operatorname{diam}(H_n)) = 0 \quad \text{és} \quad \overline{H_{n+1}} \subset \overline{H_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\operatorname{diam}(\overline{H_n}) = \operatorname{diam}(H_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 1.2.23/2. feladat), így az

$$A_n := \overline{H_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra teljesülnek a feladat feltételei, ennélfogva

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n} \neq \emptyset.$$

Így, ha

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n},$$

akkor

$$\lim(\operatorname{diam}(\overline{H_n})) = 0$$

következtében bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\rho(x_n, a) \leq \operatorname{diam}(\overline{H_n}) < \varepsilon,$$

azaz (x_n) konvergens, tehát $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes. ■

Az 1.2.62. feladatbeli állítás élesíthető azáltal, hogy a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

metszet egyelemű (vö. [28, 27]).

1.2.63. feladat. Bizonyítsuk be, hgy az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér pontosan akkor teljes, ha bármely

$$x_n \in \mathcal{X} \quad \text{és} \quad r_n \in (0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetén igaz a

$$/B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(r_n) = 0/ \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$$

implikáció!

Útm. Az

$$A_n := B_{r_n}(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatra teljesülnek az 1.2.62. feladatbeli állítás feltételei, hiszen

$$\emptyset \neq A_n \subset \mathcal{X}, \quad A_{n+1} \subset A_n, \quad A_n \text{ zárt} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\lim(\operatorname{diam}(A_n)) = \lim(2r_n) = 2\lim(r_n) = 0. \quad \blacksquare$$

1.2.64. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.2.59. feladatban bevezetett teljes metrikus tér esetén van olyan

$$x_n \in \mathbb{N} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy alkalmas

$$r_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számokkal

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) = \emptyset$$

teljesül!

Útm. Ha

$$x_n := n \qquad \text{és} \qquad r_n := 1 + \frac{1}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$B_n := B_{r_n}(x_n) = \left\{ k \in \mathbb{N} : \ \rho(k,n) \leq 1 + \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Így

- a (B_n) halmazsorozat antiton:

$$B_{n+1} \subset B_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$B_n = \{k \in \mathbb{N} : \ k \geq n\}.$$

- a (B_n) halmazsorozat metszete üres:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset,$$

ui. ha

$$l \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n,$$

akkor

$$l \in B_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$l \geq n \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Világos, hogy nem teljesülnek az 1.2.63. feladatbeli állítás feltételei, hiszen

$$\lim(r_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = 1 \neq 0.$$

1.2.65. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely teljes metrikus tér Baire-tér is egyeben (**Baire-tétel**)!

Útm. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, akkor minden megszámlálható sok, nyílt, mindenütt sűrű halmaz metszete is mindenütt sűrű (vö. 1.1.78. feladat). Ehhez elég belátni, hogy $A_n \subset \mathcal{X}$ nyílt és mindenütt sűrű halmaz $(n \in \mathbb{N})$ és $N \in \mathcal{G}_\rho$ esetén

$$N \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Ebből már következik, hogy

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \mathcal{X}.$$

Mivel $\overline{A_1} = \mathcal{X}$, ezért $\emptyset \neq N \cap A_1$ nyílt, így $N \cap A_1$ tartalmaz nyílt gömböt és ezzel koncentrikus, kisebb sugarú zárt gömböt is. Így alkalmas $x_1 \in \mathcal{X}$ és $r_1 \in (0,1/2)$ esetén

$$B_{r_1}(x_1) \subset N \cap A_1.$$

Mivel

$$\emptyset \neq K_{r_1}(x_1) \cap A_2$$

nyílt, ezért alkalmas $x_2 \in \mathcal{X}$ és $r_2 \in (0{,}1/4)$ esetén

$$B_{r_2}(x_2) \subset K_{r_1}(x_1) \cap A_2.$$

Világos, hogy

$$B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1),$$

hiszen

$$K_{r_1}(X_1) \subset B_{r_1}(x_1).$$

Így teljes indukcióval olyan

$$x_n \in \mathcal{X}, \quad r_n \in (0{,}1/2^n) \quad \text{és} \quad B_{r_n}(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot értelmezhetünk, amelyre

$$\emptyset \neq K_{r_n}(x_n) \cap A_n$$

nyílt, $r_n \in (0{,}1/2^n)$ és

$$N \supset B_{r_n}(x_n) \supset B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért

$$\lim(\operatorname{diam}(B_{r_n}(x_n))) = 0,$$

így a tér teljessége következtében (vö. 1.2.62. feladat)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset.$$

Ha

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n),$$

akkor $y \in N$, azaz

$$N \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

Az 1.2.65. feladatban a metrikus tér teljessége lényeges feltétel, ui. pl. a $(\mathbb{Q}, \rho_E)$ nem teljes metrikus tér esetében, ha

$$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

bijekció, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$A_n := \mathbb{Q} \backslash \{a_n\}$$

halmaz nyílt és mindenütt sűrű, de

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

1.2.66. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, és valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz első kategóriájú, akkor $A^c = \mathcal{X} \backslash A$ második kategóriájú!

Útm. Ha A^c első kategóriájú lenne, akkor

$$\mathcal{X} = A \cup A^c$$

következtében (vö.1.1.8/2. házi feladat) $\mathcal{X}$ is első kategóriájú lenne, ami nem lehetséges (vö. 1.2.65. feladat). ■

1.2.67. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, és valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz első kategóriájú, akkor $\overline{A^c} = \mathcal{X}$, azaz A^c mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben!

Útm. Mivel $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes, ezért (vö. 1.2.65. feladat) minden megszámlálható sok, nyílt, mindenütt sűrű halmaz metszete is mindenütt sűrű. Ez pedig azt jelenti (vö. 1.1.78. feladat), hogy $\overline{A^c} = \mathcal{X}$ teljesül. ■

1.2.68. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és bármely $x > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} (f(nx)) = 0,$$

akkor teljesül a

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

határérték-reláció is!

Útm.

1. lépés. Ha adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$A_n := \{x \in [0, \infty) : \ |f(kx)| \leq \varepsilon, \ k \in \mathbb{N}, \ k \geq n\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} (f(nx)) = 0$$

egyenlőségből az következik, hogy

$$[0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mivel $[0, \infty)$ második kategóriájú, így alkalmas $n \in \mathbb{N}$ és $0 < a < b$ esetén

$$\overline{A_n} = [a, b].$$

Mivel f folytonos, ezért A_n zárt $(n \in \mathbb{N})$ és így $A_n = [a, b]$, azaz ha $x \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$: $k \geq n$, akkor

$$|f(kx)| \leq \varepsilon.$$

2. lépés. Ha

$$B_n := \{kx \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b], \ k \in \mathbb{N}, \ k \geq n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

akkor B_n lefed egy félegyenest, hiszen ha $y \in \mathbb{R}$:

$$y > \max\left\{nb, 2/(a^{-1} - b^{-1})\right\},$$

akkor

$$\frac{y}{a} > \frac{y}{b} + 2,$$

és így alkalmas $k \in \mathbb{N}$: $k \geq n$ esetén

$$\frac{y}{b} \leq k \leq \frac{y}{a},$$

ahonnan

$$ka \leq y \leq kb,$$

azaz $y \in B_n$ következik.

3. lépés. Mivel bármely $y \in B_n$ esetén $|f(y)| \leq \varepsilon$, ezért elegendően nagy y-ra $|f(y)| \leq \varepsilon$, amiből

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

következik. ■

Az elemi analízisből ismeretes, hogy ha egy folytonos függvényekből álló függvénysorozat pontonként konvergens, akkor határfüggvénye nem feltétlenül folytonos. Felmerül a kérdés, hogy milyen nagy azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben a határfüggvény szakad. Az alábbi feladatban megmutatjuk, hogy ezek a pontok sovány (első kategóriájú) halmazt alkotnak.

1.2.69. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $f_n : \mathcal{X}] \to \mathbb{R}$ folytonos $(n \in \mathbb{N})$ és

$$f(x) := \lim(f_n(x)) \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor az

$$A := \{\alpha \in \mathcal{X} : \ f \in \mathfrak{C}[\alpha]\}$$

halmaz mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben!

Útm.

1. lépés. Ha

$$A_{mn} := \left\{x \in \mathcal{X} : \ |f_m(x) - f_{m+p}(x)| < \frac{1}{n} \ (p \in \mathbb{N})\right\} \qquad (m, n \in \mathbb{N}),$$

akkor f_n, ill. $|f_m - f_{m+p}|$ folytonossága következtében A_{mn} zárt halmaz. Így a

$$\partial A_{mn} = A_{mn} \backslash \operatorname{int}(A_{mn})$$

halmaz zárt (vö. 1.1.13. feladat), és nyilvánvalóan nincsen belső pontja, azaz ∂A_{mn} sehol sem sűrű. Mivel minden konvergens sorozat Cauchy-féle, ezért bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén van olyan $m_n \in \mathbb{N}$, hogy ha $m_n \leq k, l \in \mathbb{N}$, akkor

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Innen pedig tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{mn} = \mathcal{X}$$

következik.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$x \in B := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(A_{mn}) \right),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[x]$. Ha $x \in B$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$ és $\delta > 0$, hogy ha

$$t \in \mathcal{X} : \quad \rho(x, t) < \delta,$$

akkor $t \in A_{mn}$. Így ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $1/n \leq \varepsilon/3$, akkor (a megfelelő m-nel és δ-val) az ilyen x-ekre és t-kre

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x)| &= \lim_{p\to\infty} |f_{m+p}(t) - f_{m+p}(x)| \leq \\
&\leq \limsup_{p\to\infty} \left(|f_{m+p}(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_{m+p}(x)|\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{n} + |f_m(t) - f_m(x)| + \frac{1}{n} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_m(t) - f_m(x)|\,.
\end{aligned}$$

A δ alkalmas megválasztásával elérhető, hogy

$$|f_m(t) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen, amiből már $f \in \mathfrak{C}[x]$ következik, azaz $B \subset A$.

3. lépés. Mivel

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{mn} = \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 1. **lépés**), ezért

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}(f) \quad &\subset \quad \mathcal{X}\backslash B = \mathcal{X}\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(A_{mn}) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{X}\backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(A_{mn}) \right) = \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{mn}\backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{int}(A_{mn}) \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(A_{mn}\backslash \operatorname{int}(A_{mn})\right).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy (vö. 1.1.74. feladat), hogy $\mathfrak{U}(f)$ első kategóriájú. Ez pedig a tér teljessége következtében azt jelenti (vö. 1.2.65. feladat, 1.1.27. definíció, ill. 1.1.74. feladat), hogy $\overline{A} = \mathcal{X}$ teljesül. ■

1.2.70. feladat. Lássuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény, akkor

$$\mathfrak{C}(f')\neq\emptyset,$$

azaz van olyan hely, ahol f' folytonos!

Útm. Ha f deriválható, akkr folytonos is, és bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f'(x)=\lim_{n\to\emptyset}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Ez azt jelenti (vö. 1.2.69. feladat), hogy $\overline{\mathfrak{C}(f')}=\mathbb{R}$, ahonnan $\mathfrak{C}(f')\neq\emptyset$ következik. ■

1.2.71. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X},\rho)$ teljes metrikus tér és $\emptyset\neq\Gamma$ indexhalmaz, továbbá $f_\gamma:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény $(\gamma\in\Gamma)$ esetén, ha $\{f_\gamma:\ \gamma\in\Gamma\}$ pontonként korlátos, azaz

$$\sup\{|f_\gamma(x)|\in\mathbb{R}:\ \gamma\in\Gamma\}<+\infty\qquad(x\in\mathcal{X}),$$

akkor alkalmas $N\subset\mathcal{X}$ nyílt gömb esetén $\{f_\gamma:\ \gamma\in\Gamma\}$ egyenletesen korlátos N-en, azaz igaz a

$$\sup\{|f_\gamma(x)|\in\mathbb{R}:\ \gamma\in\Gamma,\ x\in N\}<+\infty$$

egyenlőtlenség (**Osgood-tétel**)!

Útm. Ha

$$A_{n,\gamma}:=\{x\in\mathcal{X}:\ |f_\gamma(x)|\leq n\}\qquad(n\in\mathbb{N},\ \gamma\in\Gamma),$$

akkor f_γ folytonossága miatt az $A_{n,\gamma}$ halmazok zártak. Ha

$$B_n:=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_{n,\gamma}=\{x\in\mathcal{X}:\ |f_\gamma(x)|\leq n\ (\gamma\in\Gamma)\},$$

akkor B_n-ek is zártak. A feladat feltételei következtében bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $x\in B_m$, azaz

$$\mathcal{X}=\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m.$$

A teljesség, ill. a Baire-tétel következtében alkalmas $m\in\mathbb{N}$ esetén van olyan N nyílt gömb, amelyre $N\subset B_m$. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$|f_\gamma(x)|\leq m\qquad(\gamma\in\Gamma,\ x\in N).\quad ■$$

1.2.72. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér, az $A\subset\mathcal{X}$ halmaz (mindenütt) sűrű: $\overline{A}=\mathcal{X}$ és $(\mathcal{Y},\sigma)$ teljes metrikus tér, akkor bármely egyenletesen folytonos $f:A\to\mathcal{Y}$ függvényhez pontosan egy olyan egyenletesen folytonos $F:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ függvény létezik, amelyre $F|_A=f$ teljesül!

Útm. Ha

$$x_n\in A\qquad(n\in\mathbb{N})$$

konvergens sorozat, akkor (x_n) Cauchy-sorozat (vö. 1.2.37/1. feladat). Mivel f egyenletesen folytonos, ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\rho(x_m, x_n) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon \qquad (N \le m, n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy $(f(x_n))$ Cauchy-sorzat, így az $(\mathcal{Y}, \sigma)$ tér teljessége következtében alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ elemmel

$$y = \lim(f(x_n)).$$

Így, ha

$$x := \lim(x_n),$$

akkor az

$$F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad F(x) := y$$

függvény az f egyértelmű kiterjesztése lesz, hiszen

- ha az $x_n \in A$, $x'_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokra

  $$\lim(x_n) = x = \lim(x'_n),$$

  akkor az

  $$(a_n) := (x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots)$$

  sorozatra $\lim(\alpha_n) = x$ és

  $$\lim(f(x_n)) = \lim(f(\alpha_n)) = \lim(f(x'_n)).$$

- F egyenletesen folytonos, ui. f egyenletes folytonossága miatt bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in A$, akkor

  $$\rho(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

  Ha

  $$x, y \in \mathcal{X} : \quad \rho(x, y) < \delta/3$$

  és az

  $$x_n, y_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  sorozatokra

  $$\lim(x_n) = x, \qquad \lim(y_n) = y,$$

  akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

  $$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y_n, y) < \delta \qquad (N \le n \in \mathbb{N}),$$

  tehát

  $$\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

  Innen $n \to \infty$ határátmenettel, ill. az 1.2.26. feladat felhasználásával

  $$\sigma(F(x), F(y)) < \varepsilon$$

  következik.

- ha G is az f egyenletesen folytonos kiterjesztése, akkor az

$$x_n \in A \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(x_n) = x$$

sorozattal

$$F(x) = \lim(F(x_n)) = \lim(f(x_n)) = \lim(G(x_n)) = G(x),$$

és innen A sűrűsége következtében $F - G = 0$ következik (vö. 1.2.42. feladat). ■

1.2.11. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus terek esetén a $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ leképezést **izometriának** nevezzük, ha

$$\sigma(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljsül. Ha φ még bijekció is, akkor azt mondjuk, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ és $(\mathcal{Y}, \sigma)$ **izometrikusan izomorf** metrikus terek.

Világos, hogy ha φ izometria, akkor egyenletesen folytonos, injektív, de nem feltétlenül szürjektív.

1.2.73. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén megadható egy $(\mathcal{Y}, \sigma)$ teljes metrikus tér és egy olyan $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ izometria, amelyre

$$\overline{\varphi[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}$$

teljesül (**Fréchet-Kuratowski-tétel**)!

Útm. Tudjuk, hogy a $(\mathcal{K}(H, \mathbb{R}), \rho_\infty)$ metrikus tér teljes (vö. 1.2.52. feladat). Megmutatjuk, hogy van

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$$

izometria. Ha $\alpha \in \mathcal{X}$, akkor tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén az

$$f_x : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := \rho(x, y) - \rho(\alpha, y) \qquad (y \in \mathcal{X})$$

függvényre $f_x \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, hiszen a négyszög-egyenlőtlenség (vö. 1.2.4/1. feladat) miatt

$$|f_x(y)| = |\rho(x, y) - \rho(\alpha, y)| \leq \rho(x, \alpha) + \rho(y, y) = \rho(x, \alpha) \qquad (y \in \mathcal{X}).$$

Mivel bármely $x, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \rho_\infty(f_x, f_z) &= \sup\{|f_x(y) - f_z(y)| \in \mathbb{R} : \ y \in \mathcal{X}\} = \\ &= \sup\{|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \in \mathbb{R} : \ y \in \mathcal{X}\} \leq \rho(x, z), \end{aligned}$$

így

$$\rho_\infty(f_x, f_z) \leq \rho(x, z) \qquad (x, z \in \mathcal{X}).$$

Valójában itt egyenlőség áll, hiszen $y = z$-re az

$$|f_x(y) - f_z(y)| = \rho(x, z)$$

összefüggést kapjuk. A

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathbb{R}), \qquad \varphi(x) := f_x$$

leképezés izometria, hiszen

$$\rho_\infty(\varphi(x), \varphi(z)) = \rho(x, z) \qquad (x, z \in \mathcal{X}).$$

A $(\mathcal{K}(H, \mathbb{R}), \rho_\infty)$ metrikus tér teljessége és az 1.2.51. feladatbeli első állítás következtében a $(\overline{\varphi[\mathcal{X}]}, \rho_\infty)$ metrikus tér is teljes. Így az

$$\mathcal{Y} := \overline{\varphi[\mathcal{X}]} \subset \mathcal{K}(H, \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \sigma := \rho_\infty$$

választással az állítás igazoltnak tekinthető. ■

1.2.28. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $(\mathcal{Y}_1, \sigma_1)$ és $(\mathcal{Y}_2, \sigma_2)$ olyan teljes metrikus terek, hogy alkalmas

$$\varphi_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_1 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_2$$

izometria esetén

$$\overline{\varphi_1[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}_1 \qquad \text{és} \qquad \overline{\varphi_2[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}_2,$$

akkor $(\mathcal{Y}_1, \sigma_1)$ és $(\mathcal{Y}_2, \sigma_2)$ izometrikusan izomorfak!

Útm.

Beláttuk tehát, hogy igaz az

1.2.1. tétel. Bármely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térhez van olyan $(\mathcal{Y}, \sigma)$ teljes metrikus tér és egy $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ izometria, hogy

$$\overline{\varphi[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}$$

teljesül. Ha ugyanez igaz valamely $(\mathcal{Z}, \tau)$ teljes metrikus térre, akkor van $(\mathcal{Y}, \sigma)$ és $(\mathcal{Z}, \tau)$ között is izometria.

A fenti tétel garantálta („izometrikusan egyértelmű") teljes metrikus teret az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér **teljessé tétel**ének nevezzük.
Megmutatható (vö. [**?**]), hogy ez a teljessé tétel a **Cantor-Méray-Hausdorff-módszer**rel is megadható. Ha ugyanis $(\mathcal{X}, \rho)$ tetszőleges metrikus tér és

$$\mathcal{C} := \left\{(a_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : \ (a_n) \text{ Cauchy-sorozat}\right\},$$

akkor az

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim(\rho(x_n, y_n)) = 0 \qquad ((x_n), (y_n) \in \mathcal{C})$$

ekvivalencia által meghatározott osztályok $\mathcal{Y}$ hamazán a

$$\sigma([(x_n)],[(y_n)]) := \lim(\rho(x_n,y_n)) \qquad ([(x_n)],[(y_n)] \in \mathcal{Y})$$

függvény metrika, és az $(\mathcal{Y},\sigma)$ teljes metrikus tér az $(\mathcal{X},\rho)$ teljessé tétele.

1.2.21. példa.

1. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{Q}$ és $\rho := \rho_E$, akkor $\mathcal{Y}$ a valós számok halmazának egy modellje.
2. Ha
$$\mathcal{X} := \{[a,b] \subset \mathbb{R} : \ a < b\}, \qquad \rho([a,b],[c,d]) := |a-c| + |b-d|,$$
akkor az $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér nem teljes, hiszen az
$$I_n := \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$
Cauchy-sorozat nem konvergens. $(\mathcal{X},\rho)$ teljessé tétele: $(\mathcal{Y},\rho)$, ahol
$$\mathcal{Y} := \{[a,b] \subset \mathbb{R} : \ a \leq b\} \qquad \text{és} \qquad [a,a] := \{a\}.$$
3. Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz,
$$\mathfrak{C}_k^\infty := \left\{ f \in \mathfrak{C}^\infty(\Omega) : \ \Omega \ni \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}} \text{ kompakt} \right\},$$
akkor a $\mathfrak{C}_k^\infty$ a ρ_p integrálmetrikával nem teljes, teljessé tétele: $L^p(\Omega)$.

1.2.5. Kompaktság

1.2.74. feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben a $(0,1)$ intervallum nem kompakt!

Útm. Világos, hogy az

$$\mathcal{F} := \left\{ \left(\frac{1}{n},1\right) \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése $(0,1)$-nek. Sőt az látszik, hogy $\mathcal{F}$-ből nem választható ki $(0,1)$-nek véges fedőrendszere. ■

1.2.75. feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az $\mathbb{N}$ halmaz nem kompakt!

Útm. Világos, hogy az

$$\mathcal{F} := \{(n-1,n+1) \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése $\mathbb{N}$-nek. Sőt az látszik, hogy $\mathcal{F}$-ből nem választható ki $\mathbb{N}$-nek véges fedőrendszere. ■

1.2.76. feladat. Mutassuk meg, hogy a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben a

$$H := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \; 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1 \; (x \in [0,1])\}$$

halmaz nem kompakt!

Útm. Világos, hogy ha

$$A_n := \left\{ f \in \mathfrak{C}[0,1] : \; f(x) > 0 \quad \left(x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \right) \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az

$$\mathcal{F} := \{A_n \subset \mathfrak{C}[0,1] : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése H-nak. Sőt az látszik, hogy $\mathcal{F}$-ből nem választható ki H-nak véges fedőrendszere. ■

1.2.77. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $A \subset \mathcal{X}$ kompakt, akkor A korlátos és zárt!

Útm. Ha A kompakt, akkor A zárt (vö. 1.1.56. feladat) és a

$$\{K_1(x) \subset \mathcal{X} : \; x \in A\}$$

nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés, azaz véges sok A-beli pont 1-sugarú környezetek egyesítése lefedi A-t. Mivel

$$\operatorname{diam}(K_1(x)) < +\infty,$$

ezért $K_1(x)$ korlátos, így A lefedhető véges sok korlátos halmaz egyesítésével, azaz A maga is korlátos (vö. 1.2.24. feladat). ■

1.2.78. feladat. Adjunk példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan korlátos, zárt halmaz, amely nem kompakt!

Útm.

1. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{N}$ és ρ a diszkrét metrika, akkor $\mathbb{N}$ korlátos ($\operatorname{diam}(\mathbb{N}) = 1$) és zárt, de nem kompakt, hiszen ha

   $$U_n := K_1(n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   akkor az

   $$\{U_n : \; n \in \mathbb{N}\}$$

   olyan nyílt lefedése az $\mathbb{N}$ halmaznak, amelyből nem választható ki $\mathbb{N}$ véges lefedése.

2. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ és

   $$\rho(x, y) := |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

   akkor könnyen belátható, hogy ρ ekvivalens ρ_E-vel, ezért ugyanazt a topológiát generálják (vö. 1.2.33/2. feladat). Így az $A := \mathbb{R}$ halmaz nem kompakt, de világos, hogy zárt, és korlátos is, hiszen

   $$\operatorname{arctg}(x) \in (-\pi/2, \pi/2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Ha
$$l_2 := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$
ill.
$$\rho_2(x,y) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2} \qquad (x,y \in l_2)$$
akkor (l_2, ρ_2) metrikus tér (vö. [15]), és az
$$A := \left\{ (0,\ldots,0,\overset{n}{\breve{1}},0,0,\ldots) \in l_2 : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$
halmaz nyilvánvalóan korlátos. Sőt, A zárt is, hiszen bármely $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén
$$\rho_2(x,y) = \sqrt{2},$$
így $A' = \emptyset$. Az is könnyen belátható, hogy A nem kompakt. Valóban, bármely $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén
$$K_{\sqrt{2}/2}(x) \cap K_{\sqrt{2}/2}(y) = \emptyset,$$
ezért A-nak
$$\left\{ K_{\sqrt{2}/2}(a) \subset l_2 : \; a \in A \right\}$$
(nyílt) lefedéséből nem választható ki véges fedőrendszer. ■

1.2.79. feladat. Mutassuk meg, hogy az (l_2, ρ_2) metrikus térben az
$$A := \left\{ x = (x_n) \in l_2 : \; |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \; (n \in \mathbb{N}) \right\}$$
halmaz nem kompakt!

Útm. Ha
$$e_n := (\overset{1}{\breve{0}},\ldots,0,\overset{n}{\breve{1}},0,0,\ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
és tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$x_k^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k,$$
akkor
$$x^{(n)} \left(x_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in A \subset l_2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
hiszen
$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1/k & (k \leq n), \\ \\ 0 & (k > n). \end{cases}$$
Mivel
$$\rho_2^2 \left(x^{(n)}, 0 \right) = \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(n)} \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty \qquad (n \to \infty),$$
ezért A nem korlátos, így (vö. 1.2.77. feladat) nem kompakt. ■

1.2.80. feladat. Bizonyítsuk be, hogy valamely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben véges sok kompakt halmaz egyesítése, ill. metszete kompakt!

Útm.

1. lépés. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_1, \ldots, A_n \subset \mathcal{X}$ halmazok mindegyike kompakt, akkor az

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

halmaz is kompakt, hiszen ha az

$$\{U_\gamma \subset \mathcal{G}_\rho : \ \gamma \in \Gamma\}$$

halmazrendszer (nyílt) lefedése A-nak, akkor bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén is (nyílt) lefedése A_k-nak. Így az A_k halmazok kompaktsága révén van olyan Γ_k véges indexhalmaz, hogy

$$A_k \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} U_\gamma \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Mivel a

$$\Delta := \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$$

halmaz véges és

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Delta} U_\gamma,$$

ezért A kompakt.

2. lépés. Ha valamely Γ indexhalmaz esetén $A_\gamma \subset \mathcal{X}$ halmaz kompakt $(\gamma \in \Gamma)$, akkor A_γ zárt is $(\gamma \in \Gamma)$, így az

$$A := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

is zárt. Mivel tetszőleges $\delta \in \Gamma$ esetén $A \subset A_\delta$, ezért A zárt is, így (vö. 1.1.56/2. feladat) A kompakt. ■

1.2.12. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén azt mondjuk, hogy valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz **teljesen korlátos**, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén A lefedhető véges sok ε-sugarú nyílt gömbbel:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X} : \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_\varepsilon(x_k).$$

Világos, hogy ha A teljesen korlátos, akkor korlátos is, hiszen A-nak van véges számú korlátos halmaz uniójából álló fedőrendszere. Fordítva azonban nem igaz, ui. l_2-ben az

$$A := \left\{ (0, \ldots, 0, \overset{\overset{n}{\smile}}{1}, 0, 0, \ldots) \in l_2 : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmaz korlátos, de nem teljesen korlátos, hiszen

$$\rho(x,y)=\sqrt{2}\qquad (x,y\in A:\ x\neq y).$$

1.2.81. feladat. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$-ben a $(0,1)$ intervallum teljesen korlátos!

Útm. Ha $\varepsilon>0$ és $m\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $m\varepsilon>1$, akkor az

$$\{\varepsilon,2\varepsilon,\ldots,m\varepsilon\}$$

halmaz megfelelő. ∎

1.2.82. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $d\in\mathbb{N}$, $p\in[1,+\infty]$, úgy $(\mathbb{K}^d,\rho_p)$-ben valamely

$$\emptyset\neq A\subset\mathbb{K}^d$$

halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha A korlátos!

Útm. Ha A korlátos, akkor $\overline{A}$ is korlátos, de ez egyben zárt, így kompakt is (vö. [25]). Tehát bármely $\varepsilon>0$ esetén

$$\overline{A}\subset\bigcup_{x\in\mathbb{K}^d}K_\varepsilon(x)$$

fedőrendszerhez A kompaktsága miatt van olyan $Y\subset\mathbb{K}^d$ véges halmaz, hogy

$$A\subset\overline{A}\subset\bigcup_{x\in Y}K_\varepsilon(x)$$

(van véges fedőrendszer). ∎

1.2.83. feladat. Igazoljuk, hogy a $(C[0,1],\rho_\infty)$ metrikus térben az 1.2.76. feladatbeli H halmaz nem teljesen korlátos!

Útm. Világos, hogy ha $\varepsilon:=\frac{1}{2}$, akkor H lefedhető a $\{g\}$ függvény körüli ε-sugarú gömbbel, ahol

$$g(x):=\frac{1}{2}\qquad (x\in[0,1]).$$

Megmutatjuk, hogy ha $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, akkor ez nem tehető meg, ami azt jelenti H nem teljesen korlátos. Ha ui. valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén az

$$\{f_1,\ldots,f_n\}$$

függvényhalmaz a kívánt fedőrendszer, és

$$\left\{0,\frac{1}{n+1},\frac{2}{n+1},\ldots,\frac{n-1}{n+1},\frac{n}{n+1},1\right\}$$

a $[0,1]$ intervallum egy felosztása, továbbá $f\in\mathfrak{C}[0,1]$ olyan függvény, amelyre

$$f(0):=0,\qquad f(1):=1,\qquad f\left(\frac{k}{n+1}\right):=\begin{cases}1 & \left(f_k\left(\frac{k}{n+1}\right)\leq\frac{1}{2}\right),\\[2ex] 0 & \left(f_k\left(\frac{k}{n+1}\right)>\frac{1}{2}\right)\end{cases}\qquad (k\in\{1,\ldots,n\}),$$

az osztópontok között lineáris, akkor $f \in H$, viszont

$$\rho_\infty(f, f_k) \geq \frac{1}{2} > \varepsilon \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}). \quad \blacksquare$$

1.2.84. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor igaz az

$$A \subset \mathcal{X} \text{ teljesen korlátos} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \text{ teljesen korlátos}$$

ekvivalencia!

Útm. $Y \subset \mathcal{X}$ véges, akkor

1. lépés. **/⇐/** $A \subset \overline{A} \subset \bigcup_{x \in Y} K_\varepsilon(x)$

2. lépés. **/⇒/** Ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$A \subset \bigcup_{x \in Y} K_{\varepsilon/2}(x),$$

akkor

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{x \in Y} K_{\varepsilon/2}(x)} = \bigcup_{x \in Y} \overline{K_{\varepsilon/2}(x)} \subset \bigcup_{x \in Y} \{z \in X :\ \rho(z, x) \leq \varepsilon/2\} \subset \bigcup_{x \in Y} K_\varepsilon(x),$$

ui.

$$\rho(z, x) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

1.2.13. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, ill. $H \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén a

$$\gamma(H) := \inf\{\varepsilon \in (0, +\infty) :\ H \text{ lefedhető véges sok } \varepsilon\text{-sugarú nyílt gömbbel}\}$$

valós számot H **nemkompaktsági mértékének** nevezzük.

Világos, hogy H pontosan akkor teljesen korlátos, ha fennáll a $\gamma(H) = 0$ egyenlőség.

1.2.85. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben valamely $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén az alábbi három állítás egyenértékű!

(1) A kompakt.

(2) Bármely A-beli sorozatnak van A-ban konvergens részsorozata.

(3) A minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja.

(4) A teljes (minden A-beli Cauchy-sorozat konvergens A-ban) és A teljesen korlátos.

Útm.

(1) ⇒ (2): Ha

$$x_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és (x_n)-nek nincsen A-ban konvergens részsorozata, akkor a

$$H_n := \{x_k \in \mathcal{X} : \ k \geq n \in \mathbb{N}\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazok zártak, hiszen

$$H_n \supset H_n' \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \emptyset.$$

Így A kompaktsága miatt az

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^c$$

nyílt lefedésből kiválasztható véges lefedés, azaz alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} H_k^c, \qquad \text{azaz} \qquad A^c \supset \bigcap_{k=1}^{n} H_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\},$$

ami nem lehetséges, hiszen $x_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$.

(2) ⇒ (4): Ha az

$$x_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat A-beli Cauchy-sorozat, amelynek (x_{ν_n}) részsorozatára

$$\lim(x_{\nu_n}) = \alpha \in A,$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $M, N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (M \leq m, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \rho(x_{\nu_n}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ha $n \geq N$ olyan, hogy $\nu_n \geq M$, akkor

$$\rho(x_n, \alpha) \leq \rho(x_n, x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (M \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\lim(x_n) = \alpha,$$

így A teljes. Ha A nem teljesen korlátos, akkor alkalmas $\delta > 0$ esetén A nem fedhető le véges sok δ-sugarú nyílt gömbbel. Ezért van olyan $x_1 \in A$, hogy $K_\delta(x_1)$ nem fedi le A-t, azaz alkalmas $x_2 \in A$ esetén $\rho(x_1, x_2) \geq \delta$.

$$K_\delta(x_1) \cup K_\delta(x_2)$$

ismét nem fedi le A-t, így alkalmas $x_3 \in A$ esetén $\rho(x_1, x_3) \geq \delta$ és $\rho(x_2, x_3) \geq \delta$. Teljes indukcióval olyan

$$\{x_n\} \subset A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozatot értelmezhetünk, amelyre

$$\rho(x_m, x_n) \geq \delta \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \ m \neq n).$$

Így (x_n)-ből nem választható ki konvergens részsorozat, ami ellentmond annak, hogy A teljesen korlátos.

(4) $\Rightarrow$ **(1):** Tegyük fel, hogy valamely Γ indexhalmaz esetén a

$$\mathcal{H} := \{U_\gamma \subset \mathcal{G}_\rho : \ \gamma \in \Gamma\}$$

halmazrendszer az A halmaz olyan (nyílt) fedése, amelyből nem választahtó ki véges fedőrendszer. A teljesen korlátossága miatt véges sok A-beli középpontú, $\frac{1}{2}$-sugarú nyílt gömb lefedi A-t, így alkalmas $x_1 \in A$ esetém az $A \cap K_{1/2}(x_1)$ halmazt $\mathcal{H}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le. Ismét A teljesen korlátosságát felhasználva elmondható, hogy A lefedhető véges sok, A-beli középpontú $\frac{1}{4}$-sugarú nyílt gömbbel is. Ezen gömbök közül azok, amelyeknek van közös pontjuk $A \cap K_{1/2}(x_1)$-gyel, lefedik $A \cap K_{1/2}(x_1)$-et, így alkalmas $x_2 \in A$ esetén $\mathcal{H}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le $A \cap K_{1/4}(x_2)$-t. Teljes indukcióval így egy olyan

$$K_{1/2^n}(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gömbsorozathoz jutunk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$K_{1/2^{n+1}}(x_{n+1})$$

olyan (A-beli középpontú) nyílt gömb, amelynek van közös pontja $A \cap K_{1/2^n}(x_n)$-nel és

$$A \cap K_{1/2^{n+1}}(x_{n+1})$$

nem fedhető le $\mathcal{H}$ egyetlen véges részrendszerével sem. Így – felhasználva, hogy

$$K_{1/2^n}(x_n) \cap K_{1/2^{n+1}}(x_{n+1}) \neq \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül –, azt kapjuk, hogy

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$-re

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_n) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) < \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^{m-2}},$$

következik. Az (x_n) tehát Cauchy-sorozat, ezért A teljessége miatt van olyan $\alpha \in A$, hogy $\lim(x_n) = \alpha$. Alkalmas $\delta \in \Gamma$ esetén $\alpha \in U_\delta$ és U_δ nyíltsága miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(\alpha) \subset U_\delta$. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\max\left\{\rho(x_n, \alpha), \frac{1}{2^n}\right\} < \varepsilon/2,$$

akkor a háromszög-egyenlőtlenség felhasznlásával

$$K_{1/2^n}(x_n) \subset K_\varepsilon(\alpha) \subset U_\delta,$$

ami nem lehetséges, hiszen $K_{1/2^n}(x_n)$-et $\mathcal{H}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le.

(1) ⇒ (3): Ha $B \subset A$, B nem véges, továbbá B-nek nincsen torlódási pontja, akkor

- egyrészt bármely $b \in B$ esetén van olyan $\varepsilon_b > 0$, hogy
$$B \cap K_{\varepsilon_b}(b) = \{b\},$$
ahonnan
$$B \subset \bigcup_{b\in B} K_{\varepsilon_b}(b) \subset \mathcal{X}$$
következik,
- másrészt pedig
$$\overline{B} = B \cup B' = B$$
miatt B zárt, azaz $\mathcal{X}\backslash B$ nyílt.

Így
$$A \subset (\mathcal{X}\backslash B) \cup \bigcup_{b\in B} K_{\varepsilon_b}(b) =: \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \qquad \text{nyílt lefedés,}$$
továbbá A kompaktsága miatt alkalmas véges $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ esetén
$$A \subset \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} U_\gamma,$$
ahonnan
$$|\{x \in \mathcal{X} : \ x \in A \cap B\}| \leq |\widetilde{\Gamma}| < \infty$$
következik, ami nem lehetséges.

(3) ⇒ (2): Ha $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ olyan sorozat, hogy

- $|\{x_n \in A : \ n \in \mathbb{N}\}| < \infty$, akkor (x_n)-nek triviálisan van konvergens részsorozata;
- $|\{x_n \in A : \ n \in \mathbb{N}\}| = \infty$, akkor a
$$B := \{x_n \in A : \ n \in \mathbb{N}\} \subset A$$
végtelen halmaznak van a torlódási pontja, azaz alkalmas (ν_n) indexsorozat esetén $\lim(x_{\mu_n}) = a$. ■

Ez azt jelenti, hogy ha az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér kompakt, akkor teljes is, hiszen bármely Cauchy-sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat, így maga a Cauchy-sorozat is konvergens (vö. 1.2.37/2. feladat), azaz a tér teljes.

1.2.86. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ kompakt metrikus tér, $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus tér, továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ folytonos, akkor f egyenletesen folytonos!

Útm. f folytonossága következtében bármely $\varepsilon > 0$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy
$$y \in K_{2\delta}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mivel

$$\{K_\delta(x) \subset \mathcal{X} : \ x \in \mathcal{X}\}$$

nyílt lefedése $\mathcal{X}$-nek, ezért a kompaktság következtében alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ esetén a

$$\{K_{\delta_1}(x) \subset \mathcal{X} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

halmaz is lefedi $\mathcal{X}$-et. Ha most

$$\kappa := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\},$$

akkor bármely $y, z \in \mathcal{X}$, $\rho(y, z) < \kappa$ esetén van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $y \in K_{\delta_k}(x_k)$, azaz $y, z \in K_{2\delta_k}(x_k)$, ahonnan

$$\sigma(f(y), f(z)) \leq \sigma(f(y), f(x_k)) + \sigma(f(x_k), f(z)) < 2\varepsilon$$

következik. ■

1.2.87. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, akkor a $H \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor prekompakt, ha teljesen korlátos!

Útm. H prekompaktsága azt jelenti, hogy a (zárt) $\overline{H}$ halmaz kompakt (vö. 1.1.20. definíció). Így $(\overline{H}, \rho)$ teljes metrikus tér (vö. 1.2.51. feladat), ezért $\overline{H}$ kompaktsága azzal egyenértékű, hogy $\overline{H}$ teljesen korlátos (vö. 1.2.85. feladat). Ez pedig az 1.2.84. feladatbeli állítás következtében azt jelenti, hogy H teljesen korlátos. ■

1.2.88. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $A \subset \mathcal{X}$ prekompakt, akkor A korlátos!

Útm. Ha A prekompakt, akkor (vö. 1.2.87. feladat)

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X} : \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_\varepsilon(x_k).$$

Ha most

$$N := \max\{\rho(x_1, x_k) \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\} + \varepsilon,$$

akkor

$$K_\varepsilon(x_k) \subset K_N(x_1) \quad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \Longrightarrow \qquad A \subset K_N(x_1)$$

Ez azt jelenti, hogy A korlátos. ■

1.2.89. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, akkor a $H \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor prekompakt, ha bármely

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetén van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) sorozat konvergens!

Útm.

1. lépés. H prekompaktsága azt jelenti, hogy a $\overline{H}$ halmaz kompakt (vö. 1.1.20. definíció). Így, ha

$$x_n \in H \subset \overline{H} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\overline{H}$ kompaktsága következtében (vö. 1.2.85. feladat) van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy

$$\lim(x_{\nu_n}) \in \overline{H} \subset \mathcal{X}.$$

2. lépés. Ha $y_n \in \overline{H}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor alkalmas

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így ha van olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre (x_{ν_n}) konvergens és

$$\lim(x_{\nu_n}) =: x \in \mathcal{X},$$

akkor

$$\rho(y_{\nu_n}, x) \leq \rho(y_{\nu_n}, x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n}, x) < \frac{1}{2^{\nu_n}} + \rho(x_{\nu_n}, x) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$\lim(y_{\nu_n}) = x.$$

Ezért x érintkezési pontja $\overline{H}$-nak, ahonnan

$$x \in \overline{\overline{H}} = \overline{H}$$

(vö. 1.1.2/3. feladat) következik, azaz (y_n)-nek van $(\overline{H}, \rho)$-ban konvergens részsorozata. Ez azt jelenti, hogy $\overline{H}$ kompakt, azaz H prekompakt. ∎

Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén tehát valamely $H \subset \mathcal{X}$ halmaz kompaktsága, ill. prekompaktsága $\mathcal{X}$-beli sorozatok segítségével a következőképpen fogalmazható meg:

H **kompakt** $\iff$ $\forall\, x_n \in H\ (n \in \mathbb{N})\ \exists\, (\nu_n)$ indexsorozatra $\lim(x_{\nu_n}) \in H,$

H **prekompakt** $\iff$ $\forall\, x_n \in H\ (n \in \mathbb{N})\ \exists\, (\nu_n)$ indexsorozatra $\lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{X}.$

1.2.29. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben a

$$H := \{[0,1] \ni x \to x^n :\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz nem kompakt!

Útm.

1.2.90. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $H \subset \mathcal{X}$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) H prekompakt.

(2) Ha

$$A_n \subset \overline{H} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

nem-üres, zárt halmazokból álló sorozat antiton, akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

(3) Bármely

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén van olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre

$$\lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{X}.$$

(4) H teljesen korlátos.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Tegyük fel, hogy alkalmas, nem-üres, zárt halmazokból álló antiton $\overline{H}$-beli (A_n) sorozatra

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

teljesül. Ekkor az

$$\{A_n^c : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmazrendszer nyílt fedése $\overline{H}$-nak. Mivel $\overline{H}$ kompakt, ezért alkalmas $N \in \mathbb{N}$ és

$$n_k \in \mathbb{N} \qquad (k \in \{1, \ldots, N\}$$

esetén

$$\{A_{n_1}^c, \ldots, A_{n_N}^c\}$$

is nyílt halmazokból álló fedőrendszere $\overline{H}$-nak. Így a sorozat antiton volta következtében

$$A_{n_N} = \bigcap_{k=1}^{N} A_{n_k} = \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_{n_k}^c\right)^c \subset \overline{H}^c.$$

Ez pedig ellentmont annak, hogy $A_{n_N} \subset \overline{H}$.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (3)/. Ha

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és

$$B_n := \{x_k \in H : \; n \leq k \in \mathbb{N}\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$A_n := \overline{B_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egy nem-üres, zárt halmazokból álló, antiton $\overline{H}$-beli sorozat. Így alkalmas

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

elemre és tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ indexre van olyan $y_{n_k} \in B_{n_k}$ elem, hogy

$$\rho(c, y_{n_k}) \leq \frac{1}{k}.$$

Ez azt jelenti, hogy $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ olyan részsorozata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek, amelynek határértéke c.

3. lépés /(3) $\Rightarrow$ (4)/. Tegyük fel, hogy nem teljesen korlátos. Ez azt jelenti (vö. 1.2.12. definíció), hogy alkalmas $\delta > 0$ esetén A nem fedhető le véges sok δ-sugarú nyílt gömbbel. Ha $x_1 \in H$, akkor van olyan $x_2 \in H$, hogy

$$\rho(x_2, x_1) \geq \delta,$$

hiszen ellenkező esetben H lefedhető lenne x_1-körüli δ-sugarú nyílt gömbbel. Hasonlóan, alkalmas $x_3 \in H$ esetén

$$\rho(x_3, x_1)| \geq \delta \qquad \text{és} \qquad \rho(x_3, x_2) \geq \delta,$$

különben x_1 és x_2-körüli δ-sugarú nyílt gömbökkel lefedhető lenne H. Teljes indukcióval olyan

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot értelmezhetünk, amelyre

$$\rho(x_m, x_n) \geq \delta \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \; m \neq n).$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n)-ből nem választható ki konvergens részsorozat.

4. lépés /(4) $\Rightarrow$ (1)/. Vö. 1.2.87. feladat. ■

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $H \subset \mathcal{X}$ kompakt, ill. $\varepsilon > 0$, akkor

$$\mathcal{N}(H, \varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \; \exists \, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{X} : \; H \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k) \right\} < +\infty$$

(vö. 1.1.20. definíció). Ezzek kapcsolatos az

1.2.14. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $H \subset \mathcal{X}$ kompakt, és

$$D(H) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(\mathcal{N}(H, \varepsilon)\right)}{\ln(1/\varepsilon)} \in \mathbb{R},$$

akkor $D(H)$-t a H halmaz **fraktáldimenzió**jának nevezzük.

1.2.91. feladat. Számítsuk ki az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrikus tér esetén a $H := [0{,}1]$ halmaz fraktáldimenzióját!

Útm. Mivel bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq -\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1,$$

ezért

$$\mathcal{N}(H, \varepsilon) = -\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

így

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(-[-1/\varepsilon])}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\mathcal{N}(H,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \\ &\leq \quad \frac{\ln(1/\varepsilon + 1)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\ln(1+\varepsilon) + \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \longrightarrow 1 \qquad (\varepsilon \to 0). \end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$D(H) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(\mathcal{N}(H,\varepsilon)\right)}{\ln(1/\varepsilon)} = 1. \quad \blacksquare$$

1.2.92. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $K, L \subset \mathcal{X}$ diszjunkt, kompakt halmazok, akkor alkalmas $U, V \subset \mathcal{X}$ nyílt halmazokkal

$$K \subset U, \quad L \subset V \qquad \text{és} \qquad U \cap V = \emptyset$$

teljesül!

Útm. Mivel a

$$K \times L \subset \mathcal{X}^2$$

halmaz kompakt,

$$\rho : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}$$

folytonos függvény, ezért alkalmas $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$\inf\left\{\rho(x,y) \in \mathbb{R} : \; x \in K, \, y \in L\right\} = r.$$

Ezért az

$$U := \bigcup_{x \in K} K_{\varepsilon/2}(x)$$

és a

$$V := \bigcup_{y \in K} K_{\varepsilon/2}(y)$$

halmazok teljesítik a feladat követelményeit. $\blacksquare$

1.3. Normált terek

1.3.1. Alapfogalmak

1.3.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ $\mathbb{K}$-vektortér esetén az $(\mathcal{X}, p)$ rendezett párt **félnormált tér**nek nevezzük, ha p **félnorma** ($\mathcal{X}$-en), azaz $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

(N1) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ $(x \in \mathcal{X},\ \lambda \in \mathbb{K})$;

(N2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ $(x, y \in \mathcal{X})$.

Ha még

(N3) $p(x) = 0 \implies x = 0 \in \mathcal{X}$

is teljesül, akkor p-t **normának** $(\mathcal{X},\ p)$-t **normált tér**nek nevezzük. Az $x \in \mathcal{X}$ vektor esetén a $p(x)$ számot x **(fél)normájának** (norma esetén **hosszának**) nevezzük, és ha p norma, akkor gyakran élünk az

$$\|x\| =: p(x)$$

jelöléssel. Az **(N1)** $-$ **(N2)**, ill. **(N1)** $-$ **(N3)** tulajdonságok a félnorma, ill. a norma **alaptulajdonság**ai (axiómái). **(N1)** a (fél)norma **abszolút homogenitás**át fejezi ki, **(N2)** pedig az ún. **háromszög-egyenlőtlenség**.

A félnorma tehát pontosan abban különbözik a normától, hogy nem-nulla vektor félnormája is lehet zérus. Könnyen belátható, hogy – hasonlóan a félmetrikához, ill. a metrikához –, a félnorma, ill. a norma is pozitív szemidefinit, ill. pozitív definit, ui.

- a nullvektor (fél)normája zérus, hiszen a $\lambda := 0 \in \mathbb{K}$ skalárral **(N1)**-ből

$$p(0) = 0$$

  következik;

- ha $x \in \mathcal{X}$, akkor az iméntiek, ill. **(N1)** $-$ **(N2)** miatt

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1| \cdot p(x) = 2p(x).$$

1.3.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\ p)$ fénormált tér, akkor **(N2)** az

$$\textbf{(N4)} \qquad |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű!

Útm.

1. lépés. Az

$$x = (x - y) + y$$

felbontásból **(N2)** alapján

$$p(x) \leq p(x - y) + p(y), \qquad \text{azaz} \qquad p(x) - p(y) \leq p(x - y)$$

következik. Az $x \leftrightarrow y$ szerepcsere után pedig

$$p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$$

adódik.

2. lépés. Ha **(N4)** teljesül, akkor x helyébe $(x + y)$-t írva

$$p(x + y) - p(y) \leq p(x)$$

adódik. ■

1.3.1. példa. Ha $d \in \mathbb{N}$, akkor a $\mathbb{K}^d$ terekben leggyakrabban használatos normák:

1. tetszőleges $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d)$$

(**hatványnorma**, $p = 1$ esetén **Minkowski-norma**, **oktaéder-norma** vagy **taxis-norma**, $p = 2$ esetén **euklideszi norma**);

2. (**Csebisev-norma** vagy **maximum-norma**):

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \ldots, d\}\} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d).$$

Világos, hogy $d = 1$ esetén bármely $p \in [1, +\infty]$ választással

$$\|x\|_p = |x| \qquad (x \in \mathbb{K}).$$

1.3.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbb{K}^d$, akkor

$$\lim_{p \to +\infty} (\|x\|_p) = \|x\|_\infty$$

teljesül!

Útm.

1.3.2. példa. Az $m\times n$-es mátrixok vektorterén az alábbi leképezések mindegyike normát értelmez:

1. **euklideszi, Frobenius- Schur-,** ill. **Hilbert-Schmidt-norma**:

$$\|M\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|m_{kl}|^2} \qquad \left(M=[m_{kl}]\in\mathbb{K}^{m\times n}\right),$$

2. **oszlopösszeg-norma**:

$$\|M\|_o := \max\left\{\sum_{k=1}^{m}|m_{kl}| :\ l\in\{1,\ldots,n\}\right\} \qquad \left(M=[m_{kl}]\in\mathbb{K}^{m\times n}\right),$$

3. **sorösszeg-norma**:

$$\|M\|_s := \max\left\{\sum_{l=1}^{n}|m_{kl}| :\ k\in\{1,\ldots,m\}\right\} \qquad \left(M=[m_{kl}]\in\mathbb{K}^{m\times n}\right).$$

1.3.3. példa. Ha $\emptyset\neq H$ tetszőleges halmaz, akkor $(\mathcal{K}(H),\|\cdot\|_\infty)$ normált tér (vö. 1.2.3/1. példa), ahol

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\in\mathbb{R} :\ x\in H\} \qquad (f\in\mathcal{K}(H)).$$

1.3.4. példa. A folytonos függvények $\mathfrak{C}[a,b]$ vektorterterén normák a

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} & (p\in[1,+\infty)), \\ \max\{|f(x)|\in\mathbb{R} :\ x\in[a,b]\} & (p=+\infty) \end{cases} \qquad (f\in\mathfrak{C}[a,b])$$

leképezések.

1.3.2. definíció. Legyen $p\in(0,+\infty]$ és

$$l_p := \left\{x:\mathbb{N}\to\mathbb{K} :\ \|x\|_p^p := \|x\|_{l_p}^p := \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty\right\} \qquad (0<p<\infty),$$

ill.

$$l_\infty := l_\infty(\mathbb{K}) := \mathcal{K}(\mathbb{N},\mathbb{K}) := \left\{x:\mathbb{N}\to\mathbb{K} :\ \|x\|_\infty := \|x\|_{l_\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < +\infty\right\}.$$

1.3.3. definíció. Adott $p, q \in [1, +\infty]$ esetén azt mondjuk, hogy p és q **konjugált kitevők** (vagy q a p-hez konjugált kitevő), ha fenáll az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőség ($p = 1$ esetén $q := +\infty$, ill. $p = +\infty$ esetén $q := 1$).

1.3.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $p \in (1, +\infty)$ és q a p-hez konjugált kitevő, akkor igaz az

$$(x_n) \in l_p \qquad \Longrightarrow \qquad \left(|x_n|^{p-1}\right) \in l_q$$

implikáció!

Útm. Világos, hogy ha $p \in (1, +\infty)$, ill. $(x_n) \in l_p$, akkor

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad q = \frac{p}{p-1},$$

és így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|^{p-1}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty. \quad \blacksquare$$

1.3.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $1 \leq p, q \leq +\infty$ konjugált kitevők, akkor bármely

$$x = (x_n) \in l_p \qquad \text{és} \qquad y = (y_n) \in l_q$$

esetén $xy \in l_1$ és fennáll a

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

(Hölder-)egyenlőtlenség!

Útm.

1. lépés ($p = +\infty$, $q = 1$). Ha $x \in l_\infty$, akkor

$$|x_n| \leq \|x\|_\infty \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\|xy\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1.$$

2. lépés ($1 < p < +\infty$). Ha

$$\|x\|_p = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \|y\|_q = 0,$$

akkor az egyenlőtlenség nyilván egyenlőségbe megy át. Feltehető tehát, hogy

$$\|x\|_p > 0 \qquad \text{vagy} \qquad \|y\|_q > 0.$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$a := \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \qquad \text{és} \qquad b := \frac{|y_n|}{\|y\|_q}.$$

Ekkor a Young-egyenlőtlenség (vö. (11.2.2)) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} = a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q = \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_n|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_n|^q}{(\|y\|_p)^p}.$$

Összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}{(\|y\|_p)^p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ami nem más, mint a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

Könnyen belátható, hogy a Hölder-egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$x_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{vagy} \qquad y_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{vagy}$$

alkalmas $\lambda \in (0, +\infty)$ számra

$$(|x_n|) = \lambda \, (|y_n|)$$

teljesül.

1.3.4. feladat. Mutassuk meg, hogy l_p $(0 < p \leq +\infty)$ az

$$(x, y) \mapsto x + y = (x_n) + (y_n) := (x_n + y_n) \qquad (x, y \in l_p)$$

összeadásra és a

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x = \lambda(x_n) := (\lambda x_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}, \, x \in l_p)$$

skalárral való szorzásra nézve vektortér, továbbá $p \in [1, +\infty)$ esetén a

$$\| \cdot \|_p := \| \cdot \|_{l_p}, \qquad \text{ill. a} \qquad \| \cdot \|_\infty := \| \cdot \|_{l_\infty}$$

leképezés norma!

Útm.

1. lépés. Azt fogjuk belátni, hogy l_p lineáris altere $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-nek. Mivel a

$$\Theta_n := 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat benne van l_p-ben, ezért $l_p \neq \emptyset$. Ha $p = +\infty$, $\alpha \in \mathbb{K}$ és $x = (x_n), (y_n) \in l_\infty$, akkor alkalmas $A, B \in \mathbb{R}$ számokra

$$|x_n| \leq A, \qquad |y_n| \leq B \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\sup\{|x_n + \alpha y_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \leq A + \alpha B$$

következik, ami azt jelenti, hogy $(x_n) + \alpha(y_n) \in l_\infty$. Ha pedig $p \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ és $x = (x_n) \in l_p$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p = |\alpha|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$$

következtében $\alpha x \in l_p$. Ha pedig

$$x = (x_n),\ y = (y_n) \in l_p,$$

akkor a háromszög-egyenlőtlenség, (11.2.1) és a (11.2.3)-beli első egyenlőtlenség figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

- $p < 1$ esetén

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq |x_n|^p + |y_n|^p \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

- $p \geq 1$ esetén

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^{p-1}(|x_n|^p + |y_n|^p) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ennélfogva

- $p < 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < +\infty,$$

- $p \geq 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < +\infty.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $x + y \in l_p$.

2. lépés. Ha

$$\Theta \neq x = (x_n) \in l_p,$$

akkor alkalmas $m \in \mathbb{N}$ indexre $x_m \neq 0$, ahonnan $\|x\|_p > 0$ következik. Ha pedig $\alpha \in \mathbb{K}$ és $x \in l_p$, akkor

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|x\|_p.$$

3. lépés. Világos, hogy $p = 1$, ill. $p = +\infty$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Ha $p \in (1, +\infty)$ és

$$x = (x_n) \in l_p, \qquad y = (y_n) \in l_p,$$

akkor

$$x+y=(x_n+y_n)\in l_p,$$

így (vö. 1.3.2. feladat)

$$(|x_n+y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}\in l_q,$$

ahol

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

A Hölder-egyenlőtlenség és

$$q(p-1)=p, \qquad \text{ill.} \qquad p-\frac{p}{q}=1$$

felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}\leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}\leq \\
&\leq \|x\|_p\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{1/q}+\|y\|_p\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{1/q}= \\
&= (\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{p}\right)^{1/q}= \\
&= (\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot(\|x+y\|_p)^{p/q},
\end{aligned}$$

ahonnan – egyszerűsítés után –

$$\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$$

következik. ■

1.3.5. példa. Tetszőleges $k\in\{1,\ldots,d\}$ esetén

$$\|x\|_k:=|x_k| \qquad (x:=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{K}^d)$$

félnorma.

1.3.6. példa. Tetszőleges $k\in\mathbb{N}$ esetén félnorma a

$$\|x\|_k:=|x_k| \qquad (x=(x_k)\in l_\infty)$$

leképezés.

1.3.5. feladat. Döntsük el, hogy (fél)norma-e a

1. $p : \mathfrak{c} \to \mathbb{R}$, $p((x_n)) := \lim(|x_n|)$ leképezés, ahol
$$\mathfrak{c} := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ (x_n) \text{ konvergens}\}\,;$$
2. $p : l_\infty \to \mathbb{R}$, $p((x_n)) := \liminf(|x_n|)$ leképezés;
3. $p := \min\{p_1, p_2\}$ leképezés, ahol $\mathcal{X}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-vektortér, $p_1, p_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ pedig félnorma!

Útm.

1. Ha $x, y \in \mathfrak{c}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor
$$|x_n| \geq 0, \quad |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
így $p(x) \geq 0$,
$$p(\alpha x) = \lim(|\alpha x_n|) = \lim(|\alpha| \cdot |x_n|) = |\alpha| \cdot \lim(|x_n|) = |\alpha| \cdot p(x),$$
és
$$p(x + y) = \lim(|x_n + y_n|) \leq \lim(|x_n| + |y_n|) = \lim(|x_n|) + \lim(|y_n|) = p(x) + p(y).$$
Tehát p félnorma. Mivel az
$$x := (1,0,0,\ldots) \in \mathfrak{c}$$
sorozatra
$$x \neq 0 \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad p(x) = 0,$$
ezért p nem norma.
2. p nem félnorma, hiszen az
$$x := (1,0,1,0\ldots) \in l_\infty, \qquad y := (0,1,0,1,\ldots) \in l_\infty$$
sorozatokra
$$p(x + y) = p((1)) = 1 > 0 + 0 = p(x) + p(y).$$
3. p nem félnorma, ui.
$$\mathcal{X} := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \qquad p_1 := \|\cdot\|_1, \qquad \text{ill.} \qquad p_2 := \|\cdot\|_2$$
esetén (vö. 1.3.1/1. példa), ha
$$x := (1,0,0,\ldots) \qquad \text{és} \qquad y := (0,1,0,0,\ldots),$$
akkor egyrészt
$$p(x + y) = \min\{\|x + y\|_1, \|x + y\|_2\} = \min\{1,1\} = 1,$$
másrészt pedig
$$p(x) + p(y) = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\} + \min\{\|y\|_1, \|y\|_2\} = \min\{1,0\} + \min\{0,1\} = 0. \quad \blacksquare$$

1.3.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{P} := \left\{ f : [0{,}1] \to \mathbb{R} : \text{ alkalmas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinomra } f = p|_{[0,1]} \right\}$$

és

$$p(f) := |f(0)| + \|f'\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{P}),$$

akkor $(\mathcal{P}, p)$ normált tér!

Útm. Világos, hogy p abszolút homogén, hiszen

$$p(\alpha f) = |\alpha f(0)| + \|\alpha f'\|_\infty = \alpha \cdot (|f(0)| + \|f'\|_\infty) = \alpha \cdot p(f) \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{P}).$$

Mivel bármely $f, g \in \mathcal{P}$ esetén

$$\begin{aligned} p(f+g) &= |(f+g)(0)| + \|(f+g)'\|_\infty = |f(0)+g(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leq \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \\ &= p(f) + p(g), \end{aligned}$$

ezért a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Továbbá, ha $f \in \mathcal{P}$: $p(f) = 0$, akkor $f(0) = 0$ és $\|f'\|_\infty = 0$, azaz bármely $t \in [0{,}1]$ esetén $f'(t) = 0$. Tehát f állandófüggvény, így $f(0) = 0$ miatt $f = \widehat{0}$. ■

1.3.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $M \in \mathbb{K}^{d \times d}$, $\det(M) \neq 0$ és $\left(\mathbb{K}^d, p\right)$ normált tér, akkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := p(Mx)$$

függvény norma!

Útm. Világos, hogy φ abszolút homogén, hiszen

$$\varphi(\alpha x) = p(M(\alpha x)) = p(\alpha(Mx)) = |\alpha| \cdot p(Mx) = |\alpha| \cdot \varphi(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ x \in \mathbb{K}^d).$$

Mivel bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\varphi(x+y) = p(M(x+y)) = p(Mx + My) \leq p(Mx) + p(My) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

ezért a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Továbbá, ha $x \in \mathbb{K}^d$: $\varphi(x) = 0$, akkor $0 = p(Mx)$, így $Mx = 0$ (p norma). Mivel M reguláris mátrix, ezért innen $x = 0$ következik. ■

1.3.7. példa. Ha $m_1, \ldots, m_d > 0$, $M := \operatorname{diag}\{m_1, \ldots, m_d\}$ és

$$p(x) := \|x\|_1 \qquad (x \in \mathbb{K}^d),$$

akkor a

$$\varphi(x) = p(Mx) = \|Mx\|_1 = \sum_{k=1}^{d} m_k |x_k| \qquad (x \in \mathbb{K}^d)$$

függvény is norma.

1.3.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ (lineáris) altér, akkor a

$$p|_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto p(x)$$

függvény félnorma $\mathcal{Y}$-on, és $\rho|_{\mathcal{Y}}$ pontosan akkor norma, ha p is norma!

Útm.

Az $(\mathcal{Y}, p|_{\mathcal{Y}})$ (fél)normált teret az $(\mathcal{X}, p)$ (fél)normált tér **alterének** is szokás nevezni. Az egyszerűség kedvéért sok esetben $p|_{\mathcal{Y}}$ helyett p-t írunk.

1.3.4. definíció. Adott $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ esetén

$$V_a^b(f) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}, \; a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b \right\}$$

jelöli f **teljes megváltozás**át (**totális variáció**ját), ill.

$$\mathfrak{BV}[a, b] := \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : \; V_a^b(f) < +\infty \right\}$$

az $[a, b]$ intervallumon **korlátos változású függvény**ek halmazát.

1.3.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\|f\|_{\mathfrak{BV}} := |f(a)| + V_a^b(f) \qquad (f \in \mathfrak{BV}[a, b]),$$

akkor $(\mathfrak{BV}[a, b], \|\cdot\|_{\mathfrak{BV}})$ normált tér!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{BV}[a, b]$ altér $\mathcal{K}([a, b], \mathbb{R})$-ben:

1) $\mathfrak{BV}[a, b] \subset \mathcal{K}([a, b], \mathbb{R})$, ui. bármely $f \in \mathfrak{BV}[a, b]$ esetén

$$x \in [a, b] \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + V_a^b(f),$$

azaz

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_a^b(f) < +\infty.$$

2) $\mathfrak{BV}[a, b] \neq \emptyset$, hiszen

$$V_a^b(\hat{0}) < +\infty.$$

3) Ha $f, g \in \mathfrak{BV}[a, b]$, akkor $f + g \in \mathfrak{BV}[a, b]$, ui. bármely $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$$

esetén

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}|(f(x_k)-f(x_{k-1}))+(g(x_k)-g(x_{k-1}))| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq V_a^b(f)+V_a^b(g),\end{aligned}$$

ahonnan

$$V_a^b(f+g)\leq V_a^b(f)+V_a^b(g)<+\infty, \qquad \text{azaz} \qquad f+g\in\mathfrak{BV}[a,b]$$

következik.
4) Ha $\alpha\in\mathbb{R}$ és $f\in\mathfrak{BV}[a,b]$, akkor $V_a^b(\alpha f)=$

$$\begin{aligned} &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|(\alpha f)(x_k)-(\alpha f)(x_{k-1})|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N},\, a=x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n=b\right\}= \\ &= |\alpha|\cdot\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N},\, a=x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n=b\right\}= \\ &= |\alpha|\cdot V_a^b(\alpha f),\end{aligned}$$

azaz $\alpha f\in\mathfrak{BV}[a,b]$.

2. lépés. Az eddigiekből világos, hogy a $\|\cdot\|_{\mathfrak{BV}}$ függvény abszolút homogén és teljesül rá a háromszög-egyenlőtlenség. Így már csak azt kell megmutatni, hogy igaz a

$$\|f\|_{\mathfrak{BV}}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad f=\widehat{0}|_{[a,b]}$$

implikáció. Valóban, ha $f\in\mathfrak{BV}[a,b]$ és

$$\|f\|_{\mathfrak{BV}}=|f(a)|+V_a^b(\alpha f)=0,$$

akkor $f(a)=0$ és $V_a^b(\alpha f)=0$. Így, ha $x\in[a,b]$, akkor az

$$x_0:=a, \qquad x_1:=x, \qquad x_2:=b$$

jelöléssel, ill. $f(a)=0$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-f(a)|\leq|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|= \\ &= \sum_{k=1}^{2}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq V_a^b(f)=0,\end{aligned}$$

azaz

$$f(x)=0 \qquad (x\in[a,b]). \quad \blacksquare$$

1.3.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{P} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ polinom}\},$$

továbbá tetszőleges $f \in \mathcal{P}$,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

esetén

$$p(f) := \max\{|a_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, m\}\},$$

akkor $(\mathcal{P}, p)$ normált tér!

1.3.9. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \qquad (f \in \mathfrak{C}[a,b])$$

függvény norma!

Útm. Világos, hogy $\|\cdot\|_\infty$ abszolút homogén, hiszen ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\|\lambda f\|_\infty = \max\{|\lambda f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$$

A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, mivel bármely $f, g \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \max\{|f(x)+g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \leq \\
&\leq \max\{|f(x)| + |g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \leq \\
&\leq \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} + \max\{|g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$: $\|f\|_\infty = 0$, akkor

$$\max\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = 0,$$

így

$$f(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]). \quad \blacksquare$$

1.3.3. gyakorló feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\mathcal{P} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ polinom}\},$$

továbbá tetszőleges $f \in \mathcal{P}$ esetén

$$p(f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n!},$$

ill. bármely $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ esetén

$$p_{[a,b]}(f) := \sup \{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\},$$

akkor p, ill. $p_{[a,b]}$ norma $\mathcal{P}$-n!

Útm.

1.3.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$p_1, \ldots, p_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

függvények félnormák és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, +\infty)$, akkor

1. a
$$p(x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$
leképezés félnorma;

2. a fenti p félnorma pontosan akkor lesz norma, ha bármely $x \in \mathcal{X} \backslash \{0\}$ esetén van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy fennáll a
$$p_k(x) \neq 0$$
egyenlőtlenség!

Útm.

1.3.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}_0$, és

$$\mathfrak{C}^k[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \ k\text{-szor folytonosan deriválható}\},$$

akkor norma a

$$\|f\|_{\mathfrak{C}^k} := \|f\|_{\mathfrak{C}^k[a,b]} := \sum_{\nu=0}^{k} \max \left\{ \left| f^{(\nu)}(x) \right| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b] \right\} \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

leképezés (vö. 1.2.5. feladat)!

Útm. Világos, hogy bármely $\nu \in \{0, \ldots, k\}$ esetén

$$\|f\|_\nu := \max\left\{|f^{(\nu)}(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\right\} = \|f^{(\nu)}\|_\infty \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

norma. Ezért (vö. 1.3.4. gyakorló feladat) a

$$\|f\| := \sum_{\nu=1}^{k} \|f\|_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \max\left\{|f^{(\nu)}(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\right\} \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

leképezés félnorma, és

$$\|f\| \geq \|f\|_0 = \|f\|_\infty > 0 \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b] \backslash \{\widehat{0}\})$$

miatt még norma is. ■

1.3.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, akkor

1. bármely $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetén a

$$p_\mathcal{A} : \mathcal{X}/\mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad p_\mathcal{A}([x]) := \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \; u \in [x]\}$$

   függvény félnorma;

2. az

$$\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{X} : \; p(x) = 0\}$$

   halmaz altér $\mathcal{X}$-ben (p **magja**);

3. bármely $x \in \mathcal{X}$ és $u \in \mathcal{N}$ esetén

$$p(x+u) = p(x);$$

4. bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$p_\mathcal{N}([x]) = p(x),$$

   továbbá $p_\mathcal{N}$ norma az $\mathcal{X}/\mathcal{N}$ faktortéren!

Útm.

1. lépés. Ha $[x], [y] \in \mathcal{X}/\mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}
p_\mathcal{A}([x]+[y]) &= p_\mathcal{A}([x+y]) = \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \; u \in [x+y]\} = \\
&= \inf\{p(u+v) \in \mathbb{R} : \; u \in [x], \, v \in [y]\} \leq \\
&\leq \inf\{p(u)+p(v) \in \mathbb{R} : \; u \in [x], \, v \in [y]\} \leq \\
&\leq \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \; u \in [x]\} + \inf\{p(v) \in \mathbb{R} : \; v \in [y]\} = \\
&= p_\mathcal{A}([x]) + p_\mathcal{A}([y])
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(\alpha[x]) &= p_{\mathcal{A}}([\alpha x]) = \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \ u \in [\alpha x]\} = \\ &= \inf\{p(\alpha u) \in \mathbb{R} : \ u \in [x]\} = \\ &= |\alpha| \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \ u \in [x]\} = \\ &= |\alpha| p_{\mathcal{A}}([x]). \end{aligned}$$

2. lépés. Mivel bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$

ezért ha $x, y \in \mathcal{N}$, akkor $x + y \in \mathcal{N}$ és $\alpha x \in \mathcal{N}$, tehát $\mathcal{N}$ altér.

3. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$ és $u \in \mathcal{N}$, akkor **(N4)**-ben (vö. 1.3.1. feladat) y helyébe $-u$-t helyettesítve

$$p(x) - p(u) \leq p(x+u) \leq p(x) + p(u),$$

adódik, ahonnan $p(u) = 0$ miatt

$$p(x+u) = p(x)$$

következik.

4. lépés. Ha

$$x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad u \in [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{N},$$

akkor

$$p(x) = p(u), \qquad \text{azaz} \qquad p_{\mathcal{N}}([x]) = p(x).$$

Így ha $p_{\mathcal{N}}([x]) = 0$, akkor $p(x) = 0$, azaz $x \in \mathcal{N}$. Ez azt jelenti, hogy p norma. ■

1.3.2. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha az $\mathcal{X}$ vektortérben a $(b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ vektorrendszer bázis, azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor egyételműen felírható az

$$x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma b_\gamma$$

alakban, ahol $\alpha_\gamma \in \mathbb{K}$ $(\gamma \in \Gamma)$ (az α_γ együtthatók közül legfeljebb véges sok különbözhet zérustól), akkor a

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) := \|x\|_\infty := \max\left\{|\alpha_\gamma| \in \mathbb{R} : \ \gamma \in \Gamma\right\},$$

ill. a

$$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad q(x) := \|x\|_0 := \sum_{\gamma \in \Gamma} |\alpha_\gamma|$$

leképezés norma!

1.3.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{Y}, q)$ félnormált tér, akkor

1. a
$$\sigma(x,y) := \sqrt{p^2(x)+q^2(y)} \qquad ((x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$$
függvény félnorma;
2. bármely $(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ esetén
$$\sigma(x,y)\le p(x)+q(y)\le\sqrt{2}\sigma(x,y),$$
továbbá ha p és q norma, akkor σ is norma!

Útm.

1. lépés. Ha $x_1,x_2\in\mathcal{X}$, $y_1,y_2\in\mathcal{Y}$, ill. $\alpha\in\mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}\sigma(x_1+x_2,y_1+y_2) &= \sqrt{p^2(x_1+x_2)+q^2(y_1+y_2)}\le\\ &\le \sqrt{[p(x_1)+p(x_2)]^2+[q(y_1)+q(y_2)]^2}\le\\ &\le \sqrt{p^2(x_1)+q^2(y_1)}+\sqrt{p^2(x_2)+q^2(y_2)}=\\ &= \sigma(x_1,y_1)+\sigma(x_2,y_2),\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha(x_1,y_1)) &= \sigma((\alpha x_1,\alpha y_1))=\sqrt{p^2(\alpha x_1)+q^2(\alpha y_1)}=\\ &= \sqrt{|\alpha|^2p^2(x_1)+|\alpha|^2q^2(y_1)}=\\ &= |\alpha|\cdot\sqrt{p^2(x_1)+q^2(y_1)]}=\\ &= |\alpha|\cdot\sigma(x_1,y_1),\end{aligned}$$

tehát σ félnorma.

2. lépés. Ha $(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, akkor

$$\begin{aligned}\sigma^2(x,y) &= p^2(x)+q^2(y)\le p^2(x)+2p(x)q(y)+q^2(y)=\\ &= [p(x)+q(y)]^2\le 2[p^2(x)+q^2(y)]=\\ &= 2\sigma^2(x,y).\end{aligned}$$

3. lépés. Ha p és q norma, akkor $\sigma(x,y)=0$-ból

$$p^2(x)+q^2(y)=0, \qquad \text{azaz} \qquad p(x)=0=q(y)$$

következik, ezért $x=0\in\mathcal{X}$ és $y=0\in\mathcal{Y}$, azaz $(x,y)=0\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Tehát σ norma. ■

1.3.3. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, akkor az

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \ni (x,y) \mapsto \|(x,y)\|_p := \left(\|x\|_{\mathcal{Y}}^p + \|y\|_{\mathcal{Y}}^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < +\infty),$$

ill. az

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \ni (x,y) \mapsto \|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_{\mathcal{X}}, \|y\|_{\mathcal{Y}}\}$$

függvény norma!

1.3.13. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ $\mathbb{K}$-vektorterek, $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ norma, továbbá a $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ leképezés injektív és **lineáris**, azaz

$$\varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha\varphi(y) \qquad (x, y \in \mathcal{X},\ \alpha \in \mathbb{K})$$

akkor a $p \circ \varphi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ függvény norma!

Útm.

1. lépés. Mivel p norma, így ha valamely $y \in \mathcal{Y}$ esetén $(p \circ \varphi)(y) = 0$, akkor $\varphi(y) = 0$, ahonnan φ injektivitása folytán $y = 0$ következik.

2. lépés. Ha $y \in \mathcal{Y}$, ill. $\beta \in \mathbb{K}$, akkor φ linearitása következtében

$$(p \circ \varphi)(\beta y) = p(\varphi(\beta y)) = p(\beta\varphi(y)) = |\beta| p(\varphi(y)) = |\beta|(p \circ \varphi)(y).$$

3. lépés. Ha $y, z \in \mathcal{Y}$, akkor φ linearitása miatt

$$(p\circ\varphi)(y+z) = p(\varphi(y+z)) = p(\varphi(y)+\varphi(z)) \leq p(\varphi(y))+p(\varphi(z)) = (p\circ\varphi)(y)+(p\circ\varphi)(z). \qquad \blacksquare$$

1.3.5. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^d$-n, akkor az $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}^d)$ vektortéren normát definiálnak az alábbi függvények!

1. $\|f\|_1 := \displaystyle\int_a^b \|f(x)\| \,\mathrm{d}x \ (f \in \mathcal{X})$;
2. $\|f\|_2 := \sqrt{\displaystyle\int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x} \ (f \in \mathcal{X})$;
3. $\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \ (f \in \mathcal{X})$.

Útm.

1.3.14. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $p \in \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R})$, $p > 0$, továbbá $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}^d)$, akkor az

$$\|f\|_\infty^p := \max\{\|f(x)\| \cdot p(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \qquad (f \in \mathcal{X})$$

függvény norma (**súlyozott norma**) az $\mathcal{X}$ vektortéren (vö. 1.2.10. házi feladat)!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $\|\cdot\|_\infty^p$ abszolút homogén, hiszen ha $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}^d)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_\infty^p &= \sup\{\|\lambda f(x)\| p(x) \in \mathbb{R}:\ x \in [a,b]\} = \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{\|f(x)\| p(x) \in \mathbb{R}:\ x \in [a,b]\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty^p.\end{aligned}$$

2. lépés. A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, mivel bármely $f, g \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}^d)$, ill. $x \in [a,b]$ esetén

$$\|f(x)+g(x)\| p(x) \leq \|f(x)\| p(x) + \|g(x)\| p(x) \leq \|f\|_\infty^p + \|g\|_\infty^p,$$

és így

$$\|f+g\|_\infty^p \leq \|f\|_\infty^p + \|g\|_\infty^p.$$

3. lépés. Ha valamely $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ esetén $\|f\|_\infty^p = 0$, akkor bármely $x \in [a,b]$ elemre $\|f(x)\| p(x) = 0$. Így p pozitivitása következtében $f = \widehat{0}|_{[a,b]}$. ■

1.3.5. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{Y}, q)$ normált terek **izometrikusan izomorf**ak, ha van olyan $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ szürjektív lineáris leképezés, amely **izometrikus**, azaz

$$q(\varphi(x)) = p(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

A φ leképezést ebben az esetben **izometrikus izomorfizmus**nak nevezzük.

1.3.15. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{Y}, q)$ normált terek esetén $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ izometrikus izomorfizmus, akkor

1. φ injektív;
2. $\varphi^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ izometrikus izomorfizmus;
3. tetszőleges $\mathcal{Z}$ vektortér és $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ lineáris bijekció esetén az

   $$r(z) := p(\psi^{-1}(z)) \qquad (z \in \mathcal{Z})$$

   leképezés (p indukálta) norma!

Útm.

1. Ha $u, v \in \mathcal{X}$ és $\varphi(u) = \varphi(v)$, akkor a linearitás miatt

   $$0 = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v).$$

   Mivel φ izometria, ezért

   $$0 = q(0) = q(\varphi(u - v)) = p(u - v),$$

   ahonnan $u - v = 0$, azaz $u = v$ következik.

2. Könnyű belátni, hogy φ^{-1} lineáris és szürjektív, továbbá ha $y \in \mathcal{Y}$ és $x \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $\varphi(x) = y$, akkor
$$p(\varphi^{-1}(y)) = p(x) = q(\varphi(x)) = q(y),$$
azaz φ^{-1} izometrikus.

3. Ha $z, w \in \mathcal{Z}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor alkalmas $u, v \in \mathcal{X}$ esetén $\psi(u) = z$, $\psi(v) = w$ és
$$\begin{aligned} r(z+w) &= r(\psi(u)+\psi(v)) = r(\psi(u+v)) = \\ &= p(u+v) \leq p(u)+p(v) = \\ &= r(\psi(u))+r(\psi(v)) = r(z)+r(w), \end{aligned}$$
ill.
$$\begin{aligned} r(\alpha z) &= r(\alpha\psi(u)) = r(\psi(\alpha u)) = p(\alpha u) = \\ &= |\alpha| p(u) = |\alpha| r(\psi(u)) = |\alpha| r(z), \end{aligned}$$
továbbá a
$$0 = r(z) = r(\psi(u)) = p(u)$$
egyenlőségből $u = 0$, azaz $z = \psi(u) = 0$ következik. ■

Ez persze azt is jelenti, hogy a ψ leképezés izometrikus izomorfizmus.

1.3.16. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, akkor a
$$\rho(x, y) := p(x - y) \qquad (x, y \in \mathcal{X}) \tag{1.3.1}$$
függvény félmetrika $\mathcal{X}$-en!

Útm. Valóban,

- ρ szemidefinitsége p szemidefinitségének és a $p(0) = 0$ tulajdonságnak közvetlen következménye;
- ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor p abszolút homogenitásának következménye a
$$\rho(x, y) = p(x - y) = p((-1)(y - x)) = |-1| \cdot p(y - x) = p(y - x) = \rho(y, x)$$
egyenlőség;
- ha $x, y, z \in \mathcal{X}$, akkor a p-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség következtében
$$\rho(x, y) = p(x - y) = p((x - z) + (z - y)) \leq p(x - z) + p(z - y) = \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad ■$$

Sőt, az is látható, hogy az (1.3.1)-ben bevezetett ρ félmetrika pontosan akkor metrika, ha p norma, hiszen

- ha p norma, akkor bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ esetén $x - y \neq 0$, így

$$\rho(x, y) = p(x - y) > 0,$$

azaz ρ defininit, így metrika is egyben;

- ha ρ metrika, akkor bármely $0 \neq x \in \mathcal{X}$ esetén

$$p(x) = p(x - 0) = \rho(x,0) > 0.$$

1.3.17. feladat. Adott $(\mathcal{X}, p)$ normált tér esetén adjunk példát olyan $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ metrikára, hogy

$$p(x) = \rho(x,0) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

de alkalmas $x, y \in \mathcal{X}$ elemekkel

$$\rho(x, y) \neq p(x - y)$$

teljesül!

Útm. Ha $(\mathcal{X}, p)$ normált tér és

$$\rho(x, y) := \frac{p(x - y) + |p(x) - p(y)|}{2} \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

akkor ρ metrika. Ui. ρ triviálisan szimmetrikus és pozitív szemidefinit, továbbá bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p(x - y) = 0 \quad \text{és} \quad p(x) = p(y)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

és a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, hiszen ha $x, y, z \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned}
\rho(x, z) + \rho(z, y) &= \frac{p(x - z) + |p(x) - p(z)| + p(z - y) + |p(z) - p(y)|}{2} = \\
&= \frac{p(x - z) + p(z - y) + |p(x) - p(z)| + |p(z) - p(y)|}{2} \geq \\
&\geq \frac{p(x - y) + |p(x) - p(y)|}{2} = \rho(x, y).
\end{aligned}$$

Továbbá

$$\rho(x,0) = p(x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

és nem igaz az, hogy minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x, y) = p(x - y),$$

ui. ebben az esetben

$$p(x - y) = |p(x) - p(y)| \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljesülne, ami viszont nem igaz, hiszen, ha pl.

$$y = -x \qquad (x \neq 0),$$

akkor $p(2x) = 0$, azaz $p(x)$=0, ami nem lehetséges. ■

1.3.6. definíció. Az (1.3.1)-beli (fél)metrikát a p **(fél)norma által generált metrikának**, ill. az $(\mathcal{X}, rho)$-t az $(\mathcal{X}, p)$ **(fél)normált tér által generált (fél)metrikus tér**nek nevezzük.

A továbbiakban minderre az $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, p)$ jelölést fogjuk használni (vö. [**?**]).

1.3.8. példa. Ha $\mathcal{X}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-vektortér és

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) := 0,$$

akkor p félnorma $\mathcal{X}$-en, és p az indiszkrét félmetrikát generálja.

1.3.9. példa. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor nincsen olyan $(\mathcal{X}, p)$ normált tér, amelyre $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, p)$ teljesülne, hiszen ellenkező esetben tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \neq 1$ és $x \in \mathcal{X}$: $x \neq 0$ esetén

$$p(\lambda x) = \rho(\lambda x, 0) = 1 \neq |\lambda| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda| \cdot \rho(x, 0) = |\lambda| \cdot p(x)$$

teljesülne, ami nem lehetséges.

Előfordulhat az is, hogy adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén a $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény nem norma, mégis metrikát indukál, mint ahogy tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ és $p \in [1, +\infty]$ esetén azt a

$$\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \frac{\|x\|_p}{1 + \|x\|_p}$$

függvény példája is mutatja (vö. 1.2.1/2. házi feladat):

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda x) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{|\lambda| \cdot \|x\|_p}{1 + |\lambda| \cdot \|x\|_p} = 1.$$

1.3.18. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ (fél)metrikus tér, akkor valamely $(\mathcal{X}, p)$ (fél)normált tér esetén $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, p)$ pontosan akkor áll fenn, ha ρ **eltolásinvariáns** és **abszolút homogén**, azaz bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \qquad \text{ill.} \qquad \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha a $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ leképezés (fél)norma, akkor

- $\rho(x + z, y + z) = p((x + z) - (y + z)) = p(x - y) = \rho(x, y)$;
- $\rho(\lambda x, \lambda y) = p(\lambda x - \lambda y)| = |\lambda| \cdot p(x - y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$.

2. lépés. Ha

$$p(x) := \rho(x,0) \qquad (x,\, 0 \in \mathcal{X}),$$

akkor

- $p(\lambda x) = \rho(\lambda x,0) = \rho(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| \cdot \rho(x,0) = |\lambda| \cdot p(x)$,
- $p(x+y) = \rho(x+y,0) \leq \rho(x+y,y) + \rho(y,0) = p(x+y-y) + p(y) = p(x) + p(y)$. ■

1.3.19. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 1 & (x_1 \neq y_1), \\ \\ \min\{1, |x_2 - y_2|\} & (x_1 = y_1) \end{cases} \qquad \left((x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\right)$$

metrikát nem indukálja egyetlen norma sem!

Útm. A ρ nem eltolásinvariáns, hiszen ha $x := (0,0)$, $y := (0,1)$ és $\lambda := 2$, akkor

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = \rho((0,0),(0,2)) = \min\{1, |0-2|\} = 1,$$

és

$$|\lambda| \cdot \rho(x,y) = 2 \cdot \rho((0,0),(0,1)) = 2 \cdot \min\{1, |0-1|\} = 2. \quad ■$$

1.3.20. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.2.9. házi feladatbeli metrika nem származtatható normából!

Útm. Ha

$$x := (1,0,0,\ldots), \qquad y := (0,0,\ldots) \qquad \text{és} \qquad \lambda := 2,$$

akkor

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = 2^{-1}\frac{|2-0|}{1+|2-0|} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = 2 \cdot 2^{-1} \cdot \frac{|1-0|}{1+|1-0|}. \quad ■$$

1.3.21. feladat. Mutassuk meg, hogy az 1.2.3. házi feladatbeli ρ metrika nem származtatható normából!

Útm. Ha

$$f(x) := 1 \qquad (x \in [0,+\infty)),$$

akkor

$$\rho(2f, \widehat{0}) = \frac{2}{3} \neq 1 = 2\rho(f, \widehat{0}). \quad ■$$

1.3.22. feladat. Igazoljuk, hogy

- bármely $0 < r < s < +\infty$ esetén
$$l_r \subsetneq l_s \subsetneq l_\infty;$$
- tetszőleges $x \in l_1$ esetén fennáll a
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$
határérték-reláció!

Útm.

1. lépés. Ha tetszőleges $r \in (0,+\infty)$ esetén $x = (x_n) \in l_r$, akkor $\|x\|_r < +\infty$, azaz alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre
$$|x_n| < 1 \qquad (N \le n \in \mathbb{N})$$
teljesül. Így (x_n) korlátos sorozat, azaz $x \in l_\infty$, továbbá bármely $r < s \in (0,+\infty)$ esetén
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s = \sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^s + \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^s \le \sum_{n=1}^{N-1} |x_n|^s + \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^r < +\infty,$$
ahonnan $x \in l_s$ következik.

2. lépés. Világos, hogy bármely $r \in (0,+\infty)$ esetén $l_r \neq l_\infty$, hiszen ha alkalmas $K \in \mathbb{K}$ esetén
$$x_n := K \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor $(x_n) \in l_\infty$, de $(x_n) \notin l_\infty$. Továbbá, ha $r \in (0,+\infty)$ és
$$x_n := \frac{1}{n^r} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor a (hiper)harmonikus sor konvergenciájára vonatkozó állítás következtében $(x_n) \notin l_r$, de $r < s \in (0,+\infty)$ esetén $(x_n) \in l_s$.

3. lépés. Ha $x \in l_1$ és x nem a konstans zérussorozat, akkor $\lim(|x_n|) = 0$ miatt a
$$H := \{n \in \mathbb{N} : \ |x_n| = \sup\{|x_m| \in \mathbb{R} : \ m \in \mathbb{N}\}\}$$
halmaz véges, így a $k := \min(H)$ indexre
$$0 \neq |x_k| = \|x\|_\infty$$
és
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|\frac{x_n}{x_k}\right|\right)^p = \sum_{k\neq n\in\mathbb{N}} \left(\left|\frac{x_n}{x_k}\right|\right)^p + \left(\left|\frac{x_k}{x_k}\right|\right)^p \ge 1,$$
így
$$\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|)^p \ge |x_k|^p, \qquad \text{azaz} \qquad \|x\|_p \ge |x_k| = \|x\|_\infty.$$

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\leq (n\cdot\|x\|_\infty^p)^{1/p}$$

Ha $x\in l_1$, akkor az 1. **lépés**ben bizonyítottak alapján bármely $p\in[1,+\infty)$ esetén $x\in l_p$, azaz bármely $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $N\in\mathbb{N}$ index, hogy

$$\|x\|_p-\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|^p\right)^{1/p}<\varepsilon$$

teljesül. Így

$$\|x\|_p<\left(\sum_{n=1}^{N}|x_n|^p\right)^{1/p}+\varepsilon\leq N^{1/p}\|x\|_\infty+\varepsilon,$$

ahonnan

$$\limsup_{p\to\infty}\|x\|_p\leq\|x\|_\infty+\varepsilon$$

következik. Mivel $\varepsilon>0$ tetszőleges volt, ezért

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty. \quad \blacksquare$$

1.3.23. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $0<\alpha\leq 1$ esetén

$$\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1]:=\{f:[0{,}1]\to\mathbb{R}:\ |f|_{0,\alpha}<\infty\},$$

ahol

$$|f|_{0,\alpha}:=\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\in\mathbb{R}:\ x,y\in[0{,}1],\ x\neq y\right\},$$

akkor

- valamely $f\in\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1]$ esetén f pontosan akkor állandófüggvény, ha $|f|_{0,\alpha}=0$;
- bármely $f\in\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1]$ esetén $\left(\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1],\|f\|_{0,\alpha}\right)$ normált tér, ahol

$$\|f\|_{0,\alpha}:=|f(0)|+|f|_{0,\alpha}$$

- $\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1]\subset\mathfrak{C}[0{,}1]$ és minden $f\in\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0{,}1]$ függvényre $\|f\|_\infty\leq\|f\|_{0,\alpha}$ teljesül!

Útm.

- Ha f állandófüggvény, azaz bármely $x,y\in[0{,}1]$ esetén $f(x)=f(y)$, akkor

$$\begin{aligned}|f|_{0,\alpha}&=\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\in\mathbb{R}:\ x,y\in[0{,}1],\ x\neq y\right\}=\\&=\sup\left\{\frac{0}{|x-y|^\alpha}\in\mathbb{R}:\ x,y\in[0{,}1],\ x\neq y\right\}=0.\end{aligned}$$

Ha viszont valamely $f \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1]$ esetén $|f|_{0,\alpha} = 0$, akkor tetszőleges $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$ esetén

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} = 0,$$

azaz

$$|f(x) - f(y)| = 0,$$

tehát f állandófüggvény.

- Mivel bármely $f, g \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1]$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\|f\|_{0,\alpha} = 0 \ \Leftrightarrow \ (|f(0)| = 0 \ \wedge \ |f|_{0,\alpha} = 0) \ \Leftrightarrow \ (f(0) = 0 \ \wedge \ f \text{ állandófüggvény}) \ \Leftrightarrow \ f = \widehat{0},$$

ill.

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{0,\alpha} &= |\lambda f(0)| + \sup\left\{\frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} = \\
&= |\lambda| \cdot |f(0)| + |\lambda| \cdot \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} = \\
&= |\lambda| \cdot \|f\|_{0,\alpha},
\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{0,\alpha} &= |f(0) + g(0)| + \\
&\quad + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} \leq \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \\
&\quad + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} = \\
&= |f(0)| + |g(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} + \\
&\quad + \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R} : \ x, y \in [0,1], \ x \neq y\right\} = \\
&= \|f\|_{0,\alpha} + \|g\|_{0,\alpha}.
\end{aligned}$$

- Ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = c \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1] \cap \mathfrak{C}[0,1].$$

Ha $f \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1]$ és f nem állandófüggvény, továbbá $\varepsilon > 0$, akkor bármely

$$x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta := (\varepsilon / |f|_{0,\alpha})^{1/\alpha}$$

esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq |f|_{0,\alpha}|x-y|^{\alpha} < |f|_{0,\alpha}\delta^{\alpha} = |f|_{0,\alpha}\frac{\varepsilon}{|f|_{0,\alpha}} = \varepsilon,$$

azaz $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, továbbá bármely

$$x, y \in [0,1],\ x \neq y,\ |x-y| < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} > 1$$

esetén

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty} &= \sup\{|f(y)| \in \mathbb{R} :\ y \in [0,1]\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{|f(y) - f(0)|}{1} \in \mathbb{R} :\ y \in [0,1]\right\} + |f(0)| \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{|f(y) - f(x)|}{|x-y|^{\alpha}} \in \mathbb{R} :\ x, y \in [0,1],\ x \neq y\right\} + |f(0)| = \\
&= \|f\|_{0,\alpha}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.2. Normált terek topológiája

Mivel bármely (fél)normából (fél)metrika, ill. (fél)metrikából topológia származtatható, ezért valamely (fél)normált teret mindig ezen metrikából származó topológiával látunk el. Az $(\mathcal{X}, p)$ (fél)normált tér esetén az $a \in \mathcal{X}$ pont $\varepsilon > 0$-sugarú környezete tehát a

$$K_{\varepsilon}(a) := \{x \in \mathcal{X} :\ p(x-a) < \varepsilon\}$$

halmaz. Így pl. a nullvektor egy környezetbázisa ebbben a topológiában a

$$\{K_{\varepsilon}(0) \subset \mathcal{X} :\ \varepsilon > 0\}$$

halmazrendszer (a nullvektor körüli összes nyílt gömb halmaza). Az

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat pedig pontosan akkor

- korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $p(x_n) \leq K$;
- konvergens, ha alkalmas $a \in \mathcal{X}$ esetén bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy
$$\rho(x_n, a) = p(x_n - a) < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N});$$

- Cauchy-féle, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\rho(x_m, x_n) = p(x_m - x_n) < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Továbbá, ha még $(\mathcal{Y}, q)$ is (fél)normált tér, akkor az $f \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvény pontosan akkor

- folytonos valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x \in \mathcal{D}_f$, akkor

$$p(x - a) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad q(f(x) - f(a)) < \varepsilon;$$

- egyenletesen folytonos, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x, y \in \mathcal{D}_f$, akkor

$$p(x - y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad q(f(x) - f(y)) < \varepsilon;$$

- Lipschitz-folytonos, ha alkalmas $L \geq 0$ számmal

$$q(f(x), f(y)) \leq Lp(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{D}_f)$$

  teljesül.

1.3.24. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, az

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-féle, akkor van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy

$$\|x_{\nu_{n+1}} - x_{\nu_n}\| < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül!

Útm. A feltétel miatt alkalmas $\nu_1 \in \mathbb{N}$ indexre

$$\nu_1 \leq m, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2},$$

továbbá valamely $\nu_1 < \nu_2 \in \mathbb{N}$ indexre

$$\nu_2 \leq m, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}.$$

Így teljes indukcióval olyan (ν_n) indexsorozatot definiálhatunk, amelyre

$$\|x_{\nu_{n+1}} - x_{\nu_n}\| < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. ■

1.3.25. feladat. Mutassuk meg, hogy az $(l_2, \|\cdot\|_2)$ normált térben a

$$H := \left\{x = (x_n) \in l_2 : \; 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \, (n \in \mathbb{N})\right\}$$

halmaz korlátos!

Útm. Mivel

$$\sup\left\{\|x\|_{l_2}^2 \in \mathbb{R} : \; x \in H\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ezért

$$H \subset K_{1/\sqrt{6}}(0),$$

így (vö. 1.2.5. definíció utáni megjegyzés) H korlátos. ■

1.3.26. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér esetén p pontosan akkor norma, ha $K_1(0)$ nem tartalmaz $\{0\}$-tól különböző $\mathcal{X}$-beli alteret!

Útm.

1. lépés. Ha p norma és

$$\{0\} \neq V \subset \mathcal{X}$$

olyan altér, amelyre $V \subset K_1(0)$, akkor bármely $0 \neq y \in V$ esetén $p(y) > 0$ következtében

$$x := \frac{1}{p(y)} y \in V.$$

Mivel

$$p(x) = \frac{p(y)}{p(y)} = 1,$$

ezért $x \notin K_1(0)$, ami nem lehetséges.

2. lépés. Ha p nem norma, akkor alkalmas $0 \neq x \in \mathcal{X}$ esetén $p(x) = 0$. A feltétel szerint p pozitív homogenitása következtében

$$p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{K}),$$

azaz

$$V := \{\alpha x \in \mathcal{X} : \; \alpha \in \mathbb{K}\} \subset K_1(0).$$

V altér, továbbá $V \neq \{0\}$, hiszen $x \in V$. ■

1.3.27. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathcal{X}$ és $0 < r, R \in \mathbb{R}$, akkor igaz a

$$K_R(b) \supset K_r(a) \quad \Longrightarrow \quad r \leq R$$

állítás!

Útm. Ha

$$\varphi(t) := a + t(a - b) \qquad (0 \leq t \in \mathbb{R}),$$

akkor $a = b$ esetén triviálisan teljesül $r \leq R$, ha pedig $a \neq b$, akkor

$$\varphi(t) \in K_r(a) \iff \|\varphi(t) - a\| < r \iff \|a + t(a-b) - a\| = t\|a - b\| < r \iff$$

$$\iff 0 \leq t < \frac{r}{\|a-b\|},$$

továbbá

$$\varphi(t) \in K_R(b) \iff \|\varphi(t) - b\| < R \iff \|a + t(a-b) - b\| = (t+1)\|a - b\| < R \iff$$

$$\iff 0 \leq t < \frac{R}{\|a-b\|} - 1.$$

Így

$$K_R(b) \supset K_r(a) \implies \frac{r}{\|a-b\|} \leq \frac{R}{\|a-b\|} - 1 \iff r \leq r + \|a-b\| \leq R. \quad \blacksquare$$

Ez azt jelenti, hogy – metrikus terekkel ellentétben (vö. 1.2.15. feladat) – normált térben a nagyobb sugarú gömb „nem fér bele" a kisebb sugarúba.

1.3.28. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$, akkor

$$\overline{K_\varepsilon(a)} = B_\varepsilon(a) = \{x \in X : \ \|x - a\| \leq \varepsilon\}$$

teljesül!

Útm. Mivel $K_\varepsilon(a) \subset B_\varepsilon(a)$ és $B_\varepsilon(a)$ zárt halmaz (vö. 1.2.22. feladat), ezért $\overline{K_\varepsilon(a)} \subset B_\varepsilon(a)$, így már csak azt kell megmutatni, hogy $B_\varepsilon(a)$ minen pontja érintkezési pontja $K_\varepsilon(a)$-nak. Mivel

$$b \in B_\varepsilon(a) \iff \|b - a\| \leq \varepsilon \iff (\|b-a\| < \varepsilon \quad \text{vagy} \quad \|b-a\| = \varepsilon),$$

ezért

- ha
$$\|b - a\| < \varepsilon,$$
akkor $b \in K_\varepsilon(a) \subset \overline{K_\varepsilon(a)}$.
- ha
$$\|b - a\| = \varepsilon,$$
akkor elég belátni, hogy bármely $r > 0$ esetén
$$K_r(b) \cap K_\varepsilon(a) \neq \emptyset.$$
Valóban, ha
$$\varphi(t) := a + t(b-a) \quad (0 \leq t \in \mathbb{R}),$$

akkor t megválasztható úgy, hogy

$$\varphi(t) \in K_r(b) \cap K_\varepsilon(a)$$

legyen, ui.

$$\varphi(t) \in K_\varepsilon(a) \iff \|\varphi(t) - a\| < \varepsilon \iff \|t(b-a)\| = t\|b-a\| = t\varepsilon < \varepsilon \iff 0 < t < 1$$

és

$$\varphi(t) \in K_r(b) \iff \|\varphi(t) - b\| < \varepsilon \iff \|a + t(b-a) - b\| = |t-1| \cdot \|b-a\| < \varepsilon,$$

így ha $t \in (0,1)$, akkor

$$|t-1| \cdot \|b-a\| = (1-t)\varepsilon < r \iff 1 - t < \frac{r}{\varepsilon} \iff 1 - \frac{r}{\varepsilon} < t < 1$$

és ilyen t van. ■

1.3.29. feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben az **egységszféra**, azaz a

$$\partial B_1(0) := \{x \in \mathcal{X} : \ \|x\| = 1\}$$

halmaz zárt!

Útm. Ha valamely

$$x_n \in \partial B_1(0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}$ teljesül, akkor

$$\big|\|x\| - 1\big| = \big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következtében $x \in \partial B_1(0)$, azaz $\partial B_1(0)$ zárt halmaz. ■

1.3.30. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ normált térben az $A := \partial B_1(0)$ egységszféra sovány (első kategóriájú) halmaz!

Útm. Mivel A zárt (vö. 1.3.29. feladat) és $\mathrm{int}\,(A) = \emptyset$, ezért (vö. 1.1.8/2. házi feladat), ezért A első kategóriájú. ■

1.3.31. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\mathfrak{c}_0 := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ \lim(x_n) = 0\},$$

akkor $\mathfrak{c}_0$ zárt altere l_∞-nek (a $\|\cdot\|_\infty$-normára nézve)!

Útm. Világos, hogy $\mathfrak{c}_0 \subset l_\infty$ vektortér (vö. 1.3.4. feladat). Ha

$$x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty$$

és

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$-beli sorozat, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = 0$$

teljesül, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|x_k^{(n)} - x_k\right| \le \left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\mathfrak{c}_0$ definíciója következtében tetszőlegesen rögzített n esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left|x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \le k \in \mathbb{N})\,.$$

Ezért bármely $k \in \mathbb{N}$, $k \ge N$ esetén

$$|x_k| \le \left|x_k^{(n)} - x_k\right| + \left|x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{c}_0$, ami azt jelenti, hogy $\mathfrak{c}_0$ zárt. ■

1.3.32. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\mathfrak{c} := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ \lim(x_n) \in \mathbb{K}\}\,,$$

akkor $\mathfrak{c}$ zárt altere l_∞-nek (a $\|\cdot\|_\infty$-normára nézve)!

Útm. Világos, hogy $\mathfrak{c} \subset l_\infty$, hiszen minden konvergens sorozat korlátos. Legyen

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty$$

és

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$-beli sorozat, amelyre

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = 0$$

teljesül. Mivel x korlátos sorozat, ezért a Bolzano-Weierstraß-tétel következtében van olyan (ν_m) indexsorozat, hogy alkalmas $\xi \in \mathbb{K}$ esetén

$$(**) \qquad \lim\,(x_{\nu_m}) = \xi$$

teljesül. Ha

$$\xi_n := \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$(***) \qquad \xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{\nu_m}^{(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor $(*)$ következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

amiből

$$\left|x_k^{(n)} - x_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

következik. $(**)$ következtében van olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy

$$|x_{\nu_m} - \xi| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (M \leq m \in \mathbb{N})$$

Végül $(***)$ következtében bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén van olyan $l \in \mathbb{N}$, hogy $\nu \geq M$ és

$$\left|x_{\nu_l}^{(n)} - \xi_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Így bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\xi_n - \xi| \leq \left|\xi_n - x_{\nu_l}^{(n)}\right| + \left|x_{\nu_l}^{(n)} - x_{\nu_l}\right| + |x_{\nu_l} - \xi| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim(\xi_n)\xi$. Ennélfogva x nem lehet divergens. Ellenkező esetben, ui. x-nek lenne egy $\xi \neq \eta \in \mathbb{K}$ torlódási pontja és $\lim(\xi_n) = \eta$ lenne, ami nem lehetséges. ■

1.3.6. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és az $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetén $\overline{\mathcal{A}}$ is altér!

Útm.

1.3.33. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén az

$$\mathcal{A} := \{f \in \mathfrak{C}[a,b] : \ f(a) = 0\}$$

halmaz zárt altér!

Útm.

1. lépés. Ha $f, g \in \mathcal{A}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $f + \alpha g \in \mathfrak{C}[a,b]$ és

$$(f + \alpha g)(a) = f(a) + \alpha g(a) = 0,$$

azaz $\mathcal{A}$ altér.

2. lépés. Ha az $f_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$-ben és

$$f := \lim(f_n),$$

akkor

$$\begin{aligned} |f(a)| &= |f_n(a) - f(a)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = \\ &= \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

így $f(a) = 0$, azaz $f \in \mathcal{A}$. ■

1.3.34. feladat. Lássuk be, hogy a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén az

$$\mathcal{A} := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ \exists p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinom}: f(x) = p(x) \ \ (x \in [-1,1])\}$$

halmaz nem nyílt!

Útm. Ha $f \in \mathcal{A}$ és $\varepsilon > 0$, akkor a

$$g(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{2}|x| \qquad ([-1,1])$$

függvényre

$$\begin{aligned}\|f-g\|_\infty &= \sup\left\{\left|f(x) - f(x) - \frac{\varepsilon}{2}|x|\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [-1,1]\right\} = \\ &= \sup\left\{\left|\frac{\varepsilon}{2}|x|\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [-1,1]\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel g nem deriválható, ezért nem lehet polinom. ■

1.3.35. feladat. Mutassuk meg, hogy L^2-ben a

$$H := \{[0,1] \ni x \mapsto \sin(n\pi x) \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz nem kompakt!

Útm. Mivel bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m \geq n$ esetén

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 |\sin(m\pi x) - \sin(n\pi x)|^2 \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \sin^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sin^2(m\pi x)\sin^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1,\end{aligned}$$

ezért az

$$\mathcal{F} := \{K_1(x_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése H-nak. Sőt az látszik, hogy $\mathcal{F}$-ből nem választható ki H-nak véges fedőrendszere. ■

1.3.36. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, úgy valamely $H \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha prekompakt és zárt.

Útm.

1. lépés. Ha H kompakt, akkor (vö. 1.1.56/1. feladat) H zárt, így

$$\overline{H} = H$$

következtében H prekompakt.

2. lépés. Ha H prekompakt és zárt, akkor

$$\overline{H} = H$$

kompakt. ■

1.3.37. feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 < p < q < \infty$, akkor l_p mindenütt sűrű l_q-ban!

Útm. Ha

$$x = (x_n) \in l_q,$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^q < \varepsilon^q.$$

Ezért az

$$u := (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \in l_p \subset l_q$$

sorozatra

$$\|x - u\|_q < \varepsilon,$$

azaz l_p mindenütt sűrű l_q-ban. ■

Ha $p \in (0, +\infty)$, akkor persze nem igaz az, hogy l_p mindenütt sűrű l_∞-ben, hiszen az

$$u := (1, 1, \ldots) \in l_\infty$$

sorozatra

$$\|u - x\|_\infty \geq 1 \qquad (x \in l_p),$$

ui. bármely $x = (x_n) \in l_p$ esetén $\lim(x_n) = 0$.

1.3.38. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $p, q \in [1, +\infty)$: $p < q$, továbbá $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ véges mértéktér ($\mu(\mathcal{X}) < +\infty$), akkor L^q mindenütt sűrű L^p-ben!

Útm. Ha $f \in L^p$, akkor nyilván

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{\{n-1 \leq |f| \leq n\}}.$$

Ha

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f \cdot \chi_{\{k-1 \leq |f| \leq k\}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor (vö. 11.4.11/1. tétel)

$$f_n \in L^\infty \subset L^q \subset L^p, \quad |f_n| \leq f \in L^p \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá $\lim(f_n) = f$. Ezért a Lebesgue-tétel (vö. 11.4.11/5. tétel) következtében

$$\lim(\|f - f_n\|_p) = 0.$$

Így bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy a

$$g := f_n \in L^q$$

függvényre

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

teljesül. ■

1.3.7. definíció. Azt mondjuk, hogy at

$$f : [a, b] \to \mathbb{K}$$

függvény **szakaszonként lineáris**, ha alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$\tau := \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$

felosztás esetén f lineáris az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon $(i \in \{0, \ldots, n-1\})$.

1.3.39. feladat. Lássuk be, hogy a $(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a folytonos, szakaszonként lineáris függvények halmaza mindenütt sűrű!

Útm. Ha $f \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ és $\varepsilon > 0$, akkor f egyenletes folytonossága következtében alkalmas $\delta > 0$ számra

$$(x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$\tau := \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$

felosztása $[a, b]$-nek, továbbá $g \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ olyan függvény, amely lineáris az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon $(i \in \{0, \ldots, n-1\})$ és amelyre

$$g(x_i) = f(x_i) \qquad (i \in \{0, \ldots, n\})$$

teljesül, akkor bármely $x \in [a, b]$ esetén van olyan $i \in \{0, \ldots, n\}$, hogy $x \in [x_i, x_{i+1}]$, és így

$$|g(x) - f(x_i)| = |g(x) - g(x_i)| \leq |g(x_{i+1}) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ill.

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon,$$

azaz

$$g \in K_\varepsilon(f). \quad ■$$

Az 1.2.28. feladatból tudjuk, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|)$ normált térben valamely

$$f_n \in \mathfrak{C}[a,b] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat pontosan akkor konvergens, azaz alkalmas $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty) = 0,$$

ha (f_n) egyenletesn konvergál f-hez:

$$f_n \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

1.3.7. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ és $(\mathcal{Y}, , \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, akkor bármely

1. olyan $x_n, y_n \in \mathcal{X}$, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra, amelyre

   $$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}, \qquad \lim(y_n) =: y \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lim(\alpha_n) = \alpha \in \mathbb{K}$$

   teljesül, igaz, hogy

   $$\lim(x_n + y_n) = x + y, \qquad \lim(\alpha_n x_n) = \alpha_n x \qquad \text{és} \qquad \lim(\|x_n\|) = \|x\|;$$

2. $f, g \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$: $f, g \in \mathfrak{C}[a]$ függvények esetén $f + g \in \mathfrak{C}[a]$;
3. $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: $f, g \in \mathfrak{C}[a]$ függvények esetén $fg \in \mathfrak{C}[a]$ teljesül!

Útm.

1.3.40. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subset \mathcal{X}$, akkor igaz a

$$\text{span}\,(\overline{A}) \subset \overline{\text{span}\,(A)}$$

tartalmazás!

Útm. Ha $x \in \text{span}\,(\overline{A})$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in \overline{A}$ esetén

$$x = x_1 + \ldots + x_n.$$

Mivel $x_1, \ldots, x_n \in \overline{A}$, így ha

$$y^{(k)} : \mathbb{N} \to A : \quad \lim\left(y^{(k)}\right) = x_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$x = \lim\left(y^{(1)}\right) + \ldots + \lim\left(y^{(n)}\right) = \lim\left(y^{(1)} + \ldots + y^{(n)}\right) \in \overline{\text{span}\,(A)}. \quad \blacksquare$$

1.3.41. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér,

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := p(x),$$

akkor f egyenletesen folytonos!

Útm. Mivel tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

(vö. pl. 1.3.1. feladat), ezért f (egyenletesen) folytonos. ■

1.3.8. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén azt mondjuk, hogy az $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatból képzett $\sum(x_n)$ **sor** konvergens és **összege**

$$s \in \mathcal{X} \qquad \Big/ \text{jelben } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = s \Big/ ,$$

ha az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegek sorozatára $\lim(s_n) = s$; ha (s_n) nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy $\sum(x_n)$ **divergens**. A $\sum(x_n)$ sort **abszolút konvergens**nek nevezzük, ha a $\sum(\|x_n\|)$ sor konvergens.

1.3.42. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, és $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a

$$\|x_{n+1} - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

határérték-relációból nem következik, hogy (x_n) Cauchy-sorozat!

Útm. Ha pl. $\mathcal{X} := \mathbb{R}$, ill.

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor (x_n) nem Cauchy-féle, de

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad ■$$

1.3.43. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, akkor

1. $\lim(x_n) = 0 \in \mathcal{X}$;
2. a részletösszegek (s_n) sorozata Cauchy-sorozat!

Útm. Ha $\sum(x_n)$ abszolút konvergens, azaz a $\sum(\|x_n\|)$ sor konvergens, akkor

1. $\lim(\|x_n\|) = 0$, ahonnan
$$\lim(x_n) = 0 \in \mathcal{X}$$
következik;

2. az
$$\alpha_n := \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat Cauchy-sorozat, így (s_n) is az, hiszen bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_n \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = \alpha_m - \alpha_n. \qquad \blacksquare$$

1.3.44. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben (x_n) Cauchy-sorozat, akkor a $(\|x_n\|)$ sorozat konvergens!

Útm. Mivel bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\big|\|x_m\| - \|x_n\|\big| \leq \|x_m - x_n\|,$$
ezért az $(\|x_n\|)$ (valós) sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. $\blacksquare$

1.3.8. gyakorló feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és
$$\limsup\left(\sqrt[n]{\|x_n\|}\right) < 1 \qquad \text{vagy} \qquad \limsup\left(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right) < 1,$$
akkor $\sum(x_n)$ abszolút konvergens, ha pedig
$$\liminf\left(\sqrt[n]{\|x_n\|}\right) > 1 \qquad \text{vagy} \qquad \liminf\left(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}\right) > 1,$$
akkor $\sum(x_n)$ divergens.

Útm.

1.3.45. feladat. Igazoljuk, hogy ha
$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
azaz
$$e_n := (\overset{1}{\smile}{0}, \ldots, 0, \overset{n}{\smile}{1}, 0, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor az $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} e_n\right)$$
sor tetszőleges átrendezése konvergens, de a sor nem abszolút konvergens!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$x := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n = x.$$

Valóban, ha $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutáció, akkor bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} \in l_\infty$$

olyan sorozat, amelynek $\sigma(n)$-edik tagja $\frac{1}{\sigma(n)}$, amennyiben $1 \leq n \leq m$, az összes többi tag pedig 0:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = \left(\overset{\overset{1}{\smile}}{\frac{1}{\sigma(1)}}, \dots, \overset{\overset{m}{\smile}}{\frac{1}{\sigma(m)}}, 0, 0, \dots\right).$$

Ha tehát $j \in \mathbb{N}$ és m-et úgy választjuk meg, hogy

$$\{1, \dots, j\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\},$$

akkor

$$x - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$$

olyan l_∞-beli sorozat, amelynek a tagjai kisebbek, mint $\frac{1}{j}$, ahonnan

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} \right\|_\infty < \frac{1}{j}.$$

következik. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = x.$$

2. lépés. Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n} e_n \right\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

ezért a sor nem abszolút konvergens. ■

1.3.9. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz

- **szimmetrikus**, ha bármely $x \in A$ és $|\alpha| \leq 1$ esetén $\alpha x \in A$;
- **konvex**, ha bármely $x, y \in A$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén $\alpha x + (1-\alpha) y \in A$;
- **elnyelő**, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ elemhez van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $\frac{1}{\alpha} x \in A$.

1.3.10. példa. Az

$$A := \left\{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ x_n \leq \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N})\right\}$$

halmaz konvex, hiszen ha $x, y \in A$ és $\alpha \in [0,1]$, akkor

$$\alpha x_n + (1-\alpha) y_n \leq \alpha \frac{1}{n} + (1-\alpha)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Az A halmaz nem szimmetrikus, ui.

$$(-2,0,0,\ldots) \in A, \qquad \text{de} \qquad (-1)\cdot(-2,0,0,\ldots) = (2,0,0,\ldots) \notin A.$$

1.3.11. példa. Az

$$A := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1,1]\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [-1,1]\right\}$$

halmaz triviálisan szimmetrikus, de nem konvex, hiszen ha $\alpha := \frac{1}{2}$, $a := (1,0)$, $b := (0,1)$ akkor

$$\alpha a + (1-\alpha) b = (1/2,1/2) \notin A.$$

1.3.9. gyakorló feladat. Döntsük el, hogy az

$$A := \left\{z \in \mathbb{C} : \ (\Re(z))^2 + 4(\Im(z))^2 \leq 1\right\}$$

halmaz konvex, ill. szimmetrikus-e!

Útm.

1.3.46. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az

$$A := \left\{f \in \mathcal{X} : \ \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1\right\}$$

halmaz zárt és konvex!

Útm.

1. lépés. Ha (f_n) olyan A-beli függvénysorozat, hogy valamely $f \in \mathcal{X}$ függvényre

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty = 0,$$

akkor

$$\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = \lim\left(\int_0^{1/2} - \int_{1/2}^1 f_n\right) = 1,$$

hiszen az egyenletes konvergencia maga után vonja az L^1-beli konvergenciát. Ez azt jelenti, hogy $f \in A$, azaz A zárt.

2. lépés. Ha $f, g \in A$ és $\lambda \in [0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} (\lambda f + (1-\lambda)g) - \int_{1/2}^1 (\lambda f + (1-\lambda)g) = \\ = \ & \lambda \left(\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \right) + (1-\lambda) \left(\int_0^{1/2} g - \int_{1/2}^1 f \right) = \\ = \ & \lambda + (1-\lambda) = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\lambda f + (1-\lambda)g \in A,$$

tehát A konvex. ■

1.3.47. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ lineáris tér, akkor bármely $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ szakasz konvex, továbbá ha $x \in \mathcal{X}$, $c \in \mathbb{K}$ és $A, B \subset \mathcal{X}$, akkor

1. A konvex $\Longrightarrow$ $x + A$ és cA konvex (vö. 11.3.11. definíció);
2. A szimmetrikus $\Longrightarrow$ cA szimmetrikus;
3. A, B konvex $\Longrightarrow$ $A + B$ konvex!

Útm.

1. lépés. Ha $a, b \in \mathcal{X}$, $\mathcal{S}$ az a és a b pontot összekötő szakasz és $x, y \in \mathcal{S}$, akkor alkalmas $\alpha, \beta \in [0,1]$ esetén

$$x = a + \alpha(b-a) \qquad \text{és} \qquad y = a + \beta(b-a).$$

Ha $\lambda \in [0,1]$, akkor

$$\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \in [0,1]$$

következtében

$$\lambda x + (1-\lambda)y = a + (\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)(b-a) \in \mathcal{S},$$

azaz $\mathcal{S}$ konvex.

2. lépés. A második két állítás pedig az alábbi módon látható be:

1. Ha $u, v \in A$ és $\alpha \in [0,1]$, akkor

$$\alpha(x+u) + (1-\alpha)(x+v) = x + (\alpha u + (1-\alpha)v) \in x + A$$

és

$$c(\alpha u) + (1-\alpha)(cv) = c(\alpha u + (1-\alpha)v) \in cA,$$

hiszen A konvex.

2. Ha $x \in A$ és $|\alpha| \leq 1$, akkor
$$\alpha(cx) = c(\alpha x) \in cA.$$

3. lépés. Ha $u, v \in A + B$, akkor alkalmas $a_1, a_2 \in A$, ill. $b_1, b_2 \in B$ esetén

$$u = a_1 + b_1, \qquad \text{ill.} \qquad v = a_2 + b_2.$$

Így bármely $\alpha \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} \alpha u + (1-\alpha)v &= \alpha(a_1 + b_1) + (1-\alpha)(a_2 + b_2) = \\ &= \underbrace{[\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2]}_{\in A} + \underbrace{[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2]}_{\in B} \in A + B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.48. feladat. Mutassuk meg, hogy konvex halmazok metszete konvex, azaz ha valamely $\mathcal{X}$ vektortér, ill. Γ indexhalmaz esetén

$$H_\gamma \subset \mathcal{X} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

konvex, akkor a
$$H := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma \subset \mathcal{X}$$
halmaz is konvex!

Útm. Ha $u, v \in H$ és $\alpha \in [0,1]$, akkor minden $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in H_\gamma,$$

hiszen H_γ konvex. Így
$$\alpha u + (1-\alpha)v \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma = H. \quad \blacksquare$$

Az 1.3.48. feladatbeli állítás alapján jogos az

1.3.10. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér, ill. $A \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén A **konvex burkának** nevezzük az összes, A-t tartalmazó konvex halmaz metszetét:

$$\operatorname{co}(A) := \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{ konvex}}} B.$$

Az 1.3.48. feladatbeli állításból az is következik, hogy a konvex burok minimális a következő értelemben: ha $H \subset \mathcal{X}$ olyan konvex halmaz, amelyre $A \subset H$ teljesül, akkor $\operatorname{co}(A) \subset H$.

1.3.4. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, akkor az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor konvex, ha $\mathrm{co}\,(A) = A$ teljesül!

1.3.49. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, akkor valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz konvex burka nem más, mint az A-beli vektorok összes **konvex kombináció**inak halmaza, azaz

$$\mathrm{co}\,(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathcal{X} :\ x_k \in A,\ \alpha_k \in [0,\infty) :\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha

$$u, v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n,$$

akkor alkalmas

$$n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k, \beta_k \in [0,\infty), \quad x_k \in A \quad (k \in \{1,\ldots,n\}), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

esetén

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \qquad \text{és} \qquad v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k.$$

Így, ha $\lambda \in [0{,}1]$, akkor

$$\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k \in [0,\infty) \quad (k \in \{1,\ldots,n\}) \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} \{\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k\} = 1,$$

ennélfogva

$$\lambda u + (1-\lambda)v = \sum_{k=1}^{n} \{\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k)x_k\} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n,$$

azaz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ konvex. Mivel

$$A = H_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n,$$

ezért

$$\mathrm{co}\,(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n.$$

2. lépés. Világos, hogy

$$H_1 = A \subset \mathrm{co}\,(A).$$

Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H_n \subset \mathrm{co}\,(A)$ és $u \in H_{n+1}$, akkor

$$u = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \qquad \left(\alpha_k \in [0,+\infty)\,(k \in \{1,\ldots,n\}),\ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \right).$$

Így, ha

- $\alpha_{n+1} = 1$, akkor $u = x_{n+1} \in A \subset \mathrm{co}\,(A)$,
- $\alpha_{n+1} < 1$, akkor

$$u = \alpha_{n+1}x_{n+1} + (1-\alpha_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}}x_k,$$

és

$$x_{n+1} \in A \subset \mathrm{co}\,(A), \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}}x_k \in H_n \subset \mathrm{co}\,(A),$$

így $\mathrm{co}\,(A)$ konvexsége miatt $u \in \mathrm{co}\,(A)$, azaz $H_{n+1} \subset \mathrm{co}\,(A)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{co}\,(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n. \quad \blacksquare$$

1.3.50. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, úgy ha

1. $H \subset \mathcal{X}$ nyílt, akkor $\mathrm{co}\,(H)$ is nyílt;
2. $H \subset \mathcal{X}$ zárt, akkor $\mathrm{co}\,(H)$ nem feltétlenül zárt!

Útm.

1. Ha $x \in \mathrm{co}\,(H)$, akkor (vö. 1.3.49. feladat) alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$h_1, \ldots, h_n \in H \qquad \text{és} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1] : \sum_{k=1}^{n} = 1$$

esetén

$$x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k.$$

Mivel H nyílt, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén van olyan $\varepsilon_k > 0$, hogy

$$h_k + \varepsilon_k K_1(0) \subset H$$

teljesül. Ha most

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\},$$

akkor $\varepsilon > 0$ és

$$h_k + \varepsilon K_1(0) \subset h_k + \varepsilon_k K_1(0) \subset H \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Így tetszőleges $u \in \varepsilon K_1(0)$ esetén

$$h_k + u \in H \subset \mathrm{co}\,(H) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

ahonnan $\mathrm{co}\,(H)$ konvexitása következtében

$$x + u = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k\right) + u = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k h_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)u = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(h_k+u) \in \mathrm{co}\,(H),$$

ill.

$$x + \varepsilon K_1(0) \subset \mathrm{co}\,(H).$$

2. A
$$H := [0,+\infty) \times \{0\} \cup \{(0,1)\}$$
zárt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, viszont
$$\begin{aligned}\mathrm{co}\,(H) &= \bigcup_{x\geq 0} \mathrm{co}\,\{(0,1),(x,0)\} = \bigcup_{x\geq 0} \left\{(\lambda x, 1-\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ \lambda\in[0,1]\right\} = \\ &= [0,+\infty)\times[0,1)\cup\{(0,1)\}\end{aligned}$$
nem zárt, hiszen
$$\mathrm{co}\,(H) = (0,+\infty)\times\{1\} = \partial(\mathrm{co}\,(H))\backslash\mathrm{co}\,(H). \quad \blacksquare$$

1.3.11. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér, ill. $a, b \in \mathcal{X}$ pontok esetén az
$$[a,b] := \{ta + (1-t)b \in \mathcal{X} :\ t \in [0,1]\} \subset \mathcal{X},$$
ill. az
$$(a,b) := \{ta + (1-t)b \in \mathcal{X} :\ t \in (0,1)\} \subset \mathcal{X}$$
halmazt az a és b pontokat összekötő **zárt**, ill. **nyílt szakasz**nak nevezzük.

1.3.51. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, $a,b,c \in \mathcal{X}$: $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, ill. $x \in (a,b)$, akkor tetszőleges $y \in [x,c]$ esetén van olyan $z \in [b,c]$, hogy $y \in [a,z]$ teljesül!

Útm. Ha $x \in (a,b)$, akkor alkalmas $t \in (0,1)$ számmal
$$x = ta + (1-t)b.$$
Legyen $y \in [x,c]$. Ha $y = x$, akkor a $z := b$ választással
$$y = x \in [a,b] = [a,z].$$
Ha $y = c$, akkor a $z := c$ választással
$$y = c \in [a,c] = [a,z].$$
Ha pedig $y \in (x,c)$, akkor alkalmas $s \in (0,1)$ esetén
$$y = sx + (1-s)c = s\{ta + (1-t)b\} + (1-s)c = (ts)a + (1-ts)\left\{\frac{s(1-t)}{1-ts}b + \frac{1-s}{1-ts}c\right\}.$$
Mivel $t, s \in (0,1)$, ezért
$$ts \in (0,1) \qquad \text{és} \qquad 1 - ts \in (0,1).$$
Innen pedig az következik, hogy
$$\frac{s(1-t)}{1-ts} \in (0,+\infty) \qquad \text{és} \qquad \frac{1-s}{1-ts} \in (0,+\infty),$$

továbbá

$$\frac{s(1-t)}{1-ts} + \frac{1-s}{1-ts} = \frac{s-ts+1-s}{1-ts} = 1,$$

azaz a

$$z = \frac{s(1-t)}{1-ts}b + \frac{1-s}{1-ts}c$$

pont a b és a c pontok (valódi) konvex-kombinációja:

$$z \in (b, c),$$

továbbá y az a és a z pontok (valódi) konvex-kombinációja:

$$y \in (a, z). \quad \blacksquare$$

1.3.12. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$ halmaz **csillagtartomány**, ha alkalmas $h \in H$ esetén

$$[h, x] \subset H \qquad (x \in H)$$

teljesül. A h pontot H **csillagpont**jának nevezzük.

1.3.52. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, akkor bármely $\mathcal{X}$-beli csillagtartomány csillagpontjai konvex halmazt alkotnak!

Útm. Tegyük fel, hogy $H \subset \mathcal{X}$ csillagtartomány, és $a, b \in H$ olyan csillagpont (H-ban), amelyre $a \neq b$ teljesül. Ha $x \in [a, b]$, $c \in H$ továbbá $y \in [x, c]$, akkor (vö. 1.3.51. feladat) alkalmas $z \in [b, c]$ esetén $y \in [a, z]$. Mivel b csillagpontja H-nak, ezért $c \in H$ következtében

$$z \in [b, c] \subset H.$$

Mivel a csillagpontja H-nak, ezért

$$z \in H \qquad \Longrightarrow \qquad y \in [a, z] \subset H,$$

így $y \in H$. Ez azt jelenti, hogy bármely két csillagpontot összekötő szakasz minden pontja csillagpont. $\blacksquare$

1.3.53. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^d$, akkor bármely $u \in \mathrm{co}\,(A)$ vektor felírható legfeljebb $d + 1$ darab A-beli vektor lineáris kombinációjaként (**Carathéodory-tétel**)!

Útm. Ha $u \in \mathrm{co}\,(A)$, akkor (vö. 1.3.49. feladat) alkalmas

$$n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in [0, \infty), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \quad u_k \in A \quad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

esetén

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $n > d+1$, akkor vannak olyan

$$\beta_k \in [0, \infty), \quad u_k \in A \qquad (k \in \{1, \dots, n\})$$

skalárok, ill. vektorok, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1, \qquad \prod_{k=1}^{n} \beta_k = 0, \qquad \text{ill.} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k.$$

Ha valamely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\alpha_k = 0$, akkor készen vagyunk. Ha pedig bármely $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\alpha_k \neq 0$, akkor a

$$v_k := \alpha_k \begin{bmatrix} u_k \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \qquad (k \in \{1, \dots, n\})$$

vektorok lineárisan összefüggőek, azaz alkalmas $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| +, \dots + |\mu_n| > 0$ skalárokkal

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \alpha_k = 0.$$

Világos, hogy alkalmas $l \in \{1, \dots, n\}$ esetén a

$$\mu_l := \min \{\mu_k \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \dots, n\}\}$$

számra $\mu_l < 0$, hiszen minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\alpha_k > 0$. Így a keresett konvex kombináció együtthatóit a

$$\nu_k := \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_l}\right) \alpha_k \qquad (k \in \{1, \dots, n\})$$

számok adják, hiszen $\nu_l = 0$, $\mu_k/\mu_l \leq 1$ miatt $\nu_k \geq 0$ $(k \neq l)$, továbbá a fentiekből

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \frac{1}{\mu_l} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 0 = 1$$

és

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k - \frac{1}{\mu_l} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = u$$

következik. ■

1.3.10. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, akkor

$$A := \{x \in \mathcal{X} : \ p(x) < \varepsilon\}$$

konvex, szimmetrikus, elnyelő halmaz!

Útm.

1.3.5. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $0 \leq r \in \mathbb{R}$, akkor

$$A := \{x \in \mathcal{X} : \ \|x\| \leq r\}$$

konvex, szimmetrikus, elnyelő halmaz!

1.3.11. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, akkor

1. bármely $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon(x) = x + K_\varepsilon(0) = \{x + y \in \mathcal{X} : \ y \in K_\varepsilon(0)\} ;$$

2. bármely $\varepsilon > 0$ esetén $K_\varepsilon(0)$ konvex, szimmetrikus, elnyelő halmaz!

Útm.

1.3.13. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér és $A \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén a

$$p_A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad p_A(x) := \inf \left\{\alpha \in (0, +\infty) : \ \frac{x}{\alpha} \in A\right\}$$

leképezést az A halmaz **Minkowski-funkcionál**jának nevezzük (ahol $\inf \emptyset := +\infty$).

1.3.54. feladat. Igazoljuk, hogy adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén valamely $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor elnyelő (spec. $0 \in A$), ha a p_A Minkowski-funkcionál $\mathcal{R}_{p_A}$ értékkészletée

$$\mathcal{R}_{p_A} \subset [0, +\infty)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy

$$p_A(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Az $A \subset \mathcal{X}$ halmaz pontosan akkor elnyelő, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén létezik olyan $\alpha \in (0, +\infty)$, hogy

$$\frac{1}{\alpha}x \in A, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha \in \left\{\alpha \in (0, +\infty) : \ \frac{x}{\alpha} \in A\right\} \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_A(x) \leq \alpha < +\infty.$$

Speciálisan,

$$p_A(0) = \lambda < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha > 0 : \ \alpha \in \left\{\alpha \in (0, +\infty) : \ \frac{x}{\alpha} \in A\right\} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{1}{\alpha}0 \in A.$$

Ha tehát

$$p_A(0) < +\infty,$$

akkor $0 \in A$. ■

1.3.55. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, $A \subset \mathcal{X}$ konvex, szimmetrikus és elnyelő halmaz, akkor $(\mathcal{X}, p_A)$ félnormált tér, és teljesülnek az

$$\{x \in \mathcal{X} : \ p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in \mathcal{X} : \ p_A(x) \leq 1\}$$

tartalmazások!

Útm.

1. lépés. Ha $\lambda = 0$, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= p_A(0) = \inf\left\{\alpha \in (0,+\infty) : \ \frac{0}{\alpha} \in A\right\} = \\ &= \inf(0,+\infty) = 0 = 0 \cdot p_A(x) = \lambda p_A(x), \end{aligned}$$

hiszen A szimmetrikusságának következményeként $0 = 0 \cdot x \in A$. Ha $\lambda \neq 0$, akkor

$$\left|\frac{\lambda}{|\lambda|}\right| = \left|\frac{|\lambda|}{\lambda}\right| = 1,$$

ezért ismét csak A szimmetrikusságának következtében

$$\frac{|\lambda|}{\lambda} A \subset A = \frac{|\lambda|}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} A\right) \subset \frac{\lambda}{|\lambda|} A,$$

ahonnan $\frac{|\lambda|}{\lambda} A = A$ következik. Ezért

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{\alpha \in (0,+\infty) : \ \lambda x \in \alpha A\} = \inf\left\{\alpha \in (0,+\infty) : \ x \in \frac{\alpha}{\lambda} A\right\} = \\ &= \inf\left\{|\lambda|\alpha \in (0,+\infty) : \ x \in \frac{\alpha|\lambda|}{\lambda} A = \alpha A\right\} = \\ &= |\lambda| \cdot \inf\{\alpha \in (0,+\infty) : \ x \in \alpha A\} = |\lambda| \cdot p_A(x). \end{aligned}$$

2. lépés. Ha $\varepsilon > 0$ és $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\frac{x}{p_A(x)+\varepsilon}, \ \frac{y}{p_A(y)+\varepsilon} \in A,$$

így A konvexitása alapján a

$$\lambda := \frac{p_A(x)+\varepsilon}{p_A(x)+\varepsilon+p_A(y)+\varepsilon}, \qquad \text{ill. a} \qquad 1-\lambda := \frac{p_A(y)+\varepsilon}{p_A(x)+\varepsilon+p_A(y)+\varepsilon}$$

számmal

$$\frac{x+y}{p_A(x)+\varepsilon+p_A(y)+\varepsilon} = \lambda\frac{x}{p_A(x)+\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{y}{p_A(y)+\varepsilon} \in A,$$

ahonnan

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$$

következik, amiből az $\varepsilon \to 0$ határátmenettel

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y).$$

3. lépés. Ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén $p_A(x) < 1$, akkor az

$$\varepsilon := 1 - p_A(x) > 0$$

számmal

$$\frac{x}{p_A(x) + \varepsilon} = x \in A.$$

Ha $x \in A$, akkor $p_A(x) \leq 1$. ■

A Minkowski-funkcionál nem feltétlenül norma, hiszen

- ha pl.

  $$A := \mathcal{X} \neq \{0\},$$

  akkor bármely $\lambda > 0$ esetén $\lambda A = A$ és így

  $$p_A(x) = \inf \{\alpha \in (0, +\infty) : \ x \in \alpha A\} = 0 \qquad (x \in \mathcal{X});$$

- ha pl. $(\mathcal{X}, p)$ normált tér, $\varepsilon > 0$,

  $$A := B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathcal{X} : \ p(x) \leq \varepsilon\},$$

  akkor

  $$p_A(x) = \inf \{\alpha \in (0, +\infty) : \ x \in \alpha A\} = \frac{p(x)}{\varepsilon} \qquad (x \in \mathcal{X});$$

- ha pl.

  $$\mathcal{X} := l_2, \qquad A := \{(x_n) \in l_2 : \ |x_1| \leq 1\},$$

  akkor

  $$p_A(x) = |x_1| \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

1.3.56. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ korlátos, zárt, konvex halmaz, továbbá $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, akkor a p_A Minkowski-funkcionálra igazak az alábbi állítások!

1. Alkalmas $\alpha, \beta > 0$ esetén

   $$\alpha\|x\| \leq p_A(x) \leq \beta\|x\| \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

2. $p_A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ folytonos.
3. $A = \{x \in \mathcal{X} : \ p_A(x) \leq 1\}$.

Útm. Ha $\mathcal{X} = \{0\}$, akkor $A = \{0\}$, és mind a három állítás triviális. Ha $\mathcal{X} \neq \{0\}$ és $a \in A$, akkor (az $\mathcal{X} \ni x \mapsto x - a$ eltolással) feltehető, hogy $a = 0$.

1. Mivel $\mathrm{int}\,(A) \neq \emptyset$, ezért alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén, ha valamely $x \in \mathcal{X}$-re $\|x\| < \varepsilon$, akkor $x \in A$. Mivel p_A félnorma, ezért $p_A(0) = 0$. Ha $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$, akkor a
$$\lambda := \frac{\|x\|}{\varepsilon} \qquad \text{számra} \qquad \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| = \varepsilon,$$
így $\frac{x}{\lambda} \in A$ és
$$p_A(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$
Mivel A korlátos, ezért alkalmas $K > 0$ esetén
$$\|x\| \leq K \qquad (x \in A).$$
Így tehát $\frac{x}{\lambda} \in A$-ból
$$\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| \leq K, \qquad \text{azaz} \qquad \lambda \geq \frac{x}{K}$$
következik. Ennélfogva
$$p_A(x) \geq \frac{x}{K} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
ezért az $\alpha := 1/K$ és a $\beta := 1/\varepsilon$ választás megfelelő.

2. Mivel p_A félnorma, ezért bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$p_A(x) = p_A(y + (x - y)) \leq p_A(y) + p_A(x - y)$$
és
$$p_A(y) = p_A(x + (y - x)) \leq p_A(x) + p_A(y - x),$$
ahonnan alkalmas $\gamma > 0$ esetén
$$|p_A(x) - p_A(y)| \leq \max\{p_A(x - y), p_A(y - x)\} \leq \gamma\|x - y\|,$$
ami azt jelenti, hogy p_A (egyenletesen) folytonos.

3. Ha $x \in A$, akkor $0 \in A$ valamint A konvexsége következtében alkalmas $\mu \in [0{,}1]$ számmal $\mu x \in A$, így bármely $\lambda \in [1, +\infty)$ esetén $\frac{x}{\lambda} \in A$, ahonnan $p_A(x) \leq 1$ következik. Ha pedig valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén $p_A(x) \leq 1$, akkor $x = 0$ esetén $x \in A$, ellenkező esetben $p_A(x) > 0$ és bármely $\varepsilon > 0$ esetén
$$\frac{x}{\lambda} \in A \qquad (\lambda \in [p_A(x) + \varepsilon, +\infty))\,.$$
Így A zártsága következtében az $\varepsilon \to 0$ határtámenettel azt kapjuk, hogy
$$\frac{x}{p_A(x)} \in A.$$
Mivel
$$0 \in A \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{p_A(x)} \geq 1$$
és A konvex, ezért $x \in A$. ■

1.3.57. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ korlátos, zárt, konvex, továbbá $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, akkor A és $B_1(0)$ homeomorfak!

Útm.

1. lépés. Ha

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad f(x) := \begin{cases} \dfrac{p_A(x)}{\|x\|} x & (x \neq 0), \\ \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

akkor alkalmas $\beta >$ esetén

$$\|f(x)\| \leq \beta \|x\| \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ahonnan f folytonossága következik (vö. 1.2.41. és 1.3.41. feladat).

2. lépés. Hasonlóan látható be, hogy az

$$f^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad f^{-1}(y) := \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{p_A(x)} y & (y \neq 0), \\ \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

inverz leképezés is folytonos, azaz f homeomorfizmus.

3. lépés. Világos, hogy

$$f[A] \subset B_1(0)$$

és az 1.3.56. feladat, továbbá p_A abszolút homogenitása miatt

$$f^{-1}[B_1(0)] \subset A$$

is teljesül. Így

$$f[A] = B_1(0). \quad \blacksquare$$

1.3.14. definíció. Az $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{X}, q)$ (fél)normált terek esetében azt mondjuk, hogy p ekvivalens q-val: $p \sim q$, ha alkalmas $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ számok esetén

$$\lambda p(x) \leq q(x) \leq \mu p(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

1.3.58. feladat. Igazoljuk, hogy ha $-\infty < a < b < +\infty$ és

$$\mathcal{X} := \left\{u \in \mathfrak{C}^1[a, b] : \; u(a) = 0 = u(b)\right\},$$

akkor a

$$p(f) := \int_a^b (|f| + |f'|), \qquad q(f) := \int_a^b |f'| \qquad (f \in \mathcal{X})$$

függvények ekvivalens normák!

Útm. Világos, hogy p és q norma, sőt bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén a

$$q(f) \leq p(f)$$

becslés is triviálisan teljesül. Továbbá tetszőleges $f \in \mathcal{X}$ függvényre

$$p(f) - q(f) = \int_a^b |f| = \int_a^b \left(\left|\int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s\right|\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left(\int_a^b |f'(s)|\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t = (b-a)q(f),$$

azaz

$$p(f) \leq (b-a+1)q(f). \quad \blacksquare$$

1.3.59. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1]$, akkor

$$p(f) := \|f\|_\infty \quad (f \in \mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad q(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f| \quad (f \in \mathcal{X})$$

nem ekvivalens normák!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \left(x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]\right), \\ 0 & \left(x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$p(f_n) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$q(f_n) = \int_0^{1/n} (1 - nx)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{nx^2}{2}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

1.3.60. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1]$, a

$$p(f) := \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2} \quad (f \in \mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad q(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f| \quad (f \in \mathcal{X})$$

nem ekvivalensek normák!

Útm. Ha

$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$p(f_n) = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad q(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\frac{q(f_n)}{p(f_n)} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

1.3.61. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1]$, a

$$p(f) := \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2} \qquad (f \in \mathcal{X}),$$

ill.

$$q(f) := \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\} \qquad (f \in \mathcal{X})$$

nem ekvivalensek normák!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n - n^2 x} & \left(x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)\right), \\ \\ 0 & \left(x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$p(f_n) = \sqrt{\int_0^{1/n} (n - n^2 x)\, \mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$q(f_n) = \sqrt{n} \longrightarrow \infty \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

1.3.62. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}^1[0,1]$, akkor

$$p(f) := \|f\|_\infty \quad (f \in \mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad q(f) := \|f\|_{\mathfrak{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in \mathcal{X})$$

nem ekvivalens normák!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\pi x) \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$p(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \qquad q(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

1.3.63. feladat. Mutassuk meg, hogy l_1-en

$$p(x) := \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad (x \in l_1),$$

ill.

$$q(x) := \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in l_1)$$

nem ekvivalens normák!

Útm. Világos, hogy $l_1 \subset l_\infty$ (vö. 1.3.22. feladat). Könnyen belátható, hogy

$$p(x) \geq q(x) \qquad (x \in l_1).$$

Ha pedig

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (k \leq n), \\ & \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $x := \left(x_k^{(n)}\right)$ sorozatra

$$p(x) = n \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad q(x) = 1 < +\infty,$$

azaz p és q nem ekvivalensek. ■

1.3.64. feladat. Mutassuk meg, hogy l_1-en

$$p(x) := \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad (x \in l_1),$$

ill.

$$q(x) := \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \qquad (x \in l_1)$$

nem ekvivalens normák!

Útm. Világos, hogy $l_1 \subset l_2$ Ha

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{k} & (k \leq n), \\ & \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $x := \left(x_k^{(n)}\right)$ sorozatra

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad q(x) = \sqrt[2]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \longrightarrow \frac{\pi}{\sqrt{6}} < +\infty \quad (n \to \infty),$$

azaz p és q nem ekvivalensek. ■

1.3.65. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.3.6. feladatbeli $\mathcal{P}$ vektortéren a $\|\cdot\|_\infty$ norma nem ekvivalens az ott bevezetett p normával!

Útm. Igaz ugyan, hogy alkalmas $M > 0$ esetén

$$\|f\|_\infty \leq Mp(f) \qquad (f \in \mathcal{P}),$$

hiszen bármely $f \in \mathcal{P}$ és $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)| \quad &= \quad \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \\ &\leq \quad |f(0)| + \|f'\|_\infty (x - 0) \leq p(f), \end{aligned}$$

így az $M := 1$ választás megfelelő, de ha $m > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $n > m$, akkor az

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^n$$

függvényre

$$f \in \mathcal{P}, \qquad \|f\|_\infty = 1$$

és

$$p(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty = \sup\left\{\left|nx^{n-1}\right| : \; x \in [0,1]\right\} = n > m = m\|f\|_\infty. \quad \blacksquare$$

1.3.66. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor az $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}^d)$ vektortéren a $\|\cdot\|_\infty$ maximumnorma és a $\|\cdot\|_\infty^p$ súlyozott norma (vö. 1.3.5. gyakorló feladat, ill. 1.3.14. feladat) ekvivalensek!

Útm. Ha $f, g \in \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}^d)$, akkor

- az
$$\|f(x)\| \leq \|g(x)\| \qquad (x \in [a,b])$$
egyenlőtlenségből
$$\|f\|_\infty^p \leq \|g\|_\infty^p$$
következik.
- p folytonossága következtében vannak olyan $0 < \alpha < \beta \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre
$$\alpha \leq p(x) \leq \beta \qquad (x \in [a,b]),$$
ahonnan
$$\alpha\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty^p \leq \beta\|f\|_\infty$$
következik. $\blacksquare$

1.3.67. feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in [1, +\infty)$, akkor $\mathbb{K}^d$-n a $\|\cdot\|_p$ norma ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ normával!

Útm. Ha $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, akkor

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty$$

és

$$\|x\|_\infty = \left((\max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \ldots, n\}\})^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p. \quad \blacksquare$$

Ebből, az 1.3.6. házi feladat felhasználásával azonnal következik, hogy $\mathbb{K}^d$-n bármely $p, q \in [1, +\infty]$ esetén $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$. Mint ahogy az alábbi feladatból látható, ez nem véletlen, mert véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

1.3.68. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$, ill. $(\mathcal{X}, q)$ normált terek, $\mathcal{X}$ véges dimenziós, akkor $p \sim q$, azaz p ekvivalens q-val!

Útm.

1. lépés. Ha $\dim(\mathcal{X}) = 0$, akor az állítás nyilvánvaló. Ha pedig $0 < \dim(\mathcal{X}) < \infty$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ esetén tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ egyértelműen írható fel az

$$x = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$$

alakban, ahol a $b_1, \ldots, b_n$ vektorrendszer bázis $\mathcal{X}$-ben. Nem nehéz belátni, hogy ekkor

$$\|x\|_0 := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_1 \qquad (x \in \mathcal{X})$$

norma $\mathcal{X}$-en (vö. 1.3.2. feladat).

2. lépés. Mivel tetszőleges p ($\mathcal{X}$-beli) norma és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} p(x) &= p\left(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n\right) \leq |\alpha_1| \cdot p(b_1) + \ldots + |\alpha_n| \cdot p(b_n) \leq \\ &\leq (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|) \cdot \max\left\{p(b_k) \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \ldots, n\}\right\}, \end{aligned}$$

ezért ha

$$M := \max\left\{p(b_k) \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \ldots, n\}\right\},$$

akkor

$$p(x) \leq M\|x\|_0.$$

Másrészt pedig az $f : \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$,

$$f(\alpha) := p(x) \qquad \left(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \; x = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k\right)$$

függvény (egyenletesen) folytonos, ui. bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$ esetén az

$$x := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k \qquad \text{és az} \qquad y := \sum_{k=1}^n \beta_k b_k$$

vektorral

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p\left(\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) b_k\right) \leq M \sum_{k=1}^n |\alpha_k - \beta_k|.$$

Mivel a

$$\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{K}^n : \; \|\alpha\|_1 = 1\}$$

halmaz korlátos és zárt, így kompakt is (vö. [25]), ezért a Weierstraß-tétel (vö. 1.1.58. feladat) következtében alkalmas $m \in [0, +\infty)$ esetén

$$m = \min\{f(\alpha) \in \mathbb{R} : \; \alpha \in \Lambda\}.$$

Ha $\gamma \in \Lambda$ olyan, hogy $f(\gamma) = m$, akkor

$$m = p\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k b_k\right)$$

miatt $m > 0$, ui. különben

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k b_k = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma = (0, \ldots, 0)$$

lenne, amiből $\|\gamma\|_1 = 0$ következne. Ez ellentmond annak, hogy $\gamma \in \Lambda$. Ha

$$0 \neq x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k,$$

akkor

$$0 \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \text{és} \qquad \frac{\alpha}{\|\alpha\|_1} \in \Lambda.$$

Következésképpen

$$m \leq f\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|_1}\right) = p\left(\frac{x}{\|\alpha\|_1}\right) = \frac{p(x)}{\|\alpha\|_1} = \frac{p(x)}{\|x\|_0},$$

így

$$m\|x\|_0 \leq p(x). \quad \blacksquare$$

1.3.69. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ végtelen dimenziós vektortér, akkor vannak olyan $p, q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ normák, amelyek nem ekvivalensek!

Útm. Ha $(\mathcal{X}, p)$ normált tér, $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$, akkor a kiválasztási axióma miatt van olyan

$$\{b_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

vektorrendszer, amely bázis ($\mathcal{X}$-ben), továbbá feltehető, hogy

$$p(b_n) = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért van olyan $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ lineáris bijekció, amelyre

$$\varphi(b_n) = n b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ha most

$$q(x) := p(\varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor

$$q(b_n) = n p(b_n) = n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami azt jelenti, hogy az 1.3.14. definícióbeli becslés nem áll fenn a

$$\mathrm{span}\ \{b_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

altéren. $\blacksquare$

Az 1.3.68., ill. az 1.3.69. feladatban megfogalmazott állítás fényében elmondható, hogy **bármely vektortér pontosan akkor véges dimenziós, ha rajta bármely két norma ekvivalens** (vö. 4.2.34. feladat és az azt követő megjegyzés).

A metrikák ekvivalenciájánál a normák ekvivalenciája többet jelent. Ezt hivatott igazolni az

1.3.70. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, p)$, ill. $(\mathcal{X}, q)$ normált terek esetében $p \sim q$ pontosan akkor teljesül, ha p és q ugyanazt a topológiát generálja, azaz $(\mathcal{X}, p)$-ben ugyanazok a nyílt halmazok, mint $(\mathcal{X}, q)$-ban!

Útm.

1. lépés Világos, hogy ha $p \sim q$, akkor a p és a q generálta metrikák ekvivalensek. Mivel ekvivalens metrikák ugyanazon topológiát generálják (vö. 1.2.33/2. feladat), ezért ugyanez a normákra is igaz.

2. lépés Ha p és q ugyanazt a topológiát generálja, akkor a

$$K_1^p(0) := \{x \in \mathcal{X} : \ p(x) < 1\}$$

halmaz nyílt $(\mathcal{X}, q)$-ban (is), így $0 \in K_1^p(0)$ következtében van olyan $s > 0$, hogy

$$K_s^q(0) \subset K_1^p(0).$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $x \in \mathcal{X}$, akkor

$$\frac{s}{q(x) + \varepsilon} x \in K_s^q(0) \subset K_1^p(0),$$

azaz

$$p\left(\frac{s}{q(x) + \varepsilon} x\right) < 1.$$

Így

$$p(x) \leq \frac{q(x) + \varepsilon}{s}.$$

Ezért a $\mu := 1/s$ választással tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$p(x) \leq \mu q(x)$$

teljesül. A p és a q szerepének felcserélésével hasonlóan mutatható ki olyan $\lambda > 0$ szám létezése, amelyre

$$q(x) \leq \lambda p(x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül.

Ennek következménye az

1.3.1. állítás. Ha az $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{X}, q)$ normált teretk esetében $p \sim q$, akkor valamely $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat

- pontosan akkor Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, p)$-ben, ha Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, q)$-ban;
- pontosan akkor konvergens $(\mathcal{X}, p)$-ben, ha konvergens $(\mathcal{X}, q)$-ban.

1.3.6. házi feladat. Mutassuk meg, hogy normák ekvivalenciája, mint reláció, ekvivalencia, azaz ha $(\mathcal{X}, p)$, $(\mathcal{X}, q)$ és $(\mathcal{X}, r)$ normált terek, akkor $p \sim p$, továbbá igazak a

$$p \sim q \quad \Longrightarrow \quad q \sim p, \qquad (p \sim q,\ q \sim r) \quad \Longrightarrow \quad p \sim r$$

implikációk!

1.3.71. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, és valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $b_1, \ldots, b_m$ lineárisan független vektorrendszer $\mathcal{X}$-ben, akkor az

$$x_n := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^n b_k \qquad (\alpha_k^n \in \mathbb{K},\ k \in \{1, \ldots, m\},\ n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátosságából a

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k^n| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számsorozat korlátossága következik!

Útm. Ha (σ_n) nem korlátos, akkor van olyan (σ_{ν_n}) részsorozat, amelyre $\lim(\sigma_{\nu_n}) = +\infty$. Ekkor

$$\frac{x_{\nu_n}}{\sigma_{\nu_n}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k^{\nu_n}}{\sigma_{\nu_n}} b_k \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Mivel bármely $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén a

$$\beta_k^n := \frac{\alpha_k^{\nu_n}}{\sigma_{\nu_n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, ezért van olyan $\left(\beta_k^{\mu_n}\right)$ részsorozat, amely bármely $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén konvergens:

$$\beta_k^{\mu_n} \longrightarrow \beta_k \qquad (n \to \infty).$$

Ekkor

$$\frac{x_{\nu_{\mu_n}}}{\sigma_{\nu_{\mu_n}}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

másrészt

$$\frac{x_{\nu_{\mu_n}}}{\sigma_{\nu_{\mu_n}}} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^{\mu_n} b_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{m} \beta_k b_k \qquad (n \to \infty),$$

amiből

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k b_k = 0$$

következik. A $b_1, \ldots, b_m$ rendszer lineáris függetlensége miatt így

$$\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0,$$

ez viszont nem lehetséges, hiszen

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\alpha_k^{\mu_n}}{\sigma_{\mu_n}} \right| \longrightarrow \sum_{k=1}^{m} |\beta_k| \qquad (n \to \infty),$$

így

$$\sum_{k=1}^{m} |\beta_k| = 1.$$

Tehát (σ_n) korlátos. ■

1.3.72. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, akkor a térben valamely sorozat konvergenciája egyenértékű a sorozattagok együtthatóinak konvergenciájával, pontosabban, ha valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $b_1, \ldots, b_m$ bázis $\mathcal{X}$-ben, akkor az

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x_n := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^n b_k \longrightarrow x := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \quad (n \to \infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim(\alpha_k^n) = \alpha_k \quad (k \in \{1, \ldots, m\})$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha bármely $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén $\lim(\alpha_k^n) = \alpha_k$, akkor

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^n b_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k^n - \alpha_k| \cdot \|b_k\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. lépés. Ha $\lim(x_n) = x$, akkor (x_n) korlátos (vö. 1.2.37., ill. 1.2.39. feladat), így az 1.3.71. feladatbeli állítás következtében a

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k^n| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is korlátos. Ezért a Bolzano-Weiersrtraß-tétel (vö. [25]) miatt alkalmas $(\alpha_k^{\nu_n})$ részsorozat és $\alpha_k \in \mathbb{K}$ esetén

$$\alpha_k^{\nu_n} \longrightarrow \alpha_k \qquad (n \to \infty,\ k \in \{1, \ldots, m\}).$$

Ekkor azonban

$$x_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{\nu_n} b_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \qquad (n \to \infty),$$

ugyanakkor $\lim(x_{\nu_n}) = x$, ahonnan

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k$$

következik. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $x_n \neq x$, akkor az

$$y_n := \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k^n - \alpha_k}{\|x_n - x\|} b_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, így az 1.3.71. feladatbeli állítás alapján van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_k^n - \alpha_k|}{\|x_n - x\|} \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$0 \leq |\alpha_k^n - \alpha_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k^n - \alpha_k| \leq K\|x_n - x\|$$

következik, és ez nyilvánvalóan $x_n = x$ esetén is igaz. Így bármely $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén

$$\lim\left(\alpha_k^n\right) = \alpha_k. \quad \blacksquare$$

1.3.73. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$x_n = \left(1 + \frac{-1}{n}, \ldots, m + \frac{(-1)^m}{n}\right) \in \mathbb{R}^m \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, majd számítsuk ki határértékét!

Útm. Mivel bármely $k \in \{1, \ldots, m\}$ esetén

$$\lim\left(\frac{(-1)^k}{n}\right) = 0,$$

ezért (x_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = (1, \ldots, m) \in \mathbb{R}^m. \quad \blacksquare$$

1.3.74. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ **Bolzano-Weierstraß-tulajdonságú**, azaz minden

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata!

Útm. Mivel $\dim(\mathcal{X}) < +\infty$, ezért $\mathcal{X}$-en bármely két norma ekvivalens, így a halmazok korlátossága invariáns a norma megválasztását illetően. Azt fogjuk tehát megmutatni, hogy ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_0)$ normált térben (x_n) korlátos sorozat, azaz

$$\sup\{\|x_n\|_0 \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty,$$

akkor van olyan (x_{ν_n}) részsorozat, amely konvergens $(\mathcal{X},\|\cdot\|_0)$-ban. Ha valamely $m\in\mathbb{N}$ esetén a

$$b_1,\ldots,b_m$$

vektorrendszer bázisa $\mathcal{X}$-nek és bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$x_n=\alpha_1^n b_1+\ldots+\alpha_m^n b_m,\qquad \text{ill.}\qquad a_n:=(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_m^n)\,,$$

akkor

$$\|x_n\|_0=\|(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_m^n)\|_1=\|a_n\|_1\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

és az (x_n) sorozat $(\mathcal{X},\|\cdot\|_0)$-beli korlátossága következtében az (a_n) sorozat korlátos a $(\mathbb{K}^m,\|\cdot\|_1)$ normált térben. A Bolzano-Weierstraß-tétel (vö. [25]) következtében alkalmas (a_{ν_n}) részsorozat és

$$A=(A_1,\ldots,A_m)\in\mathbb{K}^m$$

vektor esetén $(\mathbb{K}^m,\|\cdot\|_1)$-ben

$$a_{\nu_n}\longrightarrow A\qquad(n\to\infty).$$

Így az

$$x:=\sum_{k=1}^m A_k b_k$$

vektorra

$$\|x_{\nu_n}-x\|_0=\left\|\sum_{k=1}^m\left(\alpha_k^{\nu_n}-A_k\right)b_k\right\|_0=\|a_{\nu_n}-A\|_1,$$

azaz $(\mathcal{X},\|\cdot\|_0)$-ban

$$x_{\nu_n}\longrightarrow x\qquad(n\to\infty).\quad\blacksquare$$

1.3.12. példa. A $(\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ normált térben az

$$f_n(x):=\cos(2^n x)\qquad(x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N})$$

korlátos sorozatnak nincsen olyan részsorozata, amely Cauchy-sorozat lenne, hiszen

$$f_m\left(2^{-m}\pi\right)=\cos(\pi)=-1,\quad f_n\left(2^{-m}\pi\right)=\cos\left(2^{n-m}\pi\right)=1\qquad(m,n\in\mathbb{N}:\ m<n),$$

ezért

$$\|f_m-f_n\|_\infty=2\qquad(m,n\in\mathbb{N}:\ m<n).$$

Így az (f_n) sorozatnak nincsen konvergens részsorozata sem.

1.3.75. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$ pedig olyan altér, amelyre $\dim(A)<+\infty$, akkor $\mathcal{A}$-ban minden Cauchy-sorozat konvergens!

Útm. Mivel bármely $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$-beli (x_n) Cauchy-sorozat korlátos $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$-ban, ezért (vö. 1.3.74. feladat) van (x_n)-nek $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$-ban konvergens részsorozata, ami azt jelenti (vö. 1.2.37/2. feladat), hogy (x_n) konvergens /$(\mathcal{A},\|\cdot\|)$-ban/. $\blacksquare$

Ez azt jelenti, hogy valamely **normált tér bármely véges dimenziós altere teljes**, **és** az 1.2.51. feladat, ill. az azt követő megjegyzés értelmében **zárt** is.

1.3.76. feladat. Mutassuk meg, hogy az $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ normált tér esetén az

$$\mathcal{A} := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ \exists N \in \mathbb{N} \forall N \leq k \in \mathbb{N} : \ x_k = 0\}$$

altér nem véges dimenziós!

Útm. Világos, hogy az

$$x := \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sorozatra $x \in l_\infty \backslash \mathcal{A}$, így ha tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} 1/k & (k \leq n), \\ \\ 0 & (k > n), \end{cases}$$

akkor $(x_k^{(n)}) \in \mathcal{A}$ és (vö. 1.2.57. feladat)

$$\left\| x - \left(x_k^{(n)}\right) \right\|_{l_\infty} = \left\| \left(0,0,\ldots,0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right) \right\|_{l_\infty} = \frac{1}{n+1},$$

így

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \left(x_k^{(n)}\right) \right\|_{l_\infty} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(x_k^{(n)}\right) = x.$$

Ezért $x \in \overline{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A}$, azaz $\mathcal{A}$ nem zárt, tehát nem véges dimenziós. ■

1.3.77. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A}$ pedig valódi, zárt lineáris altere $\mathcal{X}$-nek, akkor bármely $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz van olyan $x_\varepsilon \in \mathcal{X}$, hogy $\|x_\varepsilon\| = 1$ és minden $x \in \mathcal{A}$ esetén $\|x - x_\varepsilon\| \geq \varepsilon$ (**Riesz-lemma, sajtharang-lemma**)!

Útm. Ha $\varepsilon \in (0,1)$, $y \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{A}$ és

$$d_y := \inf \{\|x - y\| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{A}\},$$

akkor $\mathcal{A}$ zártsága következtében $d_y > 0$, hiszen $d_y = 0$ esetén az infimum definíciója miatt lenne olyan $\alpha_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, amelyre

$$\|\alpha_n - y\| < \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesülne, így $\lim(\alpha_n) = y$ következtében $y \in \mathcal{A}$ lenne, ami nem lehetséges. Mivel $d_y/\varepsilon > d_y$, ezért alkalmas $\alpha \in \mathcal{A}$ elemmel

$$\|\alpha - y\| \leq \frac{d_y}{\varepsilon}.$$

Így az

$$x_\varepsilon := \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}$$

elemre $\|x_\varepsilon\| = 1$. Továbbá – lévén, hogy $\mathcal{A}$ altér –, bármely $x \in \mathcal{A}$ elem esetén

$$\|\alpha - y\|x + \alpha \in \mathcal{A},$$

és így

$$\|x - x_\varepsilon\| = \left\| x + \frac{\alpha - y}{\|\alpha - y\|} \right\| = \frac{\|(\|\alpha - y\|x + \alpha) - y\|}{\|\alpha - y\|} \geq \frac{d_y}{\|\alpha - y\|} \geq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

1.3.78. feladat. Bizoyítsuk be, hogy valamely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) $\mathcal{X}$ véges dimenziós.

(2) $\mathcal{X}$ valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

(3) A

$$B_1(0) = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$$

zárt egységgömb kompakt.

(4) $\mathcal{X}$ minden korlátos részhalmaza prekompakt.

Útm.

(1) $\Rightarrow$ **(2):** Mivel minden metrikus térben (így minden normált térben is) a kompakt halmazok zártak és korlátosak (vö. 1.2.77. feladat), ezért elegendő azt megmutatni, hogy véges dimenziós normált terekben minden korlátos és zárt halmaz kompakt. Ez viszont triviális, hiszen bármely korlátos halmazbeli sorozat tagjaiból alkotott halmaz korlátos (azaz a sorozat korlátos). A tér véges dimenziójának következményeként (vö. 1.3.74. feladat) kiválasztható belőle konvergens részsorozat, így a zártság miatt bármely konvergens részsorozat határértéke a halmazhoz tartozik. Mindezekből következik a kompaktság (vö. 1.2.85. feladat).

(2) $\Rightarrow$ **(3):** $B_1(0)$ zárt (vö. 1.2.22. feladat) és $B_1(0) \subset K_2(0)$ következtében még korlátos is.

(3) $\Rightarrow$ **(1):** $B_1(0)$ kompaktsága következtében $B_1(0)$-nak a

$$\left\{K_{\frac{1}{2}}(x) \subset \mathcal{X} : x \in B_1(0)\right\}$$

nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés, azaz alkalmas $x_1, \ldots, x_n \in B_1(0)$ esetén

$$B_1(0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_{\frac{1}{2}}(x_k).$$

Ha

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n),$$

akkor $\mathcal{A}$ véges dimenziós. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathcal{X} = \mathcal{A}$. Ellenkező esetben ui. valamely $x \in \mathcal{X}\backslash\mathcal{A}$ elemre $\mathcal{A}$ zártága miatt (vö. 1.2.29/1. feladat)

$$d := \inf\{\|x - a\| \in \mathbb{R} : \ a \in \mathcal{A}\} > 0$$

teljesülne. Az infimum definíciója miatt van olyan $y \in \mathcal{A}$, hogy

$$d \leq \|x - y\| \leq 2d.$$

Így, ha

$$z := \frac{x - y}{\|x - y\|},$$

akkor $\|z\| = 1$, azaz $z \in B_1(0)$. Ezért alkalmas $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $z \in K_{\frac{1}{2}}(x_k)$. Másrészt viszont

$$x = y + \|x - y\|z = y + \|x - y\|x_k + \|x - y\|(z - x_k),$$

és $y, x_k \in \mathcal{A}$ következtében

$$y + \|x - y\|x_k \in \mathcal{A}.$$

Így tehát

$$d \leq \|x - (y + \|x - y\|x_k)\| = \|x - y\| \cdot \|z - x_k\|,$$

és így $z \in K_{\frac{1}{2}}(x_k)$ figyelembe vételével $z \neq x_k$ esetén

$$\|x - y\| \geq \frac{d}{\|z - x_k\|} > 2d,$$

ill. $z = x_k$ esetén

$$0 = \|x - y\| \cdot 0 \geq d > 0,$$

ami nem lehetséges.

(1) $\Rightarrow$ (4): Ha $H \subset \mathcal{X}$ korlátos, akkor $\overline{H}$ korlátos és zárt, így a fentiek értelmében kompakt is, ami azt jelenti, hogy H prekompakt.

(4) $\Rightarrow$ (1): Ha $\mathcal{X}$ minden korlátos részhalmaza, így pl. $\partial B_1(0)$ (vö. 1.3.29 feladat) prekompakt és $\dim(\mathcal{X}) = \infty$, akkor tetszőleges $x_1 \in \partial B_1(0)$ esetén az

$$M_1 := \mathrm{span}\,(x_1) \subsetneqq \mathcal{X}$$

zárt lineáris altérre $\dim(M_1) = 1$, ezért a Riesz-lemma (vö. 1.3.77. feladat) következtében van olyan $x_2 \in \partial B_1(0)$, hogy

$$\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Az

$$M_2 := \mathrm{span}\,(x_1, x_2) \subsetneqq \mathcal{X}$$

is zárt altér és $\dim(M_2) = 2$, így – ismét a Riesz-lemma – következtében van olyan $x_3 \in \partial B_1(0)$, hogy

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Így teljes indukcióval olyan

$$x_n \in \partial B_1(0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat értelmezhető, amelyre

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \qquad (m, n \in \mathbb{N}: \ m \neq n)$$

teljesül. Mivel (x_n)-nek nincsen konvergens részsorozata, ezért $\partial B_1(0)$ nem prekompakt (vö. 1.2.89. feladat utáni megjegyzés). ■

1.3.13. példa. Bármely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a zárt egységgömb, azaz a

$$B_1(0) = \{u \in \mathfrak{C}[a,b] : \ \|u\|_\infty \leq 1\}$$

halmaz nem kompakt, hiszen a $\Pi[a,b]$ polinomok a $\mathfrak{C}[a,b]$ tér olyan alterét alkotják, amely végtelen dimenziós: tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$[a,b] \ni x \mapsto 1, x, x^2, \ldots, x^n$$

függvények lineárisan függetlenek.

1.3.79. feladat. A

$$(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty), \qquad \text{ill.} \qquad (L^p[0,1], \|\cdot\|_{L^p})$$

normált terek egységgömbjeiben adjunk példát olyan sorozatokra, amelyeknek nincsen konvergens részsorozata!

Útm. Ha bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$f_n \in \mathfrak{C}[0,1] \qquad \text{és} \qquad g_n \in L^p[0,1],$$

$$f_n(x) := \begin{cases} 2^{n+2}x - 2 & \left(x \in \left[2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)}\right)\right), \\ \\ -2^{n+2}x + 4 & \left(x \in \left[2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)}, 2^{-n}\right)\right), \\ \\ 0 & (\text{egyébként}), \end{cases}$$

ill.

$$g_n(x) := \begin{cases} 2^{(n+1)1/p} & \left(x \in \left[2^{-(n+1)}, 2^{-n}\right)\right), \\ \\ 0 & (\text{egyébként}), \end{cases}$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m \neq n$ esetén

$$\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_p = 1,$$

valamint

$$\|f_m - f_n\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad \|g_m - g_n\|_p = 2^{1/p}. \quad ■$$

1.3.15. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén az $f \in \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényt **konvex**nek nevezzük, ha $\mathcal{D}_f$ konvex, továbbá bármely $x, y \in \mathcal{D}_f$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

1.3.14. példa. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor az

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|$$

függvény konvex, ui. bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|. \quad \blacksquare$$

1.3.80. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}^d$ konvex, nyílt halmaz, akkor minden $f : H \to \mathbb{R}$ konvex függvény lokálisan Lipschitz-folytonos, azaz bármely $K \subset H$ kompakt halmaz esetén $f|_K$ Lipschitz-folytonos!

Útm.

1. lépés. Ha $r > 0$ és $a \in \mathbb{R}^d$ olyan, hogy

$$(*) \qquad B_r(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\|_1 \leq r\right\},$$

akkor d-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen belátható, hogy ha $e_1, \ldots, e_d$ jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor

$$B_r(a) = \mathrm{co}\,(A), \qquad \text{ahol} \qquad A := \left\{a \pm re_k \in \mathbb{R}^d : k \in \{1, \ldots, d\}\right\}.$$

Így (vö. 1.3.49. feladat) bármely $x \in B_r(a)$ vektorra

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k, \qquad \text{ahol} \qquad x_k \in A, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

Ezért f konvexitása következtében

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(x_k) \leq \max\{|f(\xi)| \in \mathbb{R} : \xi \in A\} =: M \qquad (x \in B_r(a)).$$

Ha most $y \in B_{r/2}(a)$ és $\alpha \in [1, +\infty)$ olyan, hogy

$$z := a - \alpha(y - a) \in \partial B_r(a),$$

akkor

$$a = \frac{1}{1+\alpha} z + \frac{\alpha}{1+\alpha} y,$$

így f konvexitása következtében

$$f(a) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(z) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(y),$$

ahonnan

$$f(y) \geq \frac{1+\alpha}{\alpha} f(a) - \frac{1}{\alpha} f(z) \geq -2|f(a)| - M \qquad (y \in B_{r/2}(a))$$

következik.

2. lépés. Ha

$$u, v \in B_{r/2}(a), \qquad u \neq v$$

és $\alpha \in [1, +\infty)$ olyan, hogy

$$z := u + \alpha(v - u) \in \partial B_r(a),$$

akkor

$$v = \frac{1}{\alpha} z + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) u,$$

így f konvexitása következtében

$$f(v) \leq \frac{1}{\alpha} f(z) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) f(u),$$

ezért a fenti becslések felhasználásával

$$f(v) - f(u) \leq \frac{1}{\alpha}(f(z) - f(u)) \leq \frac{2}{\alpha}(M + |f(a)|)$$

adódik. Mivel

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\|v-u\|_1}{\|z-u\|_1} \leq \frac{2}{r}\|v-u\|_1,$$

így

$$|f(v) - f(u)| \leq \frac{4}{r}(M + |f(a)|)\, \|v-u\|_1,$$

azaz f Lipschitz-folytonos $B_{r/2}(a)$-n.

3. lépés. Ha $K \subset H$ kompakt halmaz, akkor K lefedhető véges sok $(*)$ alakú gömbbel. ■

1.3.16. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén azt mondjuk, hogy az

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|$$

függvény **szigorúan konvex** , ha bármely

$$x, y \in \mathcal{X}, \quad x \neq y, \quad f(x) = f(y) = 1 \qquad \text{és} \qquad \alpha \in (0{,}1)$$

esetén fennáll az

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < 1$$

egyenlőtlenség.

1.3.81. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén az

$$f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|$$

függvény pontosan akkor szigorúan konvex, ha igaz az

$$(x, y \in \mathcal{X}, \quad x \neq y, \quad f(x) = f(y) = 1) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x+y) < 2$$

állítás!

Útm.

1. lépés. Ha f szigorúan konvex, akkor az

$$\alpha := \frac{1}{2}$$

választással bármely

$$x, y \in \mathcal{X}, \qquad x \neq y, \quad \|x\| = \|y\| = 1$$

esetén

$$\left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\| < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \|x+y\| < 2.$$

2. lépés. Fordítva, ha

$$x, y \in \mathcal{X}, \quad x \neq y, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \qquad \text{esetén} \qquad \|x+y\| < 2$$

és $\alpha \in (0,1)$, akkor

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Ha most $\alpha \in (0,1)$ olyan, hogy a

$$v := \alpha x + (1-\alpha)y$$

vektorra $\|v\| = 1$, pl. $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ($\alpha < \frac{1}{2}$ esetén az $x \leftrightarrow y$, ill. $\alpha \leftrightarrow 1-\alpha$ szerepcserével minden ugyanígy tárgyalható), akkor a

$$z := 2v - x = (2\alpha - 1)x + 2(1-\alpha)y$$

vektorra $z \in \mathcal{X}$, $z \neq x$ (hiszen $\alpha \neq 1$, ill. $x \neq y$), valamint

$$\|z\| \geq 2\|v\| - \|x\| = 2 - 1 = 1$$

és

$$\|z\| \leq (2\alpha - 1)\|x\| + 2(1-\alpha)\|y\| = 2\alpha - 1 + 2 - 2\alpha = 1,$$

azaz $\|z\| = 1$. Tehát a feltételezésünk szerint

$$1 = \|v\| = \left\|\frac{1}{2}(z+x)\right\| = \frac{1}{2}\|z+x\| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

ami pedig nem lehetséges. ■

A norma szigorú konvexitása geometriailag azt jelenti, hogy a nullvektor körüli egységgömb határán lévő két pontot összekötő (nyílt) szakasz minden pontja a gömb belsejébe esik.

1.3.15. példa. Ha $p \in [1, +\infty]$, akkor a $\mathbb{K}^d$-beli hatványnormák $d = 1$ esetén triviálisan szigorúan konvexek, ha pedig $d > 1$, akkor

- $p = 1$ esetén $\|\cdot\|_p$ nem szigorúan konvex, hiszen az

$$x := (1,0,0,\ldots,0) \qquad \text{és az} \qquad y := (0,1,0,0,\ldots,0),$$

vektorra $x \neq y$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ és $\|x + y\|_1 = 2$.

- $p = +\infty$ esetén $\|\cdot\|_p$ nem szigorúan konvex, hiszen az

$$x := (1,\ldots,1) \qquad \text{és az} \qquad y := (-1,1,1,\ldots,1),$$

vektorra $x \neq y$, $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, ill. $\|x + y\|_p = 2$.

- $p \in (1, +\infty)$ esetén $\|\cdot\|_p$ szigorúan konvex, hiszen a Minkowski-egyenlőtlenség (vö. 11.2. fejezet) miatt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{K}^d),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda > 0$ esetén $x = \lambda y$; ennélfogva bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$, $x \neq y$ és $\|x\|_p = 1 = \|y\|_p$ esetén

$$\|x + y\|_p < \|x\|_p + \|y\|_p = 2.$$

1.3.16. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[a, b]$, akkor $\|\cdot\|_1$ nem szigorúan konvex, ui. ha

$$f(x) := \frac{1}{b-a}, \quad \text{ill.} \quad g(x) := \frac{2(x-a)}{(b-a)^2} \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor

$$f, g \in \mathfrak{C}[a, b], \quad f \neq g, \quad \|f\|_1 = \|g\|_1 = 1,$$

továbbá

$$f + g \in \mathfrak{C}[a, b] \quad \text{és} \quad \|f + g\|_1 = 2.$$

1.3.17. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[a,b]$, akkor $\|\cdot\|_\infty$ nem szigorúan konvex, ui. ha

$$f(x) := 1, \quad \text{ill.} \quad g(x) := \frac{x-a}{b-a} \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$f, g \in \mathfrak{C}[a,b], \quad f \neq g, \quad \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1,$$

továbbá

$$f + g \in \mathfrak{C}[a,b] \quad \text{és} \quad \|f+g\|_\infty = 2.$$

1.3.82. feladat. Mutassuk meg, hogy ha Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[a,b]$, $p \in (1,+\infty)$, akkor $\|\cdot\|_p$ szigorúan konvex!

Útm. Mivel bármely $p \in (1,+\infty)$, ill. $f, g \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$f(x) = 0 \quad (x \in [a,b]) \qquad \text{vagy} \qquad g(x) = 0 \quad (x \in [a,b]) \qquad \text{vagy} \qquad \exists\, \lambda > 0: \ f = \lambda g$$

teljesül, ezért az $f, g \in \mathfrak{C}[a,b]$, $f \neq g$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ függvényekre

$$\|f+g\|_p < \|f\|_p + \|g\|_p = 2. \quad \blacksquare$$

1.3.17. definíció. Azt mondjuk, hogy a $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér **szigorúan normált**, ha az

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|$$

függvény szigorúan konvex.

1.3.83. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

akkor bármely $\lambda \in [0,+\infty)$ számra fenáll a

$$\|x + \lambda y\| = \|x\| + \lambda\|y\|$$

egyenlőség!

Útm. Ha y az $\mathcal{X}$-beli nullvektor, azaz $\|y\| = 0$, vagy $\lambda = 0$, akkor az egyenlőség triviálisan teljesül. Ellenkező esetben

$$\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\|y\|} = \frac{\|x\| + \|\lambda y\| - \|x\|}{\|y\|} = \frac{\|x\| + |\lambda| \cdot \|y\| - \|x\|}{\|y\|} = |\lambda| = \lambda. \quad \blacksquare$$

1.3.84. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér akkor és csak akkor szigorúan normált, ha az

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

egyenlőség valamely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda > 0$ számmal $x = \lambda y$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ szigorúan normált és

$$x, y \in \mathcal{X}, \qquad \|x+y\| = \|x\| + \|y\|,$$

továbbá $x \neq 0$, $y \neq 0$, akkor

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 = \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Így, ha $\|y\| - \|x\| \geq 0$ (ellenkező esetben $x \leftrightarrow y$ szerepcserével ugyanígy járunk el), akkor

$$2 \geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| \geq$$

$$\geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right\| - \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| =$$

$$= \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \left\|\frac{(\|y\| - \|x\|)y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right\| = 1 + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} + 1 = 2,$$

azaz

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = 2.$$

Tehát a szigorú konvexitás miatt

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|},$$

ezért a

$$\lambda := \frac{y}{\|x\|}$$

választás megfelelő.

2. lépés. Ha $x, y \in \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$x \neq y \qquad \text{és} \qquad \|x\| = 1 = \|y\|,$$

akkor $x \neq 0$, $y \neq 0$ és bármely $\lambda > 0$ számra $x \neq \lambda y$, azaz a háromszög-egyenlőtlenség és a feltétel következtében

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\| = 1. \quad \blacksquare$$

1.3.18. példa. A $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér (vö. 1.3.31. feladat) nem szigorúan normált, hiszen az

$$x := (1{,}0{,}0, \ldots) \qquad \text{és az} \qquad y := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozatra

$$\|x\|_\infty = 1 = \|y\|_\infty,$$

továbbá

$$\|x+y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

de nincsen olyan $\lambda > 0$, amelyre $x = \lambda y$ teljesülne, hiszen ekor $x_2 = 0$ és $y_2 = \frac{1}{2}$ miatt $\lambda = 0$ lenne.

1.3.19. példa. $(l_1, \|\cdot\|_1)$ nem szigorúan normált, ui. ha

$$x := (1{,}0{,}0, \ldots) \qquad \text{és} \qquad y := (0{,}1{,}0{,}0, \ldots),$$

akkor $x, y \in l_1$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, továbbá $x + y = (1{,}1{,}0{,}0, \ldots) \in l_1$ és

$$\|x+y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

de nincs olyan $\lambda \in [0, +\infty)$, amelyre $x = \lambda y$ vagy $y = \lambda x$ teljesülne.

1.3.20. példa. $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nem szigorúan normált, ui. ha

$$x := (1{,}0{,}0, \ldots) \qquad \text{és} \qquad y := (1{,}1{,}0{,}0, \ldots),$$

akkor $x, y \in l_1$, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, továbbá $x + y = (2{,}1{,}0{,}0, \ldots) \in l_\infty$ és

$$\|x+y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

de nincs olyan $\lambda \in [0, +\infty)$, amelyre $x = \lambda y$ vagy $y = \lambda x$ teljesülne.

1.3.18. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, ill. $\|\cdot\|$ **egyenletesen konvex**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor igaz a

$$(\|x\|, \|y\| \leq 1 \quad \text{és} \quad \|x-y\| \geq \varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

implikáció. A

$$\delta_{\mathcal{X}} : \varepsilon \mapsto \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \in \mathbb{R} : \ \|x\|, \|y\| \leq 1, \ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

függvényt **konvexitási modulus**nak nevezzük.

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetében tehát $\|\cdot\|$ pontosan akkor egyenletesen konvex, ha bármely $x_n, y_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat esetében igaz

$$\left(\|x_n\|, \|y_n\| \leq 1 \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim\left(\frac{\|x_n + y_n\|}{2}\right) = 1\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(\|x_n - y_n\|) = 0$$

implikáció.
Belátható, hogy a $\delta_{\mathcal{X}}$ konvexitási modulus monoton növekedő, továbbá

$$0 \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2} \leq 1$$

következtében $\delta_{\mathcal{X}}(\varepsilon) \in [0,1]$. Sőt az is feltehető, hogy $\varepsilon \in (0,2]$, hiszen

$$0 < \varepsilon \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2.$$

Innen pedig a monotonitás felhasználásával $\delta_{\mathcal{X}}(2) \leq 1$ következik.

1.3.21. példa. A $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ tér egyenletesen konvex, hiszen ha $z, w \in \mathbb{C}$, olyan komplex számok, amelyekre $|z|, |w| \leq 1$, $|z - w| \geq \varepsilon$ teljesül, akkor

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2),$$

következtében

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4},$$

és így a

$$\delta := 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

választás megfelelő.

1.3.85. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér egyenletesen konvex, akkor $\|\cdot\|$ szigorúan konvex!

Útm. Ha $x, y \in \mathcal{X}$ olyan, hogy

$$x \neq y \qquad \text{és} \qquad \|x\| = \|y\| = 1,$$

akkor $\|x - y\| \neq 0$, ezért alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén $\|x - y\| \geq \varepsilon$, és így van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Tehát $\|x + y\| \leq 2 - 2\delta$, ahonnan $\|x + y\| < 2$ következik. ■

1.3.22. példa. $(l_1, \|\cdot\|_1)$ és $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nem egyenletesen konvex, hiszen ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$, akkor

- l_1 esetén
$$\|e_1\|_1 = \|e_2\|_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad \|e_1 + e_2\|_1 = \|e_1 - e_2\|_1 = 2;$$
- l_∞ esetén, ha $x := e_1 + e_2$ és $y := e_1 - e_2$, úgy
$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad \|x + y\|_\infty = \|x - y\|_\infty = 2.$$

1.3.86. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, továbbá $p \in [1, +\infty]$, úgy $(L^p, \|\cdot\|_p)$ pontosan akkor lesz egyenletesen konvex, ha $1 < p < +\infty$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy a $p = 1$, ill. a $p = \infty$ esetekben egyenletes konvexitásról nem beszélhetünk, ui. ellenkező esetben l_1 és l_∞ is egyenletesen konvex lenne, ami pedig nem lehetséges (vö. 1.3.22. példa).

2. lépés. Ha $p \geq 2$ és $0 < \varepsilon \leq 2$, továbbá
$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0,$$
akkor tetszőlegs $f, g \in L^p$, $\|f\|_p, \|g\|_p \leq 1$ és $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$ függvények esetén (vö. 11.4.2/1. feladat)
$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \|f - g\|_p^p \leq 2^p - \varepsilon^p,$$
azaz
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq \frac{1}{2}(2^p - \varepsilon^p)^{1/p} = \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1 - \delta.$$

3. lépés. Ha $p < 2$, $q \in \mathbb{R}$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \varepsilon \leq 2$, továbbá
$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0,$$
akkor tetszőlegs $f, g \in L^p$, $\|f\|_p, \|g\|_p \leq 1$ és $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$ függvények esetén (vö. 11.4.2/2. feladat)
$$\|f + g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}} - \|f - g\|_p^q \leq 2^q - \varepsilon^q,$$
hiszen $1/(p-1) = q - 1$, azaz – az előző esethez hasonlóan –
$$\|(f+g)/2\|_p \leq 1 - \delta$$
teljesül. ∎

1.3.87. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós normált tér, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ additív és folytonos leképezés, azaz

- bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$f(x+y) = f(y) + f(y);$$
- bármely $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergens sorozat esetén
$$\lim(f(x_n)) = f(\lim(x_n)),$$

akkor f homogén, azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén teljesül az

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

egyenlőség!

Útm. Az additivitásból teljes indukcióval azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ esetén
$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n).$$
Innen $x_1 = \ldots = x_n =: x$ esetén
$$f(nx) = nf(x) \qquad (x \in \mathcal{X},\, n \in \mathbb{N})$$
következik. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0),$$
ezért $f(0) = 0$ és
$$f(0x) = 0f(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$
Lévén, hogy
$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x), \quad \text{azaz} \quad f(-x) = -f(x) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
így
$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x) \qquad (n \in \mathbb{Z} :\ -n \in \mathbb{N},\ x \in \mathcal{X}).$$
Ha most $p, q \in \mathbb{Z}$: $q \neq 0$ és az $r := p/q$ racionális számmal $y := rx$, akkor $px = qy$, és
$$pf(x) = f(px) = f(qy) = qf(y) = qf(rx), \quad \text{azaz} \quad f(rx) = rf(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$
Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor alkalmas $r_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozattal $\lim(r_n) = \alpha$, és így bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\lim(r_n x) = \alpha x$$
és f folytonosságának következtében
$$\alpha f(x) = \lim(r_n) f(x) = \lim(r_n f(x)) = \lim(f(r_n x)) = f(\lim(r_n x)) = f(\alpha x) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
azaz f homogén. ■

1.3.19. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és az

$$a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés esetén azt mondjuk, hogy

- az a **bilineáris** (mindkét változójában lineáris), ha bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$a(x + \alpha y, z) = a(x, z) + \alpha a(y, z) \qquad \text{és} \qquad a(x, y + \alpha z) = a(x, y) + \alpha a(x, z);$$

- az a **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$a(x, y) = a(y, x);$$

- az a **korlátos**, ha alkalmas $K \geq 0$ szám esetén

$$|a(x, y)| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X});$$

- az a **koercív** vagy **elliptikus**, ha alkalmas $k > 0$ szám esetén

$$k \cdot \|x\|^2 \leq |a(x, x)| \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

1.3.23. példa. Ha az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ normált tér esetén

$$a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad a(x, y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

akkor a koercív, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$a(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|_2^2.$$

1.3.24. példa. Ha $\varphi \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1] : \min \varphi =: \varphi_0 \geq 0$, továbbá az $(L^2[0,1], \|\cdot\|_{L^2})$ normált tér esetén

$$a : L^2[0,1] \times L^2[0,1] \to \mathbb{K}, \qquad a(f, g) := \int_0^1 \varphi(t) f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t,$$

akkor a koercív, hiszen bármely $f \in L^2[0,1]$ esetén

$$a(f, f) = \int_0^1 \varphi(t) |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \geq \varphi_0 \int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \varphi_0 \|f\|_{L^2}^2.$$

1.3.88. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ korlátos bilineáris leképezés és az $x_n, y_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokra

$$\lim(x_n) = x \in \mathcal{X}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(y_n) = y \in \mathcal{X},$$

akkor igaz a

$$\lim(a(x_n, y_n)) = a(x, y)$$

állítás!

Útm. Mivel (y_n) korlátos sorozat, ezért alkalmas $K \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned}
|a(x_n, y_n) - a(x, y)| &= |a(x_n, y_n) - a(x, y_n) + a(x, y_n) - a(x, y)| = \\
&= |a(x_n - x, y_n) + a(x, y_n - y)| \leq \\
&\leq |a(x_n - x, y_n)| + |a(x, y_n - y)| \leq \\
&\leq K \cdot \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + K \cdot \|x\| \cdot \|y_n - y\|
\end{aligned}$$

teljesül. ■

1.3.89. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor tetszőleges $H \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén igazak az alábbi állítások!

1. $\mathrm{diam}\,(H) = \mathrm{diam}\,(\overline{H})$;
2. $\mathrm{diam}\,(\mathrm{co}\,(H)) = \mathrm{diam}\,(H)$.

Útm.

1. Mivel $H \subset \overline{H}$, ezért (vö. 1.2.5. definíció) $\mathrm{diam}\,(H) \leq \mathrm{diam}\,(\overline{H})$. Ha $\mathrm{diam}\,(H) > \mathrm{diam}\,(\overline{H})$, akkor alkalams $a, b \in \overline{H}$ esetén

$$\varepsilon := \|a - b\| - \mathrm{diam}\,(H) > 0.$$

   Ha most $x, y \in H$:

$$\|a - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad \|b - y\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

   akkor

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - a + a - b + b - y\| \geq \|a - b\| - \|x - a\| - \|y - b\| > \\
&> \varepsilon + \mathrm{diam}\,(H) - \varepsilon = \mathrm{diam}\,(H),
\end{aligned}$$

   ami nem lehetséges.

2. Világos, hogy $H \subset \mathrm{co}\,(H)$, így (vö. 1.2.5. definíció) $\mathrm{diam}\,(H) \leq \mathrm{diam}\,(\mathrm{co}\,(H))$. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{diam}\,(H) \geq \mathrm{diam}\,(\mathrm{co}\,(H))$ is teljesül. Valóban, ha $x, y \in \mathrm{co}\,(H)$, akkor a Caratheodory-tétel (vö. 1.3.53. feladat) következtében alkalmas

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k, \beta_k \in [0, \infty), \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{p} \beta_k = 1, \quad x_k, y_l \in H$$

$$(k \in \{1,\ldots,p\},\ l \in \{1,\ldots,q\})$$

esetén

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k \qquad \text{és} \qquad y = \sum_{l=1}^{q} \beta_l y_l.$$

Így

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|x - y\cdot 1\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k - y \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (x_k - y) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left(x_k - \sum_{l=1}^{q} \beta_l y_l \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \sum_{l=1}^{q} \beta_l \left(x_k - y_l \right) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \sum_{l=1}^{q} \beta_l \|x_k - y_l\| \leq \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{q} \beta_l \right) \cdot \mathrm{diam}\,(H) = \\
&= \mathrm{diam}\,(H). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.3. Mátrixnormák

1.3.12. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \|A_{k*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \|A_{*l}\|_2^2} \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n})$$

Frobenius-normára igaz a

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(A^*A)} = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(AA^*)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \mu_i} \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n})$$

állítás, ahol

$$\mu_1, \ldots, \mu_{\min\{m,n\}} \in \mathbb{K}$$

az AA^*, ill. A^*A sajátértékei, és A_{k*}, ill. A_{*l} jelöli az A mártix k-adik sorát, ill. l-edik oszlopát!

Útm.

1.3.90. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathbb{K}^m, \varphi)$ és $(\mathbb{K}^n, \psi)$ normált tér, akkor a

$$p : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{R}, \qquad p(A) := \mathrm{lub}_{\,\varphi,\psi}(A) := \sup\left\{ \frac{\varphi(Ax)}{\psi(x)} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \right\}$$

függvény norma!

Útm.

1. lépés. Ha valamely $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén $p(A)=0$, akkor

$$\varphi(Ax)=0 \qquad (x\in\mathbb{K}^n)\,,$$

azaz

$$Ax=0 \qquad (x\in\mathbb{K}^n)\,,$$

így $A=0\in\mathbb{K}^{m\times n}$.

2. lépés. Ha $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$, akkor

$$p(\lambda A)=\sup\left\{\frac{\varphi((\lambda A)x)}{\psi(x)}\,:\,x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}=|\lambda|\cdot\sup\left\{\frac{\varphi(Ax)}{\psi(x)}\,:\,x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}=|\lambda|\cdot p(A).$$

3. lépés. Ha $A,B\in\mathbb{K}^{m\times n}$, akkor

$$\begin{aligned}
p(A+B) &= \sup\left\{\frac{\varphi((A+B)x)}{\psi(x)}:x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}=\sup\left\{\frac{\varphi(Ax+Bx)}{\psi(x)}:x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}\leq\\
&\leq \sup\left\{\frac{\varphi(Ax)+\varphi(Bx)}{\psi(x)}\,:\,x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}\leq\\
&\leq \sup\left\{\frac{\varphi(Ax)}{\psi(x)}\,:\,x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}+\sup\left\{\frac{\varphi(Bx)}{\psi(x)}\,:\,x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}\right\}=\\
&= p(A)+p(B).\quad\blacksquare
\end{aligned}$$

Az 1.3.90. definícióban bevezetett $\operatorname{lub}_{\varphi,\psi}$ normát a φ, ill. a ψ által **indukált normának** vagy **természetes normának** nevezzük.

1.3.7. házi feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén igaz a

$$\begin{aligned}
\operatorname{lub}_{\varphi,\psi}(A) &= \sup\{\varphi(Ax)\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^n,\ \psi(x)=1\}=\\
&= \sup\{\varphi(Ax)\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^n,\ \psi(x)\leq 1\}=\\
&= \sup\{\varphi(Ax)\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^n,\ \psi(x)<1\}
\end{aligned}$$

egyenlőséglánc!

1.3.91. feladat. Igazoljuk, hogy ha $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$, akkor igaz a

$$\|A\|_o=\operatorname{lub}_{\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_1}(A),\qquad \text{ill.}\qquad \|A\|_s=\operatorname{lub}_{\|\cdot\|_\infty,\|\cdot\|_\infty}(A)$$

állítás (vö. 1.3.1. példa)!

Útm.

1. lépés. Ha $x \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\cdot|x_l| = \\ &= \sum_{l=1}^{n}|x_l|\cdot\sum_{k=1}^{m}|a_{kl}| \leq \|x\|_1\cdot\sup\left\{\sum_{k=1}^{m}|a_{kl}|\in\mathbb{R}:\ l\in\{1,\ldots,n\}\right\},\end{aligned}$$

tehát

$$\operatorname{lub}_{\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_1}(A) = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\in\mathbb{R}:\ 0\neq x\in\mathbb{K}^n\right\} \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}|a_{kl}|\in\mathbb{R}:\ l\in\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Ha

$$y := (0,\ldots,0,\overbrace{1}^{l},0,\ldots,0)\in\mathbb{K}^n,$$

akkor $\|y\|_1 = 1$, és az utolsó egyenlőtlenségből egyenlőség lesz.

2. lépés. Mivel

$$\begin{aligned}&\operatorname{lub}_{\|\cdot\|_\infty,\|\cdot\|_\infty}(A) = \\ =\ &\sup\left\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\in\mathbb{R}:\ 0\neq x\in\mathbb{K}^n\right\} = \\ =\ &\sup\left\{\frac{\sup\left\{\left|\sum_{l=1}^{n}a_{kl}x_l\right|\in\mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\}\right\}}{\|x\|_\infty}\in\mathbb{R}:\ 0\neq x\in\mathbb{K}^n\right\} \leq \\ \leq\ &\sup\left\{\frac{\|x\|_\infty\cdot\sup\left\{\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\in\mathbb{R}:k\in\{1,\ldots,m\}\right\}}{\|x\|_\infty}\in\mathbb{R}:0\neq x\in\mathbb{K}^n\right\} = \\ =\ &\sup\left\{\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\in\mathbb{R}:k\in\{1,\ldots,m\}\right\},\end{aligned}$$

így ha $y\in\mathbb{K}^n$ olyan vektor, amelyre

$$y_l := \begin{cases}\dfrac{\overline{a_{kl}}}{|a_{kl}|} & (a_{kl}\neq 0),\\[2ex] 1 & (a_{kl}=0),\end{cases}$$

akkor $\|y\|_\infty = 1$ és

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right| \in \mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\}\right\} &= \sum_{l=1}^{n}|a_{kl}| = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l\right| \leq \\
&\leq \sup\left\{\left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l\right| \in \mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\}\right\} = \\
&= \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} \leq \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \in \mathbb{R}:\ 0\neq x\in\mathbb{K}^n\right\} = \\
&= \operatorname{lub}_{\|\cdot\|_\infty,\|\cdot\|_\infty}(A). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Az $m = n$ esetben hallgatólagosan feltételezzük, hogy $\varphi = \psi$ és az indukált normára a $\operatorname{lub}_\varphi$ jelölést használjuk. Ha φ a hatványnorma vagy a maximumnorma, akkor tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ $(d\in\mathbb{N})$ esetén

$$\|A\|_p := \operatorname{lub}_{\|\cdot\|_p}(A).$$

Így például

$$\|A\|_1 = \|A\|_o, \quad \text{ill.} \quad \|A\|_\infty = \|A\|_s \qquad (A\in\mathbb{K}^{d\times d}).$$

1.3.25. példa. Nyilvánvaló, hogy ha valamely $d\in\mathbb{N}$ esetén $\left(\mathbb{K}^d,\varphi\right)$ normált tér, akkor az

$$E := [\delta_{kl}]_{k,l=1}^{d}\,, \qquad \delta_{kl} := \begin{cases} 1 & (k=l), \\ 0 & (k\neq l) \end{cases} \qquad (\textbf{Kronecker-szimbólum})$$

(egység)mátrixra $\operatorname{lub}_\varphi(E) = 1$, hiszen bármely $x\in\mathbb{K}^d$ vektorra $Ex = x$, így

$$\operatorname{lub}_\varphi(E) = \sup\left\{\varphi(Ex)\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^n,\ \varphi(x)=1\right\} = 1.$$

1.3.92. feladat. Igazoljuk, hogy a Frobenius-norma nem indukált norma!

Útm. Ha $d\in\mathbb{N}$, akkor az 1.3.12. gyakorló feladat alapján az $E\in\mathbb{K}^{d\times d}$ egységmátrixra

$$\|E\|_F = \sqrt{\operatorname{Sp}(E^*E)} = \sqrt{d} > 1,$$

ami ellentmond az 1.3.25. példabeli állításnak. $\blacksquare$

1.3.13. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\|A\|_c := \sqrt{mn} \cdot \sup \{|a_{kl}| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, m\},\, l \in \{1, \ldots, n\}\} \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n})$$

norma (ún. **kombinált norma**) nem indukált norma!

Útm.

1.3.14. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ill. $B \in \mathbb{K}^{n\times q}$, akkor igaz a

$$\|A \cdot B\|_c \leq \|A\|_c \cdot \|B\|_c$$

egyenlőtlenség!

Útm.

1.3.15. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in [1, +\infty)$ és $m, n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $p < 2$ esetén $m \leq n$, ill. $p > 2$ esetén $m \geq n$, akkor tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrixra, ill. $x \in \mathbb{K}^n$ vektorra teljesül a

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_c \cdot \|x\|_p$$

egyenlőtlenség!

Útm.

1.3.93. feladat. Számítsuk ki a $\|\cdot\|_2$ által indukált normát $\mathbb{K}^{d\times d}$-n, azaz tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ esetén határozzuk meg a

$$\|A\|_2 := \mathrm{lub}_{\,\|\cdot\|_2}(A)$$

számot!

Útm. Mivel bármely $x \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\|x\|_2 = x^* x,$$

ezért az

$$r_A(x) := \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{x^*A^*Ax}}{\sqrt{x^*x}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{d} \left|\sum_{l=1}^{d} a_{kl}x_l\right|^2}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{d} |x_l|^2}} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{K}^d)$$

függvény, ún. **Rayleigh-hányados** szuprémumát keressük. Világos, hogy bármely $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ esetén A^*A hermitikus mátrix:

$$(A^*A)^* = A^*\,(A^*)^* = A^*A$$

továbbá a

$$Q(x) := x^*(A^*A)x \qquad (x \in \mathbb{K}^d)$$

kvadratikus alakra

$$Q(x) \geq 0 \qquad (0 \neq x \in \mathbb{K}^d)$$

teljesül. Így alkalmas $U \in \mathbb{K}^{d\times d}$ unitér mátrixszal (U reguláris és $U^{-1} = U^*$)

$$U^*A^*AU = \mathrm{diag}\,\{\mu_1, \ldots, \mu_d\},$$

ahol

$$0 \leq \mu_1, \ldots, \mu_d \in \mathbb{R}$$

az A^*A mátrix sajátértékei:

$$\mu_1, \ldots, \mu_d \in \sigma(A^*A).$$

Ezért, ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sup\left\{\frac{\sqrt{y^*U^*A^*AUy}}{\sqrt{y^*U^*Uy}} \in \mathbb{R} :\ Uy = x \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\sqrt{y^*\mathrm{diag}\,\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}y}}{\sqrt{y^*y}} \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{d}\mu_k|y_k|^2}{\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}} \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} \leq \\
&\leq \sqrt{\max\{\mu_k \in \sigma(A^*A) :\ k \in \{1, \ldots, d\}\}}\cdot \\
&\quad \cdot \sup\left\{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}{\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}} \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sqrt{\mu_{max}(A^*A)},
\end{aligned}$$

ahol $\mu_{max}(A^*A)$ jelöli az A^*A legnagyobb sajátértékét. Ha $u \in \mathbb{K}^d$ az A^*A mátrix $\mu_{max}(A^*A)$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor

$$\|A\|_2 \geq \frac{\sqrt{u^*A^*Au}}{\sqrt{u^*u}} = \mu_{max}(A^*A). \quad \blacksquare$$

Így, ha A hermitikus, azaz $A^* = A$, akkor

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_k| \in \mathbb{R} :\ \lambda_k \in \sigma(A),\ k \in \{1, \ldots, d\}\}.$$

1.3.94. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrix, akkor igaz a

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\inf\{\|Ax\|_2 \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{K}^d,\ \|x\|_2 = 1\}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{min}(A^*A)}}$$

állítás!

Útm. Reguláris mátrix inverzének sajátértékei a mátrix sajátértékeinek a reciproka, továbbá

$$\begin{aligned}
\left\|A^{-1}\right\|_2 &= \sup\left\{\|A^{-1}x\|_2 \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{K}^d,\ \|x\|_2 = 1\right\} = \\
&= \sup\left\{\left\|A^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right)\right\|_2 \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\setminus\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\|A^{-1}y\|_2}{\|y\|_2} \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\setminus\{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{1}{\left\|A\frac{A^{-1}y}{\|A^{-1}y\|_2}\right\|_2} \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{K}^d\setminus\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{1}{\|Ax\|_2} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{K}^d,\ \|x\|_2 = 1\right\} = \frac{1}{\inf\{\|Ax\|_2 \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{K}^d,\ \|x\|_2 = 1\}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.16. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$, sőt, ha A unitér, akkor

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = 1.$$

2. $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$, ahol $U \in \mathbb{K}^{d\times d}$: $UU^* = E$.

Útm.

1.3.95. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathbb{K}^m, \varphi)$ és $(\mathbb{K}^n, \psi)$ normált tér, akkor bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix, ill. $x \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén

1. $\varphi(Ax) \leq \mathrm{lub}_{\varphi,\psi}(A) \cdot \psi(x)$,
2. ha $K \geq 0$: $\varphi(Ax) \leq K \cdot \psi(x)$, úgy $\mathrm{lub}_{\varphi,\psi}(A) \leq K$

teljesül!

Útm.

1. Mivel a szuprémum felső korlát, ezért világos, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ill. $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\mathrm{lub}_{\varphi,\psi}(A) \geq \frac{\varphi(Ax)}{\psi(x)}, \qquad \text{azaz} \qquad \varphi(Ax) \leq \mathrm{lub}_{\varphi,\psi}(A) \cdot \psi(x).$$

   Ha $x = 0 \in \mathbb{K}^n$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrixra.

2. Mivel a szuprémum a legkisebb felső korlát, ezért ez az állítás is nyilvánvaló. $\blacksquare$

Így adott $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix esetén, ha valamely $K \geq 0$ számra

$$\varphi(Ax) \leq K \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{K}^n),$$

és alkalmas $u \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\psi(u) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(Au) = K\psi(u)$$

teljesül, akkor

$$\operatorname{lub}_{\varphi,\psi}(A) = K.$$

1.3.96. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\mathbb{K}^d, \varphi\right)$ normált tér, akkor bármely $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix, ill. $x \in \mathbb{K}^d$ vektor esetén

$$\operatorname{lub}_\varphi(A \cdot B) \leq \operatorname{lub}_\varphi(A) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy alkalmas $u \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\varphi(u) = 1,$$

így a fenti megjegyzés értelmében

$$\operatorname{lub}_\varphi(AB) = \varphi((AB)u) = \varphi(A(Bu)) \leq \operatorname{lub}_\varphi(A) \cdot \varphi(Bu) \leq \operatorname{lub}_\varphi(A) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B). \qquad \blacksquare$$

1.3.97. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbb{K}^d, \varphi)$ normált tér, $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, továbbá $\lambda \in (0, +\infty)$ olyan, hogy

$$\varphi(Ax) \geq \lambda\varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{K}^n),$$

akkor A reguláris és

$$\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

teljesül!

Útm. Ha valamely $x \in \mathbb{K}^d$ vektor esetén

$$\varphi(Ax) = 0,$$

akkor $\varphi(x) = 0$, azaz az

$$Ax = 0$$

lineáris egyenletrendszernek nincsen a triviálistól különböző megoldása. Ez azt jelenti, hogy az A mátrix reguláris. Az

$$y := Ax$$

vektorra

$$\varphi(y) \geq \lambda\varphi(A^{-1}y),$$

ahonnan a

$$\varphi(A^{-1}y) \leq \frac{1}{\lambda}\varphi(y) \qquad (y \in \mathbb{K}^d)$$

becslés következik. Ez az indukált norma definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda}. \quad \blacksquare$$

1.3.98. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbb{K}^d, \varphi)$ normált tér és $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha
$$\operatorname{lub}_\varphi(A) < 1,$$
akkor $E + A$ reguláris és
$$\operatorname{lub}_\varphi((E+A)^{-1}) \leq \frac{1}{1-\operatorname{lub}_\varphi(A)}.$$

2. Ha
$$\det(A) \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B) < 1,$$
akkor $A + B$ reguláris és
$$\operatorname{lub}_\varphi((A+B)^{-1}) \leq \frac{\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1})}{1-\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B)}.$$

3. Ha A **átlódomináns** , azaz pl.
$$k_i := |a_{ii}| - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{d} |a_{il}| > 0 \qquad (i \in \{1,\ldots,d\}),$$
akkor A reguláris és
$$\|A^{-1}\|_s = \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\{k_i \in \mathbb{R} :\ i \in \{1,\ldots,d\}\}}.$$

Útm.

1. Mivel bármely $x \in \mathbb{K}^d$ esetén
$$\varphi((E+A)x) = \varphi(x+Ax) \geq \varphi(x) - \varphi(Ax) \geq \varphi(x) - \operatorname{lub}_\varphi(A)\varphi(x) = (1-\operatorname{lub}_\varphi(A))\varphi(x)$$
(vö. 1.3.95/1. gyakorló feladat), ezért $E + A$ reguláris, és az indukált norma definíciója alapján igaz a
$$\operatorname{lub}_\varphi((E+A)^{-1}) \leq \frac{1}{1-\operatorname{lub}_\varphi(A)}$$
becslés.

2. Mivel A reguláris, ezért a

$$\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}B) \leq \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B) < 1$$

becslés (vö. 1.3.96. feladat) és az előzőek következtében az $E + A^{-1}B$ mátrix reguláris, ami azt jelenti, hogy az

$$E + A^{-1}B, \qquad \text{azaz az} \qquad A + B = A(E + A^{-1}B)$$

mátrix reguláris, továbbá

$$\operatorname{lub}_\varphi(E + A^{-1}B) \leq \frac{1}{1 - \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}B)}.$$

Így

$$\begin{aligned} \operatorname{lub}_\varphi((A+B)^{-1}) &= \operatorname{lub}_\varphi((E + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}) \leq \\ &\leq \operatorname{lub}_\varphi((E + A^{-1}B)^{-1}) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \leq \\ &\leq \frac{\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1})}{1 - \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}B)} \leq \frac{\operatorname{lub}_\varphi(A^{-1})}{1 - \operatorname{lub}_\varphi(A^{-1}) \cdot \operatorname{lub}_\varphi(B)}. \end{aligned}$$

3. Világos, hogy ha $x \in \mathbb{K}^d$, akkor alkalmas $i \in \{1, \ldots, d\}$ indexre $|x_i| = \|x\|_\infty$. Így

$$\begin{aligned} |(Ax)_i| &= \left|\sum_{l=1}^d a_{il}x_l\right| = \left|a_{ii}x_i + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^d a_{il}x_l\right| \geq \left||a_{ii}| \cdot |x_i| - \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^d |a_{il}| \cdot |x_l|\right| \geq \\ &\geq \left||a_{ii}| \cdot \|x\|_\infty - \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^d |a_{il}| \cdot \|x\|_\infty\right| = \|x\|_\infty \cdot k_i \geq \\ &\geq \|x\|_\infty \cdot \min\{k_i \in \mathbb{R} : \ i \in \{1, \ldots, d\}\}, \end{aligned}$$

innen pedig

$$\|Ax\|_\infty \geq \|x\|_\infty \cdot \min\{k_i \in \mathbb{R} : \ i \in \{1, \ldots, d\}\}$$

következik. ■

A $\operatorname{lub}_\varphi$ norma 1.3.96. feladatban megfogalmazott tulajdonságával több $\mathbb{K}^{d\times d}$-beli norma is rendelkezik. Ezzel kapcsolatos az

1.3.20. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$ esetén valamely $p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ normát **mátrixnormának** nevezünk, ha p **szubmultiplikatív**, azaz bármely $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ esetén

$$p(A \cdot B) \leq p(A) \cdot p(B).$$

1.3.26. példa.

1. Ha $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ norma, akkor lub_{φ} mátrixnorma (vö. 1.3.90 és 1.3.96. feladat).
2. A
$$\|A\|_c := d \cdot \sup\{|a_{kl}| \in \mathbb{R} : \; k,l \in \{1,\ldots,d\}\} \qquad (A \in \mathbb{K}^{d\times d})$$
kombinált norma mátrixnorma (vö. 1.3.14. gyakorló feladat).

1.3.99. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{Sp}\,(A^*A)} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{d} |a_{kl}|^2} \qquad (A \in \mathbb{K}^{d\times d})$$

Frobenius-norma mátrixnorma!

Útm. Ha $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (vö. 11.2. fejezet) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|A\cdot B\|_F^2 &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left|\sum_{i=1}^{d} a_{ki}b_{il}\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{d}|a_{ki}|^2\sum_{i=1}^{d}|b_{il}|^2\right) = \\ &= \left(\sum_{k,i=1}^{d}|a_{ki}|^2\right)\cdot\left(\sum_{i,l=1}^{d}|b_{il}|^2\right) = \\ &= \|A\|_F^2\cdot\|B\|_F^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.100. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d > 1$, akkor a

$$p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}, \qquad p(A) := \max\{|a_{kl}| \in \mathbb{R} : \; k,l \in \{1,\ldots,d\}\}$$

leképezés nem mátrixnorma!

Útm. p nem szubmultiplikatív, hiszen az

$$A := B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{mátrixokra} \qquad A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

de

$$p(A\cdot B) = 2 > 1 = p(A)\cdot p(B). \quad \blacksquare$$

1.3.101. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\|\cdot\|:\mathbb{K}^{d\times d}\to\mathbb{R}$ mátrixnorma, $R\in\mathbb{K}^{d\times d}$: $\det(R)\neq 0$, akkor a

$$\|A\|_T := \left\|A^T\right\|, \quad \text{ill. a} \quad \|A\|_R := \|R^{-1}\cdot A\cdot R\| \qquad (A\in\mathbb{K}^{d\times d})$$

függvény mátrixnorma!

Útm. Tetszőleges $A,B\in\mathbb{K}^{d\times d}$ esetén

$$\|A\cdot B\|_T = \left\|(A\cdot B)^T\right\| = \left\|B^T\cdot A^T\right\| \leq \left\|B^T\right\|\cdot\left\|A^T\right\| = \|A\|_T\cdot\|B\|_T,$$

ill.

$$\begin{aligned}\|A\cdot B\|_R &= \|R^{-1}\cdot A\cdot B\cdot R\| = \|\left(R^{-1}\cdot A\cdot R\right)\cdot\left(R^{-1}B\cdot R\right)\|\leq\\ &\leq \|R^{-1}\cdot A\cdot R\|_R\cdot\|R^{-1}B\cdot R\|_R =\\ &= \|A\|_R\cdot\|B\|_R. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.3.102. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathbb{K}^{d\times d},\varphi)$ normált tér, akkor alkalmas $\lambda\in(0,+\infty)$ esetén a $p:=\lambda\varphi$ leképezés mátrixnorma!

Útm. Világos, hogy p norma, ezért csak azt kell megmutatni, hogy p szubmultiplikatív. Mivel $\mathbb{K}^{d\times d}$ véges dimenziós, ezért valamely $\psi:\mathbb{K}^{d\times d}\to\mathbb{R}$ mártixnorma esetén van olyan $\alpha,\beta>0$ szám, hogy

$$\alpha\psi(A)\leq\varphi(A)\leq\beta\psi(A) \qquad (A\in\mathbb{K}^{d\times d}).$$

Mivel ψ szubmultiplikatív, ezért bármely $A,B\in\mathbb{K}^{d\times d}$ mátrixra

$$\varphi(AB)\leq\beta\psi(AB)\leq\beta\psi(A)\psi(B)\leq\frac{\beta}{\alpha^2}\varphi(A)\varphi(B).$$

Így a

$$\lambda:=\frac{\beta}{\alpha^2}, \qquad \text{ill.} \qquad p:=\lambda\varphi$$

választással

$$p(AB)=\lambda\varphi(AB)=\frac{\beta}{\alpha^2}\varphi(AB)\leq\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^2\varphi(A)\varphi(B)=\lambda\varphi(A)\lambda\varphi(B)=p(A)p(B). \quad \blacksquare$$

1.3.21. definíció. Az $A\in\mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix **spektrálsugarának** nevezzük a

$$\rho(A):=\max\{|\lambda_k|\in\mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,d\}\}$$

valós számot, ahol a $\lambda_1,\ldots,\lambda_d\in\sigma(A)$.

Ezért szokás a

$$\|A\|_2=\sqrt{\mu_{max}(A^*A)}=\sqrt{\rho(A^*A)} \qquad (A\in\mathbb{K}^{d\times d})$$

mátrixnormát **spektrálnormának** nevezni. Ha tehát A hermitikus, akkor $\|A\|_2=\rho(A)$.

1.3.103. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ normális mátrix (azaz alkalmas $U \in \mathbb{K}^{d\times d}$ unitér mátrix esetén U^*AU diagonálmátrix), akkor igaz a

$$\|A\|_2 = \sup\left\{\frac{\sqrt{x^*A^*Ax}}{\sqrt{x^*x}} \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \rho(A)$$

állítás!

Útm. Az első egyenlőséget már beláttuk (vö. 1.3.93. feladat útmutatója). Ha $U \in \mathbb{K}^{d\times d}$ olyan unitér mátrix, amelyre

$$U^*AU = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\},$$

ahol $0 \le \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \sigma(A)$, akkor a korábbiakhoz hasonlóan

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sup\left\{\frac{\sqrt{y^*U^*A^*UU^*AUy}}{\sqrt{y^*U^*Uy}} \in \mathbb{R}:\ Uy = x \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\sqrt{(\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}y)^*\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}y}}{\sqrt{y^*y}} \in \mathbb{R}:\ Uy = x \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{d}|\lambda_k|^2|y_k|^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}} \in \mathbb{R}:\ y \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} \le \\
&\le |\lambda_{max}| \cdot \sup\left\{\sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{d}|y_k|^2}} \in \mathbb{R}:\ y \in \mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \rho(A),
\end{aligned}$$

azaz $\|A\|_2 \le \rho(A)$, ahol

$$|\lambda_{max}| := \max\{|\lambda_k| \in \mathbb{R}:\ k \in \{1, \ldots, d\}\} = \rho(A).$$

Ha $u \in \mathbb{K}^d$ az A mátrix λ_{max} sajátértékéhez tartozó sajátvektora, azaz

$$Au = \lambda_{max}u \qquad \text{és így} \qquad u^*A^* = (AU)^* = (\lambda_{max}u)^* = \overline{\lambda_{max}}u^*,$$

akkor

$$\|A\|_2 \ge \frac{\sqrt{u^*A^*Au}}{\sqrt{u^*u}} = \frac{\overline{\lambda_{max}}u^*\lambda_{max}u}{\sqrt{u^*u}} = \sqrt{\overline{\lambda_{max}} \cdot \lambda_{max}} = |\lambda_{max}| = \rho(A). \quad \blacksquare$$

1.3.17. gyakorló feladat. Igaz-e, hogy bármely $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix esetén teljesül a

$$\|A\|_2 = \|A\|_F$$

egyenlőség?

Útm.

1.3.104. feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor teljesül a

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{d}\|A\|_2$$

egyenlőtlenségpár!

Útm. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből (vö. 11.2. fejezet)

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^{d}\left|\sum_{l=1}^{d} a_{kl}x_l\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{d}\left\{\left(\sum_{l=1}^{d}|a_{kl}|^2\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{d}|x_l|^2\right)\right\} = \|A\|_F^2 \cdot \|x\|_2^2 \qquad (x \in \mathbb{K}^d),$$

ahonnan $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ következik. Másrészt viszont

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \mathrm{Sp}\,(A^*A) = \sum_{i=1}^{d}\mu_i(A^*A) \leq \\
&\leq d\cdot\max\{\mu_i(A^*A) \in \mathbb{R} :\ i \in \{1,\ldots,d\}\} = d\cdot\rho(A^*A) = \\
&= d\cdot\|Ax\|_2^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.22. definíció. Azt mondjuk, hogy a $p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ mátrixnorma **illeszkedik** a $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ (vektor)normához, ha

$$\varphi(Ax) \leq p(A)\varphi(x) \qquad (A \in \mathbb{K}^{d\times d},\ x \in \mathbb{K}^d).$$

1.3.27. példa. Az 1.3.15. feladat, az 1.3.95/1. feladat, valamint az 1.3.104. feladat útmutatója, továbbá az 1.3.28. példa alapján látható, hogy

1. $\mathrm{lub}\,\varphi$ illeszkedik a φ normához,
2. $\|\cdot\|_c$, ill. $\|\cdot\|_o$ illeszkedik az $\|\cdot\|_1$ normához,
3. $\|\cdot\|_c$, ill. $\|\cdot\|_s$ illeszkedik a $\|\cdot\|_\infty$ normához,
4. $\|\cdot\|_c$, ill. $\|\cdot\|_F$ illeszkedik a $\|\cdot\|_2$ normához.

1.3.105. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, akkor van olyan $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ (vektor)norma, amelyhez p illeszkedik!

Útm. Ha

$$B : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^{d\times d}, \qquad B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\varphi(x) := p(B(x)) \qquad (x \in \mathbb{K}^d),$$

akkor φ nyilvánvalóan norma. Mivel tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix, ill. $x \in \mathbb{K}^d$ vektor esetén

$$B(Ax) = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{d} a_{1l}x_l & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{d} a_{dl}x_l & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = AB(x),$$

ezért

$$\varphi(Ax) = p(B(Ax)) = p(AB(x)) \leq p(A) \cdot p(B(x)) = p(A)\varphi(x). \quad \blacksquare$$

1.3.28. példa. A $\|\cdot\|_c$ mátrixnorma illeszkedik a $\|\cdot\|_\infty$ normához, hiszen a

$$B : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^{d\times d}, \qquad B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal, ha

$$\varphi(x) := \|(B(x))\|_c, \quad B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d),$$

akkor

$$\varphi(x) = d \cdot \sup\{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1, \dots, d\}\} = d \cdot \|x\|_\infty \qquad (x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d)$$

a $\|\cdot\|_c$-hez illeszkedő norma. $\blacksquare$

1.3.18. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}, \qquad p(A) := \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} |a_{kl}|$$

norma nem indukált norma, de mátrixnorma, majd adjunk meg hozzá illeszkedő $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ (vektor)normát!

Útm.

1.3.106. feladat. Igazoljuk, hogy ha $p : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, akkor fennáll a

$$\rho(A) \leq p(A) \qquad (A \in \mathbb{K}^{d\times d})$$

egyenlőtlenség!

Útm. Ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$, és valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ill. $u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{K}^d$ vektorra $Au = \lambda u$, azaz u az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor a

$$B := \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \ldots & u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_d & u_d & \ldots & u_d \end{bmatrix}$$

mátrixra $AB = \lambda B$, azaz

$$|\lambda| p(B) = p(\lambda B) = p(AB) \leq p(A)p(B),$$

hiszen p mátrixnorma. Mivel u sajátvektor, ezért $u \neq 0$, azaz B nem a zárusmátrix. Így $p(B) \neq 0$, ahonnan

$$|\lambda| \leq p(A)$$

következik. ■

Ha a

$$\varphi : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(A) := \rho(A)$$

leképezés mátrixnorma lenne, akkor $\rho(A)$ a mátrixnormák A-beli értékének infimuma volna. Azonban φ nem definit, hiszen pl. minden olyan A háromszögmátrix esetén, ahol a főátlóban 0-k vannak $\rho(A) = 0$ teljesül, így φ még csak nem is definit. Sok esetben azonban az iménti infimum megegyezik a spektrálsugárral. Valóban, ha A diagonalizálható, azaz alkalmas $D \in \mathbb{K}^{d\times d}$ reguláris mátrixszal

$$D^{-1}AD = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\},$$

akkor (vö. 1.3.101/2. feladat) nyilvánvalóan

$$\|D^{-1}AD\|_\infty = \rho(A)$$

teljesül.

1.3.107. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{M}$ a $\mathbb{K}^{d\times d}$-beli mátrixnormák halmaza, akkor tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mátrix esetén fennállnak a

$$\rho(A) = \inf\{\|A\| \in \mathbb{R} : \ \|\cdot\| \in \mathcal{M}\} = \inf\{\mathrm{lub}_{\varphi}(A) \in \mathbb{R} : \ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \text{ norma}\}$$

egyenlőségek!

Útm. Ha $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ és $T \in \mathbb{K}^{d\times d}$ olyan reguláris mátrix, hogy

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda_{d-1} & \sigma_{d-1} \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda_d \end{bmatrix},$$

ahol

$$\lambda_i \in \sigma(A) \quad (i \in \{1,\dots,d\}) \quad \text{és} \quad \sigma_1,\dots,\sigma_{d-1} \quad 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \quad \text{(Jordan-féle normálalak)},$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a

$$W_\varepsilon := \mathrm{diag}\{\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^d\}$$

mátrixra

$$W_\varepsilon^{-1}T^{-1}ATW_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon\sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda_{d-1} & \varepsilon\sigma_{d-1} \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda_d \end{bmatrix},$$

hiszen

$$W_\varepsilon^{-1} = \mathrm{diag}\{\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots, \varepsilon^{-d}\}.$$

Így, ha $B \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor a

$$\|B\|_\varepsilon := \|W_\varepsilon^{-1}T^{-1}ATW_\varepsilon\|_\infty$$

mátrixnorma esetén a $\sigma_d := 0$ választással

$$\|A\|_\varepsilon = \max\{|\lambda_i| + \varepsilon\sigma_i \in \mathbb{R} : \ i \in \{1,\dots,d\}\} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Ha most $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ a $\|\cdot\|_\varepsilon$-hoz illeszkedő norma, akkor az illeszkedés definíciójából

$$\rho(A) \leq \mathrm{lub}_{\varphi}(A) = \sup\left\{\frac{\varphi(Ax)}{\varphi(x)} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}\right\} \leq \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$$

adódik. ■

1.3.19. gyakorló feladat. Számítsuk ki az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében a

$$\|A\|_\infty, \qquad \|A\|_1, \qquad \|A\|_2, \qquad \|A\|_F$$

normákat, majd tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz adjunk meg olyan

$$\|\cdot\|_\varepsilon : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$$

normát, amelyre

$$\rho(A) \leq \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$$

teljesül!

Útm.

1.3.108. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ mátrixnorma és $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor

$$1 \leq \left\|(\lambda E - B)^{-1}(A - B)\right\| \leq \left\|(\lambda E - B)^{-1}\right\| \cdot \|A - B\|,$$

ahol λ az A mátrix olyan sajátértéke, amely nem sajátértéke B-nek!

Útm. Ha $u \in \mathbb{K}^d$ az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor $Au = \lambda u$, tehát

$$(A - B)u = (\lambda E - B)u.$$

Mivel λ nem sajátértéke B-nek, ezért $\lambda E - B$ reguláris, így

$$u = (\lambda E - B)^{-1}(A - B)u.$$

Ha $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ olyan norma, amelyik illeszkedik $\|\cdot\|$-hoz, akkor

$$\varphi(u) \leq \|(\lambda E - B)^{-1}(A - B)\|\varphi(u) \leq \|(\lambda E - B)^{-1}\| \cdot \|(A - B)\|\varphi(u).$$

Mivel u sajátvektor, ezért $\varphi(u) \neq 0$, és így

$$1 \leq \|(\lambda E - B)^{-1}(A - B)\| \leq \|(\lambda E - B)^{-1}\| \cdot \|A - B\|. \quad \blacksquare$$

1.3.109. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$A = [a_{kl}]_{k,l=1}^{d} \in \mathbb{K}^{d\times d}$$

és tetszőleges $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$r_i := \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d} |a_{ik}| \qquad \text{és} \qquad K_i := \{z \in \mathbb{K} : \ |z - a_{ii}| \leq r_i\} \qquad (\textbf{Gerschgorin-kör}\text{ök}),$$

akkor a

$$K := \bigcup_{i=1}^{d} K_i$$

halmazra $\sigma(A) \subset K$, azaz K tartalmazza az A mátrix összes sajátértékét!

Útm. Ha

$$A \in \mathbb{K}^{d\times d} \qquad \text{és} \qquad B := \operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{dd}\},$$

továbbá $\lambda \in \mathbb{K}$ az A olyan sajátértéke, amelyre

$$\lambda \neq a_{ii} \qquad (i \in \{1, \ldots, d\}),$$

akkor (vö. 1.3.108. feladat)

$$1 \quad \leq \quad \operatorname{lub}_\infty((\lambda E - B)^{-1}(A - B)) = \max\left\{\frac{1}{|\lambda - a_{ii}|} \cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{d} |a_{ik}| \in \mathbb{R} : \ i \in \{1, \ldots, d\}\right\} =$$

$$= \quad \frac{1}{|\lambda - a_{jj}|} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} |a_{jk}|,$$

ahol $j \in \{1, \ldots, d\}$ az az index, amelyre maximum lesz. Ekkor

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{d} |a_{jk}| =: r_j.$$

Így λ a K_j körben van. ■

1.3.29. példa. Az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$K_1 = \{z \in \mathbb{K} : \; |z-1| \leq 0.2\}, \qquad K_2 = \{z \in \mathbb{K} : \; |z-2| \leq 0.4\},$$

ill.

$$K_3 = \{z \in \mathbb{K} : \; |z-3| \leq 0.2\}$$

(vö. 1.3.1. ábra). Így az A mátrix minden sajátértéke a

$$K := K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

halmazban van. Mivel a K_1, K_2, ill. K_3 körök diszjunktak, ezért A-nak mindegyikben pontosan egy sajátértéke van. Sőt, az is látszik, hogy A reguláris, hiszen $0 \notin K$.

A Gerschgorin-körök egy részének sugara sok esetben csökkenthető azáltal, ha az 1.3.109. feladatbeli állítást az A mátrix helyett a $T^{-1}AT$ mátrixra alkalmazzuk, ahol T alkalmasan megválasztott diagonális mátrix.

1.3.30. példa. Az

$$A := \begin{bmatrix} 1+\imath & 2\imath & \imath/2 \\ 1/2 & 4 & \imath/2 \\ 1/2 & 1/2 & 6+\imath \end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$r_1 = 2.5, \qquad r_2 = r_3 = 1$$

(vö. 1.3.2. ábra). Ha

$$T := \operatorname{diag}\{1, 1/2, 1/2\},$$

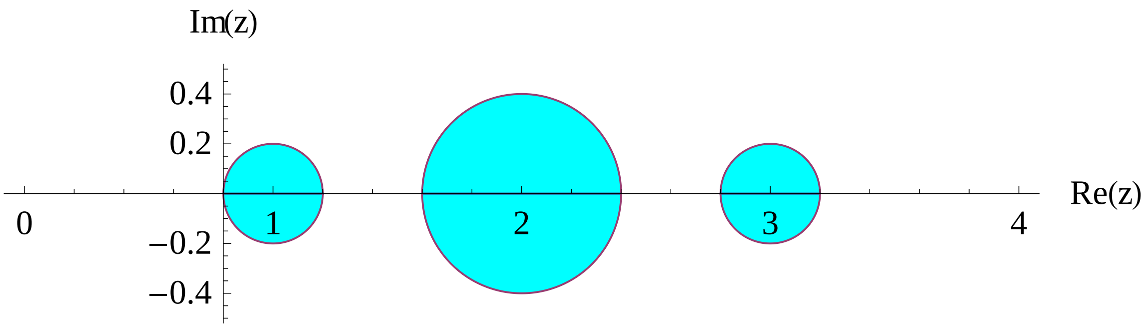
akkor a

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1+\imath & \imath & \imath/4 \\ 1 & 4 & \imath/2 \\ 1 & 1/2 & 6+\imath \end{bmatrix}$$

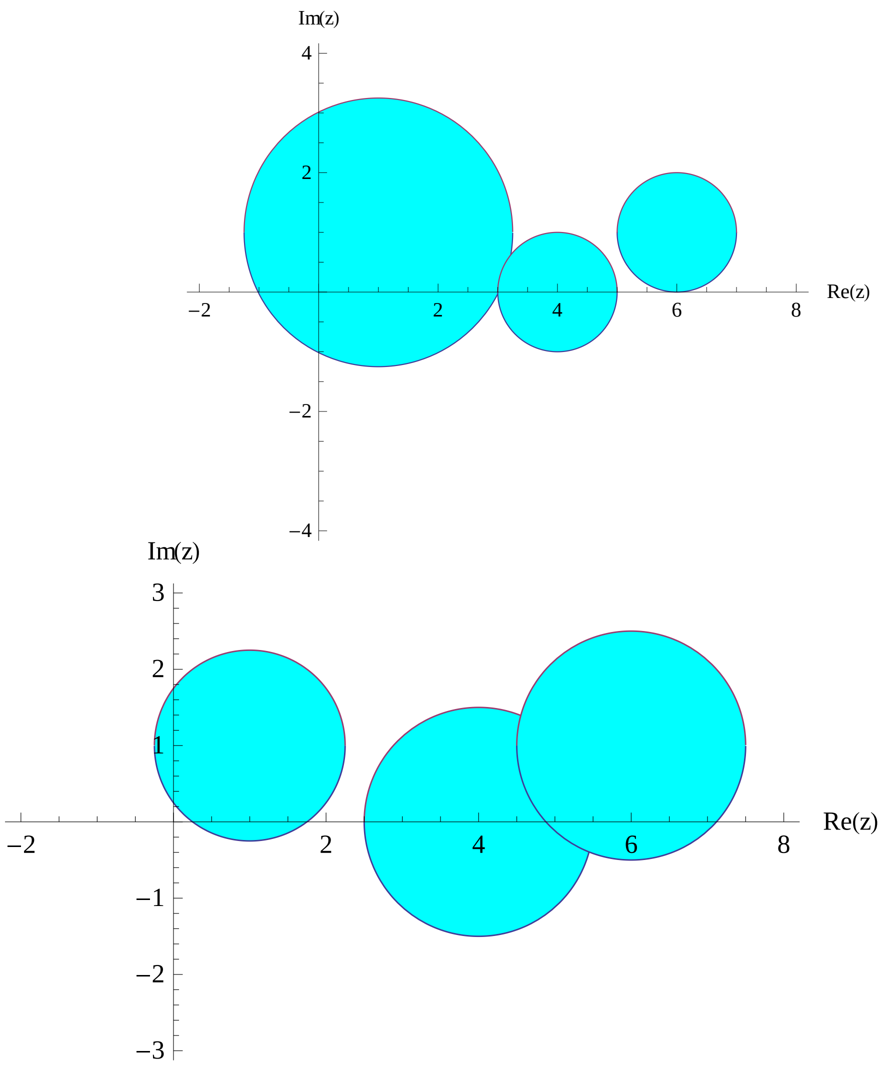
mátrix esetén a megfelelő körök sugarai:

$$r_1 = 1.25, \qquad r_2 = r_3 = 1.5$$

(vö. 1.3.2. ábra felülső része). Tehát az egyik kör sugara csökkent, a másik kettőé viszont növekedett. Mivel A-nak és $T^{-1}AT$-nek ugyanazok a sajátértékei, az 1.3.2. ábra alulsó részén látható, hogy $0 \notin \sigma(A)$, azaz A reguláris.



1.3.1. ábra.



1.3.2. ábra.

1.3.4. Banach-terek

1.3.110. feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in [1, +\infty)$, akkor a $(\mathfrak{C}[0,2], \|\cdot\|_p)$ normált térben az

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & (x \in [0,1]), \\ \\ 1 & (x \in (1,2]) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-sorozat!

Útm. Bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ esetén

$$\|f_m - f_n\|_p^p = \int_0^1 |x^m - x^n|^p \, dx \leq \int_0^1 x^{mp} \, dx = \frac{1}{mp+1} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Mivel minden norma metrikát indukál, felvetődik a kérdés, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén teljes-e az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, ahol $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Ezzel kapcsolatos az

1.3.23. definíció. Valamely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált teret **teljes normált tér**nek vagy **Banach-tér**nek nevezünk, ha az $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ metrikus tér teljes, azaz

$$(x_n \in \mathcal{X} \ (n \in \mathbb{N}), \ \|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty)) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, \alpha \in \mathcal{X} : \ \lim(x_n) = \alpha.$$

1.3.1. példák.

1. Bármely $p \in [1, +\infty]$ esetén $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$ Banach-tér, hiszen véges-dimenziós.
2. A $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes (vö. 1.2.3/1. ill. 1.2.52. feladat).
3. Az $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ normált tér teljes (vö. 1.2.53. feladat).
4. A $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes (vö. 1.2.54. feladat).

A harmadik példában megfogalmazott állítás az 1.2.51. feladatot követő megjegyzés értelmében, ill. a 1.3.31. és a 1.3.32. feladatok fényében azt jelenti, hogy

$$(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty), \qquad \text{ill.} \qquad (\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$$

Banach-tér.

1.3.111. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$l_1 := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

és

$$\|x\|_1 := \|x\|_{l_1} := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad (x \in l_1),$$

akkor $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ Banach-tér!

Útm. Az abszolútérték tulajdonságai következtében világos, hogy $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ normált tér, így már csak azt kell belátni, hogy teljes. Ha az $(x^{(n)}) = (x_k^{(n)})$ sorozat Cauchy sorozat $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$-ben, akkor $l_1 \subset l_\infty$, ill. a

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup\{|x_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{N}\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_{l_1} \qquad (x = (x_k) \in l_1)$$

becslés következtében $(x^{(n)})$ Cauchy-sorozat $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$-ben is. Mivel $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ teljes normált tér (vö. 1.3.1/2. példa), ezért alkalmas $x = (x_k) \in l_\infty$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_{l_\infty} = 0.$$

Azt kell tehát már csak megmutatni, hogy

$$x \in l_1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_{l_1} = 0.$$

Mivel $(x^{(n)})$ Cauchy-sorozat $(l_1, \|\cdot\|_1)$-ben, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_{l_1} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}),$$

és

$$\lim_{m\to\infty} \left\|x^{(m)} - x\right\|_{l_\infty} = 0$$

következtében bármely $M \in \mathbb{N}$-hez van olyan $m_M \in \mathbb{N}$, hogy bármely $m_M \leq m \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left\|x^{(m)} - x\right\|_{l_\infty} < \frac{1}{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így adott $M \in \mathbb{N}$ esetén, ha $N \leq n \in \mathbb{N}$, ill. $m_M \leq m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \left|x_k^{(n)} - x_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{M} \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| + \sum_{k=1}^{M} \left|x_k^{(m)} - x_k\right| \leq \\
&\leq \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_{l_1} + M \left\|x^{(m)} - x\right\|_{l_\infty} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} : \qquad \left(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)} - x_k\right| < \varepsilon\right)$$

következik. Ezért bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $x^{(n)} - x \in l_1$, ami $x^{(n)} \in l_1$ miatt azt is jelenti, hogy

$$x = x^{(n)} - \left(x^{(n)} - x\right) \in l_1.$$

Továbbá $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left\|x^{(n)} - x\right\|_{l_1}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

1.3.20. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$l_2 := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

és

$$\|x\|_2 := \|x\|_{l_2} := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \qquad (x \in l_2),$$

akkor $(l_2, \|\cdot\|_{l_2})$ Banach-tér!

Útm.

1.3.112. feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{BV}[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{BV}[a,b]})$ Banach-tér (vö. 1.3.8. feladat)!

Útm. Mivel (vö. 1.3.8. feladat útmutatója) $\mathfrak{BV}[a,b]$ altér $\mathcal{K}([a,b],\mathbb{R})$-ben, bármely $f \in \mathfrak{BV}[a,b]$ esetén $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathfrak{BV}}$, továbbá $(\mathcal{K}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ teljes tér (vö. 1.2.52. feladat), ezért ha (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{BV}[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{BV}[a,b]})$-ben, akkor Cauchy-sorozat $(\mathcal{K}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$-ben is, azaz alkalmas $f \in \mathcal{K}([a,b],\mathbb{R})$ esetén

$$\lim(\|f - f_n\|_\infty) = 0.$$

Azt kell tehát már csak megmutatni, hogy

$$f \in \mathfrak{BV}[a,b] \qquad \text{és} \qquad \lim(\|f - f_n\|_{\mathfrak{BV}}) = 0.$$

Ha

$$\tau := \left\{ (x_0, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \ k \in \mathbb{N},\ a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k = b \right\},$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén (vö. 1.3.4. definíció)

$$V_a^b(f_m - f_n) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} |(f_m(x_j) - f_n(x_j)) - (f_m(x_{j-1}) - f_n(x_{j-1})| \in \mathbb{R} : \ (x_0, \ldots, x_k) \in \tau \right\}.$$

Így, mivel (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{BV}[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{BV}[a,b]})$-ben, és bármely $h \in \mathfrak{BV}[a,b]$ esetén

$$V_a^b(h) \leq \|h\|_{\mathfrak{BV}},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_m(x_j) - f_n(x_j)) - (f_m(x_{j-1}) - f_n(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N},\ (x_0, \ldots, x_k) \in \tau).$$

Ezért, ha $(x_0, \ldots, x_k) \in \tau$, akkor

$$\lim(\|f - f_n\|_\infty) = 0$$

miatt az $\dfrac{\varepsilon}{4k} > 0$ számhoz van olyan olyan $n_k \in \mathbb{N}$ index, hogy ha $n_k \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4k},$$

ill.

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_n(x_j) - f(x_j)) - (f_n(x_{j-1}) - f(x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |(f_n(x_j) - f_{n_k}(x_j)) - (f_n(x_{j-1}) - f_{n_k}(x_{j-1}))| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} |(f_{n_k}(x_j) - f(x_j)) - (f_{n_k}(x_{j-1}) - f(x_{j-1}))| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{j=1}^{k} \|f_{n_k} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + 2k\frac{\varepsilon}{4k} = \varepsilon,$$

ahonnan

$$V_a^b(f_n - f) \leq \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$f_n - f \in \mathfrak{BV}[a, b].$$

Innen pedig az következik, hogy

$$f = f_n - (f_n - f) \in \mathfrak{BV}[a, b].$$

Mivel

$$\lim \left(V_a^b(f_n - f)\right) = 0,$$

ezért

$$\lim\left(|f_n(a) - f(a)|\right) = 0 \qquad /(\lim(\|f - f_n\|_\infty) = 0)/\,,$$

így

$$\lim\left(\|f - f_n\|_{\mathfrak{BV}}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

1.3.113. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$\mathcal{X} := \left\{f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \; f^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] \text{ korlátos halmaz}\right\},$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem teljes!

Útm. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & (|x| \leq n), \\ \\ 0 & (|x| > n), \end{cases}$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ esetén

- $|f_n(x)| \leq 1 \; (x \in \mathbb{R})$;
- $|f_n(x)| \neq 0 \Longrightarrow |x| \leq n$;

- $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+m^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Ez azt jelenti, hogy az (f_n) függvénysorozat minden egyes tagja korlátos:

$$f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$f_n^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] \subset [-n, n], \qquad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{1+m^2}.$$

Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy $\dfrac{1}{1+N^2} < \varepsilon$, ezért, ha $n \in \mathbb{N}$: $n \geq N$, akkor

$$\|f_n - f_N\|_\infty \leq \frac{1}{1+N^2} < \varepsilon,$$

azaz (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$-ban. Ha (f_n) konvergens lenne $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$-ban, akkor alkalmas $f \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lim(f_n(x)) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesülne. Azonban bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq |x|$ esetén

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

így

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami azt jelenti, hogy $f^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] = \mathbb{R}$, azaz $f \notin \mathcal{X}$. ■

Tudjuk (vö. 1.2.55. feladat), hogy a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes. Az alábbiakban belátjuk, hogy a simaság fokának növekedésével a $\|\cdot\|_\infty$ normában sem kapunk teljességet.

1.3.114. feladat. Mutassuk meg, hogy a $(\mathfrak{C}^1[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem teljes!

Útm. Az

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \left(x \in \left[-1, -\dfrac{1}{n}\right]\right), \\ nx & \left(x \in \left[-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right]\right), \\ 1 & \left(x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [-1,1])$$

függvénysorozat Cauchy-sorozat a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_1)$ normált térben, hiszen bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $k := \min\{m, n\}$, ill. $x \in [-1,1]$ esetén

$$|f_n(x)| \leq 1$$

és

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{k}}^{-\frac{1}{k}} |f_m(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x,$$

így
$$\|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{4}{k}.$$
Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in [-1{,}1]$ esetén
$$\varphi_n(x) := \int_{-1}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
akkor
$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \leq \int_{-1}^{x} |f_m(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f_m - f_n\|_1 \qquad (m, n \in \mathbb{N},\ x \in [-1{,}1]),$$
így
$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_\infty \leq \|f_m - f_n\|_1 \qquad (m, n \in \mathbb{N}),$$
azaz (φ_n) Cauchy-sorozat a $(\mathfrak{C}^1[-1{,}1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. Ez azt jelenti (vö. 1.2.28. feladat), hogy alkalmas $g \in \mathfrak{C}[-1{,}1]$ függvény esetén
$$\varphi_n \rightrightarrows g \qquad (n \to \infty).$$
Ha
$$h : [-1{,}1] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := \begin{cases} -1 & (x \in [-1{,}0)), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x \in (0{,}1]), \end{cases}$$
akkor
$$g(x) = \int_{-1}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [-1{,}1]).$$
Így a g függvényre
$$g \notin \mathfrak{C}^1[-1{,}1]. \quad \blacksquare$$

1.3.21. gyakorló feladat. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ esetén adjunk meg olyan (f_n) függvénysorozatot, amely a $(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben Cauchy-sorozat, de nem konvergens!

Útm.

1.3.115. feladat. Igazoljuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}_0$, és
$$\mathfrak{C}^k[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ f\ k\text{-szor folytonosan deriválható}\},$$
ill.
$$\|f\|_{\mathfrak{C}^k[a,b]} := \sum_{\nu=0}^{k} \max\left\{\left|f^{(\nu)}(x)\right| \in \mathbb{R} :\ x \in [a,b]\right\} \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$
akkor $\left(\mathfrak{C}^k[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^k[a,b]}\right)$ Banach-tér!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy a

$$\|f\| := \sum_{\nu=1}^{k} \|f\|_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \max\left\{|f^{(\nu)}(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\right\} \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

leképezés norma (vö. 1.3.10. feladat).

2. lépés. A $k=0$ esetben az állítás ismert (vö. 1.2.54. feladat). Ha $k=1$ és (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|)$-ban, akkor $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_1$ definíciója miatt

$$(f_n) = (f_n^{(0)}) \qquad \text{és} \qquad (f_n') = (f_n^{(1)})$$

Cauchy-sorozatok a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben. Így alkalmas $f, g \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{és} \qquad \|f_n' - g\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$(f_n) \rightrightarrows f \qquad \text{és} \qquad (f_n') \rightrightarrows g \qquad (n \to \infty),$$

ahonnan $f \in \mathfrak{D}[a,b]$ és $f' = g$ következik. Így $f \in \mathfrak{C}^1[a,b]$ és

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nagyobb k-kra az állítás indukcióval látható be. ■

1.3.116. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$p(f) := |f(a)| + \|f'\|_\infty \qquad (f \in \mathfrak{C}^1[a,b]),$$

akkor $(\mathfrak{C}^1[a,b], p)$ Banach-tér!

Útm.

1. lépés. Nyilvánvaló, hogy

$$p_1(f) := |f(a)|, \quad p_2(f) := \|f'\|_\infty \qquad (f \in \mathfrak{C}^1[a,b])$$

félnorma. Így (vö. 1.3.4. feladat) p félnorma a $\mathfrak{C}^1[a,b]$ vektortéren. Ha valamely $f \in \mathfrak{C}$ esetén $p(f) = 0$, akkor

$$f(a) = 0, \qquad f' = \widehat{0}|_{[a,b]},$$

így f állandófüggvény, pontosabban $f = \widehat{0}|_{[a,b]}$. Tehát p norma $\mathfrak{C}^1[a,b]$-n.

2. lépés. Ha (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{C}^1[a,b], p)$-ben, akkor $(f_n(a))$ Cauchy-sorozat $(\mathbb{R}, |\cdot|)$-ban és (f_n') Cauchy-sorozat $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$-ben. Mindkét tér teljes, így ezek a sorozatok konvergensek. Az elemi analízisből ismert, hogy $(f - f_n)$ egyenletesen konvergens, továbbá az $f := \lim(f_n)$ határfüggvényre $f \in \mathfrak{D}$,

$$f'(x) = \lim(f_n'(x)) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül. Így, ha

$$g := \lim(f_n'), \qquad \text{akkor} \qquad f' = g \in \mathfrak{C}[a,b] \qquad \text{és} \qquad (\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)\text{-ben } \lim(f_n') = f',$$

ahonnan $f \in \mathfrak{C}^1[a,b]$ és

$$p(f_n - f) = |f_n(a) - f(a)| + \|f_n' - f'\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $(\mathfrak{C}^1[a,b], p)$-ben $\lim(f_n) = f$. ■

1.3.117. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.3.1. házi feladatbeli $(\mathcal{P}, p)$ normált tér nem Banach-tér!

Útm. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f_n \in \mathcal{P} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan Cauchy-sorozat, amely nem konvergens a $(\mathcal{P}, p)$ normált térben, hiszen

- ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$p(f_m - f_n) = p\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\mathrm{id}^k}{k!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to 0),$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \exp \notin \mathcal{P}$. ■

Az is könnyen belátható, hogy ha p tetszőleges norma $\mathcal{P}$-n, akkor a $(\mathcal{P}, p)$ normált tér nem Banach-tér. Ha

$$\Pi_n := \{f \in \mathcal{P} : \ \mathrm{Grad}\,(f) \leq n\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n,$$

így a Baire-tétel (vö. 1.2.65. feladat) következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, $g \in \Pi_N$, valamint $\varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(g) \subset \Pi_N$. Ha

$$h(x) := x^{N+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az

$$f := g + \varepsilon \frac{h}{2p(h)},$$

polinomra

$$p(f - g) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

teljesül, így ugyan $f \in K_\varepsilon(g)$, de $f \notin \Pi_N$.

1.3.118. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ $(p \in [1,+\infty])$ jelöli az 1.3.3. házi feladatban bevezetett szorzatteret, úgy $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ pontosan akkor Banach-tér, ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is Banach-tér!

Útm. A $p = +\infty$ esetet vizsgáljuk csak, a többi p-re ehhez hasonlóan érvelhetünk.

1. lépés. Ha $(x_n, y_n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ $(n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat, akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}} &\leq \max\{\|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}}, \|y_m - y_n\|_{\mathcal{Y}}\} = \|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\|_\infty, \\ \|y_m - y_n\|_{\mathcal{Y}} &\leq \max\{\|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}}, \|y_m - y_n\|_{\mathcal{Y}}\} = \|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\|_\infty, \end{aligned}$$

így (x_n), ill. (y_n) Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ban, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban. A teljesség következtében így alkalmas $x \in \mathcal{X}$, ill. $y \in \mathcal{Y}$ elemmel

$$\lim(x_n) = x, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(y_n) = y.$$

Innen

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_\infty = \max\{\|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}}, \|y_m - y_n\|_{\mathcal{Y}}\} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_\infty)$ teljes.

2. lépés. Ha az $(x_n, 0) \in \mathcal{X} \times \{0\} \cong \mathcal{X}$ sorozat konvergens és $\lim(x_n, 0) = (x, y)$, akkor

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} = \|0 - y\|_{\mathcal{Y}} \leq \|(x_n, 0) - (x, y)\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\mathcal{X} \times \{0\} \cong \mathcal{X}$ zárt, és így teljes is. Az $\mathcal{Y} \times \{0\} \cong \mathcal{Y}$ zártsága hasonlóan bizonyítható. ■

1.3.119. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.3.23. feladatbeli $\left(\mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1], \|f\|_{0,\alpha}\right)$ normált tér teljes!

Útm. Ha

$$f_n \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, akkor

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f_n\|_{0,\alpha} \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

(vö. 1.3.23. feladat) miatt (f_n) Cauchy-sorozat $\mathfrak{C}[0,1]$-ben, így (vö. 1.2.28. feladat) alkalmas $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre

$$f_n \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

Az is könnyen belátható, hogy

$$|f_n - f|_{0,\alpha} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Mivel a Cauchy-sorozatok korlátosak, ezért alkalmas $K > 0$ esetén $|f_n|_{0,\alpha} < K$. Mivel bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|f_m - f_n| < \varepsilon \qquad (N \leq m \leq n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\begin{aligned}
|f_n|_{0,\alpha} &\leq |f - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} = \\
&= \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \leq \\
&\leq \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} \sup_{x\neq y} \frac{|f_m(x) - f_n(x) - f_m(y) + f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} = \\
&= \sup_{x\neq y} \lim_{m\to\infty} |f_m - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \leq \\
&\leq \lim_{m\to\infty} |f_m - f_n|_{0,\alpha} + |f_n|_{0,\alpha} \leq \\
&\leq \varepsilon + K < +\infty. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Az 1.3.43. feladatból látható hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor benne minden abszolút konvergens sor konvergens. Az alábbi feladatban megmutatjuk, hogy az állítás megfordítása is igaz.

1.3.120. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és az $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatból képzett sorra igaz a

$$\sum(x_n) \quad \text{abszolút konvergens} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum(x_n) \quad \text{konvergens}$$

implikáció, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér!

Útm. Ha

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, akkor alkalmas (ν_n) indexsorozattal

$$\|x_{\nu_{n+1}} - x_{\nu_n}\| < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így az

$$x_{\nu_1} + \sum_{n=1} (x_{\nu_{n+1}} - x_{\nu_n})$$

sor abszolút konvergens, és a feltétel alapján konvergens is. Ez azt jelenti, hogy a részletösszegek

$$s_n = x_{\nu_1} + \sum_{k=1}^{n} (x_{\nu_{k+1}} - x_{\nu_k}) = x_{\nu_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozata konvergens:

$$\lim(s_n) = \lim(x_{\nu_n}) =: \alpha \in \mathcal{X}.$$

Így (vö. 1.2.37. feladat) (x_n) konvergens, és persze $\lim(x_n) = \alpha$. $\blacksquare$

Megfogalmazható tehát az

1.3.1. tétel. Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér pontosan akkor teljes, ha igaz a

$$\sum(\|x_n\|) \quad \text{konvergens} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum(x_n) \quad \text{konvergens}$$

implikáció.

Megjegyezzük, hogy az 1.2.51. feladat utáni megjegyzés Banach-terekre is érvényes, azaz ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ pedig altér, akkor $(\mathcal{A}, \|\cdot\||_{\mathcal{A}})$ pontosan akkor Banach-tér, ha $\mathcal{A}$ zárt $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ben. Így (vö. 1.3.75. feladat utáni megjegyzés) valamely Banach-tér bármely véges dimenziós altere zárt.

1.3.121. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(H, \mathcal{G})$ topologikus tér,

$$\mathfrak{C}(H) := \mathfrak{C}(H, \mathbb{K}) := \{f : H \to \mathbb{K} : \ f \in \mathfrak{C}\},$$

akkor $\mathfrak{C}(H) \cap \mathcal{K}(H)$ zárt halmaz a $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben!

Útm. Ha (f_n) Cauchy- sorozat a

$$(\mathfrak{C}(H) \cap \mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$$

normált térben, akkor $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$ teljessége (vö. 1.2.52. feladat) következtében alkalmas $f \in \mathcal{K}(H)$ függvényre

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty) = 0,$$

azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in H\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ha $a \in H$, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$-ból egy olyan $K_n(a)$ környezet léte következik, amelyre

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (x \in K_n(a))$$

igaz. Így bármely $x \in K_n(a)$ esetén

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \leq \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \leq \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f - f_n\|_\infty = \\
&= 2 \cdot \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)|,
\end{aligned}$$

azaz

$$|f(x) - f(a)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad (x \in K_n(a)),$$

ahonnan f folytonossága következik. ■

Mivel a fenti halmaz altér is egyben, ez azt jelenti, hogy $(\mathfrak{C}(H)\cap\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér.

1.3.122. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f \text{ folytonos és } \lim_{\pm\infty} f = 0 \right\}$$

akkor $(\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér!

Útm. Ha $f\in\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$, akkor alkalmas $0<\alpha<\beta$ számokkal $f|_{(-\infty,\alpha)}$ és $f|_{(\beta,+\infty)}$ korlátos függvények. Az f folytonossága miatt $f|_{[\alpha,\beta]}$ is korlátos, ezért $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})\subset\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a szokásos műveletekkel a $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ vektortér, $\mathcal{K}(\mathbb{R})$-nek altere. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ zárt $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$-ban. Innen már következik, hogy $(\mathfrak{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ Banach-tér (vö. 1.2.51. feladat utáni megjegyzés).

- Ha az $f\in\mathcal{K}(\mathbb{R})$ függvényre $f\in\overline{\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})}$, akkor alkalmas $f_n\in\mathfrak{C}_0(\mathbb{R})$ függvénysorozattal

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty) = 0.$$

- Ha $a>0$, akkor

$$\lim\left(\left\|f_n|_{[-a,a]} - f|_{[-a,a]}\right\|\right) = 0.$$

  Mivel $\mathfrak{C}[-a,a]$ zárt $(\mathcal{K}[-a,a], \|\cdot\|_\infty)$-ben, ezért

$$f|_{[-a,a]}\in\mathfrak{C}[-a,a].$$

  Ez $a>0$ tetszőleges volta miatt azt jelenti, hogy f folytonos.

- $\lim\limits_{-\infty} f = 0$, hiszen

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty) = 0$$

  következtében tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N\leq n\in\mathbb{N}).$$

  Mivel

$$\lim_{-\infty} f_N = 0,$$

  ezért alkalmas $\delta>0$ számmal

$$|f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x\in(-\infty,-1/\delta))\,.$$

  Így bármely $x\in\mathbb{R}$, $x<-\dfrac{1}{\delta}$ esetén

$$|f(x)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)|\leq\|f_N - f\|_\infty + |f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

  A

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

  állítás hasonlóan látható be. ■

1.3.123. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$, ill. $(\mathcal{Y}, q)$ izometrikusan izomorf normált terek, akkor $(\mathcal{X}, p)$ pontosan akkor Banach-tér, ha $(\mathcal{Y}, q)$ is Banach-tér!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

izometrikus izomorfizmus és (x_n) Cauchy-sorozat $\mathcal{X}$-ben, akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$q(\varphi(x_m) - \varphi(x_n)) = q(\varphi(x_m - x_n)) = p(x_m - x_n).$$

Így, ha $(\varphi(x_n))$ Cauchy-sorozat $\mathcal{Y}$-ban, akkor $(\mathcal{Y}, q)$ teljességéből következik, hogy alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ esetén

$$\lim(\varphi(x_n)) = y.$$

Ezért, ha

$$x := \varphi^{-1}(y),$$

akkor

$$p(x_n - x) = q(\varphi(x_n) - \varphi(x)) = q(\varphi(x_n) - y) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ahonnan $\lim(x_n) = x$ kövezkezik. Tehát $(\mathcal{X}, p)$ Banach-tér.

2. lépés. Ha $(\mathcal{X}, p)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{Y}, q)$ is Banach-tér, hiszen φ^{-1} is izometrikus izomorfizmus. ∎

1.3.124. feladat. Igazoljuk, hogy az ún. korlátos részletösszegek (ang. *bounded series*)

$$\mathfrak{bs} := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty \right\}$$

vektortere a

$$\|x\|_{\mathfrak{bs}} := \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad (x = (x_n) \in \mathfrak{bs})$$

normával ellátva Banach-tér!

Útm. Ha

$$\varphi : \mathfrak{bs} \to l_\infty, \qquad \varphi(x) := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

akkor

$$\|x\|_{\mathfrak{bs}} = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\} = \|\varphi(x)\|_{l_\infty} \qquad (x \in \mathfrak{bs}),$$

továbbá φ triviálisan lineáris. A φ leképezés szürjektív is, hiszen ha $y = (y_k) \in l_\infty$, akkor az

$$x_1 := y_1, \qquad x_k := y_k - y_{k-1} \quad (2 \leq k \in \mathbb{N})$$

sorozatra tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = y_1 + \sum_{k=2}^{n}(y_k - y_{k-1}) = y_1 + \sum_{k=2}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n-1} y_k = y_n,$$

és így

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty,$$

azaz

$$(x_n) = x \in \mathfrak{bs} \qquad \text{és} \qquad \varphi(x) = y. \quad \blacksquare$$

1.3.125. feladat. Igazoljuk, hogy az ún. **összegezhető sorozat**ok (ang. *convergent series*)

$$\mathfrak{cs} := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{c} \right\}$$

vektortere a

$$\|x\|_{\mathfrak{cs}} := \|x\|_{\mathfrak{bs}} \qquad (x \in \mathfrak{cs})$$

normával ellátva Banach-tér!

Útm. Az 1.3.124. feladatbeli érveléshez hasonlóan ez is könnyen belátható, ha $\mathfrak{bs}$ helyett $\mathfrak{cs}$-t, ill. l_∞ helyett $\mathfrak{c}_o$-at írunk. $\blacksquare$

1.3.126. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mathfrak{cs}_o := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{c}_o \right\}$$

vektortér a

$$\|x\|_{\mathfrak{cs}_o} := \|x\|_{\mathfrak{bs}} \qquad (x \in \mathfrak{cs}_o)$$

normával ellátva Banach-tér!

Útm. Az 1.3.125. feladatbeli állítás speciális esete. $\blacksquare$

1.3.127. feladat. Igazoljuk, hogy a **korlátos változású sorozat**ok

$$\mathfrak{bv} := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \; |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| < +\infty \right\}$$

vektortere a

$$\|x\|_{\mathfrak{bv}} := |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \qquad (x = (x_n) \in \mathfrak{bv})$$

normával ellátva Banach-tér!

Útm. Ha $x_0 := 0$ és

$$\varphi : \mathfrak{bv} \to l_1, \qquad \varphi(x) := (x_k - x_{k-1})_{k\in\mathbb{N}},$$

akkor

$$\|x\|_{\mathfrak{bv}} = |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| = \|\varphi(x)\|_{l_1} \qquad (x \in \mathfrak{bv}),$$

továbbá φ triviálisan lineáris. A φ leképezés szürjektív is, hiszen ha $y = (y_k) \in l_1$, akkor az

$$x_0 := 0, \qquad x := (x_n), \qquad x_n := \sum_{k=1}^{n} y_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x_n - x_{n-1} = y_n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < +\infty,$$

és így

$$x \in \mathfrak{bv} \qquad \text{és} \qquad \varphi(x) = y. \quad \blacksquare$$

1.3.128. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathfrak{C}_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \in \mathfrak{C},\ f(x + 2\pi) \equiv f(x)\},$$

akkor $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi} := \{f \in \mathfrak{C}[-\pi, \pi] : \ f(-\pi) = f(\pi)\},$$

akkor $(\widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ zárt, így teljes altere a $(\mathfrak{C}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térnek. Ha

$$f_n \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in \mathfrak{C}[-\pi, \pi] \qquad (n \to \infty),$$

teljesül, akkor (f_n) egyenletesen – és így pontonként is – konvergens függvénysorozat. Így, ha

$$f_n \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$f(-\pi) = \lim(f_n(-\pi)) = \lim(f_n(\pi)) = f(\pi),$$

azaz $f \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}$, ahonnan a $(\widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ altér zártsága már következik.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$, ill. $(\widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ izometrikusan izomorf normált terek. A

$$\varphi(f) := f|_{[-\pi,\pi]} \qquad (f \in \mathfrak{C}_{2\pi})$$

leképezés

- értékkészlete részhalmaza $\widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}$-nek, ui. bármely $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén
$$f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi),$$
továbbá φ nyilvánvalóan lineáris.
- injektív, hiszen f 2π-periodicitása miatt $\varphi(f) := f|_{[-\pi,\pi]} = 0$-ból $f = 0$ következik.
- szürjektív, hiszen ha $g \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{2\pi}$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g|_{(-\pi,\pi]}$ függvény 2π-periodikus kiterjesztése, akkor $f \in \mathfrak{C}(-\pi, \pi]$, de f folytonos $-\pi$-ben (és így egész $\mathbb{R}$-en is), ui. ha az $x_n \in (-3\pi, \pi]$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra $\lim(x_n) = -\pi$ és (ν_n), ill. (μ_n) olyan indexsorozat, amelyre $x_{\nu_n} \leq -\pi$, ill. $x_{\mu_n} > -\pi$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor
$$f(x_{\nu_n}) = f(x_{\nu_n} + 2\pi) = g(x_{\nu_n} + 2\pi) \longrightarrow g(\pi) \qquad (n \to \infty),$$
ill.
$$f(x_{\mu_n}) = g(x_{\mu_n}) \longrightarrow g(-\pi) \qquad (n \to \infty),$$
továbbá
$$g(-\pi) = g(\pi) = f(\pi) = f(\pi - 2\pi) = f(-\pi), \qquad \text{azaz} \qquad \lim(f(x_n)) = f(-\pi);$$
ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ és $\varphi(f) = f|_{[-\pi,\pi]} = g$.
- normatartó, hiszen
$$\begin{aligned}\|\varphi(f)\|_\infty &= \|f|_{[-\pi,\pi]}\|_\infty = \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [-\pi, \pi]\} = \\ &= \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\} = \|f\|_\infty \qquad (f \in \mathfrak{C}_{2\pi}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.3.129. feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in [1, +\infty)$, továbbá
$$l_p := \left\{ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$
és
$$\|x\|_p := \|x\|_{l_p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p),$$
akkor $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ Banach-tér!

Útm. Ha az $(x^{(n)}) = (x_k^{(n)})$ sorozat Cauchy sorozat $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$-ben, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy
$$\left\| x^{(m)} - x^{(n)} \right\|_{l_p} < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$
Mivel tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$\left| x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right|^p \leq \sum_{l=1}^{\infty} \left| x_l^{(m)} - x_l^{(n)} \right|^p = \left\| x^{(m)} - x^{(n)} \right\|_{l_p}^p,$$

ezért

$$\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| \leq \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_{l_p} \qquad (k \in \mathbb{N},\ N \leq m, n \in \mathbb{N}),$$

azaz tetszőlegesen rögzített k-ra $(x_k^{(m)})$ Cauchy-sorozat $\mathbb{K}$-ban. Így

$$x_k := \lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} \in \mathbb{K},$$

ahonnan

$$\left(\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_{l_p} < \varepsilon \qquad (M \in \mathbb{N},\ N \leq m, n \in \mathbb{N})$$

felhasználásával, ill. az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad (M \in \mathbb{N},\ N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Mivel M tetszőleges volt, ezért az $x := (x_k)$ sorozatra

$$\left\|x^{(m)} - x\right\|_{l_p} < \varepsilon \qquad (M \in \mathbb{N},\ N \leq m \in \mathbb{N}).$$

Ezért egyrészt

$$x = x^{(n)} + (x - x^{(n)}) \in l_p \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

másrészt pedig

$$x = \lim_{m\to\infty} x^{(m)} \in l_p. \quad \blacksquare$$

1.3.8. házi feladat. Igazoljuk, hogy

1. $l_p \subset l_q \subset \mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{c} \subset l_\infty$ $(1 \leq p \leq q < \infty)$;
2. $\bigcup\limits_{1\leq p<q} l_p \subset l_q \subset \bigcap\limits_{q<p<\infty} l_p$ teljesül!

1.3.9. házi feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér, ill. $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}^d)$, akkor mind $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$, mind pedig $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty^p)$ Banach-tér (vö. 1.3.5. gyakorló feladat, ill. 1.3.14. feladat)!

1.3.130. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, akkor bármely $p \in [1, +\infty]$ esetén az $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ normált tér teljes (**Riesz-Fischer-tétel**)!

Útm. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha

$$f_n \in L^p \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan függvénysorozat, hogy bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy ha $N \leq m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon,$$

úgy alkalmas $f \in L^p$ függvényre

$$\lim(\|f - f_n\|_p) = 0$$

teljesül.

1. lépés $/p \in [1, +\infty)/$**.** Világos (vö. 1.3.24. feladat), hogy van olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre

$$\left\|f_{\nu_{n+1}} - f_{\nu_n}\right\|_p < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Belátjuk, hogy alkalmas

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

függvényre

$$\lim(f_{\nu_n}) = f \qquad (\mu\text{-m.m.}).$$

Ha

$$g_n := f_{\nu_{n+1}} - f_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad g := \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|,$$

akkor egyrészt a Minkowski-egyenlőtlenség következtében (vö. 11.4.11/3. tétel)

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right\|_p = \left(\int \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

másrészt pedig

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right)^p \nearrow g^p \qquad (n \to \infty)$$

és a Levi-tétel (vö. 11.4.6. tétel) miatt

$$\|g\|_p^p = \int g^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int \left(\sum_{k=1}^{n} |g_k|\right)^p \mathrm{d}\mu\right) \leq 1^p = 1,$$

azaz $g \in L^p$. Ez azt jelenti, hogy

$$g(x) \in [0, \infty) \qquad (\mu\text{-m.m. } x \in \mathcal{X}),$$

azaz a

$$\sum_{n=1} \left(f_{\nu_{n+1}} - f_{\nu_n}\right)$$

függvénysor $\mathcal{X}$-en μ-m.m. (abszolút) konvergens. Ha most

$$s_n := f_{\nu_1} + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{\nu_{k+1}} - f_{\nu_k}) = f_{\nu_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $f = \lim(s_n)$ μ-m.m., azaz az (f_{ν_n}) függvénysorozat μ-m.m konvergens. Mivel

$$|f - s_n| = |f - f_{\nu_n}| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|f_{\nu_{k+1}} - f_{\nu_k}\right| \leq g \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért $g \in L^p$ miatt

$$(f - f_{\nu_n}) \in L^p,$$

azaz $f \in L^p$. Így a Lebesgue-tétel (vö. 11.4.11/5. tétel) következtében az $(f - f_{\nu_n})$ függvénysorozatra

$$\|f - f_{\nu_n}\|_p \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesül. Tehát a Cauchy-tulajdonság miatt

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{\nu_n}\|_p + \|f_{\nu_n} - f_n\|_p \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. lépés $/p = +\infty/$**.** Ekkor a Lebesgue-tétel nem alkalmazható (vö. [?], 126. old.), viszont a Cauchy-tulajdonság következtében az

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\} \cup \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$$

halmazra

$$\mu(N) = 0$$

és tetszőleges $x \in N^c$ esetén

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Ezért az N^c halmazon

$$f_n \cdot \chi_{N^c} \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

így $f \in L^\infty$ és

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \qquad \blacksquare$$

Ha tehát $p \in [1, +\infty]$, akkor az $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ Banach-térben valamely $f_n \in L^p$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat **normában való konvergenciájából**, azaz a

$$\exists\, f \in L^p : \qquad \lim(\|f - f_n\|_p) = 0$$

állításból (f_n) alkalmas részsorozatának μ**-majdnem mindenütt való konvergenciája** következik, azaz van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy

$$\lim(f_{\nu_n}) = f \qquad (\mu\text{-m.m.})$$

teljesül (**Weyl-tétel**).
Könnyen belátható, hogy $p < +\infty$ esetén (f_n) normában való konvergenciájából nem következik μ-majdnem mindenütt való pontonkénti konvergenciája. Valóban az

$$\mathcal{X} := [0{,}1), \qquad \Omega := \{A \subset \mathcal{X} : \ A \in \Omega_1\}, \qquad \mu := \mu_1|_\Omega,$$

ill. az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér esetében, ha

$$A_n := \left[\frac{l}{2^m}, \frac{l+1}{2^m}\right) \qquad (n = 2^m + l,\ m \in \mathbb{N}_0,\ l \in \{0, \ldots, 2^m - 1\})$$

és

$$f_n := \chi_{A_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén végtelen sok $k, n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$f_k(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad f_n(x) = 1,$$

így (f_n) minden $x \in \mathcal{X}$ pontban divergens, de bármely $p \in [1, +\infty)$ esetén

$$\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \mu(A_n) = \frac{1}{2^{mp}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

1.3.131. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, akkor

1. a
$$p_{\mathcal{A}} : \mathcal{X}/\mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad p_{\mathcal{A}}([x]) := \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \; u \in [x]\}$$
függvény norma;
2. ha $(\mathcal{X}, p)$ Banach-tér, úgy $(\mathcal{X}/\mathcal{A}, p_{\mathcal{A}})$ is Banach-tér!

Útm.

1. lépés. Mivel $\mathcal{A}$ altér $\mathcal{X}$-ben, és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$[x] = x + \mathcal{A},$$

ezért

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}([x]) &= \inf\{p(u) \in \mathbb{R} : \; u \in [x]\} = \inf\{p(x+a) \in \mathbb{R} : \; a \in \mathcal{A}\} = \\ &= \inf\{p(x-a) \in \mathbb{R} : \; a \in \mathcal{A}\} = \\ &= \rho(x, \mathcal{A}) \quad (x \in \mathcal{X}). \end{aligned}$$

2. lépés. Világos, hogy $p_{\mathcal{A}}$ félnorma (vö. 1.3.11. feladat). Így, ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$p_{\mathcal{A}}([x]) = \inf\{p(x+a) \in \mathbb{R} : \; a \in \mathcal{A}\} = 0,$$

akkor a infimum definícióját felhasználva elmondható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $v_n \in \mathcal{A}$, hogy

$$p(x + v_n) < \frac{1}{n}, \qquad \text{azaz} \qquad -v_n \longrightarrow x \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty).$$

Így $\mathcal{A}$ zártsága következtében $x \in \mathcal{A}$, ezért $[x] = 0$.

2. lépés. Ha $([x_n])$ olyan sorozat $\mathcal{X}/\mathcal{A}$-ban, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{\mathcal{A}}([x_n]) < +\infty,$$

akkor (vö. 1.3.1. tétel) olyan

$$[y] \in \mathcal{X}/\mathcal{A}$$

létezését kell kimutatni, amelyre

$$\sum_{k=1}^{n}[x_n] \longrightarrow [y] \qquad (n \to \infty)$$

teljesül. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$p_{\mathcal{A}}([x_n]) = \inf\left\{p(x_n + a) \in \mathbb{R} : \ a \in \mathcal{A}\right\},$$

ezért az infimum definícióját ismét felhasználva megadható olyan

$$a_n \in \mathcal{A} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy

$$p(x_n + a) \leq p_{\mathcal{A}}([x_n]) + \frac{1}{2^n}.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n + a) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{\mathcal{A}}([x_n]) + \frac{1}{2^n}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{\mathcal{A}}([x_n]) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < +\infty. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy alkalmas $y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_n + a) \longrightarrow y \qquad (n \to \infty),$$

így

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}\left(\sum_{k=1}^{n}[x_k] - [y]\right) &= p_{\mathcal{A}}\left(\sum_{k=1}^{n}[x_k - y]\right) = \\ &= \inf\left\{p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - y + a\right) \in \mathbb{R} : \ a \in \mathcal{A}\right\} \leq \\ &\leq p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - y + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + a_k) - y\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tudjuk (vö. 1.3.1. példa), hogy a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes. Ha

$$(*) \qquad \mathcal{A} := \{f \in \mathfrak{C}[0,1]: \ f(0) = 0\},$$

akkor (vö. 1.3.33. feladat) $\mathcal{A}$ zárt altér. Ha

$$\varphi : \mathfrak{C}[0,1]/\mathcal{A} \to \mathbb{C}, \qquad \phi([f]) := f(0),$$

akkor

$$\forall\, f, g \in \mathfrak{C}[0,1]: \qquad f \sim g \quad \Longrightarrow \quad f(0) = g(0),$$

továbbá ϕ lineáris bijekció (izomorfizmus), hiszen

- ϕ lineáris, ui. bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$\phi([f] + \alpha[g]) = \phi([f + \alpha g]) = f(0) + \alpha g(0) = \phi([f]) + \alpha\phi([f]);$$
- ϕ injektív, ui. bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén
$$\phi([f]) = \phi([g]) \quad \Longleftrightarrow \quad f(0) = g(0) \quad \Longleftrightarrow \quad f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad [f] = [g].$$
- ϕ szürjektív, ui. ha $b \in \mathbb{C}$, akkor van olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, hogy $f(0) = b$, és így $\phi([f]) = b$.

Tetszőleges $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{A}}(f) &= \inf\{\|g\|_\infty \in \mathbb{R}: \ g \in [f]\} = \\ &= \inf\{\|g\|_\infty \in \mathbb{R}: \ g(0) = f(0)\} = \\ &= |f(0)| \qquad /g(x) := f(0) \quad (x \in [0,1])/\,. \end{aligned}$$

Az 1.3.131. feladatban az a feltétel, hogy az $\mathcal{A}$ altér zárt legyen, lényeges. Ha ui. $\mathfrak{C}[0,1]$-t a $\|\cdot\|_1$-gyel látjuk el, akkor a $(*)$-beli $\mathcal{A}$ nem zárt altér, hiszen pl. a

$$g_n := \begin{cases} nx & \left(x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]\right), \\ 1 & \left(x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatra

$$g_n \in \mathcal{A} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

de

$$g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \widehat{1} \notin \mathcal{A} \qquad (n \to \infty).$$

Könnyen belátható ui., hogy

$$\inf \{\|g\|_1 \in \mathbb{R} : \; g \in [f]\} = 0 \qquad ([f] \in \mathfrak{C}[0,1]/\mathcal{A}),$$

azaz $p_{\mathcal{A}}$ nem norma. Valóban, bármely $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha

$$h_n(x) := f(0)(1 - g_n(x)) \qquad (x \in [0,1]) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$h_n(0) = f(0) \quad \text{és} \quad \|h_n\|_1 = \frac{|f(0)|}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\inf \{\|g\|_1 \in \mathbb{R} : \; g(0) = f(0)\} \leq \|h_n\|_1 \leq \frac{|f(0)|}{2n},$$

amiből

$$\inf \{\|g\|_1 \in \mathbb{R} : \; g \in [f]\} = 0$$

következik.

Bevezetve az

$$\widetilde{m}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \{\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K} : \; \mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B)\},$$

$$|\mu|(\mathbb{N}) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)| \in \mathbb{R} : \; \biguplus_{k=1}^{r} A_k = \mathbb{N} \right\},$$

ill. az

$$m(\mathbb{N}, \mathbb{K}) := \{\mu \in \widetilde{m}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) : \; |\mu|(\mathbb{N}) < +\infty\},$$

jelölést, látható, hogy $m(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ vektortér a 11.3.11. definícióbeli halmazműveletekre nézve. Ezzel kapcsolatos az

1.3.132. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$p : m(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \qquad p(\mu) := \|\mu\|_{m(\mathbb{N},\mathbb{K})} := |\mu|(\mathbb{N})$$

leképezés norma, továbbá $(m(\mathbb{N}, \mathbb{K}), p)$ Banach-tér!

Útm.

1. lépés. p norma, hiszen ha

- $|\mu|(\mathbb{N}) = 0$ és $A \subset \mathbb{N}$ olyan, hogy $\mu(A) \neq 0$, akkor $\mathbb{N} = A \uplus A^c$, tehát

$$|\mu|(\mathbb{N}) \geq |\mu(A)| + |\mu(A^c)| \geq |\mu(A)| > 0;$$

- p triviálisan homogén;

- $\mu, \nu \in m(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $A_1, \ldots, A_r$ olyan $\mathbb{N}$-beli halmazok, amelyekre
$$\biguplus_{k=1}^{r} A_k = \mathbb{N} \qquad \text{és} \qquad |\mu+\nu|(\mathbb{N}) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k) + \nu(A_k)|$$
teljesül, akkor
$$\begin{aligned} p(\mu+\nu) - \varepsilon &= |\mu+\nu|(\mathbb{N}) - \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)+\nu(A_k)| \leq \sum_{k=1}^{r} (|\mu(A_k)| + |\nu(A_k)|) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)| + \sum_{k=1}^{r} |\nu(A_k)| \leq \\ &\leq p(\mu) + p(\nu). \end{aligned}$$

2. lépés. Ha μ_n Cauchy-sorozat $m(\mathbb{N}, \mathbb{K})$-ban, akkor bármely $A \subset \mathbb{N}$ esetén a $(\mu_n(A))$ valós Cauchy-sorozat, hiszen
$$p(\mu_m - \mu_n) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{r} |\mu_m(A_k) - \mu_n(A_k)| \in \mathbb{R} : \ \biguplus_{k=1}^{r} A_k = \mathbb{N} \right\},$$
így
$$|\mu_m(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu_m(A) - \mu_n(A)| + |\mu_m(A) - \mu_n(A)| \leq p(\mu_m - \mu_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$
Ha
$$\mu(A) := \lim(\mu_n(A)),$$
akkor bármely $\varepsilon > 0$, ill. $N = \biguplus_{k=1}^{r} A_k$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq m \in \mathbb{N}$ indexre
$$|\mu_m(A_k) - \mu(A_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k \in \{1, \ldots, r\}),$$
ahonnan
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k)| &= \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k) - \mu_m(A_k) + \mu_m(A_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} |\mu(A_k) - \mu_m(A_k)| + \sum_{k=1}^{r} |\mu_m(A_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{r} \frac{\varepsilon}{r} + |\mu_m|(\mathbb{N}) \leq \\ &\leq \varepsilon + \sup\{p(\mu_m) \in \mathbb{R} : \ m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$
Ez azt jelenti, hogy
$$\mu(A) < \sup\{p(\mu_m) \in \mathbb{R} : \ m \in \mathbb{N}\}. \quad \blacksquare$$

1.3.133. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $x_n \in \mathcal{X}$, $r_n \in (0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ és a

$$B_{r_n}(x_n) := \{x \in \mathcal{X} : \ \|x - x_n\| \leq r_n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokra

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. (r_n) konvergens sorozat, ui. alulról korlátos: $r_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és monoton fogyó, hiszen a

$$B_n := B_{r_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazokra

$$B_{n+1} \subset B_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben

$$K_r(a) \subset K_R(b) \qquad \Longrightarrow \qquad r \leq R$$

(vö. 1.3.27. feladat).

2. lépés. Ha $\lim(r_n) = 0$, akkor készen vagyunk (vö 1.2.63. feladat). Ha $\lim(r_n) = r > 0$, akkor a

$$\widetilde{B}_n := \{x \in X : \ \|x - x_n\| \leq r_n - r\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazok esetében

$$\widetilde{B}_n \subset B_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az (r_n) sorozatot illetően két eset lehetséges:

1) ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$r_n = r \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor (vö. 1.3.27. feladat útmutatójának legvége)

$$\|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leq r_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tehát

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1} = 0 \quad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$x_n = x_N \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{B}_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

következik.

2) ha $r_n - r > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\widetilde{B}_{n+1} \subset \widetilde{B}_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ugyanis

$$l \in \widetilde{B}_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|l - x_{n+1}\| \le r_{n+1} - r,$$

ill.

$$\|l - x_n\| \le \|l - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \le r_{n+1} - r + r_n - r_{n+1} = r_n - r,$$

azaz $l \in \widetilde{B}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Így (vö. 1.3.27. feladat) azt kapjuk, hogy

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n. \quad \blacksquare$$

1.3.134. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér pontosan akkor teljes, ha a $\partial B_1(0)$ egységszféra teljes!

Útm.

1. lépés. Ha $\mathcal{X}$ Banach-tér, akkor $\partial B_1(0)$ zárt része $\mathcal{X}$-nek (vö. 1.3.29. feladat), így teljes is (vö. az 1.2.51. feladat, ill. az azt követő megjegyzés).

2. lépés. Ha $\partial B_1(0)$ teljes és

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan Cauchy-sorozat, amely nem nullsorozat (ellenkező esetben $\mathcal{X}$ teljessége triviális), akkor nincsen a zésruvektorhoz konvergáló részsorozata sem (vö. 1.2.37/2. feladat), ezért alkalmas $N \in \mathbb{N}$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén

$$\|x_n\| \ge \varepsilon \qquad (N \le n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy

$$u_n := \frac{x_n}{\|x_n\|} \in \partial B_1(0) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így bármely $N \le m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right| \le \frac{\|x_m - x_n\|}{\min\{\|x_m\|, \|x_n\|\}} \le \|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy (u_n) Cauchy-sorozat $\partial B_1(0)$-ben, ezért annak teljessége miatt van olyan $\alpha \in \partial B_1(0)$, hogy

$$\alpha = \lim(u_n).$$

Mivel bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\big| \|x_m\| - \|x_n\| \big| \le \|x_m - x_n\|,$$

ezért $(\|x_n\|)$ Cauchy-sorozat, így $\mathbb{R}$ teljessége következtében van olyan $\beta \in \mathbb{R}$, hogy

$$\beta = \lim(\|x_n\|).$$

Ennélfogava tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}\|x_n - \beta\alpha\| &\leq \|x_n - \|x_n\| \cdot \alpha\| + \|\|x_n\| \cdot \alpha - \beta\alpha\| = \\ &= \|x_n\| \cdot \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \alpha \right\| + \|\alpha\| \left(\|x_n\| - \beta\right) \longrightarrow \beta \cdot 0 + 0 = 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Ez pedig azt kelenti, hogy

$$\lim(x_n) = \beta\alpha,$$

azaz $\mathcal{X}$ teljes. ■

1.3.135. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $\mathcal{X}$ (Hamel-)bázisa vagy véges, vagy nem megszámlálható!

Útm. Ha lenne $\mathcal{X}$-ben megszámlálható számosságú bázis:

$$\mathcal{B} := (b_n : \; n \in \mathbb{N}),$$

akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$A_k := \text{span}\,(b_1, \ldots, b_k)$$

hamazokra a következők teljesülnének:

1. A_k zárt és $\text{int}\,(A_k) = \emptyset$ $(k \in \mathbb{N})$, hiszen
   - bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén A_k véges dimenziós, továbbá
   - ha valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén $\text{int}\,(A_k) \neq \emptyset$ lenne, akkor alkalmas $x_k \in \text{int}\,(A_k)$ és $\varepsilon > 0$ számmal $K_\varepsilon(x_k) \subset A_k$ teljesülne, ami azt jelentené, hogy

     $$K_\varepsilon(0) \subset -x_k + A_k = A_k,$$

     hiszen A_k altér. Így, ha $0 \neq x \in \mathcal{X}$, akkor

     $$\frac{\varepsilon}{2\|x\|} x \in K_\varepsilon(0) \subset A_k,$$

     ami ismét csak A_k altér volta miatt azt jelenti, hogy $x \in A_k$, azaz $A_k = \mathcal{X}$, ahonnan $\dim(X) = k$ következik. Ez pedig nem lehetséges.
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \mathcal{X}$.

Mindezekből az következik, hogy $\mathcal{X}$ első kategóriájú, ami ellentmond Baire tételének (vö. 1.2.65. feladat). ■

1.3.31. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \quad \text{alkalmas } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinomra } f = p|_{[0,1]}\right\}$$

akkor a

$$B := \left\{[0,1] \ni x \mapsto x^k : \ k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

halmazra $\mathrm{span}\,(B) = \mathcal{X}$, de az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem teljes (pl. $\exp \notin \mathcal{X}$).

1.3.32. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1],$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér Banach-tér, így nincsen olyan

$$B := \{f_n \in \mathfrak{C}[0,1] : \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad \text{amelyre} \qquad \mathrm{span}\,(B) = \mathfrak{C}[0,1].$$

Bizonyos normált terek esetén azonban bevezethető olyan véges vagy megszámlálhatóan végtelen értékkészletű vektorrendszer, amely bizonyos értelemben bázisként viselkedik. Erre vonatkozik a következő definíció. Vezessük be ehhez tetszőleges $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ esetén az

$$\mathcal{N} := \begin{cases} \{1, \ldots, N\} & (N \in \mathbb{N}), \\ \mathbb{N} & (N = +\infty), \end{cases}$$

jelölését.

1.3.24. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a

$$b_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathcal{N})$$

vektorrendszert **Schauder-bázis**nak nevezzük, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ elem egyértelműen állítható elő az

$$x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \alpha_n b_n$$

alakban, ahol

$$\alpha_k \in \mathbb{K} \qquad (k \in \mathcal{N}).$$

Világos, hogy

- ha

  $$\dim(\mathcal{X}) < +\infty,$$

  akkor a Schauder-bázis nem más, mint a Hamel-bázis;

- a Hamel-bázis és a Schauder-bázis közötti lényeges különbség a normafüggőség, ui. ha
$$\dim(\mathcal{X}) = +\infty$$
(véges dimenziós esetben bármely két norma ekvivalens), akkor
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right\|\right) = 0;$$

- valamely Schauder-bázis tetszőleges véges részrendszere $/\dim(\mathcal{X}) = +\infty/$ (lineárisan) független vektorrendszer. Ha ui. valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = 0,$$
és alkalmas $l \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén $\alpha_l \neq 0$, akkor
$$b_l = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n} \frac{1}{\alpha_l}\alpha_k b_k.$$
Mivel
$$b_l = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k = 1 \cdot b_l \qquad (l \in \{1, \ldots, n\})$$
ahol
$$\lambda_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}: \ k \neq l),$$
ezért az egyértelműség következtében
$$\alpha_k = 0 \qquad (k \neq l).$$
Ez azt jelenti, hogy $b_l = 0$, azaz $\lambda_l = 1$ nem egyértelmű, ami pedig em lehetséges. Ez persze azt is jelenti, hogy
$$b_n \neq 0 \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

1.3.25. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a $g_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ vektorrendszert **Galjorkin-bázis**nak nevezzük, ha minden véges részrendszere lineárisan független, és bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x - \mathrm{span}\,(g_1, \ldots, g_n)\|\right) = 0$$
teljesül.

Világos, hogy minden Schauder-bázis egyben Galjorkin-bázis is.

Nem minden Galjorkin-bázis Schauder-bázis. Ha pl.

$$\mathcal{X} := \mathfrak{c}_0 \qquad \text{vagy} \qquad \mathcal{X} := l_1$$

és

$$g_1 := \frac{1}{2}e_1, \quad g_n := \frac{1}{2}e_n - e_{n-1} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

(vö. 1.3.136. példa), akkor a

$$g_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorrendszer Galjorkin-bázis az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált térben, hiszen

- egyrészt könnyen belátható, hogy

$$g_n \in \mathfrak{c}_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  minden véges részrendszere lineárisan független, ui. a

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n g_n = \left(\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2, \frac{1}{2}\alpha_2 - \alpha_3, \ldots, \frac{1}{2}\alpha_{n-1} - \alpha_n, \ldots\right)$$

  felírásból

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_2, \qquad \ldots \qquad \alpha_n = \frac{1}{2}\alpha_{n-1}, \qquad \ldots$$

  azaz

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \alpha_1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  következik;

- másrészt pedig

$$\mathrm{span}\,(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{span}\,(g_1, \ldots, g_n),$$

  ui. pl.

$$e_1 = 2g_1, \quad e_n = 2g_n + 4g_{n-1} + \ldots + 2^n g_1 \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} g_k = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}\{e_2 - e_1\} + \ldots + 2^{-k}\left\{\frac{1}{2}e_n - e_{n-1}\right\} = 2^{-(n+1)}e_n,$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} g_k = \lim_{n\to\infty} 2^{-(n+1)} e_n = 0,$$

ahonnan

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot g_n=\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot 2^{-n}g_n$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a

$$g_n\in\mathcal{X}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

vektorrendszer nem Schauder-bázis az $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált térben.

1.3.136. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{c}_0,\|\cdot\|_\infty)$ normált térben az

$$e_n:=(\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}=(\overset{1}{\smile}{0},\ldots,0,\overset{n}{\smile}{1},0,0,\ldots)\qquad (n\in\mathbb{N})$$

vektorrendszer Schauder-bázis!

Útm. Ha

$$x=(x_n)\in\mathfrak{c}_0,$$

akkor

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right\|_\infty = \left\|(\overset{1}{\smile}{0},\ldots,0,\overset{n+1}{\smile}{x_{n+1}},x_{n+2},\ldots)\right\|_\infty =$$

$$= \sup\{|x_k|\in\mathbb{R}:\ n+1\leq k\in\mathbb{N}\}\longrightarrow 0\qquad (n\to\infty),$$

és ez az előállítás egyértelmű, ui. ha alkalmas

$$y=(y_n)\in\mathfrak{c}_0$$

sorozattal

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}y_ne_n,$$

akkor

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)e_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_n-y_n)e_n\right),$$

azonban bármely

$$i\in\mathbb{N}:\ i\leq n$$

idex esetén

$$0 \leq |x_i-y_i|\leq\sup\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\}=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)e_k\right\|_\infty \longrightarrow 0\qquad (n\to\infty),$$

ami azt jelenti, hogy

$$x_n=y_n\qquad (n\in\mathbb{N}).\quad\blacksquare$$

1.3.10. házi feladat. Igazoljuk, hogy az

$$(l_p, \|\cdot\|_p) \qquad (p \in [1,+\infty))$$

normált térben a

$$(\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorrendszer Schauder-bázis!

1.3.137. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-térben $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauder-bázis, továbbá valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n,$$

akkor a

$$\|x\|_{Sch} := \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

leképezés norma $\mathcal{X}$-en!

Útm. A norma folytonosságából (vö. 1.3.41. feladat)

$$+\infty > \|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k\right\| = \left\|\lim\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right)\right\| = \lim\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right\|\right) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következik. Az abszolút homogenitás, ill. a háromszög-egyenlőtlenség a definíció közvetlen következménye. Az iméntiek miatt világos, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x\|_{Sch} \geq \|x\|,$$

és így

$$\|x\| \leq \|x\|_{Sch} = 0$$

egyenlőtlenségekből

$$\|x\| = 0, \qquad \text{azaz} \qquad x = 0$$

következik. ■

1.3.138. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathfrak{c} := \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \lim(x) \in \mathbb{K}\right\},$$

akkor a $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a

$$\left\{(\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{e_0 := (1,1,\ldots)\}$$

vektorrendszer Schauder-bázis!

Útm. Ha

$$x = (x_n) \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) =: \alpha,$$

akkor

$$x - \alpha e_0 \in \mathfrak{c}_0,$$

és a korábbiak alapján

$$x - \alpha e_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - \alpha)e_n,$$

ill.

$$x = \alpha e_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - \alpha)e_n$$

(az egyértelműség ugyanúgy igazolható, mint az 1.3.136. feladatban). ■

1.3.26. definíció. Adott $d \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{X}, \rho)$ kompakt metrikus tér és a $(\mathfrak{C}\left(\mathcal{X}, \mathbb{K}^d\right), \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén azt mondjuk, hogy az

$$\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{K}^d)$$

függvényhalmaz elemei

- **pontonként korlátos**ak, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy

$$\|f(x)\| \leq K \qquad (f \in \mathcal{H});$$

- **egyenletesen korlátos**ak, ha $\mathcal{H}$ korlátos, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ számmal $\|f\|_\infty \leq K$

$$/\Longleftrightarrow \quad \exists K > 0\, \forall f \in \mathcal{H}\, \forall x \in \mathcal{X}: \quad \|f(x)\| \leq K/;$$

- **egyenlő mértékben egyenletesen folytonos**ak vagy **egyformán folytonos**ak, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $f \in \mathcal{H}$ és $s, u \in \mathcal{X}$ esetén

$$|s - u| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(s) - f(u)\| < \varepsilon,$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges $\mathbb{K}^d$-beli norma.

Világos, hogy ha $\mathcal{H}$ elemei egyenletesen korlátosak, akkor pontonként is korlátosak.

1.3.139. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\mathcal{H} := \{f_n \in \mathfrak{C}[1,2]: \; n \in \mathbb{N}\},$$

ahol tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n : [1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := e^{-nx}$$

akkor a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben a $\mathcal{H}$ halmaz elemei egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak!

Útm.

- Mivel
$$\left|e^{-nx}\right| \leq \frac{1}{e} \qquad (x \in [1{,}2],\ n \in \mathbb{N}),$$
ezért $\mathcal{H}$ elemei egyenletesen korlátosak.
- A $\mathcal{H}$ halmaz elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, hiszen a
$$[0, +\infty) \ni t \mapsto te^{-t}$$
függvény monoton csökkenő, így bármely $x \in [1{,}2]$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$|f_n'(x)| = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{-n}} \leq \frac{1}{e},$$
ezért a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával bármely $x, y \in [1{,}2]$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{|x-y|}{e}$$
adódik. ■

1.3.140. feladat. Igazoljuk, hogy ha $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < K \in \mathbb{R}$, akkor a
$$\mathcal{H} := \left\{ f \in \mathfrak{C}^1[a,b] :\ |f'(x)| \leq K \ (x \in [a,b]) \right\}$$
halmaz egyformán folytonos a $(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben!

Útm. Mivel bármely $f \in H$ esetén f deriváltja korlátos, ezért a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $x, y \in [a,b]$ (és alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén)
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq K|x-y|,$$
azaz $f \in \mathfrak{L}\mathfrak{C}[a,b]$ (vö. 11.5. fejezet). Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta := \varepsilon/K$, hogy bármely $f \in H$, ill. bármely $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ esetén
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$
azaz $\mathcal{H}$ egyenlő mértékben egyenletesen folytonos. ■

1.3.2. állítás. (**Arsel**$\grave{a}$**–Ascoli–lemma**). Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ kompakt metrikus tér, akkor a $\left(\mathfrak{C}\left(\mathcal{X}, \mathbb{K}^d\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ normált tér esetén a $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathfrak{C}\left(\mathcal{X}, \mathbb{K}^d\right)$ halmaz pontosan akkor prekompakt, ha elemei pontonként korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak.

Bizonyítás.

1. lépés. Ha $\mathcal{H}$ prekompakt, akkor

- $\mathcal{H}$ elemei pontonként korlátosak, hiszen: $\overline{\mathcal{H}}$ kompaktságából $\overline{\mathcal{H}}$ korlátossága következik, és így $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$ miatt $\mathcal{H}$ is korlátos, ahonnan $\mathcal{H}$ elemeinek pontonkénti korlátossága következik.

- $\mathcal{H}$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, hiszen
  a) $\mathcal{H}$ prekompaktsága azzal egyenértékű (vö. 1.2.87. feladat), hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ és $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{H}$, hogy
  $$(*) \qquad \mathcal{H} \subset \bigcup_{k=1}^{N} K_{\varepsilon/3}(f_k);$$
  b) $\mathcal{X}$ kompaktsága következtében az $f_1, \ldots, f_N$ függvények mindegyike egyenletesen folytonos, így bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha $k \in \{1, \ldots, N\}$, akkor
  $$(x, y \in \mathcal{X},\ \rho(x, y) < \delta) \qquad \Longrightarrow \qquad |f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
  Ha most $f \in \mathcal{H}$, akkor $(*)$ következtében alkalmas $k \in \{1, \ldots, N\}$ esetén
  $$f \in K_{\varepsilon/3}(f_k),$$
  így, ha $x, y \in \mathcal{X}$, $\rho(x, y) < \delta$, akkor
  $$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

2. lépés. Mint ahogy azt később látni fogjuk (vö. 3.1.1. feladat) $\mathcal{X}$ kompaktsága következtében alkalmas $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozattal
$$\overline{\{x_n \in \mathcal{X} :\ n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{X}.$$
Azt fogjuk megmutatni (vö. 1.2.89. feladat), hogy bármely
$$f_n \in \mathcal{H} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatnak van egyenletesen konvergens részsorozata.

- Mivel $\mathcal{H}$ elemei pontonként korlátosak, ezért az $(f_n(x_1))$ sorozat korlátos $\mathbb{K}^d$-ben. Így a Bolzano-Weiesrstraß-féle kiválasztási tétel (vö. [25]) következtében az (f_n) sorozatnak van olyan $\left(f_n^{(1)}\right)$ részsorozata, amely konvergens az x_1 pontban, azaz alkalmas $y_1 \in \mathbb{K}^d$ esetén
  $$\lim(\|f_n^{(1)}(x_1) - y_1\|) = 0.$$
  Az $\left(f_n^{(1)}(x_2)\right)$ sorozat is korlátos, így megint csak a Bolzano-Weiesrstraß-tétel következtében az $\left(f_n^{(1)}\right)$ sorozatnak van olyan $\left(f_n^{(2)}\right)$ részsorozata, amelyre alkalmas $y_2 \in \mathbb{K}^d$ esetén
  $$\lim(\|f_n^{(2)}(x_2) - y_2\|) = 0$$
  teljesül. Folytatva ezt az eljárást, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az (f_n) függvénysorozat olyan $(f_n^{(k)})$ részsorozatához jutunk, amelyre az $n \to \infty$ határátmenettel
  $$\begin{array}{lllll} f_1^{(1)}(x_1), & f_2^{(1)}(x_1), & f_3^{(1)}(x_1), & \ldots & \longrightarrow\ y_1 \\ \\ f_1^{(2)}(x_1), & f_2^{(2)}(x_1), & f_3^{(2)}(x_1), & \ldots & \longrightarrow\ y_2 \\ \\ f_1^{(3)}(x_1), & f_2^{(3)}(x_1), & f_3^{(3)}(x_1), & \ldots & \longrightarrow\ y_3 \\ \\ \ldots \end{array}$$

teljesül, továbbá bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén az $\left(f_n^{(k+1)}\right)$ részsorozat részsorozata az $\left(f_n^{(k)}\right)$ függvénysorozatnak. Ezért a

$$g_n := f_n^{(n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ún. diagonális sorozatra tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n(x_k) \longrightarrow y_k \quad (n \to \infty)$$

teljesül.

- Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $\mathcal{H}$ elemei egyformán folytonosságának megfelelő $\delta > 0$ választunk, akkor $\mathcal{X}$ prekompaktsága következtében alkalmas $N \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{X}$ esetén

$$(**) \qquad \mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{N} K_{\delta/2}^{(i)}(x_k)$$

Mivel

$$\overline{\{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{X},$$

ezért minden $i \in \{1, \ldots, N\}$ index esetén van olyan

$$u_i \in \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\},$$

hogy

$$u_i \in K_i := K_{\delta/2}^{(i)}(x_k),$$

továbbá az $\left(f_n^{(k)}(x_i)\right)$ sorozat konvergenciájának következtében van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy ha $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq m$, akkor

$$\|f_k(u_i) - f_l(u_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (i \in \{1, \ldots, N\}).$$

$(**)$ következtében bármely $x \in \mathcal{X}$ pont valamelyik K_i környezetben van, azaz alkalamas $i \in \{1, \ldots, N\}$ esetén

$$\rho(x, u_i) < \delta.$$

Így az egyformán folytonosság miatt

$$\|f_k(x) - f_k(u_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ebből pedig a tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq m$ esetén fenálló

$$\begin{aligned} \|f_k(x) - f_l(x)\| &\leq \|f_k(x) - f_k(u_i)\| + \|f_k(u_i) - f_l(u_i)\| + \|f_l(u_i) - f_l(x)\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

becslés következik, ami pedig azt jelenti, hogy

$$\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon \qquad (k, l \in \mathbb{N} : \ k, l \geq m),$$

azaz (f_n) Cauchy-sorozat.

- Mivel $\left(\mathfrak{C}\left(\mathcal{X},\mathbb{K}^d\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ Banach-tér és

$$\overline{\mathcal{H}}\subset\mathfrak{C}\left(\mathcal{X},\mathbb{K}^d\right),$$

  ezért $(\overline{\mathcal{H}},\|\cdot\|)$ teljes. Így van olyan $f\in\overline{\mathcal{H}}$, hogy

$$\lim(f_n)=f,$$

  azaz $\overline{\mathcal{H}}$ kompakt. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ prekompakt. ■

1.3.22. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{H}:=\{f_n\in\mathfrak{C}[0,1]:\ n\in\mathbb{N}\},$$

ahol tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f_n(x):=\sin(nx)$$

akkor a $\left(\mathfrak{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ Banach-térben a $\mathcal{H}$ halmaz nem prekompakt!

Útm.

1.3.33. példa. Ha

$$\mathcal{H}:=\{f_n\in\mathfrak{C}[0,1]:\ n\in\mathbb{N}\},$$

ahol tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f_n(x):=\begin{cases}2nx & \left(x\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]\right),\\[2ex] 2n\left(\frac{1}{n}-x\right) & \left(x\in\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]\right),\\[2ex] 0 & \left(x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\right),\end{cases}$$

akkor a $\left(\mathfrak{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ Banach-térben a $\mathcal{H}$ halmaz nem prekompakt, ui. elemei nem egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak: van olyan $\varepsilon>0$, hogy bármely $\delta>0$ esetén alkalmas $n\in\mathbb{N}$ és $x,y\in[0,1]$: $|x-y|<\delta$ mellett

$$|f_n(x)-f_n(y)|\geq\varepsilon.$$

Ha ui. $n\in\mathbb{N}$, akkor az

$$|f_n\left(1/2n\right)-f_n(0)|=1=:\varepsilon$$

választással tetszőleges $\delta>0$ esetén $\lim\left(1/2n\right)=0$, így, ha alkalmas $\mathbb{N}\ni n$-re $x:=1/2n$ és $y:=0$, akkor $|x-y|<\delta$.

1.3.141. feladat. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right),$$

akkor a $(\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben a

$$\mathcal{H} := \{f_n \in \mathfrak{C}[0,1] : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz prekompakt, de nem kompakt!

Útm.

1. lépés. $\mathcal{H}$ elemei pontonként korlátosak, hiszen bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ x \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}\,(x/n)}{x/n} & (x \in (0,1]), \end{cases}$$

így a Bernoulli-L'Hospital-szabály (vö. [19]) alkalamazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\,(x/n)}{x/n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+(x/n)^2} = 1,$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad (x \in [0,1]).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy bármely $x \in [0,1]$ esetén az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos.

2. lépés. $\mathcal{H}$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, hiszen

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+(x/n)^2} \qquad (x \in [0,1], \; n \in \mathbb{N})$$

következtében

$$\|f_k'\|_\infty \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a Lagrange-féle középértéktétellel

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y| \qquad (x \in [0,1], \; n \in \mathbb{N}).$$

3. lépés. Mindez azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ prekompakt $(\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$-ben. Mivel az

$$f(x) := x \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvényre $f \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$ nem zárt, így $\mathcal{H}$ nem kompakt. ■

1.3.23. gyakorló feladat. Döntsük el, hogy a

$$\mathcal{H}_1 := \{[0,1] \ni x \mapsto x^\alpha : \; \alpha \in [1,2)\}, \qquad \mathcal{H}_2 := \{[0,1] \ni x \mapsto x^\alpha : \; \alpha \in (0,+\infty)\},$$

$$\mathcal{H}_3 := \left\{[0,1] \ni x \mapsto n\cos\left(\frac{x}{n}\right) : \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmazok közül melyek prekompaktak a $(\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben!

Útm.

1.3.142. feladat. Igazoljuk, hogy ha H altér a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben és alkalmas $K > 0$ esetén

$$\forall\, f \in H\ \exists \alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right):\ |f(x) - f(y)| \leq K\|f\|_\infty |x-y|^\alpha$$

teljesül, akkor H végesdimenziós!

Útm. Megmutatjuk, hogy H-ban az egységszféra prekompakt (vö. 1.3.78. feladat). Világos, hogy H elemei korlátosak, továbbá, ha $f \in H\colon \|f\| = 1$, akkor bármely $x, y \in [0,1]$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot 1 \cdot |x-y|^\alpha < K|x-y|.$$

Így az Arselà–Ascoli–lemma következtében H elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. ■

1.3.143. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér esetén van olyan $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér és egy $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ izometrikus izomorfia, hogy

$$\overline{\varphi[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Tudjuk (vö. 1.3.16. feladat, ill. az azt követő megjegyzés), hogy ha

$$\rho(x,y) := \|x-y\| := \|x-y\|_{\mathcal{X}} \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

akkor $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, továbbá (vö. [?]), ha

$$\mathcal{C} := \left\{(a_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} :\ (a_n)\ \text{Cauchy-sorozat}\right\},$$

akkor az

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim(\rho(x_n, y_n)) = 0 \qquad ((x_n), (y_n) \in \mathcal{C})$$

ekvivalencia által meghatározott osztályok $\mathcal{Y}$ hamazán a

$$\sigma([(x_n)], [(y_n)]) := \lim(\rho(x_n, y_n)) \qquad ([(x_n)], [(y_n)] \in \mathcal{Y})$$

leképezés metrika és $(\mathcal{Y}, \sigma)$ teljes metrikus tér. Az is könnyen belátható, hogy $\mathcal{Y}$ vektortér az alábbi műveletekkel:

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n) + (y_n)], \quad \alpha[(x_n)] := [(\alpha x_n)], \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ [(x_n)], [(y_n)] \in \mathcal{Y}).$$

Ha

$$u_n := x_n + y_n \quad \text{és} \quad v_n := \alpha x_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|u_m - u_n\| = \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| \leq \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| \longrightarrow 0+0 = 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

és

$$\|v_m - v_n\| = \|\alpha x_m - \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_m - -x_n\| \longrightarrow \alpha \cdot 0 = 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

így $(u_n), (v_n) \in \mathcal{C}$, tehát van olyan ekvivalenciaosztály, amelynek (u_n), ill. (v_n) a reprezentánsa. Ha

$$(\hat{x}_n) \in [(x_n)] \qquad \text{és} \qquad (\hat{y}_n) \in [(y_n)],$$

akkor

$$\rho(x_n + y_n, \hat{x}_n + \hat{y}_n) = \|(x_n + y_n) - (\hat{x}_n + \hat{y}_n)\| \leq \|x_n - \hat{x}_n\| + \|y_n - \hat{y}_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

és

$$\rho(\alpha x_n, \alpha \hat{x}_n) = \|\alpha x_n - \alpha \hat{x}_n\| = |\alpha| \cdot \|x_n - \hat{x}_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\mathcal{Y}$-on az összeadás, ill. a skalárral való szorzás jóldefiniált (reprezentánsfüggetlen).

2. lépés. Ha $(x_n) \in \mathcal{C}$, akkor

$$\big| \|x_m\| - \|x_n\| \big| \leq \|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

így $(\|x_n\|)$ valós Cauchy-sorozat, ezért konvergens is. Ha $(x_n) \in \mathcal{C}$ és

$$|||[(x_n)]||| := \lim(\|x_n\|) \qquad ((x_n) \in \mathcal{C}),$$

akkor $||| \cdot |||$ jóldefiniált hiszen, ha $(\hat{x}_n) \in [(x_n)]$, akkor

$$\big| \|x_n\| - \|\hat{x}_n\| \big| \leq \|x_n - \hat{x}_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

A $||| \cdot |||$ függvény norma $\mathcal{Y}$-on, hiszen

- ha valamely $[(x_n)] \in \mathcal{Y}$ esetén $|||[(x_n)]||| = 0$, így

  $$\lim(\|x_n\|) = 0,$$

  azaz

  $$x_n \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

  akkor $(x_n) \sim 0 \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, azaz az $[(x_n)]$ osztály az $\mathcal{Y}$ tér zéruseleme;
- bármely $\alpha \in \mathbb{K}$, ill. $[(x_n)] \in \mathcal{Y}$ esetén

  $$\begin{aligned} |||\alpha[(x_n)]||| &= |||[(\alpha x_n)]||| = \lim(\|\alpha x_n\|) = \lim(|\alpha| \cdot \|x_n\|) = \\ &= |\alpha| \cdot \lim(\|x_n\|) = |\alpha| \cdot |||[(x_n)]|||; \end{aligned}$$

- bármely $[(x_n)], [(y_n)] \in \mathcal{Y}$ esetén

$$\begin{aligned}|||[(x_n)]+[(y_n)]||| &= |||[(x_n)+(y_n)]||| = \lim(\|x_n+y_n\|) \leq \\ &\leq \lim(\|x_n\|+\|y_n\|) = \lim(\|x_n\|)+\lim(\|y_n\|) = \\ &= |||[(x_n)]|||+|||[(y_n)]|||.\end{aligned}$$

3. lépés. Ha

$$\widetilde{\rho}([(x_n)],[(y_n)]) := |||[(x_n)]-[(y_n)]||| \qquad ([(x_n)],[(y_n)] \in \mathcal{Y}),$$

akkor bármely $[(x_n)], [(y_n)] \in \mathcal{Y}$ esetén

$$\widetilde{\rho}([(x_n)],[(y_n)]) = \lim(\|x_n-y_n\|) = \lim(\rho(x_n,y_n)) = \sigma([(x_n)],[(y_n)]),$$

így $(\mathcal{Y}, |||\cdot|||)$ Banach-tér.

4. lépés. Ha

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad \varphi(x) := [x],$$

ahol $[x]$ jelöli az x-hez konvergáló sorozatok ekvivalenciaosztályát, akkor

$$|||\varphi(x)||| = |||[x]||| = \|x\|.$$

Az is könnyen belátható, hogy φ műveletartó. Valóban, ha $\alpha \in \mathbb{K}$, ill. $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\varphi(x+y) = [x+y] = [x]+[y] = \varphi(x)+\varphi(y) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\alpha x) = [\alpha x] = \alpha[x] = \alpha\varphi(x).$$

$\varphi[\mathcal{X}]$ sűrű $\mathcal{Y}$-ban, hiszen ha $\widetilde{x} := [(x_n)] \in \mathcal{Y}$, akkor

$$|||[(x_m)]-\widetilde{x}||| = \lim_n(\|x_m-x_n\|) \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty)$$

következtében

$$[(x_m)] \longrightarrow \widetilde{x} \qquad (m \to \infty)$$

teljesül. ■

1.3.144. feladat. Az

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$$

Banach-tér esetében lássuk be, hogy ha

$$H := \{f \in \mathcal{X} : \; f \notin \mathfrak{D}[a] \; (a \in [0,1])\},$$

akkor $\overline{H} = \mathcal{X}$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha valamely $f \in \mathcal{X}$ függvény deriválható az $a \in [0,1]$ pontban, akkor az

$$\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R} : \; 0 \neq h \in [-1,1]\right\}$$

halmaz korlátos, hiszen f folytonossága következtében f-nek az a ponthoz tartozó

$$K_a^f(h) := \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (0 \neq h \in [-1,1])$$

különbségihányados-függvénye is folytonos, és f differenciálhatósága következtében K_a^f-nek van 0-beli folytonos kiterjesztése, így a kiterjesztett függvény is folytonos a kompakt $[-1,1]$ intervallumon, ennélfogva korlátos.

2. lépés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az

$$A_n := \left\{f \in \mathcal{X} : \quad \exists\, a \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right] : \quad \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leq n\,(h \in (0,1-a))\right\}$$

halmazt, azaz azonknak az $\mathcal{X}$-beli függvényeknek a halmazát, amelyeknek valamely $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$-beli ponthoz tartozó jobboldali különbségihányados-függvénye korlátos. Világos, hogy ha valamely $a \in [0,1)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$, így $f \in \mathfrak{D}_+[a]$, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén $f \in A_N$. Belátjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n ($\mathcal{X}$-beli) zárt, sehol sem sűrű halmaz.

1. Ha valamely $f \in \overline{A_n}$, akkor $\mathcal{X}$ zártsága következtében $\overline{A_n} \subset \mathcal{X}$, így f folytonos. Azt kell tehát csak megmutatni, hogy alkalmas $a \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, ill. tetszőleges $h \in (0,1-a)$ esetén

   $$|f(a+h)-f(a)| \leq nh$$

   teljesül. $f \in \overline{A_n}$ következtében van olyan

   $$(*) \qquad f_k \in A_n \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

   hogy

   $$\lim_{k\to\infty}(\|f-f_k\|_\infty) = 0$$

   teljesül. $(*)$ következtében van olyan

   $$x_k \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right] \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   sorozat, hogy

   $$\left|\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}\right| \leq n \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

   Mivel az (x_k) sorozat korlátos, ezért a Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel (vö. [25]) következtében van olyan (ν_k) indexsorozat, hogy

   $$x_{\nu_k} \longrightarrow a \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right] \qquad (k \to \infty).$$

Mivel
$$f_{\nu_k} \in A_n \qquad (k \in \mathbb{N}),$$
ezért
$$|f_{\nu_k}(x_{\nu_k} + h) - f_{\nu_k}(x_{\nu_k})| \leq nh \qquad (h \in (a{,}1 - x_{\nu_k}))\,.$$
Ha most $h \in (0{,}1 - a)$ tetszőleges, akkor
$$\lim_{k\to\infty} x_{\nu_k} = a$$
következtében, elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$h \in (0{,}1 - x_{\nu_k}).$$

Innen a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$\begin{aligned}
|f(a+h) - f(a)| \quad &\leq \quad |f(a+h) - f(x_{\nu_k} + h)| + \underbrace{|f(x_{\nu_k} + h) - f_{\nu_k}(x_{\nu_k} + h)|}_{\leq \|f - f_{\nu_k}\|_\infty} + \\
&\quad + \underbrace{|f_{\nu_k}(x_{\nu_k} + h) - f_{\nu_k}(x_{\nu_k})|}_{\leq nh} + \underbrace{|f_{\nu_k}(x_{\nu_k}) - f(x_{\nu_k})|}_{\leq \|f - f_{\nu_k}\|_\infty} + \\
&\quad + |f(x_{\nu_k}) - f(a)| \leq \\
&\leq \quad |f(a+h) - f(x_{\nu_k} + h)| + 2\|f - f_{\nu_k}\|_\infty + nh + |f(x_{\nu_k}) - f(a)|.
\end{aligned}$$

Mivel
$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \text{és} \qquad f \in \mathfrak{C}[a+h],$$
ill.
$$\lim_{k\to\infty} x_{\nu_k} = a \qquad \text{és} \qquad \lim_{k\to\infty} f_{\nu_k} = f,$$
a $k \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy
$$|f(a+h) - f(a)| \leq nh \qquad (h \in (0{,}1 - a)),$$
azaz $f \in A_n$. Ez azt jelenti, hogy A_n zárt.

2. Mivel A_n zárt, elegendő azt belátni (vö. 1.1.68. feladat előtti megjegyzés), hogy $\mathrm{int}\,(A_n) = \emptyset$. Tetszőleges $f \in A_n$ függvény esetén megmutatjuk, hogy f bármely ε-sugarú környezetében van olyan $\psi \in \mathcal{X}$ függvény, amely nincs benne A_n-ben. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén olyan $\psi \in \mathcal{X}$ függvény létezését kell tehát kimutatnuni, amelyre
$$\|f - \psi\| < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \psi'_+(x) > n \quad (x \in [0{,}1))$$
teljesül. Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen
$$\phi : [0{,}1] \to \mathbb{R}$$

olyan folytonos függvény, hogy az

$$x_i := \frac{i}{k} \qquad (i \in \{0, \ldots, k\})$$

pontokban

$$\phi(x_i) := \begin{cases} 0 & (i \equiv 0\,(2)), \\ 1 & (i \equiv 1\,(2)), \end{cases}$$

teljesülés és ϕ az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon lineáris ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$). Ekkor

$$|\phi(x)| \le 1 \qquad (x \in [0,1]),$$

és bármely $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$\phi'(x) = \pm k \qquad (x_i \neq x \in [0,1]).$$

Az 1.3.39 feladatbeli állítás következményeként elmondható, hogy bármely $\varepsilon > 0$ van olyan a szakaszonként lineráis $g \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ függvény, hogy

$$\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

és alkalmas $M \in \mathbb{N}$ esetén

$$|g'(x)| \le M \qquad (x \in [0,1] \backslash H),$$

ahol $H \subset [0,1]$ véges halmaz. Ha

$$\psi(x) := g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\phi(x) \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\|f - \psi\|_\infty \le \|f - g\|_\infty + \|g - \psi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ha g és ϕ deriválható valamely $x \in D \subset [0,1]$ pontban, akkor

$$|\psi'(x)| = \left| g'(x) \pm \frac{\varepsilon}{2} k \right|$$

teljesül. $|g'(x)| \le M$ következtében így $|\psi'(x)| > n$, amennyiben k-t úgy választjuk meg, hogy

$$k > \frac{2(M+n)}{\varepsilon}$$

teljesül. Ezek után már nem nehéz belátni, hogy ha $x \in [0,1) \backslash D$, akkor $\psi'_+(x) > n$ teljesül.

3. lépés. Ha

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

akkor A első kategóriájú ($\mathcal{X}$-beli) halmaz, és tartalmazza mindazon $\mathcal{X}$-beli függvények halmazát, amelyek valahol differenciálhatók, azaz

$$H = \mathcal{X} \backslash A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{X} \backslash A_n).$$

Így – lévén, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ teljes –, a Baire-féle kategóriatétel következtében H mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben (vö. 1.2.67. feladat). ■

Ez azt jelenti, hogy $H \neq \emptyset$, azaz van olyan, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, amely sehol sem differenciálható. A fenti bizonyítás persze nem konstruktív.

1.3.145. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\varphi(x) := 0 \quad (x \in \mathbb{Z}), \qquad \varphi(x) := \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\} \qquad (x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}),$$

azaz

$$\varphi(x) := \min\{|x - m| \in \mathbb{R} : \ m \in \mathbb{Z}\} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \varphi(2^k x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ún. **Takagi-függvény** mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy T folytonos függvény. Valóban,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\} \leq \frac{1}{2}$$

következtében

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot |\varphi(2^k x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így T – mint folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysor összegfüggvénye – folytonos.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

folytonos függvény, továbbá valamely $x \in (a, b)$ esetén

$$a < a_n < x < b_n < b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozatok, amelyekre

$$\lim(a_n) = x = \lim(b_n)$$

teljesül, akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{D}[x] \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \left(\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right) = f'(x)$$

implikáció. Valóban,

$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1 \qquad \text{és} \qquad \left| \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1$$

következtében

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x)\right| &= \left|\frac{b_n-x}{b_n-a_n}\left(\frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-x}-f'(x)\right)+\right.\\ &\left.+\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\left(\frac{f(a_n)-f(x)}{a_n-x}-f'(x)\right)\right| \le \\ &\le \left|\frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-x}-f'(x)\right|+\left|\frac{f(a_n)-f(x)}{a_n-x}-f'(x)\right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

3. lépés. Ha $n \in \mathbb{Z}$ és u n-edrendű diadikus tört, azaz

$$u \in \mathbb{D} := \left\{i \cdot 2^{-n} \in \mathbb{R} :\ i, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

és bármely $n \le k \in \mathbb{Z}$ esetén $2^k u \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\varphi(p) = 0 \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

következtében

$$T(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \varphi(2^k u).$$

Ha $x \in \mathbb{R}$ és (u_n), ill. (v_n) n-edrendű diadikus törtek olyan sorozata, amelyre

$$u_n < x < v_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$v_n - u_n = i \cdot 2^{-n} - (i-1) \cdot 2^{-n} = 2^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\frac{T(v_n)-T(u_n)}{v_n-u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varphi(2^k v_n)-\varphi(2^k u_n)}{v_n-u_n}.$$

Világos, hogy ha $l := n - k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left[2^k u_n, 2^k v_n\right] = \left[\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l}\right]$$

miatt φ lineáris a $\left[2^k u_n, 2^k v_n\right]$ intervallumon. Így bármely $0 \le k \le n$ esetén

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(2^k v_n)-\varphi(2^k u_n)}{v_n-u_n} = \frac{\pm 2^{-l}}{2^{-l}} = \pm 1,$$

ahonnan

$$\frac{T(v_n)-T(u_n)}{v_n-u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Ez pedig azt jelenti (vö. 2**. lépés**), hogy T nem deriválható x-ben. ∎

1.3.146. feladat. Adott $1 \leq p, q < +\infty$: $p < q$, ill. az

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (L^p(0,1)], \|\cdot\|_{L^p})$$

Banach-tér esetében lássuk be, hogy ha

$$H := \{f \in \mathcal{X} : \ f \notin L^q(0,1)\},$$

akkor $\overline{H} = \mathcal{X}$ teljesül!

Útm. Mivel

$$\mu_1((0,1)) = 1 < +\infty,$$

így (vö. 11.4.11/1. tétel)

$$L^q(0,1) \subset L^p(0,1),$$

ezért azt fogjuk megmutatni, hogy $L^q(0,1)$ első kategóriájú $L^p(0,1)$-ben. Innen már $L^p(0,1)$ teljessége (vö. 1.3.130. feladat) következtében nyilvánvaló (vö. 1.2.67. feladat), hogy $\overline{H} = \mathcal{X}$ teljesül.

1. lépés. Ha

$$A_n := \{f \in \mathcal{X} : \ \|f\|_q \leq n\} \subset L^q \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$L^q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

hiszen bármely $f \in L^q$ függvény esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\|f\|_q \leq n$ teljesül. Ha tehát A_n zárt és sehol sem sűrű L^p-ben $(n \in \mathbb{N})$, akkor (vö 1.1.74. feladat) L^q első kategóriájú.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy A_n zárt L^p-ben $(n \in \mathbb{N})$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f \in \overline{A_n}$ és (f_k) olyan A_n-beli sorozat, amelyre

$$\lim(\|f_k - f\|_p) = 0$$

teljesül. Így a tér teljessége következtében (vö. 1.3.130. feladat utáni első megjegyzés) alkalmas (ν_k) indexsorozatra

$$\lim(f_{\nu_k}) = f \qquad (\mu\text{-m.m.}).$$

Így a Fatou-lemma (vö. 11.4.7. tétel) következtében bármely $k \in \mathbb{N}$, ill. $f_{\nu_k} \in A_n$ esetén

$$\int_0^1 |f|^q \, d\mu_1 = \int_0^1 \liminf_{k\to\infty} |f_{\nu_k}|^q \, d\mu_1 \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 |f_{\nu_k}|^q \, d\mu_1 \leq n,$$

azaz $f \in A_n$.

3. lépés. Megmutatjuk, hogy A_n sehol sem sűrű L^p-ben $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy etszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{int}(A_n) \neq \emptyset$, így alkalmas $g \in A_n$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon(g) = \{f \in A_n : \ \|f - g\|_p < \varepsilon\} \subset A_n.$$

Így, ha $h \in L^p$: $\|h\|_p \neq 0$, akkor az

$$F := g + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_p}$$

függvényre

$$\|g - F\|_p = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

teljesül, azaz $F \in K_\varepsilon(g)$, sőt $F \in L^q$. Mivel

$$h = \frac{2\|h\|_p}{\varepsilon}(F - g),$$

ezért L^q vektortér volta következtében $h \in L^q$. Mivel $L^q \subset L^p$, ezért $h \in L^p$ miatt $L^q = L^p$. Ez pedig nem igaz, ui. pl. az

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x \in (0,1))$$

függvényre $f \in L^1$, de $f \notin L^2$ (vö. 11.4.1. tétel). ■

1.3.147. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, és $H \subset \mathcal{X}$ prekompakt, akkor $\mathrm{co}\,(H)$ is prekompakt!

Útm. Ha $H \subset \mathcal{X}$ prekompakt, akkor a tér teljessége folytán H teljesen korlátos (vö. 1.2.87. feladat), azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in H$, hogy

$$H \subset \bigcup_{k=1}^{n} K_{\varepsilon/2}(x_k),$$

így bármely $x \in H$ esetén van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$\|x - x_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma most k a legkisebb ilyen tulajdonságú index, akkor legyen

$$v : H \to \{1, \ldots, n\}, \qquad v(x) := k.$$

Ha $y \in \mathrm{co}\,(H)$, akkor a Caratheodory-tétel (vö. 1.3.53. feladat) következtében alkalmas

$$m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in [0, \infty), \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \quad y_k \in H \quad (k \in \{1, \ldots, m\})$$

esetén

$$y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k.$$

Így

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_{v(y_k)} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(y_k - x_{v(y_k)} \right) \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left\| y_k - x_{v(y_k)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_{v(y_k)} \in \mathcal{K} := \mathrm{co}\,(x_1, \ldots, x_n),$$

ezért

$$\mathrm{co}\,(H) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{K}} K_{\varepsilon/2}(x).$$

Világos, hogy az

$$f : [0,1]^n \to \mathcal{X}, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

függvény folytonos. Az

$$A := \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\right\} \subset [0,1]^n$$

halmaz zárt, hiszen ha

$$a^m \in A \qquad (m \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(a^m) = a = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n,$$

akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k^m\right| + \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k^m - 1\right|}_{=0} \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty),$$

ahonnan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1,$$

azaz $a \in A$ következik. Mivel A korlátos, ezért kompakt is. Mivel

$$f[A] = \mathcal{K}$$

és f folytonos, ezért (vö. 1.1.59. feladat) a $\mathcal{K}$ halmaz is kompakt, azaz alkalmas $N \in \mathbb{N}$, ill. $k_1, \ldots, k_N \in \mathcal{K}$ esetén

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_{\varepsilon/2}(k_i),$$

azaz bármely $x \in \mathcal{K}$ esetén van olyan $i \in \{1, \ldots, N\}$, hogy

$$\|x - k_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha most $y \in \mathrm{co}\,(H)$, akkor alkalmas $x \in \mathcal{K}$ esetén $y \in K_{\varepsilon/2}(x)$. Ha i a fenti index, akkor

$$\|x - k_i\| \le \|x - y\| + \|x - k_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz

$$\mathrm{co}\,(H) \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_{\varepsilon}(k_i). \quad \blacksquare$$

1.4. Euklideszi terek

1.4.1. Alapfogalmak

1.4.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ $\mathbb{K}$-vektortér esetén azt mondjuk, hogy a

$$h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés **hermitikus forma** (vagy **hermitikus funkcionál**), ha bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

(1) $h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z)$;

(2) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$;

(3) $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.

1.4.1. példa. Világos, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{R}[a, b] := \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{K}) := \{f : [a, b] \to \mathbb{K} : \ f \text{ Riemann-integrálható}\},$$

akkor a

$$h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad h(f, g) := \int_a^b f\overline{g}$$

leképezés hermitikus forma.

1.4.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ leképezés hermitikus forma, akkor bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

1. $h(x,0) = h(0, y) = 0$;
2. $h(x, y + z) = h(x, y) + h(x, z)$;
3. $h(x, \alpha y) = \overline{\alpha} h(x, y)$;
4. $h(x, x) \in \mathbb{R}$

teljesül!

Útm.

1. Minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$h(0, y) = h(0 \cdot 0, y) = 0 \cdot h(0, y) = 0 = \overline{0} = \overline{h(0, x)} = h(x,0).$$

2. Bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$h(x, y + z) = \overline{h(y + z, x)} = \overline{h(y, x) + h(z, x)} = \overline{h(y, x)} + \overline{h(z, x)} = h(x, y) + h(x, z).$$

3. Ha $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor
$$h(x, \alpha y) = \overline{h(\alpha y, x)} = \overline{\alpha h(y, x)} = \overline{\alpha}\overline{h(y, x)} = \overline{\alpha} h(x, y).$$

4. Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$h(x, x) = \overline{h(x, x)}. \quad \blacksquare$$

1.4.2. feladat. Igazoljuk, hogy az 1.4.1. példabeli (valós) hermitikus formára teljesül az
$$|h(x, y)|^2 \le h(x, x)h(y, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$
becslés, pontosabban bármely $f, g \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$ esetén fennáll az
$$\left|\int_a^b fg\right| \le \sqrt{\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)}$$
egyenlőtlenség!

Útm.

1. Ha
$$\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0,$$
akkor az
$$|f(t)g(t)| \le \frac{1}{2}\left([f(t)]^2 + [g(t)]^2\right) \quad (t \in [a, b])$$
egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$0 \le \left|\int_a^b fg\right| \le \int_a^b |fg| \le \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2\right) = 0.$$

2. Ha pl.
$$\int_a^b f^2 > 0,$$
akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az
$$F(t) := (g(t) - \lambda f(t))^2 \qquad (t \in [a, b])$$
függvényre $F \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$,
$$F(t) \ge 0 \qquad (t \in [a, b]),$$
így
$$0 \le \int_a^b F = \lambda^2 \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2,$$
azaz
$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \le 0. \quad \blacksquare$$

1.4.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ leképezés pozitív szemidefinit, hermitikus forma, akkor teljesül az

$$|h(x,y)|^2 \leq h(x,x)h(y,y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

becslés (**Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**)!

Útm.

1. lépés. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$0 \leq h(x + \alpha y, x + \alpha y) = h(x,x) + \overline{\alpha} h(x,y) + \alpha \overline{h(x,y)} + |\alpha|^2 h(y,y),$$

ui.

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(x + \alpha y, x + \alpha y) = h(x, x + \alpha y) + h(\alpha y, x + \alpha y) = \\ &= h(x,x) + h(x,\alpha y) + h(\alpha y, x) + h(\alpha y, \alpha y) = \\ &= h(x,x) + h(x,\alpha y) + \alpha h(y,x) + \alpha h(y, \alpha y) = \\ &= h(x,x) + \overline{\alpha} h(x,y) + \alpha h(y,x) + \alpha \overline{\alpha} h(y,y) = \\ &= h(x,x) + \overline{\alpha} h(x,y) + \alpha \overline{h(x,y)} + |\alpha|^2 h(y,y). \end{aligned}$$

2. lépés. Ha $h(y,y) \neq 0$, akkor az

$$\alpha := -\frac{h(x,y)}{h(y,y)}$$

számmal

$$0 \leq h(x,x) - \frac{|h(x,y)|^2}{h(y,y)} - \frac{|h(x,y)|^2}{h(y,y)} + \frac{|h(x,y)|^2}{h(y,y)} = h(x,y) - \frac{|h(x,y)|^2}{h(y,y)}.$$

3. lépés. Ha $h(x,x) \neq 0$, akkor

$$|h(x,y)|^2 = |h(y,x)|^2$$

következtében az előző lépésbeli érvelés működik az $x \leftrightarrow y$ szerepcseréjével.

4. lépés. Ha

$$h(x,x) = 0 = h(y,y),$$

akkor az

$$\alpha := -h(x,y)$$

számmal

$$0 \leq -|h(x,y)|^2 - |h(x,y)|^2 = -2|h(x,y)|^2 \leq 0,$$

ahonan

$$|h(x,y)|^2 = 0$$

következik. ■

Világos, hogy ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ esetén $y = \lambda x$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségben egyenlőség van, hiszen $x = 0$ vagy $y = 0$ esetén

$$h(0, y) = h(x,0) = h(0,0) = 0,$$

továbbá $y = \lambda x$ esetén

$$\begin{aligned} |h(x, y)|^2 &= |h(x, \lambda x)|^2 = |\overline{\lambda}|^2 |h(x, x)|^2 = \\ &= \lambda\overline{\lambda} h(x, x)h(x, x) = h(x, x)h(\lambda x, \lambda x) = h(x, x)h(y, y). \end{aligned}$$

Viszont az egyenlőség nem csak ezekben az esetekben teljesülhet (vö. 1.4.1. példa).

1.4.4. feladat. Igazoljuk, hogy, ha $z, w \in \mathbb{C}$, akkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

1. $2|z||w| \leq |z|^2 + |w|^2$; 2. $|z + w|^2 \leq 2(|z|^2 + |w|^2)$; 3. $z + \overline{z} \leq 2|z|$.

Útm. Bármely $z, w \in \mathbb{C}$ esetén

1. $0 \leq (|z| - |w|)^2 = |z|^2 - 2|z| \cdot |w| + |w|^2$;
2. $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \leq 2(|z|^2 + |w|^2)$;
3. $z + \overline{z} = 2\Re(z) \leq 2|\Re(z)| = 2\sqrt{[\Re(z)]^2} \leq 2\sqrt{[\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2} = 2|z|$. ■

1.4.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ leképezés pozitív szemidefinit, hermitikus forma, akkor a

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) := \sqrt{h(x, x)}$$

leképezés félnorma $\mathcal{X}$-en!

Útm. Világos, hogy p pozitív szemidefinit és abszolút homogén. Ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned} p^2(x + y) &= h(x + y, x + y) = h(x, x) + h(x, y) + \overline{h(x, y)} + h(y, y) = \\ &= h(x, x) + 2|h(x, y)| + h(y, y) \leq p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) = \\ &= (p(x) + p(y))^2. \quad ■ \end{aligned}$$

1.4.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a

$$h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés hermitikus forma, úgy bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$h(x + y, x + y) - h(x - y, x - y) = 4\Re(h(x, y))$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$h(x + y, x + y) = h(x, x) + h(y, y) + h(x, y) + h(y, x)$$

és

$$h(x-y,x-y)=h(x,x)+h(y,y)-h(x,y)-h(y,x),$$

ezért

$$\begin{aligned} h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y) &= 2\{h(x,y)+h(y,x)\}=2\{h(x,y)+\overline{h(x,y)}\}= \\ &= 4\Re(h(x,y)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.4.7. feladat. Lássuk be, hogy ha a

$$h:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{K}$$

leképezés hermitikus forma, úgy a $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetben, ha $x,y\in\mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned} 4h(x,y) &= \sum_{k=0}^{3}\imath^k h(x+\imath^k y, x+\imath^k y)= \\ &= h(x+y,x+y)+\imath\,(h(x+\imath y,x+\imath y)-h(x-y,x-y)-h(x-\imath y,x-\imath y)) \end{aligned}$$

teljesül!

Útm. Az 1.4.6. feladatbeli egyenlőségből bármely $x,y\in\mathcal{X}$ esetén

$$h(x+\imath y,x+\imath y)-h(x-\imath y,x-\imath y)=-4\imath\Re(h(x,y))=4\Im(h(x,y))$$

adódik, ahonnan

$$h(x+y,x+y)+\imath\,(h(x+\imath y,x+\imath y)-h(x-y,x-y)-h(x-\imath y,x-\imath y))=4h(x,y)$$

következik. ■

Az 1.4.6. és az 1.4.7. feladatbeli egyenlőséget szokás **polarizációs azonosság**nak nevezni. Amennyiben a h hermitikus forma pozitív szemidefinit, akkor a

$$p:\mathcal{X}\to\mathbb{R},\qquad p(x):=\sqrt{h(x,x)}$$

félnorma felhasználásával a polarizációs azonosságok a következő módon írhatók:

1. bármely $x,y\in\mathcal{X}$ esetén

$$p^2(x+y)-p^2(x-y)=4\Re(h(x,y)),$$

2. a $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetben, ha $x,y\in\mathcal{X}$, akkor

$$p^2(x+y)-p^2(x-y)+\imath\left(p^2(x+\imath y)-p^2(x-\imath y)\right)=4h(x,y)$$

teljesül.

1.4.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a

$$h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés hermitikus forma, úgy h pontosan akkor a zérusforma, ha

$$h(u, u) = 0 \qquad (u \in \mathcal{X})$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy ha h a zérusforma, akkor bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén $h(u, u) = 0$.

2. lépés. Ha minden $u \in \mathcal{X}$ vektorra $h(u, u) = 0$, akkor a polarizációs azonosságok felhasználásával látható, hogy

$$h(x, y) = 0 \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

azaz h a zérusforma. ■

1.4.9. feladat. Lássuk be, hogy ha a

$$h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés hermitikus forma, úgy a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben

1. ha $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$h(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_n^k h(x + \xi_n^k y, x + \xi_n^k y),$$

ahol

$$\xi_n := \exp\left(\frac{2\pi \imath}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill.

2. ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\imath t} h(x + e^{\imath t} y, x + e^{\imath t} y) \,\mathrm{d}t = \int_{|\xi|=1} h(x + \xi y, x + \xi y) \,\mathrm{d}\xi$$

teljesül!

Útm.

1. Mivel az n-edik egységgyökökre

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_n^{ik} = \frac{\xi_n^{in}}{\xi_n^i} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

teljesül, ezért bármely $3 \leq n \in \mathbb{N}$, ill. $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_n^k h(x+\xi_n^k y, x+\xi_n^k y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\xi_n^k h(x,x)+h(x,y)+\xi_n^{2k}h(y,x)+\xi_n^k h(y,y)\right\} = \\ &= h(x,y).\end{aligned}$$

2. Házi feladat. ■

1.4.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ leképezés pozitív szemidefinit, hermitikus forma,

$$p(x) := \sqrt{h(x,x)} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$p^2(z-x) + p^2(z-y) = \frac{1}{2}p^2(x-y) + 2p^2\left(z - \frac{x+y}{2}\right)$$

teljesül (**Apollóniosz-tétel**)!

Útm. Bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}p^2(z-x)+p^2(z-y) &= h(z-x,z-x)+h(z-y,z-y) = \\ &= 2h(z,z)-2h(z,x)-2h(z,y)+h(x,x)+h(y,y),\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}\frac{p^2(x-y)}{2}+2p^2\left(z-\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{h(x-y,x-y)}{2}+2h\left(z-\frac{x+y}{2}, z-\frac{x+y}{2}\right) = \\ &= \frac{h(x,x)}{2}-h(x,y)+\frac{h(y,y)}{2}+h(z,z-x-y)+ \\ &\quad +\frac{h(x,x)}{2}+h(x,y)+\frac{h(y,y)}{2} = \\ &= h(x,x)+h(y,y)+2h(z,z)-2h(z,x)-2h(z,y). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.4.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ félnormált tér, úgy pontosan akkor van olyan $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ pozitív szemidefinit, hermitikus forma, amelyre

$$p(x) = \sqrt{h(x,x)} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén fennáll a

$$p^2(x+y) + p^2(x-y) = 2p^2(x) + 2p^2(y)$$

egyenlőség (**paralelogramma-szabály** vagy **Jordan-Neumann-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ pozitív szemidefinit hermitikus forma és

$$p(x) := \sqrt{h(x,x)} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} p^2(x+y) + p^2(x-y) &= h(x+y, x+y) + h(x-y, x-y) = \\ &= h(x,x) + h(x,y) + h(y,x) + h(y,y) + \\ &\quad + h(x,x) - h(x,y) - h(y,x) + h(y,y) = \\ &= 2h(x,x) + 2h(y,y) = 2p^2(x) + 2p^2(y). \end{aligned}$$

2. lépés. Ha $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ olyan félnorma, amelyre teljesül a paralelogramma-szabály, akkor a

$$\varphi(x,y) := \frac{1}{4}\left(p^2(x+y) - p^2(x-y)\right) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

függvényre bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} 8\varphi(x,z) + 8\varphi(y,z) &= 2p^2(x+z) - 2p^2(x-z) + 2p^2(y+z) - 2p^2(y-z) = \\ &= 2p^2(x+z) + 2p^2(y+z) - \{2p^2(x-z) + 2p^2(y-z)\} = \\ &= p^2(x+y+2z) + p^2(x-y) - \{p^2(x+y-2z) + p^2(x-y)\} = \\ &= 4p^2\left(\frac{x+y}{2} + z\right) - 4p^2\left(\frac{x+y}{2} - z\right) = \\ &= 16\varphi\left(\frac{x+y}{2}, z\right), \end{aligned}$$

azaz

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$$

teljesül. Ezért az $y := 0$ választással

$$2\varphi\left(\frac{x}{2}, z\right) = \varphi(x,z) \qquad (x, z \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$\varphi(x,z) + \varphi(y,z) = \varphi(x+y,z) \qquad (x, y, z \in \mathcal{X}),$$

így φ additív az első változójában. Világos, hogy φ folytonos is (vö. 1.3.41. feladat), így (vö. 1.3.87. feladat) bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y).$$

Tehát

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x), \quad \text{ill.} \quad \varphi(x,x) = \frac{p^2(x+x) - p^2(0)}{4} = p^2(x) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

következtében a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben a

$$h(x, y) := \varphi(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

választás megfelelő. Ha most $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor a

$$\psi(x, y) :\equiv \varphi(x, y) + \imath\varphi(x, \imath y) \equiv \frac{p^2(x+y) - p^2(x-y) + \imath\{p^2(x+\imath y) - p^2(x-\imath y)\}}{4}$$

függvény első változójában lineáris. Mivel bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\varphi(\imath x, y) = -\varphi(x, \imath y), \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(\imath x, \imath y) = \varphi(x, y),$$

ezért

$$\begin{aligned}\psi(\imath x, y) &= \varphi(\imath x, y) + \imath\varphi(\imath x, \imath y) = \\ &= \imath\varphi(x, y) - \varphi(x, \imath y) = \imath\{\varphi(x, y) + \imath\varphi(x, \imath y)\} = \\ &= \imath\psi(x, y).\end{aligned}$$

Mivel φ szimmetrikus, így ismét felhasználva, hogy

$$\varphi(\imath x, y) = -\varphi(x, \imath y) \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

a

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \varphi(x, y) + \imath\varphi(x, \imath y) = \varphi(y, x) - \imath\varphi(\imath x, y) = \\ &= \varphi(y, x) - \imath\varphi(y, \imath x) = \overline{\psi(x, y)} \quad (x, y \in \mathcal{X})\end{aligned}$$

összefüggést kapjuk. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\varphi(x, \imath x) = \frac{p^2(x)\left(|1+\imath|^2 - |1-\imath|^2\right)}{4} = 0,$$

ezért

$$\psi(x, x) = \varphi(x, x) + \imath\varphi(x, \imath x) = \varphi(x, x) = p^2(x). \quad \blacksquare$$

1.4.2. definíció. Adott $\mathcal{X}$ $\mathbb{K}$-vektortér esetén azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés **skaláris szorzat**, ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pozitív definit, hermitikus forma, azaz bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

(S1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$;

(S2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

(S3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(S4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

1.4.2. példa. Bármely $d \in \mathbb{N}$,

$$w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{R}^d : \qquad w_k > 0 \quad (k \in \{1, \ldots, d\})$$

esetén az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{d} w_k x_k \overline{y_k} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d),\ y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d)$$

leképezés skaláris szorzat.

1.4.3. példa. Az

$$\langle x, y \rangle_\sharp := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \qquad (x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$$

leképezés skaláris szorzat.

1.4.4. példa. Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, akkor a

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu \qquad (f, g \in L^2)$$

leképezés skaláris szorzat.

1.4.5. példa. Ha $d \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, továbbá $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, akkor

- a $h : \mathfrak{C}(A) \times \mathfrak{C}(A) \to \mathbb{K}$, $k : L^2(A) \times L^2(A) \to \mathbb{K}$

  $$h(f, h) := k(f, g) := \int_A f\overline{g}$$

  leképezések skaláris szorzatok;
- a $h : \mathfrak{C}^1[a, b] \times : \mathfrak{C}^1[a, b] \to \mathbb{K}$, $k : \mathfrak{C}^1[a, b] \times : \mathfrak{C}[a, b] \to \mathbb{K}$,

  $$h(f, g) := \int_a^b f'\overline{g'}, \qquad k(f, g) := \int_a^b f'\overline{g}$$

  lekpépezések ugyan hermitikus formák, de nem skaláris szorzatok, hiszen bármely bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén az

  $$f(x) := c \in \mathbb{R} \qquad (x \in [a, b])$$

  függvényre
  $$h(f, f) = k(f, f) = 0.$$

1.4.6. példa. Ha $d \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, akkor a

$$h : \mathfrak{C}^1(A) \times \mathfrak{C}^1(A) \to \mathbb{K}, \qquad h(f,g) := \int_A \langle \operatorname{grad} f, \overline{\operatorname{grad} g} \rangle = \int_A \sum_{k=1}^{d} \partial_k f(x) \overline{\partial_k g(x)}\, dx$$

leképezés (vö. 1.4.2. példa) ugyan hermitikus forma, de nem skaláris szorzat, hiszen bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \in \mathbb{R} \qquad (x \in A)$$

függvényre

$$h(f,f) = 0.$$

1.4.12. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{Sp}(AB^*) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \overline{b_{kl}} \qquad (A, B \in \mathbb{K}^{m \times n})$$

leképezés skaláris szorzat!

Útm. Ha

$$A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n} \qquad \text{és} \qquad \alpha \in \mathbb{K},$$

akkor

- $\langle A, A \rangle = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2 \geq 0$ és $\langle A, A \rangle = 0$ esetén

  $$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2 = 0,$$

  azaz

  $$a_{kl} = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, m\},\, l \in \{1, \ldots, n\}),$$

  amiből

  $$A = O$$

  következik, ill. ha $A = O$, azaz

  $$a_{kl} = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, m\},\, l \in \{1, \ldots, n\}),$$

  akkor

  $$\langle A, A \rangle = 0.$$

- $$\langle \alpha A, B \rangle = \operatorname{Sp}(\alpha AB^*) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha a_{kl} \overline{b_{kl}} = \alpha \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \overline{b_{kl}} = \alpha \langle A, B \rangle.$$

- az $\langle A+B, C\rangle$ szorzat a következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned}\langle A+B, C\rangle &= \mathrm{Sp}\,((A+B)C^*) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(a_{kl}+b_{kl})\overline{c_{kl}} = \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{c_{kl}} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\overline{c_{kl}} = \\ &= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle.\end{aligned}$$

- $\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}\,(AB^*) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{b_{kl}} = \overline{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \overline{a_{kl}}b_{kl}} = \overline{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\overline{a_{kl}}} = \overline{\langle B, A\rangle}$. ■

1.4.13. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós ($d := \dim(\mathcal{X})$), melynek bázisa $b_1, \ldots, b_d$, és bármely $x, y \in \mathcal{X}$ vektor esetén

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k b_k, \qquad \text{ill.} \qquad y = \sum_{k=1}^{d} y_k b_k,$$

akkor az

$$s : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad s(x, y) := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k}$$

leképezés skaláris szorzat!

Útm. Ha

$$x, y, z \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \alpha \in \mathbb{K},$$

akkor

- $s(x, x) = \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{x_k} \geq 0$, és $s(x, x) = 0$ esetén

$$\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 = 0,$$

  azaz

$$x_k = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, d\}),$$

  amiből $x = 0$ következik; ill. ha $x = 0$, azaz

$$x_k = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, d\}),$$

  akkor

$$s(x, x) = 0.$$

- $s(\alpha x, y) = \sum_{k=1}^{d} (\alpha x_k)\overline{y_k} = \alpha \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k} = \alpha s(x, y)$.

- $s(x+y,z) = \sum_{k=1}^{d}(x_k+y_k)\overline{z_k} = \sum_{k=1}^{d}\{x_k\overline{z_k}+y_k\overline{z_k}\} = \sum_{k=1}^{d}x_k\overline{z_k}+\sum_{k=1}^{d}y_k\overline{z_k} = s(x,z)+s(y,z).$
- $s(x,y) = \sum_{k=1}^{d}x_k\overline{y_k} = \overline{\sum_{k=1}^{d}\overline{x_k}y_k} = \overline{\sum_{k=1}^{d}y_k\overline{x_k}} = \overline{s(y,x)}.$ ■

1.4.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $2 \leq d \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{S}^{d-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\|_2 = 1\right\},$$

akkor a

$$h(u,v) := \arccos\left(\langle u,v\rangle\right) \qquad (u,v \in \mathcal{S}^{d-1})$$

leképezés skaláris szorzat!

1.4.3. definíció. Az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ rendezett párt **euklideszi tér**nek nevezzük, ha $\mathcal{X}$ vektortér, és a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés skaláris szorzat.

1.4.7. példa. Ha H megszámlálható halmaz, és

$$l_2(H) := \left\{f : H \to \mathbb{K} : \ \sum_{x\in H}|f(x)|^2 < +\infty\right\},$$

akkor $l_2(H)$ euklideszi tér az

$$\langle x,y\rangle_{l_2(H)} := \sum_{x\in H} f(x)\overline{g(x)} \qquad (f,g \in l_2(H))$$

skaláris szorzattal, speciálisan $l_2 = l_2(\mathbb{N})$ euklideszi tér az

$$\langle f,g\rangle_2 := \langle f,g\rangle_{l_2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n} \qquad (x=(x_n), y=(y_n) \in l_2)$$

skaláris szorzattal.

1.4.8. példa. Az 1.4.1. példabeli hermitikus forma nem skaláris szorzat, hiszen, ha $f \neq \widehat{0}$ olyan függvény, amelyre az

$$\{x \in [a,b] : \ f(x) \neq 0\}$$

halmaz véges, akkor

$$h(f,f) = \int_a^b |f|^2 = 0,$$

azaz h nem pozitív definit.

Világos, hogy

1. ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ leképezésnek az $\mathcal{Y}^2$ altérre való $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathcal{Y}^2}$ leszűkítése is skaláris szorzat az $\mathcal{Y}$ altéren, azaz $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathcal{Y}^2})$ is euklideszi tér, amelyet az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ **euklideszi tér alterének** nevezünk.

2. ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, akkor

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ számmal $x = \lambda y$, hiszen

- ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ számmal $x = \lambda y$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, vagy

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle|^2 &= |\langle \alpha y, y\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle y, y\rangle|^2 = \\ &= \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle = \alpha\langle y, \alpha y\rangle\langle y, y\rangle = \\ &= \langle \alpha y, \alpha y\rangle\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle; \end{aligned}$$

- ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle x, y\rangle,$$

továbbá $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor $\langle x, x\rangle \neq 0$ és $\langle y, y\rangle \neq 0$, azaz $\langle x, y\rangle \neq 0$. Így, ha

$$\alpha := \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle},$$

akkor $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, valamint

$$\begin{aligned} \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle &= \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle = 0. \end{aligned}$$

3. ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér és

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér. Ezt röviden így jelöljük: $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) \equiv (\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, és **skaláris szorzat generálta**, vagy **skaláris szorzatból származó normáról** beszélünk. Valamely norma tehát pontosan akkor származik skaláris szorzatból, ha teljesül rá a paralelogramma-szabály, és a skaláris szorzatra a következő azonosság teljesül: bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & (\mathbb{K}=\mathbb{R}), \\ \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{\imath}{4}\left(\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y\|^2\right) & (\mathbb{K}=\mathbb{C}). \end{cases}$$

1.4.9. példa. Ha a 1.4.6. példabeli h hermitikus forma értelmezési tartományában $\mathfrak{C}^1(A)$ helyett $\mathfrak{C}^1_0(A)$-t írunk, ahol

$$\mathfrak{C}^1_0(A) := \left\{f \in \mathfrak{C}^1(A) : \ f(x) = 0\, (x \in \partial A)\right\},$$

akkor h skaláris szorzat, így a

$$\|f\| = \sqrt{h(f,f)} = \sqrt{\int_A \sum_{k=1}^{d} \partial_k f(x)\overline{\partial_k f(x)}\, dx} \qquad (f \in \mathfrak{C}^1_0(A))$$

leképezés norma.

1.4.10. példa. Könnyen belátható, hogy az 1.4.12. feladatbeli skaláris szorzatból származó norma a Frobenius-norma, hiszen bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ esetén

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(AA^*)}.$$

1.4.11. példa. Ha

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $x := (x_n) \in l_2$, és

$$\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{azaz} \qquad \|x\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

1.4.12. példa. Ha

$$f(x) := x + x^2\imath \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, és

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 (x+x^2\imath)\overline{(x+x^2\imath)}\,\mathrm{d}x = \int 0^1 (x+x^2\imath)(x-x^2\imath)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15},$$

azaz

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{8}{15}}.$$

Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség a következőképpen fogalmazható meg:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy alkalmas $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ számmal $x = \lambda y$. Ez azt jelenti, hogy ha $\|x\| \cdot \|y\| \neq 0$, akkor

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1,1].$$

Ez igazolja az alábbi értelmezés jogosságát.

1.4.4. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, ill. $x, y \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$ vektorok esetén x és y **szög**ének nevezzük az

$$(x, y)\sphericalangle := \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

valós számot.

1.4.14. feladat. Számítsuk ki l_2-ben az

$$x_n := \frac{1}{2^n}, \quad y_n := \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorok szögét!

Útm. Mivel

$$\langle x, y\rangle_{l_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

és

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}} = \|y\|_{l_2},$$

ezért

$$(x, y)\sphericalangle = \arccos\left(\frac{3}{5}\right). \quad \blacksquare$$

1.4.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, akkor fennáll az

$$\left|\int_0^1 f(x) \cos(\pi x)\, dx\right| < \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$$

egyenlőstlenség!

Útm. Ha

$$f \in \mathfrak{C}[0,1] \qquad \text{és} \qquad g(x) := \cos(\pi x) \quad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,$$

továbbá

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{és} \qquad \|f\|_2^2 = \int_0^1 \cos^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Így a Cauchy-Bunyoakovszkij-egyenlőtlenség (vö. 1.4.3. feladat) felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. ■

1.4.16. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $x, y \in \mathcal{X}$ pedig olyan vektorok, amelyre

$$\|x\| = 1 = \|y\|,$$

akkor igaz a

$$\langle x, y\rangle = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y$$

implikáció!

Útm. Mivel a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségben egyenlőség van, ezért alkalmas $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $x = \lambda y$. Így

$$1 = \langle x, y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \lambda\|y\|^2 = \lambda,$$

azaz

$$1 = \lambda, \qquad \text{ill.} \qquad x = y. \quad ■$$

1.4.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{K}^d, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1],$$

úgy tetszőleges $p \in [1, +\infty]$ esetén $\|\cdot\|_p$-t pontosan akkor generálja skaláris szorzat, ha $p = 2$ teljesül!

Útm.

1. Az $\mathcal{X} := \mathbb{K}^d$ esetben:
   - bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$ esetén
   $$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k},$$
   akkor triviálisan
   $$\|x\|_2^2 = \langle x, x\rangle.$$
   - ha $p \in [1, +\infty)$ és
   $$x = (1,1,0,0\ldots,0), \qquad \text{ill.} \qquad y = (1,-1,0,0\ldots,0),$$
   úgy
   $$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 4 + 4 = 8 = 4\cdot 2^{2/p} = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$$
   nem teljesül, ha $p \neq 2$;

- ha $p = +\infty$, akkor
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \|y\|_p = 1,$$
ezért a paralelogramma-szabály nem teljesül.

2. Az $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1]$ esetben:

- bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f\overline{g},$$
akkor triviálisan
$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle;$$

- ha $p \in [1, +\infty)$, ill.
$$f(x) := x \quad \text{és} \quad g(x) := 1 - x \qquad (x \in [0,1]),$$
úgy
$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 1 + (p+1)^{-2/p} = 4(p+1)^{-2/p} = 2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2)$$
pontosan akkor teljesül, ha
$$(p+1)^2 = 3^p, \qquad \text{azaz} \qquad p = 2;$$

- ha $p = +\infty$, akkor az előző f-fel és g-vel
$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2),$$
ezért a paralelogramma-szabály nem teljesül. ■

1.4.18. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, úgy pontosan akkor van olyan
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$
skaláris szorzat, amelyre
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
ha bármely
$$3 \leq k \in \mathbb{N}, \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$$
esetén fennáll a
$$\left\|\sum_{l=1}^k \alpha_l x_l\right\|^2 = -\sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \|x_l - x_m\|^2$$
egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, akkor bármely

$$3 \leq k \in \mathbb{N}, \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$$

esetén

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \|x_l - x_m\|^2 &= \sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \left\{\|x_l\|^2 - \langle x_l, x_m\rangle - \langle x_m, x_l\rangle + \|x_m\|^2\right\} = \\ &= \sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \left\{\|x_l\|^2 + \|x_m\|^2\right\} - \\ &\quad - \sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \left\{\langle x_l, x_m\rangle + \langle x_m, x_l\rangle\right\}.\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$-\sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \left\{\|x_l\|^2 + \|x_m\|^2\right\} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \|x_j\|^2,$$

hiszen rögzített j-re a $\|x_j\|^2$ tag a $-\alpha_j\alpha_m$ együtthatójú $\|x_l\|^2$, ill. a $-\alpha_l\alpha_j$ együtthatójú $\|x_m\|^2$ tagok között pontosan akkor fordul elő, ha $m > j$, ill. $l < j$. Így $\|x_j\|^2$ együtthatója

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}} -\alpha_j\alpha_i,$$

ami

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

miatt α_j^2-tel egyenlő. Ezért

$$\begin{aligned}-\sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \|x_l - x_m\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \|x_j\|^2 + \sum_{1\leq l<m\leq k} \alpha_l\alpha_m \left\{\langle x_l, x_m\rangle + \langle x_m, x_l\rangle\right\} = \\ &= \sum_{l,m=1}^{k} \alpha_l\alpha_m \langle x_l, x_m\rangle = \left\|\sum_{l=1}^{k} \alpha_l x_l\right\|^2.\end{aligned}$$

2. lépés. Ha $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $k = 3$ és

$$x_1 =: x, \qquad x_2 =: y, \qquad x_3 =: 0, \qquad \alpha_1 := 1, \qquad \alpha_2 := 1, \qquad \alpha_3 := -2,$$

akkor

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2,$$

azaz

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

így teljesül a paralelogramma-szabály. ■

1.4.19. feladat. Lássuk be, hogy bármely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén, ha van olyan

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

skaláris szorzat, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

úgy

(1) ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $x, y \in \mathcal{X}$ olyan vektorok, amelyekre $\|x\| = \|y\|$, akkor fennáll a

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\beta x + \alpha y\|$$

egyenlőség;

(2) alkalmas $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ szám esetén, ha $x, y \in \mathcal{X}$ olyan vektorok, amelyekre $\|x\| = \|y\|$, akkor fennáll a

$$\|\gamma x + y\| = \|x + \gamma y\|$$

egyenlőség;

(3) ha $x, y, z \in \mathcal{X}$ olyan vektorok, amelyekre

$$\|x\| = \|y\| \qquad \text{és} \qquad x + y + z = 0,$$

akkor fennáll a

$$\|x - y\| = \|y - z\|$$

egyenlőség!

Útm. Tudjuk (vö. 1.4.19. feladat), hogy ha

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

skaláris szorzat, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor

(1) bármely

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad x, y \in \mathcal{X} : \ \|x\| = \|y\|$$

esetén

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\|^2 &= \|\alpha x + \beta y + (-\alpha - \beta)0\|^2 = \\ &= \alpha(\alpha+\beta)\|x\|^2 + \beta(\alpha+\beta)\|y\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \|\beta x + \alpha y\|^2 &= \|\beta x + \alpha y + (-\alpha - \beta)0\|^2 = \\ &= \beta(\alpha+\beta)\|x\|^2 + \alpha(\alpha+\beta)\|y\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Innen pedig

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\beta x + \alpha y\|$$

következik.

(2) Ha $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ és $x, y \in \mathcal{X}$, akkor (vö. 1.4.19. feladat)

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \left\|\frac{1}{\gamma}(\gamma x) + (-y) + \left(-1-\frac{1}{\gamma}\right)0\right\|^2 = \\ &= \frac{\gamma+1}{\gamma^2}\|\gamma x\|^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma}\|y\|^2 - \frac{1}{\gamma}\|\gamma x + y\|^2\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \left\|x + \frac{1}{\gamma}(-\gamma y) + \left(-1-\frac{1}{\gamma}\right)0\right\|^2 = \\ &= \frac{\gamma+1}{\gamma}\|x\|^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma^2}\|\gamma y\|^2 - \frac{1}{\gamma}\|x + \gamma y\|^2.\end{aligned}$$

Ha tehát $\|x\| = \|y\|$, akkor

$$\|\gamma x + y\| = \|x + \gamma y\|.$$

(3) bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$:

$$\|x\| = \|y\| \qquad \text{és} \qquad x + y + z = 0$$

esetén **(2)**-ből a $\gamma := 2$ értékkel azt kapjuk, hogy

$$\|x + 2y\| = \|2x + y\|,$$

így

$$\|x - (-x-y)\| = \|y - (-x-y)\|,$$

ahonnan $x + y + z = 0$ felhasználásával

$$\|x - z\| = \|y - z\|$$

következik. ■

1.4.20. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér és $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor bármely $x, y \in X : y \neq 0$ esetén fenáll a

$$\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 = \frac{\left\|x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle\right\|^2}{\|y\|^2}$$

egyenlőség!

Útm. Tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\left\|x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle\right\|^2 &= \left\langle x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle, x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle\right\rangle = \\
&= \|y\|^4 \cdot \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle \cdot \|y\|^2 \cdot \langle y, x\rangle - \\
&\quad \underbrace{-\|y\|^2 \cdot \langle y, x\rangle \cdot \overline{\langle y, x\rangle} + |\langle x, y\rangle|^2 \cdot \langle y, y\rangle}_{=0} = \\
&= \|y\|^2 \cdot \left(\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle \cdot \overline{\langle x, y\rangle}\right) = \\
&= \|y\|^2 \cdot \left(\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Mivel

$$\left\|x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle\right\|^2 \geq 0,$$

ezért

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \qquad (x, y \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

Továbbá egyenlőség pontosan akkor ál fenn, ha x és y lineárisan összefüggő, hiszen

- ha egyenlőség van, akkor

  $$\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \left\|x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle\right\| = 0,$$

  így

  $$x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle = 0,$$

  ahonnan már következik, hogy x és y lineárisan összefüggő, ui. ha $y = 0$, akkor x és 0 triviálisan összefügg, ha pedig $y \neq 0$, akkor $\|y\|^2 \neq 0$, ezért

  $$x = \frac{y \cdot \langle x, y\rangle}{\|y\|^2}.$$

- ha x és y lineárisan összefüggő, akkor $x = 0$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$, így

  $$x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle = 0,$$

  ha pedig $x \neq 0$, akkor a lineáris függőség miatt van olyan $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, hogy $y = \alpha x$, azaz

  $$x \cdot \|y\|^2 - y \cdot \langle x, y\rangle = \alpha^2 \cdot \|x\|^2 \cdot x - \langle x, \alpha x\rangle \cdot \alpha x = \alpha^2 \cdot \|x\|^2 \cdot x - \overline{\alpha} \cdot \alpha \cdot \|x\|^2 \cdot x = 0. \quad \blacksquare$$

1.4.21. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér és $u, v \in \mathcal{X}$, akkor igaz az

$$(\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle \quad (x \in \mathcal{X})) \qquad \Longrightarrow \qquad u = v$$

implikáció!

Útm. Az

$$(\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle \quad (x \in \mathcal{X})) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\langle x, u - v\rangle = 0 \quad (x \in \mathcal{X}))$$

ekvivalenciával az

$$x := u - v$$

vektorra $\langle x, x\rangle = 0$, ami a skaláris szorzat pozitív definit tulajdonságának következtében azt jelenti, hogy $u = v$. ■

1.4.22. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $a \in \mathcal{X}$, akkor az

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{X} : \ \langle x, a\rangle = 0\}$$

halmaz altér $\mathcal{X}$-ben!

Útm. Világos, hogy bármely $u, v \in \mathcal{A}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\langle u + \alpha v, a\rangle = \langle u, a\rangle + \alpha\langle v, a\rangle = 0 + \alpha 0 = 0. \quad \blacksquare$$

1.4.23. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$, $a, b \in \mathcal{X}$, továbbá alkalmas $x \in \mathcal{X}$, ill. $0 < r < R \in \mathbb{R}$ esetén

$$\max\{\|x - a\|, \|x - b\|\} \leq R \qquad \text{és} \qquad \left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| \geq r$$

akkor fennáll a

$$\|a - b\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

egyenlőtlenség!

Útm. A paralelogramma-szabály (vö. 1.4.11. feladat) következtében

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= \|(x - b) - (x - a)\|^2 = \\ &= 2\|x - b\|^2 + 2\|x - a\|^2 - \|x - b + x - a\|^2 = \\ &= 2\|x - b\|^2 + 2\|x - a\|^2 - 4\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.4.24. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá az

$$x_n, y_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra

$$\lim(x_n) = x \in \mathcal{X}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(y_n) = y \in \mathcal{X},$$

akkor igaz a

$$\lim(\langle x_n, y_n\rangle) = \langle x, y\rangle$$

állítás!

Útm.

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = \\
&= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leq \\
&\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Az 1.4.24. feladatban megfogalmazott állításra úgy is szokás hivatkozni, hogy a **skaláris szorzat folytonos** leképezés.

1.4.25. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá az

$$x_n, y_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok mindegyike Cauchy-sorozat, akkor az $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is Cauchy-sorozat (és így konvergens)!

Útm. Mivel (x_n) és (y_n) korlátos (vö. 1.2.39. feladat), ezért alkalmas $K > 0$ számra

$$\|x_n\| \leq K, \quad \|y_n\| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
|\langle x_m, y_m\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| &= |\langle x_m, y_m\rangle - \langle x_m, y_n\rangle + \langle x_m, y_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq \\
&\leq |\langle x_m, y_m\rangle - \langle x_m, y_n\rangle| + |\langle x_m, y_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq \\
&\leq |\langle x_m, y_m - y_n\rangle| + |\langle x_m - x_n, y_n\rangle| \leq \\
&\leq \|x_m\| \cdot \|y_n - y_m\| + \|x_m - x_n\| \cdot \|y_n\| \leq \\
&\leq K\left(\|y_n - y_m\| + \|x_m - x_n\|\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4.26. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, úgy

1. ha $\overline{H} = \mathcal{X}$, akkor minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \quad (z \in H) \qquad \Longrightarrow \qquad x = y;$$
2. bármely $x_n, x \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$:
$$\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle\,, \quad \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \qquad (n \to \infty)$$
sorozat esetén igaz a $\lim(x_n) = x$ állítás!

Útm.

1. Ha
$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \qquad (z \in H),$$
akkor
$$0 = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = \langle x - y, z\rangle \qquad (z \in H).$$
Ha
$$z_n \in H \quad (n \in \mathbb{N}): \qquad z_n \to x - y \quad (n \to \infty),$$
akkor
$$0 = \langle x - y, z_n\rangle \to \langle x - y, x - y\rangle \quad (n \to \infty),$$
azaz $\|x - y\|^2 = 0$, így $x = y$.
2. Világos, hogy
$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 - 2\Re(\langle x_n, x\rangle) + \|x\|^2.$$
A valós rész folytonossága miatt
$$\lim(\langle x_n, x\rangle) = \langle x, x\rangle \quad \Longrightarrow \quad \lim(\Re(\langle x_n, x\rangle)) = \Re(\langle x, x\rangle) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$
így
$$\lim(\|x_n\|) = \|x\|$$
miatt
$$\lim\left(\|x_n - x\|^2\right) = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$
ahonnan
$$\lim(\|x_n - x\|) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim(x_n) = x$$
következik. ■

1.4.27. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá alkalmas $a \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$ esetén az

$$f, g : (a-\delta, a+\delta) \to \mathcal{X}$$

függvényekre $f, g \in \mathfrak{D}[a]$, akkor a

$$\varphi(x) := \langle f(x), g(x)\rangle \qquad (x \in (a-\delta, a+\delta))$$

függvény differenciálható a-ban és bármely $x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén igaz az ún.

$$\varphi'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle$$

(**Leibniz-szabály**)!

Útm. Bármely

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \qquad \text{és} \qquad h \in \mathbb{R}: \quad x+h \in (a-\delta, a+\delta)$$

esetén

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \left\langle \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, g(a+h)\right\rangle + \left\langle f(a), \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right\rangle. \quad \blacksquare$$

1.4.28. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor $\|\cdot\|$ egyenletesen konvex (vö. 1.3.18. definíció)!

Útm. Ha

$$\varepsilon > 0, \qquad x, y \in \mathcal{X}: \quad \|x\|, \|y\| \le 1 \quad \text{és} \quad \|x-y\| \ge \varepsilon,$$

akkor a paralelogramma-szabály következtében

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 &= \frac{\|x+y\|^2}{4} = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4} \le \\ &\le 1 - \frac{\|x-y\|^2}{4} \le 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

Ha tehát

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon^2}{8}, \frac{1}{2}\right\}, \qquad \text{akkor} \qquad 2\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon^2}{4}, 1\right\},$$

valamint

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \le 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \le 1 - 2\delta \le 1 - 2\delta + \delta^2 = (1-\delta)^2,$$

azaz

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta,$$

mivel $\delta \le 1/2$ következtében $1 - \delta > 0$. $\blacksquare$

1.4.29. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér és

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor a $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér szigorúan normált!

Útm. Ha valamely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

és $y := 0 \in \mathcal{X}$, akkor a $\lambda := 0$ választással $y = \lambda x$. Feltehető ezért, hogy $y \neq 0 \in \mathcal{X}$. Mivel

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2,$$

továbbá

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2,$$

ezért az

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$$

egyenlőségből

$$\Re(\langle x, y\rangle) = \|x\| \cdot \|y\|$$

következik. Így a

$$\varphi(t) := \|x - ty\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

függvényre

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \langle x - ty, x - ty\rangle = \|x\|^2 - 2t\Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 t^2 = \\ &= \|x\|^2 - 2t\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 t^2 = (\|x\| - t\|y\|)^2 \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda := \frac{\|x\|}{\|y\|} \qquad (\geq 0)$$

választással

$$0 = \varphi(\lambda) = \|x - \lambda y\|^2,$$

azaz $x = \lambda y$. ■

1.4.30. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ és $(\mathcal{Y}, q)$ izometrikusan izomorf normált terek, akkor $(\mathcal{X}, p)$ pontosan akkor euklideszi tér, ha $(\mathcal{Y}, q)$ is euklideszi tér!

Útm. Ha pl. $(\mathcal{X}, p)$ euklideszi tér és

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

izometrikus izomorfizmus, akkor φ^{-1} is izometrikus izomorfizmus (vö. 1.3.15. feladat), így bármely $y \in \mathcal{Y}$ vektor esetén

$$p(\varphi^{-1}(y)) = q(y).$$

Így, ha p-re teljesül a paralelogramma-szabály, akkor q-ra is. ■

1.4.31. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex, nyílt halmaz, akkor

1. valamely $f \in \mathfrak{C}^1(A, \mathbb{R})$ függvény pontosan akkor konvex, ha

$$E(u,v) := f(v) - f(u) - \langle f'(u), v-u \rangle \geq 0 \qquad (u, v \in A);$$

2. valamely $f \in \mathfrak{C}^1(A, \mathbb{R})$ függvény pontosan akkor konvex, ha f' **monoton**, azaz

$$\langle f'(u) - f'(v), u-v \rangle \geq 0 \qquad (u, v \in A);$$

3. valamely $f \in \mathfrak{C}^2(A, \mathbb{R})$ függvény pontosan akkor konvex, ha f'' **pozitív szemidefinit**, azaz

$$\sum_{k,l=1}^{d} \partial_{kl} f(u) \xi_k \xi_l \geq 0 \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d,\ u \in A)$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Mivel A konvex, ezért tetszőleges $a, b \in A$ esetén

$$(1-t)a + tb \in A \qquad (t \in [0,1]),$$

így a

$$\varphi(t) := f(x_t), \qquad x_t := (1-t)a + tb \qquad (t \in [0,1])$$

függvény differenciálható és deriváltjára

$$\varphi'(t) = \langle f'(x_t), b-a \rangle \qquad (t \in [0,1])$$

teljesül. Mivel f konvex és bármely $\alpha \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi((1-\alpha)s + \alpha t) &= f((1-\alpha)x_s + \alpha x_t) \leq \\ &\leq (1-\alpha)f(x_s) + \alpha f(x_t) = (1-\alpha)\varphi(s) + \alpha\varphi(t), \end{aligned}$$

ezért φ is konvex. Így bármely $\varepsilon \in (0,1)$ esetén

$$\varphi(\varepsilon) \leq (1-\varepsilon)\varphi(0) + \varepsilon\varphi(1), \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \leq \varphi(1) - \varphi(0).$$

Az $\varepsilon \to 0$ határátmenettel így azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(0) \leq \varphi(1) - \varphi(0), \qquad \text{azaz} \qquad E(x_0, x_1) \geq 0.$$

2. lépés. Ha bármely $u, v \in A$ esetén

$$E(u,v) \geq 0,$$

akkor

$$0 \leq E(x_0, x_1) + E(x_1, x_0) = \langle f'(x_1) - f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0,$$

azaz f' monoton.

3. lépés. Ha f' monoton, akkor a fent definiált φ függvény esetén φ' is monoton, hiszen

$$\varphi'(t) - \varphi'(s) = \frac{\langle f'(x_t) - f'(x_s), x_t - x_s\rangle}{t - s} \geq 0.$$

Így bármely $\alpha \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(\varphi(\alpha) - \varphi(0)) &= (1-\alpha)\int_0^\alpha \varphi'(\sigma)\,d\sigma \leq (1-\alpha)\alpha\varphi'(\alpha) \leq \\ &\leq \alpha \int_\alpha^1 \varphi'(\sigma)\,d\sigma = \alpha(\varphi(1) - \varphi(\alpha)),\end{aligned}$$

azaz

$$\varphi(\alpha) \leq (1-\alpha)\varphi(0) + \alpha\varphi(1),$$

ill.

$$f(x_\alpha) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1),$$

ami azt jelenti, hogy f konvex.

4. lépés. Ha f konvex, akkor bármely $x \in A$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, ill. alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén

$$0 \leq \frac{1}{\varepsilon}\langle \xi, f'(x + \varepsilon\xi) - f'(x)\rangle \longrightarrow \langle \xi, f''(x)\xi\rangle \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ha pedig f'' pozitív szemidefinit, akkor bármely $u, v \in A$ esetén

$$\langle f'(v) - f'(u), u - v\rangle = \int_0^1 \langle u - v, f''((1-\sigma)u + \sigma v)(u - v)\,d\sigma \geq 0,$$

így a korábbiak miatt f konvex. ■

1.4.2. Ortogonális rendszerek

1.4.5. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $x, y \in \mathcal{X}$, valamint $M, N \subset \mathcal{X}$ esetén azt mondjuk, hogy az

- x **ortogonális (merőleges)** y**-ra** (jelben $x \perp y$), ha $\langle x, y\rangle = 0$;
- x **ortogonális (merőleges)** M**-re** (jelben $x \perp M$), ha x ortogonális M minden elemére:
$$x \in M^\perp := \{z \in \mathcal{X} :\ z \perp y\ (y \in M)\};$$
- M **ortogonális (merőleges)** N-re (jelben $M \perp N$), ha M bármely eleme ortogonáis N-re, azaz bármely $x \in M$ esetén $x \in N^\perp$.

1.4.13. példa. Az $(\mathbb{R}^3, s)$ euklideszi térben (vö. 1.4.13. feladat)

$$M := \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : \ a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \Longrightarrow \qquad M^\perp = \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 : \ c \in \mathbb{R}\},$$

hiszen

- az
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in M^\perp$$
tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $m := (a,b,0)$ vektorra
$$s(x,m) = x_1 a + x_2 b + 0 = 0,$$
ahonnan az $a := x_1$, $b := x_2$ helyettesítéssel $x_1 = x_2 = 0$ következik;
- ha $x_1 = x_2 = 0$, akkor
$$x \in M^\perp$$
triviálisan teljesül.

1.4.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha az $(\mathbb{R}^d, s)$ euklideszi térben (vö. 1.4.13. feladat)

$$m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad M := \{m\},$$

akkor fennáll az

$$M^\perp = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^{d} m_k x_k = 0 \right\}$$

egyenlőség!

Útm.

Így valamely véges dimenziós euklideszi tér esetében bármely M halmazhoz $M^\perp$ kiszámítása rendkívül egyszerű.

1.4.32. feladat. Az

$$M := \{(x_n) \in l_2 : \ x_{2n} = 0 \ (n \in \mathbb{N})\}$$

halmaz esetében határozzuk meg $M^\perp$-t!

Útm. Ha

$$N := \{(x_n) \in l_2 : \ x_{2n-1} = 0 \ (n \in \mathbb{N})\},$$

akkor bármely $x \in N$ és $y \in M$ esetén

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = 0,$$

azaz $x \in M^\perp$, ahonnan $N \subset M^\perp$ következik. Ha most $x \in M^\perp$ olyan sorozat, amelyre alkalmas $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{2m-1} \neq 0,$$

akkor az

$$e_{2m-1} := (\delta_{j2m-1})_{j\in\mathbb{N}} \in l_2$$

vektorral

$$0 = \langle x, e_{2m-1} \rangle = x_{2m-1},$$

ami nem lehetséges, azaz minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{2m-1} = 0.$$

Ezért $x \in N$, azaz

$$M^\perp \subset N. \quad \blacksquare$$

1.4.33. feladat. Az

$$(L^2[a,b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$$

(**Lebesgue-féle euklideszi**) térben az

$$M := \left\{ f \in L^2[a,b] : \ \exists\, c \in \mathbb{K} : \ f(x) = c \ (x \in [a,b]) \right\}$$

halmaz esetében határozzuk meg $M^\perp$-t!

Útm. Valamely $u \in L^2[a,b]$ függvényre $u \perp M$ pontosan akkor teljesül, habármely $c \in \mathbb{K}$ esetén

$$\int_a^b u\widehat{c}\, \mathrm{d}\mu_1 = 0,$$

így

$$M^\perp = \left\{ u \in L^2[a,b] : \ \int_a^b u\, \mathrm{d}\mu_1 = 0 \right\}. \quad \blacksquare$$

1.4.34. feladat. A

$$(\mathfrak{C}[a,b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$$

euklideszi térben az

$$M := \left\{ \mathrm{id}^n|_{[a,b]} : \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

halmaz esetében határozzuk meg $M^\perp$-t!

Útm. Mivel

$$\overline{\mathrm{id}^n|_{[a,b]}} = \mathrm{id}^n|_{[a,b]} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ezért elegendő valós értékű függvényeket tekintenünk, azaz az

$$\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \in \mathfrak{C} \}$$

térrel dolgoznunk. Ha tehát valamely $g \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén $g \in M^\perp$, akkor

$$\int_a^b g(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ha pedig vaamely $m \in \mathbb{N}$, ill. $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) := \sum_{n=1}^{m} a_n x^n \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$\int_a^b g(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{m} g(x)a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m} a_n \int_a^b g(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0,$$

és így

$$\int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b \left((g(x))^2 - g(x)p(x)\right) \,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\left(g(x) - p(x)\right) \,\mathrm{d}x.$$

A Weierstraß-féle I. approximációs tétel (vö. 2.3.7. feladat) következtében bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan p_ε polinom, hogy

$$\|g - p_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon \qquad (x \in [a,b]),$$

továbbá

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x\right| &= \int_a^b g(x)\left(g(x) - p_\varepsilon(x)\right) \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |g(x)| \cdot |g(x) - p_\varepsilon(x)| \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \|g(x) - p_\varepsilon(x)\|_\infty (b-a) < \|g\|_\infty (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért

$$\int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

így g^2 folytonossága, ill. nemnegativitása következtében

$$g(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$M^\perp = \{f\},$$

ahol

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [a,b]). \quad \blacksquare$$

1.4.35. feladat. Az $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l_2})$ tér, ill. az

$$A := \{x = (x_n) \in l_2 : \ x_1 = 0\}$$

halmaz esetében

1. mutassuk meg, hogy A zárt altere l_2-nek,
2. határozzuk meg $A^\perp$-t,
3. igazoljuk, hogy
$$l_2 = A \oplus A^\perp$$
teljesül!

Útm.

1. Ha $x = (x_n), y = (y_n) \in A$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $x_1 + \alpha y_1 = 0$, azaz $x + \alpha y \in A$. Ha $x = (x_n) \in l_2$ és $(x^{(n)}) := (x_k^{(n)}) \in A$ olyan sorozat, amelyre $x_1^{(n)} = 0$ és
$$\|x^{(n)} - x\|_{l_2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to 0),$$
akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy
$$|x_1|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^2 < \varepsilon^2,$$
ezért $|x_1| < \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy $x_1 = 0$, azaz $x \in l_2$.
2. Mivel
$$A^\perp = \left\{u = (u_n) \in l_2 : \ \sum_{n=2}^{\infty} x_n \overline{u_n} = 0 \, (x = (x_n) \in {}_2)\right\},$$
ezért, ha $x = (e_n) = (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$, akkor
$$u_n = 0 \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}),$$
és így
$$A^\perp = \{(u_0,0,0,\ldots) \in l_2 : \ u_0 \in \mathbb{K}\}$$
egydimenziós altér l_2-ben.
3. Mivel bármely $x = (x_n) \in l_2$ egyértelműen írható az
$$x = y + z$$
alakba, ahol
$$y := (0, x_2, x_3, \ldots) \qquad \text{és} \qquad z := (x_1,0,0,\ldots),$$
ezért fennáll az
$$l_2 = A \oplus A^\perp$$
egyenlőség. ■

1.4.36. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ vektorra
$$x \perp y \qquad \Longrightarrow \qquad y \perp x.$$
2. Fennállnak az
$$\mathcal{X}^\perp = \{0\}, \qquad \{0\}^\perp = \mathcal{X}$$
egyenlőségek, továbbá a nullvektor az egyetlen olyan vektor, amely merőleges önmagára, azaz bármely $A \subset \mathcal{X}$ esetén
$$A \cap A^\perp \subset \{0\}.$$
3. Ha $A \subset B \subset \mathcal{X}$, akkor
$$B^\perp \subset A^\perp.$$
4. Ha $A \subset \mathcal{X}$, akkor $A^\perp$ zárt altér $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban, továbbá
$$A^\perp = (\mathrm{span}\,(A))^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{\mathrm{span}\,(A)}^\perp$$
és
$$A \cap A^\perp = \{0\} \cap A, \qquad \text{azazz} \qquad A \cap A^\perp = \begin{cases} \{0\} & (0 \in A), \\ \emptyset & (0 \notin A). \end{cases}$$
5. Ha $A \subset \mathcal{X}$, akkor
$$A \subset A^{\perp\perp} \qquad \text{és} \qquad A^\perp = A^{\perp\perp\perp},$$
ahol
$$A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp \qquad \text{és} \qquad A^{\perp\perp\perp} := (A^{\perp\perp})^\perp.$$
6. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ vektorra
$$x \perp y \qquad \Longrightarrow \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \textbf{(Pitagorasz-tétel)}.$$

Útm.

1. Mivel bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle},$$
ezért
$$x \perp y \qquad \Longrightarrow \qquad y \perp x.$$
2. Mivel $\langle 0,0\rangle = 0$, ezért 0 ortogonális önmagára. Ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén $x \perp x$, azaz $\langle x, x\rangle = 0$ akkor a skaláris szorzat pozitív definit tulajdonsága következtében $x = 0$. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $\langle 0, x\rangle = 0$, ezért $\{0\} \subset \mathcal{X}^\perp$. Ha $z \in \mathcal{X}^\perp$, akkor $z \perp z$, ahonnan $z = 0$ következik. Következésképpen $\mathcal{X}^\perp \subset \{0\}$.

3. Ha $A \subset B$ és $z \in B^\perp$, akkor bármely $y \in B$ esetén $z \perp y$, azaz ha $y \in A$, akkor $z \perp y$, innen pedig $z \in A^\perp$ következik.

4. **1. lépés.** Mivel bármely $x \in A$ esetén $\langle 0, x\rangle = 0$, ezért $0 \in A^\perp$, azaz $A^\perp \neq \emptyset$. Ha $x, y \in A^\perp$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor bármely $z \in A$ esetén $\langle x, z\rangle = 0$ és $\langle y, z\rangle = 0$, ahonnan

$$\langle x + \alpha y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha\langle y, z\rangle = 0 + 0 = 0$$

következik, azaz $A^\perp$ altér. Ha valamely $y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\varphi_y : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad \varphi_y(z) := \langle z, y\rangle,$$

akkor φ_y folytonos (vö. 1.4.24. feladat), ezért

$$\{y\}^\perp = \{z \in \mathcal{X} : \ z \perp y\} = \{z \in \mathcal{X} : \ \varphi_y(z) = \langle z, y\rangle = 0\} = \varphi_y^{-1}[\{0\}].$$

Ebből $\{y\}^\perp$ zártsága következik. Mivel

$$A^\perp = \{z \in \mathcal{X} : \ z \perp y \, (y \in A)\} = \bigcap_{y \in A} \{z \in \mathcal{X} : \ z \perp y\} = \bigcap_{y \in A} \{y\}^\perp,$$

ezért $A^\perp$ (mint zárt halmazok metszete) zárt.

2. lépés. Mivel

$$A \subset \operatorname{span}(A) \subset \overline{\operatorname{span}(A)} \qquad \text{és} \qquad A \subset \overline{A} \subset \operatorname{span}(\overline{A}) \subset \overline{\operatorname{span}(A)}$$

(vö. 1.3.40. feladat), ezért az előző állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\overline{\operatorname{span}(A)}^\perp \subset \operatorname{span}(A)^\perp \subset A^\perp \qquad \text{és} \qquad \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp \subset \operatorname{span}(\overline{A})^\perp \subset \overline{A}^\perp \subset A^\perp.$$

Megmutatjuk, hogy

$$A^\perp \subset \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$$

teljesül. Ha ui.

$$x \in A^\perp \qquad \text{és} \qquad y \in \overline{\operatorname{span}(A)},$$

akkor alkalmas

$$y_n \in \operatorname{span}(A) \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad \lim(y_n) = y$$

sorozat, ill. $m_n \in \mathbb{N}$ index és

$$y_{n,k} \in A, \qquad \alpha_{n,k} \in \mathbb{K}$$

vektorok esetén

$$y_n = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n,k} y_{n,k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így (vö. 1.4.24. feladat)

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim(y_n)\rangle = \lim\left(\langle x, y_n\rangle\right) = \lim\left(\sum_{k=1}^{m_n} \overline{\alpha_{n,k}}\, \langle x, y_{n,k}\rangle\right) = 0,$$

azaz

$$x \in \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp.$$

3. lépés. Ha

$$A \cap A^{\perp} = \emptyset,$$

akkor – lévén, hogy $A^{\perp}$ altér – $0 \in A^{\perp}$ következtében $0 \notin A$. Ebben az esteben az

$$A \cap A^{\perp} = \{0\} \cap A$$

állítás nyilvánvaló. Ha

$$x \in A \cap A^{\perp} \neq \emptyset,$$

akkor $\langle x, x\rangle = 0$, azaz $x = 0$, ahonnan ismét

$$A \cap A^{\perp} = \{0\} \cap A$$

következik.

5. Ha $z \in A$, akkor bármely $y \in A^{\perp}$ esetén $y \perp z$, ahonnan $z \perp y$ következik. Így bármely $y \in A^{\perp}$ esetén $z \perp y$, azaz $z \in (A^{\perp})^{\perp} = A^{\perp\perp}$. Ezzel beláttuk, hogy $A \subset A^{\perp\perp}$. Így

$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^{\perp} \subset A^{\perp},$$

továbbá (az $A \leftrightarrow A^{\perp}$ szerepcserével) $A^{\perp} \subset (A^{\perp})^{\perp\perp}$. Mivel

$$(A^{\perp})^{\perp\perp} = ((A^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (A^{\perp\perp})^{\perp} = A^{\perp\perp\perp},$$

ezért $A^{\perp} \subset A^{\perp\perp\perp}$.

6. Ha $x, y \in \mathcal{X}\colon x \perp y$, azaz $\langle x, y\rangle = 0$, akkor

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

A Pitagorasz-tétel általánosítását tartalmazza az

1.4.37. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, és az $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ vektorok páronként merőlegesek:

$$x_i \perp x_j \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\}: \ i \neq j),$$

akkor fennáll a

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

egyenlőség!

Útm.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{l=1}^{n} x_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \langle x_k, x_l\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \quad \blacksquare$$

1.4.38. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ altér és $x \in \mathcal{X}$, akkor igaz az

$$x \perp A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, m \in A: \ \|x\| \leq \|x - m\|$$

ekvivalencia!

Útm. Világos, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ és $m \in A$ esetén

$$(*) \qquad \|x - \alpha m\|^2 = \langle x - \alpha m, x - \alpha m\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, m\rangle - \alpha\langle m, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle m, m\rangle.$$

Így, ha adott $x \in \mathcal{X}$ esetén

- $x \perp A$, akkor
$$\langle x, m\rangle = \langle m, x\rangle = 0 \qquad (m \in A),$$
azaz $(*)$ miatt
$$\|x - \alpha m\|^2 = \|x\|^2 + \alpha\overline{\alpha}\|m\|^2,$$
ahonnan $\alpha = 1$ esetén
$$\|x - m\|^2 = \|x\|^2 + \|m\|^2 \geq \|x\|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x - m\| \geq \|x\|.$$

- $\|x\| \leq \|x - m\|$ $(m \in A)$, akkor triviálisan
$$\|x\|^2 \leq \|x - m\|^2 \qquad (m \in A).$$
Mivel A altér és $\alpha \in \mathbb{K}$, ezért $\alpha m \in A$, azaz
$$\|x\| \leq \|x - \alpha m\|.$$
Így $(*)$ miatt
$$0 \leq -\overline{\alpha\langle m, x\rangle} - \alpha\langle m, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle m, m\rangle.$$
Ha $m = 0$, akkor triviálisan $\langle m, x\rangle = 0$. Ha $m \neq 0$, akkor az
$$\alpha := \frac{\overline{\langle m, x\rangle}}{\langle m, m\rangle}$$
számmal
$$0 \leq -\frac{\langle m, x\rangle\overline{\langle m, x\rangle}}{\langle m, m\rangle} - \frac{\overline{\langle m, x\rangle}\langle m, x\rangle}{\langle m, m\rangle} + \frac{\overline{\langle m, x\rangle}\langle m, x\rangle}{\langle m, m\rangle},$$
azaz
$$|\langle m, x\rangle|^2 \leq 0.$$
Innen pedig már következik, hogy
$$\langle m, x\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

1.4.2. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $x, y \in \mathcal{X}$, akkor igazak a

$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad (\alpha \in \mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \perp y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x\| \leq \|x+\alpha y\| \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

ekvivalenciák!

Útm.

1.4.39. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor igazak az

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad (\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Longrightarrow \quad x \perp y),$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad (\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \not\Longrightarrow \quad x \perp y)$

implikációk!

Útm. Mivel minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle),$$

ezért, ha

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

akkor

$$\Re(\langle x, y\rangle) = 0.$$

Így

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $\langle x, y\rangle = 0$, azaz $x \perp y$;
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén a $0 \neq x \in \mathcal{X}$ és az $y := \imath x$ vektorokkal

   $$\langle x, y\rangle = -\imath\|x\|^2 \neq 0,$$

   de

   $$\Re(\langle x, y\rangle) = 0. \quad \blacksquare$$

1.4.40. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{X}$, akkor igaz az

$$x_i \perp x_j \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}: \ i \neq j) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1, \ldots, x_n \ \text{ lineárisan független}$$

implikáció!

Útm. Ha valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

és $j \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges index, akkor mivel

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0 \qquad (i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{j\}),$$

ezért

$$|\alpha_j|^2\langle x_j, x_j\rangle = \alpha_j\overline{\alpha_j}\langle x_j, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\alpha_j}\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle x_i, \alpha_j x_j\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, \alpha_j x_j\right\rangle = \langle 0, \alpha_j x_j\rangle = 0,$$

ahonnan $\alpha_j = 0$ következik. ■

1.4.41. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, az $x_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjai páronként ortogonálisak:

$$x_m \perp x_n \qquad (m, n \in \mathbb{N} :\ m \neq n),$$

úgy

1. ha a $\sum\limits_{n=1}(x_n)$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}(\|x_n\|^2)$ sor is konvergens;
2. a $\sum\limits_{n=1}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha minden átrendezése konvergens!

Útm.

1. A
$$\sum_{n=1}(x_n)$$
sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozata konvergens. A Pitagorasz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $n < m$ esetén
$$\left\|\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{m}\|x_k\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2,$$
így ha $\sum\limits_{n=1}(x_n)$ konvergens, akkor (s_n) Cauchy-sorozat. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy a
$$q_n := \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat Cauchy-sorozat, ami $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ teljessége folytán konvergens.
2. Világos, hogy ha a
$$\sum_{n=1}(x_n)$$

minden átrendezése konvergens, akkor maga a sor is konvergens. Ha

$$\sum_{n=1}(x_n) \quad \text{konverges,} \qquad x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

továbbá $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \right\|,$$

ill. bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m \geq N$, akkor

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Továbbá bármely $j \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\{1, \ldots, j\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$, és ha $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy bármely $m \geq N$ esetén $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subset \{1, \ldots, m\}$, akkor a

$$T_m^n := \{1, \ldots, m\} \backslash \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$$

jelöléssel és a Pitagorasz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \right\|^2 = \left\| \sum_{k \in T_m^n} x_k \right\|^2 = \sum_{k \in T_m^n} \|x_k\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Ezért $\sum_{n=1}(\|x_n\|^2)$ konvergenciájának következtében van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \varepsilon^2$, így alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \right\| < \varepsilon \qquad (N \leq m \in \mathbb{N}),$$

azaz a $\sum_{k=1} \left(x_{\sigma(k)}\right)$ sor konvergens. ■

1.4.6. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $n \in \mathbb{N}$ esetén az $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ vektorok **Gram-mátrix**ának nevezzük a

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \ldots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}$$

mátrixot, a

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) := \det(G(x_1, \ldots, x_n))$$

szám neve pedig **Gram-determináns**.

1.4.42. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $n \in \mathbb{N}$, úgy az $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a Gram-determinánsukra

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

akkor

$$\operatorname{rang}\left(G(x_1, \ldots, x_n)\right) < n,$$

ezért oszlopai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak, azaz alkamas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ számokkal

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 > 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_l\rangle \lambda_k = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, n\}).$$

Így a skaláris szorzat homogenitását felhasználva

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_l \right\rangle = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, n\})$$

adódik. Mindkét oldalt $\overline{\lambda_l}$-sal $(l \in \{1, \ldots, n\})$ szorozva azt kapjuk, hogy

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \lambda_l x_l \right\rangle = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, n\}).$$

Összeadva ezeket az egyenlőségeket látható, hogy

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \sum_{l=1}^{n} \lambda_l x_l \right\rangle = 0,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0,$$

és ez a

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 > 0$$

miatt azzal egyenértékű, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok lineárisan összefüggők.

2. lépés. Ha az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor alkamas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ számokkal

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 > 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0.$$

Ezt az egyenlőséget x_l-lel ($l \in \{1, \ldots, n\}$) skalárisan szorozva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_l \rangle \lambda_k = 0 \quad (l \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ennek a λ_l ismeretlenekre vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszernek a

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 > 0$$

feltétel következtében van nem-triviális megoldása, így az egyenletrendszer determinánsa zérus:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0. \quad \blacksquare$$

1.4.7. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ és $\emptyset \neq M \subset \mathcal{X}$ esetén azt mondjuk, hogy

1. M **ortogonális** (vagy **ortogonális rendszer**)/OR/, ha

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad x \perp y \qquad (x, y \in M);$$

2. M **ortonormált** (vagy **ortonormált rendszer**) /ONR/, ha M ortogonális és bármely $x \in M$ esetén $\|x\| = 1$, azaz

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & (x \neq y), \\ & \\ 1 & (x = y) \end{cases} \qquad (x, y \in M).$$

1.4.43. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1\},$$

akkor az

$$e_n(z) := z^n \qquad (z \in K, \, n \in \mathbb{N})$$

függvényrendszer ortogonális az $(L^2(K), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ térben!

Útm. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\int_K e_m \overline{e_n} = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^{1+m+n} \{\cos((m-n)\theta) + \imath \sin((m-n)\theta)\} \, \mathrm{d}(r, \theta) =$$

$$= \left(\int_0^1 r^{1+m+n} \, \mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \exp(\imath(m-n)) \, \mathrm{d}\theta \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2+m+n} \delta_{mn}. \quad \blacksquare$$

1.4.44. feladat. Igazoljuk, hogy $(L^2[-\pi,\pi], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$-ben a $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén az

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\imath nx) \qquad (x\in[-\pi,\pi],\ n\in\mathbb{Z}),$$

ill. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén az

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) & (n>0), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n=0), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) & (n<0) \end{cases} \qquad (x\in[-\pi,\pi],\ n\in\mathbb{Z})$$

függvényrendszer ONR!

Útm.

1. lépés $/\mathbb{K}=\mathbb{C}/$. Bármely $m,n\in\mathbb{Z}$ esetén

$$\langle e_m,e_n\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e_m\overline{e_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 1 & (m=n), \\ \dfrac{1}{2\pi(m-n)\imath}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\imath(m-n)x}\right)\mathrm{d}x = \ldots = 0 & (m\neq n). \end{cases}$$

2. lépés $/\mathbb{K}=\mathbb{R}/$. Az f_n-et komplex értékű $L^2[-\pi,\pi]$-beli függvénynek tekintve $(n\in\mathbb{N})$ könnyen látható, hogy fennáll az

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{\imath\sqrt{2}}(e_n-e_{-n}) & (n>0), \\ e_0 & (n=0), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n+e_{-n}) & (n<0) \end{cases} \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

egyenlőség. Innen az $|m|\neq|n|$ esetben

$$\langle f_m,f_n\rangle_{L^2} = 0$$

következik. Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\|f_{\pm n}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|e_n\mp e_{-n}\|_{L^2} = \frac{1}{2}\left\{\|e_n\|_{L^2}^2 \mp \Re(\langle e_n,e_{-n}\rangle_{L^2}) + \|e_{-n}\|_{L^2}^2\right\} = 1$$

és

$$\begin{aligned} \langle f_n,f_{-n}\rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\imath}\langle e_n-e_{-n}, e_n+e_{-n}\rangle_{L^2} = \\ &= \frac{1}{2\imath}\left\{\|e_n\|_{L^2}^2 + \langle e_n,e_{-n}\rangle_{L^2} - \langle e_{-n},e_n\rangle_{L^2} - \|e_{-n}\|_{L^2}^2\right\} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.4.45. feladat. Lássuk be, hogy az $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l_2})$ térben az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} = \left(0,\ldots,0,\overset{j}{\smile}\!\!\!\!\!1\,,0,0\ldots\right) \qquad (n\in\mathbb{N})$$

rendszer ortonormált!

Útm. Világos, hogy bármely $m,n\in\mathbb{N}$ esetén $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}$. ■

1.4.2. házi feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{C}[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$-ben

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi n x}{b-a}\right) & (n>0), \\ \dfrac{1}{2} & (n=0), \\ \cos\left(\dfrac{2\pi n x}{b-a}\right) & (n<0) \end{cases} \qquad (x\in[a,b],\ n\in\mathbb{Z})$$

függvényrendszer ONR!

1.4.3. házi feladat. Mutassuk meg, hogy $(L^2(0,1), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$-ben az

$$e_n(x) := \begin{cases} \sqrt{2^n} & \left(\dfrac{1}{2^n}\le x\le \dfrac{1}{2^{n-1}}\right), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \qquad (x\in(0,1),\ n\in\mathbb{N})$$

függvényrendszer ONR!

1.4.46. feladat. Határozzuk meg az $a,b,c\in\mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az

$$f_1(x) := 1, \qquad f_2(x) := x+a, \qquad f_3(x) := x^2+bx+c \qquad (x\in[0,1])$$

függvényrendszer ONR legyen az $\left(L^2[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ térben!

Útm. Ha $\{f_1, f_2, f_3\}$ ONR, akkor

$$0 = \langle f_1, f_2\rangle_{L^2} = \int_0^1 1\cdot(x+a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+a,$$

azaz

$$a = -\frac{1}{2}, \quad f_2(x) = x-\frac{1}{2} \qquad (x\in[0,1]),$$

továbbá

$$0 = \langle f_1, f_3\rangle_{L^2} = \int_0^1 1\cdot(x^2+bx+c)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}b+c,$$

és

$$\begin{aligned}
0=\langle f_2,f_3\rangle_{L^2} &= \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+bx+c)\,\mathrm{d}x= \\
&= \int_0^1\left\{x^3+\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}c\right\}\mathrm{d}x= \\
&= \frac{1}{4}+\left(b-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}+\left(c-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c
\end{aligned}$$

ahonnan $b=-1$ és $c=-1/6$ következik. ■

1.4.4. házi feladat. Mutassuk meg, hogy $(L^2[0,1],\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$-ben az

$$e_n(x):=\mathrm{sgn}\,(\sin(2^n\pi x))\qquad (x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}_0)$$

függvényrendszer ONR!

1.4.3. gyakorló feladat. Bizonyítsuk be, hogy

1. az $(L^2[-1,1],\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$-ben az

   $$f_n(x):=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}L^n(x)\qquad (x\in[-1,1],\ n\in\mathbb{N}_0)$$

   függvényrendszer ONR, ahol

   $$L_n(x):=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0)$$

   jelöli az ún. **Legendre-polinom**okat;
2. az $(L^2(\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$-ben az

   $$f_n(x):=\alpha_n e^{-x^2/2}H_n(x)\qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0)$$

   függvényrendszer ONR, ahol

   $$\alpha_n:=2^{-\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}\qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

   és

   $$H_n(x):=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\qquad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0)$$

   jelöli az ún. **Hermite-polinom**okat!

Útm.

1.4.47. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $\dim(\mathcal{X}) = d$, továbbá $\mathcal{X}$ valamely $b_1, \ldots, b_d$ bázisa ortonormált, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $k < d$ és

$$M := \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_k)$$

esetén fennáll az

$$M^{\perp} = \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_d)$$

egyenlőség!

Útm. Ha valamely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$x \in \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_d) \qquad \text{és} \qquad y \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_k),$$

akkor alkalmas

$$\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}, \qquad \text{ill.} \qquad \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$$

számokkal

$$x = \sum_{p=k+1}^{d} \lambda_p b_p, \qquad \text{ill.} \qquad y = \sum_{q=1}^{k} \mu_q b_q,$$

ahonnan

$$\langle x, y\rangle = \sum_{p=k+1}^{d} \sum_{q=1}^{k} \lambda_p \mu_q \langle b_p, b_q\rangle = 0$$

következik. Így $x \in M^{\perp}$ és

$$\operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_d) \subset M^{\perp}.$$

Ha most $x \in M^{\perp}$ és

$$x = \sum_{p=1}^{d} \lambda_p b_p,$$

akkor az

$$y := \sum_{q=1}^{k} \lambda_q b_q \in M$$

elemmel

$$0 = \langle x, y\rangle = \sum_{q=1}^{k} |\lambda_q|^2,$$

így

$$\lambda_q = 0 \qquad (q \in \{1, \ldots, k\}).$$

Ebből az következik, hogy

$$x = \sum_{p=k+1}^{d} \lambda_p b_p \in \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_d),$$

és így

$$M^{\perp} \subset \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_d). \quad \blacksquare$$

1.4.48. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ és adott $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{x_k \in \mathcal{X} : \ k \in \{1,\ldots,n\}\}$$

ortonormált rendszer, akkor bármely

$$x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$$

esetén fennáll a

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \langle x, x_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2$$

egyenlőség!

Útm. Ha

$$x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K},$$

akkor

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\rangle = \\
&= \langle x, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \langle x, x_k\rangle + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_l \overline{\lambda_k} \langle x_l, x_k\rangle = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{l=1}^{n} \left\{ -\lambda_l \overline{\langle x, x_l\rangle} - \overline{\lambda_l}\langle x, x_l\rangle + \lambda_l\overline{\lambda_l} + \overline{\langle x, x_l\rangle}\langle x, x_l\rangle \right\} - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{n} \overline{\langle x, x_l\rangle}\langle x, x_l\rangle = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{l=1}^{n} (\lambda_l - \langle x, x_l\rangle)\left(\overline{\lambda_l - \langle x, x_l\rangle}\right) - \sum_{l=1}^{n} |\langle x, x_l\rangle|^2 = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \langle x, x_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Világos (vö. 1.4.40. feladat), hogy minden olyan ortogonális renszer, amely nem tartalmazza a nullvektort lineárisan független. Viszont nem minden lineárisan független rendszer ortogonális, azonban – mint ahogy az a következő feladatból is kiderül –, ha a linárisan független rendszer legfeljebb megszámlálható, akkor kiválasztható belőle egy, ugyanazt az alteret kifeszítő ortogonális, sőt ortonormált rendszer.

1.4.49. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ és $B \subset \mathcal{X}$ olyan lineárisan független rendszer, amely legfeljebb megszámlálható, azaz alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ esetén

$$B = \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathcal{N}\},$$

akkor az

$$y_1 := x_1, \qquad y_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{l=1}^{k} \frac{\langle x_{k+1}, y_l\rangle}{\|y_l\|^2} y_l \quad (k \in \mathcal{N},\ B \neq \{x_1 \ldots, x_k\})$$

valamint a

$$z_k := \frac{y_k}{\|y_k\|} \qquad (k \in \mathcal{N})$$

vektorok ortogonális, ill. ortonormált rendszert alkotnak (**Gram-Schmidt-algoritmus**), továbbá fennálnak a

$$\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(y_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathcal{N}) = \operatorname{span}(z_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathcal{N})$$

egyenlőségek!

Útm. Feltesszük, hogy B megszámlálható, azaz $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ (a véges eset hasonlóan tárgyalható).

1. lépés. k-ra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

- **(1)** $y_j \neq 0$ $(j \in \{1, \ldots, k\})$,
- **(2)** $\langle y_j, y_i\rangle \neq 0$ $(j, i \in \{1, \ldots, k\} : j \neq i)$,
- **(3)** az $y_1, \ldots, y_k$ vektorok előállnak az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ rendszer lineáris kombinációjaként.

Ekkor persze

$$y_i \neq y_j \qquad (j, i \in \{1, \ldots, k\} : j \neq i)$$

is igaz, hiszen ellenkező esetben

$$0 = \langle y_j, y_i\rangle = \langle y_j, y_j\rangle = \|y_j\|^2$$

teljesülne, ami ellentmond **(1)**-nek. Ha valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek az **(1-3)** állítások, akkor **(2)** miatt

$$\langle y_j, y_i\rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ \\ \|y_j\|^2 & (i = j) \end{cases} \qquad (i, j \in \{1, \ldots, k\}),$$

így

$$\langle y_j, y_{k+1}\rangle = \langle y_j, x_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\overline{\langle x_{k+1}, y_i\rangle}}{\|y_i\|^2} \langle y_j, y_i\rangle = \langle y_j, x_{k+1}\rangle - \frac{\langle y_j, x_{k+1}\rangle}{\|y_j\|^2} \|y_j\|^2 = 0.$$

Továbbá $y_{k+1} \neq 0$ is igaz, hiszen ellenkező esetben

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} -\frac{\langle x_{k+1}, y_i\rangle}{\|y_i\|^2} y_i$$

lenne, ami **(3)** miatt azt jelntené, hogy x_{k+1} előállna az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ rendszer lineáris kombinációjaként, ami pedig nem lehetséges, hiszen B lineárisan független rendszer. Mivel az indukciós feltétel következtében $y_1, \ldots, y_k$ vektorok mindegyike előáll az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ rendszer lineáris kombinációjaként, azért y_{k+1} előáll az $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ rendszer lineáris kombinációjaként.

2. lépés. **(1)** miatt

$$\|z_k\| = 1, \qquad \text{valamint} \qquad \langle z_k, z_j\rangle = \frac{1}{\|y_k\| \cdot \|y_j\|}\langle y_k, y_j\rangle = \begin{cases} 0 & (k \neq j), \\ 1 & (k = j). \end{cases}$$

Ha $k \neq j$ esetén $z_k = z_j$ volna, akkor

$$0 = \langle z_k, z_j\rangle = \langle z_k, z_k\rangle = \|z_k\|^2 = 1$$

lenne, ami nem lehetséges.

3. lépés. Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_k),$$

hiszen **(3)** miatt fennáll a $\supset$ tartalmazás, és tekintettel arra, hogy $y_1, \ldots, y_k$ olyan ortogonális rendszer, amely nem tartalmazza a nullvektort /**(1)**, **(2)**/ $y_1, \ldots, y_k$ lineárisan független, továbbá az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ rendszer lineáris függetlensége következtében

$$\dim(\operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k)) = k = \dim(\operatorname{span}(y_1, \ldots, y_k)).$$

Innen már következik, hogy

$$\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(y_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}),$$

hiszen mindkét halmaz minden egyes eleme a halmaz generátorrendszerének lineáris kombinációja, így $(*)$ miatt a másik halmaz generátorrendszerének is lineáris kombinációja, ami azt jelenti, hogy mindkét halmaz minden egyes eleme a másik halmaznak is eleme. A

$$\operatorname{span}(y_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}) = \operatorname{span}(z_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N})$$

állítás z_k definíciójának közvetlen következménye. ■

1.4.50. feladat. Ortogonalizáljuk az $\left(L^2[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ euklideszi térben az

$$x_k(t) := t^k \qquad (t \in [0,1], \ k \in \{0,1,2\})$$

függvényrendszert!

Útm.

$$y_0(t) = 1, \qquad \text{így} \qquad z_0(t) = \frac{1}{1} = 1 \qquad (t \in [0,1]);$$

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{\langle x_1, y_0\rangle}{\|y_0\|^2} y_0(t) = t - \int_0^1 t \, dt = t - \frac{1}{2} \qquad (t \in [0,1]),$$

$$\|y_1\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \sqrt{\int_{-1/2}^{1/2} u^2 \, du} = \frac{1}{\sqrt{12}},$$

így

$$z_1(t) = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2t-1) \qquad (t \in [0,1]);$$

továbbá tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} y_2(t) &= x_2(t) - \left\{ \frac{\langle x_2, y_0\rangle}{\|y_0\|^2} y_0(t) + \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} y_1(t) \right\} = \\ &= t^2 - \int_0^1 t^2 \, dt - 12\left(t - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \\ &= t^2 - \frac{1}{3} - (12t - 6) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ill.

$$\|y_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left\{t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}^2 dt} = \frac{1}{6}\sqrt{\int_0^1 \{6t^2 - 6t + 1\}^2 \, dt} = \ldots = \frac{1}{6\sqrt{5}},$$

így

$$z_3(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1) \qquad (t \in [0,1]).$$

1.4.4. gyakorló feladat. Ortogonalizáljuk az $(L^2[-1,1], \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ euklideszi térben az

$$x_k(t) := t^k \qquad (t \in [-1,1],\ k \in \{0,1,2\})$$

függvényrendszert!

Útm.

1.4.8. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\| \cdot \|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$ esetén azt mondjuk, hogy $\emptyset \neq S \subset \mathcal{X}$ **teljes rendszer**, ha

$$S^\perp = \{0\}$$

teljesül.

S teljessége tehát azt jelenti, hogy „S ortogonálisan nem bővíthető”, azaz a nullvektoron kívül $\mathcal{X}$ egyetlen vektora sem lehet ortogonális S minden elemére:

$$(y \in \mathcal{X}, \quad \langle x, y \rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \qquad (x \in S).$$

1.4.14. példa. A $(\mathfrak{C}[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ euklideszi térben az

$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N})$$

rendszer teljes, ui. ha valamely $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ függvénnyel

$$\int_a^b f(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely p polinomra

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{így} \qquad \|f\| = \langle f, f-p\rangle.$$

Innen pedig az következik, hogy minden p polinom esetén

$$\|f\|^2 \leq \|f\| \cdot \|f-p\|.$$

Így Weierstraß-féle I. approximációs tétel szerint (vö. 2.3.7. feladat) alkalmas q polinomra

$$|f(x) - q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}} \qquad (x \in [a,b]),$$

tehát

$$\|f-q\| = \sqrt{\int_a^b |f-q|^2} \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|f\|^2 \leq \varepsilon\|f\|,$$

ami csak úgy lehetséges, hogy $\|f\| = 0$, azaz

$$f(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]).$$

1.4.15. példa. Az $(l_2, \|\cdot\|_{l_2})$ euklideszi térben az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ONR teljes, hiszen ha

$$x = (x_n) \in l_2 \qquad \text{és} \qquad x \perp e_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$0 = \langle x, e_n\rangle = x_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz $x = 0 \in l_2$.

1.4.16. példa. Az

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) & (n>0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n=0), \qquad\qquad (x \in (-\pi,\pi),\ n \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) & (n<0) \end{cases}$$

(trigonometrikus) rendszer teljes a $(\mathfrak{C}[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ euklideszi térben (vö. [25] ill. [15]).

1.4.51. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor az

$$S := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

rendszer pontosan akkor teljes, ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$(*) \qquad \langle x, x_n\rangle = \langle y, x_n\rangle \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad x = y$$

teljesül!

Útm. A $(*)$ feltétel azzal egyenértékű, hogy

$$\langle x-y, x_n\rangle = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így S teljessége következtében $x - y = 0 \in \mathcal{X}$, azaz $x = y$. A fordított irányú állítás hasonlóan igazolható. ■

1.4.52. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $\emptyset \neq M \subset \mathcal{X}$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha M ortonormált, akkor $0 \notin M$.
2. Ha M ortonormált, úgy M pontosan akkor teljes, ha maximális abban az értelemben, hogy ha $N \subset \mathcal{X}$ olyan ortonormált rendszer, amelyre $M \subset N$, akkor $N = M$.
3. Ha $\dim(\mathcal{X}) > 0$, azaz $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor van $\mathcal{X}$-ben teljes ortonormált rendszer.

Útm.

1. Mivel minden $x \in M$ esetén $\|x\| = 1 \neq 0$, ezért $x \neq 0$.
2. Ha M nem teljes ortonormált rendszer, azaz $M^\perp \neq \{0\}$, akkor $0 \in M^\perp$ következtében van olyan $x \in M^\perp$, hogy $x \neq 0$. Így, ha
$$z := \frac{x}{\|x\|},$$
akkor $\|z\| = 1$ és bármely $y \in M$ esetén
$$\langle z, y\rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle x, y\rangle = 0,$$

ezért $\widetilde{M} := M \cup \{z\}$ ONR. Továbbá $z \notin M$, különben $x \in M^\perp$ következtében

$$0 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{\|x\|} \langle x, x \rangle = \|x\|$$

volna, ami ellentmond annak, hogy $x \neq 0$. Így $\widetilde{M}$ egy M-et valódi részként tartalmazó ONR, ami azt jelenti, hogy M teljes. Ha pedig M nem maximális ONR, akkor alkalmas $\widetilde{M}$ ONR esetén $M \subsetneqq \widetilde{M}$. Így, ha $x \in \widetilde{M} \backslash M$, akkor $\widetilde{M}$ ortogonális volta miatt

$$\forall y \in \widetilde{M}: \qquad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad x \perp y$$

és így $x \perp y$ $(y \in M)$, azaz $x \in M^\perp$ következik. Mivel $\widetilde{M}$ ONR, ezért $\|x\| = 1$, azaz $x \neq 0$, ez pedig azt jelenti, hogy $M^\perp \neq \{0\}$, azaz M nem teljes.

3. Ha

$$\mathcal{M} := \{M \subset \mathcal{X} : \ M \text{ ONR}\}$$

akkor $\mathcal{M} \neq \emptyset$ és $\mathcal{X} \neq \{0\}$ következtében van olyan $x \in \mathcal{X}$, amelyre $x \neq 0$ és

$$M := \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

ONR. Világos, hogy

$$(M, N) \in \rho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad M \subset N \qquad (M, N \in \mathcal{M})$$

rendezés $\mathcal{M}$-en. Így ha $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ láncszerűen rendezett, akkor

$$\widetilde{M} := \bigcup_{M \in \mathcal{N}} M$$

felső korlátja $\mathcal{N}$-nek ($\mathcal{M}$-ben), továbbá minden olyan $(x, y) \in (\widetilde{M})^2$ rendezett párhoz van olyan $M \in \widetilde{M}$, hogy $x, y \in M$, hiszen $\mathcal{N}$ láncszerűen rendezett, sőt

$$\langle x, y \rangle = \delta_{xy}.$$

Ennek következtében $\widetilde{M}$ ONR és $\widetilde{M} \in \mathcal{M}$. Tehát a Zorn-lemma következtében $\widetilde{M}$-nek van maximális eleme, ami nyilvánvalóan ONR. ■

1.4.53. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\| \cdot \|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, továbbá

$$x_k \in \mathcal{X} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

ONR, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén igaz a

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

egyenlőtlenség (**Bessel-egyenlőtlenség**) és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k,$$

azaz x előáll az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ rendszer lineáris kombinációjaként!

Útm. Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén az

$$y := \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k$$

vektorra a Pitagorasz-tétel felhasználásával

$$\langle y, y \rangle = \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\langle x, x_k \rangle x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2.$$

Innen és y definíciójából

$$\begin{aligned} \langle x - y, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \overline{\langle x, x_k \rangle} - \langle y, y \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$y \perp (x - y)$$

következik. Így ismét csak a Pitagorasz-tétel felhasználásával

$$\|x\|^2 = \|(x - y) + y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2$$

és ezért

$$(*) \qquad 0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Világos, hogy a Bessel-egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\|x\|^2 = \|y\|^2.$$

Tehát akkor és csak akkor, ha

$$0 = \|x - y\|^2, \qquad \text{azaz} \qquad x = y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k. \quad \blacksquare$$

A Bessel-egyenlőtlenség az 1.4.48. feladat felhasználásával is könnyen belátható, hiszen ott a

$$\lambda_k := \langle x, x_k \rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

választással azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \boxed{\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2}$$

(**Bessel-azonosság**), ahonnan

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2$$

következik.

1.4.54. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$\{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathbb{N}\}$$

ONR, úgy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

1. a $\sum\limits_{n=1}(|\langle x, x_n\rangle|^2)$ sor konvergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

   (**Bessel-egyenlőtlenség**);

2. pontosan akkor áll fenn az

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$$

   egyenlőség $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban/, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2$$

   (**Parseval-egyenlet**, ill. **Parseval-egyenlőség**)!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(vö. 1.4.53. feladat), ezért a sor (abszolút) konvergens és összege legfeljebb $\|x\|^2$.

2. lépés. Tudjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Mivel az

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k \right\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_n\rangle|^2 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

1.4.9. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

ONR, úgy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén az

$$\widehat{x}(n) := \langle x, x_n\rangle \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számokat az x vektor M ONR szerinti **Fourier-együtthatói**nak, a

$$\sum_{n=1} (\widehat{x}(n) x_n)$$

numerikus sort pedig az x vektor M ONR szerinti **Fourier-sor**ának nevezzük.

A Bessel-egyenlőtlenség következményeként tehát bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor tetszőleges ortonormált rendszerre vonatkozó együthatóinak négyzetösszegéből alkotott sor konvergens: $(\widehat{x}(n)) \in l_2$. Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor tetszőleges ortonormált rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói nullasorozatot alkotnak:

$$\lim(\langle x, x_n\rangle) = \lim(\widehat{x}(n)) = 0.$$

1.4.17. példa. Ha

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\imath n t) \qquad (t \in [0,2\pi], \ n \in \mathbb{Z}),$$

akkor tetszőleges $f \in L^2[0,2\pi]$ függvény $\{e_n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ ONR rendszer (vö. 1.4.44. feladat) szerinti Fourier-sora a

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e_n(t) \qquad (t \in [0,2\pi], \ n \in \mathbb{N}_0)$$

sor, ahol

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-\imath k t)\,\mathrm{d}t \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Egyszerű számolással belátható, hogy az 1.4.54. feladatbeli Parseval-egyenlőség a következő alakú:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-\imath k t)\,\mathrm{d}t \right|^2 = \int_0^{2\pi} |f|^2.$$

A Fourier-sorok részletösszegeinek egy nevezetes minimum-tulajdonságáról szól az

1.4.55. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

ONR, úgy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén fennáll az

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k) x_k \right\| = \min \left\{ \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \in \mathbb{R} : \ \lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

egyenlőség!

Útm. Az 1.4.48. feladatbeli egyenlőség jobb oldala nyilván a

$$\lambda_k = \widehat{x}(k) \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

esetben lesz minimális. ■

1.4.10. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér **Hilbert-tér**, ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) \equiv (\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{X}, \|\cdot\|) \text{ Banach-tér.}$$

1.4.18. példa. $(\mathbb{K}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k} \qquad (x, y \in \mathbb{K}^d).$$

1.4.19. példa. $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l_2})$ Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y\rangle_{l_2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (x, y \in l_2).$$

1.4.20. példa. $(\mathfrak{C}[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ nem Hilbert-tér, ahol

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f\overline{g} \qquad (f, g \in \mathfrak{C}[a,b]).$$

1.4.21. példa. Ha (H, Ω, μ) mértéktér, akkor $(L^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ Hilbert tér, ahol

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int f\overline{g} \qquad (f, g \in L^2).$$

1.4.56. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$e_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ONR, akkor nincsen olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre (e_{ν_n}) konvergens!

Útm. Mivel minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle = \ldots = 1 + 1 = 2,$$

ezért (e_n)-nek nincsen Cauchy-féle, így konvergens részsorozata sem. ■

1.4.57. feladat. Mutassuk meg, hogy $p \in [1, +\infty)$ esetén $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ pontosan a $p = 2$ esetben Hilbert-tér!

Útm. Mivel $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ Banach-tér (vö. 1.3.129. feladat), így elég azt megvizsgálni, hogy a normát skaláris szorzat indukálja-e.

1. lépés. Ha $p = 2$, akkor az

$$s : l_2 \times l_2 \to \mathbb{K}, \qquad s(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

függvény skaláris szorzat (vö. [15]) és

$$s(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{x_n} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{l_2}^2 \qquad (x \in l_2).$$

2. lépés. Ha

$$x_n := \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ 0 & (n \neq 1), \end{cases} \qquad y_n := \begin{cases} 1 & (n = 2), \\ 0 & (n \neq 2) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $x = (x_n) \in l_p$, ill. $y = (y_n) \in l_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ és

- $1 \le p < +\infty$ esetén

  $$\|x\|_{l_p}^2 = 1, \qquad \|y\|_{l_p}^2 = 1, \qquad \|x + y\|_{l_p}^2 = 2^{2/p}, \qquad \|x - y\|_{l_p}^2 = 2^{2/p},$$

  így, ha $p \neq 2$, akkor

  $$\|x + y\|_{l_p}^2 + \|x - y\|_{l_p} = 2 \cdot 2^{2/p} \neq 4 = 2\left(\|x\|_{l_p}^2 + \|y\|_{l_p}^2\right).$$

- $p = +\infty$ esetén

  $$\|x\|_{l_\infty}^2 = \|y\|_{l_\infty}^2 = \|x + y\|_{l_\infty}^2 = \|x - y\|_{l_\infty}^2 = 1,$$

  így

  $$\|x + y\|_{l_\infty}^2 + \|x - y\|_{l_\infty}^2 = 2 \neq 4 = 2\left(\|x\|_{l_\infty}^2 + \|y\|_{l_\infty}^2\right). \quad ■$$

1.4.58. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathbb{N}\}$$

ONR, akkor

1. bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén a

$$\sum_{n=1}(\langle x, x_n\rangle x_n)$$

   sor konvergens $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban;

2. M pontosan akkor teljes, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén fennáll az

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$$

   egyenlőség!

Útm.

1. Az

$$y_n := \sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   sorozat Cauchy-sorozat $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban, hiszen ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n$, akkor a Pitagorasz-tétel felhasználásával

$$\|y_m - y_n\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m}\langle x, x_k\rangle x_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}\|\langle x, x_k\rangle x_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m}|\langle x, x_k\rangle|^2,$$

   és a

$$\sum_{n=1}(|\langle x, x_k\rangle|^2)$$

   sor a Bessel-egyenlőtlenség következtében konvergens. Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ tér teljessége folytán van olyan $y \in \mathcal{X}$ elem, hogy

$$\lim(y_n) = y$$

   $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban$/$, azaz

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n \qquad /(\mathcal{X}, \|\cdot\|)\text{-ban}/.$$

2. Ha M nem teljes, akkor alkalmas $u \in M^{\perp}\backslash\{0\}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle u, x_n\rangle x_n = 0 \neq u.$$

   Ha M teljes és $x \in \mathcal{X}$, akkor az iméntiek miatt a

$$\sum_{n=1}(\langle x, x_n\rangle x_n)$$

sor konvergens. Ha
$$y := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n,$$
akkor a skaláris szorzat tulajdonságai alapján a fenti (y_n) sorozatra $m \leq n$ esetén
$$\langle y_n, x_m \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k, x_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \langle x_k, x_m \rangle = \langle x, x_m \rangle$$
és
$$\lim(y_n) = y$$
/$(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ban/. Mivel a skaláris szorzat folytonos, ezért bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén
$$\langle y, x_m \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, x_m \rangle = \langle x, x_m \rangle,$$
azaz
$$\langle x - y, x_m \rangle = 0 \qquad (m \in \mathbb{N}).$$
Tehát M teljessége következtében $x - y = 0$, azaz $x = y$. ■

Megmutatható, hogy a most igazolt állítás természetesen véges elemszámú ortonormált rendszerekre is igaz, pontosabban, ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $n \in \mathbb{N}$ és
$$M := \{x_k \in \mathcal{X} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\}$$
ortonormált rendszer, akkor
$$M^{\perp} = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \quad (x \in \mathcal{X}).$$

1.4.22. példa. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$, továbbá
$$M := \{x_1, \ldots, x_n\}$$
olyan Hamel-bázis $\mathcal{X}$-ben, amely egyúttal ONR (ilyet a Gram-Schmidt-algoritmussal lehet készíteni, vö. 1.4.49. feladat), akkor M teljes, hiszen ha valamely
$$\alpha_k \in \mathbb{K} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$
együtthatókkal
$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$
akkor
$$\langle x, x_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_k, x_l \rangle = \alpha_l \qquad (l \in \{1, \ldots, n\}),$$
tehát
$$x = \sum_{l=1}^{n} \langle x, x_l \rangle x_l \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

1.4.59. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

teljes ortonormált rendszer, úgy egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) x_n.$$

(2) Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) \cdot \overline{\widehat{y}(n)}.$$

(3) Bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2.$$

Útm.

(1) ⇒ (2): Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}(k)x_k, \sum_{l=1}^{\infty} \hat{y}(l)x_l \right\rangle = \left\langle \lim\left(\sum_{k=1}^{n} \hat{x}(k)x_k\right), \lim\left(\sum_{l=1}^{n} \hat{y}(l)x_l\right)\right\rangle = \\
&= \lim\left(\left\langle \sum_{k=1}^{n} \hat{x}(k)x_k, \sum_{l=1}^{n} \hat{y}(l)x_l\right\rangle\right) = \lim\left(\sum_{k,l=1}^{n} \hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}\langle x_k, x_l\rangle\right) = \\
&= \lim\left(\sum_{k=1}^{n} \hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) \cdot \overline{\widehat{y}(n)}.
\end{aligned}$$

(2) ⇒ (3): Az $y := x$ helyettesítéssel könnyen belátható.

(3) ⇒ (1): Bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \hat{x}(k)x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}(k)|^2 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Világos, hogy ha az M ONR esetén

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}(n) x_n \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor M Schauder-bázisa $\mathcal{X}$-nek, hiszen ha

$$\mathcal{X} \ni 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

akkor bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, x_m \right\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, e_m \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_n, x_m \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x_m \rangle = \alpha_m. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $0 \in \mathcal{X}$ egyértelműen áll elő.

A Parseval-egyenlőség alkalmazásásra mutat példát az

1.4.60. feladat. Mutassuk meg, hogy ha valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány topológiai határa L hosszúságú, szakaszonként sima Jordan-görbe, területe pedig A, akkor

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha alkalmas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ill. $r > 0$ esetén $\Omega = K_r(a, b)$ teljesül (**izoperimetrikus egyenlőtlenség**)!

Útm. Ha

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, L] \to \mathbb{R}^2$$

a $\partial\Omega$ határ szakaszonként sima, ívhossz szerinti paraméterezése, azaz $\mathcal{R}_\gamma = \partial\Omega$, ill. γ_1, γ_2 folytonos és szakaszonként sima függvények, továbbá bármely $s \in [0, L]$ esetén

$$\|\gamma'(s)\| = 1,$$

akkor a

$$\pi : [0,2\pi] \to [0, L], \qquad \pi(t) := \frac{L}{2\pi} t$$

megengedett paramétertranszformáció révén a $\partial\Omega$ határ

$$\phi := (\varphi, \psi) := \gamma \circ \pi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

paraméterezését kapjuk. Világos, hogy

$$|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \qquad (t \in [0,2\pi]).$$

Mivel Ω Jordan-mérhető, ezért, ha

$$(u(x, y), v(x, y)) := \frac{1}{2}(-y, x) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor a Green-tétel felhasználásával (vö. [25]) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega 1 = \int_\Omega (\partial_1 v - \partial_2 u) = \int_\phi (u, v) = \int_0^{2\pi} \langle (u, v) \circ \phi, \phi' \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle (-\psi, \varphi), (\varphi', \psi') \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{-\psi \cdot \varphi' + \varphi \cdot \psi'\}. \end{aligned}$$

Ha

$$F := \varphi + \imath\psi,$$

akkor egyrészt

$$4\pi^2|F'|^2 = L^2,$$

másrészt pedig

$$F \cdot \overline{F'} = (\varphi + \imath\psi) \cdot (\varphi' - \imath\psi') = \varphi \cdot \varphi' + \psi \cdot \psi' + (\psi \cdot \varphi' - \varphi \cdot \psi')\,\imath,$$

ahonnan

$$A = -\frac{1}{2}\Im\left(\int_0^{2\pi} F \cdot \overline{F'}\right) = -\frac{1}{2}\Im\left(\langle F, F'\rangle_{L^2[0,2\pi]}\right)$$

következik. Mivel F szakaszonként sima, ezért (vö. [12]) bármely $t \in [0,2\pi]$ esetén

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(\imath n t), \qquad \text{ill.} \qquad F'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \imath n c_n \exp(\imath n t),$$

ahol

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\exp(-\imath n t)\,\mathrm{d}t$$

(vö. 1.4.17. példa), így

$$A = -\frac{1}{2}\Im\left(2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \overline{\imath n c_n}\right) = -\frac{1}{2}\Im\left(-2\pi\imath \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\right) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2$$

(vö. 1.4.59. feladat). A

$$4\pi^2|F'|^2 = L^2$$

egyenlőségből (vö. 1.4.59. feladat) azt kapjuk, hogy

$$L^2 = (2\pi|F'|)^2 = 2\pi\int_0^{2\pi} |F'|^2 = 2\pi\|F'\|^2_{L^2[0,2\pi]} = (2\pi)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\imath n c_n|^2 = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2.$$

Így

$$L^2 - 4\pi A = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - n)|c_n|^2 \geq 0,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$n^2 - n = n(n-1) \neq 0,$$

azaz $n \notin \{0,1\}$ esetén $c_n = 0$, azaz ha

$$F(t) = c_0 + c_1\exp(\imath t) \qquad (t \in [0,2\pi]).$$

Ekkor

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2$$

miatt
$$|c_1|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2},$$
azaz alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $\alpha \in [0,2\pi]$ esetén
$$c_0 = a + b\imath, \qquad \text{ill.} \qquad c_1 = \frac{L}{2\pi}e^{\imath\alpha},$$
ami azt jelenti, hogy
$$F(t) = a + b\imath + \frac{L}{2\pi}e^{\imath(t+\alpha)} \qquad (t \in [0,2\pi]),$$
azaz Ω nem más, mint egy (a, b) középpontú $\dfrac{L}{2\pi}$-sugarú kör. ■

1.4.61. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ valós euklideszi terek, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{Y}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}$, továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|f(x) + f(y)\|_{\mathcal{Y}} = \|x + y\|_{\mathcal{X}};$$

(2) minden $x, y \in \mathcal{X}$ vektorra
$$\langle f(x), f(y)\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{X}};$$

(3) f additív és f normatartó.

Útm.

1. lépés. /(1) ⇒ (2)/ Az $x = y$ helyettesítéssel látható, hogy f normatartó, továbbá bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\begin{aligned} 2\langle f(x), f(y)\rangle_{\mathcal{Y}} &= \|f(x) + f(y)\|^2_{\mathcal{Y}} - \|f(x)\|^2_{\mathcal{Y}} - \|f(y)\|^2_{\mathcal{Y}} = \\ &= \|x + y\|^2_{\mathcal{X}} - \|x\|^2_{\mathcal{X}} - \|y\|^2_{\mathcal{X}} = \\ &= 2\langle x, y\rangle_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

2. lépés. /(2) ⇒ (3)/ Az $x = y$ helyettesítéssel látható, hogy f normatartó, továbbá bármely $x, y, z \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle f(x + y) - f(x) - f(y), f(z)\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x + y, z\rangle_{\mathcal{X}} - \langle x, z\rangle_{\mathcal{X}} - \langle y, z\rangle_{\mathcal{X}} = 0.$$

Így, ha
$$z \in \{x, y, x + y\},$$
akkor
$$\langle f(x + y) - f(x) - f(y), f(x + y) - f(x) - f(y)\rangle = 0,$$
azaz f additív.

3. lépés. /(3) $\Rightarrow$ (1)/ Ha f additív és normatartó, akkor bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|f(x) + f(y)\|_{\mathcal{Y}} = \|f(x + y)\|_{\mathcal{Y}} = \|x + y\|_{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

1.4.62. feladat. Mutassuk meg,hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ végtelen dimenziós, valós Hilbert-tér, továbbá $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor az egységszféra nem kompakt (annak ellenére, hogy korlátos és zárt (vö. 1.3.29.feladat))!

Útm. Mivel

$$\dim(\mathcal{X}) = \infty,$$

ezért létezik $\mathcal{X}$-ben végtelen ortonormált rendszer:

$$M := \left\{(e_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} : \langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}\ (m, n \in \mathbb{N})\right\}.$$

Ha $\partial B_1(0)$ kompakt lenne, akkor alkalmas $x \in \mathcal{X}$, ill. (ν_n) indexsorozat esetén

$$\big|\|e_{\nu_n}\| - \|x\|\big| \leq \|e_{\nu_n} - x\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesülne. Ez utóbbi határérték-relációból

$$\|e_{\nu_n}\| \longrightarrow \|x\| \qquad (n \to \infty),$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$\|x\| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad x \in \partial B_1(0).$$

Mivel

$$\|e_{\nu_n} - x\|^2 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért

$$\langle x - e_{\nu_n}, x - e_{\nu_n}\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, e_{\nu_n}\rangle + \langle e_{\nu_n}, e_{\nu_n}\rangle = 2 - 2\langle x, e_{\nu_n}\rangle \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így

$$\langle x, e_{\nu_n}\rangle \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty),$$

ami ellentmond a Bessel-egyenlőtlenségnek, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_{\nu_n}\rangle|^2 \leq \|x\|^2 = 1,$$

ahonnan

$$\langle x, e_{\nu_n}\rangle \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

következik. $\blacksquare$

2. fejezet

Az approximációelmélet alapjai

2.1. Interpoláció

2.1.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2 : \qquad x_0 < x_1 < \ldots < x_m$$

akkor pontosan egy olyan legfeljebb m-edfokú $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom van, amelyre

$$p(x_k) = y_k \qquad (k \in \{0,1, \ldots, m\})$$

teljesül (**Lagrange-interpoláció**)!

Útm. Ha p és q a fenti tulajdonságú, legfeljebb m-edfokú polinom, azaz

$$(p - q)(x_k) = 0 \qquad (k \in \{0,1, \ldots, m\}),$$

akkor $(p - q)$-nak legalább $m + 1$ gyöke van. Ez pedig az algebra alaptétele miatt csak úgy lehetséges, hogy $p - q = 0$, azaz $p = q$. Ha

$$l_k(t) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m} \frac{t - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(t - x_0) \cdot \ldots \cdot (t - x_{k-1}) \cdot (t - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (t - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} \qquad (k, j \in \{0,1, \ldots, m\}),$$

így a

$$p := \sum_{k=0}^{m} y_k l_k$$

polinom megfelelő. ■

Az iménti feladatban p létezése a következő módon is belátható. Ha valamely $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{0,1, \ldots, m\})$ esetén

$$p(x) := \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az a_k együtthatókra a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\sum_{k=0}^{m} x_j^k a_k = y_j \qquad (j \in \{0,1,\ldots,m\}).$$

Mivel ennek az egyenletrendszernek a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0\leq i<j\leq m} (x_i - x_j) \neq 0$$

determinánsa egy nem-nulla **Vandermonde-determináns**, ezért az iménti lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Az is könnyen belátható, hogy komplex alappontok, azaz

$$(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_m,y_m) \in \mathbb{C}^2 : \qquad x_i \neq x_j \quad (i,j \in \{0,1,\ldots,m\} : i \neq j)$$

esetén is érvényes a 2.1.1. feladatban megfogalmazott állítás.

2.1.2. feladat. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén számítsuk ki az

$$\mathcal{S}(n,3) := \sum_{k=0}^{n} k^3$$

összeget, felhasználva, hogy $\mathcal{S}(n,3)$ negyedfokú polinomja n-nek, azaz alkalmas

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom esetén $\mathcal{S}(n,3) = p(n)$ teljesül!

Útm. Mivel

$$\mathcal{S}(0,3) = 0, \qquad \mathcal{S}(1,3) = 1, \qquad \mathcal{S}(2,3) = 9, \qquad \mathcal{S}(3,3) = 36, \qquad \mathcal{S}(4,3) = 100,$$

ezért p együtthatóit az

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 &= 9, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 &= 36, \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{4}, \qquad a_3 = \frac{1}{2}, \qquad a_4 = \frac{1}{4}.$$

Így

$$\mathcal{S}(n,3) = \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

A Lagrange-interpoláció egyfajta általánosítását tartalmazza a

2.1.1. tétel. Ha

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \text{ill.} \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}: \quad x_i \neq x_j \ (\textbf{Haar-feltétel}),$$

$$m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}, \qquad m := \max\{m_1, \ldots, m_n\} - 1, \qquad N := \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) - 1,$$

továbbá $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan m-szer deriválható függvény, amelyre $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{D}_f$, akkor pontosan egy olyan, legfeljebb N-edfokú p polinom van, amelyre minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned} p(x_k) &= f(x_k), \\ &\vdots \\ p^{(m_k-1)}(x_k) &= f^{(m_k-1)}(x_k) \end{aligned}$$

teljesül (**Hermite-interpoláció**).

A 2.1.1. tételben szereplő

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_N z^N \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom együtthatóit az $N+1$ ismeretlent tartalmazó, $N+1$ egyenletből álló

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^N \\ 0 & 1 & 2x_1 & \ldots & N x_1^{N-1} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f'(x_1) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer szolgáltatja. Világos, hogy

- ha tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $m_k = 1$, akkor p a következő alakú:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) l_k(z), \quad \text{ahol} \quad l_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{z - x_j}{x_k - x_j} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Sőt, ha még bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$f(x_k) = 1$$

is teljesül, akkor innen

$$1 = \sum_{k=1}^{n} l_k(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

következik.

- ha $n = 1$, akkor p éppen az x_1 körüli N-edik Taylor-polinom.

2.1.1. példa. Ha

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \qquad \text{és} \qquad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 0, \quad f'(x_1) = 0,$$

akkor

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1,$$

így

$$m = 2 - 1 = 1, \qquad N = 3 - 1 = 2,$$

ezért alkalmas $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a keresett polinom

$$p(z) = a + bz + cz^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

alakú. A feltételeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$f(x_1) = p(x_1), \quad \text{azaz} \quad 1 = a + b + c,$$

$$f'(x_1) = p'(x_1), \quad \text{azaz} \quad 0 = b + 2c,$$

$$f(x_2) = p(x_2), \quad \text{azaz} \quad 0 = a + 2b + 4c.$$

Ebből

$$a = 0, \qquad b = 2 \qquad \text{és} \qquad c = -1$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$p(z) = 2z - z^2 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2.1.2. példa. Ha az

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3$$

alappontok esetén

$$f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 32, \quad f(x_3) = 243, \quad f'(x_1) = 5, \quad f'(x_3) = 405, \quad f''(x_3) = 540,$$

akkor

$$m_1 = 2, \qquad m_2 = 1 \qquad \text{és} \qquad m_3 = 3, \qquad \text{így} \qquad m = 3 - 1 = 2, \qquad N = 6 - 1 = 5,$$

ezért alkalmas $a, b, c, d, e, h \in \mathbb{R}$ esetén a keresett polinom

$$p(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + hz^5 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

alakú. A feltételeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= p(x_1), && \text{azaz} \quad 1 = a + b + c + d + e + h, \\
f'(x_1) &= p'(x_1), && \text{azaz} \quad 5 = b + 2c + 3d + 4e + 5h, \\
f(x_2) &= p(x_2), && \text{azaz} \quad 32 = a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32h, \\
f(x_3) &= p(x_3), && \text{azaz} \quad 243 = a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243h, \\
f'(x_3) &= p'(x_3), && \text{azaz} \quad 405 = b + 6c + 27d + 108e + 405h, \\
f''(x_3) &= p''(x_3), && \text{azaz} \quad 540 = 2c + 18d + 108e + 540h.
\end{aligned}$$

Ebből

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad d = 0, \qquad e = 0 \qquad \text{és} \qquad h = 1$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$p(z) = z^5 \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2.1.1. definíció. Ha
$$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
analitikus függvény, azaz alkalmas $R > 0$,
$$a_\nu \in \mathbb{R} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$
esetén
$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad (z \in U_R(0)), \qquad \text{ahol} \qquad U_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\},$$
akkor az $f(A)$ **mátrixfüggvény**t az
$$s_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\nu} a_k z^k \quad (z \in U_R(0), \ \nu \in \mathbb{N}_0)$$
részletösszeg-sorozat határértékeként értelmezzük, amennyiben a sor konvergens.

Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $\sigma(A)$ spektruma (sajátértékeinek halmaza):
$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\},$$
ahol tetszőleges $k \in \{1, \ldots, r\}$ esetén λ_k az A minimálpolinomjának m_k-szoros gyöke, ill.
$$N := \sum_{k=1}^{r} m_k - 1,$$
továbbá A spektruma valamely f analitikus függvény konvergenciahalmazának része:
$$\sigma(A) \subset U_R(0),$$
és tekintsük a
$$p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N \qquad (z \in \mathbb{C})$$
polinomot, ahol
$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_k^{(j)}(\lambda_k), \qquad (k \in \{1, \ldots, r\}, \ j \in \{0, \ldots, m_k - 1\}).$$
Az Hermite-féle interpolációs polinom éppen egy ilyen polinom.

2.1.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha az f analitikus függvény konvergenciahalmaza tartalmazza az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix összes sajátértékét, akkor a fenti részletösszegek $(s_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ sorozata konvergens:
$$f(A) \in \mathbb{K}^{n\times n},$$
és f-et az A spektrumán interpoláló fenti p polinomra
$$p(A) = f(A)$$
teljesül!

Útm.

1. lépés. Tudjuk, hogy két polinom pontosan akkor egyenlő, ha minden együtthatójuk megegyezik, azaz a polinomokat egyértelműen meghatározzák ez együtthatói. A Taylor-tétel következménye, hogy valamely

$$p(z) := \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \qquad (z \in \mathbb{C})$$

polinom együtthatói lényegében a polinom deriváltjainak bizonyos helyen felvett értékei, azaz minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k (z-\alpha)^k \quad (z \in \mathbb{K}), \qquad \text{ahol} \qquad b_k := \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} \quad (k \in \{0, \ldots, N\}).$$

Világos, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén a

$$\varphi(a) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a := (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1})$$

függvény folytonos, ui.

$$|a_k - b_k| \leq \max\{|a_k - b_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{0, \ldots, n\}\} \leq \|a - b\|_2 \qquad (k \in \{0, \ldots, n\})$$

következtében tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| \cdot |z|^k \leq \sum_{k=0}^{n} \|a-b\|_2 \cdot |z|^k = \left(\sum_{k=0}^{n} |z|^k \right) \cdot \|a - b\|_2 .$$

Ha

$$(\varphi_\nu) \qquad (\nu \in \mathbb{N})$$

a fenti tulajdonságú függvények sorozata, akkor igaz a

$$\lim(\varphi_\nu) = \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k^{(\nu)} \to a_k \quad (\nu \to \infty) \quad (k \in \{0, \ldots, n\})$$

ekvivalencia.

2. lépés. Maradékos osztással f minden s_ν részletösszegéhez és a μ_A minimálpolinomhoz található olyan q_ν és r_ν polinom, amelyekre

$$s_\nu = \mu_A q_\nu + r_\nu \quad \text{és} \quad \operatorname{Grad}(r_\nu) < \operatorname{Grad}(\mu_A) = N \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel λ_k a μ_A minimálpolinom m_k-szoros gyöke, az s_ν j-edik deriváltjára:

$$s_\nu^{(j)}(\lambda_k) = r_\nu^{(j)}(\lambda_k) \qquad (k \in \{1, \ldots, r\}; \; j \in \{0, \ldots, m_k - 1\}).$$

Így az **1. lépés**beli ekvivalencia következtében

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(r_\nu^{(j)}(\lambda_k) \right) = f^{(j)}(\lambda_k) = h^{(j)}(\lambda_k),$$

azaz

$$\lim_{\nu \to \infty} (r_\nu(z)) = p(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

3. lépés. Mivel

$$\mu_A(A) = O \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

ezért

$$s_\nu(A) = r_\nu(A) \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

és

$$\lim_{\nu\to\infty}(s_\nu(A)) = \lim_{\nu\to\infty}(r_\nu(A)) = p(A). \quad \blacksquare$$

2.1.3. példa. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$f(z) := z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

függvény az egész komplex síkon analitikus, az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix esetében az 1 kétszeres sajátérték. Az

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = n$$

értékekehez tartozó

$$p(z) := a_0 + a_1 z \qquad (z \in \mathbb{C})$$

interpolációs polinomra

$$1 = p(1) = a_0 + a_1 \qquad \text{és} \qquad n = p'(1) = a_1,$$

azaz

$$p(z) = 1 - n + nz \qquad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül. Így

$$A^n = (1-n)E_2 + nA = \begin{bmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & 1-n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & n\pi \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n\pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Halmazok távolsága

2.2.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér és $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$ esetén az A, B **halmazok távolságának** nevezzük a

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) \in \mathbb{R} : \; x \in A, \; y \in B\}$$

valós számot. Azt mondjuk, hogy $a \in A$ és $b \in B$ **extremális pontok**, ha távolságukra

$$\rho(a, b) = \rho(A, B)$$

teljesül. Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor az

$$E_A(x) := \rho(x, A) := \rho(\{x\}, A) = \inf\{\rho(x, y) \in \mathbb{R} : \; y \in A\}$$

számot az x pont A-beli elemekkel való **legjobb közelítés**ének nevezzük. Továbbá, ha valamely $a \in A$ esetén

$$E_A(x) = \rho(x, a) \,/\!= \min\{\rho(x, y) \in \mathbb{R} : \; y \in A\}/\,,$$

akkor a-t az x pontot **legjobban közelítő (A-beli) elem**nek nevezzük.

2.2.1. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér és $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén van A-ban legjobban közelítő elem: x, ha $x \in A$, ill. (tetszőleges) $y \in A$, ha $x \in A^c$.
2. A $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, ill. tetszőleges $x \in \mathfrak{c}_0$ esetén az

   $$A := \left\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \; \exists N \in \mathbb{N} : \; x_n = 0 \; (N \leq n \in \mathbb{N})\right\},$$

   halmazban van x-et van legjobban közelítő elem, ui.

   $$x^{(n)} := (x_1, \ldots, x_n, 0, 0 \ldots) \longrightarrow x \qquad (n \to \infty) \qquad /(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)\text{-ben}/,$$

   azaz

   $$\|x^{(n)} - x\|_\infty = \sup\{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \geq n+1\} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

   és

   $$x^{(n)} \in A.$$

Világos, hogy

- az infimum definíciója következtében bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a \in A$, hogy

  $$\rho(x, A) \leq \rho(x, a) < \rho(x, A) + \varepsilon;$$

- igaz az
$$\rho(x,A)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\in\overline{A}$$
állítás (vö. 1.2.19. feladat utáni megjegyzés);
- ha A zárt és B kompakt, továbbá $A\cap B=\emptyset$, akkor $\rho(A,B)>0$, ui.
  1. az infimum definíciója következtében bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén van olyan $a_n\in A$ és $b_n\in B$, hogy
  $$\rho(A,B)\leq\rho(a_n,b_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n},$$
  így ha $\rho(A,B)=0$, akkor
  $$\lim(\rho(a_n,b_n))=\rho(A,B)=0;$$
  2. B kompaktága miatt alkalmas (ν_n) indexsorozattal (b_{ν_n}) konvergens és
  $$\lim\left(b_{\nu_n}\right)=:\beta\in B,$$
  innen pedig azt kapjuk, hogy
  $$0\leq\rho\left(a_{\nu_n},\beta\right)\leq\rho\left(a_{\nu_n},b_{\nu_n}\right)+\rho\left(b_{\nu_n},\beta\right) \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
  így
  $$\lim\left(a_{\nu_n},\beta\right)=0,$$
  ahonnan
  $$\lim\left(\rho(a_{\nu_n})\right)=\beta,$$
  ill. A zártsága miatt $\beta\in A$ következik, azaz $A\cap B\neq\emptyset$, ami nem igaz;
- az előbbi állításban a B halmazról nem elég feltenni, hogy zárt, ui. pl. az
$$(\mathcal{X},\rho):=(\mathbb{R}^2,\rho_2)$$
metrikus tér esetén, ha
$$A:=\left\{(x{,}0)\in\mathbb{R}^2:\ x\in\mathbb{R}\right\} \qquad \text{és} \qquad B:=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}^2:\ x>0\right\},$$
akkor $A\cap B=\emptyset$, de
$$\rho(A,B)=\inf\left\{\rho_2\left((x{,}0),\left(x,\frac{1}{x}\right)\right)\ :\ x>0\right\}=0;$$
- bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén az $\{x\}$ halmaz kompakt, ezért ha A zárt, akkor $\rho(x,A)=0$-ból $x\in A$ következik, azaz bármely $x\in\mathcal{X}\backslash A$ esetén $\rho(x,A)>0$.

2.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, ill. $r > 0$ esetén az A halmaz r**-sugarú környezet**ének nevezzük a

$$K_r(A) := \{x \in \mathcal{X} : \ \rho(x, A) < r\}$$

halmazt.

2.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, ill. $r, s > 0$, akkor

1. az
$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \rho(x, A)$$
leképezés Lipschitz-folytonos valamely $L \leq 1$ Lipschitz-állandóval, és $L = 1$ pontosan akkor teljesül, ha
$$\mathcal{X} \backslash \overline{A} \neq \emptyset;$$
2. $K_r(A)$ nyílt halmaz;
3. fennáll a
$$K_r(K_s(A)) \subset K_{r+s}(A)$$
tartalmazás, és egyenlőség pontosan akkor van, ha ρ-t norma generálja!

Útm.

1. Ha $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $\varepsilon > 0$, akkor alkalmas $a \in A$ esetén
$$\rho(x, A) < \rho(x, A) + \varepsilon,$$
ill.
$$f(y) - f(x) = \rho(y, A) - \rho(x, A) \leq \rho(y, a) - \rho(x, a) + \varepsilon \leq \rho(y, x) + \varepsilon.$$
Innen x és y szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy
$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y).$$
Ha $x \in \mathcal{X} \backslash \overline{A}$, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén
$$K_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset,$$
ahonnan $\rho(x, A) > 0$ következik. Mivel bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $y \in A$, amelyre
$$\rho(x, y) \leq (1 + \varepsilon)\rho(x, A),$$
ezért
$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, A) - \rho(y, A)| = \rho(x, A) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}\rho(x, y).$$
2. Ha $x \in K_r(A)$ és
$$\delta := r - \rho(x, A) > 0,$$

akkor bármely $y \in K_\delta(x)$ esetén

$$\rho(y, A) \leq \rho(x, A) + \rho(x, y) < \rho(x, A) + \delta = r,$$

azaz $K_\delta(x) \subset K_r(A)$.

3. Ha

$$x \in K_r(K_s(A)),$$

azaz $\rho(x, K_s(A)) < r$, akkor alkalams $y \in K_s(A)$ esetén $\rho(x, y) < r$. Így az első állítás következtében

$$\rho(x, A) \leq \rho(y, A) + \rho(x, y) < s + r,$$

azaz

$$x \in K_{r+s}(A).$$

Ha valamely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén $(\mathcal{X}, \rho) \equiv (\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ és $x \in K_{r+s}(A)$, akkor alkalmas $y \in A$ vektorra

$$\|x - y\| < r + s.$$

Így, ha

$$\alpha := \frac{s}{r+s}, \qquad \text{ill.} \qquad u := (1-\alpha)x + \alpha y,$$

akkor

$$\|u - y\| = (1-\alpha)\|x - y\| < r \qquad \text{és} \qquad \|x - z\| = \alpha\|x - y\| < s,$$

azaz

$$x \in K_r(K_s(A)). \quad \blacksquare$$

2.2.2. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, ill.

$$\mathcal{H} := \{H \subset \mathcal{X} : \ \emptyset \neq H, \ H \text{ korlátos és zárt}\}$$

halmazrendszer esetén a

$$\rho_H(A, B) := \inf\{\varepsilon \in (0, +\infty) : \ A \subset K_\varepsilon(B) \ \text{ és } \ B \subset K_\varepsilon(A)\} \qquad (A, B \in \mathcal{H})$$

leképezés metrika (**Hausdorff-metrika**)!

Útm.

- Ha valamely $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $\rho_H(A, B) = 0$, akkor

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon(B) = \overline{B} = B.$$

  Hasonlóan látható be, hogy $B \subset A$, ahonnan $A = B$ következik.

- Világos, hogy ρ_H szimmetrikus.

- Ha $A, B, C \in \mathcal{H}$, akkor tetszőleges $\delta > 0$-hoz van olyan $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, hogy

$$\varepsilon_A \leq \rho_H(A, B) + \delta, \qquad A \subset K_{\varepsilon_A}(B), \qquad B \subset K_{\varepsilon_A}(A)$$

  és

$$\varepsilon_B \leq \rho_H(B, C) + \delta, \qquad B \subset K_{\varepsilon_B}(C), \qquad C \subset K_{\varepsilon_B}(B).$$

  Mivel

$$A \subset K_{\varepsilon_A}(K_{\varepsilon_B}(C)) \subset K_{\varepsilon_A+\varepsilon_B}(C) \qquad \text{és} \qquad C \subset K_{\varepsilon_B}(K_{\varepsilon_A}(A)) \subset K_{\varepsilon_A+\varepsilon_B}(A)$$

  (vö. 2.2.1/3. feladat), ezért

$$d_H(A, C) \leq \varepsilon_A + \varepsilon_B \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) + 2\delta. \quad \blacksquare$$

Könnyen belátható (vö. [1]), hogy ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$, ill.

$$A \cup B \subset M \subset \mathcal{X}$$

halmazok esetén

$$d_{\max} := \max\left\{\sup_{a\in A} \rho(a, B),\ \sup_{b\in B} \rho(b, A)\right\}, \qquad \text{ill.} \qquad d_{\sup} := \sup_{x\in M} |\rho(x, A) - \rho(x, B)|\,,$$

akkor

$$d_H(A, B) = d_{\max} = d_{\sup}.$$

2.2.3. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$ halmazok és $x \in \mathcal{X}$ esetén mutassuk meg, hogy

1. ha $\rho(A, B) > 0$, akkor
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset;$$
2. $\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A})$;
3. ha $x \in A'$, akkor
$$\rho\,(x, A\backslash\{x\}) = \rho(x, A) = 0;$$
4. ha A kompakt, akkor bármely $\xi \in \mathcal{X}$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy
$$\rho(\alpha, \xi) = \rho(\xi, A)$$
   teljesül!

Útm.

1. Ha
$$\alpha \in \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset,$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a \in A$ és $b \in B$, hogy

$$\max\{\rho(a, \alpha),\ \rho(b, \alpha)\} < \varepsilon/2,$$

így

$$\rho(A, B) \leq \rho(a, b) \leq \rho(a, \alpha) + \rho(\alpha, b) < \varepsilon,$$

ahonnan

$$\rho(A, B) = 0$$

következik.

2. Két lépésben bizonyítunk.

1. lépés. $A \subset \overline{A}$, így

$$\rho(x, \overline{A}) = \inf\left\{\rho(x, a) \in \mathbb{R} : \ a \in \overline{A}\right\} \leq \inf\left\{\rho(x, b) \in \mathbb{R} : \ b \in A\right\} = \rho(x, A).$$

2. lépés. Ha valamilyen $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x, A) > \rho(x, \overline{A}),$$

azaz

$$\rho(x, \overline{A}) = \inf\left\{\rho(x, a) \in \mathbb{R} : \ a \in \overline{A}\right\} < \rho(x, A),$$

akkor alkalmas $a \in \overline{A}$ esetén

$$\rho(x, a) < \rho(x, A).$$

Viszont bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $b \in A$, hogy

$$\rho(a, b) < \varepsilon,$$

így

$$\rho(x, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) < \rho(x, a) + \varepsilon,$$

azaz

$$0 < \varepsilon < \rho(x, A) - \rho(x, a) \qquad \text{esetén} \qquad \rho(x, b) < \rho(x, A),$$

ami nem igaz.

3. Ismét két lépésben bizonyítunk.

1. lépés. Ha $x \in A'$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $x \neq a \in A$, hogy

$$\rho(x, a) < \varepsilon,$$

azaz

$$\rho\left(x, A \backslash \{x\}\right) = \inf\left\{\rho(x, a) \in \mathbb{R} : \ x \neq a \in A\right\} < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\left(x, A \backslash \{x\}\right) = 0.$$

Ha $x \in A$, akkor nyilvánvalóan

$$\rho\left(x, A \backslash \{x\}\right) = \rho(x, A) = 0,$$

ha pedig $x \notin A$, akkor $A = A \backslash \{x\}$, azaz

$$\rho\left(x, A \backslash \{x\}\right) = \rho(x, A).$$

2. lépés. Mivel

$$0=\rho\left(x,A\backslash\{x\}\right)=\inf\left\{\rho(a,x)\in\mathbb{R}:\ x\neq a\in A\right\},$$

ezért bármely $\varepsilon>0$ esetén van olyan $x\neq b\in A$, hogy

$$\rho(x,b)<\varepsilon,$$

így

$$(K_\varepsilon(x)\backslash\{x\})\cap A\neq\emptyset,$$

tehát $x\in A'$.

4. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén van olyan $a_n\in A$, hogy

$$\rho(\xi,A)\leq\rho(\xi,a_n)<\rho(\xi,A)+\frac{1}{n},$$

ezért

$$\lim(\rho(\xi,a_n))=\rho(\xi,A).$$

Az A halmaz kompaktsága következtében alkalmas (ν_n) indexsorozattal

$$\lim\left(a_{\nu_n}\right)=:\alpha\in A,$$

továbbá

$$\rho(\xi,A)\leq\rho(\xi,\alpha)\leq\rho\left(\xi,a_{\nu_n}\right)+\rho\left(a_{\nu_n},\alpha\right)\longrightarrow\rho(\xi,A)+0,$$

tehát

$$\rho(\xi,\alpha)=\rho(\xi,A).$$

Megjegyzés. Az A halmaz kompaktsága lényeges, ui. ha $(l_2,\|\cdot\|_2)$-ben

$$A:=\left\{e_n\in l_2:\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

akkor A nem kompakt, de korlátos és zárt (vö. 1.2.78/3. feladat), és ha

$$\xi:=\left(-\frac{1}{n}\right)\in l_2,$$

akkor

$$\begin{aligned}\rho(\xi,A) &= \inf\left\{\|\xi-e_n\|_2\in\mathbb{R}:\ e_n\in A\right\}= \\ &= \inf\left\{\sqrt{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\left(-\frac{1}{n}-1\right)^2}\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}= \\ &= \inf\left\{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+1+\frac{2}{n}}\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}=\sqrt{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}= \\ &= \sqrt{1+\|\xi\|_2^2}.\end{aligned}$$

Ha $a \in A$, akkor

$$\rho(\xi, a) = \|\xi - e_n\|_2 = \sqrt{1 + \|\xi\|_2^2 + \frac{2}{n+1}} > \sqrt{1 + \|\xi\|_2^2},$$

azaz nincsen legjobban közelítő elem. ■

2.2.4. feladat. Számítsuk ki a $\rho(x, A)$ távolságot az alábbi esetekben!

1. A $(\mathfrak{C}[-1,1], \rho_\infty)$ térben

$$x(t) := t^2 - 1 \quad (|t| \le 1) \qquad \text{és} \qquad A := \left\{\alpha \mathrm{id}_{[-1,1]} \in \mathfrak{C}[-1,1]: \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. A $(\mathfrak{C}[-1,1], \rho_\infty)$ térben

$$x(t) := t^2 - 1 \quad (|t| \le 1) \qquad \text{és} \qquad A := \{[-1,1] \ni t \mapsto \alpha t + \beta : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

3. Az $(l_2, \|\cdot\|_2)$ térben

$$x := (1,0,0,\ldots) \qquad \text{és} \qquad A := \{(x_n) \in l_2 : \ x_0 + x_1 = 0, \ x_n = 0 \, (2 \le n \in \mathbb{N})\}.$$

4. Az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ $(p \in \{\infty, 2\})$ térben

$$x := (1,0) \qquad \text{és} \qquad A := \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. A $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ $(p \in \{1,2\})$ térben

$$x(t) := t^2 \quad (t \in [0,1]) \qquad \text{és} \qquad A := \left\{\alpha \mathrm{id}|_{[0,1]} \in \mathfrak{C}[0,1] : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. A $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_1)$ térben

$$x(t) := 1 \quad (t \in [-1,1]) \qquad \text{és} \qquad A := \left\{\alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]} \in \mathfrak{C}[-1,1] : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

7. A $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben

$$x(t) := 1 \quad (t \in [-1,1]) \qquad \text{és} \qquad A := \{[-1,1] \ni t \mapsto \alpha(1+t) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Van-e (és ha igen, akkor hány) legjobban közelítő elem?

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\rho(x, A) &= \inf\left\{\|x - \alpha \mathrm{id}_{[-1,1]}\|_\infty \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \inf\left\{\max\left\{|t^2 - 1 - \alpha t| \in \mathbb{R} : \ t \in [-1,1]\right\} \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Ha tehát adott $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_\alpha(t) := t^2 - 1 - \alpha t \qquad (t \in [-1,1]),$$

akkor

$$\varphi_\alpha(-1) = \alpha, \qquad \varphi_\alpha(1) = -\alpha,$$

és tetszőleges $t \in (-1,1)$ esetén

$$\varphi'_\alpha(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \alpha/2,$$

továbbá

$$\varphi_\alpha(\alpha/2) = \ldots = -\alpha^2/4 - 1.$$

Így

$$\begin{aligned}\rho(x,A) &= \inf\left\{\max\left\{1+\frac{\alpha^2}{4}, |\alpha|\right\} \in \mathbb{R} : \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \inf\left\{1+\frac{\alpha^2}{4} \in \mathbb{R} : \alpha \in \mathbb{R}\right\} = 1.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Most az egyetlen létező legjobban közelítő elem $/\alpha = 0/$:

$$b(t) = 0 \qquad (t \in [-1,1]).$$

2. Világos, hogy ha

$$y_{\alpha,\beta}(t) := \alpha t + \beta \qquad (t \in [-1,1]),$$

akkor

$$\begin{aligned}\rho(x,A) &= \inf\left\{\|x - y_{\alpha,\beta}\|_\infty \in \mathbb{R} : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \inf\left\{\max\left\{|t^2 - 1 - \alpha t - \beta| \in \mathbb{R} : t \in [-1,1]\right\} \in \mathbb{R} : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Ha tehát adott $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) := t^2 - 1 - \alpha t - \beta \qquad (t \in [-1,1]),$$

akkor

- az $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$ esetben
$$\left\|x - y_{0,-\frac{1}{2}}\right\|_\infty = \frac{1}{2};$$
- a $\beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$ esetben
$$\varphi_{\alpha,\beta}(0) = |\beta + 1| = \frac{1}{2} \leq \left\|x - y_{\alpha,-\frac{1}{2}}\right\|_\infty,$$
tehát itt nem csökkenthető az eltérés;
- a $\beta > -\frac{1}{2}$ esetben
$$\|x - y_{\alpha,\beta}\|_\infty \geq \varphi_{\alpha,\beta}(0) = |\beta + 1| > \frac{1}{2};$$

- a $\beta < -\frac{1}{2}$ ($-\beta > \frac{1}{2}$) esetben, mivel

$$\varphi_{\alpha,\beta}(-1) = |\alpha - \beta|, \qquad \varphi_{\alpha,\beta}(1) = |\alpha + \beta|,$$

ezért, ha $\alpha > 0$, akkor

$$\alpha - \beta > \alpha + \frac{1}{2} > \frac{1}{2},$$

így

$$\varphi_{\alpha,\beta}(-1) = \alpha - \beta > \frac{1}{2},$$

ill., ha $\alpha < 0$, akkor

$$\varphi_{\alpha,\beta}(1) = -\alpha - \beta > \frac{1}{2} - \alpha > \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\rho(x, A) = \frac{1}{2}$$

és pl. $y_{\alpha,-\frac{1}{2}}$ extremális elem.

3. Ha

$$a := (z, -z,0,0, \ldots) \in A \qquad (z = u + \imath v \in \mathbb{K},\ u, v \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\|x-a\|_2^2 = \|(1-z, z,0,0, \ldots)\|_2^2 = |1-z|^2+|z|^2 = (1-u)^2+v^2+u^2+v^2 = 2u^2-2u+2v^2+1.$$

Így

$$\rho^2(x, A) = \inf\left\{2(u - 1/2)^2 + 2v^2 + 1/2 \in \mathbb{R} :\ u, v \in \mathbb{R}\right\} = 1/2.$$

Tehát

$$\rho(x, A) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|x - b\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = (1/2, -1/2,0,0, \ldots) \in A.$$

4. Ha

(a) $p = \infty$, akkor a következőt mondhatjuk:

$$\rho(x, A) = \inf\left\{\|(1,0) - (0, y)\|_\infty \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{R}\right\},$$

ahol $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|(1,0) - (0, y)\|_\infty = \|(1, -y)\|_\infty = \max\{1, |y|\} = \begin{cases} |y| & (|y| > 1), \\ \\ 1 & (|y| \leq 1). \end{cases}$$

Ezért

$$\rho(x, A) = \inf\left\{\|(1,0) - (0, y)\|_\infty \in \mathbb{R} :\ y \in [-1,1]\right\} = 1,$$

és minden $y \in [-1,1]$ mellett

$$\|(1,0) - (0, y)\|_\infty = 1 = \rho(x, A).$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges

$$b := (0, y) \in A \qquad (y \in [-1,1])$$

legjobban közelítő elem.

(b) $p = 2$, akkor a következőt mondhatjuk:

$$\rho(x, A) = \inf\left\{\|(1{,}0) - (0, y)\|_2 \in \mathbb{R} :\ y \in \mathbb{R}\right\},$$

ahol $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|(1{,}0) - (0, y)\|_2 = \|(1, -y)\|_2 = \sqrt{1 + y^2} \geq 1.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $y = 0$, azaz

$$\rho(x, A) = \|(1{,}0) - (0{,}0)\|_2 = 1,$$

így $b := (0{,}0)$ az egyetlen legjobban közelítő elem.

5. Ha

(a) $p = 1$, akkor a következőt mondhatjuk: tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left\|x - \alpha \mathrm{id}_{[0,1]}\right\|_1 = \int_0^1 |t^2 - \alpha t| \,\mathrm{d}t.$$

Így három esetet különböztetünk meg.

$\boxed{\alpha \leq 0}$**:** $\left\|x - \alpha \mathrm{id}_{[0,1]}\right\|_1 = \int_0^1 |t^2 - \alpha t| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{3}.$

$\boxed{\alpha \geq 1}$**:** $\left\|x - \alpha \mathrm{id}_{[0,1]}\right\|_1 = \int_0^1 |t^2 - \alpha t| \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

$\boxed{0 < \alpha < 1}$**:** $\left\|x - \alpha \mathrm{id}_{[0,1]}\right\|_1 =$

$$= \int_0^1 |t^2 - \alpha t| \,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_0^\alpha (\alpha t - t^2) \,\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 (t^2 - \alpha t) \,\mathrm{d}t = \ldots =$$

$$= \quad \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} =: \varphi(\alpha).$$

Innen

$$\varphi'(\alpha) = \alpha^2 - 1/2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 1/\sqrt{2},$$

$$\varphi''(\alpha) = 2\alpha \quad (\alpha \in (0{,}1)) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi''(1/\sqrt{2}) > 0,$$

azaz

$$\min\left\{\varphi(\alpha) \in \mathbb{R} :\ \alpha \in (0{,}1)\right\} = \varphi(1/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}}.$$

Mivel

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}} < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\},$$

ezért

$$\rho(x, A) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}}.$$

$$\rho(x, A) = \|x - b\|_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = (1/\sqrt{2})\mathrm{id}_{[0,1]}.$$

(b) $p = 2$, akkor a következőt mondhatjuk:

$$\begin{aligned}\rho(x,A) &= \inf\{\rho(x,a)\in\mathbb{R}:\ a\in A\} = \inf\left\{\|x-\alpha\mathrm{id}|_{[0,1]}\|_2\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \\ &= \inf\left\{\sqrt{\int_0^1 |t^2-\alpha t|^2\,dt}\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \ldots = \\ &= \inf\left\{\sqrt{\frac{\alpha^2}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5}}\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \sqrt{\frac{1}{80}},\end{aligned}$$

ui. ha

$$\varphi(\alpha) := \frac{\alpha^2}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5} \qquad (\alpha\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\varphi'(\alpha) = \frac{2\alpha}{3}-\frac{1}{2} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha = \frac{3}{4}, \quad \varphi''(\alpha) = \frac{2}{3} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

és $\varphi''(3/4) > 0$, azaz

$$\inf\left\{\sqrt{\varphi(\alpha)}\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \sqrt{\varphi\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{80}}.$$

$$\rho(x,A) = \|x-a\|_2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad a(t) = \frac{3t}{4} \quad (t\in[0{,}1]).$$

6. Mivel bármely $a\in A$ esetén

$$\|f-a\|_1 = \int_1^1 |1-\alpha t|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2 & (\alpha\in[-1{,}1]), \\ |\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|} & (|\alpha|\geq 1), \end{cases}$$

ezért

$$\rho(x,A) = \inf\left\{\|x-\alpha\mathrm{id}_{[-1,1]}\|_1\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = \inf\left\{\int_1^1 |1-\alpha t|\,\mathrm{d}t\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} = 2.$$

Így tetszőleges $\alpha\in[-1{,}1]$ esetén az

$$a(t) := \alpha t \qquad (t\in[-1{,}1])$$

függvény az x-et legjobban közelítő A-beli elem.

7. Mivel bármely $a\in A$ esetén

$$\|f-a\|_\infty = \max\{|1-\alpha(1+t)|\in\mathbb{R}:\ \alpha\in\mathbb{R}\} = \begin{cases} 1 & (\alpha\in[-1{,}1]), \\ |1-2\alpha| & (|\alpha-0.5|>0.5), \end{cases}$$

ezért $\rho(x,A) = 1$. Így tetszőleges $\alpha\in[-1{,}1]$ esetén az

$$a(t) := \alpha(1+t) \qquad (t\in[-1{,}1])$$

függvény az x-et legjobban közelítő A-beli elem. ■

2.2.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ Bolzano-Weierstraß-tulajdonságú, azaz bármely $/(A,\rho|_A)$-ban/ korlátos sorozatnak van $/(A,\rho|_A)$-ban/ konvergens részsorozata, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén van A-ban x-et legjobban közelítő elem!

Útm. Ha

$$\alpha := \rho(x,A),$$

akkor az infimum definíciója alapján bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy

$$\rho(x,x_n) < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Az (x_n) sorozat nyilván korlátos $(A,\rho|_A)$-ban, így a feltétel alapján alkalmas (ν_n) indexsorozattal

$$\lim(x_{\nu_n}) =: y \in A.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\alpha - \rho(x_{\nu_n},y) \leq \rho(x,x_{\nu_n}) - \rho(x_{\nu_n},y) \leq \rho(x,y) \leq \rho(x,x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n},y) \leq \alpha + \frac{1}{\nu_n} + \rho(x_{\nu_n},y),$$

ezért – figyelembe véve, hogy

$$\rho(x_{\nu_n},y) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

–, azt kapjuk, hogy

$$\rho(x,y) = \rho(x,A),$$

azaz y az x-et legjobban közelítő A-beli elem. ■

2.3. Weierstraß approximációs tételei

2.3.1. feladat. Igazoljuk, hogy van olyan

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

polinomokból álló sorozat, amelyre

$$p_n(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\left|p_n(x) - \sqrt{x}\right| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,1]\right\}\right) = 0$$

teljesül!

Útm. Megmutatjuk, hogy ha

$$p_0 := \widehat{0}, \qquad p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{x - p_n^2(x)}{2} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

(1) $p_n \leq p_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$;

(2) $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ $(x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}_0)$;

(3) $p_n \rightrightarrows \sqrt{\ }$ $(n \to \infty)$ a $[0,1]$ intervallumon.

1. lépés. A

$$p_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

polinomsorozat definíciójából látható, hogy **(2)**-ből **(1)** következik.

2. lépés. Világos, hogy $n = 0$ esetén

$$p_0(x) \leq \sqrt{x} \qquad (x \in [0,1]).$$

Ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén fennáll a

$$p_n(x) \leq \sqrt{x} \qquad (x \in [0,1])$$

egyenlőtlenség, akkor bármely $x \in [0,1]$ számra

$$\frac{\sqrt{x} + p_n(x)}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1 \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül. Így, ha $x \in [0,1]$, akkor

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{x - p_n^2(x)}{2} = \left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x} + p_n(x)}{2}\right) \geq 0$$

3. lépés. Mivel $p_0 = \hat{0}$, ezért

$$p_1(x) = \frac{x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \quad \text{miatt} \quad \left|\sqrt{x} - p_1(x)\right| = \left|\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad (x \in [0,1]).$$

Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} x - p_{n+1}^2(x) &= x - \left(p_n(x) + \frac{x - p_n^2(x)}{2}\right)^2 = \\ &= x - \left(p_n^2(x) + x - p_n^2(x) + \frac{x - p_n^2(x)}{4}\right) = \\ &= \frac{x - p_n^2(x)}{4}, \end{aligned}$$

azaz

$$\left(\sqrt{x} + p_{n+1}(x)\right)\left(\sqrt{x} - p_{n+1}(x)\right) = \frac{(\sqrt{x} + p_n(x))\,(\sqrt{x} - p_n(x))}{4} \qquad (x \in [0,1]).$$

A monotonitás miatt minden $x \in (0,1]$ számra

$$\sqrt{x} + p_{n+1}(x) > 0$$

és

$$\frac{\sqrt{x}+p_n(x)}{\sqrt{x}+p_{n+1}(x)} \leq 1 \qquad (x \in (0,1]),$$

így

$$\sqrt{x}+p_{n+1}(x) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}+p_n(x)}{\sqrt{x}+p_{n+1}(x)}\left(\sqrt{x}-p_n(x)\right) \leq \frac{\sqrt{x}-p_n(x)}{4}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség $x=0$ esetén is fennáll, hiszen

$$p_n(0) = 0 = p_{n+1}(1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így tehát tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $x \in [0,1]$ esetén

$$\left|\sqrt{x}-p_n(x)\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

2.3.2. feladat. Mutassuk meg, hogy van olyan

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

polinomokból álló sorozat, amelyre

$$p_n(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{|p_n(x)-|x|| \in \mathbb{R}: \ x \in [-1,1]\right\}\right) = 0$$

teljesül!

Útm. Ha $p_0 := \widehat{0}$,

$$p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{x^2-p_n^2(x)}{2} = p_n(x) + \frac{(|x|-p_n(x))\,(|x|+p_n(x))}{2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor teljes indukcióval könnyen belátható, hogy bármely $x \in [-1,1]$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$0 \leq p_n(x) \leq |x|,$$

továbbá

$$\begin{aligned}
|x|-p_{n+1}(x) &= (|x|-p_n(x))\left(1-\frac{|x|+p_n(x)}{2}\right) \leq (|x|-p_n(x)) \cdot \frac{2+n|x|}{2+(n+1)|x|} \leq \\
&\leq (|x|-p_{n-1}(x)) \cdot \frac{2+n|x|}{2+(n+1)|x|} \cdot \frac{2+(n-1)|x|}{2+n|x|} \leq \\
&\ \ \vdots \\
&\leq \underbrace{(|x|-p_0(x))}_{|x|} \cdot \underbrace{\frac{2+n|x|}{2+(n+1)|x|} \cdot \frac{2+(n-1)|x|}{2+n|x|} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{2+|x|}}_{\frac{2}{2+(n+1)|x|}} = \\
&= \frac{2|x|}{2+(n+1)|x|} \leq \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3.1. definíció. Adott

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}$$

folytonos függvény és $n\in\mathbb{N}$ index esetén f-hez tartozó n-edik **Bernstein-polinom**nak nevezzük a

$$B_nf(x):=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

polinomot.

2.3.3. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$h_n(x):=x^n\qquad (x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}_0)$$

függvényekre

$$B_nh_0(x)=h_0(x),\quad B_nh_1(x)=h_1(x),\quad (B_nh_2)(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}\qquad (x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}),$$

majd számítsuk ki az

$$f(x):=\alpha e^{\beta x},\quad g(x):=\frac{1}{1+\alpha e^{\beta x}},\quad h(x):=2^x\qquad (x\in[0,1];\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

függvényekhez tartozó n-edik Bernstein-polinomot!

Útm.

1. lépés. Ha

$$p_{nk}(x):=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\qquad (k\in\mathbb{N}_0,\ n\in\mathbb{N}:\ 0\le k\le n,\ x\in\mathbb{R}),$$

akkor

- $B_nh_0(x)=h_0(x)\ \ (x\in[0,1])$ azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)=1\qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1]).$$

Valóban, a binomiális tétel felhasználásával

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1\qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}).$$

- $B_nh_1(x)=h_1(x)\ \ (x\in[0,1])$ azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}p_{nk}(x)=x\qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1]).$$

Valóban, a binomiális együtthatókra vonatkozó azonosságok felhasználásával tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} = \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} = x(x+1-x)^{n-1} = x.
\end{aligned}$$

- $(B_n h_2)(x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$ $\quad (x \in [0{,}1],\ n \in \mathbb{N})$ azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0{,}1]).$$

A fenti módszerrel azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}.$$

$n = 1$ esetén ez nem más, mint

$$x \sum_{k=0}^{0} (k+1) \binom{0}{k} x^k (1-x)^{-k} = x \cdot 1 = x = x^2 + \frac{x - x^2}{1}.$$

Ha $n > 1$, akkor

$$\frac{k+1}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k+1}{n-1},$$

és így

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) &= x \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n-1} p_{n-1,k}(x) = \\
&= x \frac{n-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} p_{n-1,k}(x) + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-1} p_{n-1,k}(x) \right) = x \frac{n-1}{n} \left(x + \frac{1}{n-1} \right) = \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n} = \frac{nx^2 - x^2 + x}{n} = x^2 + \frac{x - x^2}{n}.
\end{aligned}$$

2. lépés. Az exponenciális függvény egy tulajdonsága, ill. a binomiális tétel alapján:

$$\begin{aligned} B_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha \exp\left(\frac{\beta k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} \left(\exp\left(\frac{\beta}{n}\right)\right)^k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x e^{\beta/n}\right)^k (1-x)^{n-k} = \alpha \left(x e^{\beta/n} + 1 - x\right)^n \qquad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

3. lépés. Ha $\alpha = 0$, akkor a binomiális tétel felhasználásával

$$B_n g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 \qquad (x \in [0,1]).$$

Ha $\beta = 0$, akkor a binomiális tétel felhasználásával

$$B_n g(x) = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = \frac{1}{1+\alpha} \qquad (x \in [0,1]).$$

Ha $\alpha\beta \neq 0$ és $x \in [0,1]$ olyan, hogy

$$e^{\beta x} < \frac{1}{|\alpha|},$$

akkor

$$g(x) = \frac{1}{1 - (-\alpha e^{\beta x})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[-\alpha e^{\beta x}\right]^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\alpha)^{\nu} e^{\nu \beta x},$$

és így a B_n „operátor linearitása” (vö. 4.2.28. feladat) miatt

$$B_n g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\alpha)^{\nu} \left(x e^{\nu\beta/n} + 1 - x\right)^n.$$

4. lépés. Az exponenciális függvény egy tulajdonsága, ill. a binomiális tétel alapján:

$$\begin{aligned} B_n h(x) &= \sum_{k=0}^{n} 2^{k/n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(x 2^{k/n}\right)^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} = \\ &= \left(x 2^{1/n} + 1 - x\right)^n \qquad (x \in [0,1]). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$f(x) \in \{x, x^2, e^x\} \qquad (x \in [0,1])$$

akkor

$$B_n f \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty),$$

azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$|B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül!

Útm.

- Ha

$$f(x) := x \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor (vö. 2.3.3. feladat) bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$|B_n f(x) - f(x)| = 0.$$

- Ha

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor (vö. 2.3.3. feladat) bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$|B_n f(x) - f(x)| = \frac{x - x^2}{n} \leq \frac{1/4}{n} = \frac{1}{4n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

- Ha

$$f(x) := e^x \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor felhasználva, hogy

$$\lim \left(\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) = 1, \qquad \text{azaz} \qquad e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \qquad (n \to \infty),$$

azt kapjuk, hogy

$$B_n f(x) \sim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x \qquad (n \to \infty).$$

A konvergencia egyenletes, hiszen bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

így

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

és

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ahonnan

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

következik. ■

2.3.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ és $x \in \mathbb{R}$

$$p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

akkor igaz a

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n} < \frac{1}{4n}$$

becslés!

Útm. A 2.3.3. feladat következményeként azt kapjuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) + x^2 \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n} = \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right\} \leq \frac{1}{4n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$a, b, c, k \in \mathbb{R}: \qquad a < c - k < c \leq b,$$

akkor tetszőleges $\eta >$ számhoz van olyan $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, hogy bármely

- $x \in [a, c-k]$ esetén
$$1 - \eta < P(x) \leq 1,$$
- $x \in (c-k, c)$ esetén
$$0 \leq P(x) \leq 1,$$
- $x \in [c, b]$ esetén
$$0 \leq P(x) \leq \eta$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy ha

$$l := b - a \qquad \text{és} \qquad d := c - k/2,$$

akkor az

$$f(x) := \frac{1}{2} + \frac{x-d}{2l} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomra

$$f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (x \in [a, d]) \qquad \text{és} \qquad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad (x \in [d, b]).$$

Mivel
$$2f(c-k)<1 \qquad \text{és} \qquad 2f(c)>1,$$
ezért
$$\lim_{n\to\infty}\left((2f(c-k))^n\right)=0=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2f(c)}\right)^n\right).$$
Ez azt jelenti, hogy alkalmas $n\in\mathbb{N}$ indexre
$$(2f(c-k))^n<\eta \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{1}{2f(c)}\right)^n<\eta.$$
Megmutatjuk, hogy erre az n-re a
$$P(x):=(1-(f(x))^n)^{2^n} \qquad (x\in\mathbb{R})$$
polinom megfelelő. Világos, hogy
$$0\le P(x)\le 1 \qquad (x\in[a,b]).$$
Ezért a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$P(x)\ge 1-(2f(x))^n\ge 1-(2f(c-k))^n \qquad (x\in[a,c-k]),$$
ill.
$$P(x)\le\frac{1}{(2f(x))^n}P(x)\left[1+(2f(x))^n\right]\le\frac{1}{(2f(x))^n}\left[1-(f(x))^{2n}\right]^{2^n}\le\frac{1}{(2f(c))^n} \qquad (x\in[c,b]). \quad \blacksquare$$

2.3.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a,b\in\mathbb{R}\colon a<b$, továbbá
$$\mathcal{P}:=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ \exists\, p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{polinom}:\ f=p|_{[a,b]}\right\},$$
akkor
$$\forall\, f\in\mathfrak{C}[a,b]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\, p\in\mathcal{P}:\ \|f-p\|_\infty=\sup\left\{|f(x)-p(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[a,b]\right\}<\varepsilon,$$
azaz bármely $f\in\mathfrak{C}[a,b]$ függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető polinomokkal (**Weierstraß-féle I. approximációs tétel**)!

Útm.

1. módszer.

1. lépés. Ha
$$g:[0{,}1]\to\mathbb{R}, \qquad g(t):=f(a+t(b-a)),$$
akkor nyilvánvalóan $g\in\mathfrak{C}[0{,}1]$. Így, ha az állítás teljesül a $[0{,}1]$ intervallumon, akkor bármely $\varepsilon>0$ esetén van olyan q polinom, hogy
$$\left\|g-q|_{[0,1]}\right\|_\infty=\sup\left\{|f(a+t(b-a))-q(t)|\in\mathbb{R}:\ t\in[0{,}1]\right\}<\varepsilon.$$

A
$$\varphi : [a, b] \to [0,1], \qquad \varphi(x) := \frac{x-a}{b-a}$$
bijekció segítségével így azt kapjuk, hogy
$$\sup\{|f(\varphi(x)) - q\,(\varphi(x))| \in \mathbb{R} : \ x \in [a, b]\} < \varepsilon,$$
azaz
$$\left\| f - p|_{[a,b]} \right\|_\infty < \varepsilon,$$
ahol
$$p(x) := q(\varphi(x)) = q\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ez azt jelenti, hogy az $[a, b]$ intervallum helyett elegendő a $[0,1]$ intervallumot tekinteni.

2. lépés. Ha tehát $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, akkor f egyenletesen folytonos, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x, y \in [0,1] : \ |x - y| < \delta).$$
Ha $x \in [0,1]$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor (vö. 2.3.3., ill. 2.3.5. feladat)
$$\begin{aligned} |B_n f(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x) - f(x) \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x), \end{aligned}$$
hiszen bármely $x \in [0,1]$ esetén $p_{nk}(x) \geq 0$. Ha $x \in [0,1]$ és
$$N_\delta(x) := \left\{ k \in \mathbb{N} : \ 0 \leq k \leq n, \ \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\},$$
továbbá
$$M_\delta(x) := \left\{ k \in \mathbb{N} : \ 0 \leq k \leq n, \ \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right\},$$
akkor
$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$
és
$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$$
következtében
$$\sum_{k \in N_\delta(x)} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in N_\delta(x)} p_{nk}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

és

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in M_\delta(x)} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| p_{nk}(x) \quad &\leq \quad 2\|f\|_\infty \cdot \sum_{k\in M_\delta(x)} p_{nk}(x) \leq \\
&\leq \quad 2\|f\|_\infty \cdot \sum_{k\in M_\delta(x)} \left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)^2 p_{nk}(x) \leq \\
&= \quad \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4n} = \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}.
\end{aligned}$$

Ezért bármely $x \in [0{,}1]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n},$$

azaz, ha $N \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 N} < \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$\|B_n f|_{[0,1]} - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. módszer. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen

$$H_\varepsilon := \{t \in [a,b] : \exists\, P_\varepsilon \in \mathcal{P} : \ |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \ (x \in [a,t])\}.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[a]$, ezért alkalmas $\tau \in (a,b]$ esetén

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,\tau]).$$

Ez azt jelenti, hogy f az $[a,\tau]$ intervallumon $f(a)$-val közelíthető és $H_\varepsilon \neq \emptyset$. Ha

$$h := \sup(H_\varepsilon),$$

akkor nyilvánvalóan $h \in (a,b]$, továbbá $f \in \mathfrak{C}[h]$ miatt van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(h)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (b \geq x \in [h-\delta, h+\delta]).$$

A szuprémum definíciója következtében van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $h - \delta < c \leq h$ és $c \in H_\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ esetén

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,c]).$$

Ha most

$$m := \max\{|f(x) - P_\varepsilon(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,c]\}$$

és $M \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre

$$M > |f(x) - P_\varepsilon(x)| + |f(x) - f(h)| \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül, akkor $m < \varepsilon$ következtében $\eta \in (0,1)$ megválasztható úgy, hogy

$$m + M\eta < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad M\eta < \frac{2\varepsilon}{3}$$

teljesüljön. Így a $c - k := h - \delta$ számra alkalmazva a 2.3.6. feladatbeli állítást, van olyan P, hogy

$$p(x) := f(h) + (P_\varepsilon(x) - f(h))P(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom a kívánt tulajdonságú, hiszen

- egyrészt tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - P_\varepsilon(x)|\, P(x) + |f(x) - f(h)|(1 - P(x)),$$

- másrészt

$$|f(x) - P(x)| \leq m + M\eta < \varepsilon \qquad (x \in [a, h - \delta]),$$

  ill.

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon P(x) + \frac{\varepsilon}{3}(1 - P(x)) < \varepsilon \qquad (x \in [h - \delta, c]),$$

- harmadrészt pedig

$$|f(x) - P(x)| \leq MP(x) + \frac{\varepsilon}{3}(1 - P(x)) < \varepsilon \qquad (x \in [c, h + \delta] \cap [c, b]).$$

Látszik, hogy $h = b$, hiszen ellenkező esetben a keresett becslés az $[a, h + \delta]$ intervallumon teljesülne, ami ellentmond h definíciójának. Így $[a, h] = [a, b]$. ■

2.3.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, akkor az $(\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}), \langle\cdot, \cdot\rangle_{L^2})$ euklideszi térben (vö. 1.4.17/2. feladat) az

$$M := \{[a, b] \ni x \mapsto x^n : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmazra $M^\perp = \{\widehat{0}\}$ teljesül!

Útm. Ha a $\varphi \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ függvényre $\varphi \in M^\perp$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\left\langle \varphi, \mathrm{id}^n|_{[a,b]} \right\rangle = \int_a^b \varphi(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0.$$

Ha p polinom, azaz alkalmas $m \in \mathbb{N}_0$, ill. $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\int_a^b \varphi(x)p(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{m} \varphi(x)a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{m} a_n \int_a^b \varphi(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0$$

és így

$$\int_a^b (\varphi(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b \{(\varphi(x))^2 - \varphi(x)\}p(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\{\varphi(x) - p(x)\} \,\mathrm{d}x.$$

A Weierstraß-féle I. approximációs tétel következményeként tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan p_ε polinom, hogy

$$\left\|\varphi - p_\varepsilon|_{[a,b]}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

ennélfogva

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b (\varphi(x))^2\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \varphi(x)\,\{\varphi(x) - p_\varepsilon(x)\}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |\varphi(x)|\cdot|\varphi(x)-p_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x \le \\ &\le \|\varphi\|_\infty \cdot \left\|\varphi - p_\varepsilon|_{[a,b]}\right\|_\infty \cdot (b-a) < \|\varphi\|_\infty \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\int_a^b (\varphi(x))^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

továbbá φ^2 folytonossága, ill. $\varphi \ge 0$ következtében

$$\varphi(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]). \quad \blacksquare$$

2.3.9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető trigonometrikus polinomokkal (**Weierstraß-féle II. approximációs tétel**), pontosabban igaz a

$$\forall\, f \in \mathfrak{C}_{2\pi}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists T \in \mathcal{T}:\ \|f - T\|_\infty = \sup\{|f(x) - T(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{R}\} < \varepsilon$$

állítás!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvény és bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan páros $T \in \mathcal{T}$, hogy

$$\sup\{|f(x) - T(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [0,\pi]\} < \varepsilon.$$

Valóban, a

$$g(y) := f(\arccos(y)) \qquad (y \in [-1,1])$$

függvényre $g \in \mathfrak{C}[-1,1]$, így a Weierstraß-féle I. approximációs tétel következményeként alkalmas p polinomra $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$ teljesül, ezért a

$$T(x) := p(\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

páros trigonometirikus polinomra

$$\begin{aligned}\sup\{|f(x) - T(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [0,\pi]\} &= \sup\{|f(\arccos(y)) - p(y)| \in \mathbb{R}:\ y \in [-1,1]\} = \\ &= \|g - p\|_\infty < \varepsilon,\end{aligned}$$

ahonnan

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [0,\pi])$$

következik.

2. lépés. Ha $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, akkor a

$$g(x) := f(x) + f(-x) \qquad \text{és a} \qquad h(x) := \{f(x) + f(-x)\} \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény folytonos, páros és 2π-periodikus. Az **1. lépés**ben bizonyítottak alapján tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan páros $s, t \in \mathcal{T}$, hogy

$$|g(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{és} \qquad |h(x) - t(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (x \in [0, \pi]).$$

Mivel $g - s$ és $h - t$ is páros, ill. 2π-periodikus, ezért ezek az egyenlőtlenségek $[-\pi, \pi]$-n, ill. $\mathbb{R}$-en is teljesülnek. Világos, hogy az

$$u(x) := s(x)\sin^2(x) + t(x)\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

trigonometrikus polinomra

$$\begin{aligned}\left|2f(x)\sin^2(x) - u(x)\right| &= \left|(g(x) - s(x))\sin^2(x) + (h(x) - t(x))\sin(x)\right| \leq \\ &\leq |g(x) - s(x)| + |h(x) - t(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

teljesül.

3. lépés. Világos, hogy tetszőleges $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén az

$$\widetilde{f}(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $\widetilde{f} \in \mathfrak{C}_{2\pi}$, így az előző lépésbeli érvelés alapján elmondható, hogy alkalmas $v \in \mathcal{T}$ esetén

$$\left|2f\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2(y) - v(y)\right| = \left|2\widetilde{f}(y)\sin^2(y) - v(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

ahonnan a

$$w(x) := v\left(x - \pi/2\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

trigonometrikus polinomra

$$\left|2f(x)\cos^2(x) - w(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Így, ha

$$z(x) := \frac{u(x) + w(x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $z \in \mathcal{T}$ és

$$\begin{aligned}|2f(x) - 2z(x)| &= \left|(2f(x)\sin^2(x) - u(x)) + (2f(x)\cos^2(x) - z(x))\right| \leq \\ &\leq \left|2f(x)\sin^2(x) - u(x)\right| + \left|2f(x)\cos^2(x) - z(x)\right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (x \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

azaz

$$\|f - z\|_\infty < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

2.3.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ kompakt topologikus tér, az $\mathfrak{A}$ halmaz egységelemes, szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben (vö. 1.1.23. definíció), akkor $\mathfrak{A}$ sűrű $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben, azaz bármely $f\in\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$ függvény, ill. bármely $\varepsilon>0$ szám esetén van olyan $g\in\mathfrak{A}$ függvény, hogy

$$\|f-g\|_\infty=\sup\{|f(x)-g(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in\mathcal{X}\}<\varepsilon$$

teljesül (**Stone-Weierstraß-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha

$$f\in\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})\qquad\text{és}\qquad f\geq 0,$$

akkor $n\in\mathbb{N}$ legyen olyan index, amelyre

$$(n-1)\varepsilon\geq\|f\|_\infty$$

teljesül, ahol az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\varepsilon<1/3$. Ekkor tetszőleges $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ esetén az

$$A_k:=\{x\in\mathcal{X}:\ f(x)\leq(3k-1)\varepsilon/3\},$$

ill. a

$$B_k:=\{x\in\mathcal{X}:\ f(x)\geq(3k+1)\varepsilon/3\}$$

halmazokra az alábbi három tulajdonság teljesül:

- $A_k\cap B_k=\emptyset\quad(k\in\{0,1,\ldots,n\})$,
- $\emptyset=A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_n=\mathcal{X}$,
- $B_0\supset B_1\supset\ldots\supset B_n=\emptyset$.

f folytonossága és

$$A_k=f^{-1}\left[(-\infty,(3k-1)\varepsilon/3]\right]\qquad(k\in\{0,1,\ldots,n\}),$$

$$B_k=f^{-1}\left[[(3k+1)\varepsilon/3,+\infty)\right]\qquad(k\in\{0,1,\ldots,n\})$$

következtében (vö. 1.1.21/(3). feladat) bármely $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ esetén A_k, ill. B_k zárt halmaz. Ezért (vö. 1.1.67. feladat) minden $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ esetén van olyan $g_k\in\mathfrak{A}$, amelyre

$$g_k(x)\in[0,1]\qquad(x\in\mathcal{X}),$$

$$g_k(x)<\varepsilon/n\qquad(x\in A_k),$$

ill.

$$g_k(x)>1-\varepsilon/n\quad(x\in B_k)$$

teljesül. Így a

$$g:\mathcal{X}\to\mathbb{R},\qquad g(x):=\varepsilon\sum_{k=0}^{n}g_k(x)$$

függvény is $\mathfrak{A}$-beli. Világos, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ ponthoz van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$ index, hogy $x \in A_k \backslash A_{k-1}$, ahonnan

$$(*) \qquad (3k-4)\varepsilon/3 < f(x) < (3k-1)\varepsilon/3$$

és

$$g_l(x) < \varepsilon/n \qquad (l \in \{1, \ldots, n\},\ l \geq k)$$

következik. Sőt az A_k, ill. a B_k halmazok definíciójából az is látható, hogy tetszőleges $l \in \{0{,}1, \ldots, n\}$, $l \leq k-2$ esetén $x \in B_l$, ahonnan

$$g_l(x) > 1 - \varepsilon/n$$

következik. Így bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} g(x) &= \varepsilon \sum_{l=0}^{k-1} g_l(x) + \varepsilon \sum_{l=k}^{n} g_l(x) < \\ &< \varepsilon k + \varepsilon(n-k+1)\varepsilon/n \leq \varepsilon k + \varepsilon^2 < \left(k + \frac{1}{3}\right)\varepsilon = \\ &= (3k+1)\varepsilon/3, \end{aligned}$$

ill.

$$g(x) \geq 0 > \varepsilon(3 \cdot 1 - 4),$$

továbbá, ha $k \geq 2$, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \varepsilon \sum_{l=0}^{k-2} g_l(x) \geq \varepsilon(k-1)\,(1 - \varepsilon/n) = \\ &= \varepsilon(k-1) - \varepsilon^2(k-1)/n > \varepsilon(k-1) - \varepsilon^2 = \\ &= \varepsilon(k-1-\varepsilon) > \varepsilon\left(k - 1 - \frac{1}{3}\right) = \varepsilon\left(k - \frac{4}{3}\right) = \\ &= \varepsilon(3k-4)/3. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$(3k-4)\varepsilon/3 < g(x) < (3k+1)\varepsilon/3,$$

azaz

$$(**) \qquad -(3k+1)\varepsilon/3 < -g(x) < -(3k-4)\varepsilon/3.$$

A $(*)$ és $(**)$ egyenlőtlenségekből pedig

$$-5\varepsilon/3 = (3k-4)\varepsilon/3 - (3k+1)\varepsilon/3 < f(x) - g(x) < (3k-1)\varepsilon/3 - (3k-4)\varepsilon/3 = \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következik. Innen már látható, hogy

$$-2\varepsilon < f(x) - g(x) < 2\varepsilon \quad (x \in \mathcal{X}), \qquad \text{azaz} \qquad \|f - g\|_\infty < 2\varepsilon.$$

2. lépés. Ha

$$F(x) := f(x) + \widehat{\|f\|_\infty} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor

$$-f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következtében $F \geq 0$. Ezért az imént bizonyítottak értelmében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $h \in \mathfrak{A}$ függvény, hogy

$$\|h - F\|_\infty = \left\|h - \left(f + \widehat{\|f\|_\infty}\right)\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Így a

$$g := h - \widehat{\|f\|_\infty}$$

függvényre $g \in \mathfrak{A}$, továbbá

$$\|g - f\| = \left\|g - \widehat{\|f\|_\infty} - f\right\|_\infty = \left\|h - \left(f + \widehat{\|f\|_\infty}\right)\right\|_\infty < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

A 1.1.28/1., ill. 3. példát felhasználva megállapítható, hogy a Stones-Weierstraß-tételnek speciális esete a Weierstraß-féle I., ill. II. approximációs tétel, továbbá igaz a

2.3.1. tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz akkor, bármely $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan többváltozós p polinom, hogy

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \Omega).$$

2.3.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ kompakt topologikus tér, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, továbbá bármely $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ függvény, ill. bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $g \in \mathfrak{A}$ függvény, hogy

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}\} < \varepsilon$$

teljesül, akkor a $\mathfrak{A}$ szeparáló halmaz $\mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$-ben, azaz bármely $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$ esetén van olyan $\varphi \in \mathfrak{A}$, hogy

$$\varphi(u) \neq \varphi(v)$$

teljesül!

Útm. Ha $\mathfrak{A}$ nem szeparáló halmaz $\mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$-ben, akkor van olyan $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$, hogy bármely $\varphi \in \mathfrak{A}$ függvényre

$$\varphi(u) = \varphi(v)$$

teljesül. Ha $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ olyan, hogy

$$f(u) \neq f(v)$$

(vö. 1.1.33., ill. 1.2.17. feladat), akkor

$$0 < |f(u) - f(v)| \leq |f(u) - \varphi(u)| + \underbrace{|\varphi(u) - \varphi(v)|}_{0} + |f(v) - \varphi(v)| \leq 2\|f - \varphi\|_\infty,$$

így

$$\rho(f,\mathfrak{A}) = \inf\{\|f-\varphi\|_\infty \in \mathbb{R} : \ \varphi \in \mathfrak{A}\} \geq \frac{1}{2}|f(u)-f(v)| > 0,$$

azaz $\mathfrak{A}$ nem sűrű $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben. ■

2.3.1. példa. Ha $\mathcal{X} := [0,1]$, ill.

$$\mathfrak{A} := \left\{[0,1] \ni x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi kx) : \ a_n, b_n \in \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})\right\},$$

akkor $\mathfrak{A}$ nem szeparáló halmaz $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben, ui. bármely $f \in \mathfrak{A}$ esetén $f(0) = f(1)$. Az is könnyen belátható, hogy $\mathfrak{A}$ nem sűrű $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben. Ha ugyanis $g \in \mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$ olyan függvény, amelyre $g(0) \neq g(1)$ és alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén

$$2\varepsilon < |g(0)-g(1)|,$$

akkor tetszőleges $f \in \mathfrak{A}$ esetén vagy

$$|g(0)-f(0)| \geq \varepsilon, \qquad \text{vagy} \qquad |g(1)-f(1)| \geq \varepsilon$$

tejesül, azaz

$$\|g-f\|_\infty \geq \varepsilon.$$

2.3.12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ kompakt topologikus tér, az $\mathfrak{A}$ halmaz olyan egységelemes, szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{C})$-ben, amelyre

$$f \in \mathfrak{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{f} \in \mathfrak{A},$$

akkor $\mathfrak{A}$ sűrű $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{C})$-ben, azaz bármely $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{C})$ függvény, ill. bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $g \in \mathfrak{A}$ függvény, hogy

$$\|f-g\|_\infty = \sup\{|f(x)-g(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}\} < \varepsilon$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $f \in \mathfrak{A}$ esetén $\overline{f} \in \mathfrak{A}$ is igaz, ezért

$$\Re(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathfrak{A} \qquad \text{és} \qquad \Im(f) = \frac{f-\overline{f}}{2\imath} \in \mathfrak{A}.$$

Ha most

$$\mathfrak{A}_\mathbb{R} := \{\Re(g) : \ g \in \mathfrak{A}\} \cup \{\Im(h) : \ h \in \mathfrak{A}\},$$

akkor $\mathfrak{A}_\mathbb{R}$ egységelemes, szeparáló részalgebra $\mathfrak{C}(\mathcal{X},\mathbb{R})$-ben, így alkalmas

$$g_n, h_n \in \mathfrak{A}_\mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatokra

$$\lim(\|g_n - \Re(f)\|_\infty) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(\|h_n - \Im(f)\|_\infty) = 0,$$

azaz az

$$f_n := g_n + \imath h_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

fügvénysorozattal

$$\lim(\|f_n - f\|_\infty) = 0. \quad \blacksquare$$

2.3.2. példa. Ha

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$$

és $\mathfrak{A}$ jelöli a

$$\{\mathbb{T} \ni z \mapsto z^n : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

függvényhalmaz lineáris burkát a $\mathfrak{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ térben:

$$\mathfrak{A} : = \left\{\mathbb{T} \ni z \mapsto \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k : \ a_k \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}_0\right\},$$

akkor az $\mathfrak{A}$ részalgebra egységelemes ($\mathrm{id} \in \mathfrak{A}$), sőt szeparáló is, hiszen bármely $z, w \in \mathbb{T}$, ill. $u, v \in \mathbb{C}$ esetén az

$$f(x) := v\frac{x - z}{w - z} + v\frac{x - z}{z - w} \qquad (x \in \mathbb{T})$$

függvényre $f \in \mathfrak{A}$, ill. $f(z) = u$ és $f(w) = v$, továbbá

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{T})$$

következtében $\varphi \in \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow$

$$\varphi(z) \equiv \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \quad \Longrightarrow \quad \overline{\varphi}(z) \equiv \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k} \underbrace{\overline{z^k}}_{|z|^k z^{-k}} \underset{|z|=1}{\equiv} \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k} z^{-k} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\varphi} \in \mathfrak{A}.$$

Így (vö. 2.3.12. feladat) $\mathfrak{A}$ sűrű a $\mathfrak{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ térben. Mivel $\mathfrak{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ izomorf a

$$\mathfrak{C}_{2\pi}(\mathbb{C}) := \{f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \ f(x + 2\pi) = f(x) \ (x \in \mathbb{R})\}$$

térrel:

$$f \in \mathfrak{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \quad \longleftrightarrow \quad \widetilde{f}\mathfrak{C}_{2\pi}(\mathbb{C}), \qquad f(e^{\imath t}) = \widetilde{f}(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért az

$$\{\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(\imath n t) : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

függvényhalmaz lineáris burka sűrű $\mathfrak{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$-ben.

2.4. Approximáció normált terekben

2.4.1. feladat. Igazoljuk, hogy a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén az

$$A := \left\{ x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0 \right\}$$

halmaz zárt altér és egyetlen $x \in \mathfrak{c}_0 \backslash A$ esetén sincsen A-ban x-et legjobban közelítő elem!

Útm.

1. lépés. Ha $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ A-beli sorozat, ahol $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, és valamely $x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0$ esetén

$$x^{(k)} \longrightarrow x \qquad (k \to \infty) \qquad /(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty\text{-ben}/,$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\left\| x^{(k)} - x \right\|_\infty < \varepsilon \qquad (k \geq N)$$

és $x_n^{(k)} \in A$ miatt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - x_n^{(k)}}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| x_n - x_n^{(k)} \right|}{2^n} \leq \left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ahonnan $x \in A$ következik.

2. lépés. Ha

$$x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0 \backslash A,$$

akkor a

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \neq 0$$

számmal bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$y^{(k)} := x - \lambda \frac{2^k}{2^k - 1} (\overset{1}{\smile}{1}, \ldots, \overset{k}{\smile}{1}, 0, 0, \ldots)$$

sorozat nullsorozat, továbbá

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(k)}}{2^n} &= \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} \left(x_n - \lambda \frac{2^k}{2^k - 1} \right) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}}_{=\lambda} - \lambda \underbrace{\frac{2^k}{2^k - 1} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}}_{=1} = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$y^{(k)} \in A \qquad (k \in \mathbb{N})$$

és

$$\left\|x-y^{(k)}\right\|_\infty = |\lambda|\frac{2^k}{2^k-1} \longrightarrow |\lambda| \qquad (k\to\infty),$$

azaz

$$\rho(x,A) \le |\lambda|.$$

3. lépés. Ha $z=(z_n)$ az x-et A-ban legjobban közelítő elem, akkor

$$\|x-z\|_\infty = \rho(x,A) \le |\lambda|.$$

Mivel $x-z\in\mathfrak{c}_0$, ezért alkalmas $1<m\in\mathbb{N}$ esetén

$$|x_n-z_n| < \frac{1}{2}|\lambda| \qquad (n\ge m),$$

és

$$\begin{aligned}
|\lambda| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(x_n-z_n)\right| &\le \sum_{n=1}^{m-1} 2^{-n}\|x-z\|_\infty + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}\frac{1}{2}|\lambda| \le \\
&\le |\lambda|\left(\sum_{n=1}^{m-1} 2^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}\right) = \\
&= |\lambda|\left(1-2^{-m}\right) < |\lambda|,
\end{aligned}$$

ami nem lehetséges. ■

2.4.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér és $A\subset\mathcal{X}$ véges dimenziós altér, akkor bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén van A-ban x-et legjobban közelítő elem, azaz bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén van olyan $y\in A$, amelyre

$$\|x-y\| = \rho(x,A)$$

teljesül!

Útm. Mivel A véges dimenziós, ezért (vö. 1.3.74. feladat) Bolzano-Weierstraß-tulajdonságú, így a 2.2.5. feladatbeli állításból következik legjobban közelítő elem létezése. ■

2.4.1. példa. Ha adott $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\Pi_n := \left\{f:[a,b]\to\mathbb{K}:\ \exists\,\text{legfeljebb } n\text{-edfokú } p \text{ polinom}:\ f=p|_{[a,b]}\right\},$$

akkor Π_n véges dimenziós altere $\mathfrak{C}[a,b]$-nek, így /a $(\mathfrak{C}[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ normált teret tekintve/ bármely $f\in\mathfrak{C}[a,b]$-hez van olyan $q\in\Pi_n$, hogy

$$\begin{aligned}
\|f-q\|_\infty &= \max\{|f(x)-q(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[a,b]\} = \\
&= \inf\{\max\{|f(x)-p(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[a,b]\}\in\mathbb{R}:\ p\in\Pi_n\} = \\
&= \rho(f,\Pi_n).
\end{aligned}$$

Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz,

$$\mathcal{X} := \{f : H \to \mathbb{R} : \ f \text{ folytonos}\}, \qquad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$$

és az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, ill. valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén A jelöli a

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{X}$$

függvények lineáris burkát, azaz

$$A := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} = \left\{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k \in \mathcal{X} : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\right\},$$

akkor A véges dimenziós. Így a 2.4.2. feladatbeli állítás értelmében bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén vannak olyan

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

együtthatók, hogy

$$\varphi := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k \in A$$

az f függvényt A-ban legjobban közelítő elem:

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi\| &= \max\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x)\right| \in \mathbb{R} : \ x \in H\right\} = \\
&= \min\left\{\max\left\{\left|f(x) - \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varphi_k(x)\right| \in \mathbb{R} : \ x \in H\right\} \in \mathbb{R} : \ \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \rho(f, A)
\end{aligned}$$

(**„min-max"-feladat**). Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$H = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

akkor a min-max-feladat a következő alakot ölti:

$$\max\left\{\left|f(x_l) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x_l)\right| \in \mathbb{R} : \ l \in \{1, \ldots, n\}\right\} =$$

$$= \min\left\{\max\left\{\left|f(x_l) - \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varphi_k(x_l)\right| \in \mathbb{R} : \ l \in \{1, \ldots, n\}\right\} \in \mathbb{R} : \ \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Bevezetve az

$$x := (f(x_1), \ldots, f(x_n)), \qquad c_{lk} := \varphi_k(x_l) \quad (k \in \{1, \ldots, m\}, l \in \{1, \ldots, n\}),$$

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \beta := (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m,$$

ill. a

$$C := [c_{lk}]_{l,k=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

jelöléseket, a vizsgált min-max-feladat a következőképpen is megfogalmazható: keressük azt (v. azokat) az $\alpha \in \mathbb{R}^m$ vektort (v. vektorokat), amelyekre

$$(*) \qquad \|x - C\alpha\|_\infty = \min\left\{\|x - C\beta\|_\infty : \beta \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Amennyiben

$$\|x - C\alpha\|_\infty = 0,$$

akkor $C\alpha = x$, azaz α megoldása a

$$Cy = x \qquad (y \in \mathbb{R}^m)$$

lineáris egyenletrendszernek. Vegyük észre azonban, hogy $(*)$-nak akkor is van megoldása, ha a $Cy = x$ egyenletrendszer (a klasszikus értelemben) nem oldható meg. A $(*)$ feladat megoldását az említett egyenletrendszer **approximatív megoldás**ának nevezzük (világos, hogy

$$Cy = x \qquad (y \in \mathbb{R}^m)$$

bármely megoldása $(*)$-nak is megoldása).

2.4.2. példa. Ha

$$n := 3, \quad m := 1, \quad e_1 := (2{,}1{,}4), \quad x := (3{,}1{,}7),$$

azaz keressük az approximatív megoldását a

$$2\xi = 3, \quad \xi = 1, \quad 4\xi = 7 \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

lineáris egyenletrendszernek, akkor a megfelelő min-max-feladat a következő:

$$\delta := \min\left\{\max\left\{|2\xi - 3|, |\xi - 1|, |4\xi - 7|\right\} : \ \xi \in \mathbb{R}\right\} =?$$

Könnyen ellenőrizhető (vö. 2.4.1. ábra), hogy

$$g(\xi) := \max\left\{|2\xi - 3|, |\xi - 1|, |4\xi - 7|\right\} = \begin{cases} 7 - 4\xi & (-\infty < \xi \leq 8/5), \\ \xi - 1 & (8/5 < \xi \leq 2), \\ 4\xi - 7 & (2 < \xi < +\infty). \end{cases}$$

Következésképpen

$$\delta := \min\left\{\max\left\{|2\xi - 3|, |\xi - 1|, |4\xi - 7|\right\} : \ \xi \in \mathbb{R}\right\} = f(8/5) = 3/5. \quad \blacksquare$$

2.4.3. feladat. Határozzuk meg a

$$4\xi = 5, \quad 2\xi = 1, \quad \xi = 3 \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszer approximatív megoldását!

Útm. Olyan $w \in \mathbb{R}$ számot keresünk, amelyre

$$\max\{|4w-5|, |2w-1|, |w-3|\} = \min\{\max\{|4\xi-5|, |2\xi-1|, |\xi-3|\} : \xi \in \mathbb{R}\}$$

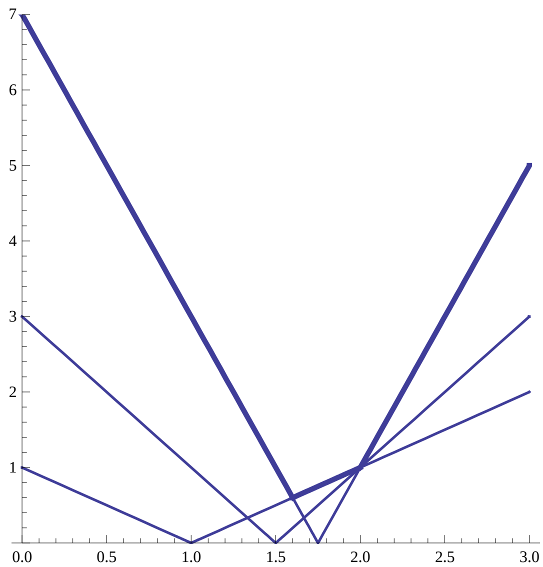
teljesül. Könnyen ellenőrizhető (vö. 2.4.2. ábra), hogy

$$g(\xi) := \max\{|4\xi-5|, |2\xi-1|, |\xi-3|\} = \begin{cases} 5-4\xi & (-\infty < \xi \leq 2/3)\,, \\ 3-\xi & (2/3 < \xi \leq 4/3)\,, \\ 2\xi-1 & (4/3 < \xi \leq 2)\,, \\ 4\xi-5 & (2 < \xi < +\infty)\,. \end{cases}$$

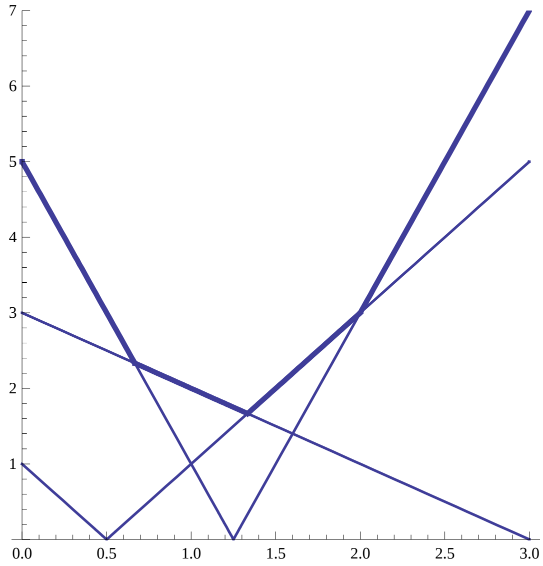
Következésképpen

$$\delta := \min\{\max\{|4\xi-5|, |2\xi-1|, |\xi-3|\} : \xi \in \mathbb{R}\} = f(4/3) = 5/3,$$

azaz $w = 4/3$. ■



2.4.1. ábra. A $2\xi = 3$, $\xi = 1$, $4\xi = 7$ $(\xi \in \mathbb{R})$ egyenletrendszer approximatív megoldásához.



2.4.2. ábra. A $4\xi = 5$, $2\xi = 1$, $\xi = 3$ $(\xi \in \mathbb{R})$ egyenletrendszer approximatív megoldásához.

2.4.1. házi feladat. Határozzuk meg a

$$2\xi = 3, \quad \xi = 1, \quad 4\xi = 7 \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszer approximatív megoldását!

2.4.4. feladat. Határozzuk meg a

$$2\xi = 3, \quad 3\xi = 4, \quad \xi = 2 \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

egyenletrendszer approximatív megoldását, azaz azt a $c \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\max\{|2c-3|, |3c-4|, |c-2|\} = \min\{\max\{|2\xi-3|, |\xi-1|, |\xi-2|\} : \xi \in \mathbb{R}\}$$

teljesül! Milyen $c \in \mathbb{R}$ esetén igaz az

$$|2c-3|^2 + |3c-4|^2 + |c-2|^2 = \min\left\{|2\xi-3|^2 + |\xi-1|^2 + |\xi-2|^2 : \xi \in \mathbb{R}\right\}$$

egyenlőség? Adjuk meg azokat az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_k)$ $(k \in \{1;2\})$ normált tereket, ill. az $A \subset \mathcal{X}$ alteret és $x \in \mathcal{X}$ vektort, hogy a feladat a x-et legjobban közelítő A-beli elemek meghatározását jelentse!

Útm.

1. lépés. Könnyen ellenőrizhető (vö. 2.4.3. ábra), hogy

$$g(\xi) := \max\{|2\xi-3|, |3\xi-4|, |\xi-2|\} = \begin{cases} 4-3\xi & (-\infty < \xi \leq 1)\,, \\ \\ 2-\xi & (1 < \xi \leq 3/2)\,, \\ \\ 3\xi-4 & (3/2 < \xi < +\infty)\,. \end{cases}$$

Következésképpen

$$\delta := \min\{\max\{|2\xi-3|, |3\xi-4|, |\xi-2|\} :\ \xi \in \mathbb{R}\} = f(3/2) = 1/2,$$

azaz $c = 3/2$.

2. lépés. Legyen

$$h(\xi) := (2\xi-3)^2 + (3\xi-4)^2 + (\xi-2)^2 \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $h \in \mathfrak{D}$ és

$$h'(\xi) = 4(2\xi-3) + 6(3\xi-4) + 2(\xi-2) = 28\xi - 40 = 4(7\xi-10) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi = 10/7.$$

Mivel h olyan másodfokú polinom, amelynek főegyütthatója $14 > 0$, ezért g-nek $10/7$-ben abszolút minimuma van. Így

$$c = 10/7.$$

3. lépés. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^3, \qquad A := \left\{(2\xi{,}3\xi, \xi) \in \mathbb{R}^3 :\ \xi \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{és} \qquad x := (3{,}4{,}2) \in \mathbb{R}^3,$$

továbbá

$$\|(u,v,w)\|_1 = \max\{|u|, |v|, |w|\}, \quad \text{ill.} \quad \|(u,v,w)\|_2 = \sqrt{u^2+v^2+w^2} \qquad ((u,v,w) \in \mathbb{R}^3),$$

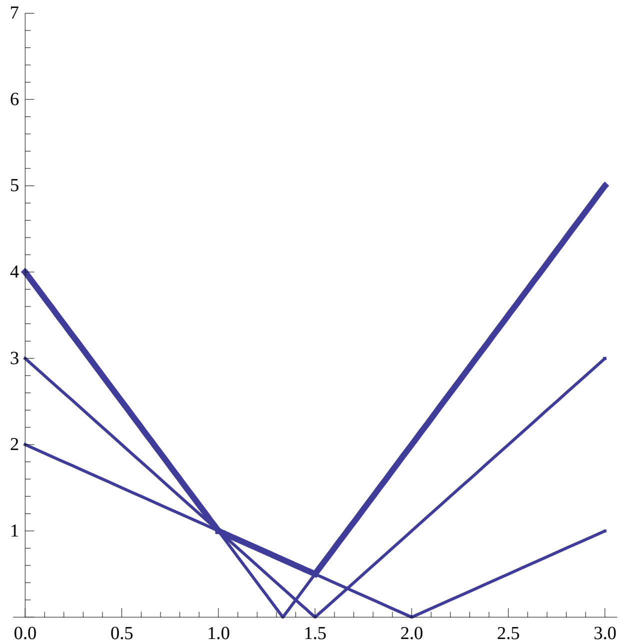
akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_k)$ $(k \in \{1;2\})$ normált terekben a

$$\rho(\xi, A) = \|x - l\|_k \qquad (k \in \{1;2\})$$

egyenlőségeknek eleget tévő

$$A \ni l := \begin{cases} (2a{,}3a, a) & (k=1), \\ \\ (2b{,}3b, b) & (k=2) \end{cases}$$

vektort határoztuk meg. ■



2.4.3. ábra. A $2\xi = 3$, $3\xi = 4$, $\xi = 2$ ($\xi \in \mathbb{R}$) egyenletrendszer approximatív megoldásához.

2.4.5. feladat. Határozzuk meg a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az

$$x(t) := 1 \qquad (t \in [0,1])$$

függvényt legjobban közelítő

$$A := \left\{\alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]} \in \mathfrak{C}[0,1] : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\} \text{-beli}$$

elemek halmazát!

Útm. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left\|x - \alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]}\right\|_\infty \geq \left|x(1) - \alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]}(0)\right| = 1,$$

így $\rho_\infty(x, A) \geq 0$. Másrészt

$$\left\|x - \alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]}\right\|_\infty = 1$$

pontosan az $\alpha \in [0,2]$ esetben teljesül, így

$$\rho_\infty(x, A) = 1$$

és az

$$M := \left\{\alpha \mathrm{id}|_{[-1,1]} \in \mathfrak{C}[0,1] : \ \alpha \in [0,2]\right\}$$

halmaz az x függvényt A-ban legjobban közelítő elemek halmaza. ■

Nem nehéz meggondolni, hogy az iménti példában az M halmaz konvex $\mathfrak{C}[0,1]$-ben.

2.4.6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $x \in \mathcal{X}$ és $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ konvex halmaz (pl. altér), akkor az x-et legjobban közelítő A-beli elemek halmaza konvex!

Útm. Ha M jelöli az x-et legjobban közelítő A-beli elemek halmazát és $y, z \in M$, azaz

$$\|x-y\| = \rho(x,A) = \|x-z\|,$$

továbbá $\alpha \in [0,1]$ és

$$v := \alpha y + (1-\alpha)z,$$

akkor

$$\begin{aligned} \|x-v\| &= \|x-\alpha y-(1-\alpha)z\| = \|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\| \leq \\ &\leq \alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|x-z\| = \alpha\rho(x,A)+(1-\alpha)\rho(x,A) = \\ &= \rho(x,A), \end{aligned}$$

tehát $v \in A$ következtében

$$\|x-v\| = \rho(x,A). \quad \blacksquare$$

A 2.2.4/3. feladatban láthattuk, hogy $p=2$ esetén egyetlen legjobban közelítő elem volt, $p=+\infty$ esetén pedig több. Ez – mint ahogy a következő feladat is mutatja – azon múlott, hogy a térben az egységgömb határára „egyenes szakaszokat” tartalmazott.

2.4.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ szigorúan normált tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ konvex halmaz (pl. altér), akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén legfeljebb egy, az x-et legjobban közelítő A-beli elem létezik!

Útm. Ha $x \in \mathcal{X}$ és

- $\rho(x,A)=0$, akkor – lévén, hogy $\|\cdot\|$ norma –, legfeljebb egy legjobban közelítő elem van: x (ami pontosan akkor lesz legjobban közelítő elem, ha $x \in A$).
- $\rho(x,A)>0$, speciálisan $x \in \mathcal{X}\backslash A$, továbbá $y, z \in A$ két különböző x-et legjobban közelítő elem, akkor a legjobban közelítő elemek halmazának konvex volta (vö. 2.4.6. feladat) miatt a

  $$v := \frac{y+z}{2}$$

  is legjobban közelítő elem és

  $$\frac{\|x-y\|}{\rho(x,A)} = \frac{\|x-z\|}{\rho(x,A)} = \frac{\|x-v\|}{\rho(x,A)} = 1,$$

  ahonnan

  $$\left\|\frac{y-x}{\rho(x,A)}+\frac{z-x}{\rho(x,A)}\right\| = \frac{\|y+z-2x\|}{\rho(x,A)} = 2\frac{\|v-x\|}{\rho(x,A)} = 2$$

  következik. Ez pedig ellentmond annak, hogy $\|\cdot\|$ szigorúan normált. $\blacksquare$

2.4.8. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az $x := (1{,}3{,}2)$ elemet legjobban közelítő

$$A := \left\{\alpha(1{,}0{,}0) + \beta(0{,}1{,}0) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \text{-beli}$$

elemek halmazát!

Útm. A

$$z := \alpha(1{,}0{,}0) + \beta(0{,}1{,}0) \in A$$

elemre

$$\|x - z\|_\infty = \max\{|1-\alpha|, |3-\beta|, 2\},$$

és így

$$\rho(x, A) = \inf\{\|x - z\|_\infty \in \mathbb{R} : \ z \in A\} \geq 2.$$

Egyenlőség pontosan olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén áll fenn, amelyre

$$|1-\alpha| \leq 2 \qquad \text{és} \qquad |3-\beta| \leq 2.$$

A legjobban közelítő elemek halmaza tehát

$$\left\{\alpha(1{,}0{,}0) + \beta(0{,}1{,}0) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha \in [-1{,}3], \, \beta \in [1{,}5]\right\}. \quad \blacksquare$$

2.4.9. feladat. Létezik-e a $(\mathfrak{C}[0{,}1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a

$$g(x) := 1/2 \qquad (x \in [0{,}1])$$

függvényt legjobban közelítő

$$A := \left\{f \in \mathfrak{C}[0{,}1] : \ \exists\, \beta > 0 : \ f(x) = e^{\beta x} \, (x \in \mathbb{R})\right\} \text{-beli}$$

elem?

Útm. Ha valamely $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := e^{\alpha x} \qquad (x \in [0{,}1])$$

függvény a g-t legjobban közelítő A-beli elem, akkor

$$\|g - f\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{2} - e^{\alpha x}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0{,}1]\right\} \leq \max\left\{\left|\frac{1}{2} - e^{\beta x}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0{,}1]\right\} \quad (\beta > 0).$$

Az exponenciális függvény (szigorú) monotonitása alapján ez azt jelenti, hogy bármely $\beta > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
\max\left\{\left|\frac{1}{2} - e^{\alpha x}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0{,}1]\right\} \quad &= \quad \max\left\{e^{\alpha x} - \frac{1}{2} \in \mathbb{R} : \ x \in [0{,}1]\right\} = \\
&= \quad e^{\alpha} - \frac{1}{2} \leq \max\left\{\left|\frac{1}{2} - e^{\beta x}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0{,}1]\right\} = \\
&= \quad e^{\beta} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Így, ha $\gamma := \alpha/2$, akkor $e^\alpha > e^\gamma$, ami nem lehetséges. ■

2.4.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, A valódi, zárt lineáris altere $\mathcal{X}$-nek, akkor bármely $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz van olyan $x_\varepsilon \in \mathcal{X}\backslash A$ vektor, hogy

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \rho(x_\varepsilon, A) \geq 1 - \varepsilon$$

teljesül!

Útm. Ugyanúgy, mint a Riesz-lemma bizonyításánál (vö. 1.3.77. feladat), ha $\varepsilon \in (0,1)$, $y \in \mathcal{X}\backslash A$ és

$$d_y := \inf \{\|x - y\| \in \mathbb{R} : \; x \in A\},$$

akkor $d_y > 0$. Mivel

$$\frac{d_y}{1-\varepsilon} > d_y,$$

ezért alkalmas $\alpha \in A$ elemmel

$$0 < d_y \leq \|\alpha - y\| < \frac{d_y}{1-\varepsilon}.$$

Így az

$$x_\varepsilon := \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}$$

elemre

$$\|x_\varepsilon\| = 1, \qquad x_\varepsilon \notin A,$$

hiszen ellenkező esetben

$$y = \alpha + \|y - \alpha\| x_\varepsilon \in A$$

teljesülne, ami nem lehetséges. Igaz továbbá, hogy bármely $x \in A$ elem esetén

$$\|\alpha - y\| x + \alpha \in A,$$

és így

$$\|x - x_\varepsilon\| = \left\| x + \frac{\alpha - y}{\|\alpha - y\|} \right\| = \frac{\|(\|\alpha - y\| x + \alpha) - y\|}{\|\alpha - y\|} \geq \frac{d_y}{\|\alpha - y\|} \geq 1 - \varepsilon. \quad ■$$

2.4.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\dim(\mathcal{X}) < +\infty$, $\emptyset \neq A$ valódi, zárt lineáris altere $\mathcal{X}$-nek, akkor van olyan $e \in \mathcal{X}$, hogy $\|e\| = 1$ és $\rho(e, A) = 1$ teljesül!

Útm. Bármely $\varepsilon_n := 1/n > 0$-hoz van olyan $e_n \in \mathcal{X}\backslash A$, hogy $\|e_n\| = 1$ és

$$1 - \frac{1}{n} < \rho(e_n, A) = \inf \{\|e_n - a\| \in \mathbb{R} : \; a \in A\} \leq \|e_n - 0\| = 1.$$

Így tehát az (e_n) sorozat korlátos. Mivel $\mathcal{X}$ véges dimenziós, ezért a Bolzano-Weierstraß-tétel miatt van (e_n)-nek konvergens részsorozata: (e_{ν_n}). Az

$$e := \lim(e_{\nu_n})$$

jelöléssel a kívánt tulajdonságú elemet kapjuk, ui. a norma folytonossága (vö. 1.3.41. feladat) miatt

$$\|e\| = \|\lim (e_{\nu_n})\| = \lim (\|e_{\nu_n}\|) = 1,$$

másrészt a távolságfüggvény folytonossága (vö. 1.2.43. feladat) következtében

$$\rho(e, A) = \rho (\lim (e_{\nu_n}), A) = \lim (\rho (e_{\nu_n}, A)) = 1. \quad \blacksquare$$

2.4.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ nem véges dimenziós, akkor a fenti állítás nem igaz!

Útm. Ha pl. $\mathcal{X} := l_1$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ (bármely $1 \leq p < q < \infty$ esetén $l_p \subsetneqq l_q \subsetneqq l_\infty$), akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ végtelen dimenziós, és ha

$$A := \left\{ x = (x_n) \in l_1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\},$$

akkor megmutatható, hogy

1. $A \subsetneqq l_1$ (valódi) zárt altér;
2. bármely $e \in \mathcal{X}$, $\|e\| = 1$ esetén $\rho(e, A) < 1$.

1. lépés. $A \subset l_1$ triviálisan teljesül, $(1,0,0,\ldots) \in l_1 \backslash A$, továbbá

- A altér, ui.
  $$A = \{x \in l_1 : \langle x, h \rangle = 0\},$$
  ahol $h := \left(\frac{1}{n}\right) \in l_2$ (vö. 1.4.22. feladat);
- A zárt altér, ui. ha
  $$x_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$
  konvergens sorozat, $x := \lim(x_n)$, akkor $x \in A$, ui. a skaláris szorzat folytonossága miatt $\langle x_n, h \rangle = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így
  $$\langle x, h \rangle = \langle \lim(x_n), h \rangle = \lim (\langle x_n, h \rangle) = \lim(0) = 0.$$

2. lépés. Ha $e \in \mathcal{X}$, $\|e\| = 1$ esetén pl. $e_1 > 0$, ill. ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ esetén

$$a := (a_1,0,\ldots,0,a_n,0,\ldots) \in A, \qquad \text{azaz} \qquad a_1 \cdot 1 + a_n \cdot \frac{1}{n} = 0,$$

akkor

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} |e_k|^2} = 1 \qquad \text{és} \qquad a_n = -na_1$$

felhasználásával

$$\begin{aligned}\|e-a\|^2 &= (e_1-a_1)^2+(e_n-a_n)^2+\boxed{\sum_{k\notin\{1,n\}}|e_k|^2} = \\ &= e_1^2-2e_1a_1+a_1^2+e_n^2-2e_na_n+a_n^2+\boxed{1-e_1^2-e_n^2} = \\ &= 1+a_1^2+(n+1)^2a_1^2-2e_1a_1+2e_n(n+1)a_1 = \\ &= 1+a_1\left\{a_1(n^2+2n+2)-2(e_1-e_n(n+1))\right\}.\end{aligned}$$

Mivel $e\in l_1$, ezért végtelen sok $n\in\mathbb{N}$-re

$$e_1-ne_n>0,$$

ui. ellenkező esetben van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ esetén

$$e_1-ne_n\leq 0,$$

így

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}\leq\sum_{n=N}^{\infty}\frac{e_n}{e_1},$$

amiből $e\notin l_1$ következne. Tehát, ha a_1-et úgy választjuk meg, hogy

$$0<a_1<\frac{2(e_1-e_n(n+1))}{n^2+2n+2}$$

teljesüljön, akkor azt kapjuk, hogy

$$\|e-a\|<1. \quad \blacksquare$$

Ha az iménti feladatban

1. $e_1=0$, akkor az első $e_i\neq 0$ elemet véve végtelen sok olyan j index van, amelyre

$$e_i-(j+1)e_j>0.$$

2. $e_1<0$, akkor $-e\in\mathcal{X}$, $\|-e\|=1$, ehhez van „jó” a, és így $-a$ „jó lesz” e-hez.

2.4.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ nem véges dimenziós, akkor a 2.4.11. feladatban az $\varepsilon=0$ eset nem fordulhat elő!

Útm. Ha

$$\mathcal{X}:=\{f\in\mathfrak{C}[0,1]:\ f(1)=0\},$$

akkor az

$$A:=\left\{x\in\mathcal{X}:\ \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$$

halmaz zárt altér $\mathcal{X}$-ben (a $\|\cdot\|_\infty$ normára vonatkozóan). Ha lenne olyan $x \in \mathcal{X}$, amelyre

$$\|x-u\|_\infty \geq \|x\|_\infty \qquad (u \in A),$$

akkor az

$$x_n(t) := 1 - t^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x_n \in \mathcal{X}, \quad \|x_n\|_\infty = 1 \quad \text{és} \quad \int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesülne. Így, ha

$$\lambda_n := \frac{\displaystyle\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}t}{1 - \dfrac{1}{n+1}}, \qquad \text{ill.} \qquad a_n := x - \lambda_n x_n \in A,$$

akkor

$$\|x - a_n\|_\infty \geq 0,$$

azaz $|\lambda_n| \geq 1$. Ezért

$$\left|\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \geq 1.$$

Mivel x folytonos, $x(1) = 0$, ezért $\|x\|_\infty = 1$-ből

$$\left|\int_0^1 x_n(t)\,\mathrm{d}t\right| < 1$$

adódik, ami nem lehetséges. ■

2.5. Approximáció euklideszi terekben

2.5.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ zárt, konvex halmaz (pl. zárt altér), akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy, az x-et legjobban közelítő A-beli elem van, azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $y \in A$ létezik, amelyre

$$\|x - y\| = \rho(x, A) = \inf\{\|x - z\| \in \mathbb{R} : \; z \in A\}$$

teljesül!

Útm. Mivel minden skaláris szorzat indukálta norma szigorúan konvex (vö. 1.4.29. feladat), ezért a 2.4.7. feladatbeli állítás következményeként a legjobban közelítő elem – amennyiben létezik –, egyértelmű. Az infimum definíciója miatt alkalmas

$$z_n \in \{\|x - z\| \in \mathbb{R} : \; z \in A\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$\|x - z_n\| \longrightarrow d := \inf\{\|x - z\| \in \mathbb{R} : \; z \in A\} \qquad (n \to \infty).$$

- Megmutatjuk, hogy (z_n) Cauchy-sorozat az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben (így $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ teljessége következtében pontosan egy olyan $y \in \mathcal{X}$ van, amelyre $\lim(z_n) = y$). Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor a paralelogramma-szabály következtében

$$\begin{aligned} 2\|x - z_m\|^2 + 2\|x - z_n\|^2 &= \|(x - z_m) + (x - z_n)\|^2 + \|(x - z_m) - (x - z_n)\|^2 = \\ &= \|z_m + z_n - 2x\|^2 + \|z_m - z_n\|^2, \end{aligned}$$

  és így

$$(*) \qquad \|z_m - z_n\|^2 = 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - \|z_m + z_n - 2x\|^2.$$

  Az A halmaz konvexitása következtében $z_m, z_n \in A$, sőt

$$\frac{z_m + z_n}{2} \in A,$$

  így (d definíciója alapján)

$$\|z_m + z_n - 2x\|^2 = 4\left\|\frac{z_m + z_n}{2} - x\right\|^2 \geq 4d^2.$$

  A $(*)$ egyenlőség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\|z_m - z_n\|^2 \leq 2\|z_m - x\|^2 + 2\|z_n - x\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

- Az A halmaz zártsága következtében az

$$y := \lim(z_n)$$

  elemre $y \in A$, továbbá a

$$d \leq \|x - y\| = \|x - z_n + z_n - y\| \leq \|x - z_n\| + \|z_n - y\| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  becslésből az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\|x - y\| = d$$

  következik. ■

A 2.5.1. feladatban az A halmaz konvexsége következtében y pontosan akkor lesz a legjobban közelítő elem, ha

$$(*) \qquad \Re(\langle x - y, a - y\rangle) \leq 0 \qquad (a \in A)$$

teljesül, hiszen

- bármely $a \in A$, ill. $\epsilon \in [0,1]$ esetén

$$(1 - \epsilon)y + \epsilon a \in A,$$

így

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= d^2 \leq \|x-((1-\epsilon)y+\epsilon a)\|^2 = \|x-y-\epsilon(a-y)\|^2 = \\ &= \|x-y\|^2 - 2\epsilon\Re(\langle x-y, a-y\rangle) + \epsilon^2\|a-y\|^2,\end{aligned}$$

ahonnan $(*)$ következik, továbbá

- ha $(*)$ fennáll, akkor

$$\begin{aligned}\|x-a\|^2 &= \|x-y+y-a\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\Re(\langle x-y, y-a\rangle) + \|y-a\|^2 \geq \\ &\geq \|x-y\|^2.\end{aligned}$$

2.5.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}^d$ olyan konvex, zárt halmazok, amelyekre $A \cap B = \emptyset$, akkor alkalmas $u, v \in \mathbb{R}^d$ vektorok esetén

$$\langle a-u, v\rangle \geq 0 \quad (a \in A) \qquad \text{és} \qquad \langle b-u, v\rangle \leq 0 \quad (b \in B)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$A_n := A \cap B_n(0), \qquad B_n := B \cap B_n(0)$$

halmazok mindegyike kompakt, így alkalmas $a_n \in A_n$, ill. $b_n \in B_n$ elemekkel

$$\|a_n - b_n\|_2 = \rho(A_n, B_n) > 0.$$

Az A_n és B_n $(n \in \mathbb{N})$ konvexsége következtében a 2.5.1. feladat utáni $(*)$ egyenlőtlenséghez hasonlóan belátható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle b_n - a_n, a - a_n\rangle \leq 0 \quad (a \in A_n) \qquad \text{és} \qquad \langle a_n - b_n, b - b_n\rangle \leq 0 \quad (b \in B_n).$$

Így, ha

$$v_n := \frac{a_n - b_n}{\|a_n - b_n\|_2}, \qquad z_n := \left\langle \frac{a_n + b_n}{2}, e_n \right\rangle \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\langle a, v_n\rangle \geq \langle a_n, v_n\rangle \geq z_n \quad (a \in A_n) \qquad \text{és} \qquad \langle b, v_n\rangle \leq \langle b_n, v_n\rangle \leq z_n \quad (b \in B_n).$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|v_n\| = 1$, ezért (vö. 1.3.74. feladat) alkalmas (μ_n) indexsorozat, ill. $v \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén

$$\lim(v_{\mu_n}) = v.$$

Ha $a_0 \in A$, ill. $b_0 \in B$, akkor elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_0 \in A_{\mu_n}$, ill. $b_0 \in B_{\mu_n}$, így

$$-\|b_0\|_2 \leq \langle b_0, v_{\mu_n}\rangle \leq z_{\mu_n} \leq \langle a_0, v_{\mu_n}\rangle \leq \|a_0\|.$$

Így alkalmas $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim(z_{\mu_n}) = z.$$

Ha $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m \geq n$, akkor

$$\langle a, v_{\mu_m}\rangle \geq z_{\mu_m} \qquad (a \in A_{\mu_n}),$$

ezért bármely $a \in A_{\mu_n}$, így $a \in A$ esetén $\langle a, v\rangle \geq z$. Hasonló megfontolással kapjuk, hogy

$$\langle b, v\rangle \leq z \qquad (b \in B).$$

Az

$$u := zv$$

választás tehát megfelelő. ■

2.5.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmaz, akkor bármely $x \in \partial A$ vektorhoz van olyan $v \in \mathbb{R}^d$, hogy

$$\langle a - x, v\rangle \geq 0 \qquad (a \in A)$$

teljesül!

Útm. Ha

$$b_n \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{A} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(b_n) = x,$$

akkor az A, ill. a

$$B := \{b_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmazra alkalmazva a 2.5.2. feladatbeli állítást elmondható, hogy alkalmas

$$u_n, v_n \in \mathbb{R}^d, \qquad \|v_n\|_2 = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

vektorok esetén

$$\langle a - u_n, v_n\rangle \geq 0 \quad (a \in A) \qquad \text{és} \qquad \langle b_n - u_n, v_n\rangle \leq 0$$

teljesül. Innen

$$\langle a - b_n, v_n\rangle \geq 0 \quad (a \in A)$$

következik. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|v_n\| = 1$, ezért (vö. 1.3.74. feladat) alkalmas (μ_n) indesxorozat, ill. $v \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén

$$\lim(v_{\mu_n}) = v,$$

és ez a v vektor megfelel a feladat feltételeinek. ■

A 2.5.1. feladatbeli állítás következményeként elmondható, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, továbbá $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ konvex, zárt halmaz, akkor pontosan egy A-beli legkisebb normájú elem van, hiszen a feladatbeli állításban az $x := 0$ választással azt kapjuk, hogy pontosan egy olyan $y \in A$ elem van, amelyre

$$\|y\| = \inf\{\|z\| \in \mathbb{R} : \ z \in A\}$$

teljesül. Ha a $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetében a norma nem skaláris szorzatból származik, akkor az iménti állítás nem igaz, hiszen pl. az 1.3.46. példabeli A halmaz esetében megmutatható, hogy

$$\|g\|_\infty > \inf\{\|f\|_\infty \in \mathbb{R} : \ f \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1] : \} \qquad (g \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1])$$

teljesül. Valóban (vö. 11.4.11/1. tétel következtében

$$(*) \qquad 1 = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \leq \int_0^1 |f| = \|f\|_{L^1} \leq 1 \cdot \|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty \qquad (f \in L^2[0,1])$$

miatt a

$$B := \left\{ f \in L^2[0,1] : \ \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1 \right\}$$

(konvex) és zárt (az L^2-normára vonatkozóan). Így a fentiek következtében pontosan egy olyan $g \in B$ függvény van, amelyre

$$\|g\|_{L^2} = \inf\{\|f\|_{L^2} \in \mathbb{R} : \ f \in B\}$$

teljesül. Látható, hogy a

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1/2)), \\ \\ 0 & (x \in [1/2,1]) \end{cases}$$

függvényre $g \in B$ teljesül és g egyúttal a legkisebb normájú B-beli elem, hiszen $(*)$ következtében nem lehet egynél kisebb normájú elem B-ben. Ha valamely $h \in A$ elemre $\|h\|_\infty = 1$, akkor $\|h\|_\infty = 1$, ahonnan $\|h\|_{L^2} = 1$ következik. Mivel a minimális normájú elem egyértelmű, ezért $h = g$, ami nem lehetséges, hiszen h nem folytonos. Ez azt jelenti, hogy nincsen olyan $h \in A$, amelyre $\|h\|_\infty = 1$ teljesül. Ha most

$$h_n(x) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \left(x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]\right), \\ \\ -(n+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) & \left(x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]\right), \\ \\ -1 - \frac{1}{n} & \left(x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (3 \leq n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1]),$$

akkor

$$h_n \in A, \quad \|h_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $g \in A$ esetén

$$\inf\{\|f\|_\infty \in \mathbb{R} : \ f \in A\} = 1 < \|g\|_\infty.$$

2.5.4. feladat.

Útm.

2.5.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $x \in \mathcal{X}$, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ altér, úgy valamely $y \in A$ pontosan akkor az x-et legjobban közelítő elem, ha

$$x - y \in A^\perp, \qquad \text{azaz} \qquad x - y \perp z \quad (z \in A)$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha y az x-et legjobban közelítő A-beli elem, akkor $z = 0$ esetén $x - y \perp z$, ha pedig $z \in A \backslash \{0\}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor $y + \alpha z \in A$ (hiszen A altér és $y \in A$). Így a legjobban közelítő elem definíciója alapján

$$\|y - x\| \leq \|y + \alpha z - x\|.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve

$$\begin{aligned}\langle y-x, y-x\rangle &\leq \langle y + \alpha z - x, y + \alpha z - x\rangle = \langle y - x + \alpha z, y - x + \alpha z\rangle = \\ &= \langle y-x, y-x\rangle + \alpha\langle z, y-x\rangle + \overline{\alpha}\overline{\langle z, y-x\rangle} + \alpha\overline{\alpha}\langle z, z\rangle,\end{aligned}$$

és így

$$\alpha\langle z, y-x\rangle + \overline{\alpha}\overline{\langle z, y-x\rangle} + \alpha\overline{\alpha}\langle z, z\rangle \geq 0$$

adódik. Az

$$\alpha := \frac{-\overline{\langle z, y-x\rangle}}{\langle z, z\rangle} \qquad /z \neq 0/\,,$$

választással tehát azt kapjuk, hogy

$$-\frac{|\langle z, y-x\rangle|^2}{\langle z, z\rangle} - \frac{|\langle z, y-x\rangle|^2}{\langle z, z\rangle} + \frac{|\langle z, y-x\rangle|^2}{\langle z, z\rangle} \geq 0,$$

azaz

$$|\langle z, y-x\rangle|^2 \leq 0,$$

ahonnan

$$\langle z, y-x\rangle = 0$$

következik.

2. lépés. Ha $x - y \in A^\perp$, akkor bármely $v \in A$ esetén

$$\langle x-y, v\rangle = 0,$$

ezért

$$\begin{aligned}\|v-y\|^2 &= \langle v-y, v-y\rangle = \langle x-y+v-x, v-y\rangle = \\ &= \langle x-y, v-y\rangle - \langle x-v, v-y\rangle = 0 - \langle x-v, v-y\rangle,\end{aligned}$$

hiszen $v, y \in A$, így $v-y \in A$. Tehát, ha v az x-et legjobban közelítő elem, akkor

$$x - v \in A^{\perp},$$

speciálisan $v-y \in A$ miatt

$$\langle x-v, v-y\rangle = 0.$$

Így

$$\|v-y\|^2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad y = v.$$

Ezért y az x-et legjobban közelítő A-beli elem. ■

2.5.6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ zárt altér, úgy bármely $x \in \mathcal{X}$ az

$$x = y + z, \qquad y \in A, \qquad z \in A^{\perp}$$

alakba írható, ahol y az (egyértelműen meghatározott) x-et legjobban közelítő A-beli elem és

$$z = x - y$$

(**Riesz felbontási tétele**)!

Útm.

1. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$ és y az x-et legjobban közelítő A-beli elem, továbbá

$$z := x - y,$$

akkor (vö. 2.5.5. feladat)

$$x = y + z, \qquad y \in A, \qquad z \in A^{\perp}.$$

2. lépés. Ha

$$x = y' + z', \qquad y' \in A, \qquad z' \in A^{\perp},$$

akkor

$$y + z = x = y' + z', \qquad \text{azaz} \qquad y - y' = z' - z.$$

Innen

$$y - y' \in A \qquad \text{és} \qquad z' - z \in A^{\perp}$$

felhasználásával

$$\|y-y'\|^2 = \langle y-y', y-y'\rangle = \langle z'-z, y-y'\rangle = 0$$

következik. Ez azt jelenti, hogy

$$y = y', \qquad \text{és így} \qquad z = z' \quad ■$$

2.5.1. definíció. A 2.5.6. feladatbeli $y \in A$ vektort az x vektornak az A (zárt) altérre való **ortogonális vetület**ének nevezzük.

A fentieket összefoglalva elmondható tehát, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ zárt altér, úgy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $y \in A$ van, amelyre

$$\|x-y\| = \rho(x,A) \qquad \text{és} \qquad x-y \in A^\perp$$

teljesül.

2.5.7. feladat. Számítsuk ki az

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad F(a,b,c) := \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 \, \mathrm{d}x$$

függvény abszolút minimumát!

Útm. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Pi_n := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ \exists \text{legfeljebb } n\text{-edfokú } p \text{ polinom} : \ f = p|_{[-1,1]} \right\}$$

és

$$p(x) := x^3 \qquad (x \in [-1,1]),$$

akkor $p \in \Pi_3$ és

$$\min\left\{ \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 \, \mathrm{d}x \in \mathbb{R} : \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \min\{\|p-q\|^2 L^2 \in \mathbb{R} : \ q \in \Pi_2\}.$$

Mivel Π_2 véges dimenziós altrér $L^2[-1,1]$-ben, így zárt is a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ skaláris szorzat által indukált normára nézve (vö. 1.3.75. feladat utáni megjegyzés). Ezért a fenti megjegyzés értelmében p-hez pontosan egy olyan $r \in \Pi_2$ polinom van, amelyre

$$\|p-r\|_2 = \min\{\|p-q\|_{L^2}^2 \in \mathbb{R} : \ q \in \Pi_2\} \qquad \text{és} \qquad p - r \perp \Pi_2.$$

Így, ha $k \in \{0,1,2\}$, ill.

$$q_k(x) := x^k \qquad (x \in [-1,1]),$$

akkor

$$q_k \in \Pi_2 \qquad (k \in \{0,1,2\})$$

és

$$\langle p-r, q_0 \rangle_{L^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) \, \mathrm{d}x = -2a - \frac{2c}{3},$$

$$\langle p-r, q_1 \rangle_{L^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{5} - \frac{2b}{3},$$

$$\langle p-r, q_2 \rangle_{L^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) x^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{2a}{3} - \frac{2c}{5}.$$

Innen pedig

$$a = c = 0 \qquad \text{és} \qquad b = \frac{3}{5}$$

következik. A keresett minimum tehát

$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3x}{5}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{175}. \quad \blacksquare$$

A Riesz-féle felbontási tétel fontos következménye a

2.5.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ zárt altér, úgy fennáll az

$$A^{\perp\perp} = A$$

egyenlőség!

Útm. Mivel

$$A^{\perp\perp} \supset A,$$

ezért

$$A^{\perp\perp} \neq A$$

csak úgy állhat fenn, hogy alkalmas

$$0 \neq x \in A^{\perp\perp}$$

vektorra $x \notin A$ teljesül. Mivel

$$x = y + z,$$

ahol $y \in A$, $z \in A^{\perp}$ (vö. 2.5.6. feladat), ezért

$$\langle x, z\rangle = 0 = \langle y, z\rangle,$$

továbbá a Pitagorasz-tétel (vö. 1.4.36/6. feladat) következményeként

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

ahonnan

$$\|x\| > \max\{\|y\|, \|z\|\}$$

következik. Így

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle,$$

ami nem lehetséges, hiszen

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| < \|x\|^2. \quad \blacksquare$$

Mivel $A^{\perp\perp}$ zárt altér (vö. 1.4.36/3. feladat), ezért a fenti állítás nem igaz, ha az A altér nem zárt.

2.5.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset \mathcal{X}$ altér, akkor fennáll az

$$A^{\perp\perp} = \overline{A}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel

$$A \subset \overline{A},$$

ezért (vö. 1.4.36/4. feladat)

$$\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp},$$

és így

$$A^{\perp\perp} \subset \overline{A}^{\perp\perp}.$$

Mivel $\overline{A}$ zárt, ezért (vö. 2.5.8. feladat)

$$\overline{A}^{\perp\perp} = \overline{A},$$

ennélfogva

$$A^{\perp\perp} \subset \overline{A}.$$

Mivel

$$A \subset A^{\perp\perp}$$

(vö. 1.4.36/5. feladat) és $A^{\perp\perp}$ zárt, ezért

$$\overline{A} \subset A^{\perp\perp}. \quad \blacksquare$$

A Riesz-féle felbontási tétel fényében, ha A zárt altér, akkor $A^{\perp}$-t az A **ortogonális kiegészítő alterének** szokás nevezni, továbbá azt mondjuk, hogy $\mathcal{X}$ az A és $A^{\perp}$ **ortogonális direkt összege**:

$$\mathcal{X} = A \oplus A^{\perp}.$$

Ha A nem zárt altér, akkor – lévén, hogy $\overline{A}$ zárt altér (vö. 1.3.6. feladat) – a fenti egyenlőség így módosul:

$$\mathcal{X} = \overline{A} \oplus A^{\perp}.$$

2.5.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $m, n \in \mathbb{N}$, $n \le m$ és

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2: \qquad x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_m$$

esetén legalább egy olyan legfeljebb n-edfokú p polinom $/p \in \Pi_n/$ van, amelyre

$$\|\widetilde{p} - y\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m} (p(x_k) - y_k)^2 = \inf\left\{\sum_{k=0}^{m} (q(x_k) - y_k)^2 \in \mathbb{R} : \ q \in \Pi_n\right\},$$

ahol

$$y := (y_0, \ldots, y_m) \qquad \text{és} \qquad \widetilde{p} := (p(x_1), \ldots, p(x_m)),$$

és ez a p polinom pontosan akkor egyértelmű, ha legalább $n+1$ darab x_k $(k \in \{0,1,\ldots,m\})$ páronként különböző!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy az

$$A_n := \left\{(q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1} : \ q \in \Pi_n\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmaz altér $\mathbb{R}^{m+1}$-ben. Világos, hogy $A_n \neq \emptyset$, hiszen $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ miatt $\widehat{0} \in \Pi_n$. Ha $u, v \in A_n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor alkalmas $q, r \in \Pi_n$ esetén

$$u = (q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_m)) \qquad \text{és} \qquad v = (r(x_0), r(x_1), \ldots, r(x_m)),$$

így

$$\begin{aligned} u + \alpha v &= (q(x_0) + \alpha r(x_0), q(x_1) + \alpha r(x_1), \ldots, q(x_m) + \alpha r(x_m)) = \\ &= ((q + \alpha r)(x_0), (q + \alpha r)(x_1), \ldots, (q + \alpha r)(x_m)). \end{aligned}$$

Mivel

$$q + \alpha r \in \Pi_n,$$

ezért

$$q + \alpha r \in A_n$$

is igaz.

2. lépés. Az A_n altér véges dimenziós, ezért A_n zárt, így (vö. 2.2.5. feladat utáni megjegyzés) létezik a

$$v := (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in A_n$$

vektort legjobban közelítő elem. Így a feladat megoldása a $\Phi^{-1}[\{v\}]$ halmaz, ahol

$$\Phi : \Pi_n \to A_n, \qquad \Phi(q) := (q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_m))$$

/Φ szürjektív, így $\Phi^{-1}[\{v\}] \neq \emptyset$/. A legjobban közelítő elem pedig pontosan akkor egyértelmű, ha a $\Phi^{-1}[\{v\}]$ halmaz egyelemű. Ez Φ linearitása miatt pontosan akkor áll fenn, ha

$$\Phi^{-1}[\{v\}] = \{0\}$$

teljesül. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy

$$(*) \qquad \forall\, q \in \Pi_n : \quad (q(x_0) = q(x_1) = \ldots = q(x_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 0)\,.$$

Ha tehát legalább $n+1$ darab x_k $(k \in \{0,1, \ldots, m\})$ páronként különböző, pl. $x_0, x_1, \ldots, x_n$, akkor telejsül a $(*)$ állítás, hiszen a

$$q(x_0) = q(x_1) = \ldots = q(x_m) = 0$$

interpolációs feladat megoldása Π_n-ben egyértelmű: a zéruspolinom. Ha $0 \leq r < n$,

$$\{x_0, \ldots, x_n\} = \{z_0, \ldots, z_r\}$$

és a

$$z_j \qquad (j \in \{0,1,\ldots,r\})$$

pontok páronként különbözőek, akkor a $\{z_0,\ldots,z_r\}$ halmazhoz $n+1$ páronként különböző pontot véve a $\{z_0,\ldots,z_n\}$ halmazt kapjuk. Ekkor pontoan egy $p \in \Pi_n$ megoldása van a

$$q(z_0) = q(z_1) = \ldots = q(z_r) = 0 \qquad \text{és} \qquad q(z_{r+1}) = q(z_{r+2}) = \ldots = q(z_n) = 1$$

interpolációs feladatnak, így $p(z_n) = 1$ miatt $(*)$ nem teljesül. ■

Világos, hogy ha $n = m$ és

$$x_i \neq x_j \qquad (i,j \in \{1,\ldots,m\}: \ i \neq j),$$

akkor a Lagrange-interpolációnál megfogalmazott feladathoz jutunk.
A keresett p polinomra

$$p(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

teljesül. Az

$$\alpha_i \qquad (i \in \{0,\ldots,n\})$$

együtthatókat az

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad f(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) := \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_j^i - y_j \right)^2 = \sum_{j=0}^{m} (p(x_j) - y_j)^2,$$

függvény lokális minimuma szolgáltatja. Mivel f deriválható, ezért innen

$$f'(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$$

következik. Mivel

$$\begin{aligned}
\partial_k f(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) &= 2\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_j^i - y_j \right) x_j^k = \\
&= 2\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_j^i x_j^k - 2\sum_{j=0}^{m} y_j x_j^k \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n\}),
\end{aligned}$$

ezért

$$(**) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{j=0}^{m} x_j^i x_j^k = \sum_{j=0}^{m} y_j x_j^k \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n\}).$$

Az

$$\begin{aligned}\widetilde{x_0} &:= (1,1,\ldots,1),\\ \widetilde{x_1} &:= (x_0, x_1, \ldots, x_m),\\ &\vdots\\ \widetilde{x_n} &:= (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_m^n),\end{aligned}$$

ill. az

$$y := (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

jelölések bevezetésével $(**)$ így írható:

$$(***) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left\langle \widetilde{x_i}, \widetilde{x_k} \right\rangle = \left\langle y, \widetilde{x_k} \right\rangle .$$

A $(***)$ egyenletrendszer mátrixa az

$$[\langle \widetilde{x_i}, \widetilde{x_k} \rangle]_{i,k\in\{0,1\ldots,n\}}$$

Gram-mátrix, amely reguláris, hiszen az

$$\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n}$$

vektorok lineárisan függetlenek (vö. 1.4.42. feladat). Ezért a $(***)$ egyenletlendszernek pontosan egy megoldása van.

2.5.11. feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy az

$$l(x) := ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvényre az

$$|l(0)|^2 + \left| l\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \right|^2 + |l(1) - 1|^2$$

összeg minimális legyen!

Útm. Ha

$$f(a,b) := |b|^2 + \left| \frac{a}{2} + b - 2 \right|^2 + |a + b - 1|^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f'(a,b) = (5a/2 + 3b - 4{,}3a + 6b - 6) = (0{,}0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 3, \quad b = 1/2;$$

$$f''(a,b) = \begin{bmatrix} 5/2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$l(x) = x + 1/2 \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Sok esetben használatos a 2.5.10. feladat következő speciális esete. Adott $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

esetén keressük azt az

$$y = l(x)$$

egyenletű egyenest, azaz valamely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az

$$l(x) := ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvényt, amelyre a

$$\sum_{k=1}^{n} (l(x_k) - y_k)^2$$

összeg minimális (**legkisebb négyzetek módszere**). Ha

$$f(a, b) := \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2 \qquad ((a, b) \in \mathbb{R}^2),$$

akkor

$$f'(a, b) = (0{,}0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2}}, \quad \boxed{b = -a\overline{x} + \overline{y}},$$

ill.

$$f''(a, b) = \begin{bmatrix} 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 & 2n\overline{x} \\ 2n\overline{x} & 2n \end{bmatrix},$$

ahol

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \text{és} \qquad \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség (vö. 11.2. fejezet) felhasználásával látható, hogy a Haar-feltételnek eleget tévő alappontok esetén

$$\det(f''(a, b)) = 4n^2\sigma_n^2 > 0,$$

ahol

$$\sigma_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2 \qquad \textbf{(empirikus szórásnégyzet)},$$

amelyet a gyakorlati alkalmazások során a tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén fennálló

$$n\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - a\right)^2 - n(\overline{x} - a)^2$$

ún. **Steiner-formula** felhasználásával szokás kiszámítani.

2.5.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, akkor fennállnak a

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_2 \leq (b-a)\cdot\|f\|_\infty$$

egyenlőtlenségek!

Útm. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (vö. 1.4.2. feladat) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\cdot 1\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b 1\,\mathrm{d}x} = \\ &= \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2\,\mathrm{d}x} = \\ &= (b-a)\|f\|_\infty. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha a

$$(\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_p)$$

normált teret, ill. az

$$A \subset \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$$

halmazt illetően valamely

$$f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$$

függvénynek van a $p=\infty$ esetben legjobb A-beli elemekkel való legjobb közelítése, akkor van a

$$p=1, \qquad \text{ill. a} \qquad p=2$$

esetben is. Fordítva ez nem igaz, hiszen ha

$$a:=0, \qquad b:=1,$$

ill.

$$f(x):=1, \qquad g_n(x):=\sqrt[n]{x} \qquad (x\in[0{,}1],\ n\in\mathbb{N}),$$

akkor bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\|f-g\|_1=\frac{1}{n+1}, \qquad \|f-g\|_2=\sqrt{\frac{2}{n^2+3n+2}}$$

és

$$\|f-g\|_\infty=1$$

teljesül.

2.5.13. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, ill. $A \subset \mathcal{X}$ véges dimenziós altér esetén számítsuk ki valamely $x \in \mathcal{X}$ vektornak az A altértől vett távolságát!

Útm. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\dim(A) = n$ és az

$$e_1, \ldots, e_n \in A$$

vektorrendszer az A altér egy bázisa, akkor (vö. 2.4.2., 1.4.29., ill. 2.4.7 feladat) bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor esetén megadhatók olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ együtthatók, hogy ha

$$y := \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

akkor

$$\|x - y\| = \rho(x, A)$$

teljesül. Ezért (vö. 2.5.5. feladat)

$$\langle x - y, y\rangle = 0,$$

ahonnan

$$0 = \langle x - y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle e_l, e_k\rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

azaz

$$(*) \qquad \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle e_l, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

következik. Így

$$\begin{aligned}(\rho(x, A))^2 &= \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x\rangle - \langle x - y, y\rangle = \langle x - y, x\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle e_l, x\rangle,\end{aligned}$$

ahonnan

$$(*) \qquad (\rho(x, A))^2 + \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle e_l, x\rangle = \langle x, x\rangle$$

következik. A $(*)$ és $(**)$ egyenlőségek együtt egy $(n+1) \times (n+1)$-es lineáris egyenletrendszert alkotnak a

$$\xi := (\rho(x, A))^2, \qquad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

ismeretlenekre:

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot \xi + \langle e_1, x\rangle\alpha_1 + \ldots \langle e_n, x\rangle\alpha_n &= \langle x, x\rangle, \\ 0 \cdot \xi + \langle e_1, e_1\rangle\alpha_1 + \ldots \langle e_n, e_1\rangle\alpha_n &= \langle x, e_n\rangle, \\ &\vdots \\ 0 \cdot \xi + \langle e_1, e_n\rangle\alpha_1 + \ldots \langle e_n, e_n\rangle\alpha_n &= \langle x, e_n\rangle. \end{aligned}\right\}$$

Ennek az egyenletrendszernek a determinánsa: $\Gamma(e_1, \ldots, e_n) > 0$ (vö. 1.4.6. definíció), így a **Cramer-szabály** felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\rho(x, A) = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{\Gamma(x, e_1, \ldots, e_n)}{\Gamma(e_1, \ldots, e_n)}}. \quad \blacksquare$$

Világos, hogy ha az

$$e_1, \ldots, e_n \in A$$

bázis ONR, akkor $(*)$-ból

$$\alpha_l = \langle x, e_l \rangle \qquad (l \in \{1, \ldots, n\})$$

következik, továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\Gamma(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Végezetül

$$\Gamma(x, e_1, \ldots, e_n) = \det \begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, e_1 \rangle & \ldots & \langle x, e_n \rangle \\ \langle e_1, x \rangle & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \langle e_2, x \rangle & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ \langle e_n, x \rangle & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha a determinánsban a második sor $\langle x, e_1 \rangle$-szeresét, …, az n-edik sor $\langle x, e_n \rangle$-szeresét kivonjuk az első sorból, majd az így nyert determinánst az első sor szerint kifejtjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\Gamma(x, e_1, \ldots, e_n) = \|x\|^2 - \sum_{l=1}^{n} |\langle x, e_l \rangle|^2,$$

azaz

$$\rho(x, A) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{l=1}^{n} |\widehat{x}(l)|^2}.$$

Ez pedig nem más, mint a Bessel-azonosság (vö. 1.4.53. feladat utáni megjegyzés).

3. fejezet

Szeparábilis terek

3.1. Szeparábilis terek tulajdonságai

Emlékeztetünk az 1.1.17. definícióra, miszerint valamely $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus teret szeparábilisnek nevezünk, ha alkalmas $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ legfeljebb megszámlálható halmaz esetén $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}$, azaz $\mathcal{X}$-nek van legfeljebb megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza. Az $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér esetén a szeparábilitás azt jelenti, hogy van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ és

$$B := \{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathcal{N}\},$$

hogy $\overline{B} = \mathcal{X}$, azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N := N(x, \varepsilon) \in \mathcal{N}$ index, hogy

$$\rho(x, x_N) < \varepsilon.$$

3.1.1. példa.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ szeparábilis, hiszen, ha

$$\mathcal{N} := \mathbb{N}, \qquad B := \mathbb{Q},$$

akkor $\overline{B} = \mathbb{R}$, ui. minden $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $x_n \in \mathbb{Q}$, hogy $|x - x_n| < \varepsilon$, mivel

$$|x - x_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon,$$

és ez igaz.

2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ szeparábilis, hiszen, ha

$$\mathcal{N} := \mathbb{N}, \qquad B := \{z \in \mathbb{C} : \; \exists\, a, b \in \mathbb{Q} : \; z = a + b\imath\},$$

akkor

$$\overline{B} = \mathbb{C}.$$

3.1.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden kompakt metrikus tér szeparábilis!

Útm. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ kompakt metrikus tér és $n \in \mathbb{N}$, akkor a

$$\left\{K_{\frac{1}{n}}(x) : \ x \in \mathcal{X}\right\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése $\mathcal{X}$-nek. A kompaktság következtében bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m_n \in \mathbb{N}$ és

$$x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)} \in \mathcal{X}, \qquad \text{hogy} \qquad \mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{m_n} K_{\frac{1}{n}}\left(x_k^{(n)}\right).$$

Világos, hogy a

$$H := \left\{x_k^{(n)} \in \mathcal{X} : \ k \in \{1, \ldots, m_n\}, \, m \in \mathbb{N}\right\}$$

halmaz megszámlálható. Megmutatjuk, hogy $\overline{H} = \mathcal{X}$ teljesül. Ha $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $1/n < \varepsilon$, akkor bármely $a \in \mathcal{X}$ esetén alkalmas k indexszel

$$a \in K_{\frac{1}{n}}\left(x_k^{(n)}\right).$$

Ha $h \in H$ olyan, hogy $h = x_k^{(n)}$, akkor

$$\rho\left(a, x_k^{(n)}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

3.1.2. feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér pontosan akkor szeparábilis, ha alkalmas legfeljebb megszámlálható $B \subset \mathcal{X}$ halmazzal

$$\overline{\text{span}\,(B)} = \mathcal{X}, \qquad \text{azaz} \qquad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in \text{span}\,(B) : \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha valamely legfeljebb megszámlálható $Y \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén $\overline{Y} = \mathcal{X}$, akkor $Y \subset \text{span}\,(Y)$ miatt

$$\mathcal{X} = \overline{Y} \subset \overline{\text{span}\,(Y)},$$

azaz

$$\overline{\text{span}\,(Y)} = \mathcal{X}.$$

2. lépés. Ha valamely $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ indexhalmaz esetén az

$$Y := \{y_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathcal{N}\}$$

halmazra

$$\overline{\text{span}\,(Y)} = \mathcal{X}$$

és
$$\mathrm{span}_{\,rac}(Y) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k y_k \in Y : \ n \in \mathcal{N},\, a_k \in \widetilde{\mathbb{Q}},\, (k \in \{1, \ldots, n\}) \right\},$$
ahol
$$\widetilde{\mathbb{Q}} := \begin{cases} \mathbb{Q} & (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ \\ \mathbb{Q} + \imath\mathbb{Q} & (\mathbb{K} = \mathbb{C}), \end{cases}$$
akkor
$$\overline{\widetilde{\mathbb{Q}}} = \mathbb{K}$$
és $\widetilde{\mathbb{Q}}$ megszámlálható, így $\mathrm{span}_{\,rac}(Y)$ legfeljebb megszámlálható. Megmutatjuk, hogy
$$\overline{\mathrm{span}_{\,rac}(Y)} = \mathcal{X},$$
azaz
$$\forall\, x \in \mathcal{X} \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, y \in \mathrm{span}_{\,rac}(Y) : \qquad \|x - y\| < \varepsilon.$$
Ha $x \in \mathcal{X}$ és $\varepsilon > 0$, akkor
$$\overline{\mathrm{span}\,(Y)} = \mathcal{X}$$
következtében van olyan $n \in \mathcal{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, hogy az
$$y := \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$$
vektorral
$$\|x - y\| < \varepsilon/2.$$
Így alkalmas $q_1, \ldots, q_n \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ számokkal
$$|a_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|} \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$
Így a
$$z := \sum_{k=1}^{n} q_k y_k \in \mathrm{span}_{\,rac}(Y)$$
vektorra
$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k - q_k| \cdot \|y_k\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max\{|a_k - q_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\} \sum_{k=1}^{n} \|y_k\| < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathcal{X}$ minden eleme tetszőleges pontossággal megközelíthető B-beli vektorok alkalmas lineáris kombinációjával, azaz

$$\forall\, x \in \mathcal{X} \text{ vektorhoz és } \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz}$$

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, b_1, \ldots, b_n \in B \text{ és } \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ \text{hogy}$$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k \right\| < \varepsilon.$$

Következésképpen, ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós vektortér, akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér szeparábilis, ui. ha B bázisa $\mathcal{X}$-nek, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$, így

$$\overline{\{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n :\ \alpha_k \in \mathbb{K} :\ \Re(\alpha_k), \Im(\alpha_k) \in \mathbb{Q}\ (k \in \{1, \ldots, n\}\}} = \mathcal{X}.$$

Normált terekben mindenütt sűrű halmazok helyett inkább *zárt rendszer*ekről szokás beszélni.

3.1.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathcal{X}$ halmaz **zárt rendszer**, ha $\mathrm{span}\,(H)$ mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben, azaz $\overline{\mathrm{span}\,(H)} = \mathcal{X}$ teljesül.

A 3.1.1. definícióban bevezetett fogalom segítségével a 3.1.2. feladatbeli állítás a következőképpen fogalmazható meg: **valamely normált tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne legfeljebb megszámlálható zárt rendszer**.

3.1.2. példa. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$b_1, \ldots, b_n$$

vektorrendszer bázis $\mathcal{X}$-ben, akkor

$$H := \{b_1, \ldots, b_n\}$$

zárt rendszer.

3.1.3. példa. Ha $p \in [1, +\infty)$, akkor $(l_p, \|\cdot\|_p)$-ben

$$H := \{e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \in l_p :\ n \in \mathbb{N}\}$$

zárt rendszer.

3.1.4. példa. A Weiartsraß-féle II. approximációs tétel (vö. 2.3.9. feladat) következtében

$$H := \{[0,2\pi] \ni x \mapsto 1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$$

zárt rendszer a $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $A, B \subset \mathcal{X}$ esetén

$$\mathrm{span}\,(A) = \mathrm{span}\,(B),$$

akkor A és B egyszerre zárt rendszer vagy nem zárt rendszer $\mathcal{X}$-ben.

3.1.3. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér és $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

1. H mindenütt sűrű ($\mathcal{X}$-ben).
2. $H^\perp = \{0\}$, azaz H teljes rendszer.
3. H zárt rendszer $\mathcal{X}$-ben.

Útm.

1. lépés /(1) $\Leftrightarrow$ (2)/. H pontosan akkor mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben, ha $\overline{H} = \mathcal{X}$, és ez pontosan akkor telesül (vö. 1.4.36/2, ill. 4. feladat), ha

$$H^\perp = \overline{H}^\perp = \mathcal{X}^\perp = \{0\}.$$

2. lépés /(2) $\Leftrightarrow$ (3)/. H pontosan akkor zárt rendszer $\mathcal{X}$-ben, ha $\overline{\mathrm{span}\,(H)} = \mathcal{X}$, ami pontosan akkor teljesül (vö. 1.4.36/2, ill. 4. feladat), ha

$$H^\perp = (\mathrm{span}\,(H))^\perp = \mathcal{X}^\perp = \{0\}. \quad \blacksquare$$

3.1.5. példa. Az $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l_2})$ Hilbert-tér, ill. az $A := l_1$ altér esetében

$$A^\perp = \left\{ u = (u_n) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{u_n} = 0 \, (x = (x_n) \in l_1) \right\},$$

ezért, ha $x = (e_n) = (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$, akkor

$$u_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$A^\perp = \{0\}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $\overline{A} = l_2$ (vö. 1.3.37. feladat). Sőt, mivel bármely $x = (x_n) \in l_2$ egyértelműen írható az

$$x = y + z$$

alakba, ahol

$$y := (0, x_2, x_3, \ldots) \qquad \text{és} \qquad z := (x_1, 0, 0, \ldots),$$

ezért fennáll az

$$l_2 = \overline{A} \oplus A^\perp$$

egyenlőség (vö. 2.5.9. feladat utáni megjegyzés).

3.1.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben van $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauder-bázis, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ szeparábilis!

Útm. A

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} r_k e_k \in \mathcal{X} : \; k \in \{1, \ldots, n\}, \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmaz megszámlálható és mindenütt sűrű $\mathcal{X}$-ben. ■

Megmutatható azonban (vö. [8]), hogy van olyan szeparábilis normált tér, amelyben nincsen Schauder-bázis.

3.1.5. feladat. Igazoljuk, hogy valamely $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-térben van legfeljebb megszámlálható teljes ONR, akkor $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ szeparábilis!

Útm. Ha $\dim(\mathcal{X}) > 0$, $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ és

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathcal{N}\}$$

teljes ONR, továbbá $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor

$$\overline{\text{span}\,(M)} = \mathcal{X},$$

hiszen bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x = \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle x, x_n\rangle x_n,$$

és így bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $n \in \mathcal{N}$, hogy

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k \right\| < \varepsilon.$$

A 3.1.2. feladatbeli eljárást alkalmazva könnyen megmutatható, hogy

$$\overline{\text{span}_{\,rac}(M)} = \mathcal{X}. \quad \blacksquare$$

3.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne legfeljebb megszámlálható zárt ONR!

Útm. A feltétel elégségessége a 3.1.2. feladat, ill. a 3.1.1. definíció utáni megjegyzés értelmében nyilvánvaló. Ha a tér szeparábilis, $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, és a

$$H := \{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathcal{N}\}$$

zárt rendszer $\mathcal{X}$-ben, akkor nyilván feltehető, hogy H elemei lineárisan függetlenek. Így a Gram-Schmidt-algoritmussal (vö. 1.4.49. feladat) olyan B legfeljebb megszámlálható ortonormált készíthető, amelyre

$$\text{span}\,(H) = \text{span}\,(B)$$

teljesül. Így a 3.1.4. példa utáni megjegyzésből következik, hogy B is zárt rendszer $\mathcal{X}$-ben. ■

3.1.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy, ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, alkalmas $\alpha > 0$ szám és nem megszámlálható $A \subset \mathcal{X}$ halmaz esetén

$$\rho(x, y) \geq \alpha \qquad (x, y \in A : x \neq y),$$

akkor $(\mathcal{X}, \rho)$ nem szeparábilis!

Útm.

1. lépés. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $(\mathcal{X}, \rho)$ szeparábilis, azaz valamely $B \subset \mathcal{X}$ megszámlálható halmazra $\overline{B} = \mathcal{X}$. Ekkor bármely $x \in A$ esetén van olyan $f(x) \in B$, hogy

$$\rho(x, f(x)) < \frac{\alpha}{2},$$

azaz van olyan $f : A \to B$ függvény, amelyre

$$\rho(x, f(x)) < \alpha/2 \qquad (x \in A).$$

2. lépés. Az f függvény injektív, ui. ha nem lenne az, akkor alkalmas $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $f(x) = f(y)$ teljesülne, amiből

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, f(x)) + \rho(f(x), y) = \rho(x, f(x)) + \rho(f(y), y) < 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

következne. Ez azonban nem lehetséges.

3. lépés. Az f függvény injektivitása miatt

$$|A| \leq |B|,$$

azaz B nem lehet megszámlálható. Ez pedig ellentmond a kiindulási feltételnek. ■

3.1.8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ szeparábilis metrikus tér, $\emptyset \neq \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ akkor $(\mathcal{Y}, \rho|_{\mathcal{Y}^2})$ is szeparábilis (metrikus altér)!

Útm. Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ szeparábilis, akkor alkalmas $B \subset \mathcal{X}$ megszámlálható halmaz esetén $\overline{B} = \mathcal{X}$. Legyen

$$\mathcal{M}_b := \left\{ n \in \mathbb{N} : \ \exists\, y \in \mathcal{Y} : \ \rho(b, y) < \frac{1}{n} \right\} \qquad (b \in B).$$

Ha $b \in B$ és $\mathcal{M}_b \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $n \in \mathcal{M}_b$ esetén legyen $y_n(b) \in \mathcal{Y}$ olyan, hogy

$$\rho(b, y_n(b)) < \frac{1}{n}.$$

Tekintsük továbbá a következő halmazokat:

$$\mathcal{B}_b := \{y_n(b) \in \mathcal{Y} : \ n \in \mathcal{M}_b\} \quad (b \in B) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{C} := \bigcup_{b \in B} \mathcal{B}_b.$$

Ekkor

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$ és $\mathcal{C}$ megszámlálható, ui. B megszámlálható és minden $b \in B$ esetén $\mathcal{B}_b$ is az.

2. $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{Y}$, ui. legyen $y \in \mathcal{Y}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, majd $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor van olyan $b \in B$, hogy $\rho(y,b) < \dfrac{1}{n}$, azaz $n \in \mathcal{M}_b$, és van olyan $x \in \mathcal{B}_b \subset \mathcal{C}$, hogy $\rho(b,x) < \dfrac{1}{n}$, azaz

$$\rho(y,x) < \rho(y,b) + \rho(b,x) < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Tehát $\mathcal{C}$ mindenütt sűrű $\mathcal{Y}$-ban. ■

3.1.9. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér esetén $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor az alábbi három állítás egyenértékű!

(1) $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ szeparábilis.

(2) $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$-ben van legfeljebb megszámlálható, teljes ONR.

(3) $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ izometrikusan izomorf az $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l_2})$, vagy (pontosan egy $d \in \mathbb{N}$ esetén) a $(\mathbb{K}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ térrel (**Riesz-Fischer-tétel**).

Útm.

(1) $\Rightarrow$ **(2):** Ha valamely $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz esetén

$$\{b_\gamma \in \mathcal{X} : \ \gamma \in \Gamma\}$$

olyan nem megszámlálható teljes ONR $\mathcal{X}$-ben, akkor a Pitagorasz-tétel következtében

$$\|b_\gamma - b_\delta\|^2 = \|b_\gamma\|^2 + \|b_\delta\|^2 = 2.$$

Így (vö. 3.1.7. feladat: $\alpha := \sqrt{2}$) $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nem szeparábilis.

(2) $\Rightarrow$ **(3):** Ha az

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

megszámlálható, teljes ONR, akkor a

$$\varphi : \mathcal{X} \to l_2, \qquad \varphi(x) := (\langle x, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

leképezés (**Fourier-transzformáció**) izometrikus izomorfizmus, ui.

- bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|(\langle x, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\| < +\infty;$$

- a φ leképezés lineáris, hiszen bármely skaláris szorzat lineáris az első változójában, továbbá φ normatartó, hiszen

$$\|\varphi(x)\|_{l_2}^2 = \|(\langle x, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{X});$$

- a φ leképezés szürjektív, hiszen ha

$$y = (y_n) \in l_2 \qquad \text{és} \qquad e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

így

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \qquad /(l_2, \|\cdot\|_{l_2})\text{-ben}/\,,$$

továbbá a $\sum_{n=1} (y_n x_n)$ sor konvergens $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ben, hiszen az

$$\alpha_n := \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\varphi((\alpha_n)) = \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n} y_k x_k, x_j \right\rangle\right)_{j\in\mathbb{N}} = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k,$$

ahonnan φ normatartása miatt $n < m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \|\varphi\,(\alpha_m - \alpha_n)\|_{l_2}^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |y_k|^2$$

következik; így

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < +\infty$$

miatt (α_n) Cauchy-sorozat, és a teljesség következtében (α_n) konverges:

$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \in \mathcal{X}.$$

Az is látszik, hogy φ szürjektív, hiszen φ folytonosságából

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim(\alpha_n)) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n\right) = \lim\left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = y$$

következik. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{x_1, \ldots, x_n\}$ teljes ortonormált rendszer $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$-ben, akkor könnyen látható, hogy a

$$\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{K}^n, \qquad \varphi(x) := (\langle x, x_1\rangle, \ldots, \langle x, x_n\rangle)$$

leképezés izometrikus izomorfizmus.

(3) $\Rightarrow$ **(1)** Mivel minden szeperábilis tér izometrikusan izomorf képe szeparábilis, ezért ez a lépés nyilvánvaló (vö. 3.1.5. feladat). ■

3.2. Példák szeparábilis terekre

3.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}),\rho_\infty)$ metrikus tér szeparábilis!

Útm. Megmutatjuk, hogy ha

$$\mathcal{P} := \left\{f : [a,b] \to \mathbb{R} :\ \exists\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ polinom} :\ f = p|_{[a,b]}\right\},$$

ill.

$$\mathcal{P}_{rac} := \left\{ f \in \mathcal{P} :\ \forall\, x \in [a,b] :\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k x^k,\ q_k \in \mathbb{Q},\ 0 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

akkor $\mathcal{P}_{rac}$ megszámlálható és

$$\overline{\mathcal{P}_{rac}} = \mathfrak{C}[a,b].$$

1. lépés. Mivel $\mathcal{P}_{rac}$ végtelen halmaz, továbbá a

$$\varphi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^n \to \mathcal{P}_{rac}, \qquad \varphi(q_1,\ldots,q_n) := f, \qquad f(x) := \sum_{k=1}^{n} q_k x^{k-1} \quad (x \in [a,b])$$

szürjektív leképezés értelmezési tartománya – mint megszámlálható halmazok megszámlálható egyesítése – megszámlálható, ezért $\mathcal{P}_{rac}$ megszámlálható (vö. 11.3. fejezet).

2. lépés. Mivel a Weierstraß-féle I. approximációs tétel (vö. 2.3.7. feladat) szerint $\overline{\mathcal{P}} = \mathfrak{C}[a,b]$, így $\overline{\mathcal{P}_{rac}} = \mathfrak{C}[a,b]$, ezért már csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$(*) \qquad \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}_{rac}},$$

(hiszen $\mathcal{P}_{rac} \subset \mathcal{P}$ miatt $(*)$ azt jelenti, hogy $\mathcal{P}_{rac}$ – a ρ_∞ metrikában – sűrű $\mathcal{P}$-ben). Ha $f \in \mathcal{P}$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}_0$ és $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in [a,b]),$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a

$$p_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad p_\varepsilon(x) := \sum_{k=0}^{n} q_k x^k, \qquad q_k \in \mathbb{Q} \quad (k \in \{0,\ldots,n\})$$

polinom együtthatóit kell úgy megválasztani, hogy

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f,p_\varepsilon) &= \sup\{|f(x) - p_\varepsilon(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [a,b]\} = \\ &= \sup\left\{ \left|\sum_{k=0}^{n}(a_k - q_k)x^k\right| \in \mathbb{R} :\ x \in [a,b] \right\} < \varepsilon\end{aligned}$$

legyen. Ha

$$\delta := 1 + \max\left\{ \sup\left\{ |x^k| \in \mathbb{R} :\ x \in [a,b] \right\} \in \mathbb{R} :\ k \in \{0,\ldots,n\} \right\}$$

akkor $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ miatt van olyan $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$, hogy

$$|a_k - q_k| < \frac{1}{n+1}\frac{\varepsilon}{\delta} \qquad (k \in \{0, \ldots, n\}).$$

Így

$$\begin{aligned}
\rho_\infty(f, p_\varepsilon) &= \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{n}(a_k - q_k)x^k\right| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|a_k - q_k||x^k| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\right\} \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}|a_k - q_k| \sup\left\{|x^k| \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\right\} < \\
&< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot\delta = \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha H végtelen halmaz, akkor a $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_\infty)$ tér nem szeparábilis!

Útm. Mivel H végtelen, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in H$, hogy

$$x_m \neq x_p \qquad (m, p \in \mathbb{N} : \; m \neq p).$$

Világos, hogy $\mathcal{K}(H)$ is végtelen. Ha

$$\{f_n\} \subset \mathcal{K}(H)$$

tetszőleges megszámlálható halmaz, és

$$g(x) := \begin{cases} f_n(x_n) + 1 & (x = x_n : \; |f_n(x_n)| < 1), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \qquad (x \in H),$$

akkor

$$\|g - f_n\|_\infty \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tehát $\{f_n\}$ nem sűrű $\mathcal{K}(H)$-ban (vö. 3.1.7. feladat). ■

Ez azt jelenti, hogy $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nem szeparábilis, ui. $l_\infty = \mathcal{K}(\mathbb{N})$.

Ha persze H véges halmaz, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$H = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

akkor $\mathcal{K}(H) = \mathbb{K}^n$, azaz $\mathcal{K}(H)$ szeparábilis.

3.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $p \in [1,+\infty)$ esetén $(l_p, \|\cdot\|_p)$ szeparábilis!

Útm. Ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad B := \operatorname{span}(e_n : \ n \in \mathbb{N}),$$

akkor világos, hogy

$$e_n \in l_p \qquad \text{és} \qquad \|e_n\|_p = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

1. $B \subset l_p$,
2. $B = \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \ \exists N \in \mathbb{N} : \ (\mathbb{N} \ni n \geq N \implies x_n = 0)\}$,
3. B megszámlálható.

A $B \neq l_p$ eset nem lehetséges, ui.

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{(n\in\mathbb{N})} \in l_p,$$

hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^p}\right)^n = \frac{\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2^p}} = \frac{1}{2^p-1} < +\infty,$$

de

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{(n\in\mathbb{N})} \notin B.$$

Megmutatjuk, hogy $\overline{B} = l_p$. Ha $(x_n) \in l_p$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty, \qquad \text{azaz} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \sum_{n\geq N+1}|x_n|^p < \varepsilon^p.$$

Ha

$$y_N := (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) \in B,$$

akkor

$$\|(x_n) - (y_n)\|_p = \|(0, \ldots, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} < (\varepsilon^p)^{1/p} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Az 1.2.9. feladatban megmutattuk, hogy ha adott (X, Ω, μ) mértéktér esetén

$$\Omega^* := \{A \in \Omega : \ \mu(A) < +\infty\},$$

akkor a

$$\rho_\mu(A, B) := \mu(A \triangle B) \qquad (A, B \in \Omega^*)$$

függvény félmetrika. Az így kapott (Ω^*, ρ_μ) félmetrikus tér szeparábilitása azt jelenti, hogy van olyan

$$A_n \subset \Omega^* \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat, hogy minden $A \in \Omega^*$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén valamilyen $\mathbb{N} \ni m$-mel

$$\varepsilon > \rho_\mu(A, A_m) = \mu\,(A \vartriangle A_m) = \int \chi_{A \Delta A_m}\,\mathrm{d}\mu = \int |\chi_A - \chi_{A_m}|\,\mathrm{d}\mu = \|\chi_A - \chi_{A_m}\|_{L^1},$$

azaz a

$$\chi_A \qquad (A \in \Omega,\ \mu(A) < +\infty)$$

(L^1-beli) függvények halmaza szeparábilis a $\|\cdot\|_{L^1}$ norma szerint.

3.2.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy (Ω^*, ρ) pontosan akkor szeparábilis, ha $\left(L^1, \|\cdot\|_{L^1}\right)$ szeparábilis!

Útm.

1. lépés. Ha $\left(L^1, \|\cdot\|_{L^1}\right)$ szeparábilis, akkor – mivel szeparábilis metrikus tér minden altere szeparábilis –, a

$$H := \{\chi_A : X \to \mathbb{R} :\ A \in \Omega,\ \mu(A) < +\infty\}$$

szeparábilis része L^1-nek, így az előbbi megyjegyzés alapján (Ω^*, ρ_μ) is szeparábilis.

2. lépés. Ha (Ω^*, ρ_μ) szeparábilis, akkor tehát van olyan

$$A_n \in \Omega^* \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat, hogy minden $A \in \Omega^*$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén valamely $m \in \mathbb{N}$ indexre

$$\mu(A \vartriangle A_m) < \varepsilon.$$

- Ha $f \in L^1$, akkor egy-egy alkalmas, monoton növekedő

$$g_n, h_n \in L_0^+ \qquad (n \in \mathbb{N})$$

nemnegatív lépcsős függvényekből álló sorozattal

$$\lim(g_n) = f^+, \qquad \lim(h_n) = f^-,$$

és

$$\int f^+\,\mathrm{d}\mu = \lim\left(\int g_n\,\mathrm{d}\mu\right), \qquad \int f^-\,\mathrm{d}\mu = \lim\left(\int h_n\,\mathrm{d}\mu\right).$$

Világos, hogy

$$g_n, h_n \in L^1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és az

$$f_n := g_n - h_n \in L_0 \cap L^1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

lépcsős függvényekből álló sorozatra

$$\lim(f_n) = f$$

és

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_{L^1} &= \|f^+-f^--(g_n-h_n)\|_{L^1}\leq\|f^+-g_n\|_{L^1}+\|f^--h_n\|_{L^1}= \\ &= \int\left(f^+-g_n\right)\,\mathrm{d}\mu+\int\left(f^--h_n\right)\,\mathrm{d}\mu\longrightarrow 0+0=0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

miatt tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $N\in\mathbb{N}$ index, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ esetén

$$\|f-f_n\|_{L^1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

- Mivel

$$f_N\in L^0\cap L^1,$$

ezért van olyan $\emptyset\neq\widetilde{\Omega}\subset\Omega^*$ véges halmaz, hogy alkalmas

$$\alpha_B\in\mathbb{R}\qquad(B\in\widetilde{\Omega})$$

együtthatókkal

$$f_N=\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}\alpha_B\chi_B.$$

Ha

$$q_B\in\mathbb{Q}\qquad(B\in\widetilde{\Omega})$$

olyan, hogy

$$|\alpha_B-q_B|<\frac{\varepsilon}{3|\widetilde{\Omega}|\mu(B)},$$

akkor

$$\widetilde{f}_N:=\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}q_B\chi_B$$

esetén

$$\begin{aligned}\left\|f_N-\widetilde{f}_N\right\|_{L^1} &= \left\|\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}\alpha_B\chi_B-\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}q_B\chi_B\right\|_{L^1}=\int\left|\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}\left(\alpha_B-q_B\right)\chi_B\right|\,\mathrm{d}\mu\leq \\ &\leq \sum_{B\in\widetilde{\Omega}}\int|\alpha_B-q_B|\,\chi_B\,\mathrm{d}\mu=\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}|\alpha_B-q_B|\int\chi_B\,\mathrm{d}\mu= \\ &= \sum_{B\in\widetilde{\Omega}}|\alpha_B-q_B|\,\mu(B)<\sum_{B\in\widetilde{\Omega}}\frac{\varepsilon}{3|\widetilde{\Omega}|}= \\ &= \frac{\varepsilon}{3|\widetilde{\Omega}|}\cdot|\widetilde{\Omega}|=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

- Minden egyes $\widetilde{\Omega}$-beli B halmazhoz válasszunk a fenti

$$A_n\qquad(n\in\mathbb{N})$$

halmazsorozatból olyan A halmazt, hogy

$$\mu(A \triangle B) < \frac{\varepsilon}{3|\widetilde{\Omega}| \cdot |q_B|}$$

legyen, továbbá az ilyen halmazokkal értelmezzük az

$$\mathcal{S} := \left\{ \sum_A \beta_A \chi_A \subset L^0 : \ \beta_A \in \mathbb{Q} \text{ tetszőleges}, \ A \text{ mint fent} \right\}$$

(triviálisan) legfeljebb megszámlálható L^1-beli halmazt. Így a

$$g := \sum_A q_B \chi_A \in \mathcal{S}$$

függvényre

$$\begin{aligned}\left\| \widetilde{f}_N - g \right\|_{L^1} &= \left\| \sum_{B \in \widetilde{\Omega}} q_B \chi_B - \sum_A q_B \chi_A \right\|_{L^1} = \int \left| \sum_{|\widetilde{\Omega}|} q_B \left(\chi_B - \chi_A \right) \right| \mathrm{d}\mu \le \\ &\le \sum_{|\widetilde{\Omega}|} |q_B| \int |\chi_B - \chi_A| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{|\widetilde{\Omega}|} |q_B| \mu(A \triangle B) < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Minden $f \in L^1$ függvényhez van tehát olyan $g \in \mathcal{S}$, hogy

$$\|f - g\|_{L^1} \le \|f - f_N\|_{L^1} + \left\| f_N - \widetilde{f}_N \right\|_{L^1} + \left\| \widetilde{f}_N - g \right\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Könnyen belátható, hogy ha $p \in [1, +\infty)$, akkor a fenti állításban $(L^1, \|\cdot\|_{L^1})$ helyett $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ is írható.
Ha

$$X := \mathbb{N}, \qquad \Omega := \mathcal{P}(X), \qquad \mu(\{n\}) := 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(ezzel a σ-additivitás miatt mértéket értelmeztünk Ω-n: számosság-mérték) és $p \in [1, +\infty)$, akkor

$$L^p = l_p = \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

szeparábilis, ui. ha $A \in \Omega^*$, akkor A véges halmaz, így az

$$A_m := A$$

választással

$$\mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0 < \varepsilon.$$

3.2.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} :\ \exists n \in \mathbb{N},\, c_k \in \mathbb{C},\, \alpha_k \in \mathbb{R}\ (k \in \{1,\ldots,n\}) :\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath \alpha_k x}\ (x \in \mathbb{R}) \right\},$$

akkor

1. a
$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}, \qquad \langle f, g \rangle := \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
leképezés skaláris szorzat $\mathcal{X}$-en;
2. ha $\|\cdot\|^2 := \langle \cdot,\cdot \rangle$ és bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath \alpha_k x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ahol $\alpha_k \neq \alpha_l$ $(k \neq l)$, úgy
$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2};$$
3. $(\mathcal{X}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ nem Hilbert-tér;
4. az $\mathcal{X}$ teljessé tétele nem szeparábilis Hilbert-tér!

Útm.

1. lépés. Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

- $\alpha = \beta$ esetén
$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{\imath\alpha x} e^{-\imath\beta x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \cdot 2A = 1,$$
- $\alpha \neq \beta$ esetén
$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} e^{\imath\alpha x} e^{-\imath\beta x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A\imath(\alpha-\beta)} \cdot \left(e^{\imath(\alpha-\beta)A} - e^{-\imath(\alpha-\beta)A} \right) = \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{\sin((\alpha-\beta)A)}{(\alpha-\beta)A} = 0. \end{aligned}$$

2. lépés. Világos, hogy a $\langle \cdot,\cdot \rangle$ leképezés első változójában lineáris, a második változójában konjugált lineáris (vö. 4.4.12. feladat), továbbá ha $\alpha_k \neq \alpha_l$ $(k \neq l)$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath \alpha_k x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} \left\langle e^{\imath\alpha_k x}, e^{\imath\alpha_k x} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

azaz

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \qquad (f \in \mathcal{X}).$$

Ha $\langle f, f\rangle = 0$, akkor bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $|c_k|^2 = 0$, így

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath\alpha_k x} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz $\langle \cdot, \cdot\rangle$ skaláris szorzat és

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}.$$

3. lépés. Ha $(c_n) \in l_2\backslash\{0\}$ és

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath kx} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\|f_n - f_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e^{\imath kx} \right\| = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 < \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy (f_n) Cauchy-sorozat. (f_n) nem konvergens, hiszen ellenkező esetben alkalmas

$$f(x) := \sum_{k=1}^{l} b_k e^{\imath\alpha_k x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\lim(f_n) = f,$$

ezért ha az $M \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\alpha_k \leq M \qquad (k \in \{1, \ldots, l\}),$$

akkor bármely $M \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(f_n - f)(x) = \sum_{k \neq M} a_k e^{\imath\beta_k x} + c_M e^{\imath Mx} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\beta_k \neq \beta_l \quad (k \neq l), \qquad \beta_k \neq M \quad (k \in \mathbb{N})$$

(és a_k közül csak véges sok különbözik zérustól), így

$$\|f_n - f\|^2 = \sum_{k \neq M} |a_k|^2 + |c_M|^2 \geq |c_M|^2 > 0 \qquad (M \leq n \in \mathbb{N}).$$

4. lépés. Ha $(H, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ jelöli az $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ teljessé tételével kapott Hilbert-teret és valamely $s \in \mathbb{R}$ esetén az $f_s \in \mathcal{X}$ elemre

$$f_s(t) = e^{\imath st} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

akkor $\|f_s\| = 1$ és bármely $s \neq u \in \mathbb{R}$ esetén $\langle f_s, f_u\rangle = 0$. Így

$$\{f_s \in \mathcal{X} : \; s \in \mathbb{R}\}$$

nem megszámlálható ortonormált rendszer, továbbá bármely $s \neq u \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \|f_u - f_s\|^2 &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} \left(e^{\imath sx} - e^{-\imath ux}\right)\left(e^{-\imath sx} - e^{-\imath ux}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} \left(2 - e^{\imath ux}e^{-\imath sx} - e^{\imath sx}e^{-\imath ux}\right) \mathrm{d}x = \\ &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\|f_u - f_s\| = \sqrt{2} =: \delta.$$

Ha H szeparábilis lenne, akkor alkalmas megszámlálható

$$\mathcal{H} := \{f_n : \; n \in \mathbb{N}\} \subset H$$

halmaz esetén $\overline{\mathcal{H}} = H$ teljesülne. Ezért bármely $f \in H$ elemre

$$K_{\delta/2} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset,$$

azaz van olyan $f_n \in \mathcal{H}$, hogy

$$\|f_n - f\| < \delta/2.$$

Ha most

$$n_f := \min\{n \in \mathbb{N} : \; \|f_n - f\| < \delta/2\}$$

és

$$\varphi : H \to \mathbb{N}, \qquad \varphi(f) := n_f,$$

akkor φ injektív, hiszen bármely $f, g \in H$, $f \neq g$ esetén a

$$\varphi(f) = n_f = n_g = \varphi(g)$$

egyenlőségből

$$\|f_{n_f} - f\| < \delta/2, \qquad \text{ill.} \qquad \|g - f_{n_g}\| < \delta/2$$

következik, és így

$$\|f - g\| \leq \|g - f_{n_g}\| + \|f_{n_f} - f\| < \delta.$$

Mivel

$$|H| = |\varphi[H]|,$$

ezért $\varphi[H] \subset \mathbb{N}$ miatt H megszámlálható, ami nem lehetséges. ■

3.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ szeparábilis tér!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely

$$x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0$$

esetén

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \qquad \text{ahol} \qquad e_n := (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá $\|x\|_\infty < \infty$. Valóban, ha $(y_n) \in \mathfrak{c}_0$, akkor az

$$\widetilde{y_n} := \sum_{k=1}^{n} y_k e_k = (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|y - (\widetilde{y_n})\|_\infty = \sup\{|y_k| \in \mathbb{R} : \ n+1 \leq k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. lépés. Ha

$$H := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \mathfrak{c}_0 : \ n \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \widetilde{\mathbb{Q}}\,(k \in \{1, \ldots, n\}) \right\}$$

(vö. 3.1.2. feladat megoldása), akkor H megszámlálható részhalmaza $\mathfrak{c}_0$-nak. Ha $x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0$ és $\varepsilon > 0$, akkor alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|x - \widetilde{x_N}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\overline{\widetilde{\mathbb{Q}}} = \mathbb{K}$, ezért alkalmas $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}^*$ számokra

$$|x_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2N} \qquad (k \in \{1, \ldots, N\}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{N} q_k e_k \right\|_\infty &= \left\| x - \widetilde{x_N} + \sum_{k=1}^{N} (x_k - q_k) e_k \right\|_\infty \leq \\ &\leq \|x - \widetilde{x_N}\|_\infty + \sum_{k=1}^{N} |x_k - q_k| \cdot \|e_k\|_\infty < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.2.7. feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$ szeparábilis tér!

Útm. Megmutatjuk, hogy ha

$$e := (1, 1, \ldots),$$

továbbá tetszőleges

$$x = (x_n) \in \mathfrak{c}$$

esetén

$$\alpha(x) := \lim(x_n),$$

akkor az

$$y_n := \alpha(x)e + \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha(x))e_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|x - y_n\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha tehát $x = (x_n) \in \mathfrak{c}$, akkor

$$x - \alpha(x)e = (x_n - \alpha(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{c}_0,$$

ezért az

$$x \widetilde{- \alpha(x)} e = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha(x))e_k \in \mathfrak{c}_0$$

sorozatra (vö. 3.2.6. feladat)

$$\left\| x \widetilde{- \alpha(x)} e - x - \alpha(x)e \right\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így tehát

$$\begin{aligned} \|x - y_n\|_\infty &= \left\| x - \left\{ \alpha(x)e + \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha(x))e_k \right\} \right\|_\infty = \\ &= \left\| \{x - \alpha(x)e\} - \{x \widetilde{- \alpha(x)} e\} \right\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.2.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$l_0 := \{a \in l_\infty(\mathbb{R}) : \; a[\mathbb{N}] \text{ véges halmaz}\}$$

jelöli a **lépcsős sorozat**ok halmazát, akkor

1. l_0 sűrű az $(l_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben;
2. $x \in l_0$ és $\mu \in m(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (vö. 1.3.132. feladat előtti megjegyzés), továbbá

   $$\mu(x) := \sum_{k=1}^{r} \xi_k \mu(A_k) \qquad (A_k = \{l \in \mathbb{N} : \; x_l = \xi_k\}),$$

   esetén a

   $$|\mu(x)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|\mu\|_{m(\mathbb{N},\mathbb{K})}$$

   becslés teljesül!

Útm.

1. Ha $x \in l_\infty(\mathbb{R})$ és $\varepsilon > 0$, továbbá $m, n \in \mathbb{R}$ olyan, hogy
$$m \leq x_n \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor tetszőleges
$$n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{M-m}{n} < \varepsilon$$
esetén legyen $y := (y_k)$ olyan l_0-beli sorozat, amelyre
$$y_k := m + l\frac{M-m}{n} \qquad \Big/ x_k \in \left[m + l\frac{M-m}{n}, m + (l+1)\frac{M-m}{n}\right) \Big/ .$$
Ekkor nyilvánvalóan
$$\|x - y\|_\infty < \frac{M-m}{n}\varepsilon$$
teljesül.

2. Mivel
$$\biguplus_{i=1}^{m} A_i = \mathbb{N},$$
ezért
$$|\mu(x)| \leq \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| \cdot |\mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^{m} \|x\|_\infty \cdot |\mu(A_i)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|\mu\|_{m(\mathbb{N},\mathbb{K})}. \quad \blacksquare$$

3.2.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $x \in l_\infty$ és az
$$x_n, y_n \in l_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatok esetén
$$\lim(\|x - x_n\|_\infty) = 0 = \lim(\|x - y_n\|_\infty),$$
akkor a $(\mu(x_n))$, ill. a $(\mu(x_n))$ valós sorozat konvergens, továbbá
$$\lim(\mu(x_n)) = \lim(\mu(y_n)) \in \mathbb{R}$$
teljesül (vö. 1.3.132. feladat előtti megjegyzés)!

Útm. Mivel (x_n) Cauchy-sorozat l_∞-ben, ezért (vö. 3.2.8. feladat) $(\mu(x_n))$ (valós) Cauchy-sorozat. Ha valamely $x_n \in l_0$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra $\lim(x_n) = 0 \in l_\infty$, akkor (vö. 3.2.8. feladat)
$$\lim(\mu(x_n)) = 0. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy a
$$\mu(x) := \lim((\mu(x_n)) \qquad (x \in l_\infty : \ x_n \stackrel{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} x)$$
függvény jóldefiniált.

4. fejezet

Operátorok és funkcionálok

4.1. Alapfogalmak

4.1.1. definíció. A $\mathbb{K}$ számtestre vonatkozó $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ lineáris terek esetén

1. az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvényt **operátor**nak nevezzük;
2. azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátor **lineáris**, ha minden $u, v \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}_A$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$u + \alpha v \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad A(u + \alpha v) = Au + \alpha Av;$$
3. az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineáris operátor **képterének**, ill. **magterének** nevezzük az
$$A[\mathcal{D}(A)] = \mathcal{R}(A) := \{Au \in \mathcal{Y} : \ u \in \mathcal{D}(A)\},$$
ill. az
$$\mathcal{N}(A) := A^{-1}[\{0\}] = \{u \in \mathcal{D}(A) : \ Au = 0 \in \mathcal{Y}\}$$
halmazt;
4. az (injektív) $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátor **inverz**ének nevezzük az
$$A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A), \qquad A^{-1}v := u, \ Au = v$$
operátort;
5. azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátor a $B \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátornak **kiterjesztés**e, ill. a B operátor az A operátornak **leszűkítés**e (jelben $A \supset B$), ha
$$\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B) \qquad \text{és} \qquad Au = Bu \quad (u \in \mathcal{D}(B))$$
teljesül.

Világos, hogy az $A, B \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorokra $A = B$ pontosan akkor teljesül, ha

$$A \subset B \qquad \text{és} \qquad \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A).$$

A továbbiakban a lineráris operátorok halmazának jelölésére az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : \ A \text{ lineáris}\},$$

ill. az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : \ A \text{ lineáris}\}$$

szimbólumot használjuk, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$-szel rövidítjük. Az $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ esetben A-t **lineáris funkcionál**nak vagy **lineáris formának** nevezzük.

4.1.1. példa. Ha $\mathcal{X}$ lineáris tér, akkor az

$$Ix := x \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátor (**identikus operátor**) triviálisan lineáris: $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$.

4.1.2. példa. Ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ lineáris terek, akkor az

$$Ox := 0 \in \mathcal{Y} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátor (**zérusoperátor**) triviálisan lineáris: $O \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

4.1.3. példa. Ha $\mathcal{X} := l_1$ és

$$Ax := \|x\|_1 \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor A nem lineáris funkcionál, hiszen bármely $0 \neq x \in \mathcal{X}$ esetén

$$A(-x) = Ax \neq -Ax.$$

Ha valamely $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ esetén

$$\mathcal{X} := \{f : [a, b] \to \mathbb{K} : \ f \in \mathfrak{C}\} \ / = \mathfrak{C}[a, b]/,$$

akkor az

$$Af := f' \qquad \left(f \in \left\{u \in \mathcal{X} : \ u \in \mathfrak{C}^1\right\}\right)$$

operátor (**differenciáloperátor**) triviálisan lineáris:

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X}),$$

hiszen bármely $f, g \in \mathfrak{C}^1[a,b]$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A(f+\alpha g) = (f+\alpha g)' = f' + \alpha g' = Af + \alpha Ag.$$

Ha $\kappa \in \mathbb{K}$ és

$$\mathcal{D}_1 := \{u \in \mathcal{D}(A) : \; u(a) = 0\}, \qquad \mathcal{D}_2 := \{u \in \mathcal{D}(A) : \; u(b) = 0\},$$

ill.

$$\mathcal{D}_3 := \{u \in \mathcal{D}(A) : \; u(a) = u(b) = 0\}, \qquad \mathcal{D}_4 := \{u \in \mathcal{D}(A) : \; u(a) = \kappa u(b)\},$$

akkor az

$$A_k f := Af \qquad (f \in \mathcal{D}(A_k) := \mathcal{D}_k) \qquad (k \in \{1,2,3,4\})$$

operátorok is lineárisak:

$$A_k \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X}) \qquad (k \in \{1,2,3,4\}),$$

továbbá A_1, A_2, A_3 és A_4 az A leszűkítése, ill. A_1, A_2 és $\kappa \neq 0$ esetén A_4 kiterjesztése A_3-nak.

4.1.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy valamely

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$$

(lineáris) operátor esetében

1. az $\mathcal{N}(A)$ magtér $\mathcal{X}$-nek, az $\mathcal{R}(A)$ képtér pedig $\mathcal{Y}$-nak altere;
2. az A pontosan akkor injektív, ha $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathcal{X}\}$;
3. az A pontosan akkor szürjektív, ha $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$, azaz képtere az egész tér!

Útm.

4.1.2. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén a $K \subset \mathcal{X}$ halmazt **kúp**nak nevezzük, ha

$$\lambda K \subset K \qquad (\lambda \in (0,+\infty))$$

teljesül.

4.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$, ill. $\mathcal{Y}$ valós vektortér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor igazak az alábbi implikációk!

1. Ha $K \subset \mathcal{X}$ kúp, akor $A[K] \subset \mathcal{Y}$ is kúp.
2. Ha $L \subset \mathcal{Y}$ kúp, akkor $A^{-1}[L] \subset \mathcal{X}$ is kúp.

Útm.

1. Ha $y \in A[K]$, akkor alkalmas $v \in K$ esetén
$$v = A(y).$$
Mivel $K \subset \mathcal{X}$ kúp, ezért bármely $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén
$$y \in \mathbb{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda y \in \mathbb{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda v = \lambda A(y) = A(\lambda y) \in A[K].$$
2. Ha $u \in A^{-1}[L]$, akkor alkalmas $v \in L$ esetén $u \in A^{-1}[\{v\}]$, így
$$A(u) = v \in L,$$
ahonnan – lévén, hogy $L \subset \mathcal{Y}$ kúp, – tetszőleges $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén
$$L \ni \lambda v = \lambda A(u) = A(\lambda u) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda u \in A^{-1}[L]$$
következik. ■

4.1.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, $\mathcal{A}$ altér $\mathcal{X}$-ben, akkor a
$$\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{A}, \qquad \pi(x) := [x] = x + \mathcal{A}$$
(ún. **kanonikus**) **leképezés**re igazak az alábbi állítások!

1. π lineáris.
2. π szürjektív.
3. $\mathcal{N}(\pi) = \mathcal{A}$.
4. Bármely $H \subset \mathcal{X}$ esetén
$$\pi^{-1}[\pi[H]] = H + \mathcal{A} = \{h + a \in \mathcal{X} : \; h \in H, \, a \in \mathcal{A}\}.$$

Útm.

1. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$\pi(x + \alpha y) = (x + \alpha y) + \mathcal{A} = x + \mathcal{A} + \alpha(y + \mathcal{A}) = \pi(x) + \alpha\pi(y).$$
2. Ha $y \in \mathcal{X}/\mathcal{A}$, akkor alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén $y = x + \mathcal{A} = \pi(x)$.
3. Ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\pi(x) = x + \mathcal{A} = \{0\},$$
akkor $x \sim 0$, ahonnan $x \in \mathcal{A}$ következik.
4. Ha $h \in H$ és $a \in \mathcal{A}$, akkor
$$\pi(h + a) = h + a + \mathcal{A} = h + \mathcal{A} = \pi(h) \in \pi[H],$$
ahonnan
$$h + a \in \pi^{-1}[\pi[H]]$$

következik. Ha pedig $x \in \pi^{-1}[\pi[H]]$, akkor

$$\pi(x) \in \pi[H] = \{h + \mathcal{A} : \, h \in H\},$$

így alkalmas $y \in H$ esetén

$$x + \mathcal{A} = \pi(x) = y + \mathcal{A}.$$

Viszont bármely $h \in H$, ill. $a \in \mathcal{A}$ esetén $x - y \in \mathcal{A}$, így $x = y + a$. ■

4.1.3. feladat. Adott $d \in \mathbb{N}$, ill. $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén vizsgáljuk az

$$A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad Ax := \sum_{k=1}^{d} a_k x_k$$

lineáris operátort injektivitás, ill. szürjektivitás szempontjából!

Útm. Az A operátor $d > 1$ esetén nem injektív, hiszen

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \, \langle u, a \rangle = 0 \right\}$$

Ha $a \neq 0 \in \mathbb{R}^d$, akkor A szürjektív. ■

4.1.4. feladat. Vizsgáljuk a differenciáloperátort injektivitás, ill. szürjektivitás szempontjából!

Útm. Ha

$$A : \mathfrak{C}^1[a, b] \to \mathfrak{C}[a, b], \qquad Af := f',$$

akkor A szürjektív, hiszen bármely $g \in \mathfrak{C}[a, b]$ esetén az

$$f(x) := \int_a^x g(s) \, \mathrm{d}s \qquad (x \in [a, b])$$

függvényre $Af = g$. A nem injektív, ui.

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \varphi \in \mathfrak{C}^1[a, b] : \, \exists \, c \in \mathbb{R} : \, \varphi(x) \equiv c \right\} \neq \{\widehat{0}\}. \quad ■$$

4.1.5. feladat. Vizsgáljuk az

$$A : \mathfrak{C}[a, b] \to \mathfrak{C}^1[a, b], \qquad Af := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

operátort injektivitás, ill. szürjektivitás szempontjából!

Útm. Az A operátor triviálisan injektív, hiszen $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, továbbá nem szürjektív, ui.

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ f \in \mathfrak{C}^1[a, b] : \, f(a) = 0 \right\} \neq \mathfrak{C}^1[a, b]. \quad ■$$

4.1.6. feladat. Adott $p \in [1, +\infty]$ esetén vizsgáljuk a

$$B : l_p \to l_p, \quad Bu := (u_2, u_3, \ldots) \qquad \text{és a} \qquad J : l_p \to l_p, \quad Ju := (0, u_1, u_2, \ldots)$$

operátort injektivitás szempontjából!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $u = (u_n), v = (v_n) \in l_p$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$B(u + \alpha v) = (u_2 + \alpha v_3, u_3 + \alpha v_3, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots) + \alpha(v_2, v_3, \ldots) = Bu + \alpha Bv,$$

$B \in \mathfrak{L}(l_p, l_p)$. A B operátor szürjektív, hiszen tetszőleges $y = (y_n) \in l_p$ esetén az $x := (0, y_1, y_2, \ldots) \in l_p$ sorozatra

$$Bx = y.$$

Világos, hogy B nem injektív, hiszen

$$\mathcal{N}(B) = \{(c,0,0,\ldots) \in l_p : \ c \in \mathbb{K}\} \neq \{0\}.$$

2. lépés. Mivel bármely $u = (u_n), v = (v_n) \in l_p$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$J(u + \alpha v) = (0, u_1 + \alpha v_2, u_2 + \alpha v_2, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots) + \alpha(0, v_1, v_2, \ldots) = Ju + \alpha Jv,$$

ezért $J \in \mathfrak{L}(l_p, l_p)$. A J operátor nem szürjektív, hiszen

$$\mathcal{R}(J) = \{y = (y_n) \in l_p : \ y_1 = 0\} \neq l_p,$$

viszont injektív, hiszen

$$\mathcal{N}(J) = \{(0,0,0,\ldots) \in l_p\} = \{0\}. \quad \blacksquare$$

4.1.7. feladat. Lássuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ olyan lineáris funkcionálok, amelykre

$$\mathcal{N}(\varphi) = \mathcal{N}(\psi)$$

teljesül, akkor alkalmas $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ számmal fennáll a

$$\varphi = \lambda \psi$$

egyenlőség!

Útm. Ha nem állna fenn a feladatbeli egyenlőség, akkor lennének olyan $x, y \in \mathcal{N}(\varphi)$ lineárisan független vektorok, ill. $0 \neq \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda \neq \mu$ számok, amelyekre

$$\varphi(x) = \lambda \psi(x), \qquad \varphi(y) = \mu \psi(y)$$

teljesülne. φ linearitását felhasználva feltehető, hogy

$$\varphi(x) = \varphi(y) = 1$$

is teljesül. Innen pedig $\psi(\lambda x-\mu y)=0$ következik, ami

$$\varphi(\lambda x-\mu y)=\lambda-\mu\neq 0$$

miatt nem lehetséges. ■

4.1.8. feladat. Igazoljuk, hogy az

$$A: l_2\to l_2, \qquad Ax:=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)$$

operátor injektív, majd határozzuk meg az A^{-1} inverz operátort!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $A\in\mathfrak{L}(l_2)$, hiszen bármely $x=(x_n), y=(y_n)\in l_2$ és $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned}A(x+\alpha y) &= \left(x_1+\alpha y_1,\frac{x_2+\alpha y_2}{2},\ldots,\frac{x_n+\alpha y_n}{n},\ldots\right)=\\ &= \left(x_1,\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)+\alpha\left(y_1,\frac{y_2}{2},\ldots,\frac{y_n}{n},\ldots\right)=\\ &= Ax+\alpha Ay.\end{aligned}$$

2. lépés. Az A operátor injektív, hiszen A linearitása és a 4.1.1/2. gyakorló feladat következtében

$$x\in\mathcal{N}(A) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(x_1,\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_n}{n},\ldots\right)=(0,0,\ldots) \qquad\Longleftrightarrow\qquad x_n=0 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

3. lépés. Ha valamely $x,y\in l_2$ esetén $Ax=y$, akkor

$$x=A^{-1}y=(y_1,2y_2,\ldots,ny_n,\ldots)\,. \quad ■$$

4.1.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy a 4.1.2 példa után szereplő A operátor nem injektív, továbbá A_1, A_2, A_3, ill. $\kappa\neq 1$ esetén A_4 injektív operátorok, majd adjuk meg a megfelelő inverz operátort!

Útm.

4.1.3. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(a_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $p,q\in[1,+\infty]$, akkor az

$$A:\{(x_n)\in l_p:\ (a_nx_n)\in l_q\}\longrightarrow l_q, \qquad A(x_n):=(a_nx_n)$$

operátorra

$$A\in\mathfrak{L}(l_p\curvearrowright l_q)$$

teljesül! Mely (a_n) sorozat esetén lesz A injektív? Határozzuk meg injektív A esetén az A^{-1} inverz operátort!

Útm.

A 4.1.3. gyakorló feladatbeli A operátort az (a_n) sorozathoz tartozó, l_p-ből l_q-ba képező **diagonáloperátor**nak nevezzük. Ez az elnevezés onnan származik, hogy A egy, az (a_n) sorozat tagjaiból álló diagonálmátrixszal való szorzással azonosítható, pontosabban:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix} \qquad (x_n \in \mathcal{D}(A),\ n \in \mathbb{N}).$$

4.1.4. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (Lebesgue-)mérhető halmaz, $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ mérhető függvény és $p, q \in [1, +\infty]$, akkor az

$$A : \{f \in L^p(\Omega) :\ \varphi f \in L^q(\Omega)\} \longrightarrow L^q(\Omega), \qquad Af := \varphi f$$

operátorra

$$A \in \mathfrak{L}(L^p(\Omega) \curvearrowright L^q(\Omega))$$

teljesül! Mely φ függvény esetén lesz A injektív? Határozzuk meg injektív A esetén az A^{-1} inverzoperátort!

Útm.

A 4.1.4. gyakorló feladatbeli A operátort az $L^p(\Omega)$-ból $L^q(\Omega)$-ba képező, a φ **függvénnyel való szorzás operátorának** nevezzük.

4.1.5. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy injektív lineáris operátor inverze is lineáris operátor!

Útm.

Mivel az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvény értékei vektorok, ezért értelmezhető ezek összege és skalárral való szorzata.

4.1.3. definíció. Az $A, B \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorok és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén, ha

$$\emptyset \neq \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) =: \mathcal{D},$$

akkor

$$(A + B)x := Ax + Bx \quad (x \in \mathcal{D}) \qquad \text{és} \qquad (\alpha A)x := \alpha(Ax) \quad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy lineáris operátorok összege, skalárszorosa ismét lineáris operátor, sőt $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ a 4.1.3. definícióbeli két művelettel vektortér, amelynek nulleleme a zérusoperátor. $\mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ nem vektortér, hiszen $\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{X}$ esetén $A + (-A)$ nem a zérusoperátor (az ui. $\mathcal{X}$-en van értelmezve).

4.1.4. definíció. Adott $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ és $\mathcal{Z}$ azonos alaptestre vonatkozó lineáris terek, továbbá

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{Z}), \qquad \text{ill.} \qquad B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$$

lineáris operátorok, valamint

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{D}(B) : \; Bx \in \mathcal{D}(A)\} \neq \emptyset$$

esetén az A és B **operátorok szorzatának** nevezzük az

$$(AB)(x) := (A \circ B)x = A(Bx) \qquad (x \in \mathcal{D})$$

kompozíciót. Ha $n \in \mathbb{N}_0$ és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, akkor

$$A^0 := I \qquad \text{és} \qquad A^{n+1} := A^n A.$$

4.1.6. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy (alkalmasan megválasztott $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{Z}$ vektorterek esetén) az A, B, C, D lineáris operátorokra igazak az

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + B = B + A$;
2. $(AB)C = A(BC)$, $(A + B)C = AC + BC$;
3. $A(B + C) \supset AB + AC$

állítások!

Útm.

Általában nem igaz, hogy

$$AB + AC = A(B + C),$$

hiszen, ha pl.

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \mathcal{Z} := \mathbb{K}, \quad \mathcal{D}(B) := \mathcal{D}(C) := \mathbb{K},$$

$$Bx := x, \; Cx := -x \quad (x \in \mathbb{K}),$$

$$\mathcal{D}(A) := \{0\}, \quad A0 := 0,$$

akkor A, B, ill. C lineáris operátorok és

$$\mathcal{D}(AB + AC) = \{x \in \mathbb{K} : \; Bx = Cx = 0\} = \{0\},$$

de
$$\mathcal{D}(A(B+C)) = \{x \in \mathbb{K} : \ Bx + Cx = 0\} = \mathbb{K}.$$

4.1.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{X}$ lineáris térre
$$\mathcal{X} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V},$$
azaz $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ az $\mathcal{X}$ olyan alterei, amelyekre minden $x \in \mathcal{X}$ egyértelműen írható fel az
$$x = u + v$$
alakban, ahol $u \in \mathcal{U}$ és $v \in \mathcal{V}$, akkor az
$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Ax := u$$
operátor lineáris!

Útm. Világos, hogy $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén az
$$x = u + v, \quad y = w + z \qquad /u, w \in \mathcal{U}, \ v, z \in \mathcal{V}/$$
felbontásból
$$A(x + \alpha y) = A(u + v + \alpha w + \alpha z) = A(u + \alpha w + v + \alpha z) = u + \alpha w = Ax + \alpha Ay$$
következik. ■

Az így értelmezett A operátort az $\mathcal{U}$ altérre való és a $\mathcal{V}$ altér menti, vagy a $\mathcal{V}$ altérrel párhuzamos irányú **projekció**nak, **vetítő operátor**nak, vagy egyszerűen csak **vetítés**nek nevezzük. Világos, hogy az identitásoperátor, ill. a zérusoperátor projekció, továbbá, ha A projekció, akkor
$$A[\mathcal{X}] = \mathcal{R}(A) = \mathcal{U}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathcal{V} \qquad \text{és} \qquad A^2 = A \quad /A\ \textbf{idempotens}/,$$
hiszen
$$Au = u \qquad (u \in \mathcal{U})$$
miatt
$$\mathcal{U} \subset A[\mathcal{U}] \subset \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{U},$$
és
$$Av = 0 \qquad (v \in \mathcal{V})$$
miatt $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(A)$, ill.
$$Av \neq 0 \qquad (v \in \mathcal{V}^c)$$
következtében $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{V}$, továbbá A linearitása folytán
$$A^2x = A(Ax) = Au = A(u + 0) = Au + A0 = Au = u = Ax \qquad (x \in \mathcal{X})$$
teljesül.

4.1.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ lineáris tér, az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ lineáris operátor idempotens, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $\mathcal{N}(I-A) = \mathcal{R}(A)$ és $\mathcal{R}(I-A) = \mathcal{N}(A)$.
2. $\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, pontosabban bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$x = u + v, \; u \in \mathcal{N}(A), \; v \in \mathcal{R}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = (I-A)x, \; v = Ax.$$
3. Az A operátor projekció.
4. Az $I-A$ operátor projekció: az $\mathcal{N}(A)$ altérre való $\mathcal{R}(A)$-val párhuzamos vetítés.

Útm.

1. $\mathcal{N}(I-A) = \mathcal{R}(A)$, ui.
   - ha $x \in \mathcal{N}(I-A)$, akkor
   $$(I-A)x = 0, \qquad \text{azaz} \qquad x = Ix = Ax,$$
   így
   $$x \in \mathcal{R}(A);$$
   - ha $y \in \mathcal{R}(A)$, akkor alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén $y = Ax$, ezért
   $$Ay = A(Ax) = A^2x = Ax = y,$$
   ami azt jelenti, hogy
   $$(I-A)y = 0, \qquad \text{tehát} \qquad x \in \mathcal{N}(I-A).$$

   Következésképpen
   $$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(I-(I-A)) = \mathcal{R}(I-A).$$
2. Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén
   $$x = \underbrace{(x-Ax)}_{\in\mathcal{N}(A)} + \underbrace{Ax}_{\in\mathcal{R}(A)},$$
   ui.
   $$A(x-Ax) = Ax - A^2x = Ax - Ax = 0 \in \mathcal{X},$$
   továbbá ha
   $$x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A),$$
   akkor
   $$Ax = 0 \quad \text{és} \quad (I-A)x = 0 \qquad \text{miatt} \qquad x = Ax, \quad \text{azaz} \quad x = 0.$$
3. Az előbbiek alapján látható, hogy A nem más, mint az $A[\mathcal{X}]$ altérre való, $(I-A)[\mathcal{X}]$ menti projekció.
4. $I-A$ idempotens, ui.
   $$(I-A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A. \quad \blacksquare$$

Az $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ lineáris operátor tehát pontosan akkor projekció, ha idempotens.

4.1.4. példa. Ha valamely $0<a\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{X}:=\{f:[-a,a]\to\mathbb{K}:\ f\in\mathfrak{C}\},$$

akkor az

$$(Af)(x):=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)\qquad (f\in\mathcal{X},\ x\in[-a,a])$$

operátor projekció, hiszen bármely $f\in\mathcal{X}$, ill. $x\in[-a,a]$ esetén

$$\begin{aligned}(A^2f)(x) &= (A(Af))(x)=\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)+\frac{1}{2}\left(f(-x)+f(x)\right)\right\}=\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)=(Af)(x).\end{aligned}$$

Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A)=\{f\in\mathcal{X}:\ f \text{ páratlan}\}\qquad\text{és az}\qquad \mathcal{R}(A)=\{f\in\mathcal{X}:\ f\text{ páros}\}$$

alterekre

$$\mathcal{N}(A)\oplus\mathcal{R}(A)=\mathcal{X}$$

teljesül, hiszen

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)+\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)\qquad (x\in[-a,a]).$$

4.1.7. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X}:=L^2([0{,}1]\times[0{,}1]),$$

akkor az

$$(Af)(x,y):=\frac{1}{2}\left(f(x,y)-f(y,x)\right)\qquad (f\in\mathcal{X},\ (x,y)\in[0{,}1]\times[0{,}1])$$

operátor projekció!

Útm.

4.1.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ lineáris tér, $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ projekció, és

$$B := (A_1 - A_2)^2 = A_1 + A_2 - A_1A_2 - A_2A_1$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Bármely $k \in \{1{,}2\}$ esetén

$$A_kB = BA_k \qquad \text{és} \qquad A_k(I - A_1 - A_2)^2 = (I - A_1 - A_2)^2 A_k$$

   teljesül.

2. $(A_1 - A_2)^2 + (I - A_1 - A_2)^2 = I$, $(A_1A_2 - A_2A_1)^2 = (A_1 - A_2)^4 - (A_1 - A_2)^2 = B^2 - B$.

3. Ha

$$C_1 := A_2A_1 + (I - A_2)(I - A_1) \qquad \text{és} \qquad C_2 := A_1A_2 + (I - A_1)(I - A_2),$$

   akkor

$$C_1[\mathcal{R}(A_1)] \subset \mathcal{R}(A_2), \quad C_1[\mathcal{R}(I - A_1)] \subset \mathcal{R}(I - A_2),$$

$$C_2[\mathcal{R}(A_2)] \subset \mathcal{R}(A_1), \quad C_2[\mathcal{R}(I - A_2)] \subset \mathcal{R}(I - A_1),$$

   továbbá

$$C_kB = BC_k \quad (k \in \{1{,}2\}), \qquad \text{és} \qquad C_1C_2 = C_2C_1 = I - B.$$

Útm.

1. Mivel $A_1^2 = A_1$, ezért

$$A_1B = A_1(A_1 + A_2 - A_1A_2 - A_2A_1) = A_1 - A_1A_2A_1$$

   és

$$BA_1 = (A_1 + A_2 - A_1A - 2 - A_2A_1)A_1 = A_1 - A_1A_2A_1,$$

   azaz $A_1B = BA_1$. Hasonlóan látható be, hogy $A_1B = BA_2$, és beszorzással a második egyenlőség is.

2. Mivel

$$A_1^2 = A_1 \qquad \text{és} \qquad A_2^2 = A_2,$$

   ezért

$$\begin{aligned}(A_1 - A_2)^2 + (I - A_1 - A_2)^2 &= A_1 - A_1A_2 - A_2A_1 + A_2 + \\ &\quad + I - A_1 - A_2 - A_1 + A_1 + A_1A_2 - A_2 + A_2A_1 + A_2 = \\ &= I.\end{aligned}$$

   Hasonlóan látható be a második állítás is.

3. Világos, hogy bármely $k \in \{1{,}2\}$ esetén

$$A_kx = x \qquad \text{és} \qquad (I - A_k)x = 0 \qquad (x \in \mathcal{R}(A_k)),$$

ezért az értékkészletekre vonatkozó azonosságok könnyen beláthatók. Sőt (vö. 1.)

$$A_kB = BA_k \quad \Longrightarrow \quad C_kB = BC_k \qquad (k \in \{1,2\}).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} C_1C_2 &= (A_2A_1 + (I - A_2)(I - A_1))(A_1A_2 + (I - A_1)(I - A_2)) = \\ &= A_2A_1A_2 + (I - A_2)(I - A_1)(I - A_2) = \\ &= I - A_2 - A_1 + A_1A_2 + A_2A_1 = \\ &= I - B, \end{aligned}$$

ahonnan $C_2C_1 = I - B$ következik. ■

4.1.5. definíció. Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátort **véges rang**únak nevezünk, ha $\mathcal{R}(A)$ képtere véges dimenziós. Ha A véges rangú, akkor a

$$\dim(\mathcal{R}(A))$$

számot az A operátor **rang**jának nevezzük.

4.1.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátor esetén $\mathcal{X}$ vagy $\mathcal{Y}$ véges dimenziós, akkor A véges rangú!

4.1.12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ azonos alaptestre vonatkozó lineáris tér és

$$\dim(\mathcal{X}) < +\infty,$$

úgy $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ pontosan akkor izomorf, ha

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$, azaz van

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

bijekció, és valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $e_1, \ldots, e_n$ bázisa $\mathcal{X}$-nek, akkor az

$$f_k := Ae_k \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

vektorok nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, és bármely $y \in \mathcal{Y}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{X}$, hogy alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ számokkal

$$y = Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$$

teljesül, azaz $f_1, \ldots, f_n$ bázisa $\mathcal{Y}$-nak, így

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y}).$$

2. lépés. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y}) = n$$

és

$$e_1, \ldots, e_n, \qquad \text{ill.} \qquad f_1, \ldots, f_n$$

bázisa $\mathcal{X}$-nek, ill. $\mathcal{Y}$-nak, akkor tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ esetén az

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$$

operátor bijektív és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

4.1.6. definíció. A

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \times \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}), \qquad [A, B] := AB - BA,$$

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \times \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}), \qquad \{A, B\} := AB + BA$$

leképezéseket **kommutátor**nak (vagy **Lie-zárójel**nek), ill. **antikommutátor**nak (vagy **Dirac-Poisson-zárójel**nek) nevezzük.

4.1.2. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $A, B, C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor igazak az alábbi állítások!

- $[B, A] = -[A, B]$;
- $[A + \alpha B, C] = [A, C] + \alpha[B, C]$ és $[A, B + \alpha C] = [A, B] + \alpha[A, C]$;
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ (**Jacobi-azonosság**);
- $[A, BC] = [A, B]C + [A, B]C + B[A, C]$;
- $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$;
- $[A, B] + \{A, B\} = 2AB$.

4.1.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ operátorokra

$$[[A, B], A] = O$$

teljesül, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Ha $n = 1$, akkor az állítás triviális.

2. lépés. Ha
$$[[A, B], A] = O$$
és valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$$
teljesül, akkor A-val balról szorozva az
$$A^{n+1}B - ABA^n = nA^n(AB - BA)$$
egyenlőséghez jutunk. Mindkét oldalhoz az
$$A^n(AB - BA)$$
operátort adva azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad A^{n+1}B - ABA^n + A^n(AB - BA) = (n + 1)A^n(AB - BA).$$

Nem nehéz belátni, hogy a
$$[[A, B], A] = O$$
feltétel egyenes következménye a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló
$$A^n(AB - BA) = (AB - BA)A^n$$
egyenlőség. Így a $(*)$ egyenlőség nem más, mint
$$A^{n+1}B - ABA^n + (AB - BA)A^n = (n + 1)(AB - BA)A^n,$$
ahonnan
$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n + 1)A^n(AB - BA)$$
következik. ■

4.1.14. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ (lineáris) operátorok esetén
$$[A, B] = O,$$
azaz A és B **felcserélhető**, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az
$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$
egyenlőség (**binomiális tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha $n = 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} A^k B^{1-k} = IB + AI = A + B = (A+B)^1.$$

2. lépés. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

akkor

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)^n(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\right)(A+B) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k+1} = \\
&= \binom{n}{0} A^{n+1} I + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} A^k B^{n-k+1} + \binom{n}{n} I B^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0} A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^k B^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} B^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.1.15. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$, továbbá $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor, akkor

$$[x, y]_A := \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{X}} \qquad (x, y \in \mathcal{D}(A))$$

skaláris szorzat, ill.

$$\|x\|_A := \sqrt{[x, x]_A} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

olyan norma, amelyre

$$\|x\|_A \geq \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy bármely $x, y, z \in \mathcal{D}(A)$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

- $[x, y]_A \geq 0$ és $[x, x]_A = 0 \implies x = 0$, hiszen

$$[x, y]_A = \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax, Ayx \rangle_{\mathcal{X}} \geq 0 + 0 = 0$$

és

$$[x,x]_A = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \langle x,x\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax,Ax\rangle_{\mathcal{X}} = 0 \quad\Longleftrightarrow (x=0, \text{ és } Ax=0);$$

- $[\alpha x, y]_A = \alpha[x,y]_A$, hiszen

$$[\alpha x, y]_A = \langle \alpha x, y\rangle_{\mathcal{X}} + \langle A(\alpha x), Ay\rangle_{\mathcal{X}} = \alpha\langle x,y\rangle_{\mathcal{X}} + \alpha\langle Ax,Ay\rangle_{\mathcal{X}} = \alpha[x,y]_A;$$

- $[x+y,z]_A = [x,z]_A + [y,z]_A$, hiszen

$$\begin{aligned}[x+y,z]_A &= \langle x+y,z\rangle_{\mathcal{X}} + \langle A(x+y),Az\rangle_{\mathcal{X}} = \langle x+y,z\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax+Ay,Az\rangle_{\mathcal{X}} = \\ &= \langle x,y\rangle_{\mathcal{X}} + \langle x,z\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax,Az\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ay,Az\rangle_{\mathcal{X}} = [x,z]_A + [y,z]_A;\end{aligned}$$

- $[x,y]_A = \overline{[y,x]_A}$, hiszen

$$[x,y]_A = \langle x,y\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax,Ay\rangle_{\mathcal{X}} = \overline{\langle y,x\rangle_{\mathcal{X}}} + \overline{\langle Ay,Ax\rangle_{\mathcal{X}}} = \overline{\langle y,x\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ay,Ax\rangle_{\mathcal{X}}} = \overline{[y,x]_A}.$$

Az is világos, hogy bármely $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\|x\|_A^2 := [x,x]_A = \langle x,x\rangle_{\mathcal{X}} + \langle Ax,Ax\rangle_{\mathcal{X}} \geq \langle x,x\rangle_{\mathcal{X}} = \|x\|_{\mathcal{X}}^2. \quad\blacksquare$$

4.1.7. definíció. Az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátor **gráf**jának vagy **grafikon**jának nevezzük a

$$\Gamma(A) := \{(x,Ax) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y} : \; x \in \mathcal{D}(A)\}$$

halmazt.

4.1.16. feladat. Lássuk be, hogy ha $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris operátorok), akkor igazak az alábbi állítások!

1. $\Gamma(A)$ altere $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-nak.
2. $A \subset B$ pontosan akkor teljesül, ha $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$.
3. $\Gamma \subset \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ pontosan akkor gráfja valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris) operátornak, ha Γ olyan altere $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-nak, amelyre

$$(0,y) \in \Gamma \quad\Longrightarrow\quad y = 0$$

teljesül.
4. Ha Γ altere $\Gamma(A)$-nak, akkor alkalmas $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris) operátorra $\Gamma = \Gamma(A)$.

Útm.

1. Mivel A lineáris, így $\mathcal{D}(A)$ altér $\mathcal{X}$-ben (vö. 4.1.1. definíció), és bármely $u, v \in \mathcal{D}(A)$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$(u,Au) + \alpha(v,Av) = (u+\alpha v, Au + \alpha Av) = (u+\alpha v, A(u+\alpha v)).$$

2. Ha $A \subset B$ és valamely $u \in \mathcal{X}$ esetén $(u, Au) \in \Gamma(A)$, akkor
$$u \in \Gamma(A) \subset \Gamma(B) \qquad \text{és} \qquad Au = Bu.$$
Innen pedig
$$(u, Au) = (u, Bu) \quad (u \in \mathcal{D}(B), \qquad \text{tehát} \qquad \Gamma(A) \subset \Gamma(B)$$
következik. Ha viszont $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ és valamely $u \in \mathcal{X}$ esetén $u \in \mathcal{D}(A)$, akkor
$$(u, Au) \in \Gamma(B),$$
azaz $u \in \mathcal{D}(B)$ és $Bu = Au$, ahonnan $A \subset B$ következik.

3. Ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor az első állítás szerint $\Gamma(A)$ altere $X \times \mathcal{Y}$-nak, így
$$(0, y) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad y = A0 = 0.$$
Ha Γ adott tulajdonságú altere $X \times \mathcal{Y}$-nak, továbbá
$$\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{X} \mid \exists\, v \in \mathcal{Y} : \ (u, v) \in \Gamma\},$$
akkor bármely $(u, v_1), (u, v_2) \in \Gamma$ esetén
$$(u, v_2) - (u, v_2) = (0, v_1 - v_2) \in \Gamma,$$
és így $v_1 - v_2 = 0$, azaz $v_1 = v_2$. Tehát bármely $u \in \mathcal{D}(A)$ vektorhoz pontosan egy olyan $v \in \mathcal{Y}$ van, amelyre $(u, v) \in \Gamma$. Ezért az
$$Au := v \qquad ((u, v) \in \Gamma)$$
operátor a kívánt tulajdonságú, hiszen Γ altér, továbbá $\Gamma = \Gamma(A)$.

4. Ez az előző állítás közvetlen következménye. ■

4.1.3. házi feladat. Adott $\mathcal{X}$, ill. $\mathcal{Y}$ vektorterek esetén mutassuk meg, hogy

1. az
$$A(u, v) := (v, u), \quad B(u, v) := (v, -u) \qquad ((u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$
operátorok lineárisak és injektívek,
$$A^{-1}(v, u) = (u, v), \quad B^{-1}(v, u) = (-u, v) \qquad ((v, u) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X}),$$
továbbá
$$A^{-1}B = B^{-1}A$$
teljesül.

2. ha a $C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor injektív, akkor fenáll a
$$\Gamma(C^{-1}) = A[(\Gamma(C)]$$
egyenlőség!

4.1.8. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér, ill. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ lineáris operátor esetén azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathcal{X}$ altér **invariáns** (H az A invariáns altere), ha fennáll az

$$A[\mathcal{D}(A) \cap H] \subset H$$

tartalmazás.

Világos, hogy

$$\mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \{0\},$$

invariáns alterek, ezeket **triviális invariáns altereknek** nevezzük.

4.1.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ vektortér, ill. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, akkor

$$\mathcal{N}(A) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}(A)$$

invariáns alterek!

Útm.

1. lépés. Ha $x \in \mathcal{N}(A)$, akkor

$$Ax = 0 \in \mathcal{N}(A).$$

2. lépés. Ha $x \in \mathcal{R}(A)$, akkor – lévén, hogy $\mathcal{D}(A)$, ill. $\mathcal{R}(A)$ altér (vö. 4.1.1. definíció, ill. 4.1.1/1. feladat) –

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A) \neq \emptyset,$$

így

$$A[\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)] \subset \mathcal{R}(A). \quad \blacksquare$$

4.1.18. feladat. Lássuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ végtelen dimenziós vektortér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, akkor van A-nak nemtriviális invariáns altere!

Útm.

1. lépés. Ha $\mathcal{D}(A) = \{0\}$, akkor bármely $H \subset \mathcal{X}$ altér invariáns.

2. lépés. Ha $\mathcal{D}(A) \neq \{0\}$, és

$$0 \neq x \in \mathcal{D}(A),$$

akkor két esetet különböztetünk meg.

1. eset. Alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A^n x \notin \mathcal{D}(A).$$

Feltehető, hogy n a legkisebb ilyen index, azaz bármely $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ esetén

$$A^m x \in \mathcal{D}(A)$$

teljesül. Ha

$$H := \operatorname{span}(x, Ax, \ldots, A^n x),$$

akkor $\dim(H) \leq n+1$ következtében

$$\{0\} \neq H \neq \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad H \cap \mathcal{D}(A) \subset \operatorname{span}(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x).$$

Ez azt jelenti, hogy H invariáns altér.

2. eset. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A^n x \in \mathcal{D}(A).$$

Világos, hogy az

$$K := \operatorname{span}(A^n x : \ n \in \mathbb{N}_0),$$

altérre $K \subset \mathcal{D}(A)$. Ha

- $\dim(K) < +\infty$, akkor

$$\{0\} \neq K \neq \mathcal{X},$$

és K nyilvánvaóan invariáns altér.

- $\dim(K) = +\infty$, akkor

$$\operatorname{span}(A^n x : \ n \in \mathbb{N}_0)$$

lineárisan független vektorrendszer, ui. ellenkező esetben alkalmas

$$\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \qquad |\alpha_0| + \ldots |\alpha_n| \neq 0$$

együtthatókkal

$$(*) \qquad \sum_{l=0}^{n} \alpha_l A^l x = 0$$

teljesülne, ahonnan indukcióval azt kapjuk, hogy

$$A^{n+m} x \in \operatorname{span}(x, Ax, \ldots, A^n x) \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$K = \operatorname{span}(A^n x : \ n \in \mathbb{N}_0) = \operatorname{span}(x, Ax, \ldots, A^n x)$$

következne, ami nem lehetséges, hiszen K nem véges dimenziós. Legyen

$$\phi : K \to \mathbb{K}, \qquad \phi(u) := \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l,$$

ahol α_l az u vektor l-edik együtthatója az

$$(A^n x : \ n \in \mathbb{N}_0)$$

bázisban, továbbá $H := \mathcal{N}(\phi)$. Ekkor H olyan altere $\mathcal{X}$-nek, amelyre nyilvánvalóan

$$\{0\} \neq H \neq \mathcal{X}$$

teljesül. Továbbá

$$\phi(u) = \phi(Au) \qquad (u \in K)$$

következtében H invariáns altér. ■

4.2. Operátorok normája

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ és $\mathcal{Z}$ azonos alaptestre vonatkozó lineáris terek, az $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$, ill. $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$ normákkal, és olyan operátorokkal, ill. funkcionálokkal foglalkozunk, amelyek $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ egységgömbjét, vagy annak egy részét $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-beli korlátos halmazba képezik le.

4.2.1. definíció. Azt mondjuk, hogy az

$$A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

operátor **korlátos**, ha alkalmas $K \geq 0$ számmal

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

teljesül. Ebben az esetben K-t A egy **korlát**jának nevezzük.

4.2.1. példa.

1. Az identikus operátor és a zérusoperátor triviálisan korlátos.
2. A $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ és $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ normált terek esetén az

$$A : \mathfrak{C}[a,b] \to \mathbb{K}, \qquad Af := \int_a^b f$$

operátor korlátos, hiszen bármely $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$|Af| = \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy adott operátor korlátossága lényegében a normától függ. A 4.2.1/1. példában hallgatólagosan feltételeztük, hogy az

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}$$

egyenlőségen túl még $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ is teljesül. Az utóbbi hiányában nem áll fenn korlátosság, hiszen pl. az

$$A : \mathfrak{C}([-1,1], \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}([-1,1], \mathbb{R}), \qquad Au := u$$

operátor nem korlátos, ha az értelmezési tartományt az $\|\cdot\|_1$-val, a képteret pedig a $\|\cdot\|_\infty$-val látjuk el, ui. $n \in \mathbb{N}$ és

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [-1,-1/n)), \\ n\,(1+nx) & (x \in [-1/n,0]), \\ n\,(1-nx) & (x \in [0,1/n]), \\ 0 & (x \in (1/n,1]) \end{cases} \qquad (x \in [-1,1])$$

esetén

$$\|\varphi_n\|_1 = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \|A\varphi_n\|_\infty = n.$$

Ezért a normált terek közötti leképezésekre sok esetben az

$$A : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$$

jelölés (is) használatos.

4.2.2. példa. A

$$(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|_\infty), \qquad \text{ill. a} \qquad (\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$$

normált tér esetén az

$$Af := f' \qquad (f \in \mathfrak{C}^1[a,b])$$

operátor nem korlátos, ui. ha

$$\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nt) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|\varphi_n\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|A\varphi_n\|_\infty = \max\left\{|\sqrt{n}\cos(nt)| \in \mathbb{R} : \ t \in [0,1]\right\} = \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

4.2.1. feladat. Mutassuk meg, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, ill. a $(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^1[a,b]})$ normált tér (vö. 1.3.115. feladat) esetén a 4.1.5. feladatbeli (integrál)operátor korlátos!

Útm. Mivel bármely $x \in [a,b]$ esetén

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_a^x \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = (x-a)\|f\|_\infty \le (b-a)\|f\|_\infty,$$

így

$$\begin{aligned} \|Af\|_{\mathfrak{C}^1[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]} |(Af)(x)| + \max_{x\in[a,b]} |(Af)'(x)| = \\ &= \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \le (b-a+1)\|f\|_\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az

$$A : (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (l_\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{l_\infty}),$$

$$(Au)(n) := \widehat{u}(n) := \int_0^1 f(x)\exp(-2\pi\imath n x)\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

operátor korlátos!

Útm.

4.2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_*)$ és $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**})$ normált tér, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) $\|\cdot\|_* \sim \|\cdot\|_{**}$, azaz alkalmas $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ számok esetén

$$\lambda\|x\|_* \leq \|x\|_{**} \leq \mu\|x\|_* \qquad (x \in \mathcal{X})$$

(vö. 1.3.14. definíció).

(2) az

$$I : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_*) \to (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**}) \qquad \text{és az} \qquad I : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**}) \to (\mathcal{X}, \|\cdot\|_*)$$

operátor korlátos.

Útm. Az

$$I : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_*) \longrightarrow (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**})$$

korlátossága azzal egyenértékű, hogy alkalmas $m \in (0, +\infty)$ esetén

$$\|x\|_{**} \leq m\|x\|_* \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Az

$$I : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \|\cdot\|_*)$$

korlátossága pedig azzal egyenértékű, hogy alkalmas $M \in (0, +\infty)$ esetén

$$\|x\|_* \leq M\|x\|_{**} \qquad (x \in \mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

4.2.3. feladat. Az

$$\mathcal{X} := L^p[0,1] \quad (p \in (1, +\infty)), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{L^p}$$

normált tér esetén igazoljuk, hogy

$$Au(x) := \int_0^{1/2} xu(s)\,\mathrm{d}s - \int_{1/2}^1 x^2u(s)\,\mathrm{d}s \qquad (u \in \mathcal{X};\ x \in [0,1])$$

korlátos, lineáris operátor!

Útm.

1. lépés. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, hiszen $u, v \in L^p[0,1]$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} A(u+\alpha v) &= \int_0^{1/2} x(u(s)+\alpha v(s))\,\mathrm{d}s - \int_{1/2}^1 x^2(u(s)+\alpha v(s))\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_0^{1/2} xu(s)\,\mathrm{d}s - \int_{1/2}^1 x^2 u(s)\,\mathrm{d}s + \alpha\left(\int_0^{1/2} xv(s)\,\mathrm{d}s - \int_{1/2}^1 x^2 v(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= Au + \alpha Av. \end{aligned}$$

2. lépés. $A \in L(\mathcal{X})$, ui. ha

$$g(x) := x + x^2 \qquad (x \in [0,1]),$$

ill. $u \in L^p[0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 \left| x\int_0^{1/2} u(s)\,\mathrm{d}s - x^2\int_{1/2}^1 u(s)\,\mathrm{d}s\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left((x+x^2)\int_0^1 |u(s)|\,\mathrm{d}s\right)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left((x+x^2)\cdot\left[\int_0^1 |u(s)|^p\,\mathrm{d}s\right]^{1/p}\cdot\left[\int_0^1 1\,\mathrm{d}s\right]^{1/p}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 (x+x^2)^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\cdot\|u\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}\cdot\|u\|_{L^p}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.4. feladat. Igaz-e, hogy bármely injektív, korlátos, lineáris operátor inverze is korlátos?

Útm. A 4.1.8. feladatbeli A operátor inverze nem korlátos, hiszen ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|e_n\|_{l_2} = 1 \quad \text{és} \quad \|A^{-1}e_n\|_{l_2} = \|ne_n\|_{l_2} = n \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad \blacksquare$$

4.2.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (L^2[0,\pi], \|\cdot\|_{L^2}),$$

akkor az

$$A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Au := -u'' \qquad (u \in \mathfrak{C}^2[0,\pi]: \; u(0) = u(\pi) = 0)$$

operátor nem korlátos!

Útm. Ha

$$\varphi_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(t) := \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi/2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|A\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\pi n^2 \sin^2(nt)\,\mathrm{d}t} = n^2\|\varphi_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

4.2.6. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, ill. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor esetén mutassuk meg, hogy ha van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy a

$$H := \{x \in \mathcal{X} : \ \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq N\}$$

halmaz belseje nem üres:

$$\mathrm{int}\,(H) \neq \emptyset,$$

akkor $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, azaz A korlátos!

Útm. Ha $\mathrm{int}\,(H) \neq \emptyset$, akkor alkalmas $h \in H$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén

$$\{x \in \mathcal{X} : \ \|x - h\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon\} \subset H$$

teljesül. Ha $x \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $\|x\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$, akkor

$$\|x + h - h\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$$

következtében $x + h \in H$, azaz

$$\|A(x + h)\|_{\mathcal{Y}} \leq N,$$

és így

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A(x + h)\|_{\mathcal{Y}} + \|Ah\|_{\mathcal{Y}} \leq N + \|Ah\|_{\mathcal{Y}}.$$

Ha most $0 \neq x \in \mathcal{X}$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_{\mathcal{Y}} &= \left\|A\left(\frac{2\varepsilon\|x\|_{\mathcal{X}}}{2\varepsilon\|x\|_{\mathcal{X}}}x\right)\right\|_{\mathcal{Y}} = \frac{2}{\varepsilon}\left\|A\left(\underbrace{\frac{\varepsilon x}{2\|x\|_{\mathcal{X}}}}_{\|\cdot\|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon}(N + \|Ah\|_{\mathcal{Y}}) \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} =: C \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Így, ha

$$K := \max\{\|Ah\|_{\mathcal{X}}, C\},$$

akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}},$$

azaz A korlátos. $\blacksquare$

4.2.2. definíció. Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris operátor) esetén az

$$\|A\| := |||A||| := \inf \{K \in [0, +\infty] : \ \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}} \ (x \in \mathcal{D}(A))\}$$

kibővített valós számot ($\inf \emptyset := +\infty$) az A operátor **normájának** nevezzük.

Világos, hogy valamely korlátos, lineáris A operátor esetén A normája egyben korlátja is A-nak, azaz

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

A továbbiakban korlátos, lineráris operátorok halmazának jelölésére az

$$L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) : \ A \text{ korlátos}\},$$

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ A \text{ korlátos}\}$$

szimbólumokat használjuk, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et $L(\mathcal{X})$-szel rövidítjük:

$$L(\mathcal{X}) := L(\mathcal{X}, \mathcal{X}).$$

4.2.3. példa. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor az I identikus operátorra

$$I \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|I\| = 1$$

teljesül.

4.2.2. gyakorló feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ olyan (lineáris) operátor, amelyre $\mathcal{D}(A) \neq \{0\}$, akkor igaz a

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\frac{\|Au\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq u \in \mathcal{D}(A)\right\} &= \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ u \in \mathcal{D}(A), \ \|u\|_{\mathcal{X}} = 1\} = \\
&= \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ u \in \mathcal{D}(A), \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1\} = \\
&= \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ u \in \mathcal{D}(A), \ \|u\|_{\mathcal{X}} < 1\}
\end{aligned}$$

egyenlőséglánc, és A pontosan akkor korlátos, ha ezen négy érték közül bármelyik (és így mindegyik) valós szám, továbbá egyenlő $\|A\|$-val!

Útm.

4.2.4. példa. Ha $\mathfrak{C}[a,b]$-t, ill. $\mathfrak{C}^1[a,b]$-t a $\|\cdot\|_\infty$-val látjuk el, akkor a 4.1.5. feladatbeli A (integrál)operátor korlátos és normájára

$$\|A\| = b - a$$

teljesül, hiszen bármely $u \in \mathfrak{C}[a,b]$ esetén

$$\begin{aligned} \|Au\|_\infty &= \max\left\{\left|\int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R}:\ x \in [a,b]\right\} \leq \\ &\leq \max\{x \cdot \|u\|_\infty \in \mathbb{R}:\ x \in [a,b]\} = (b-a)\|u\|_\infty, \end{aligned}$$

így $\|A\| \leq b - a$, továbbá ha

$$a(x) := 1 \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$\|a\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad \|A\| = \sup\{\|Au\|_\infty \in \mathbb{R}:\ \|u\|_\infty \leq 1\} \geq \|Aa\|_\infty = b - a.$$

4.2.5. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1]$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Af(x) := f(x^2) \quad (x \in [0,1])$$

operátor korlátos, hiszen a

$$\lambda(x) := x^2 \qquad (x \in [0,1])$$

leképezés bijekció, így bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \max\{|f(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [0,1]\} = \max\left\{|f(x^2)| \in \mathbb{R}:\ x \in [0,1]\right\} = \|Af\|_{\mathcal{X}}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|A\| = 1.$$

4.2.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 < a \in \mathbb{R}$, akkor az

$$(Af)(x) := xf(x) \qquad (f \in L^2[0,a],\ x \in [0,a])$$

operátor korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm. Bármely $f \in L^2[0,a]$ esetén

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \int_0^a x^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq a^2 \int_0^a |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = a^2\|f\|_{L^2}^2.$$

Ez azt jelenti, hogy A korlátos és normájára $\|A\| \leq a$ teljesül. Ha most

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & \left(a - \frac{1}{n} \leq x \leq a\right), \\ 0 & (\text{különben}), \end{cases}$$

akkor

$$\|\varphi_n\|_{L^2} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|A\varphi_n\|_{L^2}^2 = \int_{a-1/n}^{a} x^2 n \, dx = \frac{1}{3}\left\{a^3 n - \left(a - \frac{1}{n}\right)^3 n\right\} \longrightarrow a^2 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\|A\| \geq a$, ahonnan $\|A\| = a$ következik. ■

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, akkor valamely $\phi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ funkcionál esetében a $\mathbb{K}$ képteret az $|\cdot|$ normával látjuk el, így

$$\|\phi\| = \sup\left\{|\phi(u)| \in \mathbb{R} : \ u \in \mathcal{X}, \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1\right\}.$$

4.2.8. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}[a,b], \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{K}, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := |\cdot|, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi \in \mathfrak{C}[a,b]$$

esetén az

$$A_\varphi : \mathfrak{C}[a,b] \to \mathbb{K}, \qquad A_\varphi f := \int_a^b f\varphi$$

operátor (funkcionál) lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $A_\varphi \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, hiszen bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A_\varphi(f + \alpha g) = \int_a^b (f + \alpha g)\varphi = \int_a^b f\varphi + \alpha \int_a^b g\varphi = A_\varphi f + \alpha A_\varphi g.$$

2. lépés. Ha $f \in \mathcal{X}$, akkor

$$|A_\varphi f| = \left|\int_a^b f\varphi\right| \leq \int_a^b |f| \cdot |\varphi| \leq \int_a^b \|f\|_\infty \cdot |\varphi| = \left(\int_a^b |\varphi|\right) \|f\|_\infty,$$

így $A_\varphi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$.

3. lépés. Látható, hogy

$$\|A_\varphi\| = \int_a^b |\varphi|,$$

hiszen egyrészt a fentiek miatt

$$\|A_\varphi\| \leq \int_a^b |\varphi|,$$

másrészt pedig tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$f_\varepsilon := \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi| + \varepsilon}$$

függvényre

$$f_\varepsilon \in \mathfrak{C}[a,b], \qquad \|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1,$$

valamint

$$|A_\varphi f_\varepsilon| = \int_a^b \frac{|\varphi|^2}{|\varphi| + \varepsilon} \geq \int_a^b \frac{|\varphi|^2 - \varepsilon^2}{|\varphi| + \varepsilon} = \int_a^b |\varphi| - (b-a)\varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \|A_\varphi\| &= \sup\{|A_\varphi f| \in \mathbb{R} : \; \|f\|_\infty \leq 1\} \geq \\ &\geq \sup\{|A_\varphi f_\varepsilon| \in \mathbb{R} : |\; \varepsilon > 0\} \geq \\ &\geq \int_a^b |\varphi|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.3. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{X} := \mathfrak{c}_0, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{K}, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := |\cdot|$$

esetén az

$$Au := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \qquad (u = (u_n) \in \mathcal{X})$$

operátor (funkcionál) lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

4.2.9. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér,

$$\phi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \qquad \|\phi\| \neq 0,$$

továbbá

$$M_\phi := \{x \in \mathcal{X} : \; |\phi(x)| = 1\} = a + \mathcal{N}(\phi),$$

ahol $|\phi(a)| = 1$, akkor

$$\|\phi\| = \frac{1}{\rho(0, M_\phi)}$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy

$$
\begin{aligned}
\|\phi\| &= \sup\left\{\frac{|\phi(x)|}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \in \mathbb{R}:\ 0 \neq x \in \mathcal{X}\right\} = \\
&= \frac{1}{\inf\left\{\frac{\|x\|_{\mathcal{X}}}{|\phi(x)|} \in \mathbb{R}:\ 0 \neq x \in \mathcal{X}\right\}} = \frac{1}{\inf\{\|x\| \in \mathbb{R}:\ |\phi(x)| = 1\}} = \\
&= \frac{1}{\rho(0, M_\phi)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4.2.10. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $0 < a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[-a, a]$, akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén a 4.1.4. példabeli A operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, hiszen bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$
\begin{aligned}
(A(f + \alpha g))(x) &= \frac{1}{2}\left((f + \alpha g)(x) + (f + \alpha g)(-x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x) + \alpha g(x) + f(-x) + \alpha g(-x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \alpha\frac{1}{2}\left(g(x) + g(-x)\right) = Af + \alpha Ag.
\end{aligned}
$$

2. lépés. Ha $f \in \mathcal{X}$, akkor

$$
\begin{aligned}
\|Af\|_\infty &= \frac{\sup\{|f(x) + f(-x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [-a, a]\}}{2} \leq \\
&\leq \frac{\sup\{|f(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [-a, a]\} + \sup\{|f(-x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [-a, a]\}}{2} = \\
&= \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R}:\ x \in [-a, a]\} = \|f\|_\infty,
\end{aligned}
$$

így $A \in L(\mathcal{X})$.

3. lépés. Az is könnyen belátható, hogy $\|A\| = 1$, ui. az iméntiek miatt $\|A\| \leq 1$, továbbá a

$$
\varphi(x) := 1 \qquad (x \in [-a, a])
$$

függvényre $A\varphi = \varphi$, és

$$
1 = \|\varphi\|_\infty = \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|. \quad \blacksquare
$$

4.2.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy $\mathcal{X} := l_2$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{l_2}$ esetén az

$$Ax := y \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{X}),$$

$$y := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ x_n & (n \in \mathbb{N} : \text{páros}), \\ 4x_n & (n \in \mathbb{N} : \text{páratlan}) \end{cases} \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{X})$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

4.2.5. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1], \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{R}, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := |\cdot|$$

esetén az

$$Af := f(0) \qquad (f \in \mathfrak{C}[0,1])$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

4.2.11. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$K : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

folytonos,

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad \mathcal{Y} := \mathfrak{C}([c,d],\mathbb{R}), \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty,$$

akkor az

$$Au := \int_a^b K(\cdot, y)u(y)\,\mathrm{d}y \qquad (u \in \mathcal{X})$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} A(u+\alpha v)(x) &= \int_a^b K(x,y)(u+\alpha v)(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y + \alpha\int_a^b K(x,y)v(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= (Au)(x)+\alpha(Av)(x) = \\ &= (Au+\alpha Av)(x) \quad (x\in[c,d]), \end{aligned}$$

ezért $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

2. lépés. $A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$ és $x \in [c,d]$ esetén

$$\begin{aligned} |Au(x)| &= \left|\int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_a^b |K(x,y)|\cdot|u(y)|\,\mathrm{d}y \leq \\ &\leq \int_a^b |K(x,y)|\cdot\|u\|_\infty\,\mathrm{d}y = \|u\|_\infty\cdot\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \quad (x\in[c,d]), \end{aligned}$$

így

$$\|Au\|_\infty \leq \sup\left\{\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}:\ x\in[c,d]\right\}\cdot\|u\|_\infty =: M\cdot\|u\|_\infty.$$

3. lépés. $\|A\| = M$, hiszen az eddigiekből

$$\|A\| \leq M,$$

másrészt ha

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} -1 & (-\infty < x \leq 1/n), \\ nx & (-1/n < x < 1/n), \\ 1 & (1/n \leq x < +\infty) \end{cases} \qquad (n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}),$$

akkor az

$$u_{n,x}(y) := \varphi_n(K(x,y)) \quad ((x,y)\in[a,b]\times[c,d],\ n\in\mathbb{N})$$

függvénysorozatra

$$u_{n,x}\in\mathfrak{C}[c,d], \qquad \|u_{n,x}\|_\infty \leq 1 \qquad (x\in[a,b],\ n\in\mathbb{N}),$$

továbbá tetszőleges

$$(x,y)\in[a,b]\times[c,d] \qquad \text{és} \qquad n\in\mathbb{N}$$

esetén

$$0 \leq K(x,y)u_{n,x}(y) \begin{cases} = |K(x,y)| & (|K(x,y)| \geq 1/n), \\ \leq |K(x,y)| & (\text{egyébként}), \end{cases}$$

így

$$Au_{n,x}(x) = \int_a^b K(x,y)u_{n,x}(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y - \frac{b-a}{n},$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{\|Au\|_\infty \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 1\} \geq \\ &\geq \sup\{\|Au_{n,x}\|_\infty \in \mathbb{R} : x \in [a,b], n \in \mathbb{N}\} \geq \\ &\geq \sup\left\{\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\right\} = M\end{aligned}$$

következik. ■

4.2.6. példa. Ha a 4.2.11. feladatban a K **magfüggvény**

$$K(x,y) := \frac{1}{\mathrm{ch}^2(xy)} \qquad (x,y \in [0,2])$$

alakú, akkor $x = 0$ esetén

$$\int_0^2 |K(0,y)|\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2(0)}\,\mathrm{d}y = \int_0^2 1\,\mathrm{d}y = 2.$$

Így, ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_0^2 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2(xy)}\,\mathrm{d}y \leq \int_0^2 1\,\mathrm{d}y = 2 \qquad /\mathrm{ch}\,(t) \geq 1 \; (t \in \mathbb{R})/\,,$$

azaz

$$\|A\| = \sup\left\{\int_0^2 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : x,y \in [0,2]\right\} = 2.$$

4.2.7. példa. Ha a 4.2.11. feladatban a K **magfüggvény**

$$K(x,y) := \begin{cases} 0 & (x<y), \\ 1 & (x \geq y) \end{cases} \qquad (x,y \in [a,b])$$

alakú, akkor

$$\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = \int_a^x 1\,\mathrm{d}y = x-a.$$

Így

$$\|A\| = \sup\left\{\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\right\} = b-a.$$

4.2.8. példa. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

(**Dirichlet-mag**), akkor az

$$S_n : (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \qquad S_n u := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y) D_n(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

(trigonometrikus) **Fourier-részletösszeg-operátor** normájára D_n periodicitása miatt

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi}\sup\left\{\int_0^{2\pi} |D_n(x-y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} :\ x \in [0,2\pi]\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

teljesül, hiszen tetszőleges $x \in [0,2\pi]$, ill. $u \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén

$$(S_n u)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x,y) u(y)\,\mathrm{d}y,$$

ahol

$$K_n(x,y) := D_n(x-y) \qquad (x, y \in [0,2\pi];\ n \in \mathbb{N}_0).$$

4.2.9. példa. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$F_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

(**Fejér-mag**), akkor a

$$\sigma_n : (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \qquad \sigma_n u := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y) F_n(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

Fejér-féle operátor normájára F_n periodicitása miatt

$$\|\sigma_n\| = \frac{1}{\pi}\sup\left\{\int_0^{2\pi} |F_n(x-y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} :\ x \in [0,2\pi]\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |F_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

teljesül, hiszen tetszőleges $x \in [0,2\pi]$, ill. $u \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén

$$(\sigma_n u)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x,y) u(y)\,\mathrm{d}y,$$

ahol

$$K_n(x,y) := F_n(x-y) \qquad (x, y \in [0,2\pi];\ n \in \mathbb{N}_0).$$

4.2.12. feladat. Igazoljuk, hogy az A_n Fourier-részletösszeg-operátor normája $\ln(n)$ nagyságrendű:

$$\|S_n\| = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + \mathcal{O}(1) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol $\mathcal{O}(1)$ (**Landau-szimbólum**) valamely korlátos sorozat n-edig tagját jelöli!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$D_n(t) = \frac{\sin(nt)}{t} + \varphi(n,t) \qquad (n \in \mathbb{N},\ t \in (0,\pi]),$$

ahol φ korlátos, azaz alkalmas $K > 0$ számra

$$|\varphi(n,t)| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N},\ t \in (0,\pi])$$

teljesül. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & (t \neq 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})), \\[2ex] n + \dfrac{1}{2} & (t = 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})), \end{cases}$$

hiszen ha $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor triviálisan

$$D_n(t) = n + \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ill. $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}))$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) D_n(t) &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right\} = \\ &= \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right\} = \\ &= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right), \end{aligned}$$

ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $t \in (0,\pi]$ esetén

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sin(nt)\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(nt) + \frac{1}{2}\sin(nt) = \\ &= \left\{\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}\right\}\sin(nt) + \frac{1}{2}\sin(nt) + \frac{t}{2}\cos(nt). \end{aligned}$$

Így azt kell megmutatni, hogy alkalmas $K > 0$ esetén fennáll az

$$\left|\left\{\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{t}\right\}\sin(nt) + \frac{t}{2}\cos(nt)\right| < K \qquad (t \in (0,\pi],\ n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenség. Mivel $\sin$ és $\cos$ korlátos függvény, ezért már csak azt kell megmutatni, hogy

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{2}{t}\in(0,\pi],$$

azaz az

$$f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\qquad f(s):=\mathrm{ctg}(s)-\frac{1}{s}$$

függvény korlátos. Ehhez pedig f folytonossága miatt a

$$\lim_{s\to 0}\left(\mathrm{ctg}(s)-\frac{1}{s}\right)\in\mathbb{R}$$

határérték-relációnak kell teljesülnie. Ez a Bernoulli-L'Hospital-szabály (vö. [19]) alkalmazásával könnyen belátható, hiszen

$$\begin{aligned}\mathrm{ctg}(s)-\frac{1}{s} &= \frac{s-\mathrm{tg}\,(s)}{s\mathrm{tg}\,(s)}\sim\frac{1-(1+\mathrm{tg}^2(s))}{\mathrm{tg}\,(s)+s(1+\mathrm{tg}^2(s))}=-\frac{1}{\frac{s}{\mathrm{tg}^2(s)}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,(s)}+s}=\\ &= -\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{tg}\,(s)}\cdot\frac{s}{\sin(s)}\cdot\cos(s)+\frac{1}{\mathrm{tg}\,(s)}+s}\longrightarrow 0\quad(s\to 0).\end{aligned}$$

2. lépés. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén D_n páros és 2π-periodikus, ezért

$$\begin{aligned}\|S_n\| &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(nt)}{t}\right|\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)=\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t+\mathcal{O}(1)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin(nu)}{u+\frac{k\pi}{n}}\,\mathrm{d}u+\mathcal{O}(1)=\\ &= \frac{2}{\pi}\sin(nu)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}\,\mathrm{d}u+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin(nu)}{u}\,\mathrm{d}u+\mathcal{O}(1)=\\ &= \frac{2}{\pi}\sin(nu)\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}\,\mathrm{d}u+\mathcal{O}(1),\end{aligned}$$

hiszen bármely $u\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]$ esetén

$$\sin(nu)\in[0,nu]\,,$$

azaz

$$0\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin(nu)}{u}\,\mathrm{d}u\leq\frac{2}{\pi}n\frac{\pi}{n}=2.$$

3. lépés. Ha valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$u\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]\qquad\text{és}\qquad k\in[1,n]\cap\mathbb{Z},$$

akkor

$$\ln(n)=\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

és

$$\ln(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\geq\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1};$$

így egyrészt

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leq 1-\frac{1}{n}+\ln(n),$$

másrészt pedig

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}\geq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n}-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\leq\frac{1}{n}-1+\ln(n),$$

azaz

$$\frac{1}{n}-1\leq\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}-\ln(n)\leq 1-\frac{1}{n}\qquad\left(u\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right],\,n\in\mathbb{N}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\left(\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}-\ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat korlátos:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+\frac{k\pi}{n}}=\ln(n)+\mathcal{O}(1)\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

Azt kaptuk tehát, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\|S_n\|=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{\pi}\cdot\{\ln(n)+\mathcal{O}(1)\}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin(nu)\,\mathrm{d}u+\mathcal{O}(1)=\frac{4}{\pi^2}\ln(n)+\mathcal{O}(1).\quad\blacksquare$$

4.2.13. feladat. Igazoljuk, hogy az A_n Fejér-féle operátor normájára

$$\|\sigma_n\|=1\qquad(n\in\mathbb{N}_0),$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Belátjuk, hogy bármely $n\in\mathbb{N}_0$, ill. $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$F_n(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{n+1}\left(\dfrac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 & (t\neq 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})),\\[2ex] \dfrac{n+1}{2} & (t=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})),\end{cases}$$

ahonnan

$$F_n\geq 0\qquad(n\in\mathbb{N}_0)$$

következik. Ha

$$t=2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z}),$$

akkor (vö. 4.2.12. feladat)

$$\sum_{k=0}^{n} D_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ha pedig

$$t \neq 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

akkor a

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt)-\cos((k+1)t)) = \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos((n+1)t)}{\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = \\
&= \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

2. lépés. Az iménti eredmény következményeként tehát

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |F_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi} D_k(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{l=0}^{n}\cos(lt)\right)\mathrm{d}t = \pi \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.2.6. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{L^2}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az

$$A_\alpha u := u(\cdot - \alpha) \qquad (u \in \mathcal{X})$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

4.2.7. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $\emptyset \neq S \subset \mathcal{X}$ véges ONR, akkor az

$$Au := \sum_{y \in S}\langle u, y\rangle y \qquad (u \in \mathcal{X})$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

4.2.8. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{\infty},$$

akkor az

$$(Af)(x) := f(0) + (f(1) - f(0))x \qquad (f \in \mathcal{X},\ x \in [0,1])$$

operátor lineáris és korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

A 4.2.8. gyakorló feladatban az

$$(Af)(0) = f(0), \qquad (Af)(1) = f(1)$$

egyenlőségek miatt Af nem más, mint az f függvényt a $0,1$ pontokban interpoláló, legfeljebb elsőfokú polinom.

4.2.9. gyakorló feladat. Lássuk be, hogy bármely $1 \leq p \leq +\infty$ esetén a 4.1.6. feladatbeli B, ill. J (lineáris) operátor korlátos és teljesül a

$$\|J\| = \|B\| = 1$$

egyenlőség!

Útm.

4.2.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R})$, akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, ill. az

$$(Af)(x) := x\int_0^1 f \qquad (f \in \mathcal{X},\ x \in [0,1])$$

operátor esetén $A \in L(\mathcal{X})$, majd számítsuk ki $\|A\|$-t a

$$\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_2 \qquad \text{és a} \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\infty}$$

esetben!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}(A(f+\alpha g))(x) &= x\int_0^1 (f+\alpha g) = x\int_0^1 f + x\alpha\int_0^1 g = x\int_0^1 f + x\int_0^1 \alpha g = \\ &= (Af)(x) + (\alpha Ag)(x) = (Af + \alpha Ag)(x) \qquad (x \in [0,1]),\end{aligned}$$

ezért $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$.

2. lépés. Ha $f \in \mathcal{X}$, akkor

1. $$\|Af\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(x\int_0^1 f\right)^2 \mathrm{d}x} = \left|\int_0^1 f\right| \sqrt{\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\int_0^1 f\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f^2}\sqrt{\int_0^1 1\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|_2,$$

2. $$\|Af\|_\infty = \max\left\{\left|x\int_0^1 f\right| \in \mathbb{R}:\ x \in [0,1]\right\} = \left|\int_0^1 f\right| \leq \int_0^1 |f| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \max\{|f(x) \in \mathbb{R}:\ x \in [0,1]\} = \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

így $p = 2$ esetén
$$\|Af\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|_2,$$
ill. $p = +\infty$ esetén
$$\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$
ahonnan $A \in L(\mathcal{X})$ és
$$\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$
ill. $\|A\| \leq 1$ következik.

3. lépés. Ha
$$\varphi(x) := 1 \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor
$$\varphi \in \mathcal{X}, \qquad \|\varphi\|_p = 1 \quad (p \in \{2; +\infty\})$$
és
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t} = \|A\varphi\|_2 \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_2 = \|A\|,$$
ill.
$$1 = \sup\left\{\left|t\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right| \in \mathbb{R} : t \in [0,1]\right\} = \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|. \quad \blacksquare$$

4.2.15. feladat. Az
$$(L^1[0,1], \|\cdot\|_{L^1}), \qquad (\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$$
normált terek, ill.
$$A : L^1[0,1] \to \mathfrak{c}_0, \qquad (Au)_n := \int_0^1 u(s)s^n\,\mathrm{d}s \quad (n \in \mathbb{N})$$
operátor esetén mutassuk meg, hogy $A \in L(L^1[0,1], \mathfrak{c}_0)$, majd számítsuk ki $\|A\|$-t!

Útm.

1. lépés. Ha $u, v \in L^1[0,1]$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} A(u+\alpha v) &= \left(\int_0^1 (u(s)+\alpha v(s))s^n \,\mathrm{d}s\right)_{n\in\mathbb{N}} = \\ &= \left(\int_0^1 u(s)s^n \,\mathrm{d}s\right)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha\left(\int_0^1 v(s)s^n \,\mathrm{d}s\right)_{n\in\mathbb{N}} = \\ &= Au + \alpha Av, \end{aligned}$$

így $A \in \mathfrak{L}(L^1[0,1], \mathfrak{c}_0)$.

2. lépés. Ha $u \in L^1[0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} \|Au\|_\infty &= \sup\left\{\left|\int_0^1 u(s)s^n \,\mathrm{d}s\right| \in \mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\} \leq \\ &\leq \left|\sup\left\{\int_0^1 |u(s)|\, 1^n \,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}\right| = \\ &= \|u\|_{L^1}, \end{aligned}$$

így $A \in L(L^1[0,1], \mathfrak{c}_0)$.

3. lépés. Ha

$$v(x) := 1 \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$v \in L^1[0,1] \qquad \text{és} \qquad \|v\|_{L^1} = 1,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Av\|_\infty \in \mathbb{R}:\ \|u\|_{L^1} = 1\} \geq \|Av\|_\infty = \\ &= \sup\left\{\int_0^1 s^n \,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\frac{1}{n+1} \in \mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\} = \\ &= 1, \end{aligned}$$

így $\|A\| = 1$. ■

4.2.16. feladat. Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ normált tér, ill. az

$$Au := \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)u_n\right) \qquad (u \in \mathcal{X})$$

operátor esetén mutassuk meg, hogy $A \in L(\mathcal{X})$, majd számítsuk ki $\|A\|$-t!

Útm.

1. lépés. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui.

1. ha $u, v \in l_1$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor
$$\begin{aligned} A(u+\alpha v) &= \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)(u_n+\alpha v_n)\right) = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)u_n\right) + \alpha\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)v_n\right) = \\ &= Au + \alpha Av, \end{aligned}$$
2. minden $u \in l_1$ esetén
$$\|Au\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}|u_n| < \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < +\infty, \quad \text{így} \quad Au \in l_1.$$

2. lépés. Mivel bármely $u \in l_1$ esetén
$$\|Au\|_{l_1} \leq 1 \cdot \|u\|_{l_1},$$
ezért
$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| \leq 1.$$
Ha
$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}},$$
akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|e_n\|_{l_1} = 1$ és
$$\frac{n-1}{n} = \left\| \left(\overset{1}{\smile}{0}, \ldots, 0, \overset{\overset{n}{\smile}}{\frac{n-1}{n}}, 0, \ldots \right) \right\|_{l_1} = \|Ae_n\|_{l_1} \leq \|A\| \cdot \|e_n\|_{l_1} = \|A\|,$$
így $1 \leq \|A\|$, ahonnan $\|A\| = 1$ következik. ■

4.2.17. feladat. Adott $c = (c_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozat esetén tekintsük az
$$A_c u := (c_n u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \qquad (u = (u_n) \in l_2)$$
operátort!

1. Mutassuk meg, hogy A_c lineáris!
2. Mely feltételek fennállása esetén igaz az $A_c \in \mathfrak{L}(l_2, l_2)$ állítás?
3. Milyen esetben lesz $A_c \in L(l_2, l_2)$, és mennyi ekkor A_c normája?

Útm.

1. $A_c \in \mathfrak{L}(l_2, \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$, ui. bármely $u, v \in l_2$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$A_c(u+\alpha v) = (c_n(u_n+\alpha v_n)) = (c_n u_n) + \alpha(c_n v_n) = A_c u + \alpha A_c v.$$
2. Világos, hogy
$$A_c u \in l_2 \quad (u \in l_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n u_n|^2 < +\infty.$$

Ez teljesül pl. ha (c_n) korlátos, ui. ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|c_nu_n|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2|u_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}[\sup\{|c_n|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\}]^2\cdot|u_n|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\|(c_n)\|_\infty^2|u_n|^2 = \|(c_n)\|_\infty^2\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 < +\infty.\end{aligned}$$

3. Tehát, ha $(c_n)\in l_2$, akkor

$$\|A_cu\|_{l_2}^2 \leq \|(c_n)\|_\infty^2\cdot\|u\|_{l_2}^2, \qquad \text{azaz} \qquad A_c\in L(l_2,l_2) \quad \text{és} \quad \|A_c\|\leq\|(c_n)\|_\infty.$$

Ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor

$$e_n\in l_2:\quad \|e_n\|_{l_2}=1 \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

így

$$|c_n| = |A_ce_n| = \|A_ce_n\|_{l_2} \leq \|A_c\|\cdot\|e_n\|_{l_2} = \|A_c\| \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

ezért

$$\|(c_n)\|_\infty \leq \|A_c\|,$$

ahonnan

$$\|A_c\| = \|(c_n)\|_\infty$$

következik. ■

Ha az iménti feladatban (c_n) nem korlátos, azaz $(c_n)\notin l_\infty$, akkor A_c sem korlátos, ui.

$$\|(c_n)\|_\infty = \sup\{|c_n|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\} = +\infty,$$

azaz van olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre

$$|c_{\nu_n}| \geq n \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

továbbá ha $u\in l_2$ olyan, hogy

$$u_{\nu_n} = \frac{1}{n} \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad u_k = 0 \quad (k\in\mathbb{N}:\ k\neq\nu_n),$$

akkor

$$\|A_cu\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_{\nu_n}|^2\frac{1}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2} = +\infty.$$

4.2.18. feladat. Adott $c = (c_n) \in l_\infty$ sorozat, ill. $p \in [1,+\infty]$ esetén mutassuk meg, hogy az

$$A_c u := (c_n u_n) \in l_p \qquad (u = (u_n) \in l_p)$$

(lineáris) operátor korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

1. lépés. Ha $p \in [1,+\infty)$, akkor bármely $x = (x_n) \in l_p$ esetén

$$\|Ax\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_n x_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sup\{|c_k|^p \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{N}\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = \|c\|_{l_\infty} \cdot \|x\|_{l_p},$$

ha pedig $p = +\infty$, akkor

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{l_\infty} &= \sup\{|c_n x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|c_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \cdot \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \|c\|_{l_\infty} \cdot \|x\|_{l_\infty}, \end{aligned}$$

azaz A korlátos és $\|A\| \leq \|c\|_{l_\infty}$.

2. lépés. Ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $p \in [1,+\infty]$ esetén

$$\|e_n\|_{l_p} = 1 \quad \text{és} \quad Ae_n = (0,\ldots,0,c_n,0,0,\ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\left\{\|Ax\|_{l_p} \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{l_p} \leq 1\right\} \geq \sup\left\{\|Ae_n\|_{l_p} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\} = \\ &= \sup\{|c_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \|c\|_{l_\infty} \end{aligned}$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy bármely $p \in [1,+\infty]$ esetén

$$\|A\| = \|c\|_{l_\infty}. \quad \blacksquare$$

4.2.19. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, $\varphi \in \mathcal{X}$, és az

$$A_\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad A_\varphi u := \varphi u$$

operátor esetén $A_\varphi \in L(\mathcal{X})$ teljesül, majd számítsuk ki a normáját (vö. 4.2.7. feladat)!

Útm.

1. $A_\varphi \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui. bármely $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$A_\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u + \alpha v) = \varphi u + \alpha\varphi v = A_\varphi u + \alpha A_\varphi v.$$

2. $A_\varphi \in L(\mathcal{X})$, ui. ha $u \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned}\|A_\varphi u\|_\infty &= \|\varphi u\|_\infty = \max\{|\varphi(x)u(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\} \leq \\ &\leq \max\{|\varphi(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\} \cdot \max\{|u(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\} = \\ &= \|\varphi\|_\infty \cdot \|u\|_\infty.\end{aligned}$$

3. $\|A_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, ui. egyrészt a fentiekből

$$\|A_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$$

következik, másrészt az

$$a(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$

függvényre $\|a\|_\infty = 1$, így

$$\|A\| = \sup\{\|A_\varphi u\|_\infty \in \mathbb{R} : \; \|u\|_\infty \leq 1\} \geq \|A_\varphi a\|_\infty = \|\varphi\|_\infty. \quad \blacksquare$$

4.2.20. feladat. Az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér, $p \in [1, +\infty]$, $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér és $\varphi \in L^\infty$ függvény esetén mutassuk meg, hogy az

$$A_\varphi u := \varphi u \qquad (u \in L^p)\,,$$

operátorra $A_\varphi \in L(L^p, L^p)$ teljesül, majd számítsuk ki a normáját!

Útm. A $p = +\infty$ esetben triviálisan teljesül, hogy $\varphi u \in L^\infty$. Ha viszont $p \in [1, +\infty)$, akkor

$$|\varphi| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \qquad (\mu\text{-m.m.})$$

miatt tetszőleges $u \in L^p$ esetén

$$|\varphi u|^p = |\varphi|^p \cdot |u|^p \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot |u|^p \qquad (\mu\text{-m.m.}),$$

azaz

$$\|\varphi u\|_{L^p}^p = \int |\varphi u|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|_{L^\infty}^p \cdot \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu = \|\varphi\|_{L^\infty}^p \cdot \|u\|_{L^p}^p < +\infty.$$

Továbbá:

1. $A_\varphi \in \mathfrak{L}(L^p, L^p)$, ui. bármely $u, v \in L^p$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$A_\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u + \alpha v) = \varphi u + \alpha \varphi v = A_\varphi u + \alpha A_\varphi v.$$

2. $A_\varphi \in L(L^p, L^p)$, ui. ha $u \in L^p$, akkor

$$\|A_\varphi u\|_p = \|\varphi u\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \|u\|_p.$$

3. $\|A_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$, ui. egyrészt a fentiekből

$$\|A_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$$

következik, másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha

$$\mathcal{X}_\varepsilon := \{x \in \mathcal{X} : \ \varphi(x) \geq \|\varphi\|_{L^\infty} - \varepsilon\},$$

akkor $\mu(\mathcal{X}_\varepsilon) > 0$, így ha $u \in L^p$ olyan, hogy $u \neq 0$ és a tartója[1] $\mathcal{X}_\varepsilon$-beli, akkor

$$\|A_\varphi u\|_{L^p} \geq (\|\varphi\|_{L^\infty} - \varepsilon) \cdot \|u\|_{L^p}. \quad \blacksquare$$

Ha az iménti feladatban a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

μ-mérhető függvényre $\varphi \notin L^\infty$, azaz bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mu\left(\{x \in \mathcal{X} : \ |\varphi(x)| \geq \alpha\}\right) > 0,$$

akkor A_φ nem korlátos.

4.2.21. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X}) := (\mathfrak{C}_\mathbb{R}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, és az

$$Au(x) := xu(x), \quad Bu(x) := x\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t \qquad (u \in \mathcal{X},\, x \in [0,1])$$

operátorok esetén $A, B \in L(\mathcal{X})$ teljesül, majd számítsuk ki az AB, ill. a BA operátotok normáját!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $A, B \in L(\mathcal{X})$ és

$$\|A\| = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \|B\| = 1$$

(vö. 4.2.19. és 4.2.14. feladatok), továbbá $AB, BA \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$, ill. $x \in [0,1]$ esetén

$$ABu(x) = x^2\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{és} \qquad BAu(x) = x\int_0^1 tu(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. lépés. $AB, BA \in L(\mathcal{X})$, ui.

$$\begin{aligned}\|ABu\|_\infty &= \max\left\{\left|x^2\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = \\ &= \left|\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |u(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|u\|_\infty = \\ &= \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

[1] Az $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény **tartó**jának nevezzük az $\overline{\{x \in \mathcal{X} : \ u(x) \neq 0\}}$ halmazt.

és

$$\begin{aligned}\|BAu\|_\infty &= \max\left\{\left|x\int_0^1 tu(t)\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R}:\ x\in[0{,}1]\right\} = \\ &= \left|\int_0^1 tu(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t|u(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right)\|u\|_\infty = \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\infty.\end{aligned}$$

3. lépés. Az AB, ill. a BA operátorok normájára

$$\|AB\| = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \|BA\| = \frac{1}{2}$$

teljesül, hiszen egyrészt a fentiekből

$$\|AB\| \leq 1, \qquad \text{ill.} \qquad \|BA\| \leq = \frac{1}{2}$$

következik, másrészt pedig az

$$a(x) := 1 \qquad (x\in[0{,}1])$$

függvényre $\|a\|_\infty = 1$, így

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sup\{\|ABu\|_\infty \in \mathbb{R}:\ \|u\|_\infty \leq 1\} \geq \|ABa\|_\infty = \\ &= \max\left\{\left|x^2\int_0^1 1\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R}:\ x\in[0{,}1]\right\} = 1,\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}\|BA\| &= \sup\{\|BABu\|_\infty \in \mathbb{R}:\ \|u\|_\infty \leq 1\} \geq \|BAa\|_\infty = \\ &= \max\left\{\left|x\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R}:\ x\in[0{,}1]\right\} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4.2.22. feladat. Az

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$$

normált tér és az $n\in\mathbb{N}_0$ index esetén értelmezzük a Q_n operátort (funkcionált) a következőképpen:

$$Q_n f := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (f\in\mathcal{X}),$$

ahol

$$a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b \quad (\textbf{alappontok}), \qquad A_0,\ldots,A_n\in\mathbb{R} \quad (\textbf{súlyok}),$$

(n-edfokú **kvadratúra-operátor**). Mutassuk meg, hogy

$$Q_n \in L(\mathcal{X},\mathbb{R}) \qquad /\|\cdot\|_{\mathbb{R}} := |\cdot|/\,,$$

majd számítsuk ki $\|Q_n\|$-t!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy Q_n lineáris, továbbá $Q_n \in L(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, ui. ha $f \in \mathcal{X}$, akkor

$$|Q_n f| = \left|\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |A_k| \cdot |f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n} |A_k| \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \sum_{k=0}^{n} |A_k|,$$

sőt

$$\|Q_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} |A_k|.$$

2. lépés. Ha $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ és

$$g(t) := \begin{cases} \mathrm{sgn}\,(A_0) & (t \in [a, A_0)), \\ \\ \dfrac{\mathrm{sgn}\,(A_{k+1}) - \mathrm{sgn}\,(A_k)}{x_{k+1} - x_k}(t - x_k) + \mathrm{sgn}\,(A_k) & (t \in [x_k, x_{k+1})), \\ \\ \mathrm{sgn}\,(A_n) & (t \in [x_n, b]) \end{cases}$$

($g(x_k) = \mathrm{sgn}\,(A_k)$, köztük lineáris, két szélén állandó), akkor

$$g \in \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \|g\|_\infty = 1,$$

ill.

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \left|\sum_{k=0}^{n} A_k \mathrm{sgn}\,(A_k)\right| = |Q_n g| \leq \|Q_n\| \cdot \|g\|_\infty = \|Q_n\|. \quad \blacksquare$$

A

$$Q : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad Q(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Kepler-féle kvadratúra-operátor normájára $\|Q\| = b - a$ teljesül (vö. pl. [10]).

4.2.23. feladat. Az

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$$

normált tér és az $n \in \mathbb{N}$ index esetén értelmezzük az L_n operátort a következőképpen:

$$L_n f := \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k \qquad (f \in \mathcal{X}),$$

ahol minden $k \in \{0,\ldots,n\}$ esetén l_k az

$$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$$

pontrendszerhez tartozó **Lagrange-féle alappolinom** (vö. 2.1.1. feladat)! Mutassuk meg, hogy $L_n \in L(\mathcal{X})$, majd számítsuk ki $\|L_n\|$-t! Igaz-e, hogy L_n projekció?

Útm.

1. lépés. Világos, hogy L_n lineáris, továbbá

$$\begin{aligned}
\|L_n f\|_\infty &= \left\|\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k\right\|_\infty = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(t)\right| \in \mathbb{R}:\ t\in[a,b]\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |f(x_k)|\cdot|l_k(t)| \in \mathbb{R}:\ t\in[a,b]\right\} \leq \\
&\leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \|f\|_\infty\cdot|l_k(t)| \in \mathbb{R}:\ t\in[a,b]\right\} = \\
&= \|f\|_\infty\cdot\left\|\sum_{k=0}^{n}|l_k|\right\|_\infty \qquad (f\in\mathcal{X}).
\end{aligned}$$

Így

$$L_n\in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|L_n\|\leq\left\|\sum_{k=0}^{n}|l_k|\right\|_\infty .$$

2. lépés. Ha

$$\varphi(t) := \sum_{k=0}^{n}|l_k(t)| \qquad (t\in[a,b]),$$

akkor $\varphi\in\mathfrak{C}[a,b]$, ezért van olyan $\xi\in[a,b]$, hogy

$$\varphi(\xi)=\|\varphi\|_\infty.$$

Így a

$$g(x_k) := \operatorname{sgn}(l_k(\xi)),$$

köztük lineáris ($[a,x_0]$-on és $[x_n,b]$-n állandó) függvénnyel

$$\|g\|_\infty = 1$$

és

$$|(L_n g)(\xi)| = \left|\sum_{k=0}^{n} g(x_k) l_k(\xi)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sgn}(l_k(\xi)) l_k(\xi)\right| = \sum_{k=0}^{n}|l_k(\xi)| = \left\|\sum_{k=0}^{n}|l_k|\right\|_\infty ,$$

ill.

$$|(L_n g)(\xi)| \leq \|L_n g\|_\infty \leq \|L_n\|\cdot\|g\|_\infty = \|L_n\|.$$

3. lépés. Világos, hogy ha p legfeljebb n-edfokú polinom: $p\in\Pi_n$, akkor $L_n p = p$, hiszen

$$(L_n p)(x_j) - p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} p(x_k) l_k(x_j) - p(x_j) = p(x_j) - p(x_j) = 0 \qquad (j\in\{0,\ldots,n\}),$$

azaz az

$$L_n p - p \in \Pi_n$$

polinomnak $n+1$ gyöke van, így $L_n p - p = 0$. Ha tehát valamely $f \in \mathcal{X}$ esetén $p := L_n f$, akkor

$$L_n^2 f = L_n(L_n f) = L_n p = p = L_n f. \quad \blacksquare$$

4.2.24. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, akkor fenáll a

$$\lim\left(\rho\left(f,\Pi_n\right)\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(\|f - L_n f\|_\infty) = 0$$

imlikáció!

Útm. Mivel bármely $p \in \Pi_n$, akkor $L_n p = p$ (vö. 4.2.23. feladat útmutatója: 3. **lépés**), ezért bármely $p \in \Pi_n$ polinomra

$$\begin{aligned}
\|f - L_n f\|_\infty &\leq \|f - p\|_\infty + \|p - L_n f\|_\infty = \|f - p\|_\infty + \|L_n p - L_n f\|_\infty = \\
&= \|f - p\|_\infty + \|L_n(p - f)\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|L_n\| \cdot \|p - f\|_\infty = \\
&= (1 + \|L_n\|) \cdot \|f - p\|_\infty,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\|f - L_n f\|_\infty \leq (1 + \|L_n\|) \cdot \rho\left(f, \Pi_n\right)$$

következik. $\blacksquare$

4.2.25. feladat. Adott

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$$

normált tér és

$$Af(t) := \int_0^1 e^{tx} f(x)\, dx \quad (f \in \mathcal{X},\, t \in [0,1])$$

operátor esetében igazoljuk, hogy $A \in L(\mathcal{X})$, majd számítsuk ki A normáját!

Útm.

1. lépés. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui. bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén esetén

$$\begin{aligned}
A(f + \alpha g)(t) &= \int_0^1 e^{tx}(f + \alpha g)(x)\, dx = \int_0^1 e^{tx} f(x)\, dx + \alpha \int_0^1 e^{tx} g(x)\, dx = \\
&= Af(t) + \alpha A g(t) \quad (t \in [0,1]).
\end{aligned}$$

2. lépés. Mivel bármely $t \in [0,1]$ esetén

$$|Af(t)| = \left|\int_0^1 e^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 e^{tx}|f(x)|\, \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 e^{tx}\, \mathrm{d}x,$$

és

$$\int_0^1 e^{tx}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & (t \neq 0), \\ 1 & (t = 0), \end{cases}$$

ezért

$$|Af(t)| \leq \|f\|_\infty \cdot \max_{t\in[0,1]} \left\{\frac{e^t-1}{t}, 1\right\} = \|f\|_\infty \cdot (e-1),$$

ahonnan

$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| \leq e-1$$

következik.

3. lépés. Ha

$$\varphi(t) := 1 \qquad (t \in [0,1]),$$

akkor

$$\|\varphi\|_\infty = 1$$

és

$$e - 1 = \left|\int_0^1 e^t \, \mathrm{d}t\right| = |A\varphi(1)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |A\varphi(t)| = \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|,$$

tehát

$$\|A\| = e - 1. \qquad \blacksquare$$

4.2.10. gyakorló feladat. Adott

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,\pi],\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$$

normált tér és

$$Af(t) := \int_0^\pi \cos(tx) f(x)\, dx \qquad (f \in \mathcal{X},\ t \in [0,\pi])$$

operátor esetében igazoljuk, hogy $A \in L(\mathcal{X})$, majd számítsuk ki A normáját!

Útm.

4.2.26. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}) \quad \text{euklideszi terek,}$$

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad B \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \quad \text{(lineáris) operátorok,}$$

$$\alpha := \sup\left\{|\langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}}| \in \mathbb{R} :\ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1,\ \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1\right\},$$

ill.

$$\beta := \sup\left\{|\langle u, Bv\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} :\ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1,\ \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1\right\},$$

úgy

$$A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \iff \alpha < +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad B \in L(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \iff \beta < +\infty,$$

továbbá korlátos esetben

$$\|A\| = \alpha, \qquad \text{ill.} \qquad \|B\| = \beta$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha A korlátos, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$|\langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}}| \leq \|Au\|_{\mathcal{Y}} \cdot \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \cdot \|v\|_{\mathcal{Y}} \qquad (u \in \mathcal{X},\ v \in \mathcal{Y}),$$

ezért minden $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1$, $\|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1$ esetén

$$|\langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}}| \leq \|A\|,$$

így

$$\alpha \leq \|A\| < +\infty.$$

Ha $\alpha < +\infty$, akkor ismét a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy tetszőleges

$$u \in \mathcal{X}, \quad \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1 \qquad \text{és} \qquad Au \neq 0 \in \mathcal{Y}$$

esetén

$$\alpha \geq \left|\left\langle Au, \frac{Au}{\|Au\|_{\mathcal{Y}}}\right\rangle\right| = \|Au\|_{\mathcal{Y}} \cdot \frac{\|Au\|_{\mathcal{Y}}}{\|Au\|_{\mathcal{Y}}} = \|Au\|_{\mathcal{Y}}$$

(világos, hogy $Au = 0 \in \mathcal{Y}$ esetén $\alpha \geq \|Au\|_{\mathcal{Y}}$), azaz

$$\alpha \geq \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1\} = \|A\|.$$

2. lépés. Az előző érveléshez hasonlóan megy. ■

Az iménti tételben megfogalmazott állítás azt jelenti, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \quad \text{euklideszi tér}, \qquad \|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle, \qquad A \in L(\mathcal{X}),$$

akkor

$$|||A||| = \sup\left\{\frac{|\langle Ax, y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \in \mathbb{R} : \ x, y \in \mathcal{X}\backslash\{0\}\right\}.$$

4.2.27. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$ és az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ operátorra

$$\mathcal{X} \ni \widehat{0} \leq u \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{0} = \widehat{0} \leq Au \qquad (u \in \mathcal{X})$$

teljesül, akkor A korlátos, továbbá igaz a

$$\|A\| = \|A\widehat{1}\|$$

egyenlőség!

Útm. A norma értelmezése alapján

$$-\|u\|\widehat{1} \leq u \leq \|u\|\widehat{1} \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

így a feltétel következtében

$$-\|u\|A\widehat{1} \leq Au \leq \|u\|A\widehat{1} \qquad (u \in \mathcal{X})$$

adódik. Innen

$$|Au| \leq \|u\| A\widehat{1}, \qquad \text{azaz} \qquad \|Au\| \leq \|u\| \cdot \|A\widehat{1}\| \qquad (u \in \mathcal{X})$$

következik. Így A korlátos és

$$\|A\| \leq \|A\widehat{1}\|.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség is igaz, ui. $\|\widehat{1}\| = 1$, és

$$\|A\widehat{1}\| \leq \|A\| \cdot \|\widehat{1}\| = \|A\|. \quad \blacksquare$$

4.2.28. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$$

normált tér, $n \in \mathbb{N}$, akkor a 2.3.1. definícióban bevezetett B_n (**Bernstein-féle approximációs**) operátorra

$$B_n \in L(\mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad \|B_n\| = 1$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy $B_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ és

$$\mathcal{X} \ni \widehat{0} \leq u \quad \Longrightarrow \quad B_n\widehat{0} = \widehat{0} \leq B_n u \qquad (u \in \mathcal{X}).$$

Ha

$$h_0(x) := 1 \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor az előző feladat következtében B_n korlátos és

$$\|B_n\| = \|B_n\widehat{1}\|_\infty = \|B_n h_0\|_\infty = \|h_0\|_\infty = 1. \quad \blacksquare$$

4.2.29. feladat. Lássuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, akkor

$$\phi : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \qquad \phi(x) := \sum_{k=1}^{d} a_k x_k$$

korlátos, lineáris funkcionál, majd számítsuk ki normáját!

Útm. Ha $x \in \mathbb{R}^d$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$|\phi(x)| = |\langle a, x\rangle| \leq \|a\|_2 \cdot \|x\|_2,$$

azaz

$$\phi \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \|\phi\| \leq \|a\|_2.$$

Világos, hogy $\|\phi\| \geq \|a\|_2$, ui. ez $a = 0 \in \mathbb{R}^d$ esetén triviális, ha pedig $a \neq 0$, akkor

$$\phi\left(\frac{a}{\|a\|_2}\right) = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|_2}\right\rangle = \frac{\langle a, a\rangle}{\|a\|_2} = \|a\|_2,$$

ahonnan

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\|_2 \leq 1\} \geq \left|\phi\left(\frac{a}{\|a\|_2}\right)\right| = \|a\|_2$$

következik. ■

Nem nehéz belátni, hogy ha $\mathbb{R}^d$-t a $\|\cdot\|_2$-val látjuk el, akkor bármely $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ funkcionál a 4.2.29 feladatbeli alakú, azaz alkamas $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=1}^{d} a_k x_k \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d)$$

teljesül. Valóban, ha $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ és

$$e_1, \ldots, e_d$$

jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor bármely $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{d} f(e_k) x_k,$$

így az

$$a := (f(e_1), \ldots, f(e_d)) \in \mathbb{R}^d$$

vektor megfelelő választás.

4.2.30. feladat. Lássuk be, hogy ha $a = (a_n) \in l_2(\mathbb{R})$, akkor

$$\phi : (l_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{l_2}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \qquad \phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

korlátos, lineáris funkcionál, majd számítsuk ki normáját!

Útm. Ha $x \in l_2(\mathbb{R})$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$|\phi(x)| = |\langle a, x\rangle_{l_2}| \leq \|a\|_{l_2} \cdot \|x\|_{l_2},$$

azaz

$$\phi \in L(l_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \|\phi\| \leq \|a\|_{l_2}.$$

Világos, hogy $\|\phi\| \geq \|a\|_{l_2}$, ui. ez $a = 0 \in l_2(\mathbb{R})$ esetén triviális, ha pedig $a \neq 0$, akkor

$$\phi\left(\frac{a}{\|a\|_{l_2}}\right) = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|_{l_2}}\right\rangle_{l_2} = \frac{\langle a, a\rangle_{l_2}}{\|a\|_{l_2}} = \|a\|_{l_2},$$

ahonnan

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in l_2(\mathbb{R}), \ \|x\|_{l_2} \leq 1\} \geq \left|\phi\left(\frac{a}{\|a\|_{l_2}}\right)\right| = \|a\|_{l_2}$$

következik. ■

Nem nehéz belátni, hogy az $(l_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ normált tér esetén bármely $f \in \mathfrak{L}(l_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ funkcionál a 4.2.30 feladatbeli alakú, azaz alkamas $a = (a_n) \in l_2$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \qquad (x = (x_n) \in l_2(\mathbb{R}))$$

teljesül. Valóban, ha $f \in \mathfrak{L}(_2, \mathbb{R})$ és

$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ Schauder-bázis l_2-ben (vö. 1.3.10. házi feladat), így bármely $x = = (x_n) \in l_2$ esetén

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

továbbá

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) x_n,$$

így az

$$a_n := f(e_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat megfelelő választás.

4.2.31. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$ és $a \in \mathcal{X}$, akkor

$$f_a(u) := \langle u, a \rangle \qquad (u \in X)$$

korlátos, lineáris funkcionál, majd számítsuk ki $|||f_a|||$-t!

Útm.

1. lépés. Mivel tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$f_a(x + \alpha y) = \langle x + \alpha y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \alpha \langle y, a \rangle = f_a(x) + \alpha f_a(y),$$

ezért $f_a \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$.

2. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$|f_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\|,$$

azaz

$$f_a \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad \text{és} \qquad |||f_a||| \leq \|a\|.$$

3. lépés. Világos, hogy $|||f_a||| \geq \|a\|$, ui. ez $a = 0 \in \mathcal{X}$ esetén triviális, ha pedig $a \neq 0$, akkor

$$f_a\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, a \right\rangle = \frac{\langle a, a \rangle}{\|a\|} = \|a\|,$$

ahonnan

$$|||f_a||| = \sup\{|f_a(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}, \ \|x\| \leq 1\} \geq \left| f_a\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \right| = \|a\|$$

következik. ∎

4.2.32. feladat. Igazoljuk, hogy

$$Ax := x_1 - 3x_2 \qquad (x = (x_n) \in l_2)$$

korlátos lineáris funkcionál, majd számítsuk ki a normáját!

Útm. Mivel bármely $x = (x_n) \in l_2$ esetén

$$Ax = \langle x, a \rangle_{l_2},$$

ahol

$$a := (1, -3,0,0, \ldots) \in l_2,$$

ezért A korlátos és

$$|||A||| = \|a\|_{l_2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}. \quad \blacksquare$$

4.2.33. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ és $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$ véges dimenziós (altér), akkor $L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, azaz bármely, véges dimenziós normált téren értelmezett lineáris operátor korlátos!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy

$$\|x\|_* := \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

norma /a $\mathcal{D}(A)$ altéren/. Valóban, bármely $x, y \in \mathcal{D}(A)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

- ha $\|x\|_* = 0$, akkor
$$\|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = 0,$$
így $x = 0 \in \mathcal{X}$,

- $\|\alpha x\|_* = \|\alpha x\|_{\mathcal{X}} + \|\alpha Ax\|_{\mathcal{Y}} = |\alpha| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} + |\alpha| \cdot \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = |\alpha| \cdot \|x\|_*,$

- $\|x+y\|_* = \|x+y\|_{\mathcal{X}} + \|A(x+y)\|_{\mathcal{Y}} = \|x+y\|_{\mathcal{X}} + \|Ax + Ay\|_{\mathcal{Y}} \leq$

  $\leq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} + \|Ay\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_* + \|y\|_*.$

2. lépés. Mivel a $\mathcal{D}(A)$ altér véges dimenziós, továbbá véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens (vö. 1.3.68. feladat), ezért van olyan $K > 0$, hogy minden $x \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_* \leq K\|x\|_{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

4.2.34. feladat. Igazoljuk, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér pontosan akkor véges dimenziós, ha minden $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ (lineáris) funkcionálra $f \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Az előző állítást **nem felhasználva** tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázisa $\mathcal{X}$-nek, és $f \in \mathfrak{L}(X, \mathbb{K})$. Ekkor tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ esetén

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot |f(e_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| \cdot \max\left\{|\alpha_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, n\}\right\},$$

ezért $f \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$.

2. lépés. Ha $\dim(\mathcal{X}) = \infty$, akkor bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén van $\mathcal{X}$-ben $e_1, \ldots, e_k$ lineárisan független, normált vektorrendszer, pl.

$$e_{k+1} \in \mathcal{X} \backslash \mathrm{span}\,(e_1, \ldots, e_k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ha $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ olyan altér, amelyre

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathrm{span}\,(e_k : \ k \in \mathbb{N}),$$

akkor tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ vektor a következő alakba írható:

$$x = y + \sum_{\mathcal{N}_x} \alpha_k e_k \quad (\mathcal{N}_x \subset \mathbb{N} \text{ véges}).$$

Így az

$$f(x) := \sum_{\mathcal{N}_x} k\alpha_k \quad (x \in \mathcal{X})$$

funkcionál lineáris: $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, de nem korlátos: $f \notin L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, ui. $\|e_k\| = 1$, azonban

$$f(e_k) = k \to +\infty \quad (k \to \infty). \quad \blacksquare$$

Az iménti érvelésből jól látható, hogy ha

$$\widetilde{\|x\|} := \|y\| + \sum_{\mathcal{N}_x} k|\alpha_k| \quad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor

$$\widetilde{\|e_k\|} = k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

miatt $\|\cdot\|$ és $\widetilde{\|\cdot\|}$ nem ekvivalens normák, azaz

ha egy vektortéren bármely két norma ekvivalens, akkor az véges dimenziós

(vö. 1.3.69. feladat és az azt követő megjegyzés).

4.2.35. feladat. Mutassuk meg, hogy ha adott $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{X} := \mathbb{K}^m, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{K}^n \qquad \text{és} \qquad M \in \mathbb{K}^{n\times m},$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad Ax := Mx = \left[\sum_{k=1}^{m} M_{ik}x_k\right]_{i\in\{1,\ldots,n\}}$$

operátorra $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, majd számítsuk ki $\|A\|$-t, ha a tereken a normákat

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty$,
2. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_1$,
3. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_2$

módokon értelmezzük!

Útm. Az A operátor triviálisan lineáris, hiszen tetszőleges $u, v \in \mathbb{K}^m$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A(u + \alpha v) = M(u + \alpha v) = Mu + \alpha Mv = Au + \alpha Av.$$

Mivel $\mathbb{K}^m$ véges dimenziós, ezért $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Továbbá, ha

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty$, akkor

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \sup\left\{\frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \\ &= \|M\|_s \quad \text{(sorösszeg-norma)}.\end{aligned}$$

2. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_1$, akkor

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \sup\left\{\frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \\ &= \|M\|_o \quad \text{(oszlopösszeg-norma)}.\end{aligned}$$

3. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_2$, akkor

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \sup\left\{\frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \in \mathbb{R} : \ 0 \neq x \in \mathbb{K}^n\right\} = \\ &= \|M\|_2 = \mu_{max}(M^*M) \quad \text{(spektrálnorma)}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4.2.10. példa. Ha $0 < a, b \in \mathbb{R}$ és

$$M := \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix},$$

akkor

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty$ esetén $\|A\| = 2\max\{a, b\}$,
2. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_1$ esetén $\|A\| = a + b$,
3. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_2$ esetén $\|A\| = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

4.2.36. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$, akkor a 4.1.4. példabeli A lináris operátor korlátos, majd számítsuk ki a normáját!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $f \in \mathcal{X}$ függvényre

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \frac{1}{2}\sup\{|f(x) + f(-x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [-a, a]\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [-a, a]\} + \sup\{|f(-x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [-a, a]\}\right) = \\ &= \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [-a, a]\} = \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

ezért $A \in L(\mathcal{X})$.

2. lépés. $\|A\| = 1$, hiszen a fentiek miatt $\|A\| \leq 1$ és az

$$f(x) := 1 \qquad (x \in [-a, a])$$

függvényre $\|f\|_\infty = 1$, és így

$$1 = \|f\|_\infty = \|Af\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|f\|_\infty = \|A\|,$$

azaz $\|A\| \geq 1$. ∎

4.2.37. feladat. Az $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ Hilbert-tér, ill. az

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi(u, v) := (u, -v)$$

lineáris operátpr esetében határozzuk meg $\|A\|$-t!

Útm. Mivel bármely $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\|A(u, v)\|_2 = \|(u, -v)\|_2 = \sqrt{u^2 + v^2} = \|(u, v)\|_2,$$

ahol $\|\cdot\|_2^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$, ezért

$$\|A\| = 1. \quad \blacksquare$$

4.2.38. feladat. Számítsuk ki a $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ korlátos, lineáris funkcionál normáját, ha az $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ teret a maximum-normával látjuk el!

1. $\phi(u) := \int_0^1 xu(x)\,\mathrm{d}x \; (u \in \mathcal{X})$;
2. $\phi(u) := \int_0^1 xu(x)\,\mathrm{d}x \; (u \in \mathcal{X})$;
3. $\phi(u) := \int_0^1 \sin(2\pi x)u(x)\,\mathrm{d}x \; (u \in \mathcal{X})$;
4. $\phi(u) := \int_0^1 \sqrt{x}u(x)\,\mathrm{d}x \; (u \in \mathcal{X})$.

Útm. A $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ téren a $\|\cdot\|_\infty$ normát bevezetve azt kapjuk, hogy

1. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 xu(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |xu(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x\|u\|_\infty\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\|u\|_\infty,$$
így $\|\phi\| \leq 1/2$. Mivel az
$$u(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$
függvényre $\|u\|_\infty = 1$, ezért
$$\phi(u) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$
miatt $\|\phi\| \geq 1/2$, ahonnan $\|\phi\| = 1/2$ következik.

2. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 x^2u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |x^2u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^2\|u\|_\infty\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{3}\|u\|_\infty,$$
így $\|\phi\| \leq 1/3$. Mivel az
$$u(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$
függvényre $\|u\|_\infty = 1$, ezért
$$\phi(u) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$
miatt $\|\phi\| \geq 1/2$, ahonnan $\|\phi\| = 1/3$ következik.

3. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$\begin{aligned} |\phi(u)| &= \left|\int_0^1 \sin(2\pi x)u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |\sin(2\pi x)u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\cdot\|u\|_\infty\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\pi}\|u\|_\infty, \end{aligned}$$
így $\|\phi\| \leq 2/\pi$. Ha
$$u_n(x) := \begin{cases} 1 & \left(x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]\right), \\ n\left(\frac{1}{2} - x\right) & \left(x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right), \\ -1 & \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n},1\right]\right) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor
$$\|u\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{|\phi(u_n)|}{\|u_n\|_\infty} =$$
$$\begin{aligned} &= \left|\int_0^1 \sin(2\pi x)u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = \\ &= \left|\int_0^{1/2-1/n} |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} \sin(2\pi x)u_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2+1/n}^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x\right| = \\ &= \left|\int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x - \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} \sin(2\pi x)u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \\ &\geq \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{n} - \frac{2}{n} = \\ &= \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x - \frac{4}{n}. \end{aligned}$$
Így, ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor az $n \in \mathbb{N}$: $4/n < \varepsilon$ számmal
$$\frac{|\phi(u_n)|}{\|u_n\|_\infty} > \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$
Ez azt jelenti, hogy
$$\|\phi\| = \sup\left\{\frac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} \in \mathbb{R} : \ \|u\|_\infty \neq 0\right\} \geq \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x,$$
ahonnan
$$\|\phi\| = \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$
következik.

4. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 \sqrt{x}u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |\sqrt{x}u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \sqrt{x}\|u\|_\infty\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{3}\|u\|_\infty,$$
így $\|\phi\| \leq 2/3$. Mivel az
$$u(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$
függvényre $\|u\|_\infty = 1$, ezért
$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{2}{3}$$
miatt $\|\phi\| \geq 2/3$, ahonnan
$$\|\phi\| = 2/3$$
következik. ■

4.2.11. gyakorló feladat. Számítsuk ki a $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ korlátos, lineáris funkcionál normáját, ha az $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R})$ teret a maximum-normával látjuk el!

1. $\phi(u) := \int_0^1 u \;(u \in \mathcal{X})$;
2. $\phi(u) := \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)u(x)\,\mathrm{d}x \;(u \in \mathcal{X})$;
3. $\phi(u) := \int_{-1}^1 u(x)\,\mathrm{d}x - u(0) \;(u \in \mathcal{X})$.

Útm.

4.2.39. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, $A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor és $\varepsilon > 0$ szám esetén fennáll az
$$\sup\{\|Au\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \; u \in K_\varepsilon(x)\} \geq \|A\|\varepsilon$$
egynlőtlenség!

Útm. Az operátornorma szuprémum-tulajdonsága alapján bármely $p > 0$ esetén van olyan $v \in \mathcal{X}$, $\|v\|_\mathcal{X} = 1$, hogy
$$\|Av\|_\mathcal{Y} > \|A\| - p$$
teljesül. Így
$$\begin{aligned} 2\sup\{\|Au\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \; u \in K_\varepsilon(x)\} &\geq \|A(x+\varepsilon v)\|_\mathcal{Y} + \|A(x-\varepsilon v)\|_\mathcal{Y} \geq \\ &\geq \|A(x+\varepsilon v) - A(x-\varepsilon v)\|_\mathcal{Y} = 2\varepsilon\|Av\|_\mathcal{Y} \geq \\ &\geq 2\varepsilon(\|A\| - p). \end{aligned}$$

Így a $p \to 0$ határátmenettel a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

4.2.40. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ vektor és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $u \in \mathcal{X}$, hogy

$$\|u - x\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \|Au\|_{\mathcal{X}} \geq \frac{2}{3}\|A\|\varepsilon$$

teljesül!

Útm. A triviális $\|A\| = 0$ esettől eltekintve, ha

$$p := \frac{1}{3}\|A\|\varepsilon > 0,$$

akkor a 4.2.39. feladatbeli állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $u \in \mathcal{X}$ elemmel

$$\|u - x\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \|Au\|_{\mathcal{Y}} + p \geq \|A\|\varepsilon. \quad ■$$

4.2.41. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $u, v \in \mathcal{X}$, ill. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$ esetén mutassuk meg, hogy az

$$Ax := \langle x, u\rangle_{\mathcal{X}} \cdot v \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos, majd adjunk (felső) becslést normájára!

Útm. Ha $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A(x + \alpha y) = \langle x + \alpha y, u\rangle_{\mathcal{X}} \cdot v = \langle x, u\rangle_{\mathcal{X}} \cdot v + \alpha\langle y, u\rangle_{\mathcal{X}} \cdot v = Ax + \alpha Ay,$$

ezért $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$. Az A operátor korlátos is: $A \in L(\mathcal{X})$, hiszen A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség (vö. 1.4.3. feladat) következtében minden $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} = \|\langle x, u\rangle_{\mathcal{X}} \cdot v\|\mathcal{X} = |\langle x, u\rangle_{\mathcal{X}}| \cdot \|v\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{\mathcal{X}} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \cdot \|v\|_{\mathcal{X}}$$

teljesül. Így

$$\|A\| \leq \|u\|_{\mathcal{X}} \cdot \|v\|_{\mathcal{X}}. \quad ■$$

4.3. Folytonos operátorok

4.3.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor esetében egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Az A operátor korlátos.

(2) Minden korlátos $H \subset \mathcal{D}(A)$ halmaz esetén az

$$A[H] \subset \mathcal{Y}$$

halmaz korlátos.

(3) Az A operátor folytonos.

(4) Az A operátor folytonos a $0 \in \mathcal{X}$ pontban.

(5) Minden $u \in \mathcal{D}(A)$ és minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $v \in \mathcal{D}(A)$, akkor

$$\|u - v\|_{\mathcal{X}} < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|Au - Av\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$$

(6) Minden $N \subset \mathcal{Y}$ nyílt halmaz esetén az

$$A^{-1}[N] \subset \mathcal{D}(A)$$

halmaz nyílt.

(7) Alkalmas $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$A^{-1}\left[K_1(0)\right] = \mathcal{D}(A) \cap K_\varepsilon(0).$$

Útm.

1. lépés /(3) ⇒ (4)/. Triviális.

2. lépés /(4) ⇒ (2)/. Ha a $H \subset \mathcal{D}(A)$ halmaz korlátos és $A[H] \subset \mathcal{Y}$ nem korlátos, akkor alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq K$, és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in H$, hogy

$$\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} > n.$$

Így az

$$\left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{sorozatra} \quad \left\|\frac{1}{n}x_n\right\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{K}{n} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{azaz} \quad \lim\left(\frac{1}{n}x_n\right) = 0 \in \mathcal{X},$$

viszont

$$\left\|A\left(\frac{1}{n}x_n\right)\right\|_{\mathcal{X}} > 1,$$

ami azt jelenti, hogy $A \notin \mathfrak{C}[0]$. Ez pedig ellentmond a feltételnek, azaz $A[H]$ korlátos.

3. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. A
$$B_1(0) \cap \mathcal{D}(A)$$
halmaz korlátos, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén, ha
$$x \in B_1(0) \cap \mathcal{D}(A) \qquad \Longrightarrow \qquad \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K.$$
Ha $u \in \mathcal{D}(A) \backslash \{0\}$, akkor
$$\frac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \in B_1(0) \cap \mathcal{D}(A), \qquad \text{ezért} \qquad \left\| A \frac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \right\| \leq K, \qquad \text{és így} \qquad \|Au\|_{\mathcal{Y}} \leq K \|u\|_{\mathcal{X}}.$$
Ez a becslés az $u = 0$ esetben triviális, így A korlátos.

4. lépés /(1) $\Rightarrow$ (3)/. Ha
$$x, x_n \in \mathcal{D}(A) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) = x,$$
akkor
$$\|Ax - Ax_n\|_{\mathcal{Y}} = \|A(x - x_n)\|_{\mathcal{Y}} \leq K \|x - x_n\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$
azaz
$$\lim(Ax_n) = Ax.$$
Ez pedig azt jelenti, hogy A folytonos (vö. 1.2.43. feladat).

5. lépés /(3) $\Rightarrow$ (5)/. Ez az állítás az 1.2.23. feladat fényében triviális.

6. lépés /(5) $\Rightarrow$ (6)/. Ha $N \subset \mathcal{Y}$ nyílt halmaz, akkor azt kell megmutatni, hogy
$$\{x \in \mathcal{D}(A) : \ Ax \in N\}$$
nyílt $\mathcal{D}(A)$-ban, azaz bármely
$$x \in \mathcal{D}(A), \qquad Ax \in N$$
esetén van olyan $\delta > 0$, hogy ha
$$u \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad \|x - u\|_{\mathcal{X}} < \delta,$$
akkor $Au \in N$. N nyíltságának következtében van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(Ax) \subset N$, ezért a feltételből alkalmas $\delta > 0$ esetén
$$\|Ax - Au\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon$$
következik, amennyiben
$$u \in \mathcal{D}(A), \qquad \|x - u\|_{\mathcal{X}} < \delta$$
teljesül. Így
$$K_\varepsilon(Ax) \subset N \qquad \text{miatt} \qquad Au \in N.$$

7. lépés /(6) $\Rightarrow$ (7)/. Triviális.

8. lépés /(7) $\Rightarrow$ (3)/. Ha valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon(1) \subset \mathcal{X}, \qquad A[\mathcal{D}(A) \cap K_\varepsilon(0)] \subset K_1(0),$$

akkor bármely

$$u \in \mathcal{D}(A), \quad \|u\|_\mathcal{X} < \varepsilon \qquad \text{esetén} \qquad \|Au\|_\mathcal{Y} < 1.$$

Így, ha $0 \neq x \in \mathcal{D}(A)$, akkor

$$\left\|\frac{\varepsilon x}{2\|x\|_\mathcal{X}}\right\|_\mathcal{X} < \varepsilon, \qquad \text{ahonnan} \qquad \left\|A\frac{\varepsilon x}{2\|x\|_\mathcal{X}}\right\|_\mathcal{X} < 1$$

következik. Ez azt jelenti, hogy

$$\|Ax\|_\mathcal{X} < \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_\mathcal{X},$$

azaz A folytonos. ■

4.3.1. példa. A 4.1.2. feladatbeli π lineáris operátor folytonos, hiszen bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$p_\mathcal{A}(\pi(x)) = p_\mathcal{A}([x]) \leq \|x\|,$$

ahol

$$p_\mathcal{A} : \mathcal{X}/\mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad p_\mathcal{A}([x]) := \rho(0, x + \mathcal{A}) = \rho(x, \mathcal{A}) = \inf\{\|u\| \in \mathbb{R} : \ u \in [x]\}$$

(vö. 1.3.131. feladat).

Könnyen belátható, hogy a 4.1.2. feladatbeli π lineáris operátorra

$$\|\pi\| = 1$$

teljesül, hiszen a 4.3.1. pédában láttuk, hogy $\|\pi\| \leq 1$, továbbá (vö. 2.4.10. feladat) bármely $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz van olyan $x \in \mathcal{X}$, hogy

$$\|x\| = 1 \qquad \text{és} \qquad p_\mathcal{A}(\pi(x)) = \rho(x, \mathcal{A}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\|\pi\| \geq 1$.

4.3.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}[0,1], \quad \|\cdot\|_\mathcal{X} := \|\cdot\|_2, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{R}, \quad \|\cdot\|_\mathcal{Y} := |\cdot|$$

esetén az

$$Af := f(0) \qquad (f \in \mathfrak{C}[0,1])$$

lineáris operátor nem folytonos!

Útm.

4.3.2. feladat. Az

$$\mathcal{X} := \mathfrak{c}_0, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad \mathcal{Y} := \mathbb{R}, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := |\cdot|$$

normált terek és az

$$Au := \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^n \qquad (u \in \mathcal{X})$$

operátor esetén mutassuk meg, hogy igazak az alábbi állítások!

1. Az A operátor folytonos.
2. Nincsen olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy
$$\|Au\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|u\|_{\mathcal{X}}$$
teljesülne, azaz A nem korlátos.

Útm. Világos, hogy minden $u \in \mathcal{X}$ esetén $Au \in \mathcal{Y}$, hiszen

$$\lim\left(\sqrt[n]{|u_n|^n}\right) = \lim(|u_n|) = 0,$$

így a gyökkritérium miatt a

$$\sum_{n=1} (|u_n|^n)$$

sor konvergens.

1. Tetszőleges $u, v \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|Au - Av\|_{\mathcal{Y}} = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^n - \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n|^n - |v_n|^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^n - v_n^n|\,.$$
Ezért a Lagrange-féle középértéktétel következtében ($u_n \neq v_n$ esetén) van olyan
$$\xi_n \in (u_n, v_n) \cup (v_n, u_n),$$
hogy
$$\begin{aligned} |u_n^n - v_n^n| &= n|\xi_n|^{n-1}|u_n - v_n| \leq \\ &\leq n \cdot \max\{|u_n|, |v_n|\}^{n-1} \cdot \max\{|u_n - v_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \\ &= n \cdot \max\{|u_n|, |v_n|\}^{n-1} \cdot \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$
tehát
$$\|Au - Av\|_{\mathcal{Y}} \leq \|u - v\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \max\{|u_n|, |v_n|\}^{n-1}$$
(a jobb oldalon álló sor a gyökkritérium következtében konvergens).
2. Ha
$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$x^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} e_k = (\overset{1}{\smile}\!\!\!1, \ldots, \overset{n}{\smile}\!\!\!1, 0, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^{(n)} \in \mathfrak{c}_0, \qquad \|x^{(n)}\|_\infty = 1, \qquad \text{továbbá} \qquad A(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Így tehát nincsen olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy

$$\left|A(x^{(n)})\right| \leq K\|(x^{(n)})\|_\infty$$

teljesülne. ■

Az iménti feladatban A nem lineáris operátor, hiszen

$$A((-1)e_1) = 1 \neq -1 = (-1)A(e_1).$$

4.3.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor $\mathcal{N}(A)$ zárt halmaz $\mathcal{X}$-ben!

Útm. Ha valamely

$$x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad x_n \in \mathcal{N}(A) \quad (n \in \mathbb{N}): \qquad \lim(x_n) = x$$

sorozat esetén A folytonossága következtében

$$Ax = A(\lim(x_n)) = \lim(Ax_n) = \lim(0) = 0,$$

azaz $x \in \mathcal{N}(A)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{N}(A)$ zárt. ■

4.3.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, akkor igaz az

$$f \notin L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 : \; f[K_\varepsilon(0)] = \mathbb{K}$$

implikáció!

Útm. Ha $f \notin L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, akkor f linearitása következtében $f \notin \mathfrak{C}[0]$, azaz

$$\exists\, \widetilde{\varepsilon} > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x \in \mathcal{X}: \qquad \|x\| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x)| \geq \widetilde{\varepsilon}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és adott $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\widetilde{\delta} := \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|}\widetilde{\varepsilon},$$

akkor $\widetilde{\delta} > 0$, és alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén $\|x\| < \widetilde{\delta}$, valamint $|f(x)| \geq \widetilde{\varepsilon}$. Ha most

$$y := \frac{\lambda}{f(x)}x,$$

akkor egyrészt

$$\|y\| = \frac{|\lambda|}{|f(x)|}\|x\| < \frac{|\lambda|}{\widetilde{\varepsilon}}\widetilde{\delta} = \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\varepsilon \leq \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad y \in K_\varepsilon(0),$$

másrészt pedig

$$f(y) = \frac{\lambda}{f(x)} f(x) = \lambda.$$

Így $\lambda \in f[K_\varepsilon(0)]$, ahonnan $\mathbb{K} \subset f[K_\varepsilon(0)]$ következik. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$f[K_\varepsilon(0)] = \mathbb{K}. \quad \blacksquare$$

4.3.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, akkor igaz az

$$f \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{N}(f) \quad \text{zárt altér}$$

ekvivalencia!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Mivel

$$\mathcal{N}(f) = f^{-1}[\{0\}]$$

és $\{0\}$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban, így f folytonossága következtében (vö. 1.1.21/3. feladat) $\mathcal{N}(f)$ zárt altér.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Feltehető, hogy

$$\mathcal{N}(f) \neq \mathcal{X},$$

ui. a

$$\varphi(u) := 0 \qquad (u \in \mathcal{X})$$

leképezésre $\varphi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$. Van tehát olyan $w \in \mathcal{X}$, hogy $f(w) \neq 0$ (azaz $w \notin \mathcal{N}(f)$). $\mathcal{N}(f)$ zártsága következtében létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\emptyset = K_\varepsilon(w) \cap \mathcal{N}(f) = (w + K_\varepsilon(0)) \cap \mathcal{N}(f).$$

Ha $f \notin L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, akkor $f[K_\varepsilon(0)] = \mathbb{K}$ (vö. 4.3.4. feladat), azaz alkalmas $z \in K_\varepsilon(0)$ esetén

$$f(z) = -f(w).$$

Így f linearitása következtében

$$f(w+z) = f(w) + f(z) = 0 \qquad \text{és} \qquad w + z \in w + K_\varepsilon(0),$$

ami ellentmond annak, hogy $(w + K_\varepsilon(0))$ és $\mathcal{N}(f)$ diszjunkt. Tehát f folytonos. $\blacksquare$

4.3.6. feladat. Lássuk be, hogy $\mathfrak{c}$, ill. $\mathfrak{c}_0$ zárt alterek l_∞-ben (vö. 1.3.31. feladat)!

Útm. Feltehető, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (különben külön-külön kell vizsgálni a valós és a képzetes részt). Világos, hogy az

$$Ls(x) := \limsup(x), \qquad Li(x) := \liminf(x), \qquad f(x) := |Ls(x) - Li(x)| \quad (x \in l_\infty)$$

funkcionálokra

$$Ls, Li, f \in L(l_\infty, \mathbb{K}),$$

továbbá $\{0\}$ zárt (altér) $\mathbb{K}$-ban és így

$$\mathfrak{c} = f^{-1}[\{\widehat{0}\}], \qquad \text{ill.} \qquad \mathfrak{c}_0 = (f + |Ls|)^{-1}\,[\{\widehat{0}\}]$$

zárt altér l_∞-ben. ■

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált terek és az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor esetében $\mathcal{N}(A)$ mindig zárt altér, de $\mathcal{R}(A)$ általában nem zárt, hiszen, ha pl.

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \mathfrak{C}[0,1], \qquad \|\cdot\|_\mathcal{X} := \|\cdot\|_\mathcal{Y} := \|\cdot\|_\infty,$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad (Af)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

operátor esetében $\mathcal{R}(A)$ nem zárt:

$$\mathcal{R}(A) = \left\{f \in \mathfrak{C}^1[0,1] :\ f(0) = 0\right\}.$$

4.3.7. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor igaz a

$$(\exists k > 0 : \quad k\|x\| \leq \|Ax\| \ \ (x \in \mathcal{X})) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{R}(A) \text{ zárt altér}$$

implikáció!

Útm. Ha

$$y_n \in \mathcal{R}(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor alkalmas

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$Ax_n = y_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha az (y_n) sorozat konvergens,

$$y := \lim(y_n),$$

akkor (y_n) Cauchy-sorozat is egyben, így

$$k\|x_m - x_n\| \leq \|A(x_m - x_n)\| = \|Ax_m - Ax_n\| = \|y_m - y_n\| \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

miatt (x_n) is Cauchy-sorozat. A tér teljessége folytán tehát van olyan

$$x := \lim(x_n) \in \mathcal{X},$$

hogy

$$Ax = \lim(Ax_n) = \lim(y_n) = y,$$

azaz

$$y = Ax \in \mathcal{R}(A),$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{R}(A)$ zárt. ■

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a korlátos, ill. a folytonos lineáris operátorok $L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ halmaza a korábban bevezetett lineáris műveletekel valamint a 4.2.2. definícióbeli $\|\cdot\|$ leképezéssel lineáris normált teret alkotnak.

4.3.8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $(L(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\|\cdot\|)$ normált tér.
2. Ha $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljes, akkor $(L(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\|\cdot\|)$ is az.

Útm.

1. lépés. Az $\mathcal{X} = \{0\}$ triviális esettől eltekintve bármely $A, B \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

- az $x \in \mathcal{X}$, $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$ vektorral

  $$\|(A+B)x\|_{\mathcal{Y}} = \|Ax + Bx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|Ax\|_{\mathcal{Y}} + \|Bx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| + \|B\|,$$

  ahonnan

  $$A + B \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

  következik.

- az

  $$\|\alpha(Ax)\|_{\mathcal{Y}} = |\alpha| \cdot \|Ax\|_{\mathcal{Y}}$$

  egyenlőség következtében

  $$\begin{aligned}\|\alpha A\| &= \sup\{\|(\alpha A)x\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathcal{X},\ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\} = \\ &= |\alpha| \cdot \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathcal{X},\ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\} = |\alpha| \cdot \|A\|,\end{aligned}$$

  azaz

  $$\alpha A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

2. lépés. Ha valamely $A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (folytonos, ill. korlátos) lineáris operátor esetén $\|A\| = 0$, akkor bármely $x \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$ esetén

$$\frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = 0,$$

azaz $\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = 0$. Ennélfogva, ha $x \in \mathcal{X}$, akkor $Ax = 0$, azaz $A = O$.

3. lépés. Ha

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} = \|(A_m - A_n)x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A_m - A_n\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (m, n \in \mathbb{N}),$$

így $(A_n x)$ is Cauchy-sorozat. Az $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljessége folytán alkalmas

$$Ax := \lim(A_n x) \in \mathcal{Y} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátorra

$$A(u + \alpha v) = \lim(A_n(u + \alpha v)) = \lim(A_n u + \alpha A_n v) = Au + \alpha Av \qquad (\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathcal{X}),$$

ami azt jelenti, hogy $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Az

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-sorozat voltából még az is következik, hogy az $(\|A_n\|)$ számsorozat konvergens, így korlátos is, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|A_n\| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Így

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|\lim(A_n x)\|_{\mathcal{Y}} = \lim(\|A_n x\|_{\mathcal{Y}}) \leq \lim(\|A_n\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}) \leq K\|x\|_{\mathcal{X}},$$

tehát $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

4. lépés. Megmutatjuk, hogy az előző lépésbeli (A_n) Cauchy-sorozatra

$$\lim(A_n) = A$$

teljesül. Mivel bármely ε esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$\|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon\|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq N),$$

ezért ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$ és $x \in \mathcal{X}$, akkor

$$\|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon\|x\|_{\mathcal{X}},$$

és így

$$\|(A_n - A)x\|_{\mathcal{Y}} = \left\|\lim_{m\to\infty}(A_n - A_m)x\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \varepsilon\|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (n \geq N, \ x \in \mathcal{X}).$$

Tehát

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Később be fogjuk látni (vö. 4.5.11. feladat), hogy $\mathcal{X} \neq \{0\}$ esetén $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljes, ha $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ teljes.

4.3.9. feladat. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Af)(x) := x^2 f(x)$$

majd mutassuk meg, hogy

1. A folytonos lineáris operátor;
2. fennáll az
$$\|A + I\| = \|A\| + \|I\|$$
egyenlőség!

Útm.

1. Mivel bármely $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$\begin{aligned} A(u + \alpha v) &= x^2(u + \alpha v)(x) = x^2(u(x) + \alpha v(x)) = x^2 u(x) + \alpha x^2 v(x) = \\ &= (Au)(x) + \alpha(Av)(x), \end{aligned}$$
ezért $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. A folytonos is, hiszen ha $u \in \mathcal{X}$, akkor
$$\|Au\|_\infty = \sup\left\{|x^2 u(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} \leq \sup\left\{|u(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = \|u\|_\infty .$$
2. A fentiek alapján világos, hogy $\|A\| \leq 1$. Mivel a
$$\varphi(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$
függvényre
$$1 = \|\varphi\|_\infty = \sup\left\{|x^2 \cdot 1| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|$$
teljesül, ezért $\|A\| = 1$. Mivel (vö. 4.3.8/1. feladat)
$$\|A + I\| \leq \|A\| + \|I\| = 1 + 1 = 2,$$
másrészt pedig
$$\|A + I\| \geq \|(A + I)\varphi\|_\infty = \sup\left\{|1 + x^2| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = 2,$$
ezért
$$\|A + I\| = 2 = \|A\| + \|I\|. \quad \blacksquare$$

4.3.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \in L(\mathcal{Z} \curvearrowright \mathcal{Y})$, $B \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Z})$ olyan lineáris operátorok, amelyekre

$$\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{D}(B) : \; Bu \in \mathcal{D}(A)\} \neq \emptyset,$$

akkor $AB \in L(Z \curvearrowright Y)$, és fennáll az

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

egyenlőtlenség!

Útm. Világos, hogy folytonos függvények (létező) kompozíciója folytonos, továbbá bármely $x \in \mathcal{D}$ esetén

$$\|(AB)x\|_{\mathcal{Y}} = \|A(Bx)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|Bx\|_{\mathcal{Z}} \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

Speciálisan, ha $A \in L(\mathcal{X})$, ill. $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

4.3.11. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $\mathcal{X} \neq \{0\}$ normált tér, $\alpha \in \mathbb{K}$ és $A, B \in L(\mathcal{X})$ operátorok esetén mutassuk meg, hogy igaz a

$$[A, B] = \alpha I \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 0$$

implikáció (**Wielandt-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$AB^{n+1} - B^{n+1}A = (AB^n - B^nA)B + B^n(AB - BA).$$

Így, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$(*) \qquad AB^{n+1} - B^{n+1}A = \alpha(n+1)B^n,$$

ui. $n = 0$, ill. $n = 1$ esetén

$$AB^{0+1} - B^{0+1}A = AB - BA = \alpha I = \alpha(0+1)B^0,$$

valamint

$$AB^{1+1} - B^{1+1}A = (AB - BA)B + B(AB - BA) = \alpha IB + B\alpha I = \alpha(1+1)B^1,$$

továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} AB^{n+1} - B^{n+1}A &= (AB^n - B^nA)B + B^n(AB - BA) = \\ &= \alpha n B^{n-1}B + B^n\alpha I = \alpha(n+1)B^n. \end{aligned}$$

2. lépés. Mivel $A, B \in L(\mathcal{X})$, ezért $(*)$ miatt

$$(**) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\alpha|(n+1)\|B^n\| &= \left\|AB^{n+1} - B^{n+1}A\right\| \leq \left\|AB^{n+1}\right\| + \left\|B^{n+1}A\right\| \leq \\ &\leq 2\|A\| \cdot \left\|B^{n+1}\right\| \leq 2\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|B^n\| \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \right.$$

Ha tehát $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$|\alpha|(N+1) > 2\|A\| \cdot \|B\|,$$

akkor $\left\|B^N\right\| = 0$. Továbbá $(**)$ következtében, ha valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|B^{m+1}\right\| = 0$, akkor $\|B^m\| \neq 0$, és így $\alpha = 0$, ui. ha $\|B^m\| = 0$ lenne, akkor

$$0 = \left\|B^N\right\| = \left\|B^{N-1}\right\| = \ldots = \|B\| = \left\|B^0\right\| = \|E\| = 1$$

teljesülne ($\mathcal{X} \neq \{0\}$), ami nem lehetséges. ■

Ennek az állításnak természetes következménye bizonyos kvantummechanikai operátorok nem-korlátos volta, ui. az

$$[A, B] = -\imath\hbar I$$

Heisenberg-féle felcserélési relációnak eleget tévő A és B (lineáris) operátorok közül legalább az egyik nem korlátos (így nem is folytonos).

4.3.2. példa. Tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $D_k, M_k : \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$,

$$D_k u := -\imath\hbar\partial_k u, \quad (M_k u)(r) := x_k u(r) \qquad (r = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

($2\pi\hbar := h$, h: **Planck-állandó**) operátorokra:

$$[D_k, M_l] = D_k M_l - M_l D_k = -\imath\hbar\delta_{kl} I,$$

így $k = l$ esetén a két operátor közül az egyik nem korlátos. Mivel M_k korlátos (vö. 4.2.3/2. példa), ezért újabb bizonyítékát kaptuk annak, hogy D_k nem az (vö. 4.2.2/1. példa).

4.3.12. feladat. Lássuk be, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}^1[0,1]$, $\mathcal{Y} := \mathfrak{C}[0,1]$, továbbá

$$\|f\|_* := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \|f\|_{**} := \max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right\} \qquad (f \in \mathcal{X}),$$

akkor az

$$Af := f' \qquad (f \in \mathcal{X})$$

(differenciál)operátor folytonos, majd számítsuk ki $\|A\|$-t!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_*)$, ill. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{**})$ normált tér, hiszen egyrészt $\|\cdot\|_*$ norma $\mathcal{X}$-en (vö. 4.2.33. feladat), másrészt pedig bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

- ha $\|f\|_{**} = 0$, akkor $\max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = 0$, így $f = 0 \in \mathcal{X}$,
- $\|\alpha f\|_{**} = \max\{\|\alpha f\|_\infty, \|\alpha f'\|_\infty\} \mid = \max\{|\alpha| \cdot \|f\|_\infty, |\alpha| \cdot \|f'\|_\infty\} \mid =$
  $= |\alpha| \cdot \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} \mid = |\alpha| \|f\|_{**}$,
- $\|f+g\|_{**} = \max\{\|f+g\|_\infty, \|f'+g'\|_\infty\} \leq \max\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty\} =$
  $= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} + \max\{\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty\} = \|f\|_{**} + \|g\|_{**}$.

2. lépés. $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ui.

- $\|Af\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_* \ (f \in \mathcal{X})$,
- $\|Af\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = \|f\|_{**} \ (f \in \mathcal{X})$.

3. lépés. $\|A\| = 1$, hiszen a fentiek miatt

- $\|A\| \leq 1$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha
  $$\varphi_n(t) := t^n \qquad (t \in [0,1]),$$
  akkor
  $$n = \|\varphi_n'\|_\infty = \|A\varphi_n\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n\|_* = \|A\| \cdot \left(\|\varphi_n\|_\infty + \|\varphi_n'\|_\infty\right) = \|A\| \cdot (1+n),$$
  azaz
  $$\frac{n}{n+1} \leq \|A\| \quad (0 < n \in \mathbb{N}), \qquad \text{így} \qquad 1 \leq \|A\|.$$
- $\|A\| \leq 1$, továbbá az előbbi függvénysorozatra
  $$\|\varphi_1\|_{**} = \max\{1,1\} = 1,$$
  és így
  $$1 = \|\varphi_1'\|_\infty = \|A\varphi_1\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi_1\|_{**} = \|A\|. \quad \blacksquare$$

Ahogy az a következő feladatból is jól látható, az iménti feladatbeli ötlet tetszőleges lineáris operátor esetén is megfogalmazható.

4.3.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor $\mathcal{D}(A)$-n az

$$\|f\|_* := \|f\|_\mathcal{X} + \|Af\|_Y, \qquad \text{ill.} \qquad \|f\|_{**} := \max\{\|f\|_\mathcal{X}, \|Af\|_\mathcal{Y}\} \qquad (f \in \mathcal{D}(A))$$

normákat bevezetve, azaz $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_\mathcal{X})$ helyett a $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_*)$, ill. a $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_{**})$ normált tereket tekintve $A \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, azaz A folytonos (**lineáris operátor folytonossá tétele**)!

Útm.

1. lépés. A 4.2.33 és a 4.3.12. feladatbeli állítás fényében könnyen belátható, hogy $\|\cdot\|_*$, ill. $\|\cdot\|_{**}$ norma $\mathcal{D}(A)$-n.

2. lépés. A $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_*)$ normált térben, ha $x \in \mathcal{D}(A)$, akkor

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_* - \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_*, \qquad \text{ill.} \qquad \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \|x\|_{**},$$

azaz A folytonos. ■

4.3.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá az A operátorra $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_*)$ is Banach-tér!

Útm. Ha

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, azaz

$$\|x_m - x_n\|_* \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

akkor

$$0 \leq \|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}} \leq \|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}} + \|A(x_m - x_n)\|_{\mathcal{Y}} = \|x_m - x_n\|_* \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

így $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége miatt van olyan $x \in \mathcal{X}$, hogy

$$\lim(\|x_n - x\|_{\mathcal{X}}) = 0,$$

ezért A folytonossága következtében

$$\|x_n - x\|_* = \|x_n - x\|_{\mathcal{X}} + \|A(x_n - x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|x_n - x\|_{\mathcal{X}} + \|A\| \cdot \|x_n - x\|_{\mathcal{X}} \to 0 \quad (n \to \infty). \quad ■$$

4.3.15. feladat. Az

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := l_2, \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{l_2},$$

normált terek és az

$$Au := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + 3^{-n} - u_n}, 0, 0, \ldots\right) \qquad (u = (u_n) \in B_1(0) \subset \mathcal{X})$$

operátor esetén mutassuk meg, hogy igazak az alábbi állítások!

1. Az A operátor folytonos.
2. Nincsen olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy

$$\|Au\| \leq K\|u\| \qquad (u \in B_1(0))$$

teljesülne, azaz A nem korlátos.

Útm. Világos, hogy bármely $u = (u_n) \in B_1(0)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty,$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty,$$

ahonnan $\lim(u_n^2) = 0$ következik. Ebből pedig azt kapjuk, hogy $\lim(u_n) = 0$, ill.

$$\left|\frac{2^{-n+1}}{1+3^{-n+1}-u_{n+1}} : \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-u_n}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+3^{-n}-u_n}{1+3^{-n+1}-u_{n+1}}\right| \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Így a hányadoskritérium miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-u_n} < +\infty.$$

Szintén a hányadoskritérium felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|Au\| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-u_n}\right| < +\infty \qquad (u \in B_1(0) \subset l_2),$$

azaz bármely $u \in B_1(0) \subset l_2$ esetén $Au \in l_2$.

1. Az A operátor folytonos: **Házi feladat.** (vö. ha $u, v \in B_1(0) \subset l_2$, akkor

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-u_n} - \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-v_n}\right\}\right| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-u_n} - \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-v_n}\right| = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^{-n}(v_n-u_n)}{(1+3^{-n}-u_n)(1+3^{-n}-v_n)}\right| = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|u_n-v_n|}{|(1+3^{-n}-u_n)(1+3^{-n}-v_n)|}\Bigg).
\end{aligned}$$

2. A nem korlátos, hiszen, ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \in B_1(0) \in l_2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az

$$\{e_n \in l_2 : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz korlátos, és

$$\|Ae_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-\delta_{jn}} \geq \frac{2^{-n}}{1+3^{-n}-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

4.3.1. definíció. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq U \subset \mathcal{X}$ és bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $a \in U$ van, amelyre

$$\rho(x, U) = \|x - a\|,$$

azaz pontosan egy, az x-et legjobban közelítő U-beli elem létezik. Ekkor az

$$A_U : \mathcal{X} \to U, \qquad A_U(x) := a$$

operátort **metrikus projekció**nak nevezzük.

Ha $U \subset \mathcal{X}$ altér, akkor az A_U operátor projekció, hiszen bármely $x \in U$ esetén $A_U(x) = x$.

4.3.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq U \subset \mathcal{X}$ kompakt, akkor bármely $A_U : \mathcal{X} \to U$ metrikus projekció folytonos!

Útm. Ha A_U nem folytonos, azaz valamely

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén

$$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}$$

és van olyan (ν_n) indexsorozat, valamint $\delta > 0$, hogy

$$\|A_U(x_{\nu_n}) - A_U(x)\| \geq \delta \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor U kompaktságát felhasználva elmondható, hogy alkalmas (μ_n) indexsorozat esetén az $(A_U(x_{\nu_{\mu_n}}))$ sorozat konvergens, pontosabban

$$(*) \qquad A_U(x_{\nu_{\mu_n}}) \longrightarrow \widetilde{x} \in U \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad \|A_U(x_{\nu_{\mu_n}}) - A_U(x)\| \geq \delta > 0$$

teljesül. Ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén $N \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\|A_U(x_{\nu_{\mu_n}}) - \widetilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{és} \qquad \|x - x_{\nu_{\mu_n}}\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

akkor a háromszög-egyenlőtlenség és A_U definíciójának felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\|x - \widetilde{x}\| &\leq \|x - x_{\nu_{\mu_n}}\| + \|x_{\nu_{\mu_n}} - A_U(x_{\nu_{\mu_n}})\| + \|A_U(x_{\nu_{\mu_n}}) - \widetilde{x}\| < \\
&< \|x_{\nu_{\mu_n}} - A_U(x_{\nu_{\mu_n}})\| + 2\varepsilon/3 \leq \\
&\leq \|x_{\nu_{\mu_n}} - A_U(x)\| + 2\varepsilon/3 \leq \\
&\leq \|x_{\nu_{\mu_n}} x\| + \|x - A_U(x)\| + 2\varepsilon/3 \leq \\
&\leq \|x - A_U(x)\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\|x - \widetilde{x}\| = \|x - A_U(x)\|, \qquad \text{azaz} \qquad \widetilde{x} = A_U(x),$$

ami ellentmond $(*)$-nak. ■

4.3.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, továbbá

$$x = u + v \qquad (u \in \mathcal{U},\ v \in \mathcal{U}^{\perp})$$

az $x \in \mathcal{X}$ vektor ortogonális felbontása (vö. 2.5.6. feladat), akkor az

$$A_{\mathcal{U}} : \mathcal{X} \to \mathcal{U}, \qquad A_{\mathcal{U}}x := u$$

utasítással értelmezett operátor – ún. **ortogonális projekció** – folytonos, továbbá normájára

$$|||A_{\mathcal{U}}||| \leq 1$$

teljesül!

Útm. A Pitagorasz-tétel (vö. 1.4.36/6. feladat) következményeként

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 \geq \|u\|^2 = \|A_{\mathcal{U}}x\|^2,$$

ezért az $A_{\mathcal{U}}$ operátor korlátos, így folytonos is, és $|||A_{\mathcal{U}}||| \leq 1$. ■

Világos, hogy ha $A_{\mathcal{U}} \neq O$, akkor

$$|||A_{\mathcal{U}}||| = 1,$$

hiszen

$$|||A_{\mathcal{U}}||| = |||A_{\mathcal{U}}^2||| \leq |||A_{\mathcal{U}}|||^2,$$

ahonnan $1 \leq |||A_{\mathcal{U}}|||$ következik.

A folytonos projekciókat a továbbiakban **projektor**oknak fogjuk nevezni.

4.3.18. feladat. (Lebesgue-lemma.) Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $U \subset \mathcal{X}$ altér, $A : \mathcal{X} \to U$ projektor, akkor tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén fennáll a

$$\|x - A(x)\| \leq (1 + \|A\|)\rho(x, U)$$

becslés!

Útm. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{X}$, ill. $u \in U$ esetén

$$\|x - Ax\| = \|x - u + A(u-x)\| \leq \|x-u\| + \|A(u-x)\| \leq (1 + \|A\|)\cdot\|x-u\|,$$

ezért

$$\begin{aligned} \|x - Ax\| &\leq \inf\{(1+\|A\|)\cdot\|x-u\| \in \mathbb{R} :\ u \in U\} = \\ &= (1+\|A\|)\cdot\inf\{\|x-u\| \in \mathbb{R} :\ u \in U\} = (1+\|A\|)\cdot\rho(x,U). \quad ■ \end{aligned}$$

4.3.3. példa. A 4.2.12. feladat útmutatójában láttuk, hogy az n-edik (trigonometrikus) Fourier-részletösszeg-operátorra

$$(A_n u)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,2\pi])$$

teljesül. Könnyen belátható, hogy ha bármely $k \in \mathbb{N}_0$, ill. $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{és} \qquad b_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t,$$

továbbá

$$\mathfrak{T}_n := \left\{ f \in \mathfrak{C}_{2\pi} : \; f(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}, \; a_k, b_k \in \mathbb{R}\,(k \in \{1,\ldots,n\}) \right\}$$

a $\mathfrak{C}_{2\pi}$ tér $/(2n+1)$-dimenziós/ altere, akkor

$$A_n : \mathfrak{C}_{2\pi} \to \mathfrak{T}_n$$

projektor, hiszen A_n korlátos, tetszőleges $u \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ esetén

$$\begin{aligned}
(A_n u)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(y-x))\right\}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\cos(kx) - \sin(ky)\sin(kx)\right\}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\} \quad (x \in [0,2\pi]),
\end{aligned}$$

továbbá bármely $u \in \mathfrak{T}_n$ esetén

$$A_n u = u,$$

azaz $A_n^2 = A_n$. Így a Lebesgue-lemma ebben az esetben a

$$\|u - A_n u\|_\infty \leq (1 + \|A_n\|)E_n(u) \qquad (u \in \mathfrak{C}_{2\pi})$$

becsléssel egyenértékű, ahol

$$E_n(u) := \inf\left\{\|u-p\|_\infty \in \mathbb{R} : \; p \in \mathfrak{T}_n\right\}.$$

4.3.19. feladat. Az

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle) := (L^2(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$$

Hilbert-tér esetében mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. az

   $$\mathcal{A}_n := \{f \in \mathcal{X} : \ f(x) = 0 \ (\mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}\backslash[-n,n])\}$$

   halmaz zárt atér;

2. a

   $$P_n : \mathcal{X} \to \mathcal{A}_n, \qquad P_n(f) := \chi_{[-n,n]} \cdot f$$

   operátor ortogonális projekció!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}_n$ altér. Legyen

$$g_k \in A_n \qquad (k \in \mathbb{N})$$

és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$\lim(\|g_k - g\|_2) = 0$$

teljesül. Ekkor a tér teljessége következtében (vö. 1.3.130. feladat utáni első megjegyzés) alkalmas (ν_k) indexsorozatra

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}(x) \qquad (\mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}).$$

Így μ_1-m.m. $x \in \mathbb{R}\backslash[-n,n]$ esetén

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}(x) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0,$$

azaz $g \in \mathcal{A}_n$.

2. lépés. Ha $g \in \mathcal{A}_n$ és $f \in \mathcal{X}$, akkor

$$\|g - f\|_2^2 = \int |g - f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbb{R}\backslash[-n,n]} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 + \int_{[-n,n]} |g - f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1.$$

Ezért bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\|P_n(f) - f\|_2^2 &= \left\|\chi_{[-n,n]} \cdot f - f\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}\backslash[-n,n]} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\backslash[-n,n]} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 + \inf\left\{\int_{[-n,n]} |g - f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 \in \mathbb{R} : \ g \in \mathcal{A}_n\right\} = \\
&= \inf\left\{\|g - f\|_2^2 \in \mathbb{R} : ; g \in \mathcal{A}_n\right\} = \rho^2(f, \mathcal{A}_n). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.3.20. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $U, V \subset \mathcal{X}$ zárt alterek, úgy

1. ha $U \perp V$, akkor $U + V$ zárt;
2. ha $U \perp V$ és $U + V = \mathcal{X}$, akkor $V = U^{\perp}$ teljesül!

Útm.

1. Ha az
$$x_n \in U, \; y_n \in V \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatok esetén
$$z := \lim(x_n + y_n),$$
akkor a P_U, P_V ortogonális projekciók folytonossága (vö. 4.3.17. feladat) következtében
$$\lim(x_n) = \lim(P_U(x_n + y_n)) = P_U(\lim(x_n + y_n)) = P_U(z) \in U$$
és
$$\lim(y_n) = \lim(P_V(x_n + y_n)) = P_V(\lim(x_n + y_n)) = P_V(z) \in V,$$
ahonnan
$$z = \lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n) = P_U(z) + P_V(z) \in U + V$$
következik.

2. Ha bármely $x \in U$, ill. $y \in V$ esetén
$$\langle x, y\rangle = 0,$$
akkor
$$V \subset U^{\perp}.$$
Ha
$$z \in U^{\perp} \subset \mathcal{X},$$
akkor a feltételelk következményeként alkalams $x \in U$, ill. $y \in V$ esetén
$$z = x + y$$
és
$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle = \langle x, x + y\rangle = \langle x, z\rangle = 0.$$
Ez azt jelenti, hgy
$$z = y \in V,$$
és így
$$U^{\perp} \subset V$$
teljesül. ■

4.4. Duális terek

4.4.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér esetén az

$$\mathcal{X}' := \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ lineáris}\} = Hom(\mathcal{X}, \mathbb{K})$$

vektorteret $\mathcal{X}$ **algebrai duális**ának nevezzük.

Az $\mathcal{X}'$ duális tér elemei tehát a **lineáris funkcionál**ok. Sok esetben – különösen fizikai alkalmazásokban – szokás $\mathcal{X}'$-t **lineáris formák** vagy **kovektor**ok tereként emlegetni, $\mathcal{X}$ elemeire a „ket-vektor", $\mathcal{X}'$ elemeire pedig a „bra-vektor" elnevezést használni, és tetszőleges $f \in \mathcal{X}'$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén az $f(x)$ helyettesítési értéket az $\langle f, x\rangle$, ill. $\langle f|x\rangle$ („bracket") jelsorozattal jelölni. Ezzel kapcsolatos a

4.4.1. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{X}' \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad (f, x) \mapsto \langle f, x\rangle$$

leképezés bilineáris!

Útm. Bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{X}'$, $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle f + \alpha g, x\rangle = (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = \langle f, x\rangle + \alpha\langle g, x\rangle,$$

ill.

$$\langle f, x + \beta y\rangle = f(x + \beta y) = f(x) + \beta f(y) = \langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle. \quad \blacksquare$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, akkor a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ tér teljessége miatt (vö. 4.3.8. feladat) az $(L(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ tér is teljes, azaz Banach-tér. Ezzel a speciális esettel kapcsolatos a

4.4.2. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér, ill. az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér esetén az $L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ korlátos, lineáris funkcionálok összességét, pontosabban az $\mathcal{X}^* := L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ lineáris teret, ill. az $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ normált teret az $\mathcal{X}$ vektortér, ill. az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér **(topológiai) duális**ának (**duális terének** vagy **konjugált terének**) nevezzük.

A 4.4.2. definícióbeli $\|\cdot\|$ nem más, mint a 4.2.7. feladat utáni megjegyzésben bevezetett norma, ezért sok esetben $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ helyett gyakran csak $\mathcal{X}^*$-ot írunk. A 4.2.33. feladat következményeként elmondható, hogy

$$\dim(\mathcal{X}) < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{X}' = \mathcal{X}^*.$$

4.4.1. példa. A $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetében

$$\varphi : \mathfrak{c} \to \mathbb{K}, \qquad \varphi((x_n)) := \lim(x_n)$$

funkcionálra $\varphi \in \mathfrak{c}^*$, hiszen a sorozatok összegére és skalárszorosára vonatkozó azonosságok következtében φ lineáris, továbbá bármely $x \in \mathfrak{c}$ esetén

$$|\varphi((x_n))| = |\lim(x_n)| = \lim(|x_n|) \leq \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \|(x_n)\|_\infty.$$

A 4.4.1. pédabeli funkcionál tehát folytonos, és normájára $\|\varphi\| = 1$ teljesül, hiszen a fentiek miatt $\|\varphi\| \leq 1$, továbbá az

$$y_n := 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$1 = \|f((y_n))\| \geq \|\varphi\| \cdot \|y\|_\infty = \|\varphi\|.$$

Sőt az is igaz, hogy $\mathfrak{c}_0$ zárt altér $\mathfrak{c}$-ben, hiszen

$$\mathfrak{c}_0 = \mathcal{N}(\varphi) = \varphi^{-1}[\{0\}].$$

4.4.2. példa. Ha $a = (a_n) \in l_1$, akkor a

$$\varphi_a : l_\infty \to \mathbb{K}, \qquad \varphi_a((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

funkcionálra $\varphi_a \in (l_\infty)^*$, hiszen a végtelen sorok összegére és skalárszorosára vonatkozó azonosságok következtében φ_a lineáris, továbbá

- tetszőleges $(x_n) \in l_\infty$ esetén

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \|(a_n)\|_{l_1} \cdot \|x\|_{l_\infty},$$

  azaz a $\sum_{n=1}(a_n x_n)$ sor abszolút konvergens;
- a

  $$|\varphi_a(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \|(a_n)\|_{l_1} \cdot \|x\|_{l_\infty}$$

  egyenlőtlenséglánc következményeként φ_a korlátos.

A 4.4.2. példabeli φ_a funkcionál tehát folytonos, és normájára

$$\|\varphi_a\| = \|(a_n)\|_{l_1}$$

teljesül, hiszen a fentiek miatt $\|\varphi_a\| \leq \|(a_n)\|_{l_1}$, továbbá az

$$y_n := \mathrm{sgn}\,(a_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\|(y_n)\|_\infty = 1$ és

$$\varphi_a((y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sgn}\,(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sup\{|\varphi_a((x_n))| \in \mathbb{R} : \; \|(x_n)\|_\infty \leq 1\} = \|\varphi_a\|.$$

4.4.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty, \qquad f \in \mathcal{X}' : \quad f \geq 0$$

(azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $f(x) \geq 0$), akkor $f \in \mathcal{X}^*$ és ha $1 := \hat{1}|_{[a,b]}$, akkor

$$\|f\| = f(1)$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $0 \leq x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x\|_{\mathcal{X}} \cdot 1 \pm x \geq 0,$$

ezért

$$\|x\|_{\mathcal{X}} \cdot f(1) \pm f(x) \geq 0, \qquad \text{azaz} \qquad |f(x)| \leq f(1)\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f \in \mathcal{X}^*, \qquad \text{ill.} \qquad \|f\| \leq f(1).$$

Mivel

$$f(1) \leq \|f\| \cdot \|1\|_{\mathcal{X}} = \|f\|,$$

ezért

$$\|f\| = f(1). \quad \blacksquare$$

4.4.3. feladat. Igazoljuk, hogy a 4.4.1. feladatbeli bilineáris funkcionál folytonos!

Útm. Bármely $f, g \in \mathcal{X}^*$, ill. $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} |\langle f,x\rangle - \langle g,y\rangle| &= |f(x) - g(y)| = |f(x) - g(x) + g(x) - g(y)| = \\ &= |(f-g)(x) + g(x-y)| \leq |(f-g)(x)| + |g(x-y)| \leq \\ &\leq \|f-g\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} + \|g\| \cdot \|x-y\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \qquad ((f,x) \to (g,y)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.4.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, azaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\dim(\mathcal{X}) = n$, akkor van $\mathcal{X}$-ben, ill. $\mathcal{X}^*$-ban olyan $b_1, \ldots, b_n$, ill. $f_1, \ldots, f_n$ bázis, amelyre

$$\|b_k\| = 1, \qquad \|f_k\|_{\mathcal{X}^*} = 1, \qquad \text{és} \qquad f_k(b_l) = \delta_{kl} \qquad (k, l \in \{1, \ldots, n\})$$

teljesül (**Auerbach-bázis**)!

Útm. Ha

$$\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathcal{X}$$

bázis, akkor minden $x \in \mathcal{X}$ esetén egyértelműen megadhatók olyan $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x) \in \mathbb{K}$ együtthatók, hogy

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k.$$

Mivel a

$$\mu : \mathcal{X}^n \to \mathbb{K}, \qquad \mu(u_1, \ldots, u_n) := \det\left[\alpha_k(u_l)\right]_{k,l=1}^{n,n}$$

alternáló multilineáris leképezés folytonos, ezért, ha

$$G := \{u \in \mathcal{X} : \; \|u\| \leq 1\},$$

akkor a ∂G halmaz kompaktsága következtében van olyan

$$b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{X}, \qquad \|b_k\| = 1 \quad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

vektorrendszer, hogy

$$\mu(b_1, \ldots, b_n) = \max\left\{|\mu(u_1, \ldots, u_n)| \in \mathbb{R} : \; u_1, \ldots, u_n \in \partial G\right\}.$$

Így, ha $k \in \{1, \ldots, n\}$ és

$$f_k : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad f_k(u) := \frac{\mu(b_1, \ldots, b_{k-1}, u, b_{k+1}, \ldots, b_n)}{\mu(b_1, \ldots, b_n)},$$

akkor $f_k \in \mathcal{X}^*$, továbbá

$$f_k(b_l) = \delta_{kl}.$$

Világos, hogy

$$\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathcal{X}$$

bázis (maximálisan független rendszer), továbbá

$$\|f_k\| = \sup\left\{|f_k(u)| \in \mathbb{R} : \; \|u\| \leq 1\right\} \leq 1 \qquad \text{és} \qquad f_k(b_k) = 1,$$

így

$$\|f_k\| = 1 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}). \quad \blacksquare$$

4.4.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathcal{X}$ Auerbach-bázis, akkor bármely $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ esetén fenállnak az

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$$

egyenlőtlenségek!

Útm. A mádosik egyenlőtlenség a normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség következménye. Az első belátásához legyen

$$f_k \in \mathcal{X}^* \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

a 4.4.4. feladatbeli állítás biztosította bázisvektor. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}f_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k\right)\right| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}f_k\right\|_{\mathcal{X}^*} \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k\right\| \leq n \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k\right\|. \quad \blacksquare$$

4.4.6. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $d \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$ tér duálisa az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ tér!

Útm. Az

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$$

normált tér, ill. a $\varphi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ folytonos lineáris funkcionál esetében, ha $e_1, \ldots, e_d$ jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor bármely $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektorra

$$x = \sum_{k=1}^{d}x_k e_k, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{d}x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{d}x_k\varphi(e_k) =: \sum_{k=1}^{d}x_k\alpha_k = \langle x, \alpha\rangle$$

teljesül, ahol $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Így a

$$|\varphi(x)| = |\langle x, \alpha\rangle| \leq |x_1\alpha_1| + \ldots + |x_d\alpha_d| \leq \|x\|_1 \cdot \|\alpha\|_\infty,$$

becslésből $\|\varphi\| \leq \|\alpha\|_\infty$ következik. Világos, hogy alkalmas $l \in \{1, \ldots, d\}$ index esetén

$$\|\alpha\|_\infty = |\alpha_l|, \qquad \text{így} \qquad \|\alpha\|_\infty = |\varphi(e_l)| \leq \sup\{|\varphi(x)| \in \mathbb{R} : \|x\|_1 \leq 1\} = \|\varphi\|,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\|\varphi\| = \|\alpha\|_\infty.$$

Így a

$$\Phi : (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{X}^*, \|\cdot\|), \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \mapsto \varphi_a$$

leképezés izometrikus izomorfizmus, ahol

$$\varphi_\alpha(x) := \sum_{k=1}^{d}\alpha_k x_k \qquad \left(x = (x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=1}^{d}x_k e_k\right). \quad \blacksquare$$

4.4.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy bármely $d \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ tér duálisa az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$ tér!

4.4.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in (1, +\infty)$, ill. $q := 1 - 1/p$, akkor bármely $d \in \mathbb{N}$ esetén az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ tér duálisa az $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_q)$ tér!

Útm.

4.4.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty) \qquad \text{és} \qquad \varphi \in \mathcal{X}^*,$$

akkor

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi(e_n) \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{X}),$$

ahol

$$e_n := (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és a

$$v := (\varphi(e_n)) \qquad \text{vektorra} \qquad v \in l_1, \qquad \text{ill.} \qquad \|v\|_{l_1} = \|\varphi\|$$

teljesül, továbbá a

$$\Phi : (\mathcal{X}^*, \|\cdot\|) \to (l_1, \|\cdot\|_1), \qquad \varphi \mapsto (\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

leképezés izometrikus izomorfizmus!

Útm.

1. lépés. Mivel $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ szeparábilis tér (vö. 3.2.6. feladat), így a $\varphi \in \mathcal{X}^*$ folytonosságának felhasználásával tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ sorozatra

$$\varphi(x) = \varphi(\lim(\widetilde{x_n})) = \lim(\varphi(\widetilde{x_n})) = \lim(\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right)) = \lim\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(e_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi(e_k)$$

teljesül, ahol (vö. 3.2.6. feladat útmutatója)

$$(\widetilde{y_n})_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \qquad ((y_n) \in \mathfrak{c}_0)\,.$$

2. lépés. Világos, hogy ha

$$u_n := \operatorname{sgn}(\varphi(e_n)) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi(e_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_n \varphi(e_n)\right| = |\varphi(\widetilde{u_n})| \le \|\varphi\| \cdot \|(\widetilde{u_n})\|_\infty \le \|\varphi\| < \infty.$$

Így, ha
$$v := (v_n) := (\varphi(e_n)),$$
akkor $v \in l_1$ és $\|v\|_1 \leq \|\varphi\|$. Ha pedig $x = (x_n) \in \mathfrak{c}_0$, akkor
$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi(e_n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n v_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|\right) \cdot \|x\|_\infty = \|v\|_{l_1} \cdot \|x\|_\infty,$$
amiből $\|\varphi\| \leq \|v\|_1$ következik. Ez azt jelenti, hogy
$$\|v\|_1 = \|\varphi\|.$$

3. lépés. Az imént bizonyított egynlőség felhasználásával látható, hogy bármely $\varphi \in \mathcal{X}^*$ esetén
$$\|\Phi(\varphi)\|_{l_1} = \|(\varphi(e_n))\|_{l_1} = \|\varphi\|,$$
azaz Φ normatartó, így injektív is. Φ lineáris, hiszen bármely $\varphi, \psi \in \mathcal{X}^*$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$\Phi(\varphi + \alpha\psi) = (\varphi(e_n) + \alpha\psi(e_n)) = \Phi(\varphi) + \alpha\Phi(\psi).$$
Megmutatjuk, hogy Φ szürjektív. Ha
$$v := (v_n) \in l_1,$$
akkor a $\sum_{n=1}(v_n x_n)$ végtelen sor konvergens:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n x_n| \leq \|v\|_{l_1} \cdot \|x\|_\infty < \infty,$$
így a
$$\varphi_v : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n$$
lineáris funkcionál folytonos, hiszen bármely $x = (x_n) \in \mathcal{X}$ esetén
$$|\varphi_v(x)| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |v_n x_n| \leq \|v\|_{l_1} \cdot \|x\|_\infty.$$
Ha tehát $v := (v_n) \in l_1$, akkor a fenti φ_v funkcionálra
$$\Phi(\varphi_v) = (\varphi_v(e_n)) = (v_n). \quad \blacksquare$$

A fenti feladatben megfogalmazott állítás alapján elmondható, hogy $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ duális tere $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$.

4.4.8. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varphi \in \mathfrak{c}^*$, ill. $x = (x_n) \in \mathfrak{c}$ esetén

1. $(\varphi(e_n)) \in l_1$;
2. $\varphi(x) = \alpha(x)\left(\varphi(e) - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(e_n)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi(e_n)$;
3. $\|\varphi\| = \left|\varphi(e) - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(e_n)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(e_n)|$,

ahol

$$e_n := (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \alpha(x) := \lim(x_n) \qquad \text{és} \qquad e := (1,1\ldots)$$

(vö. 3.2.7. feladat)!

Útm.

1. Mivel bármely $\varphi \in \mathfrak{c}^*$ esetén $\varphi|_{\mathfrak{c}_0} \in \mathfrak{c}_0^*$, ezért $(\varphi(e_n)) \in l_1$.
2. Ha $\varphi \in \mathfrak{c}^*$, akkor φ linearitása és folytonossága következtében bármely $x = (x_n) \in \mathfrak{c}$ esetén, ha
$$\chi_\varphi := \varphi(e) - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(e_n),$$
akkor az
$$y_n := \alpha(x)e + \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha(x))e_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatra (vö. 3.2.7. feladat)
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(\lim(\widetilde{y_n})) = \lim(\varphi(\widetilde{y_n})) = \lim\left(\varphi\left(\alpha(x)e + \sum_{k=1}^{n}(x_k - \alpha(x))e_k\right)\right) = \\ &= \alpha(x)\varphi(e) + \lim\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_k - \alpha(x))\varphi(e_n)\right) = \\ &= \alpha(x)\chi_\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi(e_n).\end{aligned}$$
3. Az előző lépésben bizonyítottak alapján tetszőleges $x = (x_n) \in \mathfrak{c}$ esetén
$$|\varphi(x)| \leq |\alpha(x)| \cdot |\chi_\varphi| + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \cdot |\varphi(e_n)| \leq \left(|\chi_\varphi| + \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(e_n)|\right)\|x\|_\infty,$$
azaz
$$\|\varphi\| \leq ||\chi_\varphi| + \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(e_n)|.$$
Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$u_n := \operatorname{sgn}(\varphi(e_n)), \qquad \text{ill.} \qquad v_n := \operatorname{sgn}\left(\varphi(e) - \sum_{k=1}^{n}\varphi(e_n)\right),$$

ill.

$$w_k^{(n)} := \begin{cases} u_k & (k \le n), \\ \\ v_n & (k > n), \end{cases}$$

akkor a $w^{(n)} := \left(w_k^{(n)}\right)$ sorozatra

$$w^{(n)} \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad \lim_{k\to\infty} w_k^{(n)} = v_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá $\left\|w^{(n)}\right\|_\infty \le 1$ teljesül. Ezért

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(e) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\right| + \sum_{k=1}^{n} |\varphi(e_k)| \quad &= \quad \left|v_n \left(\varphi(e) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_n)\right) + \sum_{k=1}^{n} u_k\varphi(e_k)\right| = \\
&= \quad \left|v_n\chi_\varphi + \sum_{k=1}^{n} u_k\varphi(e_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} v_n\varphi(e_k)\right| = \\
&= \quad \left|v_n\chi_\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(n)}\varphi(e_k)\right| = |\varphi(w^{(n)})| \le \\
&\le \quad \|\varphi\| \cdot \|w^{(n)}\|_\infty \le \|\varphi\|,
\end{aligned}$$

így az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$|\chi_\varphi| + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(e_k)| \le \|\varphi\|. \quad \blacksquare$$

4.4.9. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$ tér duálisa az $(l_1, \|\cdot\|_{l_1})$ tér!

Útm. Megmutatjuk, hogy a

$$\Phi : (\mathfrak{c}^*, \|\cdot\|) \longrightarrow (l_1, \|\cdot\|_{l_1}), \qquad \varphi \mapsto (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

lineáris leképezés normatartó és bijektív, ahol

$$u_1 := \chi_\varphi, \qquad u_{n+1} := \varphi(e_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel bármely $\varphi \in \mathfrak{c}^*$ esetén

$$\|\Phi(\varphi)\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |\chi_\varphi| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \|\varphi\|,$$

ezért Φ normatartó, és így injektív. Bármely $u = (u_n) \in l_1$ sorozat esetén a

$$\varphi_u : \mathfrak{c} \to \mathbb{K}, \qquad (x_n) \mapsto u_1 \lim(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_{n+1}$$

lineáris funkcionál folytonos, hiszen

$$|\varphi_u(x)| \leq |u_1| \cdot \|x\|_\infty + \|u\|_{l_1} \cdot \|x\|_\infty \leq 2\|u\|_{l_1} \cdot \|x\|_\infty.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_u(e_n) = u_{n+1}$$

és

$$\chi_{\varphi_u} = \varphi_u(e) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_u(e_n) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = u_1,$$

ezért

$$\Phi(\varphi_u) = u. \quad \blacksquare$$

4.4.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$p, q \in [1, +\infty): \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

akkor az $(l_p, \|\cdot\|_{l_p})$ tér duálisa az $(l_q, \|\cdot\|_{l_q})$ tér!

Útm.

1. lépés. Ha $u \in l^q$, akkor a

$$\varphi_u : l_p \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$$

funkcionálra $\varphi_u \in l_p^*$, hiszen a Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|\varphi_u(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n\right| \leq \|u\|_{l_q} \cdot \|x\|_{l_p} \qquad (x \in l_p),$$

azaz bármely $x \in l_p$ esetén $\varphi_u(x) \in \mathbb{K}$, továbbá a végtelen sorok összegére és számszorosára vonatkozó állítás felhasználásával egyszerűen belátható, hogy φ lineáris. A fenti becslésből az is következik, hogy φ_u korlátos, és bármely $u \in l_q$ esetén

$$\|\varphi_u\| \leq \|u\|_{l_q}.$$

2. lépés. Ha

- $p > 1$, azaz $q < +\infty$, akkor az

$$x_n := |u_n|^{q-1} \mathrm{sgn}\,(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$|x_n|^p = |u_n|^{(q-1)p} = |u_n|^q \qquad (n \in \mathbb{N})$$

így $u \in l_q$ következtében $x \in l_p$. Az is igaz továbbá, hogy

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^q\right)^{1/p} = (\|u\|_{l_q})^{p/q} = \|u\|_{l_q}^{q-1},$$

ezért

$$|\varphi_u(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^{q-1}|u_n| = \|u\|_{l_q}^q = \|u\|_{l_q}^{q-1}\|u\|_{l_q} = \|u\|_{l_q}\|x\|_{l_p},$$

azaz $\|\varphi_u\| \geq \|u\|_{l_q}$. Ez az 1**. lépés**beli egyenlőtlenséggel együtt azt jelenti, hogy

$$\|\varphi_u\| = \|u\|_{l_q}.$$

- $p = 1$, azaz $q = +\infty$, akkor a szuprémum definíciója következtében bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

  $$|u_N| > \|u\|_{l_\infty} - \varepsilon.$$

  Így az

  $$e_N := (\delta_{jN})_{j\in\mathbb{N}} \in l_1$$

  sorozattal

  $$\|\varphi_u\| = \|\varphi_u\| \cdot \|e_N\|_{l_1} \geq |\varphi_u(e_N)| = |u_N| > \|u\|_{l_\infty} - \varepsilon,$$

  ahonnan $\|\varphi_u\| \geq \|u\|_{l_\infty}$ következik. Ez az 1**. lépés**beli egyenlőtlenséggel együtt azt jelenti, hogy

  $$\|\varphi_u\| = \|u\|_{l_\infty}.$$

3. lépés. A

$$\Phi : (l_q, \|\cdot\|_{l_q}) \longrightarrow ((l_p)^*, \|\cdot\|_{(l_p)^*}), \qquad u \mapsto \Phi(u) := \varphi_u$$

leképezés izometrikus izomorfizmus, hiszen

- φ_u definíciója következtében Φ lineáris.
- a

  $$\|\Phi(u)\| = \|\varphi_u\| = \|u\|_{l_q} \qquad (u \in l_q)$$

  egyenlőség miatt Φ normatartó, így egyben injektív is.
- ha $v \in (l_p)^*$, akkor könnyen belátható, hogy

  $$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v(e_n) \qquad (x \in l_p),$$

  ahol

  $$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  (vö. 4.4.7. feladat útmutatója), így (vö. 5.1.1. gyakorló feladat) $(v(e_n)) \in l_q$ következtében az

  $$u := (v(e_n)) \in l_q$$

  sorozattal

  $$\varphi_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n = v(x) \quad (x \in l_p), \qquad \text{azaz} \qquad \Phi(u) = v.$$

  Ez pedig azt jelenti, hogy Φ szürjektív. ■

4.4.1. megjegyzés. Megmutatható, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ tér duálisa a $(\mathfrak{BVN}[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{BV}})$ tér, ahol

$$\mathfrak{BVN}[a,b] := \{f \in \mathfrak{BV}[a,b]: \ f(a)=0, \ \ f(x)=f(x+0)\ (x \in (a,b))\}\,.$$

4.4.11. feladat. Adott $0 \neq a \in \mathbb{R}$, ill. $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén legyen Φ_f az

$$y' + ay = f, \qquad y(0) = 0$$

kezdetiérték-feladat megoldása.

1. Mutassuk meg, hogy a

   $$\varphi : (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_{L^2}) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) := \int_0^1 \Phi_f$$

   lineárs funkcionál folytonos!
2. Adjunk példát olyan $g \in L^2[0,1]$ függvényre, amelyre

   $$\varphi(f) = \langle f, g\rangle_{L^2}$$

   teljesül!

Útm.

1. Mivel a fenti differenciálegyenlet lineáris, ezért Φ_f megoldására

   $$\Phi_f = \frac{f-\Phi_f'}{a}, \qquad \text{ill.} \qquad \Phi_f(x) = e^{-ax}\cdot\int_0^1 e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   teljesül. Így

   $$\begin{aligned} \varphi(f) &= \int_0^1 \Phi_f = \frac{1}{a}\int_0^1 (f(t)-\Phi_f'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \Phi_f'(1) + \underbrace{\Phi_f'(0)}_{=0}\right) = \\ &= \frac{1}{a}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - e^{-a}\cdot\int_0^1 e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f(t)\cdot\underbrace{\frac{1-e^{-a(t-1)}}{a}}_{\equiv:\alpha(t)}\,\mathrm{d}t = \\ &= \langle f, \overline{\alpha}\rangle_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\cdot\|\alpha\|_{L^2}, \end{aligned}$$

   tehát φ folytonos.
2. Ha a $g := \overline{\alpha} \in L^2[0,1]$, akkor

   $$\varphi(f) = \langle f, g\rangle_{L^2}$$

   teljesül. ■

4.4.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, akkor a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*, \qquad \varphi(a) := f_a$$

leképezésre (vö. 4.2.31. feladat) igazak az alábbi állítások!

1. φ **konjugált lineáris**, azaz bármely $u, v \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + \overline{\alpha}\varphi(v).$$

2. φ normatartó, azaz

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|\varphi(x)\| \qquad (x \in \mathcal{X})$$

(ennélfogva injektív).

3. φ szürjektív.

Útm.

1. lépés. A φ leképezés konjugált lineáris, hiszen bármely $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\varphi(u + \alpha v) = f_{u+\alpha v} = \langle\cdot, u + \alpha v\rangle = \langle\cdot, u\rangle + \overline{\alpha}\langle\cdot, v\rangle = f_u + \overline{\alpha} f_v = \varphi(u) + \overline{\alpha}\varphi(v)$$

/sőt folytonos is, hiszen bármely

$$a_n \in \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(a_n) = a \in \mathcal{X}$$

sorozatra (vö. 1.4.24. feladat)

$$\lim(\varphi(a_n)) = \lim(f_{a_n}) = \lim(\langle\cdot, a_n\rangle) = \langle\cdot, \lim(a_n)\rangle = \langle\cdot, a\rangle = f_a = \varphi(a)/.$$

2. lépés. A 4.2.31. feladatból tudjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

3. lépés. φ injektív, hiszen bármely $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$ esetén

$$\varphi(u) = \varphi(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\cdot, u\rangle = \langle\cdot, v\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\cdot, u - v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u - v = 0.$$

4. lépés. Megmutatjuk, hogy φ szürjektív, azaz bármely $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionálhoz van olyan $a \in \mathcal{X}$ vektor, amelyre

$$f(x) = f_a(x) = \langle x, a\rangle \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Ezt az a vektort az

$$\mathcal{N}(f) = \{x \in \mathcal{X} : \; f(x) = 0\}$$

magtérre merőleges vektorokból fogjuk kiválasztani. Ha

- $f = \varphi_0 \in \mathcal{X}^*$, ahol
$$\varphi_0(x) := 0 = \langle x,0 \rangle \in \mathbb{K} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
akkor az $a := 0$ vektorra $\varphi_a = f$.

- Ha tehát $\varphi_0 \neq f \in \mathcal{X}^*$, akkor $\mathcal{N}(f)$ olyan zárt altér $\mathcal{X}$-ben (vö. 4.3.5. feladat), amelyre $\mathcal{X} \neq \mathcal{N}(f)$. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $u \in \mathcal{X}$ esetén $u \notin \mathcal{N}(f)$, azaz $f(u) \neq 0$. Feltehető, hogy
$$u \in \mathcal{N}(f)^{\perp},$$
hiszen ellenkező esetben a Riesz-féle felbontási tétel (vö. 2.5.6. feladat) következtében alkalmas $v \in \mathcal{N}(f)$ és $w \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ esetén
$$u = v + w,$$
azaz az
$$y := u - v$$
elemre
$$y = w \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$$
és f linearitása folytán
$$f(y) = f(u) - f(v) = f(u) \neq 0.$$
Ismét felhasználva, hogy f lineáris, a fenti
$$0 \neq u \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$$
vektorra
$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
azaz
$$f(x)u - f(u)x \in \mathcal{N}(f) \qquad (x \in \mathcal{X})$$
teljesül. Ez azt jelenti, hogy
$$0 = \langle f(x)u - f(u)x, u \rangle = f(x)\langle u, u \rangle - f(u)\langle x, u \rangle \qquad (x \in \mathcal{X}),$$
azaz
$$f(x) = f(u)\frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \left\langle x, \frac{\overline{f(u)}u}{\langle u, u \rangle} \right\rangle \qquad (x \in \mathcal{X}).$$
Látható, hogy
$$a := \frac{\overline{f(u)}u}{\langle u, u \rangle},$$
a megfelelő választás. ■

A 4.4.12. feladatbeli φ leképezés tehát izometrikus. Sőt, ha valamely $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionál és $\lambda \in \mathbb{K}$ szám szorzatán azt a $\lambda f \in \mathcal{X}^*$ funkcionált értjük, amelyre

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor φ még izomorfizmus is. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{X}$ és $\mathcal{X}^*$ lineáris terek izometrikusan izomorfak, továbbá (vö. 4.2.31. feladat) speciális esetként adódik a

4.4.1. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\| \cdot \|^2_{\mathcal{X}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ és $f : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$, akkor

$$f \in \mathcal{X}^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists | \alpha \in \mathcal{X} : \quad f(x) = \langle x, \alpha \rangle \quad (x \in \mathcal{X})$$

és

$$\|f\| = \|\alpha\|_{\mathcal{X}}$$

(**Riesz-Fréchet-tétel**).

4.4.3. példa. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos, lineáris leképezés, akkor pontosan egy olyan

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

vektor van, amelyre

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

és

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} = \|\alpha\|_2$$

teljesül.

4.4.4. példa. Ha $f : l_2 \to \mathbb{K}$ korlátos, lineáris leképezés, akkor pontosan egy olyan $\alpha = (\alpha_n) \in l_2$ sorozat van, amelyre

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\alpha_n} \qquad (x = (x_n) \in l_2)$$

és

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2} = \|\alpha\|_{l_2}$$

telesül.

4.4.5. példa. Ha $f : L^2[a,b] \to \mathbb{K}$ korlátos, lineáris leképezés, akkor pontosan egy olyan $g \in L^2[a,b]$ függvény van, amelyre

$$f(x) = \sqrt{\int_a^b x(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t} \qquad (x \in L^2[a,b])$$

és

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t} = \|g\|_{L^2}$$

telesül.

Az **??**. tétel esetében lényeges az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tér teljessége.

4.4.6. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \{x = (x_n) \in l_2 :\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq k \in \mathbb{N} :\ x_k = 0\},$$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{X}),$$

akkor az $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér nem teljes (vö. 1.2.57. feladat). A

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

leképezés valamely $\phi \in (l_2)^*$ funkcionál leszűkítése, így az **??**. tétel következményeként alkalmas $\alpha \in \mathcal{X}$ esetén

$$\phi(x) = \langle x, \alpha\rangle_{l_2} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Mivel bármely $\alpha \in \mathcal{X}$ sorozatra

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \qquad \text{ahol} \qquad e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\langle e_n, \alpha\rangle_{l_2} = 0 \neq \frac{1}{n} = \varphi(e_n).$$

Az alkalmazott matematikában (különösen a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásánál) igen nagy jelentőséggel bír a Riesz-Fréchet-tétel alábbi következménye.

4.4.13. feladat. Legyen $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ és $\mathfrak{b} : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{K}$ olyan korlátos, elliptikus, bilineáris funkcionál, amelyre

$$\mathfrak{b}(u,v) = \overline{\mathfrak{b}(v,u)} \qquad (u,v\in\mathcal{X})$$

továbbá alkalmas $0 < k \leq K < +\infty$ és tetszőleges $u,v\in\mathcal{X}$ esetén

$$|\mathfrak{b}(u,v)| \leq K\|u\|\cdot\|v\| \qquad \text{és} \qquad |\mathfrak{b}(u,u)| \geq k\|u\|^2$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

1. pontosan egy olyan bijektív $A \in L(\mathcal{X})$ operátor van, amelyre

$$\mathfrak{b}(u,v) = \langle Au, v\rangle \quad (u,v\in\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| \leq K;$$

2. ennek az operátornak az inverzére

$$A^{-1} \in L(\mathcal{X},\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \left\|A^{-1}\right\| \leq 1/k$$

teljesül ((lineáris) **Lax-Milgram-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Tetszőleges $u\in\mathcal{X}$ esetén értelmezzük a φ_u funkcionált a következő módon:

$$\varphi_u(v) := \mathfrak{b}(u,v) \qquad (v\in\mathcal{X}).$$

Ekkor $\mathfrak{b}$ korlátossága következtében

$$|\varphi_u(v)| = |\mathfrak{b}(u,v)| \leq K\|u\|\cdot\|v\| \qquad (u\in\mathcal{X}),$$

ezért

$$\varphi_u \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad \|\varphi_u\|_{\mathcal{X}^*} = \|\mathfrak{b}(u,\cdot)\|_{\mathcal{X}^*} \leq K\|u\|,$$

így a Riesz-Fréchet-tétel miatt

$$\exists|\alpha\in\mathcal{X}: \quad \mathfrak{b}(u,v) = \varphi_u(v) = \langle v,\alpha\rangle.$$

2. lépés. A $\mathfrak{b}$ funkcionál bilinearitása következtében az

$$A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}, \qquad Au := \alpha$$

operátor lineáris és folytonos, ui.

$$\begin{aligned}\langle A(u_1+\lambda u_2), v\rangle &\equiv \mathfrak{b}(\alpha_1+\lambda\alpha_2, v) = \mathfrak{b}(\alpha_1,v)+\lambda\mathfrak{b}(\alpha_2,v) \equiv \\ &\equiv \langle Au_1,v\rangle + \langle Au_2,v\rangle \equiv \langle Au_1+\lambda Au_2, v\rangle\end{aligned}$$

és

$$\|Au\| = \|\alpha\| \equiv \|\varphi_u\| = \|\mathfrak{b}(u,\cdot)\| \leq K\|u\| \quad (u\in\mathcal{X}) \qquad (\Longrightarrow \quad \|A\|\leq K).$$

3. lépés. A $\mathfrak{b}$ funkcionál elliptikussága (vö. 1.3.19. definíció) következtében

$$k\|u\|^2 \leq \Re(\mathfrak{b}(u,u)) = \Re(\langle u, Au\rangle) \leq |\langle u, Au\rangle| \leq \|u\| \cdot \|Au\| \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$k\|u\| \leq \|Au\|.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{R}(A)$ zárt altér, A injektív, A^{-1} korlátos (és $\left\|A^{-1}\right\| \leq 1/k$).

4. lépés. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$. Ha $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{X}$ volna, akkor $\mathcal{R}(A)$ zártsága miatt lenne olyan

$$\xi \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \backslash \{0\},$$

ahonnan az $\alpha := A\xi$ választással

$$k\|\xi\|^2 \leq \Re\left(\mathfrak{b}(\xi,\xi)\right) = \Re\left(\langle A\xi, \xi\rangle\right) = 0$$

következne, ami nyilvánvalóan nem igaz. ■

4.4.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathfrak{b}$ a 4.4.13. feladatbeli funkcionál, úgy tetszőleges $f \in \mathcal{X}^*$ esetén pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$\mathfrak{b}(u,v) = f(v) \quad (v \in \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|u\| \leq \frac{1}{k} \cdot \|f\| \quad (\textbf{stabilitás}) \tag{4.4.1}$$

teljesül!

Útm. Ha φ a 4.4.12. feladatbeli izometrikus izomorfia, és A a 4.4.13. feladatban bevezetett operátor, továbbá

$$u := A^{-1}\varphi^{-1}(f),$$

akkor

$$Au = \varphi^{-1}(f),$$

és így

$$\mathfrak{b}(u,v) = \langle au, v\rangle = \langle \varphi^{-1}(f), v\rangle = \varphi(\varphi^{-1}(f))(v) = f(v).$$

Ezért φ izometriája miatt

$$\|u\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|f\| \leq \frac{1}{k} \cdot \|f\|. \quad ■$$

A (4.4.1)-beli második állítást azért hívják stabilitásnak, mert az f_1, ill. az f_2 funkcionálokhoz tartozó u_1, ill. u_2 megoldásokra a linearitás miatt teljesül a

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{k} \cdot \|f_1 - f_2\|$$

hibabecslés. Ezt az állítást sokszor úgy fogalmazzák, hogy a

$$\mathfrak{b}(u, \cdot) = f$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van, és a megoldás „folytonosan függ a jobboldaltól”.

Ha $\mathfrak{b}$ még szimmetrikus és pozitív definit is (azaz $\mathfrak{b}$ skaláris szorzat), akkor u az

$$F(v) := \frac{\mathfrak{b}(v,v)}{2} - \Re(f(v)) \qquad (v \in \mathcal{X})$$

funkcionál abszolút minimumhelye, ui.

$$\begin{aligned}
F(v) - F(u) &= \frac{\mathfrak{b}(v,v)}{2} - \Re(f(v)) - \frac{\mathfrak{b}(u,u)}{2} + \Re(f(u)) = \\
&= \frac{\mathfrak{b}(v,v) - \mathfrak{b}(u,u)}{2} - \Re(f(v-u)) = \\
&= \frac{1}{2}\{\mathfrak{b}(v,v) - \mathfrak{b}(u,u)\} - \Re(\mathfrak{b}(u,v-u)) = \\
&= \frac{\mathfrak{b}(v,v) - \mathfrak{b}(u,v) - \mathfrak{b}(v,u) + \mathfrak{b}(u,u)}{2} = \\
&= \frac{\mathfrak{b}(v-u,v-u)}{2} \geq \frac{k}{2}\|v-u\|^2 \quad (u,v \in \mathcal{X}).
\end{aligned}$$

4.4.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\mathcal{Y} := \mathbb{K}$ és $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ az $a \in \mathcal{X}$-ben differenciálható függvény, akkor van olyan

$$\operatorname{grad} f(a) \in \mathcal{X}$$

vektor (f **gradiense**), hogy

$$f'(a)(h) = \langle h, \operatorname{grad} f(a)\rangle \qquad (h \in X)$$

teljesül!

Útm. Mivel $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és

$$f'(a) \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}),$$

ezért (vö. **??**. tétel) van olyan $u \in \mathcal{X}$, hogy

$$f'(a)(u) = \langle h, u\rangle \qquad (h \in \mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

4.4.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, akkor $\mathcal{X}^*$ is Hilbert-tér!

Útm. Mivel $\mathcal{X}^*$ Banach-tér (vö. 4.3.8. feladat), azt kell megmutatni, $\mathcal{X}^*$-ban az operátornorma skaláris szorzatból származik.

1. lépés. Az 4.4.12. feladatban bebizonyított állítás következtében a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*, \qquad \varphi(a) := f_a$$

leképezés konjugált lineáris és bijektív. Megmutatjuk, hogy φ^{-1} is konjugált lineáris. Ha $f, g \in \mathcal{X}^*$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor φ bijektivitása következtében pontosan egy olyan $x, y \in \mathcal{X}$ vektor(pár) van, amelyekre

$$\varphi(x) = f \qquad \text{és} \qquad \varphi(y) = g$$

teljesül. Így

$$\varphi(x + \overline{\alpha}y) = \varphi(x) + \overline{\overline{\alpha}}\varphi(y) = f + \alpha g,$$

ahonnan

$$\varphi^{-1}(f) = x, \qquad \varphi^{-1}(g) = y, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{-1}(f + \alpha g) = x + \overline{\alpha}y$$

miatt

$$\varphi^{-1}(f + \alpha g) = x + \overline{\alpha}y = \varphi^{-1}(f) + \overline{\alpha}\varphi^{-1}(g)$$

következik.

2. lépés. A

$$h : \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \qquad h(f, g) := \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f) \rangle$$

leképezés skaláris szorzat, hiszen

- egyrészt tetszőleges $f_1, f_2, g \in \mathcal{X}^*$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} h(f_1 + f_2, g) &= \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f_1 + f_2)) \rangle \rangle = \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f_1) + \varphi^{-1}(f_2) \rangle = \\ &= \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f_1)) \rangle + \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f_2) \rangle = \\ &= h(f_1, g) + h(f_2, g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha f, g) &= \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(\alpha f) \rangle = \langle \varphi^{-1}(g), \overline{\alpha}\varphi^{-1}(f) \rangle = \\ &= \overline{\overline{\alpha}} \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f) \rangle = \alpha h(f, g), \end{aligned}$$

$$h(f, g) = \langle \varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f) \rangle = \overline{\langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(g) \rangle} = \overline{h(g, f)},$$

  ill.

$$h(f, f) = \langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(f) \rangle \geq 0,$$

- másrészt pedig ha valamely $f \in \mathcal{X}^*$ esetén $h(f, f) = 0$, akkor

$$\langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(f) \rangle = 0,$$

  ahonnan

$$\varphi^{-1}(f) = 0$$

  és így $f = 0$ következik, hiszen φ bijektív és

$$\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0.$$

3. lépés. φ bijektivitásának következményeként bármely $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionálhoz pontosan egy olyan $x \in \mathcal{X}$ vektor van, amelyre

$$\varphi(x) = f.$$

Így φ normatartása (vö. 4.4.12. feladat) miatt

$$\|f\| = \|\varphi(x)\| = \|x\|_{\mathcal{X}} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(f)\rangle} = \sqrt{h(f,f)}. \quad \blacksquare$$

4.4.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ valós normált tér, $f \in \mathcal{X}^*$, akkor bármely $K \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz esetén van olyan $a, b \in K$, hogy

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad (x \in K)$$

teljesül!

Útm. Vö. 1.1.58. feladat. $\blacksquare$

Világos, hogy ha K-ról csak annyit követelünk meg, hogy korlátos és zárt legyen, akkor $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$ esetén K nem feltétlenül lesz kompakt (vö. 1.2.78. feladat vagy 1.3.13. példa). Így előfordulhat, hogy f nem veszi fel valamelyik szélsőértékét.

4.4.7. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty,$$

továbbá

$$K := \{f \in \mathcal{X} : \; f(0) = 0, \; f(1) = 1, \; \|f\| \leq 1\},$$

akkor könnyen belátható, hogy K korlátos és zárt halmaz az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált térben. Ha

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) := \int_0^1 |f|,$$

akkor $\varphi \in \mathcal{X}^*$, de φ nem veszi fel K-n minimumát, hiszen ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := x^n,$$

akkor $f_n \in K \; (n \in \mathbb{N})$ és

$$\varphi(f_n) = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1},$$

így

$$\inf\{\varphi(f) \in \mathbb{R} : \; f \in K\} = 0,$$

viszont nincsen olyan folytonos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \int_0^1 |f| = 0$$

teljesülne.

4.4.18. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty)$ mérték, akkor igaz a

$$\nu \ll \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, f \in L^+(\mu) : \ \nu = \mu_f$$

ekvivalencia (**Radon-Nikodým-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha $\nu := \mu_f$, akkor (vö. 11.4.3. állítás) $\nu \ll \mu$.

2. lépés. Ha (a $\mu + \nu$ mérték szerint) $h \in \mathcal{H} := L^2$, akkor $\mu + \nu$ végessége folytán $h \in L^1$, sőt (vö. 11.4.1. állítás)

$$\int |h| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}.$$

Ha most

$$\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(h) := \int h \,\mathrm{d}\mu,$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség (vö. 11.4.11/4. tétel) felhasználásával ($p = q = 2$) azt kapjuk, hogy

$$|\varphi(h)| = \left|\int h \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |h| \cdot |1| \,\mathrm{d}\mu = \|h \cdot 1\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^2} \cdot \|1\|_{L^2} = \|h\|_{L^2},$$

azaz φ korlátos, lineáris funkcionál.

3. lépés. A Riesz-Fréchet-tétel (vö. 4.4.1. tétel) következtében van olyan $F \in \mathcal{H}$, hogy

$$\int h \,\mathrm{d}\mu = \varphi(h) = \langle h, F\rangle_{L^2} = \int h \cdot F \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int h \cdot F \,\mathrm{d}\nu + \int h \cdot F \,\mathrm{d}\mu,$$

azaz

$$\int h \cdot (1 - F) \,\mathrm{d}\mu = \int h \cdot F \,\mathrm{d}\nu.$$

Ha

$$N := \{x \in \mathcal{X} : \ F(x) \leq 0\}, \qquad \text{akkor} \qquad (1 - F)(x) \geq 1 \quad (x \in N),$$

így

$$0 \leq \mu(N) = \int \chi_N \,\mathrm{d}\mu \leq \int \chi_N (1 - F) \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_N F \,\mathrm{d}\nu \leq 0,$$

ahonnan $\mu(N) = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy $F > 0$ μ-m.m.

4. lépés. Ha $\nu \ll \mu$, akkor a fenti N halmaz ν szerint nullmértékű: $\nu(N) = 0$, így bármely $A \in \Omega$ mérhető halmaz esetén

$$\nu(A) = \int \chi_A \,\mathrm{d}\nu = \int \frac{1}{F} \chi_A F \,\mathrm{d}\nu = \int F \chi_A (1 - F) \,\mathrm{d}\mu = \int_A \frac{1 - F}{F} \,\mathrm{d}\mu.$$

Ezért az

$$f := \frac{1 - F}{F}$$

függvény, ill. az

$$A := \{x \in \mathcal{X} : \ f(x) < 0\}$$

(mérhető) halmaz esetén

$$0 \leq \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq 0, \qquad \text{azaz} \qquad \nu(A) = 0. \quad \blacksquare$$

4.5. Operátorok kiterjesztése

4.5.1. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ pedig Banach-tér, akkor minden $A \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátornak pontosan egy olyan $B \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ kiterjesztése van $(A \subset B)$, amelyre

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(B),$$

továbbá erre a B opeátorra

$$\|B\| = \|A\|$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, akkor van olyan

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy

$$\lim(x_n) = x,$$

továbbá

$$\|Ax_m - Ax_n\| = \|A\,(x_m - x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_m - x_n\| \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Így az

$$Ax_n \in \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat Cauchy-sorozat, és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljessége miatt konvergens is:

$$y := \lim(Ax_n) \in \mathcal{Y}.$$

2. lépés. Az y vektor persze független az (x_n) sorozat megválasztásától, ui. ha az

$$x'_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim\left(x'_n\right) = x', \qquad \lim\left(Ax'_n\right) =: y',$$

akkor

$$\begin{aligned}
\|y - y'\| &= \|y - Ax_n + Ax_n - Ax'_n + Ax'_n - y'\| \leq \\
&\leq \|y - Ax_n\| + \|A\| \cdot \|x_n - x + x - x'_n\| + \|Ax'_n - y'\| \leq \\
&\leq \|y - Ax_n\| + \|A\| \cdot \{\|x_n - x\| + \|x - x'_n\|\} + \\
&\quad + \|Ax'_n - y'\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

azaz

$$y = y'.$$

3. lépés. Ha

$$Bx := \lim(Ax_n) \qquad (x \in \overline{\mathcal{D}(A)}: \quad x = \lim(x_n), \quad x_n \in \mathcal{D}(A) \ \ (n \in \mathbb{N})),$$

akkor a B operátorra

$$B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$$

teljesül, ui. ha $u, v \in \mathcal{D}(B)$ olyan, hogy az

$$u_n, v_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra

$$\lim (u_n) = u, \qquad \lim (v_n) = v,$$

akkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$B\,(u + \alpha v) = \lim\,(A\,(u_n + \alpha v_n)) = \lim\,(Au_n + \alpha A v_n) = Bu + \alpha Bv.$$

4. lépés. A

$$B \in \ L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$$

operátorra:

$$\|B\| = \|A\|,$$

ui. egyrészt világos, hogy

$$\|B\| \geq \|A\|,$$

másrészt, ha

$$u \in \mathcal{D}(B) = \overline{\mathcal{D}(A)}, \qquad u_n \in \mathcal{D}(A) \quad (n \in \mathbb{N}): \qquad \lim(u_n) = u,$$

akkor

$$\lim(\|u_n\|) = \|u\|$$

és a norma folytonossága (vö. 1.3.41. feladat) miatt

$$\|Bu\| = \lim\,(\|Au_n\|) \leq \lim\,(\|A\| \cdot \|u_n\|) = \|A\| \cdot \|u\|\,,$$

azaz

$$\|B\| \leq \|A\|.$$

5. lépés. Az egyértelműség pedig B folytonosságának a következménye. ■

4.5.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér,

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pedig olyan operátor-sorozat, amelyre alkalmas $K > 0$ számmal

$$\|A_n\| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, továbbá valamely

$$\overline{\text{span}\,(H)} = \mathcal{X}$$

halmaz esetén

$$\lim(A_n x) \in \mathcal{X} \qquad (x \in H),$$

akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ mellett

$$Ax := \lim(A_n x) \in \mathcal{X}$$

és $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, azaz A folytonos, lineáris operátor!

Útm. Ha

$$M := \text{span}\,(H),$$

akkor az

$$Ay := \lim(A_n y) \in \mathcal{X} \qquad (y \in M)$$

operátorra

$$A \in \mathfrak{L}(M, \mathcal{Y}).$$

A norma folytonosságából (vö. 1.3.41. feladat)

$$\|Ay\| = \lim(\|A_n y\|) \leq K\|y\| \qquad (y \in M),$$

azaz $A \in L(M, \mathcal{Y})$ következik. Így, ha

$$B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

az A operátornak a 4.5.1. feladat szerinti egyértelmű kiterjesztése, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ és $y \in M$ esetén

$$\|Bx - A_n x\| \leq \|By - A_n y\| + (\|B\| + K)\|x - y\| \longrightarrow (\|B\| + K)\|x - y\| \qquad (n \to \infty).$$

Mivel

$$\overline{\text{span}\,(H)} = \mathcal{X},$$

ezért bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan, hogy

$$\|x - y\| < \varepsilon,$$

ahonnan

$$Bx = \lim(A_n x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következik. ■

4.5.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ valós lineáris tér és

(1) $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ szubadditív, pozitívan homogén függvény, azaz bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \geq 0$ esetén

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \text{és} \qquad p(\alpha x) = \alpha p(x);$$

(2) alkalmas $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetén $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre

$$f(u) \leq p(u) \qquad (u \in \mathcal{A}),$$

akkor van olyan $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre

$$F(x) = f(x) \quad (x \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad F(x) \leq p(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül, azaz bármely valós lineáris tér egy alterén értelmezett szubadditív, pozitívan homogén függvénnyel majorált funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a majorálás megtartásával (**Hahn-Banach-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy ha

$$x^* \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{A} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} := \operatorname{span}(\mathcal{A} \cup \{x^*\}),$$

akkor bármely $y \in \mathcal{Y}$ elem egyértelműen írható az

$$y = x + \alpha x^* \qquad (x \in \mathcal{A},\, \alpha \in \mathbb{R})$$

alakba, hiszen – a felírás triviális volta mellet – ha valamely $x' \in \mathcal{A}$ és $\alpha' \in \mathbb{R}$ esetén

$$y = x' + \alpha' x^*,$$

akkor

$$x - x' = (\alpha' - \alpha)x^* \in \mathcal{A},$$

ahonnan

$$\alpha' - \alpha = 0, \qquad \text{ill.} \qquad x - x' = 0$$

következik. Megmutatjuk, hogy f-et ki lehet terjeszteni $\mathcal{Y}$-ra a linearitás és a majorálás megtartásával. Ha

$$f^* : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$$

egy ilyen kiterjesztés, akkor az

$$y = x + \alpha x^*$$

vektorra

$$(*) \qquad f^*(y) = f^*(x) + \alpha f^*(x^*) =: f(x) + \alpha\gamma \qquad /\gamma := f^*(x^*)/.$$

Világos, hogy γ helyébe tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ számot helyettesítve lineáris kiterjesztést kapunk. Azt fogjuk belátni, hogy alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$(**) \qquad f^*(y) \leq p(y) \qquad (y \in \mathcal{Y})$$

teljesül. A $(*)$ felhasználásával $(**)$ az

$$(***) \qquad f(x) + \alpha c \leq p(x + \alpha x^*) \qquad (x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{R})$$

alakba írható. Így, ha

- $\alpha = 0$, akkor $(***)$ triviálisan teljesül.
- $\alpha > 0$, akkor $(***)$ egyenértékű az

  $$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{\alpha} + x^*\right),$$

  ill. $u := \dfrac{x}{\alpha} \in \mathcal{A}$ esetén a

  $$c \leq p(u + x^*) - f(u) \qquad (u \in \mathcal{A})$$

  egyenlőtlenség fennállásával.
- $\alpha < 0$, akkor $-\alpha > 0$, ezért $(***)$ pontosan akkor teljesül, ha

  $$f\left(-\frac{x}{\alpha}\right) - c \leq p\left(-\frac{x}{\alpha} - x^*\right),$$

  azaz a $v := -\dfrac{x}{\alpha} \in \mathcal{A}$ vektorral

  $$f(v) - p(v - x^*) \leq c \qquad (v \in \mathcal{A}).$$

Tehát $(***)$ vagy $(**)$ pontosan akor teljesül, ha bármely $u, v \in \mathcal{A}$ esetén

$$f(v) - p(v - x^*) \leq c \leq p(u + x^*) - f(u).$$

Mivel minden $u, v \in \mathcal{A}$ esetén

$$f(u) + f(v) = f(u + v) \leq p(u + v) = p(u + x^* + v - x^*) \leq p(u + x^*) + p(v - x^*),$$

ezért

$$f(v) - p(v - x^*) \leq p(u + x^*) - f(u),$$

ill.

$$a := \sup\{f(v) - p(v - x^*) \in \mathbb{R} :\ v \in \mathcal{A}\} \leq \inf\{p(u + x^*) - f(u) \in \mathbb{R} :\ u \in \mathcal{A}\} =: b.$$

Így bármely $c \in (a, b)$ esetén a szükséges kiterjesztést kapjuk.

2. lépés. Ha $\widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ olyan altér, hogy $\widetilde{\mathcal{X}} \supset \mathcal{A}$, ill.

$$\Phi := \left\{\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathbb{R} : \quad f \text{ lineáris}, \ \ \widetilde{f}(x) = f(u) \ \ (u \in \mathcal{A}), \ \ \widetilde{f}(x) \leq p(x) \ \ (x \in \widetilde{\mathcal{X}})\right\},$$

akkor

$$\rho \subset \Phi \times \Phi, \qquad (\widetilde{f}, \widetilde{\widetilde{f}}) \in \rho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (\widetilde{\mathcal{X}} \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}} \quad \text{és} \quad \widetilde{f}(x) = \widetilde{\widetilde{f}}(x) \quad (x \in \widetilde{\mathcal{X}}))$$

rendezés Φ-n. Megmutatjuk, hogy (Φ, ρ)-ban bármely láncszerűen rendezett $\mathcal{H} \subset \Phi$ halmaz felülről korlátos. Ha $\mathcal{H} \subset \Phi$ láncszerűen rendezett, akkor $\mathcal{H}$ felülről korlátos, mert a

$$g := \bigcup_{f \in \mathcal{H}} f$$

jelölés bevezetésével $g \in \Phi$, továbbá bármely $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ esetén $(\widetilde{f}, g) \in \rho$, ezért g felső korlátja $\mathcal{H}$-nak. A Zorn-lemma felhasználásával elmondható tehát, hogy Φ-nek van maximális eleme: F. F az egész $\mathcal{X}$ téren van értelmezve, mert ellenkező esetben az **1. lépés**ben bizonyítottakat alkalmazva ellentmondásra jutnánk. ■

4.5.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{X}$ komplex lineáris tér, $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ félnorma, továbbá valamely $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetén $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre

$$|f(u)| \leq p(u) \qquad (u \in \mathcal{A}),$$

akkor van olyan $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, amelyre

$$F(u) = f(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad |F(x)| \leq p(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy bármely komplex, lineáris tér egy alterén értelmezett, abszolútértékben egy félnormával majorált funkcionál kiterjeszthető az egész térre, a linearitás és a majorálás megtartásával (**Bohnenblust-Sobczyk-tétel**)!

Útm. Ha valamely $f \in \mathcal{A}^*$ esetén

$$g(x) := \Re(f(x)) = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2}, \quad h(x) := \Im(f(x)) = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2\imath} \qquad (x \in \mathcal{A})$$

akkor $g, h : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, továbbá bármely $x \in \mathcal{A}$ esetén

$$-\imath g(\imath x) = -\imath \frac{f(\imath x) + \overline{f(\imath x)}}{2} = -\imath \frac{\imath f(x) - \imath \overline{f(x)}}{2} = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2} = \imath h(x) \qquad (x \in \mathcal{A}),$$

és így

$$f(x) = g(x) + \imath h(x) = g(x) - \imath g(\imath x) \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{A}$ esetén

$$g(x) = \Re(f(x)) \leq |f(x)| \leq p(x),$$

ezért a Hahn-Banach-tétel (vö. 4.5.3. feladat) következtében van olyan $G : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre

$$G(u) = g(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad G(x) \leq p(x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül. Ha tehát

$$F(x) := G(x) - \imath G(\imath x) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor F nyilván kiterjesztése f-nek és

- additív, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} F(x+y) &= G(x+y) - \imath G(\imath(x+y)) = G(x) + G(y) - \imath G(\imath x) - \imath G(\imath y) = \\ &= \{g(x) - \imath g(\imath x)\} + \{g(y) - \imath g(\imath y)\} = F(x) + F(y), \end{aligned}$$

- (komplex) homogén, hiszen bármely $a, b \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} F((a+b\imath)x) &= G((a+b\imath)x) - \imath G(\imath(a+b\imath)x) = \\ &= aG(x) + bG(\imath x) - \imath aG(\imath x) - \imath bG(-x) = \\ &= a[G(x) - \imath G(\imath x)] + \imath b[G(x) - \imath G(\imath x)] = (a+b\imath)F(x). \end{aligned}$$

Mivel alkalmas $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$F(x) = |F(x)| \exp(\imath\varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ezért bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \exp(-\imath\varphi(x))F(x) = F(\exp(-\imath\varphi(x))x) = \Re(F(\exp(-\imath\varphi(x))x)) = \\ &= G(\exp(-\imath\varphi(x))x) \leq p(\exp(-\imath\varphi(x))x) = \\ &= |\exp(-\imath\varphi(x))|\, p(x) = p(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.5.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{A}^*$ esetén van olyan $F \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\textbf{(1)}\ f \subset F, \quad \text{azaz} \quad F(u) = f(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad \textbf{(2)}\ \|F\| = \|f\|,$$

azaz bármely normált tér egy alterén értelmezett korlátos, lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a norma megtartásával!

Útm. Ha $f \in \mathcal{A}^*$, akkor a

$$p(x) := \|f\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

leképezés nyilván félnorma, amely majorálja f-et. Ha $\mathcal{X}$ valós lineáris tér, akkor a Hahn-Banach-tétel (vö. 4.5.3. feladat) következtében van olyan $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre

$$F(x) \leq p(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Mivel

$$F(-x) \leq p(-x) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ezért

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x), \quad \text{azaz} \quad |F(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Innen pedig

$$\|F\| = \|f\|$$

következik. Ha $\mathcal{X}$ komplex lineáris tér, akkor a Bohnenblust-Sobczyk-tétel (vö. 4.5.4. feladat) felhasználásával hasonlóan érvelhetünk. ■

4.5.6. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér esetén igazak az alábbi állítások!

1. A $0 \neq u \in \mathcal{X}$ elemhez van olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, amelyre
$$\|F\| = 1 \quad \text{és} \quad F(u) = \|u\|_{\mathcal{X}}.$$
2. Ha $u \in \mathcal{X}$ olyan, hogy minden $F \in \mathcal{X}^*$ esetén $F(u) = 0$, akkor $u = 0 \in \mathcal{X}$.
3. Ha $u, v \in \mathcal{X}$ olyan, hogy minden $F \in \mathcal{X}^*$ esetén $F(u) = F(v)$, akkor $u = v$.

Útm.

1. Ha tetszőleges $0 \neq u \in \mathcal{X}$ esetén
$$\mathcal{A} := \operatorname{span}(u) = \{v \in \mathcal{X} : \; v = \alpha u, \; \alpha \in \mathbb{K}\},$$
akkor az
$$f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \qquad f(v) := \alpha\|u\|_{\mathcal{X}}$$
leképezésre $f \in \mathcal{A}^*$, hiszen bármely $x, y \in A$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha
$$x = \alpha u \qquad \text{és} \qquad y = \beta u,$$
akkor
$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(\alpha u + \lambda \beta u) = f((\alpha + \lambda\beta)u) = \\ &= (\alpha + \lambda\beta)\|u\|_{\mathcal{X}} = \alpha\|u\|_{\mathcal{X}} + \lambda\beta\|u\|_{\mathcal{X}} = \\ &= f(\alpha u) + \lambda f(\beta u) = f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$
és
$$|f(v)| = |\alpha| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} = \|\alpha u\| = \|v\|_{\mathcal{X}} \qquad (v \in \mathcal{A})$$
miatt
$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(u) = 1 \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} = \|u\|_{\mathcal{X}}.$$
A 4.5.5. feladat következtében létezik a kívánt tulajdonságú F funkcionál.
2. Ha $u \neq 0$ lenne, akkor az előző állítás miatt lenne olyan $F \in \mathcal{X}^*$, hogy
$$F(u) = \|u\|_{\mathcal{X}} \neq 0$$
teljesülne, ami nem lehetséges.

3. Ha $u, v \in \mathcal{X}$ olyan, hogy minden $F \in \mathcal{X}^*$ esetén
$$F(u) = F(v),$$
akkor F linearitása következtében $F(u-v) = 0$, így az előzőek miatt
$$u - v = 0, \qquad \text{azaz.} \qquad u = v. \quad \blacksquare$$

A 4.5.6/1. feladatbeli állítás azt jelenti, hogy ha $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor van olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, amely nem azonosan nulla. Például, ha

- $\mathcal{X} := l_p$ és $0 \neq u = (u_n) \in \mathcal{X}$, akkor van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $u_k \neq 0$. Így, ha
$$F(v) := v_k \qquad (v \in \mathcal{X}),$$
akkor
$$F \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad F(u) = u_k \neq 0.$$
- $\mathcal{X} := \mathfrak{C}[a, b]$ és $0 \neq \varphi \in \mathcal{X}$, akkor van olyan $t \in [a, b]$, hogy $\varphi(t) \neq 0$. Ezért, ha
$$F(\psi) := \psi(t) \qquad (\psi \in \mathcal{X}),$$
akkor
$$F \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad F(\varphi) = \varphi(t) \neq 0.$$

4.5.7. feladat. Igazoljuk, hogy a 4.5.6/1. feladatbeli $F \in \mathcal{X}^*$ funkcionál egyértelmű, ha $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ szigorúan normált!

Útm. Ha $F, G \in \mathcal{X}^*$ olyan funkcionálok, amelyekre
$$\|F\| = \|G\| = 1 \qquad \text{és} \qquad F \neq G, \qquad \text{ill.} \qquad F(u) = G(u) = \|u\|_{\mathcal{X}}$$
teljesül, akkor (vö. 1.3.17. és 1.3.16. definíció) bármely $\alpha \in (0,1)$ esetén
$$1 \quad = \quad \left|\alpha F\left(\frac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}}\right) + (1-\alpha)G\left(\frac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}}\right)\right| \leq \sup\left\{|\alpha F(x) + (1-\alpha)G(x)| \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1\right\} =$$
$$= \quad \|\alpha F + (1-\alpha)G\| < 1,$$
ami nem lehetséges. $\blacksquare$

4.5.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, akkor minden

1. $u \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \sup\left\{|f(u)| \in \mathbb{R} : \ f \in \mathcal{X}^*, \ \|f\| \leq 1\right\};$$
2. $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$ esetén van olyan $f \in \mathcal{X}^*$, hogy
$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(u) \neq f(v)$$
teljesül!

Útm.

1. Ha $x = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $x \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$, akkor minden

$$f \in B_{\mathcal{X}^*} := \{\varphi \in \mathcal{X}^* : \ \|\varphi\| \leq 1\} \qquad \text{esetén} \qquad |f(u)| \leq \|f\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|u\|_{\mathcal{X}}.$$

   A korábbiak miatt azonban van olyan $f \in B_{\mathcal{X}^*}$, hogy

$$f(u) = \|u\|_{\mathcal{X}}.$$

2. Szintén a korábbiak miatt, ha $u, v \in \mathcal{X}$, $u \neq v$, akkor az $u - v \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$ vektorhoz van olyan $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, hogy

$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(u) - f(v) = f(u - v) = \|u - v\|_{\mathcal{X}} > 0. \quad \blacksquare$$

4.5.9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ véges dimenziós altér, akkor alkalmas $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ zárt altér esetén fennáll az

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel $\dim(\mathcal{Y}) < \infty$, ezért $\mathcal{Y}$ teljes, így (vö.1.3.75. feladat utáni megjegyzés) zárt is. Ha valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $y_1, \ldots, y_d$ bázis $\mathcal{Y}$-ban, továbbá $f_1, \ldots, f_d$ jelöli az $\mathcal{Y}^*$-beli (duális) bázist (vö. 4.4.4. feladat), azaz

$$f_k(y_l) = \delta_{kl} \qquad (k, l \in \{1, \ldots, d\}),$$

akkor (vö. 4.5.5. feladat) alkalmas $F_1, \ldots, F_d$ ($\mathcal{X}^*$-beli) funkcionálokra

$$F_k|_{\mathcal{Y}} = f_k \qquad (k, l \in \{1, \ldots, d\}).$$

Világos, hogy a

$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad Px := \sum_{k=1}^{d} F_k(x) y_k$$

leképezés lineáris és folytonos, továbbá P idempotens: $P^2 = P$, hiszen bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} P^2x &= P\left(\sum_{k=1}^{d} F_k(x)y_k\right) = \sum_{l=1}^{d} F_l\left(\sum_{k=1}^{d} F_k(x)y_k\right) y_l = \sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} F_k(x) \underbrace{F_l(y_k)}_{\delta_{kl}} y_l = \\ &= \sum_{k=1}^{d} F_k(x)y_k = Px. \end{aligned}$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{Y}$ esetén

$$Px = \sum_{k=1}^{d} F_k(x)y_k = \sum_{k=1}^{d} F_k\left(\sum_{l=1}^{d} \alpha_l y_l\right) y_k = \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} \alpha_l \underbrace{F_k(y_l)}_{\delta_{kl}} y_k = \sum_{l=1}^{d} \alpha_l y_l = x,$$

ezért $P|_{\mathcal{Y}} = I$ (identikus operátor). Ha most $\mathcal{Z} := \mathcal{N}(P)$, akkor P folytonossága következtében $\mathcal{Z}$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben, továbbá

$$\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y} = \{0\},$$

hiszen ellenkező esetben valamely $z \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}$ esetén $z \neq 0$, ahonnan

$$z \in \mathcal{Z} = \mathcal{N}(P),$$

azaz $P(z) = 0$ következik, ez pedig $z \in \mathcal{X}$ miatt azt jelenti, hogy

$$0 = P(z) = z,$$

ami ellentmond annak, hogy $z \neq 0$. Mivel bármely $x \in \mathcal{Y}$ esetén $Px \in \mathcal{Y}$, ill.

$$P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$$

következtében $x - Px \in \mathcal{Z}$, ezért

$$x = (x - Px) + Px$$

a kívánt felbontás. ■

4.5.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, továbbá $a \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{Y}$, akkor van olyan $\varphi \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, amelyre

$$\varphi(y) = 0 \quad (y \in \mathcal{Y}), \qquad \|\varphi\| = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(a) = \rho(a, \mathcal{Y}) > 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\mathcal{A} := \mathcal{Y} \oplus \operatorname{span}(a),$$

ill.

$$\psi(y + \alpha a) := \alpha \cdot \rho(a, \mathcal{Y}) = \alpha \cdot \inf\{\|x - y\| \in \mathbb{R} : \; y \in \mathcal{Y}\} \qquad (y \in \mathcal{Y}, \; \alpha \in \mathbb{K}),$$

akkor a $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ funkcionálra

- $\psi \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$, hiszen bármely $u, v \in \mathcal{Y}$, ill. $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} \psi((u + \alpha a) + \lambda(v + \beta a)) &= \psi((u + \lambda v) + a(\alpha + \lambda\beta)) = (\alpha + \lambda\beta) \cdot \rho(a, \mathcal{Y}) = \\ &= \alpha \cdot \rho(a, \mathcal{Y}) + \lambda\beta \cdot \rho(a, \mathcal{Y}) = \psi(u + \alpha a) + \lambda\psi(v + \beta a). \end{aligned}$$

- $\psi(y) = 0$ $(y \in \mathcal{Y})$, továbbá tetszőleges $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\rho(a, \mathcal{Y}) \leq \left\| a - \frac{u}{\alpha} \right\| \qquad (u \in \mathcal{Y}),$$

így

$$|\psi(y + \alpha a)| \leq |\alpha| \cdot \left\| a - \frac{-u}{\alpha} \right\| = \|\alpha a + u\|.$$

Ez azt jelenti, hogy ψ korlátos és $\|\psi\| \leq 1$.

2. lépés. Mivel $\mathcal{Y}$ zárt, ezért $\rho(a,\mathcal{Y}) > 0$ (vö. 2.2.1. példa utáni harmadik megjegyzés), így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u \in \mathcal{Y}$, hogy

$$\|a-u\| \leq (1+\varepsilon)\rho(a,\mathcal{Y}),$$

ahonnan

$$\psi(a-u) = 1\cdot\rho(a,\mathcal{Y}) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\|a-u\|$$

következik. Mivel $a-u \neq 0$, ezért

$$\|\psi\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \longrightarrow 1 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|\psi\| = 1.$$

Így (vö. 4.5.5. feladat) alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ funkcionálra

$$\varphi(y) = \psi(y) \quad (y \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad \|\varphi\| = \|\psi\|$$

teljesül. Ennélfogva

$$\varphi(y) = 0 \quad (y \in \mathcal{Y}), \qquad \|\varphi\| = \|\psi\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \varphi(a) = \psi(0+1\cdot a) = \rho(a,\mathcal{Y}) > 0. \quad \blacksquare$$

4.5.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetében, ha $\mathcal{X} \neq \{0\}$ és $(L(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\|\cdot\|)$ teljes, akkor $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is teljes!

Útm. A 4.5.6/1. feladatbeli állítás következtében minden

$$u \in \mathcal{X}, \qquad \|u\|_{\mathcal{X}} = 1$$

esetén van olyan $f \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(u) = \|u\|_{\mathcal{X}} = 1.$$

Ha továbbá $v \in \mathcal{Y}$, akkor az

$$A_v : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad A_v(u) := f(u)v$$

(lineáris) operátorra

$$\|A_v u\|_{\mathcal{Y}} = \|f(u)v\|_{\mathcal{Y}} = |f(u)|\cdot\|v\|_{\mathcal{Y}} \leq \|f\|\cdot\|u\|_{\mathcal{X}}\cdot\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{\mathcal{Y}}\cdot\|u\|_{\mathcal{X}},$$

azaz

$$A_v \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad \|A_v\| \leq \|v\|_{\mathcal{Y}}.$$

Ha

$$v_n \in \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Cauchy-sorozat, akkor mivel az

$$\mathcal{Y} \ni v \mapsto A_v \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$$

leképezés lineáris, az

$$A_n := A_{v_n} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat is Cauchy-sorozat, ui.

$$\|A_m - A_n\| = \|A_{v_m - v_n}\| \le \|v_m - v_n\|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Az $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tér teljessége következtében van tehát olyan $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, hogy

$$\lim(A_n) = A,$$

így bármely

$$u \in \mathcal{X}, \qquad \|u\|_{\mathcal{X}} = 1$$

elemre

$$\|A_n u - Au\|_{\mathcal{Y}} \le \|A_n - A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} = \|A_n - A\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$\lim(A_n u) = Au.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n u = f(u) v_n,$$

ezért

$$\lim(v_n) = Au \in \mathcal{Y},$$

azaz $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is teljes. ■

4.5.12. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, $f \in \mathcal{A}^*$, akkor pontosan egy olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funkcionál van, amelyre $f \subset F$, és

$$\|F\| = \|f\|$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. A 4.5.5. feladatbeli állítás következtében az egzisztencia világos.

Megjegyzés. Az egzisztencia a 4.5.5. feladatbeli állítás felhasználása nélkül is könnyen belátható, ui. $\mathcal{A}$ is Hilbert-tér, így ha $f \in \mathcal{A}^*$, akkor pontosan egy olyan $a \in \mathcal{A}$ van, amelyre

$$f(u) = \langle u, a \rangle \quad (u \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad \|f\| = \|a\|$$

teljesül. Ha

$$F : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad F(u) := \langle u, a \rangle,$$

akkor – mint tudjuk – $F \in \mathcal{X}^*$ és

$$\|F\| = \|a\|.$$

Tehát minden $u \in \mathcal{A}$ esetén

$$F(u) = \langle u, a \rangle = f(u) \qquad \text{és} \qquad \|F\| = \|a\| = \|f\|.$$

2. lépés. Ha $G \in \mathcal{X}^*$, akkor a Riesz-Fréchet-tétel (vö. **??**. tétel) miatt pontosan egy olyan $b \in \mathcal{X}$ van, hogy

$$G(v) = \langle v, b \rangle \quad (v \in \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|G\| = \|b\|.$$

Ha még

$$f \subset G \qquad \text{és} \qquad \|f\| = \|G\|$$

is teljesül, akkor

$$F(u) = G(u) \quad (u \in \mathcal{A}), \qquad \text{azaz} \qquad \langle u, a \rangle = \langle u, b \rangle \quad (u \in \mathcal{A}),$$

ahonnan

$$\langle u, a - b \rangle = 0 \qquad (u \in \mathcal{A})$$

következik. A Riesz-felbontás (vö. 2.5.6. feladat) miatt

$$b = b_1 + b_2, \qquad \text{ahol} \qquad b_1 \in \mathcal{A}, \quad b_2 \in \mathcal{A}^{\perp},$$

így az

$$u := a - b_1$$

választással

$$0 = \langle a - b_1, a - b_1 - b_2 \rangle = \langle a - b_1, a - b_1 \rangle - \langle a - b_1, b_2 \rangle = \langle a - b_1, a - b_1 \rangle,$$

azaz $a = b_1$, továbbá

$$\sqrt{\|a\|^2 + \|b_2\|^2} = \sqrt{\|b_1\|^2 + \|b_2\|^2} = \|b\| = \|G\| = \|f\| = \|a\|,$$

ahonnan $b_2 = 0$, azaz $a = b$ következik. ■

4.5.13. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{A} := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,0) := x,$$

akkor $f \in \mathcal{A}^*$, majd számítsuk ki $\|f\|$-t, ill. adjunk meg olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funcionált, amelyre

$$f \subset F \qquad \text{és} \qquad \|F\| = \|f\|,$$

ha a normát az

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_1$,
2. $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_\infty$,

módon választjuk meg!

Útm.

1. lépés. Az $\mathcal{A}$ halmaz altér, ui.

$$((a,0), (b,0) \in \mathcal{A}, \quad \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad (a,0) + \alpha(b,0) = (a + \alpha b, 0) \in \mathcal{A}.$$

2. lépés. Az f funkcionálra $f \in \mathcal{A}^*$, ui. ha $(a,0), (b,0) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$f((a,0) + \alpha(b,0)) = f(a + \alpha b,0) = a + \alpha b = f(a,0) + \alpha f(b,0)$$

és $\mathcal{X}$ véges dimenziós (vö. 4.2.33., ill. 4.3.1. feladat).

3. lépés. Az $\|f\|$ számítása:

1. $\|f\| = 1$, ui. minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|(x,0)\|_1 = |x| + |0|,$$

ezért

$$|f(x,0)| = |x| \leq |x| + |0| = \|(x,0)\|_1,$$

így $\|f\| \leq 1$, továbbá

$$1 = |f(1,0)| \leq \|f\| \cdot \|(1,0)\|_1 = \|f\| \cdot 1 = \|f\|.$$

2. $\|f\| = 1$, ui. minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|(x,0)\|_\infty = \max\{|x|,0\},$$

ezért

$$|f(x,0)| = |x| \leq \max\{|x|,0\} = \|(x,0)\|_\infty,$$

így $\|f\| \leq 1$, továbbá

$$1 = |f(1,0)| \leq \|f\| \cdot \|(1,0)\|_\infty = \|f\| \cdot 1 = \|f\|.$$

4. lépés. Így tehát van olyan $F \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$f \subset F, \qquad \|F\| = \|f\|,$$

továbbá

$$\exists |(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad F(x,y) = ax + by \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Következésképpen

$$x = f(x,0) = F(x,0) = ax + b \cdot 0 = ax \quad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz $a = 1$, így

$$F(x,y) = x + by \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ill.

1. bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|F(x,y)| = |x + by| \leq |x| + |b| \cdot |y| \leq \max\{1, |b|\}(|x| + |y|),$$

azaz

$$F \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad \|F\| \leq \max\{1, |b|\}.$$

Ha

- $x = 0$, $y = 1$, akkor

$$|b| = |F(0,1)| \leq \|F\| \cdot \|(0,1)\|_1 = \|F\|,$$

- $x = 1$, $y = 0$, akkor

$$1 = |F(1,0)| \leq \|F\| \cdot \|(1,0)\|_1 = \|F\|.$$

Így

$$\|F\| = \max\{1, |b|\}.$$

Tehát

$$\max\{1, |b|\} = \|F\| = \|f\| = 1,$$

azaz

$$F(x, y) = x + by \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |b| \leq 1).$$

2. bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} |F(x,y)| &= |x + by| \leq |x| + |b| \cdot |y| \leq \|(x,y)\|_\infty + |b| \cdot \|(x,y)\|_\infty = \\ &= (1 + |b|)\|(x,y)\|_\infty, \end{aligned}$$

azaz

$$F \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad \|F\| \leq 1 + |b|.$$

Mivel

$$1 + |b| = 1 + b\,\mathrm{sgn}\,(b) = F(1, \mathrm{sgn}\,(b)) \leq \|F\| \cdot \|(1, \mathrm{sgn}\,(b))\|_\infty,$$

ezért

$$\|F\| = 1 + |b|,$$

ahonnan

$$1 + |b| = \|F\| = \|f\| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad |b| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

következik. Így tehát

$$F(x, y) = x \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2). \quad \blacksquare$$

4.5.1. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{A} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = y = z\right\}, \qquad f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) := x,$$

akkor $f \in L(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ (azaz $f \in \mathcal{A}^*$), és számítsuk ki $\|f\|$-t, majd adjunk meg olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funcionált, amelyre $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_2$ esetén $f \subset F$ és $\|F\| = \|f\|$ teljesül!

Útm.

4.5.2. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{A} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x+y+z=0\right\}, \qquad f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) := x+y,$$

akkor $f \in L(\mathcal{A},\mathbb{R})$ (azaz $f \in \mathcal{A}^*$), és számítsuk ki $\|f\|$-t, továbbá adjunk meg olyan $F \in \mathcal{X}^*$ funcionált, amelyre $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_2$ esetén $f \subset F$ és $\|F\| = \|f\|$ teljesül!

Útm.

4.5.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér és $\mathcal{X}^*$ szeparábilis, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ is szeparábilis!

Útm. Ha

$$B := \{f_n \in \mathcal{X}^* : \; n \in \mathbb{N}\}$$

az $\mathcal{X}^*$ egységgömbjének mindenütt sűrű része (szeparábilis térben ez is szeparábilis), akkor

$$\|f_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

miatt van olyan $x_n \in \mathcal{X}$, hogy

$$f_n(x_n) > \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\{x_n \in \mathcal{X} : \; n \in \mathbb{N}\}$$

mindenütt sűrű $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$-ben. Ha ui. nem így volna, akkor $\mathcal{X}$ egységgömbjének valamely x eleme alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén nagyobb távolságra lenne x_n-től, mint ε $(n \in \mathbb{N})$, így (vö. 4.5.6/1. feladat) létezne olyan $f \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(x) = \|x\|_{\mathcal{X}} = \varepsilon,$$

valamint

$$f(x_n) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesülne. Ebben az esetben fennállna a

$$\|f_n - f\| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n) - 0| \geq \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenség, ami ellentmond annak, hogy B az $\mathcal{X}^*$ egységgömbjében mindenütt sűrű. ■

4.5.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in [0,1]$: $a \neq b$,

$$\mathcal{X} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f \text{ korlátos}\}, \qquad \mathcal{A} := \{f \in \mathcal{X} : \; f(a) = f(b)\},$$

továbbá $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, akkor van olyan $\Phi \in L(\mathcal{A},\mathbb{R})$ korlátos, lineáris funkcionál, amelynek végtelen sok normatartó kiterjesztése van!

Útm. Ha

$$\Phi(f) := f(a) \qquad (f \in \mathcal{A}),$$

akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\Phi_\lambda(f) := \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \qquad (f \in \mathcal{X})$$

megfelelő kiterjesztés. ■

4.5.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, B Hamel-bázis $\mathcal{X}^*$-ben, akkor fennáll a

$$\bigcap_{f \in B} \mathcal{N}(f) = \{0\}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel B minden eleme lineáris, ezért 0 benne van mindegyik B-beli elem magterében, így azok metszetében is. Ha

$$x \in \bigcap_{f \in B} \mathcal{N}(f),$$

akkor

$$f(x) = 0 \qquad (f \in \mathcal{X}^*),$$

hiszen $\mathcal{X}^*$ minden eleme felírható B-beli funkcionálok lineáris kombinációjaként. Mivel bármely $0 \neq x \in \mathcal{X}$ elemhez van olyan $f \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$f(x) = \|x\| \neq 0$$

(vö. 4.5.6/1. feladat), ezért bármely $0 \neq x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x \notin \mathcal{N}(f) \qquad (f \in B). \quad ■$$

4.5.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény, akkor van olyan $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\|\Phi\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \Phi(f) = f(0)$$

teljesül!

Útm. Az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett folytonos, korlátos (valós értékű) függvények alteret alkotnak $L^\infty(\mathbb{R})$-ben: H. Ha

$$\Phi_c : H \to \mathbb{R}, \qquad \Phi_c(f) := f(0),$$

akkor Φ_c folytonos, lineáris funkcionál, továbbá $\|\Phi_c\| = 1$, hiszen egyrészt

$$|\Phi_c(f)| = |f(0)| \leq \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\} = \|f\|_\infty,$$

másrészt pedig

$$1 = \|\widehat{1}\|_\infty = \|\Phi(\widehat{1})\|_\infty \leq \|\Phi_c\| \cdot \|\widehat{1}\|_\infty = \|\Phi\|.$$

Így (vö. 4.5.5. feladat) Φ_c-nek van olyan $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$-re való Φ kiterjesztése, amelyre $\|\Phi\| = 1$. ■

4.5.18. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz, továbbá az $x_\gamma \in \mathcal{X}$ lineárisan független vektorok, ill.

$$c_\gamma, \lambda_\gamma \in \mathbb{K} \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) van olyan $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, hgy

$$f(x_\gamma) = c_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

(2) alkalmas $M \geq 0$ szám esetén

$$\left|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma c_\gamma\right| \leq M \left\|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma x_\gamma\right\| \qquad (\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma: \text{ véges}).$$

Útm.

1. lépés. /(1) $\Rightarrow$ (2)/ Ha

$$M := \|f\|,$$

akkor

$$\left|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma c_\gamma\right| = \left|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma f(x_\gamma)\right| = \left|f\left(\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma x_\gamma\right)\right| \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma x_\gamma\right\| = M \cdot \left\|\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma x_\gamma\right\|.$$

2. lépés. /(2) $\Rightarrow$ (1)/ Ha

$$\varphi\left(\sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma x_\gamma\right) := \sum_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \lambda_\gamma c_\gamma,$$

akkor

$$\varphi \in (\operatorname{span}(x_\gamma \in \mathcal{X}: \ \gamma \in \Gamma))^*.$$

Így ha f folytonos kiterjesztése φ-nek (vö. 4.5.5. feladat), akkor

$$f(x_\gamma) = c_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma). \quad \blacksquare$$

4.5.19. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}^1[0,1], \quad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]}, \qquad \mathcal{A} := \{f \in \mathcal{X}: \ f(0) = 0\},$$

ill.

$$\varphi: \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(f) := \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

akkor

$$\varphi \in \mathcal{A}^*, \qquad \|\varphi\| = 1,$$

majd adjunk meg φ-nek $\mathcal{X}$-re való folytonos, lineáris kiterjesztését!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $f, g \in \mathcal{A}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\varphi(f+\alpha g) = \int_0^1 \frac{f(t)+\alpha g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \alpha \int_0^1 \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \varphi(f) + \alpha\varphi(g),$$

ezért $\varphi \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$.

2. lépés. A Lagrange-féle középértéktétel következtében tetszőleges $f \in \mathcal{A}$, ill. $x \in (0,1]$ esetén van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(x),$$

és így

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \|f'\|_\infty \,\mathrm{d}t = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]},$$

azaz

$$\varphi \in \mathcal{A}^* \qquad \text{és} \qquad \|\varphi\| \leq 1.$$

Ha

$$f(x) = x \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\|f\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]} = 1$$

és

$$1 = \left|\int_0^1 \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = |\varphi(f)| \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]} = \|\varphi\|,$$

így

$$\|\varphi\| = 1.$$

3. lépés. Ha

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(f) := \varphi(f - \widehat{f(0)}),$$

akkor Φ lineáris funkcionál, hiszen bármely $f, g \in \mathcal{A}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\Phi(f+\alpha g) = \varphi(f - \widehat{f(0)} + \alpha(g - \widehat{g(0)})) = \varphi(f - \widehat{f(0)}) + \alpha\varphi(g - \widehat{g(0)}) = \Phi(f) + \alpha\Phi(g).$$

Φ folytonos is és

$$\|\Phi\| \leq 1,$$

hiszen bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén

$$|\Phi(f)| = |\varphi(f - \widehat{f(0)})| \leq \|(f - \widehat{f(0)})'\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{\mathfrak{C}^1[0,1]}.$$

Továbbá Φ kiterjesztése φ-nek, így

$$\|\Phi\| \geq \|\varphi\|. \quad \blacksquare$$

4.5.20. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, továbbá

$$\varphi : \mathcal{A} \to l_\infty$$

izometrikus izomorfizmus, akkor alkalmas

$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$$

projektor esetén

$$\|P\| = 1$$

teljesül!

Útm. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\phi_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad \phi_n(u) := (\varphi(u))_n,$$

akkor

$$|\phi_n(u)| \leq \sup\{|(\varphi(u))_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \|\varphi(u)\|_\infty = \|u\|_{\mathcal{X}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\|\phi_n\| \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ennélfogva (vö. 4.5.5. feladat) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $f_n \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$f_n \supset \phi_n, \qquad \text{ill.} \qquad \|f_n\| = \|\phi_n\|.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|(f_n(u))\|_\infty = \sup\{|f_n(u)| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|f_n(u)\|_{\mathcal{X}^*} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|u\|_{\mathcal{X}}$$

ezért a

$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{A}, \qquad Pu := \varphi^{-1}((f_n(u)))$$

operátor jóldefiniált és rendelkezik a feladatbeli tulajdonságokkal. ■

4.5.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathcal{X}$ halmaz **hipersík**, ha alkalmas

$$\varphi \in \mathcal{X}' \backslash \{0\}$$

(nem azonosan eltűnő, lineáris) funkcionál, ill. $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$H = \{x \in \mathcal{X} : \ \Re(\varphi(x)) = \alpha\}.$$

4.5.1. példa. Az $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén az $a \in \mathbb{R}^3$ pontra illeszkedő, $0 \neq n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú sík egyenlete az

$$S := \left\{r \in \mathbb{R}^3 : \; \langle r-a, n\rangle = 0\right\}$$

ponthalmaz. Mivel

$$\langle r-a, n\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle r, n\rangle = \langle a, n\rangle,$$

ezért $\langle r, n\rangle$ nem más, mint a

$$\varphi := \langle\cdot, n\rangle : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

korlátos, lineáris funkcionálnak az r helyen vett helyettesítési értéke, ill. S a φ funkcionál

$$\alpha := \langle a, n\rangle$$

paraméterhez tartozó szintfelülete:

$$S := \left\{r \in \mathbb{R}^3 : \; \varphi(r) = \alpha\right\}.$$

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér és $\varphi \in \mathcal{X}^*$, akkor H zárt halmaz, hiszen $\{\alpha\} \subset \mathbb{K}$ zárt és $\Re \circ \varphi$ folytonos, továbbá

$$H = \varphi^{-1}\left[\Re^{-1}\left[\{\alpha\}\right]\right].$$

Ha

$$* \in \{<, \leq, >, \geq\},$$

akkor a fenti H hipersík esetén a

$$H_* := \{x \in \mathcal{X} : \; \Re(\varphi(x)) * \alpha\}$$

halmazokat **féltereknek**, a

$$H_{\leq}, \qquad \text{ill. a} \qquad H_{\geq}$$

halmazokat a H **hipersík jobb-**, ill. **baloldalának** nevezzük.

4.5.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$, ill. $\varphi \in \mathcal{X}^*$ (korlátos, lineáris) funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén azt mondjuk, hogy a H hipersík

- **elválasztja** az A és a B halmazt, ha

$$A \subset H_{\leq} \qquad \text{és} \qquad B \subset H_{\geq};$$

- **erősen elválasztja** az A és a B halmazt, ha

$$A \subset H_{<} \qquad \text{és} \qquad B \subset H_{>}.$$

4.5.21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$ konvex halmazok, akkor ha A nyílt, úgy alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ (korlátos, lineáris) funkcionál esetén

$$\Re(\varphi(a)) < \Re(\varphi(b)) \qquad (a \in A,\, b \in B),$$

azaz van olyan $H \subset \mathcal{X}$ zárt hipersík, amely elválasztja az A és a B halmazt (**Eidelheit-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha valamely $u \in \mathcal{X}$ esetén $B = \{u\}$, akkor

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **esetén** megmutatjuk, hogy alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ funkcionálra

$$\varphi(a) < \varphi(u) \qquad (a \in A).$$

Feltehető, hogy $0 \in A$, hiszen ellenkező esetben az $x \in A$ vektorral az

$$\widetilde{A} := A - \{x\}, \qquad \widetilde{B} := B - \{x\}$$

halmazok konvexek, A nyílt, továbbá $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$, ui. ha nem így lenne, akkor alkalmas $y \in A$ esetén

$$u - x = y - x \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = y,$$

ami $A \cap B = \emptyset$ miatt nem lehetséges, továbbá

$$\varphi(a) < \varphi(u) \qquad (a \in A)$$

is fennáll, hiszen

$$\varphi(a - x) < \varphi(u - x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(a) - \varphi(x) < \varphi(u) - \varphi(x).$$

Világos, hogy a p_A Minkowski-funkcionálra

$$(*) \qquad p_A(u) = \inf\left\{\alpha \in (0, +\infty) : \tfrac{u}{\alpha} \in A\right\} \geq 1$$

teljesül, hiszen egyrészt $u \notin 0A$ és $A \cap B = \emptyset$ miatt $u \notin 1A$, másrészt pedig, ha valamely $\alpha \in (0,1)$ esetén $u \in \alpha A$ lenne, azaz valamely $y \in A$-ra $u = \alpha y$ teljesülne, akkor A konvexitása következtében

$$\alpha y + (1 - \alpha) \cdot 0 = \alpha y = u \in A$$

lenne, ami ellentmond az $A \cap B = \emptyset$ feltételnek. Ha most

$$\mathcal{Y} := \operatorname{span}(u),$$

akkor a

$$\psi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}, \qquad \psi(\alpha u) := \alpha$$

funkcionál lineáris (vö. 4.5.6. feladat útmutatója), és ha $v \in \mathcal{Y}$, akkor alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $v = \alpha u$, továbbá

- $\alpha \leq 0$ esetén
$$\psi(v) = \psi(\alpha u) = \alpha \leq 0 \leq p_A(\alpha u) = p_A(v)$$
(vö. 1.3.56. feladat), ill.
- $\alpha \geq 0$ esetén $(*)$ következtében
$$\psi(v) = \psi(\alpha u) = \alpha \leq \alpha p_A(u) = p_A(\alpha u) = p_A(v)$$
(vö. 1.3.55. feladat útmutatója).

Így létezik ψ-nek (a Hahn-Banach-tétel biztosította) olyan φ lineáris kiterjesztése, amelyre
$$\varphi(v) = \psi(v) \quad (v \in \mathcal{Y}), \qquad \varphi(a) \leq p_A(a) \quad (a \in \mathcal{X}),$$
továbbá
$$\varphi(u) = \psi(u) = 1 \qquad /v \in \mathcal{Y},\ \alpha := 1/.$$
A φ funkcionál folytonos is: $\varphi \in \mathcal{X}^*$, hiszen (vö. 1.3.56. feladat) alkalmas $K \geq 0$ számmal
$$p_A(a) \leq K\|a\| \qquad (a \in \mathcal{X}),$$
és így
$$\pm\varphi(a) = \varphi(\pm a) \leq p_A(\pm a) \leq K\|a\|, \quad \text{azaz} \quad |\varphi(a)| \leq K\|a\| \qquad (a \in \mathcal{X}).$$
Ezért (vö. 1.3.56/3. feladat)
$$\varphi(a) \leq p_A(a) < 1 = \varphi(u) \qquad (a \in A).$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **esetén** megmutatjuk, hogy alkalmas
$$\varphi \in \mathcal{X}^*$$
funkcionálra
$$\Re(\varphi(a)) < \Re(\varphi(u)) \qquad (a \in A).$$
A fentiek következtében van olyan $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ korlátos, lineáris funkcionál, amelyre
$$\phi(a) \leq \phi(u) \qquad (a \in A)$$
teljesül. Így, ha
$$\varphi(a) := \phi(a) - \imath\phi(\imath a) \qquad (a \in \mathcal{X}),$$
akkor φ triviálisan folytonos, továbbá (vö. 4.5.6. feladat útmutatója)
$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$$
lineráis is, így $\varphi \in \mathcal{X}^*$ és bármely $a \in A \subset \mathcal{X}$ esetén
$$\phi(a) = \Re(\varphi(a)).$$

2. lépés. Ha $\emptyset \neq B \subset \mathcal{X}$ tetszőleges (konvex) halmaz, akkor a

$$H := A - B \neq \emptyset$$

halmaz is konvex (vö. 1.3.47/3. feladat), sőt nyílt is, hiszen

$$H = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\}).$$

Világos, hogy

$$H \cap \{0\} = \emptyset,$$

hiszen $A \cap B = \emptyset$ miatt $0 \notin H$, így az 1. **lépés**ben bizonyítottak alapján van olyan $\varphi \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\Re(\varphi(a-b)) < \Re(\varphi(0)) = 0 \qquad (a \in A,\ b \in B)$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\Re(\varphi(a)) < \Re(\varphi(b)) \qquad (a \in A,\ b \in B). \quad \blacksquare$$

Feltehető, hogy a 4.5.21-beli feladat állításában φ nem az azonosan eltűnő funkcionál, hiszen ellenkező esetben az állításban nem állna fenn szigorú egyenlőtlenség.

4.5.22. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\emptyset \neq A, B \subset \mathcal{X}$ konvex halmazok, akkor ha A kompakt és B zárt, úgy alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ (korlátos, lineáris) funkcionál, ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\Re(\varphi(a)) < \alpha < \beta < \Re(\varphi(b)) \qquad (a \in A,\, b \in B),$$

azaz van olyan $H \subset \mathcal{X}$ zárt hipersík, amely erősen elválasztja az A és a B halmazt (**Tukey-tétel**)!

Útm. Világos, hogy

$$d := \rho(A, B) > 0$$

(vö. 2.2.1. példa utáni második megjegyzés), tetszőleges $\varepsilon \in (0, d)$ esetén az

$$A_\varepsilon := A + K_\varepsilon(0) = \bigcup_{a \in A} (a + K_\varepsilon(0))$$

halmaz konvex, továbbá

$$A_\varepsilon \cap B = \emptyset,$$

hiszen ha $x \in K_\varepsilon(0)$, akkor az

$$a_\varepsilon := a + x, \qquad \text{ill.} \qquad b \in B$$

vektorokkal

$$\|(a+x) - b\| = \|a - b + x\| \geq \|a - b\| + \|x\| \geq d - \|x\| > d - \varepsilon > 0.$$

A 4.5.21. feladatbeli állítás következtében így alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ (korlátos, lineáris) funkcionálra

$$\Re(\varphi(a+x)) < \Re(\varphi(b)) \qquad (a \in A,\, b \in B,\, x \in K_\varepsilon(0)).$$

Mivel bármely $y \in K_\varepsilon(0)$ esetén

$$-y \in K_\varepsilon(0) \qquad \text{és} \qquad \pm\frac{\varepsilon}{2}y \in K_\varepsilon(0),$$

ezért

$$\Re\left(\varphi\left(a \pm \frac{\varepsilon}{2}y\right)\right) = \Re\left(\varphi(a) \pm \frac{\varepsilon}{2}\Re\left(\varphi(y)\right) < \Re\left(\varphi(b)\right),$$

így

$$\Re\left(\varphi(a)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left|\Re(\varphi(y))\right| < \Re\left(\varphi(b)\right).$$

Innen pedig

$$\Re\left(\varphi(a)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\sup\left\{|\Re(\varphi(x))| \in \mathbb{R}:\ x \in K_\varepsilon(0)\right\} < \Re\left(\varphi(b)\right)$$

következik. Ezért

$$\Re\left(\varphi(a)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_{\mathcal{X}^*} < \Re\left(\varphi(b)\right).$$

Mivel

$$r := \|\varphi\|_{\mathcal{X}^*} > 0,$$

ezért

$$\Re\left(\varphi(a)\right) < \Re\left(\varphi(a)\right) + \frac{r}{2} < \Re\left(\varphi(a)\right) + r \leq \Re\left(\varphi(b)\right).$$

Így az

$$\alpha := \sup\left\{\Re\left(\varphi(a)\right) \in \mathbb{R}:\ a \in A\right\}, \qquad \text{ill.} \qquad \beta := \inf\left\{\Re\left(\varphi(b)\right) \in \mathbb{R}:\ b \in B\right\}$$

választással az igazolandó állítást kapjuk. ■

Ha a 4.5.22. feladatban az A halmaz kompaktsága helyett csak annak zártságát követeljük meg, akkor A és B nem feltétlenül erősen szétválasztható, mint ahogy azt az

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x \leq 0\right\}, \qquad B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ xy \geq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 1\right\}$$

halmazok példája is mutatja.

4.5.23. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, és $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor igaz az

$$\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\, \varphi \in \mathcal{X}^*:\ \varphi|_{\mathcal{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0)$$

implikáció!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha

$$\varphi(y) = 0 \quad (y \in \mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X},$$

azaz minden $x \in \mathcal{X}$ vektorhoz van olyan

$$y_n \in \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy

$$\lim(\|x - y_n\|) = 0,$$

akkor

$$0 \leq |\varphi(x)| \leq |\varphi(x - y_n)| + |\varphi(y_n)| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{X}^*} \cdot \|x - y_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\varphi = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha $\overline{\mathcal{Y}} \neq \mathcal{X}$, akkor valamely $b \in \mathcal{X} \backslash \overline{\mathcal{Y}}$ esetén a 4.5.21. feladatbeli állítást alkalmazva az

$$A := \overline{\mathcal{Y}}, \qquad \text{ill. a} \qquad B := \{b\}$$

halmazra azt kapjuk, hogy alkalmas $\varphi \in \mathcal{X}^*$ funkcionálra

$$\Re(\varphi(y)) < \Re(\varphi(b)) \qquad (y \in \overline{\mathcal{Y}}),$$

hiszen $A \cap B = \emptyset$, A zárt, B pedig kompakt, továbbá A is és B is konvex. Mivel $\mathcal{Y}$ altér, ezért $\overline{\mathcal{Y}}$ is az, azaz bármely $\alpha \in \mathbb{K}$, ill. $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ esetén $\alpha y \in \overline{\mathcal{Y}}$. Így bármely $1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Re(\varphi(\alpha y)) = \alpha \Re(\varphi(y)) < \Re(\varphi(b)),$$

és ez csak akkor lehetséges, ha $\varphi|_{\mathcal{Y}} = 0$. A feltételből viszont $\varphi = 0$ következik, ez pedig ellentmond a szigorú egyenlőtlenségnek. ■

4.5.24. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az

$$A'f := f \circ A \qquad (f \in \mathcal{Y}^*)$$

operátorra $A' \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$, továbbá

$$\|A'\|_{L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} = \|A\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Az

$$A'f : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$$

leképezés lineáris, hiszen bármely $u, v \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A'f(u + \alpha v) = f(A(u + \alpha v)) = f(Au + \alpha Av) = f(Au) + \alpha f(Av) = A'f(u) + \alpha A'f(v).$$

$A'f$ folytonos, ui.

$$|A'f(u)| = |f(Au)| \leq \|f\|_{\mathcal{Y}^*} \cdot \|Au\|_{\mathcal{Y}} \leq \|f\|_{\mathcal{Y}^*} \cdot \|A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \qquad (u \in \mathcal{X}).$$

Így bármely $f \in \mathcal{Y}^*$ esetén $A'f \in \mathcal{X}^*$.

2. lépés. Az A' operátor lineáris, hiszen bármely $f, g \in \mathcal{Y}^*$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A'(f+\alpha g)(u) = (f+\alpha g)(Au) = f(Au) + \alpha g(Au) = A'f(u) + \alpha A'g(u) \qquad (u \in \mathcal{X}).$$

Az 1**. lépés**beli becslés következtében $A' \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ és

$$\|A'\|_{L(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} \leq \|A\|_{L(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

Ha $u \in \mathcal{X}$ olyan vektor, amelyre $0 \neq Au \in \mathcal{Y}$, akkor (vö. 4.5.6/1. feladat) alkalmas $f \in \mathcal{X}^*$ esetén

$$\|f\|_{\mathcal{X}^*} = 1 \qquad \text{és} \qquad f(Au) = \|Au\|_{\mathcal{Y}}.$$

Így

$$\begin{aligned} \|Au\|_{\mathcal{Y}} &= |f(Au)| = |A'f(u)| \leq \|A'f\|_{\mathcal{X}^*} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \leq \\ &\leq \|A'\|_{L(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} \cdot \|f\|_{\mathcal{Y}^*} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} = \|A'\|_{L(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \qquad (u \in \mathcal{X}), \end{aligned}$$

azaz

$$\|A'\|_{L(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} \geq \|A\|_{L(\mathcal{X},\mathcal{Y})}. \quad \blacksquare$$

4.5.25. feladat. Az

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_{12}, \|\cdot\|_{l_{12}}) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (l_3, \|\cdot\|_{l_3})$$

normált terek, ill. az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad A(x_n) := \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

operátor esetében határozzuk meg azt a $A' : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ operátort, amelyre

$$A'f := f \circ A \qquad (f \in \mathcal{Y}^*)$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$\mathcal{X}^* = l_{12/11} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y}^* = l_{3/2},$$

továbbá bármely

$$f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*$$

esetén

$$A'f(g) = f(Ag) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{g_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{n}} g_n \qquad (g \in \mathcal{X})$$

(vö. 4.4.10. feladat), ezért

$$A'f = \left(\frac{f_n}{\sqrt{n}}\right) \qquad (f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*). \quad \blacksquare$$

4.5.3. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér esetén az $A \in L(\mathcal{X}, Y)$ operátor **duális**ának nevezzük a 4.5.24. feladatban értelmezett $A' \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ operátort.

4.5.2. példa. Ha

$$p, q \in [1, +\infty): \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{és} \quad \mathcal{X} := l_p,$$

akkor a

$$B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Bu := (u_2, u_3, \ldots)$$

operátorra $B \in L(\mathcal{X})$ (vö. 4.2.9. feladat). Mivel

$$Bu = (u_{n+1}) \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

ezért bármely

$$v \in \mathcal{X}^* = l_q$$

(vö. 4.4.10. feladat) esetén

$$B'v(u) = v(Bu) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot u_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1} \cdot u_n \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$B'v = (0, v_1, v_2, \ldots) = Jv \qquad (v \in l_q).$$

4.5.26. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ és $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ és $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az $A \circ B$ operátor duálisára

$$(A \circ B)' = B' \circ A'$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$A' \in L(\mathcal{Z}', \mathcal{Y}') \qquad \text{és} \qquad B \in L(\mathcal{Y}', \mathcal{X}'),$$

ezért

$$(A \circ B)' \in L(\mathcal{Z}', \mathcal{X}'), \qquad \text{ill.} \qquad B' \circ A' \in L(\mathcal{Z}', \mathcal{X}'),$$

így bármely $x \in \mathcal{X}$, $z \in \mathcal{Z}$, ill. $f \in \mathcal{Z}'$ esetén

$$(B' \circ A')f(x) = B'(A'f)(x) = ((A'f) \circ B)(x) = ((f \circ A) \circ B)(x) = (f \circ (A \circ B))(x) = (A \circ B)'f(x). \qquad \blacksquare$$

4.5.4. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, ill. $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}^*$ alterek esetében az

$$\mathcal{U}^{\perp} := \{f \in \mathcal{X}^* : \; f(x) = 0 \; (x \in \mathcal{U})\}\,,$$

ill. a

$$\mathcal{V}_{\perp} := \{x \in \mathcal{X} : \; f(x) = 0 \; (f \in \mathcal{V})\}$$

halmazokat $\mathcal{U}$, ill. $\mathcal{V}$ **annihilátor**ának nevezzük.

4.5.27. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $\mathcal{N}(A') = \mathcal{R}(A)^{\perp}$;
2. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A')_{\perp}$;
3. $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A')_{\perp}$;
4. $\overline{\mathcal{R}(A')} \subset \mathcal{N}(A)^{\perp}$.

Útm.

1. $\boxed{\subset}$ Ha $v \in \mathcal{N}(A')$, azaz $A'v = 0 \in \mathcal{X}$, akkor vármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$v(Au) = (A'v)(u) = 0,$$

és így $v \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$.

$\boxed{\supset}$ Ha $v \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$, akkor bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$A'v(u) = v(Au) = 0,$$

azaz $A'v = 0 \in \mathcal{X}^*$, tehát $v \in \mathcal{N}(A')$.

2. $\boxed{\subset}$ Ha $u \in \mathcal{N}(A)$, azaz $Au = 0 \in \mathcal{Y}$, akkor bármely $v \in \mathcal{Y}^*$ esetén

$$(A'v)(u) = v(Au) = 0,$$

és így $u \in \mathcal{R}(A')_{\perp}$.

$\boxed{\supset}$ Ha $u \in \mathcal{R}(A')_{\perp}$, akkor bármely $v \in \mathcal{Y}^*$ esetén

$$v(Au) = (A'v)(u) = 0,$$

tehát $Au = 0 \in \mathcal{Y}$, és így $u \in \mathcal{N}(A)$.

3. $\boxed{\subset}$ Mivel A folytonossága következtében az $\mathcal{N}(A)_{\perp}$ altér zárt, ezért elegendő azt belátni, hogy az

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{N}(A')_{\perp}$$

tartalmazás teljesül. Ha $w = Au \in \mathcal{R}(A)$, akkor minden $v \in \mathcal{N}(A')$ vektorra

$$v(w) = v(Au) = (A'v)(u) = 0,$$

tehát $v \in \mathcal{N}(A')_{\perp}$.

$\boxed{\supset}$ Mivel

$$\overline{\mathcal{R}(A)} \supset \mathcal{N}(A')_{\perp} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathcal{R}(A)} \subset (\mathcal{N}(A')_{\perp})^c,$$

ezért (vö. 4.5.10. feladat) bármely $w \in (\overline{\mathcal{R}(A)})^c$ esetén van olyan $v \in \mathcal{Y}^*$ funkcionál, amelyre

$$v(w) \neq 0, \qquad \text{ill.} \qquad v(w) = 0 \quad (w \in \overline{\mathcal{R}(A)}).$$

Így

$$(A'v)(u) = v(Au) = 0 \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz $A'v = 0$, tehát $v \in \mathcal{N}(A')$. Innen pedig azt kapjuk, hogy $w \in (\mathcal{N}(A')_{\perp})^c$, hiszen ellenkező esetben $v(w) = 0$ lenne.

4. Ha $A'v \in \overline{\mathcal{R}(A')}$, akkor bármely $u \in \mathcal{N}(A)$ esetén

$$(A'v)(u) = v(Au) = 0,$$

így $A'v \in \mathcal{N}(A)^{\perp}$. ■

4.5.28. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ olyan operátor, amelyre az $\mathcal{R}(A)$ képtér zárt ($\mathcal{Y}$-beli) altér, úgy

$$A \quad \text{szürjektív} \quad (\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A' \quad \text{injektív} \quad (\mathcal{N}(A') = \{0\}),$$

azaz tetszőleges $v \in \mathcal{Y}$ esetén pontosan akkor van olyan $u \in \mathcal{X}$, hogy $Au = v$, ha

$$A'w = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w(v) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad v \in \mathcal{N}(A')_{\perp}.$$

Útm. Mivel $\mathcal{R}(A)$ zárt, ezért

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A')_{\perp}$$

(vö. 4.5.27. feladat). Így ha A szürjektív, azaz $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(A)$, akkor $\mathcal{N}(A') = \{0\}$, és fordítva: $\mathcal{N}(A') = \{0\}$-ból $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(A)$ következik. ■

4.5.29. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén a

$$\delta_x : \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \qquad \delta_x(f) := f(x)$$

leképezés korlátos, lineáris funkcionál!

Útm.

1. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor $\delta_x \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}^*, \mathbb{K})$, hiszen bármely $f, g \in \mathcal{X}^*$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\delta_x(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(x) = f + \alpha g(x) = \delta_x(f) + \alpha\delta_x(g).$$

2. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$, ill. $f \in \mathcal{X}^*$, akkor

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}},$$

azaz

$$\delta_x \in (\mathcal{X}^*)^* \qquad \text{és} \qquad \|\delta_x\| \leq \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

3. lépés. Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor

$$\|\delta_x\| \geq \|x\|_{\mathcal{X}},$$

hiszen az $x = 0$ triviális esettől eltekintve van olyan $f \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\|f\| = 1 \qquad \text{és} \qquad f(x) = \|x\|_{\mathcal{X}}$$

(vö. 4.5.6/1. feladat), így

$$\delta_x(f) = f(x) = \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|\delta_x\| \cdot \|f\| = \|\delta_x\|. \quad \blacksquare$$

4.5.30. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, továbbá $\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$ /$\mathcal{X}$ **biduális**a/, akkor a

$$\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}, \qquad \delta(x) := \delta_x$$

leképezés lineáris és izometrikus!

Útm.

1. lépés. δ lineáris, hiszen bármely $u, v \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, ill. $f \in \mathcal{X}^*$ esetén

$$\begin{aligned}
\delta(u + \alpha v)(f) &= \delta(u + \alpha v)(f) = \delta_{u+\alpha v}(f) = f(u + \alpha v) = \\
&= f(v) = \delta_u(f) + \alpha\delta_v(f) = \delta(u) + \alpha\delta(v).
\end{aligned}$$

2. lépés. δ izometrikus, és így korlátos, ill. injektív, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|\delta(u)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \sup\{|\delta_u(f)| \in \mathbb{R} : \ \|f\|_{\mathcal{X}^*} < 1\} = \sup\{|f(u)| \in \mathbb{R} : \ \|f\|_{\mathcal{X}^*} < 1\} = \|u\|_{\mathcal{X}}$$

(vö. 4.5.8. feladat). $\blacksquare$

4.5.31. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor a

$$\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}, \qquad \delta(x) := \delta_x$$

leképezés izometrikus izomorfizmus!

Útm. Mivel a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*, \qquad \varphi(a) := f_a$$

leképezés (vö. 4.2.31. feladat) bijektív és konjugált lineáris, ill. tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|\varphi(x)\|_{\mathcal{X}^*}$$

(vö. 4.4.12. feladat), továbbá $(\mathcal{X}^*, h)$ Hilbert-tér, ahol

$$h : \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \qquad h(f, g) := \langle\varphi^{-1}(g), \varphi^{-1}(f)\rangle$$

(vö. 4.4.16. feladat), ezért, ha $f \in \mathcal{X}^*$, ill.

$$F_f : \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \qquad F_f(g) := h(f,g),$$

akkor (vö. 4.2.31. feladat) a

$$\Phi : \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^{**}, \qquad \Phi(f) := F_f$$

leképezés bijektív és konjugált lineáris, továbbá bármely $f \in \mathcal{X}^*$ esetén

$$\|f\|_{\mathcal{X}^*} = \|\Phi(f)\|_{\mathcal{X}^{**}}.$$

Mivel φ bijektív, ezért pontosan egy olyan $a \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$\varphi(a) = f_a = f, \qquad \text{azaz} \qquad \varphi^{-1}(f) = a.$$

Így

$$(\Phi \circ \varphi)(x) = \Phi(\varphi(x)) = \Phi(f_x) = F_{f_x} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

tehát bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \varphi(x))(f) &= F_{f_x} = h(f, f_x) = \langle \varphi^{-1}(f_x), \varphi^{-1}(f)\rangle = \\ &= \langle x, a\rangle = f_a(x) = f(x) = \delta_x(f) = (\delta(x))(f),\end{aligned}$$

és

$$(\Phi \circ \varphi)(x) = \delta(x), \qquad \text{azaz} \qquad \Phi \circ \varphi = \delta.$$

A δ leképezés bijekciók kompozíciója, ezért maga is bijekció, sőt lineáris is, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned}\delta(x + \alpha y) &= \Phi(\varphi(x + \alpha y)) = \Phi(\varphi(x) + \overline{\alpha}\varphi(y)) = \\ &= \Phi(\varphi(x)) + \overline{\overline{\alpha}}\Phi(\varphi(y)) = \Phi(\varphi(x)) + \alpha\Phi(\varphi(y)) = \\ &= \delta(x) + \alpha\delta(y).\end{aligned}$$

δ normatartó, hiszen bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|\delta(x)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \|(\Phi \circ \varphi)(x)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \|\varphi(x)\|_{\mathcal{X}^*} = \|x\|_{\mathcal{X}}. \quad \blacksquare$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{A} := \{\delta_x \in \mathcal{X}^{**} : \ x \in \mathcal{X}\}$$

altere $\mathcal{X}^{**}$-nak. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{X}^{**}$, azaz a 4.5.30. feladatbeli δ leképezés szürjektív:

$$\delta[\mathcal{X}] = \mathcal{X}^{**},$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált teret **reflexív**nek nevezük.

4.5.3. példa.

1. Bármely Hilbert-tér reflexív (vö. 4.5.31. feladat).
2. Mivel $\mathcal{X}^{**}$ Banach-tér és $\mathcal{X}^{**}$ izomorf $\mathcal{X}$-szel, ezért minden reflexív tér teljes. Ha tehát valamely tér nem teljes, akkor az nem reflexív.
3. Minden véges dimenziós normált tér reflexív, hiszen (vö. 4.4.4. feladat) ebben az esetben $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}^*)$, így $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}^{**})$, továbbá a 4.5.30. feladatbeli $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ lineáris izometria esetében $\delta[\mathcal{X}]$ altér $\mathcal{X}^{**}$-ben.
4. $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ reflexív, ha $p \in (1, +\infty)$; $(L^1, \|\cdot\|_{L^1})$ és $(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty})$ nem reflexív.
5. $\mathfrak{c}_0$ nem reflexív, és kompakt $A \subset \mathbb{R}$ esetén $\mathfrak{C}(A)$, sőt $\mathfrak{C}^1(A)$ sem reflexív.

A 4.4.1. példából tudjuk, hogy ha a $(\mathfrak{c}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, ill.

$$\varphi : \mathfrak{c} \to \mathbb{K}, \qquad \varphi((x_n)) := \lim(x_n)$$

funkcionál esetében

$$\varphi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{c}, \mathbb{K}).$$

Mivel $\mathfrak{c}$ altér l_∞-ben, felmerül a kérdés, hogy φ-nek létezik-e

$$\Phi : l_\infty \to \mathbb{K}$$

lineáris kiterjesztése. A Hahn-Banach-tétel (vö. 4.5.3. feladat) szerint igen a válasz, ha pl. a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben tudunk adni olyan

$$p : l_\infty \to \mathbb{R}$$

pozitívan homogén félnormát, amelyre

$$\varphi((x_n)) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \leq p((x_n)) \qquad ((x_n) \in \mathfrak{c})$$

teljesül. Erre vonatkozik a

4.5.32. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$p : l_\infty \to \mathbb{R}, \qquad p((x_n)) := \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

funkcionál olyan pozitívan homogén félnorma, amelyre

$$\lim(x_n) \leq p((x_n)) \qquad ((x_n) \in \mathfrak{c})$$

teljesül!

Útm.

- Ha
$$x_n \in l_\infty \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \|(x_n)\|_{l_\infty} < +\infty,$$
azaz
$$p(x) < +\infty.$$

- Ha
$$x_n, y_n \in l_\infty \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill.} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$
akkor
$$\begin{aligned} p((x_n)+(y_n)) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\right) \leq \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) + \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right) = \\ &= p((x_n)) + p((y_n)), \end{aligned}$$
ill.
$$p(\alpha(x_n)) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha x_k\right) = \alpha \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) = \alpha p((x_n)).$$

- Elemi analízisbeli ismereteinkből tudjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) = p((x_n)) \qquad ((x_n)\in\mathfrak{c}). \quad \blacksquare$$

4.5.33. feladat. Igazoljuk, hogy a fenti
$$\Phi : l_\infty \to \mathbb{R}$$
lineáris funkcionálra (ún. **általánosított limesz**re) teljesülnek az alábbi állítások!

1. Ha
$$(x_n) \in l_\infty : \qquad x_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\Phi((x_n)) \geq 0.$$
2. Bármely $(x_n) \in l_\infty$ esetén
$$\Phi((x_n)) = (x_{n+1}).$$
3. Ha $e := (1,1,\ldots)$, akkor
$$\Phi(e) = 1.$$

Útm. Legyen p a 4.5.32. feladabeli pozitívan homogén félnorma. Ekkor

1. ha
$$(x_n)\in l_\infty : \qquad x_n \geq 0 \quad (n\in\mathbb{N}),$$
úgy
$$p((-x_n)) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-x_k)\right) \leq 0,$$
ezért
$$\Phi((x_n)) = -\Phi(-(x_n)) \geq -p(-(x-n)) \geq 0.$$
2. ha
$$x_n \in l_\infty \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
úgy
$$-p(-(x_n)+(x_{n+1})) \leq \Phi((x_n)-(x_{n+1})) \leq p((x_n)-(x_{n+1})),$$
ahol
$$\begin{aligned} p((x_n)-(x_{n+1})) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1})\right) = \\ &= \limsup_{n\to\infty}((x_1 - x_{n+1})) = 0, \end{aligned}$$
és
$$\begin{aligned} p(-(x_n)+(x_{n+1})) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-x_k + x_{k+1})\right) = \\ &= \limsup_{n\to\infty}((x_{n+1} - x_1)) = 0, \end{aligned}$$
ezért
$$\Phi((x_n)-(x_{n+1})) = 0,$$
ahonnan Φ linearitása miatt
$$\Phi((x_n)) = (x_{n+1})$$
adódik.
3. mivel
$$e = (1{,}1,\ldots) \in \mathfrak{c} \subset l_\infty,$$
ezért
$$\Phi(e) = \varphi(1{,}1,\ldots) = \lim(1{,}1,\ldots) = 1. \quad \blacksquare$$

A fenti Φ funkcionált a 4.5.32. feladatban igazolt tulajdonságai miatt szokás **Banach-limesz**nek is nevezni.

5. fejezet

Operátorsorozatok

5.0.34. feladat. Mutassuk meg, hogy ha valamely

$$a_n \in \mathbb{K} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat esetén

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k \qquad (z \in \mathbb{K},\, n \in \mathbb{N}_0),$$

továbbá valamely $r > 0$ számra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n \in \mathbb{R} \qquad (|z| < r),$$

akkor bármely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $A \in L(\mathcal{X})$ operátor esetén

$$\|A\| < r \qquad \Longrightarrow \qquad s(A) := \sum_{n=0}^{\infty} s_n(A) \in L(\mathcal{X})$$

teljesül!

Útm. Ha

$$\|A\| < r,$$

akkor (vö. 4.3.10. feladat utáni megjegyzés)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \|A\|^n \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $L(\mathcal{X})$ Banach-térben a

$$\sum_{n=0} (a_n A^n)$$

sor abszolút konvergens, így (vö. 1.3.43. feladat) konvergens is. ■

5.0.35. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $A, B \in L(\mathcal{X})$, akkor

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \in L(\mathcal{X}),$$

és bármely $t, s \in \mathbb{K}$ esetén

$$e^{tA} e^{tA} = e^{(t+s)A}$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $z \in \mathbb{K}$ esetén

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{K},$$

ezért, ha $A \in L(\mathcal{X})$, akkor (vö. 5.0.34. feladat)

$$e^A \in L(\mathcal{X}),$$

továbbá minden $t, s \in \mathbb{K}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} e^{tA} e^{tA} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} A^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} t^k s^{n-k}\right) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t+s)^n A^n = \\ &= e^{(t+s)A}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.0.36. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $\xi \in \mathcal{X}$, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor pontosan egy olyan

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$$

differenciálható függvény van, amelyre

$$\phi'(t) = A\phi(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \phi(0) = \xi$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy bármely $0 \neq h \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Delta := \left\| h^{-1}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| = |h| \cdot \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} A^n \right\| \leq |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \|A\|^n \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

Mivel (vö. 5.0.35. feladat)

$$e^{(t+h)A} = e^{tA} e^{hA} = e^{hA} e^{tA} \qquad (t, h \in \mathbb{R}),$$

ezért a

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{X}, \qquad \phi(t) := e^{tA}\xi$$

függvénnyel

$$\begin{aligned}\left\|h^{-1}(\phi(t+h) - \phi(t)) - A\phi(t)\right\|_{\mathcal{X}} &= \left\|\left(h^{-1}\left(e^{hA} - I\right) - A\right) e^{tA}\xi\right\|_{\mathcal{X}} \leq \\ &\leq \Delta \cdot \left\|e^{tA}\right\| \cdot \|\xi\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

teljesül. Így

$$\phi'(t) = A\phi(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \phi(0) = e^{0\cdot A}\xi = I\xi = \xi.$$

2. lépés. Tegyük fel, hogy a

$$\omega : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$$

függvényre

$$\omega'(t) = A\omega(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \omega(0) = \xi.$$

Világos, hogy ekkor a

$$\psi(t) := \phi(t) - \omega(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\psi'(t) = \phi'(t) - \omega'(t) = A\phi(t) - A\omega(t) = A(\phi(t) - \omega(t)) = A\psi(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\psi(0) = \phi(0) - \omega(0) = \xi - \xi = 0$$

teljesül. Így, ha $f \in \mathcal{X}^*$, akkor

$$f(\psi'(t)) = f(A\psi(t)) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

lineáris és folytonos, ezért bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\lim_{h\to\infty} \frac{f(\psi(t+h)) - f(\psi(t))}{h} &= f\left(\lim_{h\to\infty} \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h}\right) = \\ &= f\left(\psi'(t)\right),\end{aligned}$$

ahonnan

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\psi(t)\right) = f(A\psi(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

következik. Mivel ψ folytonos, ezért A és f folytonossága következtében az

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(A\psi(t))$$

függvény is folytonos. Ezért $(*)$ mindkét oldalát integrálva $\int_0^t \mathrm{d}s$ azt kapjuk, hogy

$$f(\psi(t)) = \int_0^t f(A\psi(s))\,\mathrm{d}s \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahonnan tetszőleges $a > 0$, ill. $t \in [-a, a]$ esetén

$$\begin{aligned} |f(\psi(t))| &\leq \left|\int_0^t f(A\psi(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \\ &\leq \int_0^t |f(A\psi(s))|\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t \|f\|_* \cdot \|A\| \cdot \|\psi(s)\|_{\mathcal{X}}\,\mathrm{d}s \leq \\ &\leq a \cdot \|f\|_* \cdot \|A\| \cdot \max\{\|\psi(s)\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \ s \in [-a, a]\} \end{aligned}$$

következik. Mivel (vö. 4.5.8/1. feladat)

$$\|\psi(t)\|_{\mathcal{X}} \leq a \cdot \|A\| \cdot \max\{\|\psi(s)\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \ s \in [-a, a]\} \qquad (t \in [-a, a]),$$

ezért bármely $t \in [-a, a]$ esetén

$$\max\{\|\psi(t)\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \ s \in [-a, a]\} \leq a \cdot \|A\| \cdot \max\{\|\psi(t)\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \ s \in [-a, a]\},$$

így

$$A = O \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ha $A \neq O$, akkor az

$$a := \frac{1}{2\|A\|}$$

számmal

$$\psi(t) = 0 \qquad (t \in [-a, a])$$

teljesül. Így, ha a ψ függvényre

$$\psi'(t) = A\psi(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \psi(\pm h) = 0,$$

akkor

$$\psi(t) = 0 \qquad (t \in [-2a, 2a]).$$

Az eljárást folytatva végül azt kapjuk, hogy

$$\phi(t) - \omega(t) = \psi(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\phi(t) = \omega(t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

5.0.5. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$, $(\mathcal{Y}, \sigma)$ metrikus terek esetén azt mondjuk, hogy az

$$f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat

- **pontonként konvergens** a $H \subset \mathcal{X}$ halmazon, ha bármely $x \in H$ esetén az

$$f_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  sorozat konvergens az $(\mathcal{Y}, \sigma)$ térben, azaz van olyan $f : H \to \mathcal{Y}$ függvény, amelyre

$$\lim(\sigma(f_n(x), f(x)) = 0 \qquad (x \in H)$$

  teljesül. (f_n) pontonként konvergens, ha (f_n) pontonként konvergens a $H = \mathcal{X}$ halmazon. f-et szokás az (f_n) **pontonkénti limesz**ének is nevezni.

- **pontonként Cauchy-féle** a $H \subset \mathcal{X}$ halmazon, ha bármely $x \in H$ esetén az $(f_n(x))$ sorozat az $(\mathcal{Y}, \sigma)$ térben Cauchy-sorozat. (f_n) pontonként Cauchy-féle, ha (f_n) pontonként Cauchy-féle a $H = \mathcal{X}$ halmazon.

Ha $(\mathcal{Y}, \sigma)$ teljes metrikus tér, akkor bármely pontonként Cauchy-féle (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens.
Ha tehát $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, akkor az

$$A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat pontosan akkor

- pontonként konvergens, ha alkalmas $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorra

$$Ax = \lim(A_n x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

  teljesül.

- pontonként Cauchy-féle, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér és az

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat pontonként konvergens, azaz alkalmas $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorra

$$Ax = \lim(A_n x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül, akkor A lineáris: $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (vö. 4.3.8. feladat útmutatója: **3. lépés**), de nem feltétlenül folytonos. Ezt hivatott igazolni az

5.0.37. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \{x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \exists\, N \in \mathbb{N} :\, x_n = 0\,(N \leq n \in \mathbb{N})\}\,,$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ és $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ normált tereket tekintve az

$$A_n : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad A_n(x_k) := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat pontonként konvergens, de a pontonkénti limesz-operátor nem folytonos!

Útm. Világos, hogy

$$A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá, mivel bármely

$$x = (x_k) \in \mathcal{X}$$

esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$x_k = 0 \qquad (N \leq k \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|A_n x| \leq \sum_{k=1}^{N} |x_k| \leq N\|x\|_\infty \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} x_k =: Ax \qquad (x \in \mathcal{X})$$

lineáris operátor nem korlátos, így nem is folytonos, hiszen az

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (k \leq n), \\ \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|x^{(n)}\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad \left|A\left(x^{(n)}\right)\right| = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. ■

5.0.6. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, ill.

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

operátorsorozat esetén azt mondjuk, hogy (A_n) **normában** vagy **egyenletesen konvergens**, ha (A_n) konvergens az $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ térben, azaz alkalmas $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátorra

$$\lim(\|A_n - A\|) = 0$$

teljesül.

5.0.38. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$,

$$M := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

ONR, továbbá

$$A_n x := \widehat{x}(n) = \langle x, x_n\rangle \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathcal{X}),$$

akkor az (A_n) operátorsorozat pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens!

Útm. Mivel

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 4.2.31. feladat), továbbá a Bessel-egyenlőtlenség (vö. 1.4.54. feladat) következtében

$$0 = \lim(\langle x, x_n\rangle) = \lim(A_n x),$$

azaz az (A_n) operátor-sorozat (funkcionál-sorozat) pontonként tart az azonosan nulla operátorhoz (funkcionálhoz). (A_n) nem konvergál az azonosan nulla operátorhoz (funkcionálhoz), ui. (vö. 4.2.31. feladat)

$$\|A_n\| = \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

5.0.3. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in [1, +\infty)$,

$$A_n \in L(l_p) \qquad A_n(x_m) := (\delta_{nm} x_m) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

/ A_n a $(\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozathoz tartozó diagonáloperátor/, akkor (A_n) pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens!

Útm.

5.0.39. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, ill.

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az (A_n) operátorsorozat (normában való) konvergenciája maga után vonja az (A_n) operátor-sorozat pontonkénti konvergenciáját!

Útm. Ha (A_n) normában konvergens, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|A_n x - Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|(A_n - A)x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A - A_n\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

5.1. Az egyenletes korlátosság tétele

5.1.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és az $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátorhalmaz esetén azt mondjuk, hogy

- $\mathcal{O}$ **pontonként korlátos**, ha bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén az
$$\{Ax \in \mathcal{Y} : \; A \in \mathcal{O}\}$$
halmaz korlátos $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban.
- $\mathcal{O}$ **egyenletesen korlátos** vagy **normában korlátos**, ha
$$\sup\{\|A\| \in [0, +\infty] : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty$$
teljesül.

Az
$$A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
(lineáris) **operátor-sorozat**ot **pontonként**, ill. **egyenletesen korlátos**nak nevezzük, ha az
$$\{A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \; n \in \mathbb{N}\}$$
halmaz pontonként, ill. egyenletesen korlátos.

Világos, hogy ha $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, akkor bármely $A \in \mathcal{O}$ esetén $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

5.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $a \in \mathcal{X}$, valamint ha az $U \subset \mathcal{X}$ halmaz környezete a-nak, akkor

1. egyenértékűek az alábbi állítások:
   (1) $\mathcal{O}$ pontonként korlátos,
   (2) bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
   $$\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty,$$
   (3) bármely $x \in U$ esetén
   $$\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty;$$
2. ha U korlátos, úgy $\mathcal{O}$ pontosan akkor egyenletesen korlátos, ha
$$\sup\{\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; x \in U\} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty;$$
3. ha $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, úgy pontonként is korlátos!

Útm.

1. Világos, hogy **(1)** $\Leftrightarrow$ **(2)**, továbbá **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**. Ha most

$$M_u := \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty \qquad (u \in U)$$

és $x \in \mathcal{X}$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $K_\delta(a) \subset U$ és

$$\frac{\delta x}{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}} \in K_\delta(0), \qquad \text{tehát} \qquad b := a + \frac{\delta x}{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}} \in K_\delta(a) \subset U.$$

Mivel

$$x = \frac{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}(b - a),$$

ezért bármely $A \in \mathcal{O}$ operátorra

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{\mathcal{Y}} &= \frac{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\|A(b-a)\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\left(\|Ab\|_{\mathcal{Y}} + \|Aa\|_{\mathcal{Y}}\right) \leq \\ &\leq \frac{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\left(M_b + M_a\right) < +\infty,\end{aligned}$$

azaz

$$\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty.$$

2. Az U korlátossága azt jelenti, hogy alkalmas $K > 0$ esetén, ha $u \in U$, úgy $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq K$. Ha tehát a

$$c := \sup\{\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; x \in X, \; \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1\} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty$$

és $u \in U$, akkor

$$\left\|\frac{u}{1 + \|u\|_{\mathcal{X}}}\right\|_{\mathcal{X}} = \frac{\|u\|_{\mathcal{X}}}{1 + \|u\|_{\mathcal{X}}}$$

övtkeztében bármely $A \in \mathcal{O}$ esetén

$$\|Au\|_{\mathcal{Y}} = (1 + \|u\|_{\mathcal{X}})\left\|A\left(\frac{u}{1 + \|u\|_{\mathcal{X}}}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq (1 + K)c,$$

és így

$$d := \sup\{\sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; u \in U\} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\} < +\infty.$$

Ha pedig

$$d < +\infty \qquad \text{és} \qquad \delta > 0$$

olyan, hogy

$$K_\delta(a) \subset U,$$

akkor bármely

$$x \in \mathcal{X}, \qquad \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1$$

esetén

$$b := a + \frac{\delta}{2}x \in K_\delta(a) \subset U,$$

és így

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \left\|A\left(\frac{2}{\delta}(b - a)\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{2}{\delta}\left\{\|Ab\|_{\mathcal{Y}} + \|Aa\|_{\mathcal{Y}}\right\} \leq \frac{4d}{\delta},$$

tehát $c < +\infty$.

3. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \sup\{\|A\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\},$$

ezért az egyenletes korlátosságból következik a pontonkénti korlátosság. ■

5.1.2. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér,

$$A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$a \in \mathcal{X}$, és az $U \subset \mathcal{X}$ halmaz környezete a-nak, továbbá bármely $u \in U$ esetén $(A_n(u))$ Cauchy-sorozat, akkor (A_n) pontonként Cauchy-féle!

Útm. Ha $x \in \mathcal{X}$ és $\delta > 0$ olyan, hogy $K_\delta(a) \subset U$, ill.

$$\frac{\delta x}{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}} \in K_\delta(0), \qquad \text{tehát} \qquad b := a + \frac{\delta x}{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}} \in K_\delta(a) \subset U,$$

akkor bármely $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, speciálisan a $B := A_m - A_n$ operátorra

$$\|Bx\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1 + \|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta} \left(\|Bb\|_{\mathcal{Y}} + \|Ba\|_{\mathcal{Y}}\right)$$

teljesül (vö. 5.1.1/1. feladat útmutatója). ■

5.1.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \{x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \exists\, N \in \mathbb{N} : \; x_n = 0 \, (N \leq n \in \mathbb{N})\},$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ és $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ normált tereket tekintve az

$$A_n : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad A_n(x_k) := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat pontonként korlátos, de nem egyenletesen korlátos!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely

$$x = (x_k) \in \mathcal{X}$$

esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$x_k = 0 \qquad (N \leq k \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$|A_n x| \leq \sum_{k=1}^{N} |x_k| \leq N\|x\|_\infty \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\sup\{|A_n x| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\mathcal{O} := \{A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz pontonként korlátos.

2. lépés. Ha

$$U := K_1(0),$$

akkor az

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (k \le n), \\ \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|x^{(n)}\|_\infty = 1 \qquad \text{és} \qquad |A_n(x^{(n)})| = n.$$

Tehát az

$$\mathcal{O} := \{A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz nem egyenletesen korlátos. ■

5.1.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ Banach-tér , $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, valamint $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor igaz az

$$\mathcal{O} \text{ pontonként korlátos} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{O} \text{ egyenletesen korlátos}$$

implikáció (az **egyenletes korlátosság tétele**)!

Útm. Ha

$$\mathcal{F} := \{f : \mathcal{X} \to [0, +\infty) : \ f(x) := \|Ax\|_\mathcal{Y}, \ A \in \mathcal{O}\},$$

akkor nyilván

$$\mathcal{F} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathbb{R}).$$

Így a pontonkénti korlátosság, azaz a tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén fennálló

$$\sup\{\|Ax\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{O}\} < +\infty$$

egyenlőtlenség következményeként azt kapjuk, hogy

$$\sup\{f(x) \in \mathbb{R} : \ f \in \mathcal{F}\} < +\infty,$$

azaz $\mathcal{F}$ pontonként korlátos. Így az Osgood-tétel (vö. 1.2.71. feladat) következtében van olyan $\mathcal{X}$-beli nyílt gömb, pl.

$$N := K_\delta(a) \subset \mathcal{X},$$

hogy $\mathcal{F}$ egyenletesen korlátos N-en, azaz van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy bármely $x \in N$ és $A \in \mathcal{O}$ esetén

$$\|Ax\|_\mathcal{Y} \le m.$$

Világos, hogy bármely $(0 \neq)x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\frac{\delta}{2\|x\|_{\mathcal{X}}}x + a \in N = K_\delta(a),$$

így az

$$x = \frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\left\{\frac{\delta}{2\|x\|_{\mathcal{X}}}x + a\right\} - \frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}a$$

felbontással

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_{\mathcal{Y}} &= \left\|A\left(\frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\left\{\frac{\delta}{2\|x\|_{\mathcal{X}}}x + a\right\} - \frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}a\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \\
&\leq \frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\underbrace{\left\|A\underbrace{\left(\frac{\delta}{2\|x\|_{\mathcal{X}}}x + a\right)}_{\in K_\delta(a)}\right\|_{\mathcal{Y}}}_{\leq m} + \frac{2\|x\|_{\mathcal{X}}}{\delta}\underbrace{\left\|A\underbrace{a}_{\in K_\delta(a)}\right\|_{\mathcal{Y}}}_{\leq m} \leq \\
&\leq \frac{4m}{\delta}\|x\|_{\mathcal{X}} =: M\|x\|_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\sup\left\{\|A\| \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\right\} \leq M$$

következik. ■

5.1.5. feladat. Bizonyítsuk be az egyenletes korlátosság tételét a 4.2.40. feladatbeli állítás felhasználásával!

Útm. Világos, hogy ha az 5.1.4. feladatbeli $\mathcal{O}$ nem egyenletesen korlátos, azaz

$$\sup\left\{\|A\| \in \mathbb{R} : \; A \in \mathcal{O}\right\} = +\infty,$$

akkor alkalmas

$$A_n \in \mathcal{O} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozattal

$$\|A_n\| \geq 4^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha

$$v \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad p > 0,$$

akkor a 4.2.40. feladatbeli állítás, ill. a teljes indukció felhasználásával olyan

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konstruálható, amelyre

$$x_0 = v,$$

$$\|x_n - x_{n-1}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{p}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{3^n} \cdot \|A_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az így értelmezett sorozat Cauchy-féle, hiszen ha $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{p}{3^{k+1}} \leq \frac{p}{2 \cdot 3^n}.$$

Ezért $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége folytán van olyan $x \in \mathcal{X}$, hogy

$$\lim(x_n) = x.$$

Nem nehéz belátni, hogy erre az elemre

$$\|x - x_n\|_{\mathcal{X}} \leq p/2 \cdot 3^n,$$

speciálisan

$$\|x - y\|_{\mathcal{X}} \leq p$$

teljesül. Így

$$\begin{aligned} \|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} &\geq \|A_n x_n\|_{\mathcal{Y}} - \|A_n(x - x_n)\|_{\mathcal{Y}} \geq \\ &\geq \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{3^n} \cdot \|A_n\| - \frac{p}{2 \cdot 3^n} \cdot \|A_n\| \geq \frac{p}{6} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\lim(\|A_n x\|_{\mathcal{Y}}) = +\infty$$

következik. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{O}$ nem pontonként korlátos. ■

Mint ahogy az alábbi példákból is jól látható, az egyenletes korlátosság tételében az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér teljessége, ill. $\mathcal{O}$ elemeinek linearitása lényeges feltétel.

5.1.1. példa. Az 5.0.37. feladatban bevezetett (A_n) operátor-sorozat minden tagja folytonos, viszont az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem teljes (vö. 1.2.57. feladat). Ez az oka tehát annak, hogy az

$$\mathcal{O} := \{A_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz nem egyenletesen korlátos (vö. 5.1.3. feladat).

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér , $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, akkor az egyenletes korlátosság tétele az

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat esetén a következőt jelenti: ha

$$\mathcal{O} := \{A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz pontonként korlátos, akkor $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, azaz

$$\sup\{\|A_n x\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty \ \ (x \in \mathcal{X}) \quad \Longrightarrow \quad \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

5.1.6. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, valamint $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) $\mathcal{O}$ egyenlő mértékben egyenletesen folytonos (vö. 1.3.26/3. definíció), azaz bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $A \in \mathcal{O}$ és $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x - y\|_{\mathcal{X}} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Ax - Ay\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$$

(2) Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $A \in \mathcal{O}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|x - 0\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{\mathcal{X}} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Ax - A0\|_{\mathcal{Y}} = \|Ax\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$$

(3) Alkalmas $K > 0$ szám és tetszőleges $A \in \mathcal{O}$ operátor, ill. $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

(4) $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos.

Útm.

1. lépés /(1) ⇒ (2)/. Az $y := 0$ választás megfelelő.

2. lépés /(2) ⇒ (3)/. Ha $\varepsilon := 1$, akkor alkalmas $\delta > 0$ számra

$$\forall\, A \in \mathcal{O}\, \forall\, x \in \mathcal{X}: \; \|x\|_{\mathcal{X}} < \delta \;\Rightarrow\; \|Ax\|_{\mathcal{Y}} < 1,$$

azaz

$$\forall\, A \in \mathcal{O}\, \forall\, x \in \mathcal{X}: \; \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \geq 1 \;\Rightarrow\; \|x\|_{\mathcal{X}} \geq \delta.$$

Ha $x \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \neq 0$, akkor az

$$y := \frac{x}{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}$$

vetorra

$$\|Ay\|_{\mathcal{Y}} = \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}} \right\|_{\mathcal{Y}} = \frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}} = 1,$$

és így

$$\delta \leq \|y\|_{\mathcal{X}} = \left\| \frac{x}{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}} \right\|_{\mathcal{X}} = \frac{\|x\|_{\mathcal{X}}}{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}.$$

Ezért a $K := 1/\delta$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, A \in \mathcal{O}\, \forall\, x \in \mathcal{X}: \; \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Innen pedig **(3)** következik, hiszen a

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = 0$$

esetben az utolsó egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

3. lépés /(3) $\Rightarrow$ (4)/. Világos, hogy

$$\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}\in\mathbb{R}:\ A\in\mathcal{O}\}\leq K\|x\|_{\mathcal{X}}\qquad(x\in\mathcal{X}),$$

így

$$\sup\{\sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathcal{X},\ \|x\|_{\mathcal{X}}\leq 1\}\in\mathbb{R}:\ A\in\mathcal{O}\}\leq$$

$$\leq K\sup\{\|x\|_{\mathcal{X}}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathcal{X},\ \|x\|_{\mathcal{X}}\leq 1\}\leq K<+\infty,$$

ezért $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos (vö. 5.1.1/2. feladat: $U:=K_1(0)$).

4. lépés /(4) $\Rightarrow$ (1)/. Ha $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, akkor

$$c:=\sup\{\|A\|\in\mathbb{R}:\ A\in\mathcal{O}\}\in\mathbb{R}.$$

Teszőleges $\varepsilon>0$ esetén legyen

$$\delta:=\frac{\varepsilon}{1+c}.$$

Az $A\in\mathcal{O}$ operátorok folytonossága és linearitása következtében bármely $A\in\mathcal{O}$, ill. $x,y\in\mathcal{X}$ esetén a $\|x-y\|_{\mathcal{X}}<\delta$ egyenlőtlenségből

$$\|Ax-Ay\|_{\mathcal{Y}}=\|A(x-y)\|_{\mathcal{Y}}\leq\|A\|\cdot\|x-y\|_{\mathcal{Y}}\leq\sup\{\|A\|\cdot\|x-y\|_{\mathcal{Y}}\in\mathbb{R}:\ A\in\mathcal{O}\}$$

következik. ∎

5.1.7. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ Banach-tér, az

$$A_n,B_n\in L(\mathcal{X})\qquad(n\in\mathbb{N})$$

sorozatok pontonként konvergensek, továbbá az

$$\lim(A_n)=A,\qquad\text{ill.}\qquad\lim(B_n)=B$$

operátorra

$$A,B\in L(\mathcal{X}),$$

akkor az

$$A_nB_n\qquad(n\in\mathbb{N})$$

operátor-sorozat is pontonként konvergens, és

$$\lim(A_nB_n)=AB$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$A_n\longrightarrow A\qquad(n\in\mathbb{N})$$

pontonként, ezért bármely $x\in\mathcal{X}$ esetén az

$$A_nx\qquad(n\in\mathbb{N})$$

sorozat korlátos, azaz

$$\mathcal{O} := \{A_n \in L(\mathcal{X}) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

pontonként korlátos, így a tér teljessége, ill. az lineáris operátorokból álló sorozat tagjanak folytonossága következtében alkalmazható az egyenletes korlátosság tétele (vö. 5.1.4. feladat), ezért $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, azaz alkalmas $K \geq 0$ számra

$$\|A_n\| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \|A_nB_nx - ABx\| &\leq \|A_n\| \cdot \|B_nx - Bx\| + \|(A_n - A)Bx\| \leq \\ &\leq K \cdot \|B_nx - Bx\| + \|(A_n - A)Bx\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

teljesül. ■

5.1.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, valamint

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha (A_n) pontonként konvergens és valamely $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátorra

   $$Ax = \lim(A_nx) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

   akkor

   $$\|A\| \leq \liminf(\|A_n\|) \leq \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Ha H sűrű $\mathcal{X}$-ben: $\overline{H} = \mathcal{X}$, (A_n) egyenletesen korlátos, $(A_n|_H)$ pontonként Cauchy-féle, akkor (A_n) pontonként Cauchy-féle.

3. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljes (azaz Banach-tér) és (A_n) pontonként Cauchy-féle, akkor (A_n) egyenletesen korlátos.

Útm.

1. Világos, hogy a második egyenlőség mindig teljesül, továbbá

   $$\alpha := \liminf(\|A_n\|) = +\infty$$

   esetén az első is fennáll. Feltehető tehát, hogy $c \in \mathbb{R}$. Ekkor alkalmas (ν_n) indexsorozattal

   $$\alpha = \lim(\|A_{\nu_n}\|).$$

   Így az (A_n) sorozat pontonkénti konvergenciája és a norma folytonossága (vö. 1.3.41. feladat) következtében tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén azt kapjuk, hogy

   $$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \lim(\|A_nx\|_{\mathcal{Y}}) = \lim(\|A_{\nu_n}x\|_{\mathcal{Y}}) \leq \lim(\|A_{\nu_n}\|) \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} = \alpha\|x\|_{\mathcal{X}},$$

ahonnan

$$\|A\| \leq \alpha$$

következik.

2. Ha H sűrű $\mathcal{X}$-ben,

$$\beta := \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty,$$

továbbá bármely $x \in H$ esetén $(A_n x)$ Cauchy-sorozat $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban, akkor azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{X}$, ill. $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ha tehát $x \in \mathcal{X}$ tetszőleges, akkor H sűrűsége folytán van olyan $y := y(x) \in H$, hogy

$$\|x - y\|_{\mathcal{Y}} < \frac{\varepsilon}{3(\beta + 1)},$$

továbbá – lévén, hogy $(A_n|_H)$ pontonként Cauchy-féle – alkalmas $N := N(y) \in \mathbb{N}$ indexre

$$\|A_m y - A_n y\|_{\mathcal{Y}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Így bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \|A_m x - A_n x\|_{\mathcal{Y}} &\leq \|A_m(x-y)\|_{\mathcal{Y}} + \|A_m(y) - A_n(y)\|_{\mathcal{Y}} + \|A_n(y-x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \beta\|x-y\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{3} + \beta\|x-y\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Ha (A_n) pontonként Cauchy-féle, akkor (A_n) pontonknt korlátos (vö. 1.2.39. feladat), így a $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ tér teljessége következtében alkalmazható az egyenletes korlátosság tétele (vö. 5.1.4. feladat), azaz (A_n) egyenletesen korlátos. ■

5.1.9. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, az

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

operátor-sorozat pontonként konvergens, akkor az

$$Ax := \lim(A_n x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

(pontonkénti limesz-)operátorra $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ és

$$\|A\| \leq \liminf(\|A_n\|) \leq \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

teljesül.

Útm. Ha (A_n) pontonként konvergens, akkor $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljes, ezért (vö. 5.1.8/3. feladat) (A_n) egyenletesen korlátos, így a norma folytonossága (vö. 1.3.41. feladat) következtében

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \lim(\|A_n x\|_{\mathcal{Y}}) \leq \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

következtében A korlátos. Az állítás további részét pedig beláttuk az 5.1.8/1,3. feladatban. ■

5.1.10. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $\alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat esetén igaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in \mathbb{K} \quad ((x_n) \in l_\infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\alpha_n) \in l_1$$

ekvivalencia, ill. $(\alpha_n) \in l_1$ esetén a

$$\varphi : l_\infty \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

funkcionál lineáris és folytonos, továbbá normájára

$$\|\varphi\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|(\alpha_n)\|_{l_1}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $(\alpha_n) \in l_1$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség (vö. [15]) következménye, hogy bármely $(x_n) \in l_\infty$ esetén a

$$\sum_{n=1} (\alpha_n x_n)$$

sor konvergens. Ha pedig

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_\infty, \|\cdot\|_\infty) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (\mathbb{K}, |\cdot|),$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n : l_\infty \to \mathbb{K}, \qquad A_n(x_k) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

akkor A_n nyilvánvalóan lineáris, és az

$$|A_n x| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot \|(x_k)\|_\infty \qquad (x = (x_k) \in l_\infty)$$

becslés következtében folytonos is, sőt

$$\|A_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

is teljesül. Így az

$$(*) \qquad x = (x_k), \qquad x_k := \operatorname{sgn}(\alpha_k) := \begin{cases} 0 & (\alpha_k = 0), \\ \dfrac{\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|} & (\alpha_k \neq 0) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$\|(x_k)\|_\infty \leq 1 \qquad \text{és} \qquad A_n x = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|A_n\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. lépés. Mivel (A_n) pontonként konvergens,

$$(l_\infty, \|\cdot\|_\infty) \qquad \text{és} \qquad (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

Banach-tér (vö. 1.3.1/3. példa), ezért az

$$\varphi : l_\infty \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(x) := \lim(A_n x)$$

funkcionál lineáris és folytonos, továbbá

$$\|\varphi\| \leq \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < +\infty,$$

(vö. 5.1.9. feladat), ahonnan

$$(\alpha_k) \in l_1$$

következik.

3. lépés. A $(*)$-beli $x = (x_k)$ sorozatra

$$\|x\|_\infty \leq 1,$$

és így

$$\|\varphi\| \geq |Ax| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|(\alpha_k)\|_{l_1}. \quad \blacksquare$$

5.1.1. gyakorló feladat. Adott $\alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat,

$$p, q \in [1, +\infty], \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

esetén igazoljuk, hogy igaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in \mathbb{K} \quad ((x_n) \in l_p) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\alpha_n) \in l_q$$

ekvivalencia!

Útm.

5.1.11. feladat. Lássuk be, hogy az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ és $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ normált tereket tekintve (vö. 5.1.3. feladat) az

$$A_n : \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \qquad A_n(x_k) := \sum_{k=n}^{2n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$(L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$-beli) operátor-sorozat pontonként konvergál az $O \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ operátorhoz, de (A_n) nem egyenletesen korlátos, azaz

$$\sup \{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ teljesül. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre A_n lineáris, továbbá

$$|A_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{2n} |x_k| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=n}^{2n} 1 = (n+1)\|x\|_\infty,$$

így A_n folytonos is.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy (A_n) pontonként konvergál az $O \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ operátorhoz. Mivel bármely $x := (x_n) \in \mathcal{X}$ (vö. 5.1.3. feladat) esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$x_n = 0 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$A_n x = 0 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ha most

$$x^{(n)} := (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}, \qquad \text{ahol} \qquad x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (k \leq 2n), \\ \\ 0 & (k > 2n), \end{cases}$$

akkor

$$\|x^{(n)}\|_\infty = 1,$$

és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| A_n x^{(n)} \right| = \sum_{k=n}^{2n} 1 = n+1,$$

így (A_n) nem egyenletesen korlátos (vö. 5.1.1/2. feladat: $U := K_1(0)$). ■

Az 5.1.11. feladatból látható, hogy az 5.1.8. feladatbeli első állítás feltételeiből még nem következik az (A_n) operátor-sorozat egyenletes korlátossága. Ez azért van, mert az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$ normált tér nem teljes (vö. 1.2.57. feladat).

5.1.12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, és

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor egyenértékűek az alábbi állítások (**Banach-Steinhaus-tétel**)!

(1) (A_n) pontonként konvergens, azaz bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén az $(A_n x)$ sorozat konvergens $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban.

(2) Teljesül az alábbi két feltétel:

(a) van olyan $K > 0$ szám, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén

$$\|A_n\| \leq K,$$

(b) valamely, az $\mathcal{X}$-bli S zárt rendszer $/\overline{\text{span}\,(S)} = \mathcal{X}/$ esetén (A_n) pontonként konvergens S-en.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Ha (A_n) pontonként konvergens, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén az $(A_n x)$ sorozat konvergens, így korlátos is. Ezért a **(b)** feltéel szükségessége nyilvánvaló. Mivel $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljes, ezért az egyenletes korlátosság tétele (vö. 5.1.4. feladat) alkalmazható: (A_n) egyenletesen korlátos, azaz **(a)** teljesül.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. Ha **(b)** teljesül, azaz (A_n) pontonként konvergens S-en, akkor az

$$A_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátorok linearitása következtében (A_n) pontonként korvergens $\text{span}\,(S)$ lineáris burkán is, hiszen ha

$$x \in \text{span}\,(S),$$

akkor alkalmas $d \in \mathbb{N}$, ill.

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{K} \qquad \text{és} \qquad s_1, \ldots, s_d \in S$$

esetén

$$x = \sum_{k=1}^{d} s_k, \qquad \text{és így} \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k A_n(s_k) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ennélfogva (A_n) pontonként Cauchy-féle az S rendszer $\text{span}\,(S)$ lineáris burkán. Ez (A_n) egyenletes korlátossága, azaz az **(a)** feltétel következtében azt jelenti (vö. 5.1.8/2. feladat), hogy (A_n) pontonként Cauchy-féle a

$$\overline{\text{span}\,(S)} = \mathcal{X}$$

halmazon. Mivel $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljes, ezért (A_n) pontonként is konvergens $\mathcal{X}$-en. ■

5.1.13. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvény esetén a Fejér-közepek $(\sigma_n f)$ sorozata egyenletesen konvergál f-hez:

$$\lim(\|\sigma f_n - f\|_\infty) = 0$$

(vö. 4.2.9. példa)!

Útm. A fenti függvénysorozat egyenletes konvergenciája nem más, mint a

$$\sigma_n : (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \quad \sigma_n u := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y) F_n(\cdot - y)\,\mathrm{d}y \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozatnak a(z identikus operátorhoz való) pontonkénti konvergenciája. Ezért – alkalmazva a Banach-Steinhaus-tételt (vö. 5.1.12. feladat) – a fenti állítás igazolásához azt kell belátnunk, hogy

- van olyan $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$-beli H zárt rendszer, hogy (σ_n) pontonként tart H-n az identikus operátorhoz;
- a $(\|\sigma_n\|)$ operátornormák sorozata egyenletesen korlátos, azaz alkalmas $K > 0$ esetén

$$\|\sigma_n\| \le K$$

teljesül.

1. lépés. A

$$H := \{[0,2\pi] \ni x \mapsto 1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$$

rendszer zárt a $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben (vö. 3.1.4). Könnyen belátható, hogy ha

$$f_m(x) := \cos(mx) \qquad (m \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}),$$

akkor a 4.2.8. feladatbeli

$$S_n : (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \qquad S_n u := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y) D_n(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

operátorra

$$S_n f_m = \begin{cases} 0 & (n < m), \\ \\ f_m & (n \ge m) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} S_n u(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(x-y))\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\left(\cos(ky)\cos(kx) + \sin(ky)\sin(ky)\right)\mathrm{d}y = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\cos(ky)\,\mathrm{d}y\right)\cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y)\sin(ky)\,\mathrm{d}y\right)\sin(kx)\right\} \end{aligned}$$

és (bármely trigonometrikus polinom Fourier-sora megegyezik magával a polinommal, ezért ($n \geq m$ esetén)

$$\sigma_n f_m = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f_m = \frac{n-m+1}{n+1} f_m = \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) f_m,$$

ahonnan

$$\sigma_n f_m \rightrightarrows f_m \qquad (n \to \infty)$$

következik. Hasonlóan érvelhetünk akkor is, ha

$$f_m(x) := \sin(mx) \qquad (m \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\sigma_n\| = 1$$

(vö. 4.2.9. feladat), ezért a $(\|\sigma_n\|)$ operátornormák sorozata egyenletesen korlátos. ∎

5.1.14. feladat. Igazoljuk, hogy adott

$$A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \qquad A = [a_{mn}]_{m,n\in\mathbb{N}}$$

ún. végtelen mátrix esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely $m \in \mathbb{N}$ és $x = (x_n) \in l_\infty$ esetén a

$$\sum_{n=1} (a_{mn} x_n)$$

sor konvergens, és ha

$$A_m x := \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \qquad (m \in \mathbb{N},\ x = (x_n) \in l_\infty),$$

akkor tetszőleges $x \in l_\infty$ elemre

$$(A_m x)_{m\in\mathbb{N}} \in l_\infty.$$

(2) Az A mátrix sorösszeg-normája véges:

$$\|A\| := \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \in \mathbb{R} :\ m \in \mathbb{N}\right\} < +\infty.$$

Útm.

1. lépés /(2) ⇒ (1)/. Bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x = (x_n) \in l_\infty$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn} x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \cdot \|x\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty < +\infty.$$

2. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén az

$$A_m : l_\infty \to \mathbb{K}, \qquad A_m x := \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n$$

operátor folytonos és lineáris (vö. 5.1.10. feladat). Mivel tetszőleges $x \in l_\infty$ esetén az $(A_m x)$ sorozat korlátos, ezért az

$$\mathcal{O} := \{A_m \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \; m \in \mathbb{N}\}$$

halmaz pontonként korlátos. Az egyenletes korlátosság tétele (vö. 5.1.4. feladat) következtében tehát

$$\sup\{\|A_m\| \in \mathbb{R} : \; m \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Ezért az 5.1.10. feladat utolsó állítása alapján

$$\|A_m\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

így

$$\sup\{\|A_m\| \in \mathbb{R} : \; m \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

nem más, mint **(2)**. ■

5.1.15. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér,

$$\mathcal{O} := \{\varphi_n \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \; n \in \mathbb{N}\}$$

egyenletesen korlátos, akkor

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{X} : \; \lim(f_n(x)) \in \mathbb{K}\}$$

zárt altér $\mathcal{X}$-ben!

Útm.

1. lépés. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén φ_n lineáris, így

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(0+0) = \varphi_n(0) + \varphi_n(0) \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad \varphi_n(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

következtében $0 \in \mathcal{A}$, tehát $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Ha $u, v \in \mathcal{A}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim(\varphi_n(u + \alpha v)) = \lim(\varphi_n(u) + \alpha\varphi_n(v)) = \lim(\varphi_n(u)) + \alpha \lim(\varphi_n(v)) \in \mathbb{K},$$

azaz $\mathcal{A}$ altere $\mathcal{X}$-nek.

2. lépés. Ha most az 5.1.8/2. feladatban az

$$\mathcal{Y} := \mathbb{K}, \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := |\cdot|, \qquad H := \mathcal{A}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{X} := \overline{\mathcal{A}}$$

helyettesítéssel élünk, akkor H sűrű $\overline{\mathcal{A}}$-ban. Megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$$

teljesül, azaz (φ_n) pontonként konvergens $\overline{\mathcal{A}}$-n. Világos, hogy $\mathcal{O}$ egyenletes korlátosságából

$$\{\varphi_n|_{\overline{\mathcal{A}}} \in L(\mathcal{X}, \mathbb{K}) : \; n \in \mathbb{N}\}$$

egyenletes korlátossága következik. Mivel (φ_n) pontonként konvergens $\mathcal{A}$-n, ezért a Cauchy-féle konvergencia-kritérium következtében (φ_n) pontonként Cauchy-féle $\mathcal{A}$-n, így (vö. 5.1.8/2. feladat)

$$(\varphi_n|_{\overline{\mathcal{A}}})$$

pontonként Cauchy-féle, ezért az $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ tér teljessége következtében

$$(\varphi_n|_{\overline{\mathcal{A}}})$$

pontonként konvergens. ■

5.1.16. feladat. Igazoljuk, hogy adott

$$A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \qquad A = [\alpha_{mn}]_{m,n \in \mathbb{N}}$$

ún. végtelen mátrix esetén egyenértékűek az alábbi állítások (**Toeplitz-tétel**)!

(1) Bármely $m \in \mathbb{N}$ és $x = (x_n) \in \mathfrak{c}$ esetén a

$$\sum_{n=1} (\alpha_{mn} x_n)$$

sor konvergens, és ha

$$A_m x := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n \qquad (m \in \mathbb{N}, \; x = (x_n) \in \mathfrak{c}),$$

akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{c}$ esetén

$$\lim(A_m x) = \lim(x_n).$$

(2) Teljesül a következő három összefüggés:

(a) $\lim\limits_{m\to\infty} (\alpha_{mn}) = 0 \; (n \in \mathbb{N})$;

(b) $\sup \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \in \mathbb{R} : \; m \in \mathbb{N} \right\} < +\infty$;

(c) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \right) = 1.$

Útm. Az **(1)** állítás az 5.1.10. feladat alapján azt jelenti, hogy bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| < +\infty,$$

és ekkor az

$$A_m : \mathfrak{c} \to \mathbb{K}, \qquad A_m(x_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n$$

operátor-sorozat minden egyes tagja korlátos és lineáris funcionál $\mathfrak{c}$-n az

$$\|A_m\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$$

normával, továbbá bármely $x \in \mathfrak{c}$ esetén, ha

$$\sigma(x) := \lim(x_n),$$

úgy

$$\lim(A_m x) = \sigma(x) \qquad (x \in \mathfrak{c}),$$

azaz az (A_m) sorozat pontonként konvergál σ-hoz. A Banach-Steinhaus-tétel alapján ez pontosan akkor teljesül, ha van olyan $K > 0$, hogy bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén $\|A_m\| \leq K$, és valamely $S \subset \mathfrak{c}$, $\overline{\text{span}\,(S)} = \mathfrak{c}$ halmazzal

$$\lim(A_m x) = \sigma(x) \qquad (x \in S),$$

azaz **(2)**/**(b)** teljesül. Ha

$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad e_0 := (1,1,\ldots) \qquad \text{és} \qquad S := \left\{ e_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{e_0\},$$

akkor S Schauder-bázis $\mathfrak{c}$-ben, sőt $\overline{\text{span}\,(S)} = \mathfrak{c}$ (vö. 1.3.138. példa). Így

$$\lim_{m \to \infty} (A_m e_0) = \sigma(e_0) = 1$$

a **(2)**/**(c)** feltételt, a

$$\lim_{m \to \infty} (A_m e_n) = \sigma(e_n) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pedig a **(2)**/**(a)** feltételt adja. ■

5.1.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $x = (x_m) \in \mathfrak{c}$, akkor fennáll a

$$\lim \left(\frac{\binom{m}{0} x_0 + \ldots + \binom{m}{m} x_m}{2^m} \right) = \lim(x)$$

határérték-reláció!

Útm. Az

$$\alpha_{mn} := \begin{cases} \dfrac{1}{2^m} \cdot \dbinom{m}{n} & (0 \leq n \leq m), \\ 0 & (n > m) \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra teljesülnek a Toeplitz-tétel feltételei: $0 \leq n \leq m$ esetén

$$0 \leq \alpha_{mn} = \frac{1}{2^m \cdot n!} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} \leq \frac{1}{2^m \cdot n!} \cdot m^n = \frac{1}{n!} \cdot m^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty),$$

ill.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^m} \binom{m}{n} = \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = \frac{1}{2^m} \cdot 2^m = 1 \quad (m \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

5.1.18. feladat. Igazoljuk, hogy ha $x = (x_m) \in \mathfrak{c}$, akkor

$$\lim \left(\frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \right) = \lim(x),$$

azaz az x sorozat számtani-közép-sorozata is konvergens!

Útm. Az

$$\alpha_{mn} := \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (1 \leq n \leq m), \\ \\ 0 & (n > m) \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

sorozatra teljesülnek a Toeplitz-tétel feltételei: $1 \leq n \leq m$ esetén

$$0 \leq \alpha_{mn} = \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty),$$

ill.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m}{m} = 1 \qquad (m \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

5.1.2. definíció. Adott $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $f \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ folytonos függvény és

$$a \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leq b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alappontok, valamint

$$A_k^{(n)} \in \mathbb{R} \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, n\})$$

együtthatók esetén a

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat tagjait **kvadratúra-formulának**, magát a sorozatot **kvadratúra-eljárás**nak, az

$$R_n := \int_a^b f - Q_n(f) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat n-edik tagját pedig a Q_n-hez tartozó **hibatag**nak nevezzük.

Ha

$$\lim(Q_n(f)) = I(f) := \int_a^b f, \quad \text{azaz} \quad \lim(R_n) = 0 \qquad (f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})),$$

akkor a

$$Q_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

kvadratúra-eljárás konvergenciájáról beszélünk.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n\})$$

(ekvidisztáns felosztás), akkor az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett integráljának közelítése az

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = h \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)$$

szám, ahol

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k \in \{0,1,\ldots,n\}) \qquad \text{és} \qquad h := \frac{b-a}{n},$$

ezért

$$h \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \longrightarrow I(f) \qquad (n \to \infty).$$

Az alappontoknak az

$$y_k := x_k + \frac{h}{2} = a + kh + \frac{h}{2} \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n-1\})$$

módon történő megválasztásával az ún. **középpontszabály**t kapjuk, amelyet geometriai tartalma miatt szokás **érintőformulának** is nevezni:

$$\int_a^b f = h \sum_{k=0}^{n} f\left(a + kh + \frac{h}{2}\right) + R_n(f).$$

5.1.19. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a kvadratúra-eljásás konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az alábbi két feltétel teljesüljön (**Pólya-Szegő-tétel**)!

(1) A

$$K := \sup\{\|Q_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

számra $K < +\infty$.

(2) Ha

$$\Pi := \left\{f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ \text{alkalmas } p \text{ polinomra } f = p|_{[a,b]}\right\},$$

akkor bármely $p \in \Pi$ esetén

$$I(p) = \lim(Q_n(p)), \qquad \text{azaz} \qquad \lim(R_n(p)) = 0.$$

Útm. A 4.2.22. feladatban megmutattuk, hogy a $(\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén Q_n korlátos, és normájára

$$\|Q_n\| = \sum_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. A Banach-Steinhaus-tétel szerint

$$\lim(Q_n(f)) = I(f) \qquad (f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}))$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\sup\{\|Q_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} < +\infty,$$

és valamely $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$-ben S zárt rendszer minden f elemére

$$\lim(Q_n(f)) = I(f).$$

Mivel a Weierstraß-féle I. approximációs tétel szerint a polinomok halmaza lineáris burkának lezártja $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, ezért a fenti ekvivalencia nyilvánvaló. ■

5.1.2. példa. Az

$$x_k^{(n)} := a + \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{b-a}{n+1} \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n\})$$

alappontok és az

$$A_k^{(n)} := \frac{b-a}{n+1} \qquad (k \in \{0,1,\ldots,n\})$$

együtthatók esetén a

$$Q_n(f) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

kvadratúra-eljárás nem más, mint a középpontszabály, sőt

$$\sum_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right| = b-a,$$

azaz a Pólya-Szegő-tételben lévő **(1)** feltétel teljesül. A polinomok folytonossága (így $[a,b]$-beli Riemann-integrálhatósága), ill. a középpontszabály levezetése alapján a **(2)** feltétel is teljesül.

5.1.20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a Pólya-Szegő-tételben a (Q_n) kvadratúra-eljárás együtthatóira

$$A_k^{(n)} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,1,\ldots,n\}),$$

úgy bármely $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén $(Q_n(f))$ pontosan akkor konvergens, ha minden $p \in \Pi$ esetén $(Q_n(p))$ konvergens (**Sztyeklov-tétel**)!

Útm. A Pólya-Szegő-tételben **(1)** teljesül, hiszen a konvergencia a

$$p(x) := 1 \qquad (x \in [a,b])$$

polinomra azt jelenti, hogy

$$b-a=I(p)=\lim(Q_n(p))=\lim\left(\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}\right)=\lim\left(\sum_{k=0}^{n}\left|A_k^{(n)}\right|\right),$$

így a

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|A_k^{(n)}\right|\right)$$

sorozat egyenletesen korlátos. ■

5.1.21. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén L_n a 4.2.23. feladatban definiált operátor, továbbá $x\in[a,b]$, akkor bármely $f\in\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén igaz a

$$\lim(L_n f(x))=f(x)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|l_k(x)|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}<+\infty$$

ekvivalencia (**Hahn-tétel**)!

Útm. A 4.2.23. feladatban megmutattuk, hogy a $(\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén L_n korlátos, és normájára

$$\|L_n\|=\left\|\sum_{k=0}^{n}|l_k|\right\|_\infty\qquad(n\in\mathbb{N})$$

teljesül. A Banach-Steinhaus-tétel szerint bármely $f\in\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén

$$\lim(L_n f)=f$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\sup\{\|L_n\|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\}<+\infty,$$

és valamely $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$-ben S zárt rendszer minden f elemére

$$\lim(L_n(f))=f.$$

Mivel a Weierstraß-féle I. approximációs tétel szerint a polinomok halmaza lineáris burkának lezártja $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ és bármely p polinomra

$$\lim(L_n p)=p,$$

ezért a fenti ekvivalencia nyilvánvaló. ■

5.1.22. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $\emptyset \neq \mathcal{O} \subset$ $\subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, továbbá

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha $\mathcal{O}$ nem egyenletesen korlátos, azaz

$$\sup\{\|A\| \in \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{O}\} = +\infty,$$

   akkor $\mathcal{O}$ nem pontonként korlátos, azaz alkalmas $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{O}\} = +\infty,$$

   továbbá az

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{X} : \ \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{O}\} = +\infty\}$$

   halmaz sűrű $\mathcal{X}$-ben.
2. Ha (A_n) nem egyenletesen korlátos, azaz

$$\sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = +\infty,$$

   akkor (A_n) nem pontonként Cauchy-féle (így nem pontonként konvergens), azaz alkalmas $u \in \mathcal{X}$ esetén $(A_n u)$ nem Cauchy-sorozat $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban, továbbá a

$$\mathcal{B} := \{x \in \mathcal{X} : \ (A_n x) \text{ nem Cauchy-sorozat } (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})\text{-ban}\}$$

   halmaz sűrű $\mathcal{X}$-ben.

Útm.

1. Ha $\mathcal{O}$ nem egyenletesen korlátos, akkor az egyenletes korlátosság tétele (vö. 5.1.4. feladat) következtében $\mathcal{O}$ nem pontonként korlátos. Ha

$$\overline{\mathcal{A}} \neq \mathcal{X},$$

   akkor alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén van a-nak olyan $U \subset \mathcal{X}$ környezete, amelyre

$$U \cap \mathcal{A} = \emptyset, \qquad \text{azaz} \qquad \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ A \in \mathcal{O}\} < +\infty \quad (u \in U)$$

   teljesül. Ez azt jelenti (vö. 5.1.1/1. feladat), hogy $\mathcal{O}$ pontonként korlátos, ami nem lehetséges.
2. Ha (A_n) nem egyenletesen korlátos, akkor (vö. 5.1.8/3. feladat) (A_n) nem pontonként Cauchy-féle. Az, hogy

$$\overline{\mathcal{B}} = X$$

   teljesül az 5.1.2. feladat felhasználásával a fentiekhez hasonlóan látható be. ■

5.1.23. feladat. Lássuk be, hogy van olyan $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvény, hogy az $(S_n f)$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens, sőt

$$\sup\{\|S_n f\|_\infty \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} = +\infty,$$

ahol S_n az n-edik trigonometrikus Fourier-részletösszeg-operátor, azaz

$$S_n : (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \qquad S_n u := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(y) D_n(\cdot - y)\,\mathrm{d}y$$

(vö. 4.2.8. példa)!

Útm. Mivel $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér (vö. 1.3.128. feladat), ezért ebben a térben a konvergencia a függvénysorozatok egyenletes konvergenciáját jelenti (vö. 1.2.28. feladat), továbbá

$$S_n \in L(\mathfrak{C}_{2\pi}), \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ill.

$$\|S_n\| = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + \mathcal{O}(1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 4.2.8., ill. 4.2.12. feladat). Ez azt jelenti, hogy

$$\sup\{\|S_n\| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} = +\infty,$$

azaz az

$$S_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

oprátor-sorozat nem pontonként konvergens. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $f \in \mathfrak{C}_{2\pi}$ függvényre

$$S_n f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

nem konvergens, és így nem pontonként korlátos (vö. 5.1.22. feladat). ■

Az 5.1.22. feladatból az is látható, hogy az 5.1.23. feladatbeli tulajdonságú f függvények halmaza mindenütt sűrű a $(\mathfrak{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben.

5.2. Az inverz operátor

5.2.1. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, akkor az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Az A injektív és A^{-1} korlátos.

(2) Van olyan $k > 0$ szám, amelyre

$$k\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|Au\|_{\mathcal{Y}} \qquad (u \in \mathcal{D}(A))$$

teljesül (A **alulról korlátos**).

(3) Fennáll az

$$\inf\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ u \in \mathcal{D}(A), \ \|u\|_{\mathcal{X}} = 1\} > 0$$

egyenlőtlenség.

Útm.

1. lépés /(2) ⇒ (1)/. Ha alkalmas $k > 0$ esetén

$$k\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|Au\|_{\mathcal{Y}} \qquad (u \in \mathcal{D}(A)),$$

akkor

$$Au = 0 \in \mathcal{Y} \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0 \in \mathcal{X},$$

így

$$\mathcal{N}(A) = \{0\},$$

azaz A linearitása miatt A injektív. Továbbá tetszőleges

$$v \in \mathcal{R}(A)$$

esetén, ha

$$u := A^{-1}v,$$

akkor

$$\|A^{-1}v\|_{\mathcal{X}} = \|u\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{k}\|Au\|_{\mathcal{Y}} = \frac{1}{k}\|v\|_{\mathcal{Y}}.$$

2. lépés /(1) ⇒ (2)/. Ha A injektív, és alkalmas $K > 0$ esetén

$$\|A^{-1}v\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|v\|_{\mathcal{Y}} \qquad (v \in \mathcal{R}(A)),$$

akkor minden $u \in \mathcal{D}(A)$ vektorra

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \|A^{-1}Au\|_{\mathcal{X}} \leq K\|Au\|_{\mathcal{Y}},$$

azaz

$$\|Au\|_{\mathcal{Y}} \geq \frac{1}{K}\|u\|_{\mathcal{X}}.$$

3. lépés /(2) $\Rightarrow$ (3)/. Triviális, ui. bármely $u \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \right\|_{\mathcal{X}} = 1,$$

így

$$\underbrace{\exists k > 0 : \; k\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|Au\|_{\mathcal{Y}} \;\; (u \in \mathcal{D}(A))}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\exists k > 0 : \; k \leq \|Au\|_{\mathcal{Y}} \;\; (u \in \mathcal{D}(A) : \; \|u\|_{\mathcal{X}} = 1).} \quad \blacksquare$$

Világos, hogy

1. ha A injektív és A^{-1} korlátos, akkor

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &= \sup\left\{ \frac{\|A^{-1}v\|_{\mathcal{X}}}{\|v\|_{\mathcal{Y}}} \in \mathbb{R} : \; v \in \mathcal{R}(A), \; 0 \neq v \in \mathcal{Y} \right\} = \\ &= \sup\left\{ \frac{\|u\|_{\mathcal{X}}}{\|Au\|_{\mathcal{Y}}} \in \mathbb{R} : \; u \in \mathcal{D}(A), \; 0 \neq u \in \mathcal{X} \right\} = \\ &= \frac{1}{\inf\left\{ \dfrac{\|Au\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \in \mathbb{R} : \; u \in \mathcal{D}(A), \; 0 \neq u \in \mathcal{X} \right\}} = \\ &= \frac{1}{\inf\left\{ \left\| A\dfrac{u}{\|u\|_{\mathcal{X}}} \right\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; u \in \mathcal{D}(A), \; 0 \neq u \in \mathcal{X} \right\}} = \\ &= \frac{1}{\inf\left\{ \|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; u \in \mathcal{D}(A), \; \|u\|_{\mathcal{X}} = 1 \right\}}. \end{aligned}$$

2. Az A-nak pontosan akkor nincsen korlátos inverze, ha

$$\inf\left\{ \|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \; u \in \mathcal{D}(A), \; \|u\|_{\mathcal{X}} = 1 \right\} = 0,$$

azaz alkalmas

$$u_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$\|u_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim (Au_n) = 0 \in \mathcal{Y}$$

teljesül.

5.2.1. példa. Korábbról tudjuk (vö. 4.2.20. feladat), hogy az

$$A, B : L^2[0,1] \to L^2[0,1], \qquad (Au)(x) := xu(x), \quad (Bu)(x) := (1+x)u(x)$$

lineáris operátorok korlátosak, valamint

$$\|A\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \|B\| = 2.$$

Továbbá, ha

$$u_n := \sqrt{n} \cdot \chi_{[0,\frac{1}{n}]} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \int |u_n|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_0^{1/n} n \,\mathrm{d}x = 1 < +\infty, \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$u_n \in L^2[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sőt, mivel

$$\|Au_n\|_{L^2}^2 = \int |Au_n|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_0^{1/n} x^2 n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3n^2}, \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\lim\,(Au_n) = \widehat{0},$$

azaz A-nak nincs korlátos inverze. B-nek viszont van korlátos inverze, ui.

$$\begin{aligned}\|Bu\|_{L^2}^2 &= \int |Bu|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_0^1 (1+x)^2 |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq \int |u|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 = \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \qquad \left(u \in L^2\right).\end{aligned}$$

Világos, hogy a

$$C : L^2[0,1] \to L^2[0,1], \qquad (Cu)(x) := \frac{1}{1+x} \cdot u(x)$$

lineáris operátor korlátos ($\|C\| = 1$), és minden $u \in L^2[0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}((BC)u)(x) &= (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot u(x) = u(x) = \\ &= \frac{1}{1+x} \cdot (1+x) \cdot u(x) = \\ &= ((CB)u)(x) \quad (x \in [0,1]).\end{aligned}$$

5.2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $u \in l_\infty$, ill.

$$A_u : l_2 \to l_2, \qquad A_u x := (u_n x_n),$$

továbbá

1. ha
$$\inf \{|u_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} > 0 \qquad \text{és} \qquad v_n := \frac{1}{u_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor $v \in l_\infty$ és A_u-nak van korlátos inverze;
2. ha
$$\lambda \notin \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : n \in \mathbb{N}\}},$$
akkor $(\lambda I - A_u)$-nak van korlátos inverze!

Útm.

1. Ha
$$\alpha := \inf \{|u_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\},$$
akkor $\alpha > 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|u_n| \geq \alpha$, így
$$v_n = \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
azaz $v \in l_\infty$. Továbbá
$$(A_u A_v)x = A_u(v_n x_n) = (u_n v_n x_n) = (x_n) \qquad (x \in l_2),$$
ill.
$$(A_v A_u)x = A_v(u_n x_n) = (v_n u_n x_n) = (x_n) \qquad (x \in l_2).$$
2. Ha
$$\lambda \notin \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : n \in \mathbb{N}\}},$$
akkor
$$\inf \{|\lambda - u_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} > 0,$$
így a
$$v_n := \lambda - u_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatra $v \in l_\infty$, és mivel
$$\inf \{|v_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} > 0,$$
ezért az előbbiek alapján A_v-nek van korlátos inverze. Mivel
$$A_v x = ((\lambda - u_n)x_n) = (\lambda x_n) - (u_n x_n) = (\lambda I - A_u)x,$$
ezért
$$A_v = \lambda I - A_u,$$
így $\lambda I - A_u$-nak van korlátos inverze. ■

5.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, valamint tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$Bx := \sum_{n=0}^{\infty} A^n x \in \mathcal{X} \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor $(I - A)$ injektív és fennáll a

$$B = (I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X})$$

egyenlőség!

Útm. Ha

$$S_n x := \sum_{k=0}^{n} A^k x \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathcal{X}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$S_n \in L(\mathcal{X})$$

és (vö. 5.1.9. feladat)

$$Bx = \lim(S_n x) \quad (x \in \mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad B \in L(\mathcal{X}).$$

Ezért a tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén fennálló

$$S_m x = \sum_{n=0}^{m} A^n x$$

egyenlőségből

$$AS_m x = \sum_{n=0}^{m} A^{n+1} x = \sum_{n=0}^{m+1} A^n x - x = S_{m+1} x - x = \ldots = S_m A x \qquad (m \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathcal{X})$$

következik. Így, mivel

$$\lim_{m\to\infty} (S_m x) = Bx, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{m\to\infty} (S_m(Ax)) = B(Ax) \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ezért $A \in L(\mathcal{X})$ miatt

$$ASx = \lim_{m\to\infty} (AS_m x) = \lim_{m\to\infty} (S_{m+1} x - x) = Bx - x$$

és

$$BAx = \lim_{m\to\infty} (S_m A x) = \lim_{m\to\infty} (S_{m+1} x - x) = Bx - x.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$ABx = BAx = Bx - x, \qquad \text{azaz} \qquad AB = BA = B - I,$$

így

$$B(I - A) = I = (I - A)B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I - A)^{-1} = B. \quad \blacksquare$$

5.2.2. példa. Az $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ normált tér, ill. az

$$A : l_\infty \to l_\infty, \qquad A(x_n) := (x_{n+1})$$

operátor esetén könnyen belátható, hogy $A \in L(\mathcal{X})$ (vö. 4.2.9. gyakorló feladat), viszont $I - A$ nem injektív, hiszen

$$\mathcal{N}(I-A) = \left\{(c, c, c, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ c \in \mathbb{K}\right\} \neq \{0\},$$

így van olyan $x \in l_\infty$, amelyre a $\sum_{n=0}(A^n x)$ sor nem konvergens. Ilyen vektor pl. az $u := (1,1,1,\ldots) \in l_\infty$:

$$\sum_{n=0}(A^n u) = (1,1,1,\ldots) + (1,1,1,\ldots) + (1,1,1,\ldots) + \ldots$$

5.2.4. feladat. Lássuk be, hogy valamely $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, ill. $A \in L(\mathcal{X})$ bijektív operátor esetén A-nak pontosan akkor van korlátos inverze, ha alkalmas $B \in L(\mathcal{X})$ operátorral

$$AB = I = BA$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha A-nak van korlátos inverze, akkor a $B := A^{-1}$ operátor megfelelő.

2. lépés. Ha a $B \in L(\mathcal{X})$ operátorra

$$AB = I = BA,$$

akkor

- A injektív, hiszen (vö. 4.1.1/2. feladat) bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$Ax = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = B(Ax) = x \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

  (Sőt az is belátható, hogy A szürjektív, hiszen ha valamely $y \in \mathcal{X}$ esetén

$$x := By,$$

  akkor

$$Ax = y, \qquad \text{ui.} \qquad y = Iy = A(By) = Ax.)$$

- ha valamely $C \in L(\mathcal{X})$ operátorra

$$CA = I = AC,$$

  úgy

$$(BA - CA) = O \quad \Longrightarrow \quad (B-C)A = O \quad \Longrightarrow \quad B - C = O \quad \Longrightarrow \quad B = C$$

($A \neq O$, hiszen A injektív). Így az inverz egyértelműségéből

$$A^{-1} = B$$

következik, így $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$. ■

5.2.5. feladat. Mutassuk meg, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$ operátor esetén igazak az alábbi állítások!

1. $\limsup \left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ \left\|A^N\right\| < 1.$
2. $\limsup \left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) < 1 \quad \Longrightarrow \quad I - A$ injektív és
$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \in L(\mathcal{X}).$$

Útm.

1. Az egyik irány triviális. Ha valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén
$$q := \left\|A^N\right\| < 1 \qquad \text{és} \qquad M := \max\left\{1, \|A\|, \|A^2\|, \ldots, \left\|A^{N-1}\right\|\right\},$$
akkor – mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\exists|\ (k, m) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, N-1\} : \ \ n = kN + m \qquad \text{(maradékos osztás)} \text{ –},$$
ezért
$$\sqrt[n]{\|A^n\|} = \sqrt[n]{\left\|\left(A^N\right)^k A^m\right\|} \leq \sqrt[n]{q^k M} = q^{k/n}\sqrt[n]{M} = q^{1/N} q^{-m/(Nn)}\sqrt[n]{M}.$$
Így, mivel
$$\sqrt[n]{M} \longrightarrow 1, \quad \frac{m}{Nn} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$
ezért
$$\limsup \left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) \leq q^{1/N} < 1.$$
2. A gyökkritérium alapján a
$$\sum_{n=0} (\|A^n\|)$$
(szám)sor konvergens ($\Rightarrow \lim(\|A^n\|) = 0$), ezért a Cauchy-kritérium miatt
$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\left\|A^k\right\|\right) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$
Ha
$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az (S_n) operátor-sorozat Cauchy-féle, ui.

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left\| A^k \right\| \qquad (m, n \in \mathbb{N}:\ m > n).$$

Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége következtében $(L(\mathcal{X}), \|\cdot\|)$ is teljes (vö. 4.3.8/2. feladat), így van olyan $S \in L(\mathcal{X})$, hogy

$$\lim(S_n) = S \left(= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right).$$

Továbbá

$$\left.\begin{array}{l}(I - A)S_n \\ S_n(I - A)\end{array}\right\} = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1},$$

ezért a

$$\lim\left(\|A^n\|\right) = 0$$

egyenlőség következtében

$$(I - A)S = I = S(I - A), \qquad \text{azaz} \qquad S = (I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

Világos, hogy ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \geq 1$, akkor nem igaz, hogy

$$\limsup \left(\sqrt[n]{\|A^n\|} \right) < 1,$$

sőt az (S_n) operátor-sorozat sem konvergens, ui. nem Cauchy-féle:

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \left\| A^{n+1} \right\| \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Figyeljük meg az (S_n) operátor-sorozatnak (**Neumann-sor**) a mértani sorral való kapcsolatát: $|q| < 1$ esetén

$$(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Míg a mértani sor csak $|q| < 1$ esetén konvergens, addig a Neumann-sor konvergenciája akkor is fennállhat, ha $\|A\| \geq 1$ (elegendő ui. egyetlen olyan $n \in \mathbb{N}$ létezése, amelyre $\|A^n\| < 1$). Ennek az az oka, hogy míg $q \in \mathbb{R}$ esetén $|q^n| = |q|^n$, addig az $A \in L(\mathcal{X})$ operátorra csak

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 4.3.10. feladat utáni megjegyzés) teljesül.

Az 5.2.5. feladatbeli állítások következményeként megfogalmazható tehát az

5.2.1. tétel.

1. Ha $\|A\| < 1$, akkor
$$(I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X})$$
és
$$\|(I-A)^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$
2. Ha pedig $\|I - A\| < 1$, akkor
$$I - (I - A) = A$$
injektív, $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$, továbbá
$$A^{-1} = (I - (I - A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n.$$

5.2.3. példa. A 4.2.19. feladatbeli A_φ lineáris operátor esetében $\|A_\varphi\| < 1$ azt jelenti, hogy
$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| < 1 \qquad (x \in [0,1]).$$
Ez utóbbi feltétel teljesülése esetén
$$(I - A_\varphi)^{-1} v(x) = \frac{v(x)}{1 - \varphi(x)} \qquad (x \in [0,1])$$
korlátos operátor, és normájára
$$\|(I - A_\varphi)^{-1}\| = \max\left\{\frac{1}{|1 - \varphi(x)|} \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\right\} = \frac{1}{\min\{|1 - \varphi(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [0,1]\}}$$
teljesül.

5.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan $f \in L^2(\mathbb{R})$ függvény van, amelyre
$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}} \cos(\sqrt{1 + y^2})\, dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$
teljesül!

Útm. Ha
$$g(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor a feladatbeli egyenlőség az
$$(I - A)f = g$$

alakba írható, ahol

$$(Af)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cos(\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y \qquad (f\in L^2(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}).$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\|Af\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cos(\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x \le \\
&\le \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt{(1+x^2)})^2}\,\mathrm{d}x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot 1\,\mathrm{d}y\right)^2 \le \\
&\le \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2\|f\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{4}\|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

ezért

$$\|A\| \le \frac{1}{2} < 1,$$

így

$$(I-A)^{-1}\in L(L^2(\mathbb{R}))$$

teljesül. ■

5.2.7. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\kappa\in\mathbb{R}$: $|\kappa|<1$, akkor bármely $g\in\mathfrak{C}[0,1]$ függvényhez pontosan egy olyan $f\in\mathfrak{C}[0,1]$ függvény van, amelyre

$$f(x) = g(x) + \int_a^b f(y)\kappa\sin(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in[0,1])$$

teljesül!

Útm. A $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér és az

$$A:\mathfrak{C}[0,1]\to\mathfrak{C}[0,1], \qquad Af(x) := \int_0^1 f(y)\kappa\sin(x-y)\,\mathrm{d}y \quad (x\in[0,1])$$

operátor esetén (vö. 4.2.11. feladat)

$$\|A\| = \sup\left\{\int_0^1 |\kappa\sin(x-y)|\,\mathrm{d}y\in\mathbb{R}:\ x\in[0,1]\right\} \le |\kappa|.$$

Mivel a feladatbeli egyenlőség az

$$(I-A)f = g$$

alakba írható, ezért $|\kappa|<1$ esetén

$$(I-A)^{-1}\in L(\mathfrak{C}[0,1])$$

teljesül. ■

5.2.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{R}$: $d\pi > 2$, akkor pontosan egy olyan $u \in \mathfrak{C}[-1,1]$ függvény van, amelyre

$$u(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2+(x-y)^2} u(y)\,\mathrm{d}y = 1 \qquad (x \in [-1,1])$$

teljesül (**Love-féle integrálegyenlet**)!

Útm. A $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér és az

$$A : \mathfrak{C}[-1,1] \to \mathfrak{C}[-1,1], \qquad Au(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2+(x-y)^2} u(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [-1,1])$$

operátor esetén (vö. 4.2.11. feladat)

$$\pi \cdot \|A\| = \sup\left\{\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2+(x-y)^2}\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} :\ x \in [-1,1]\right\} = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{d}\right),$$

ui. bármely $x \in [-1,1]$ esetén

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2+(x-y)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{d}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{d}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{d}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{d}\right) =: \phi(x),$$

$$\phi(-1) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{d}\right) = \phi(1),$$

és

$$\phi'(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \phi(0) = 2\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{d}\right),$$

továbbá könnyen belátható, hogy

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{d}\right) < 2\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{d}\right) \qquad (d > 0).$$

Így, ha $d \in \mathbb{R}$: $d\pi > 2$, akkor

$$\|A\| = \frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{d}\right) < 1,$$

ahonnan

$$(I - A)^{-1} \in L(\mathfrak{C}[-1,1])$$

következik. Ha

$$g(x) := 1 \qquad (x \in [-1,1]),$$

akkor a Love-féle integrálegyenlet

$$(I - A)u = g$$

alakba írható. ■

Ha az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér nem teljes, akkor nem igaz az 5.2.5. feladatban megfogalmazott állítás, ui. ha

$$\mathcal{X} := \{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} :\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq k \in \mathbb{N} :\ x_k = 0\} \subset l_2$$

és $\varepsilon \in (0, +\infty)$, akkor az

$$(Ax)_n := \begin{cases} 0 & (n = 1), \\ \\ \varepsilon x_{n-1} & (n > 1) \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{X},\, n \in \mathbb{N})$$

operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| = 1.$$

Így $\varepsilon < 1$ és

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

esetén

$$(I - A)^{-1}e_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n e_1 = (\varepsilon^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathcal{X}.$$

Világos, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, továbbá

$$\rho(A) := \limsup \left(\sqrt[n]{\|A^n\|} \right), \tag{5.2.1}$$

akkor

$$0 \leq \rho(A) \leq \|A\|,$$

hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n$$

(vö. 4.3.10. feladat utáni megjegyzés).

5.2.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér esetén az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor **spektrálsugarának** nevezzük az (5.2.1)-beli $\rho(A)$ számot.

5.2.4. példa. Az 5.2.2. példabeli operátor esetében

$$\|A^n\| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(vö. 4.2.9. gyakorló feladat). Innen pedig

$$\rho(A) = 1$$

következik.

5.2.5. példa. A 4.2.19. példabeli A_φ operátor esetében

$$\rho(A_\varphi) = \|A_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty,$$

hiszen bármely $\varphi \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre

$$\|\varphi^n\|_\infty = \|\varphi\|_\infty^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül.

5.2.9. feladat. Számítsuk ki a 4.1.5. feladatbeli A (integrál)operátor spektrálsugarát, ha $\mathfrak{C}[0,1]$-t, ill. $\mathfrak{C}^1[0,1]$-t a $\|\cdot\|_\infty$-val látjuk el!

Útm. Mivel bármely $u \in \mathfrak{C}[0,1]$, ill. $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} A^2u(x) &= \int_0^x \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^x \int_0^x \chi_{[0,t]}(s)u(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^x \int_0^x \chi_{[0,t]}(s)u(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^x (x-s)u(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} \|A^2u\|_\infty &\leq \|u\|_\infty \cdot \max\left\{\int_0^x (x-s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}: \ x \in [0,1]\right\} = \\ &= \|u\|_\infty \cdot \max\left\{\frac{x^2}{2} \in \mathbb{R}: \ x \in [0,1]\right\} = \frac{1}{2}\|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Indukcióval könnyen belátható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $u \in \mathfrak{C}[0,1]$, ill. $x \in [0,1]$, úgy

$$A^n u(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,\mathrm{d}s,$$

ezért

$$\|A^n u\|_\infty \leq \frac{\|u\|_\infty}{(n-1)!} \cdot \max\left\{\int_0^x (x-s)^{n-1}\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}: \ x \in [0,1]\right\} = \frac{1}{n!}\|u\|_\infty.$$

Mivel

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right) = 0,$$

ezért $\rho(A) = 0$. ■

5.2.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $A \in L(\mathcal{X})$, akkor A spektrálsugarára

$$\rho(A) = \lim\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) = \inf\left\{\sqrt[n]{\|A^n\|}: \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

teljesül!

Útm. Az infimum definíciója alapján bármely

$$\alpha > \inf\left\{\sqrt[n]{\|A^n\|}: \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

valós számhoz van $n \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\|A^n\| < \alpha^n,$$

ahonnan

$$\left\|(\alpha^{-1}A)^n\right\| < 1, \quad \text{így} \quad \alpha^{-1}\rho(A) = \rho(\alpha^{-1}A) < 1, \quad \text{azaz} \quad \rho(A) < \alpha$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\rho(A) \leq \inf\left\{\sqrt[n]{\|A^n\|}: \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Így tehát

$$\rho(A) = \limsup\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) \geq \liminf\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) \geq \inf\left\{\sqrt[n]{\|A^n\|}:\ n \in \mathbb{N}\right\} \geq \rho(A). \quad \blacksquare$$

5.2.6. példa. Ha $\mathcal{X} := l_1$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{l_1}$ esetén az

$$Ax := y \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{X}),$$

$$y := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ x_n & (n \in \mathbb{N} : \text{páros}), \\ 2x_n & (n \in \mathbb{N} : \text{páratlan}) \end{cases} \qquad (x = (x_n) \in \mathcal{X})$$

operátor nyilvánvalóan lineáris és korlátos, továbbá az is könnyen belátható, hogy $\|A\| = 2$ teljesül (vö. 4.2.4. gyakorló feladat). Így indukcióval azt kapjuk, hogy bármely $x = (x_n) \in l_1$ esetén

$$A^{2n}(x_n) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2^n \text{ darab } 0}, 2^{n-1}x_1, 2^{n-1}x_2, 2^{n-1}x_3, 2^{n-1}x_4, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill.

$$A^{2n-1}(x_n) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2^n-1 \text{ darab } 0}, 2^{n-1}x_1, 2^n x_2, 2^{n-1}x_3, 2^n x_4, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén tehát

$$\|A^{2n}\| = \|A^{2n-1}\| = 2^n,$$

ahonnan

$$\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, 2, \sqrt[5]{8}, 2, \sqrt[3]{2}, \ldots\right)$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\rho(A) = \sqrt{2}.$$

Az 5.2.10. feladatban a második állítás azt jelenti, hogy ha

$$\rho(A) < 1,$$

akkor tetszőleges $v \in \mathcal{X}$-hez pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$u - Au = v,$$

ui.

$$u := (I - A)^{-1}v = \sum_{n=0}^{\infty} A^n v$$

ilyen. Továbbá az

$$u_0 := v, \quad u_{n+1} := Au_n + v \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{5.2.2}$$

rekurzív módon definiált sorozat konvergens és határértékére:

$$\lim(u_n) = u,$$

hiszen, ha

$$u_n := S_n v \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$u_0 = Iv = v$$

és

$$Au_n + v = \sum_{k=0}^{n} A^{k+1}v + v = \sum_{k=1}^{n+1} A^k v + v = \sum_{k=0}^{n+1} A^k v = u_{n+1}.$$

5.2.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$|\lambda| < \left(\sup\left\{\int_a^b |K(x, y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \; x \in [a, b]\right\}\right)^{-1}$$

teljesül, akkor tetszőleges $g \in \mathfrak{C}[a, b]$ esetén pontosan egy olyan $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ van, amelyre

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [a, b])$$

(**(másodfajú) Fredholm-féle integrálegyenlet**), majd adjunk meg olyan

$$u_n \in \mathfrak{C}[a, b] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot, amelynek határfüggvénye az f függvény!

Útm. Korábbról tudjuk, hogy $(\mathfrak{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér (vö. 1.2.54. feladat), és az

$$A : \mathfrak{C}[a, b] \to \mathfrak{C}[a, b], \qquad Au(x) := \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [a, b])$$

operátor korlátos, továbbá

$$\|A\| = |\lambda| \cdot \sup\left\{\int_a^b |K(x, y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \; x \in [a, b]\right\}$$

(vö. 4.2.11. feladat), így a fenti λ-ra

$$\|A\| < 1,$$

ezért tetszőleges $g \in \mathfrak{C}[a, b]$ esetén pontosan egy olyan $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ van, amelyre

$$f - Af = g, \quad \text{azaz} \quad f = g + Af = g + \lambda \int_a^b K(\cdot, y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ez a megoldás az

$$u_0 := g, \quad u_{n+1} := g + Au_n = g + \lambda \int_a^b K(\cdot, y) u_n(y)\,\mathrm{d}y \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat határfüggvénye (vö. (5.2.2)). ■

Világos, hogy az 5.2.11. feladatbeli A operátor esetében

$$\rho(A) < |\lambda|(b-a) \sup\{|K(x,y)| \in \mathbb{R} : \; x, y \in [a,b]\} =: |\lambda|(b-a) \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|,$$

hiszen

$$\int_a^b |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \leq \int_a^b \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = (b-a) \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|,$$

és így

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq |\lambda|(b-a) \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|.$$

Tehát, ha

$$|\lambda| < (b-a) \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|,$$

akkor

$$\|A\| < 1$$

biztosan teljesül.

5.2.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha az 5.2.11. feladatban speciálisan

$$K(x,y) = 0 \qquad (x, y \in [a,b] : \; x \leq y)$$

teljesül, akkor az

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [a,b])$$

(másodfajú) Volterra-féle integrálegyenletnek pontosan egy megoldása van!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ha

$$\mu := \max\{|\lambda K(x,y)| \in \mathbb{R} : \; x, y \in [a,b] : \; y \leq x\},$$

akkor

$$\|A^n\| \leq \mu^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Tetszőleges $u \in \mathfrak{C}[a,b]$ és $x \in [a,b]$ esetén

$$|(A^n u)(x)| \leq \mu^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \|u\|_\infty \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen

- $n = 0$ esetén
$$|u| \leq \|u\|_\infty,$$
ill.
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén fennáll a fenti becslés, akkor
$$\begin{aligned}\left|(A^{n+1}u)(x)\right| &= \left|\int_a^x \lambda K(x,y)A^n u(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_a^x |\lambda K(x,y)|\cdot|(A^n u)(y)|\,\mathrm{d}y \leq \\ &\leq \mu^n \|u\|_\infty \int_a^x |\lambda K(x,y)| \frac{(y-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}y \leq \\ &\leq \mu^{n+1}\|u\|_\infty \int_a^x \frac{(y-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}y = \frac{\mu^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\|u\|_\infty,\end{aligned}$$
így minden $u \in \mathfrak{C}[a,b]$ függvényre
$$\|A^n u\|_\infty \leq \mu^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}\cdot\|u\|_\infty \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2. lépés. Mivel
$$\mu^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$
ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy
$$\left\|A^N\right\| < 1. \quad \blacksquare$$

5.2.13. feladat. Adjunk meg olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényt, amelyre
$$f(x) = \sin(\pi x) + \int_0^1 xyf(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$
teljesül!

Útm. A $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér és az
$$A : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad Au(x) := \int_0^1 xyu(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$
operátor esetén (vö. 4.2.11. feladat)
$$\|A\| = \max\left\{\int_0^1 |xy|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = \frac{1}{2} < 1,$$
ezért az
$$I - A$$
operátornak van az egész $\mathfrak{C}[0,1]$-en értelmezett korlátos inverze. Teszőleges $u \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre
$$\begin{aligned}(A^2u)(x) &= (A(Au))(x) = \int_0^1 xy\left(\int_0^1 y\xi u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 x\xi u(\xi)\left(\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3}\int_0^1 x\xi u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{3}(Au)(x) \quad (x \in [0,1]),\end{aligned}$$

így (teljes indukcióval) könnyen megmutatható, hogy

$$A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} A \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} A = I + \frac{3}{2}A.$$

A keresett f függvényre tehát

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) + \frac{3}{2}\int_0^1 xy\sin(\pi y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \sin(\pi x) + \frac{3}{2}x\left\{\left[-\frac{y}{\pi}\cos(\pi y)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\pi}\,\mathrm{d}y\right\} = \\ &= \sin(\pi x) + \frac{3}{2}x\left\{\frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi y)}{\pi^2}\right]_0^1\right\} = \\ &= \sin(\pi x) + \frac{3}{2\pi}x \quad (x \in [0,1]). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2.14. feladat. Adott $g \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén adjunk meg olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényt, amelyre

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 xf(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül!

Útm. A $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér és az

$$A : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad Au(x) := \int_0^1 xu(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$

operátor esetén (vö. 4.2.11. feladat)

$$\|A\| = \max\left\{\int_0^1 |x|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = 1,$$

azonban a

$$\sum_{n=0}(\|A^n\|)$$

(szám)sor konvergens, hiszen tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén

$$(Au)(x) = x\int_0^1 u(y)\,\mathrm{d}y, \qquad (A^2u)(x) = \frac{x}{2}\int_0^1 u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}(Au)(x),$$

ahonnan (teljes indukcióval)

$$A^n = \frac{1}{2^{n-1}}A \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \|A\| = 1 + 2\|A\| = 3 < +\infty$$

következik. Ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} A = I + 2A,$$

azaz az integrálegyenletnek megoldása az

$$f(x) := g(x) + 2x \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1]).$$

függvény. ■

5.2.15. feladat. Adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén adjunk meg olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényt, amelyre

$$f(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x^2 y f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül!

Útm. A $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér és az

$$A : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad Au(x) := \lambda \int_0^1 x^2 y u(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$

operátor esetén

$$\|A\| = |\lambda| \cdot \max\left\{ \int_0^1 |x^2 y|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} :\; x \in [0,1] \right\} = \frac{|\lambda|}{2},$$

így, ha

$$|\lambda| < 2,$$

akkor pontosan egy ilyen f van, amely az

$$u_0(x) := 1, \qquad u_{n+1}(x) := 1 + \int_0^1 x^2 y u_n(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$

sorozat határfüggvénye. Az (u_n) sorozat első néhány tagjának kiszámításával sejthető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u_n(x) = 1 + \frac{\lambda x^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \qquad (x \in [0,1]).$$

Valóban, $n = 1$ esetén

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \lambda \int_0^1 x^2 y u_0(y)\,\mathrm{d}y = 1 + \lambda x^2 \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = 1 + \frac{\lambda x^2}{2} = \\ &= 1 + \frac{\lambda x^2}{2} \sum_{k=0}^{1-1} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \qquad (x \in [0,1]), \end{aligned}$$

ill. ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén u_n a fenti alakú, akkor

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= 1+\lambda\int_0^1 x^2 y u_n(yx)\,\mathrm{d}y = 1+\lambda x^2\int_0^1 y\left(1+\frac{\lambda y^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\right)\mathrm{d}y = \\
&= 1+\lambda x^2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y+\lambda x^2\frac{\lambda}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}y = \\
&= 1+\lambda\frac{x^2}{2}+\lambda\frac{x^2}{2}\frac{\lambda}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k = 1+\lambda\frac{x^2}{2}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{k+1}\right) = \\
&= 1+\frac{\lambda x^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \qquad (x\in[0{,}1]).
\end{aligned}$$

Az (u_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha a

$$\sum_{n=0}\left(\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n\right)$$

sor konvergens, azaz ha $|\lambda|<4$. Ebben az esetben a határfüggvény:

$$f(x)=\lim(u_n(x))=1+\frac{\lambda x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n = 1+\frac{\lambda x^2}{2}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{4}} = 1+\frac{2\lambda x^2}{4-\lambda} \qquad (x\in[0{,}1]). \quad \blacksquare$$

Az iménti feladatban az

$$f:[0{,}1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x):=1+\frac{2\lambda x^2}{4-\lambda}$$

függvény tetszőleges $4\neq\lambda\in\mathbb{R}$ esetén megoldása az integrálegyenletnek, hiszen

$$\begin{aligned}
f(x)-\lambda\int_0^1 x^2 y f(y)\,\mathrm{d}y &= 1+\frac{2\lambda x^2}{4-\lambda}-\lambda x^2\int_0^1 y\left(1+\frac{2\lambda y^2}{4-\lambda}\right)\mathrm{d}y = \\
&= 1+\frac{2\lambda x^2}{4-\lambda}-\lambda x^2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y-\lambda x^2\frac{2\lambda}{4-\lambda}\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}y = \\
&= 1+\frac{2\lambda x^2}{4-\lambda}-\frac{\lambda x^2}{2}-\lambda x^2\frac{4\lambda}{2(4-\lambda)} = \\
&= 1+\frac{4\lambda x^2-\lambda x^2(4-\lambda)-\lambda^2 x^2}{2(4-\lambda)} = 1 \quad (x\in[0{,}1]),
\end{aligned}$$

viszont $\lambda=4$ esetén f nem megoldás, ui. ha az lenne, akkor

$$f(x)-4\int_0^1 x^2 y f(y)\,\mathrm{d}y = 1 \qquad (x\in[0{,}1])$$

teljesülne, innen pedig x-szel való szorzással, ill. mindkét oldalt integrálva

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 4x\left(\int_0^1 x^2yf(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 4x^3\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 yf(y)\,\mathrm{d}y\right) = \\ &= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 yf(y)\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

következne.

5.2.16. feladat. Tegyük fel, hogy valamely folytonos

$$K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}_0^+$$

függvényre

$$\sup\left\{\int_0^1 K(x,y)\,\mathrm{d}y\in\mathbb{R}:\ x\in[0,1]\right\}<1.$$

Igazoljuk, hogy ha $g\in\mathfrak{C}[0,1]$ és $f\in\mathfrak{C}[0,1]$ olyan függvény, amelyre

$$f(x)\leq g(x)+\int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in[0,1]),$$

akkor

$$f(x)\leq h(x) \qquad (x\in[0,1]),$$

ahol a h függvényre

$$h(x)=g(x)+\int_0^1 K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in[0,1])$$

teljesül!

Útm. Mivel az

$$A:\mathfrak{C}[0,1]\to\mathfrak{C}[0,1], \qquad Au(x):=\int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

opeátorra

$$f-Af\leq g,$$

így alkalmas $d\in\mathfrak{C}[0,1]$, $d\geq 0$ függvénnyel

$$f-Af=g-d.$$

A feltétel következtében a

$$\sum_{n=0}(A^n)$$

Neumann-sor konvergens, és

$$f=(I-A)^{-1}(g-d)=\sum_{n=0}^{\infty}A^n(g-d)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}A^ng}_{=h}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}A^nd}_{\geq 0}\leq h. \quad \blacksquare$$

5.2.17. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre

$$f(x) \le c + \int_0^x \lambda f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [0,1],\ c \in \mathbb{R},\ \lambda \ge 0),$$

akkor

$$f(x) \le c\exp(\lambda x \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül (**Grönwall-lemma**)!

Útm. Ha

$$g(x) := c, \qquad K(x,y) := \begin{cases} \lambda & (0 \le y < x), \\ \\ 0 & (y > x) \end{cases} \qquad (x, y \in [0,1]),$$

akkor (vö. 5.2.12. feladat) pontosan egy olyan $h \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvény létezik, amelyre

$$h(x) = g(x) + \int_0^x K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy

$$h(x) = c + \lambda \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [0,1]),$$

azaz

$$h'(x) = \lambda h(x) \quad (x \in [0,1]), \qquad h(0) = c.$$

Így

$$h(x) = c\exp(\lambda x) \qquad (x \in [0,1]),$$

ahonnan (vö. 5.2.16. feladat

$$f(x) \le h(x) = c\exp(\lambda x) \qquad (x \in [0,1])$$

következik. ■

5.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér esetén $L_0(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, ill. $GL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ jelöli a bijektív, folytonos inverzű, lineáris operátorok halmazát, azaz

$$L_0(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := GL(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \left\{A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y}) : \ A^{-1} \in L(\mathcal{Y},\mathcal{X})\right\}.$$

5.2.18. feladat. Mutassuk meg, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér és az

$$A_n \in L_0(\mathcal{X}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátor-sorozat esetén igaz a

$$\left(\|A_n^{-1}\| < 1 \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim(A_n) =: A \in L(\mathcal{X})\right) \qquad \Longrightarrow \qquad A \in L_0(\mathcal{X}) := L_0(\mathcal{X},\mathcal{X})$$

implikáció!

Útm. Mivel

$$\lim(A_n) = A,$$

ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\|A_n - A\| < 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Az ilyen n-ekre

$$\left\|I - A_n^{-1}A\right\| = \left\|A_n^{-1}(A_n - A)\right\| \leq \left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \|A_n - A\| < 1,$$

így $A_N^{-1}A$ injektív és korlátos, ahonnan

$$A = A_N A_N^{-1} A$$

injektivitása és

$$A^{-1} \in L(\mathcal{X})$$

már következik. ■

5.2.19. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, akkor $L_0(\mathcal{X})$ nyílt halmaz $L(\mathcal{X})$-ben, továbbá a

$$\varphi : L_0(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{X}), \qquad \varphi(A) := A^{-1}$$

leképezés folytonos!

Útm.

1. lépés ($L_0(\mathcal{X})$ nyíltsága). Elegendő megmutatni, hogy ha

$$A \in L_0(\mathcal{X}), \qquad B \in L(\mathcal{X}), \qquad a := 1/2\left\|A^{-1}\right\| \qquad \text{és} \qquad \|A - B\| < a,$$

akkor $B \in L_0(\mathcal{X})$. Mivel

$$\|A - B\| < a$$

esetén

$$\left\|A^{-1}(A - B)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A - B\| < \left\|A^{-1}\right\| a = \frac{1}{2} < 1,$$

ezért

$$I - A^{-1}(A - B) \in L_0(\mathcal{X}).$$

Azonban

$$I - A^{-1}(A - B) = I - (I - A^{-1}B) = A^{-1}B,$$

ezért

$$A^{-1}B \in L_0(\mathcal{X}), \qquad \text{azaz} \qquad B = AA^{-1}B \in L_0(\mathcal{X}).$$

2. lépés (φ folytonossága). Az előzőek miatt

$$B^{-1} = \left(I - A^{-1}(A - B)\right)^{-1} A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A^{-1}(A - B)\right)^n A^{-1},$$

így

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(B)-\varphi(A)\| &= \left\|B^{-1}-A^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(A^{-1}(A-B)\right)^n A^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\|A^{-1}\right\|^n \cdot \|A-B\|^n \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \\
&= \left\|A^{-1}\right\|^2 \cdot \|A-B\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A-B\|\right)^{n-1} < \\
&< \left\|A^{-1}\right\|^2 \cdot \|A-B\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{n-1} = \\
&= 2\left\|A^{-1}\right\|^2 \cdot \|B-A\|. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.2.20. feladat. Igazoljuk, hogy az 5.2.19. feladatbeli φ leképezés deriválható is, és tetszőleges

$$A \in L_0 := L_0(\mathcal{X}), \qquad \text{ill.} \qquad B \in L := L(\mathcal{X})$$

esetén

$$\varphi'(A) \in L(L_0, L) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(A)B = -\varphi(A)B\varphi(A),$$

teljesül!

Útm.

$$
\begin{aligned}
\left\|\varphi(B)-\varphi(A)-\varphi'(A)(B-A)\right\| &= \left\|B^{-1}-A^{-1}+A^{-1}(B-A)A^{-1}\right\| = \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(A^{-1}(A-B)\right)^n A^{-1} - A^{-1}(A-B)A^{-1}\right\| = \\
&= \left\|\sum_{n=2}^{\infty}\left(A^{-1}(A-B)\right)^n A^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty}\left\|A^{-1}\right\|^n \cdot \|A-B\|^n \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \\
&= \left\|A^{-1}\right\|^3 \cdot \|A-B\|^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A-B\|\right)^{n-2} < \\
&< 2\left\|A^{-1}\right\|^3 \cdot \|A-B\|^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Az iménti bizonyításban hamarabb célhoz érünk, ha kihasználjuk φ folytonosságát, ui.

$$\varphi(A+H)-\varphi(A)=(A+H)^{-1}-A^{-1}=(A+H)^{-1}\{A-(A+H)\}A^{-1}=-(A+H)^{-1}HA^{-1},$$

így

$$\varphi(A+H)-\varphi(A)+A^{-1}HA^{-1}=\{\varphi(A)-\varphi(A+H)\}HA^{-1},$$

innen

$$\varphi(A+H)-\varphi(A)+A^{-1}HA^{-1}\in\mathfrak{o}(\|H\|).$$

Az 5.2.20. feladatban megfogalmazott állításnak az egyváltozós megfelelője a következő: ha

$$\varphi(x):=x^{-1}\qquad(0\neq x\in\mathbb{R}),$$

akkor tetszőleges $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ esetén

$$\varphi'(a)\cdot b=-a^{-2}\cdot b=-a^{-1}\cdot b\cdot a^{-1}.$$

5.2.21. feladat. Verifikáljuk a derivált kiszámítására vonatkozó 5.2.20. feladatbeli állítást, ha $\mathcal{X}:=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\|\cdot\|$ pedig valamely indukált mátrixnorma!

Útm. Mivel

$$\varphi'(A)B=\lim_{t\to 0+}\frac{(A+tB)^{-1}-A^{-1}}{t}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(A+tB)^{-1},$$

ezért, ha

$$A:=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\quad(ad\neq bc)\qquad\text{és}\qquad B:=\begin{bmatrix}h & k\\ l & m\end{bmatrix},$$

akkor

$$(A+tB)^{-1}=\begin{bmatrix}a+th & b+tk\\ c+tl & d+tm\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl)}\cdot\begin{bmatrix}d+tm & -(b+tk)\\ -(c+tl) & a+th\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{d+tm}{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl} & -\frac{b+tk}{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl}\\ -\frac{c+tl}{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl} & \frac{a+th}{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl}\end{bmatrix},$$

így

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(A+tB)^{-1}=\frac{1}{\{(a+th)(d+tm)-(b+tk)(c+tl)\}^2}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix},$$

ahol

$$\alpha := -d^2h + cdk + bdl - bcm + 2dklt - 2dhmt + klmt^2 - hm^2t^2,$$

$$\beta := bdh - adk - b^2l + abm - 2bklt + 2bjmt - k^2lt^2 + hkmt^2,$$

$$\gamma := cdk - c^2k - adl + acm - 2cklt + 2chmt - kl^2t^2 + hlmt^2,$$

$$\delta := -bch + ack + abl - a^2m + 2aklt - 2ahmt + hklt^2 - h^2mt^2.$$

Innen

$$\begin{aligned}
\varphi'(A)B &= \frac{1}{\{ad-bc\}^2} \cdot \begin{bmatrix} -d^2h + cdk + bdl - bcm & bdh - adk - b^2l + abm \\ cdh - c^2k - adl + acm & -bch + ack + abl - a^2m \end{bmatrix} = \\
&= -\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h & k \\ l & m \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \\
&= -A^{-1}BA^{-1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.2.22. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A, B \in L(\mathcal{X})$ pedig olyan operátor, hogy A bijektív és

$$\|A^{-1}(A-B)\| < 1,$$

akkor B is bijektív, továbbá inverzére

$$B^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(A^{-1}(A-B) \right)^n \right) A^{-1}$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$\|A^{-1}(A-B)\| < 1,$$

ezért

$$I - A^{-1}(A-B)$$

is bijektív és inverzére

$$\left(I - A^{-1}(A-B) \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A^{-1}(A-B) \right)^n$$

teljesül, azonban

$$I - A^{-1}(A-B) = A^{-1}B,$$

így

$$B = AA^{-1}B$$

is bijektív. $\blacksquare$

5.2.23. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $\mathcal{X} \neq \{0\}$, továbbá az A, B operátorokra $A \in L(\mathcal{X})$, $B \in L_0(\mathcal{X})$ és

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$$

teljesül, akkor $A \in L_0(\mathcal{X})$ és fennáll a

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\|}$$

becslés!

Útm. Világos, hogy

$$\|I - B^{-1}A\| = \|B^{-1}(B - A)\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|B - A\| < 1,$$

így

$$(I - (I - B^{-1}A))^{-1} = (I - B^{-1}(B - A))^{-1} = (B^{-1}A)^{-1} \in L(\mathcal{X}).$$

Ez azt jelenti, hogy $A \in L_0(\mathcal{X})$, hiszen

$$A^{-1} = A^{-1}BB^{-1} = (B^{-1}A)^{-1}B^{-1} \in L(\mathcal{X}).$$

A normára vonatkozó becslés pedig a következőképpen látható be. Mivel

$$\|A^{-1}\| = \|(I - B^{-1}(B - A))^{-1}B^{-1}\| \leq \|(I - B^{-1}(B - A))^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\|,$$

ezért az 5.2.5. feladat utáni egyik megjegyzés következtében

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B^{-1}(B - A)\|} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\|}. \quad \blacksquare$$

5.2.24. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $A, B \in L_0(\mathcal{X})$, akkor $A^{-1} \in L_0(\mathcal{X})$ és $AB \in L_0(\mathcal{X})$ is teljesül!

Útm.

1. lépés. Mivel

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

ezért

$$A^{-1} \in L_0(\mathcal{X})$$

és A^{-1} inverze: A.

2. lépés. Mivel

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

és

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I,$$

ezért

$$AB \in L_0(\mathcal{X})$$

és inverze: $B^{-1}A^{-1}$. $\blacksquare$

5.2.25. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, továbbá

- $A \in L_0(\mathcal{X})$,
- $B \in L(\mathcal{X})$:

$$\|B - A\| \leq \frac{q}{\|A^{-1}\|} \qquad (q \in (0,1)),$$

akkor $B \in L_0(\mathcal{X})$, továbbá

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q}, \qquad \text{ill.} \qquad \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{q}{1-q}\|A^{-1}\|$$

teljesül!

Útm. Ha

$$M := I - A^{-1}B,$$

akkor

$$\begin{aligned} \|M\| &= \|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}A - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A-B)\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| \leq q < 1, \end{aligned}$$

így $I - A \in L_0(\mathcal{X})$, továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} M^n = (I - M)^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}/ = B^{-1}A/.$$

Az 5.2.24. feladat következtében így

$$B = AA^{-1}B \in L_0(\mathcal{X}), \qquad \text{sőt} \qquad B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

Ennélfogva

$$\|B^{-1}\| = \|(A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\| \leq \|(A^{-1}B)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q},$$

ill.

$$B^{-1} - A^{-1} = (B^{-1}A - I)A^{-1}$$

miatt

$$B^{-1}A - I = \sum_{n=0}^{\infty} M^n - I = \sum_{n=1}^{\infty} M^n,$$

így

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|M\|^n \leq \frac{q}{1-q}\|A^{-1}\|. \quad \blacksquare$$

6. fejezet

Nyílt és zárt operátorok

6.1. Nyílt operátorok

6.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér esetén az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor pontosan akkor nyílt leképezés (vö. 1.1.13. definíció), ha

$$\exists\, r > 0 : \; K_r(0) \subset A[K_1(0)]$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha A nyílt leképezés, akkor bármely $\mathcal{X}$-beli nyílt halmaz A szerinti képe $\mathcal{Y}$-beli nyílt halmaz. Így – lévén, hogy $K_1(0) \subset \mathcal{X}$ nyílt – $A[K_1(0)]$ nyílt halmaz $\mathcal{Y}$-ban. Az A linearitása következtében a $0 \in \mathcal{X}$ vektorra

$$A0 = 0 \in \mathcal{Y},$$

azaz $0 \in A[K_1(0)]$, tehát

$$0 \in \operatorname{int}(A[K_1(0)]).$$

2. lépés. Ha az

$$\emptyset \neq U \subset \mathcal{X}$$

halmaz nyílt és $y \in A[U]$, akkor y az $A[U]$ halmaz belső pontja, azaz alkalmas $\delta > 0$ szám esetén

$$K_\delta(y) \subset A[U].$$

Mivel $y \in A[U]$, ezért alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$y = Ax.$$

Az U halmaz nyíltságának következtében tehát van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$K_\varepsilon(x) \subset U.$$

A feladat feltétele, ill. az A operátor linearitása következtében

$$K_{\epsilon r}(0) \subset A[K_\epsilon(0)] \qquad (\epsilon > 0)$$

és

$$Ax + K_{\epsilon r}(0) \overset{(*)}{=} K_{\underbrace{\epsilon r}_{=:\delta}}(y) \subset Ax + A[K_\epsilon(0)] \overset{(**)}{=} A[K_\epsilon(x)] \subset A[U],$$

ahol

- a $(*)$ egyenlőség magyarázata:

$$\begin{aligned} y + K_{\epsilon r}(0) &= \{y + y' \in \mathcal{Y} : \ y' \in \mathcal{Y}, \|y'\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon r\} = \\ &= \{b \in \mathcal{Y} : \ \|b - y\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon r\} = K_{\epsilon r}(y); \end{aligned}$$

- a $(**)$ egyenlőség magyarázata:

$$Ax + A[K_\epsilon(0)] = A[x + K_\epsilon(0)] \overset{(*)\text{-hoz hasonlóan}}{=} A[K_\epsilon(x)]. \quad \blacksquare$$

6.1.1. példa. Az

$$A : l_\infty \to \mathfrak{c}_0, \qquad A(x_n) := \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

operátor nem nyílt, hiszen

$$A[K_1(0)] = \left\{(x_n) \in \mathfrak{c}_0 : \ |x_n| < \frac{1}{n} \, (n \in \mathbb{N})\right\},$$

így nincsen olyan $r > 0$ szám, hogy

$$K_r(0) \subset A[K_1(0)]$$

volna.

6.1.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{Y}, \qquad Ax := [x]$$

operátor nyílt!

Útm. Azt fogjuk megmutatni (vö. 6.1.1. feladat), hogy A az $\mathcal{X}$-beli nyílt egységgömböt az $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$-beli nyílt egységgömbre képezi le:

$$A[K_1^{\mathcal{X}}(0)] = K_1^{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}(0).$$

Valóban,

- ha $x \in K_1^{\mathcal{X}}(0)$, akkor

$$\|[x]\| = \inf\{\|x - y\| \in \mathbb{R} : \ y \in \mathcal{Y}\} \leq \|x\| < 1,$$

ui. $0 \in \mathcal{Y}$, így

$$Ax = [x] \in K_1^{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}(0).$$

- ha $[x] \in K_1^{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}(0)$, akkor

$$\|[x]\| = \inf\{\|x-y\| \in \mathbb{R} : \; y \in \mathcal{Y}\} < 1,$$

ezért alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ vektorra

$$\|x-y\| < 1.$$

Így, ha

$$z := x - y,$$

akkor

$$[x-y] = [x] - [y] = [x],$$

hiszen $y \in \mathcal{Y}$, ahonnan

$$Az = [z] = [x]$$

következik. ■

6.1.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, akkor tetszőleges $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor esetében egyenértékűek az alábbi állítások (**nyílt leképezések tétele**)!

(1) Az A leképezés szürjektív.

(2) Az A leképezés nyílt.

Útm.

1. lépés /**(1)** $\Rightarrow$ **(2)**/. Ha az A leképezés szürjektív, akkor

- az $\mathcal{Y}$ képhalmaz

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A[K_n(0)]}$$

alakú. Így a Baire-tétel (vö. 1.2.65. feladat) következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\overline{A[K_N(0)]}$$

sehol sem sűrű ($\mathcal{Y}$-ban). Ez azt jelenti, hogy alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ vektor esetén

$$y \in \operatorname{int}(\overline{A[K_N(0)]}).$$

- van olyan $x \in \mathcal{X}$, amelyre

$$y = Ax.$$

Így a fentiek miatt

$$0 \in \operatorname{int}(\overline{A[K_N(0) - x]}).$$

Ha most $r > 0$ olyan szám, amelyre

$$K_N(0) - x \subset K_r(0),$$

akkor

$$(*) \qquad 0 \in \operatorname{int}(\overline{A[K_r(0)]}).$$

Belátjuk, hogy

$$0 \in \operatorname{int}(A[K_r(0)])$$

is igaz. $(*)$ azt jelenti, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén

$$(v \in \mathcal{Y},\ \|v\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad v \in \overline{A[K_r(0)]},$$

speciálisan

$$(**) \qquad \forall\, v \in \mathcal{Y},\ \|v\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon\ \exists\, u \in K_\varepsilon(0):\ \|v - Au\|_{\mathcal{Y}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahhoz, hogy a

$$0 \in \operatorname{int}(A[K_r(0)])$$

tartalmazást belássuk, elegendő megmutatni, hogy vármely

$$v \in \mathcal{Y}, \qquad \|v\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon$$

esetén van olyan $u \in K_{3r}(0)$ pont, hogy $v = Au$, hiszen ez azt jelenti, hogy

$$0 \in A[K_{3r}(0)],$$

és így A linearitása miatt $(*)$-t kapjuk.
Ha tehát $v \in \mathcal{Y}$ olyan, hogy

$$\|v\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon,$$

akkor $(**)$ felhasználásával olyan $K_r(0)$-beli (u_n) sorozat definiálható, amelyre $v_0 := v$ és

$$\|2(v_n - Au_n)\| < \varepsilon, \qquad v_{n+1} = 2(v_n - Au_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ennélfogva

$$2^{-n-1}v_{n+1} = 2^{-n}v_n - A(2^{-n}u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan

$$A\left(\sum_{n=0}^{m} 2^{-n}u_n\right) = v_0 - 2^{-m-1}v_{m+1}$$

következik. Mivel

$$\sum_{n=0}^{m} \|2^{-n}u_n\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{n=0}^{m} 2^{-n}r \leq 2r,$$

ezért a

$$\sum_{n=0}(2^{-n}u_n)$$

sor konvergens és az

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u_n$$

elemre $\|u\|_{\mathcal{X}} < 3r$ teljesül. Az $m \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy $Au = v$. Ha tehát $U \subset \mathcal{X}$ nyílt halmaz és $u \in U$, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal

$$u + \varepsilon K_r(0) \subset U.$$

Felhasználva, hogy A lineáris, $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$Au \in \text{int}\,(A(u + \varepsilon K_r(0))),$$

és így

$$Au \in \text{int}\,(A[U]),$$

ami azt jelenti, hogy $A[U]$ nyílt halmaz ($\mathcal{Y}$-ban).

2. lépés /**(2)** $\Rightarrow$ **(1)**/. Tegyük fel, hogy A nyílt leképezés. Ha $y := 0$, akkor az $x := 0$ elemre

$$Ax = y.$$

Ha pedig $0 \neq y \in \mathcal{Y}$ és $r > 0$, akkor a

$$v := \frac{r}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{Y}}}$$

vektorral

$$v \in K_r(0) \overset{6.1.1.\text{ feladat}}{\subset} A[K_1(0)].$$

Így tehát alkalmas $a \in K_1(0)$ esetén

$$Aa = v = \frac{r}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{Y}}}.$$

Az A operátor linearitásának figyelembe vételével innen az következik, hogy

$$A\left(\frac{2}{r}\|y\|_{\mathcal{X}} a\right) = y.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $y \in \mathcal{Y}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{X}$ ($y = 0$ esetén $x = 0$, ill. $y \neq 0$ esetén pedig

$$x = 2\|y\|_{\mathcal{X}} \frac{a}{r}\Big),$$

hogy $Ax = y$, azaz A szürjektív. ∎

6.1.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, továbbá az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor bijektív, akkor $A^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, azaz minden, Banach-teret Banach-térbe képező korlátos lineáris bijekció inverze is korlátos (**Banach-féle homeomorfia-tétel**)!

Útm. Ha $U \subset \mathcal{X}$ nyílt halmaz, akkor a nyílt leképezések tétele (vö. 6.1.3. feladat) következtében A nyílt, így

$$A[U] =: V$$

is nyílt halmaz $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban. Beláttuk tehát, hogy

$$\forall\, U \subset \mathcal{X} \text{ nyílt } \exists\, V = A[U] \text{ nyílt}: \; A^{-1}[V] \subset U.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy A^{-1} folytonos:

$$A^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$$

(vö. 1.1.21. feladat). ■

Mint ahogy azt az alábbi példák mutatják, a fenti feladatbeli állításban az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ terek teljessége lényeges feltétel.

6.1.2. példa. Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_{\infty}), \qquad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_{1}),$$

akkor

$$I \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad \|I\| = 1, \qquad \text{de} \qquad I^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \quad \text{nem korlátos},$$

hiszen az

$$f_n(x) := x^n \quad (n \in \mathbb{N},\; x \in [0,1]) \quad \text{sorozatra} \quad \|f_n\|_{\infty} = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\|I^{-1}\| \geq \sup\left\{\frac{\|f_n\|_{\infty}}{\|f_n\|_1} \in \mathbb{R}:\; n \in \mathbb{N}\right\} \geq \sup\{(n+1) \in \mathbb{R}:\; n \in \mathbb{N}\} = +\infty,$$

ui. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ nem teljes. Tehát

$$I^{-1} \notin L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$$

(vö. 4.2.2. példa előtti megjegyzés).

6.1.3. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \{f \in \mathfrak{C}^{\infty}[0,1]:\; f(0) = 0\}, \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{\infty},$$

akkor az

$$(Af)(x) := \int_0^x f \qquad (f \in \mathcal{X},\, x \in [0,1])$$

operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad \|A\| = 1, \qquad \text{de} \qquad A^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \quad \text{nem korlátos},$$

(vö. 4.2.2/1. példa).

A differenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy ha $a, b, c \in \mathfrak{C}[0,1]$, akkor tetszőleges $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén pontosan egy olyan $u \in \mathfrak{C}^2[0,1]$ van, amelyre

$$(*) \qquad au'' + bu' + cu = f, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

teljesül. Ezzel kapcsolatos a

6.1.5. feladat. Mutassuk meg, hogy alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén a $(*)$-beli u függvényre teljesül a

$$\sup\left\{|u''(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} \leq K\|f\|_\infty$$

becslés!

Útm. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}^2[0,1], \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{Y} := \mathfrak{C}[0,1],$$

és

$$\|u\|_\mathcal{X} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \quad (u \in \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|u\|_\mathcal{Y} := \|u\|_\infty \quad (u \in \mathcal{Y}),$$

akkor az

$$A : (\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X}) \to (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y}), \qquad Au := au'' + bu' + cu$$

nyilvánvalóan lineáris operátorra teljesül, hogy A értelmezési tartománya és képhalmaza is Banach-tér, A folytonos, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Au\|_\infty = \|au'' + bu' + c\|_\infty \leq \max\left\{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty\right\} \cdot \|u''\|_\mathcal{Y}.$$

A fenti feltétel miatt A bijektív operátor, ezért a Banach-féle homeomorfia-tétel (vö. 6.1.4. feladat) következtében A^{-1} is folytonos. Ez azt jelenti, hogy a

$$K := \|A^{-1}\|$$

számmal a $(*)$-ot kielégítő u-ra

$$\|u\|_\mathcal{X} = \|A^{-1}f\|_\mathcal{X} \leq K\|f\|_\mathcal{Y}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \sup\left\{|u''(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} \leq K\|f\|_\infty$$

következik. ■

A nyílt leképezések tételének fontos következménye a

6.1.1. tétel. Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ Banach-tér és az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor esetén egyenértékűek az alábbi állítások.

(1) Az

$$Ax = y \qquad (y \in \mathcal{X})$$

egyenlet **korrekt kitűzésű feladat**, azaz bármely $y \in \mathcal{Y}$ esetén pontosan egy olyan $x \in \mathcal{X}$ van, amelyre $Ax = y$, és x **folytonosan függ y-tól**, azaz A^{-1} folytonos.

(2) Bármely $v \in \mathcal{Y}$ esetén van olyan $u \in \mathcal{X}$, amelyre $Au = v$, és az $Aw = 0$ egyenlőségből $w = 0$ következik.

6.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, és az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor injektív, akkor igaz az

$$A^{-1} \in L(\mathcal{R}(A), \mathcal{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés. Mivel

$$\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

Banach-tér, ezért

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{R}(A))$$

bijektív, így a Banach-féle homeomorfia-tétel (vö. 6.1.4. feladat) következtében

$$A^{-1} \in L(\mathcal{R}(A), \mathcal{X}).$$

2. lépés. Ha

$$A^{-1} \in L(\mathcal{R}(A), \mathcal{X}),$$

akkor

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{R}(A)$$

izomorfizmus, így $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége következtében $(\mathcal{R}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is teljes, ezért

$$\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}. \quad \blacksquare$$

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ Banach-terek, ill. $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor esetén bevezetjük a

$$[A] : \mathcal{X}/\mathcal{N}(A) \to \mathcal{R}(A), \qquad [A][x] := Ax$$

operátort. Világos, hogy ha valamely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén $[x] = [y]$, akkor

$$x - y \in \mathcal{N}(A), \qquad \text{azaz} \qquad A(x-y) = 0 \in \mathcal{Y},$$

így

$$Ax = Ay.$$

6.1.7. feladat. Igazoljuk, hgy a a fenti A operátor esetén, ha $\mathcal{R}(A)$ zárt halmaz, akkor

1. $[A]$ lineáris **homeomorfizmus** (olyan folytonos bijekció, amelynek inverze is folytonos),
2. alkalmas $K > 0$ szám esetén

$$K \cdot \rho(x, \mathcal{N}(A)) \leq \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül.

Útm.

1. lépés. $\mathcal{N}(A)$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben, hiszen ha valamely

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén

$$Ax_n = 0 \quad /x_n \in \mathcal{N}(A)/ \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) = x,$$

akkor $Ax = 0$, azaz $x \in \mathcal{N}(A)$. Ezért (vö. 1.3.131. feladat) $\mathcal{X}/\mathcal{N}(A)$ Banach-tér.

2. lépés. Világos, hogy az $[A]$ operátor lineáris, továbbá

$$\|[A][x]\|_{\mathcal{Y}} = \|Au\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \qquad (u \in [x])$$

következtében

$$\|[A][x]\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot p_{\mathcal{N}(A)}([x]),$$

azaz $[A]$ folytonos.

3. lépés. $[A]$ bijektív, hiszen ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén $[A][x] = 0$, akkor $x \in \mathcal{N}(A)$, azaz $[x] = 0$.

4. lépés. Mivel $\mathcal{R}(A)$ zárt altér $\mathcal{Y}$-ban, ezért (vö. 1.3.1. tétel utáni megjegyzés) $\mathcal{R}(A)$ is Banach-tér. Így (vö. 6.1.4. feladat) az

$$[A]^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{X}/\mathcal{N}(A)$$

inverz is folytonos. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $K > 0$ számra

$$\|[A]^{-1}[x]\|_{\mathcal{Y}} \leq K p_{\mathcal{N}(A)}([x]) \qquad ([x] \in \mathcal{X}/\mathcal{N}(A))$$

teljesül. Így

$$p_{\mathcal{N}(A)}([u]) \leq K \, \|[A][u]\|_{\mathcal{Y}} \qquad ([u] \in \mathcal{X}/\mathcal{N}(A)). \quad \blacksquare$$

6.2. Zárt operátorok

6.2.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetén azt mondjuk, hogy $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ **zárt operátor**, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ normált térben, ahol $\|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ az 1.3.3. házi feladatban bevezetett norma ($p = 1$):

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}} \qquad (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}).$$

Az 1.3.118. feladatból tudjuk, hogy $\|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ pontosan akkor Banach-tér, ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér. A fenti norma értelmezéséből következik, hogy valamely

$$(u_n, v_n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén egyenértékűek az alábbi állítások /**(1)** $\iff$ **(2)**/:

(1) $\lim(u_n, v_n) = (u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ a $\|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ normában;

(2) $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}} u$ $(n \to \infty)$ és $v_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}} v$ $(n \to \infty)$, azaz

$$\lim(\|u_n - u\|_{\mathcal{X}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|v_n - v\|_{\mathcal{Y}}) = 0.$$

6.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér és $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely $x_n \in \mathcal{D}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}} x \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty), \qquad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}} y \in \mathcal{Y} \quad (n \to \infty)$$

sorozat esetén

$$x \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad y = Ax$$

teljesül.

(2) Az A operátor zárt.

Útm. A $\Gamma(A)$ halmaz pontosan akkor zárt, ha bármely $(u, v) \in \overline{\Gamma(A)}$ esetén $(u, v) \in \Gamma(A)$. Mivel $(u, v) \in \overline{\Gamma(A)}$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan

$$(u_n, v_n) \in \Gamma(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, amelyre

$$\lim((u_n, v_n)) = (u, v) \qquad /\|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\text{-ban}/,$$

azaz amelyre

$$u = \lim(u_n) \quad /\|\cdot\|_{\mathcal{X}}\text{-ban}/ \qquad \text{és} \qquad v = \lim(v_n) = \lim(Au_n) \quad /\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}\text{-ban}/,$$

ezért $\Gamma(A)$ zártsága éppen azt jelenti, hogy minden olyan

$$u_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén, amelyre

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}} u \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad Au_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}} v \quad (n \to \infty)$$

teljesül, igaz az $u \in \mathcal{D}(A)$ tartalmazás, ill. a

$$v = Au$$

egyenlőség. ■

6.2.2. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := \mathfrak{C}[0,1], \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{\infty}$$

és

$$A : \mathfrak{C}^1[0,1] \to \mathcal{Y}, \qquad Af := f',$$

akkor $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zárt operátor.

Útm. Ha

$$f_n \in \mathfrak{C}^1[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim(f_n) = f \qquad /(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})\text{-ban}/,$$

ill.

$$\lim(Af_n) = g \qquad /(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})\text{-ban}/,$$

akkor az

$$(Af_n) = (f_n')$$

sorozat egyenletes konvergenciája (vö. 1.2.28. feladat) következtében bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\int_0^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \to \infty),$$

ahonnan

$$f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \to \infty)$$

következik. Mivel

$$\lim(f_n) = f,$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{azaz} \qquad f \in \mathfrak{C}^1[0,1] \quad \text{és} \quad Af = f' = g. \quad \blacksquare$$

6.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := L^2[-1,1], \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{L^2}$$

és

$$A : \mathfrak{C}^1[-1,1] \to \mathcal{Y}, \qquad Af := f',$$

akkor $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ nem zárt operátor!

Útm. Ha

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad (x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N})$$

és

$$f(x) := |x| \qquad (x \in [-1,1]),$$

ill.

$$g(x) := \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \qquad (x \in [-1,1]),$$

akkor

$$\lim(\|f_n - f\|_{L^2}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|f_n' - g\|_{L^2}) = 0,$$

de $g \neq Af$. ■

6.2.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y} := L^2[-1,1], \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_{L^2}$$

és

$$A : \mathfrak{W}_{1,2}[-1,1] \to \mathcal{Y}, \qquad Af := f',$$

akkor $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zárt operátor!

Útm. Tegyük fel, hogy

$$f_n \in \mathfrak{W}_{1,2}[-1,1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan függvénysorozat, hogy valamely $(f,g) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ függvénypárra

$$(f_n, Af_n) \overset{\|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}}{\longrightarrow} (f,g) \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$\lim(\|f_n - f\|_{L^2}) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(\|f_n' - g\|_{L^2}) = 0$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy (f_n) egyenletesen konvergens. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n abszolút folytonos, így (vö. 11.5. fejezet) tetszőleges $x \in [-1,1]$ esetén

$$f_n(x) = f_n(-1) + \int_{-1}^{x} f_n'(t)\,dt.$$

A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával pedig azt kapjuk, hogy bármely $x \in [-1,1]$ esetén

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt\right| &= \int_{-1}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,dt \leq \int_{-1}^{1} |f_n'(t) - g(t)|\,dt \leq \\
&\leq \left(\int_{-1}^{1} |f_n'(t) - g(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-1}^{1} 1^2\,dt\right)^{1/2} = \\
&= \sqrt{2} \cdot \|Af_n - g\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

azaz

$$\int_{-1}^{x} f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int_{-1}^{x} g_n(t)\,dt \qquad (n \to \infty).$$

Továbbá bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_m(-1) - f_n(-1) = f_m(x) - f_n(x) + \int_{-1}^{x} (f_n'(t) - f_m(t))\,dt,$$

ennélfogva

$$\begin{aligned}
|f_m(-1)-f_n(-1)| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-1}^{1}|f_m(-1)-f_n(-1)|^2\right)^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\int_{-1}^{1}|f_m(t)-f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\right. \\
&\left.+\left(\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{x}(f_m'(t)-f_n'(t))\,\mathrm{d}t\right|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

Mivel a fentiek következtében minden $x\in[-1,1]$ esetén

$$\left(\int_{-1}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t,\right)$$

Cauchy-sorozat, ezért $(f_n(-1))$ is Cauchy-sorozat (így konvergens is). Ha

$$\alpha := \lim(f_n(-1)) \qquad \text{és} \qquad h(x) := \alpha + \int_{-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \quad (x\in[-1,1]),$$

akkor h abszolút folytonos és (μ_1-)m.m. $x\in[-1,1]$ esetén

$$h'(x) = g(x).$$

Ez azt jelenti, hogy $h\in\mathfrak{W}_{1,2}[-1,1]$, valamint

$$Ah = g.$$

Mivel (f_n) egyenletesen tart h-hoz és

$$\lim(\|f_n - f\|_{L^2}) = 0,$$

ezért (μ_1-)m.m. $x\in[-1,1]$ esetén

$$f(x) = h(x). \quad \blacksquare$$

6.2.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(c_n)\in\mathbb{K}^{N}$, ill.

$$\mathcal{D}(A) := \left\{(u_n)\in l_2:\ \sum_{n=1}^{\infty}|c_n u_n|^2 < +\infty\right\},$$

akkor az

$$A\in l_2\to l_2, \qquad A(u_n) := (c_n u_n)$$

operátor (vö. 4.2.17. feladat) zárt!

Útm. Ha

$$\Gamma_n := \{(u,v)\in l_2\times l_2:\ v_k = c_k u_k\ (k\leq n)\} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén Γ_n zárt halmaz. Így

$$\Gamma(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

következtében A zárt operátor. ■

6.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$, $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}})$ normált tér, $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ zárt (lineáris) operátor, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{Z})$ bijektív és $A^{-1} \in L(\mathcal{Z} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor az

$$AB \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Z})$$

operátor zárt!

Útm. Ha

$$x_n \in \mathcal{D}(AB) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lim((AB)x_n) =: z \in \mathcal{Z}$$

teljesül, akkor $A^{-1} \in L(\mathcal{Z} \curvearrowright \mathcal{Y})$ következtében

$$\lim((A^{-1}AB)x_n = \lim(Bx_n) = A^{-1}z.$$

teljesül. Így B zártsága miatt

$$x \in \mathcal{D}(B) \qquad \text{és} \qquad Bx = A^{-1}z,$$

azaz

$$Bx \in \mathcal{D}(A) \quad \text{vagy} \quad x \in \mathcal{D}(AB) \qquad \text{és} \qquad (AB)x = z$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy AB zárt operátor. ■

6.2.7. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha A zárt operátor, akkor az $\mathcal{N}(A)$ altér zárt.
2. Ha A injektív, úgy A pontosan akkor zárt, ha A^{-1} is zárt.
3. Ha A lineáris, korlátos, és a $\mathcal{D}(A)$ altér zárt, akkor A zárt operátor, speciálisan minden $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor zárt.
4. Ha $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, A korlátos, tovább A zárt, akkor $\mathcal{D}(A)$ zárt.
5. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, A korlátos, zárt, injektív operátor, továbbá A^{-1} korlátos, akkor $\mathcal{R}(A)$ zárt.

Útm.

1. Ha
$$x_n \in \mathcal{N}(A) \subset \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor A zártságának következményeként
$$(\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}, \quad \lim(Ax_n) = 0 \in \mathcal{Y}) \qquad \Longrightarrow \qquad (x \in \mathcal{D}(A), \quad 0 = Ax).$$
Ez azt jelenti, hogy $x \in \mathcal{N}(A)$, azaz $\mathcal{N}(A)$ zárt.
2. Ha A injektív és zárt operátor, továbbá
$$y_n \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
olyan sorozat, amelyre
$$\lim(y_n) =: y \in \mathcal{Y} \qquad \text{és} \qquad \lim(A^{-1}y_n) =: x \in \mathcal{X}$$
teljesül, akkor
$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{és} \quad Ax = y, \qquad \text{azaz} \qquad y \in \mathcal{D}(A^{-1}) \quad \text{és} \quad A^{-1}y = x.$$
Ez azt jelenti, hogy A^{-1} zárt. Így, ha A^{-1} zárt, akkor
$$A = (A^{-1})^{-1}$$
következtében A is zárt.
3. Ha
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
olyan sorozat, amelyre
$$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lim(Ax_n) =: y \in \mathcal{Y}$$
teljesül, akkor $\mathcal{D}(A)$ zártsága következtében $x \in \mathcal{D}(A)$. Mivel A korlátos, tehát folytonos, ezért
$$\lim(Ax_n) = Ax, \qquad \text{azaz} \qquad Ax = y.$$
Ez azt jelenti, hogy A zárt operátor.
4. Ha
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
olyan sorozat, amelyre
$$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}$$
teljesül, akkor (x_n) Cauchy-sorozat, így A korlátossága következtében (Ax_n) is Cauchy-féle, amely $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljessége következtében konvergens is. Így A zártságából $x \in \mathcal{D}(A)$, azaz $\mathcal{D}(A)$ zártsága következik.
5. A második állítás következtében A^{-1} zárt operátor. Így a negyedik állítás felhasználásával látható, hogy
$$\mathcal{D}(A^{-1} = \mathcal{R}(A)$$
zárt. ■

6.2.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ill. $\mathcal{R}(A)$ zárt altér, valamint alkalmas $c > 0$ szám esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \geq c\|x\|_{\mathcal{X}} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

teljesül, akkor A zárt operátor!

Útm. Világos, hogy A injektív és A^{-1} korlátos (vö. 5.2.1. feladat), továbbá

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$$

zárt altér, így (vö. 6.2.7/3. feladat) A^{-1} zárt és (vö. 6.2.7/2. feladat) A is zárt. ■

6.2.9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, akkor

1. a
$$\|x\|_A := \sqrt{\|x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2} \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$
leképezés (vö. 4.1.15. feladat) norma (**gráfnorma** vagy A-**norma**);
2. bármely $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén fennáll a
$$\|x\|_A \leq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \sqrt{2}\|x\|_A$$
becslés;
3. ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, úgy A pontosan akkor zárt, ha $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ Banach-tér!

Útm.

1. A
$$\|\cdot\|_A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}$$
leképezés norma, hiszen
   - ha valamely $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén
$$0 = \|x\|_A = \sqrt{\|x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2},$$
akkor $\|x\|_{\mathcal{X}}^2 =$ és $\|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2$, ahonnan $\|x\|_{\mathcal{X}} = 0$, azaz $x = 0 \in \mathcal{D}(A)$ következik;
   - bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén
$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_A &= \sqrt{\|\lambda x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|A(\lambda x)\|_{\mathcal{Y}}^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}^2 + |\lambda|^2 \cdot \|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2} = \\ &= |\lambda| \cdot \sqrt{\|x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}^2} = |\lambda| \cdot \|x\|_A;\end{aligned}$$

- bármely $x, y \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_A &= \sqrt{\|x+y\|^2_{\mathcal{X}} + \|A(x+y)\|^2_{\mathcal{Y}}} = \sqrt{\|x+y\|^2_{\mathcal{X}} + \|Ax+Ay\|^2_{\mathcal{Y}}} \leq \\
&\leq \sqrt{[\|x_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{X}}]^2 + [\|Ax\|_{\mathcal{Y}} + \|Ay\|_{\mathcal{Y}}]^2} \leq \\
&\leq \sqrt{\|x^2_{\mathcal{X}} + \|Ax\|^2_{\mathcal{Y}}} + \sqrt{\|y\|^2_{\mathcal{X}} + \|Ay\|^2_{\mathcal{Y}}} = \\
&= \|x\|_A + \|y\|_A.
\end{aligned}$$

2. Bármely $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|x\|^2_A &= \|x\|^2_{\mathcal{X}} + \|Ax\|^2_{\mathcal{Y}} \leq \|x\|^2_{\mathcal{X}} + 2\|x\|_{\mathcal{X}} \cdot \|Ax\|_{\mathcal{Y}} + \|Ax\|^2_{\mathcal{Y}} = \\
&= [\|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}]^2 \leq 2\left[\|x\|^2_A + \|Ax\|^2_{\mathcal{Y}}\right]^2.
\end{aligned}$$

3. Ha (x_n) Cauchy-sorozat a $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ térben, akkor (x_n) és (Ax_n) Cauchy-sorozatok az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ terekben, így ezek teljessége következtében alkalmas $x \in \mathcal{X}$, ill. $y \in \mathcal{Y}$ vektorokra

$$\lim(\|x_n - x\|_{\mathcal{X}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|Ax_n - Ax\|_{\mathcal{Y}} = 0$$

teljesül. A zártságának következtében így $x \in \mathcal{D}(A)$ és $Ax = y$, ahonnan

$$\|x - x_n\|_A = \sqrt{\|x - x_n\|^2_{\mathcal{X}} + \|A(x - x_n)\|^2_{\mathcal{Y}}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy (x_n) olyan Cauchy-sorozat, amely $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$-ben konvergens, azaz $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ teljes. Ha $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ Banach-tér és

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre valamely $x \in \mathcal{X}$, ill. $y \in \mathcal{Y}$ esetén

$$\lim(\|x_n - x\|_{\mathcal{X}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|Ax_n - y\|_{\mathcal{Y}} = 0,$$

teljesül, akkor (x_n), ill. (Ax_n) Cauchy-sorozat az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ térben, következésképpen (x_n) Cauchy-sorozat a $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ térben is, így annak teljessége folytán konvergens is. Van tehát olyan $u \in \mathcal{D}(A)$, amelyre

$$\lim(\|x_n - u\|_A) = 0$$

teljesül. Mivel

$$\|x_n - u\|_{\mathcal{X}} + \|A(x_n - u)\|_{\mathcal{Y}} \leq \sqrt{2}\|x_n - u\|_A,$$

ezért

$$\lim(\|x_n - u\|_{\mathcal{X}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|Ax_n - Au\|_{\mathcal{Y}}) = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$x = u \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad Au = Ax = y,$$

azaz A zárt operátor. ■

6.2.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, úgy A pontosan akkor zárt operátor, ha $(\mathcal{D}(A), [\cdot,\cdot]_A)$ Hilbert-tér (vö. 4.1.15. feladat)!

Útm. Mivel

$$\|x\|_A = [x,x]_A \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

(vö. 4.1.15. feladat), ezért a 6.2.9. feladat alapján az állítás nyilvánvaló. ∎

Az 1.1.13. gyakorló feladatból, ill. a 6.2.7/3. feladatból tudjuk, hogy ha A folytonos és $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, akkor $\Gamma(A)$ zárt. A $\Gamma(A)$ zártságából viszont csak bizonyos feltételek megléte esetén következik A folytonossága. Ha pl. $\mathcal{D}(A)$ nem zárt altere $\mathcal{X}$-nek (vö. 6.2.2., ill. 2.3.2. feladat), vagy A nem lineáris, pl.

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad A(x) := \begin{cases} 1/x, & (x < 0), \\ \\ 1 & (x \geq 0), \end{cases}$$

akkor A lehet zárt és nem-folytonos is egyben. Az alábbi – Banachtól származó – állítás elégséges feltételt ad operátorok folytonosságára.

6.2.1. tétel. (Zárt gráfra vonatkozó tétel.) Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek és az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor esetén, ha

(1) $\mathcal{D}(A)$ zárt $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben$/$ és **(2)** $\Gamma(A)$ zárt $/(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$-ban$/$,

akkor A folytonos.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{D}(A)$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben, ezért $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége következtében $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ is teljes (vö. 1.2.51. feladat utáni megjegyzés). Mivel

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$$

teljes (vö. 1.3.118. gyakorló feladat), ezért az iménti gondolatmenet alapján

$$(\Gamma(A), \|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$$

is teljes. Nem nehéz belátni, hogy a

$$\varphi : \Gamma(A) \to \mathcal{D}(A), \qquad \varphi(x, Ax) := x,$$

ill. a

$$\psi : \Gamma(A) \longrightarrow \mathcal{R}(A), \qquad \psi(x, Ax) := Ax$$

leképezés lineáris, sőt folytonos is (vö. 1.1.7. feladat). Mivel

$$\varphi(x, Ax) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x = 0 \quad \text{és} \quad Ax = 0),$$

ezért φ bijekció. Így a Banach-féle homeomorfia-tétel alapján (vö. 6.1.4. feladat) a

$$\varphi^{-1} : \mathcal{D}(A) \to \Gamma(A), \qquad \varphi^{-1}(x) = (x, Ax)$$

operátor is folytonos. Mivel

$$A = \psi\varphi^{-1},$$

ezért A is folytonos. ■

6.2.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ projekció, akkor igaz az

$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{N}(A) \quad \text{és} \quad \mathcal{R}(A) \quad \text{zárt})$$

ekvivalencia!

Útm.

1. lépés. Ha A folytonos projekció (**projektor**), akkor nyilván $I - A$ is az, így

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(I - A)$$

és

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(I - A)$$

zárt.

2. lépés. Ha

$$u_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(u_n) = u \qquad \text{és} \qquad \lim(Au_n) = v$$

teljesül, akkor

$$Au_n \in \mathcal{R}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és $\mathcal{R}(A)$ zártsága miatt $v \in \mathcal{R}(A)$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A(Au_n - u_n) = A^2u_n - Au_n = Au_n - Au_n = 0,$$

ezért

$$Au_n - u_n \in \mathcal{N}(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így $\mathcal{N}(A)$ zártsága miatt

$$\lim(Au_n - u_n) = v - u \in \mathcal{N}(A).$$

Így az

$$u = (u - v) + v$$

(egyértelmű) felbontás miatt

$$Au = v,$$

tehát $\Gamma(A)$ zárt, azaz A folytonos (vö. 6.2.1. tétel). ■

Vannak olyan operátorok, amelyek ugyan nem zártak de van zárt kiterjesztésük. Erre vonatkozik a

6.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetén azt mondjuk, hogy az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor **lezárható**, ha alkalmas $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ zárt operátorra $A \subset B$ teljesül.

6.2.12. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) A lezárható.

(2) A-nak van legszűkebb lezárható kiterjesztése, azaz A-nak van olyan $\overline{A}$ zárt kiterjesztése, hogy A minden B zárt kiterjesztésére $\overline{A} \subset B$ teljesül.

(3) A $\overline{\Gamma(A)}$ halmaz valamely operátor gráfja.

(4) Ha valamely $y \in \mathcal{Y}$ esetén $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)}$, akkor $y = 0 \in \mathcal{Y}$.

(5) Ha

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre valamely $y \in \mathcal{Y}$ esetén

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}} 0 \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}} y \in \mathcal{Y} \quad (n \to \infty),$$

akkor $y = 0 \in \mathcal{Y}$ teljesül.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (3)/. Ha B zárt kiterjesztése A-nak, akkor (vö. 4.1.16/2. feladat, ill. 6.2.1. definíció)

$$\Gamma(A) \subset \Gamma(B) = \overline{\Gamma(B)},$$

és így

$$\overline{\Gamma(A)} \subset \overline{\Gamma(B)},$$

továbbá (vö. 4.1.16/4. feladat) $\overline{\Gamma(A)}$ valamely operátor gráfja.

2. lépés /(3) $\Rightarrow$ (2)/. Ha $\overline{A}$ olyan operátor, amelynek gráfja $\overline{\Gamma(A)}$, akkor (vö. 6.2.1. definíció) $\overline{A}$ zárt operátor. Így, ha B zárt kiterjesztése A-nak, akkor

$$\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(B) = \overline{\Gamma(B)},$$

sőt

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)} \subset \overline{\Gamma(B)},$$

azaz (vö. 4.1.16/2. feladat) $\overline{A} \subset B$.

3. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. Triviális.

4. lépés /(3) ⇔ (4)/. Ez az állítás a 4.1.16/3. feladat közvetlen következménye.

5. lépés /(4) ⇔ (5)/. Világos, hogy valamely $y \in \mathcal{Y}$ esetén $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)}$ pontosan akkor teljesül, ha alkalmas

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}} 0 \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty) \qquad \text{és} \qquad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}} y \in \mathcal{Y} \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

6.2.13. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$A : \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(u) \subsetneq \mathbb{R}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad Au := \int_{\mathbb{R}} u,$$

akkor az

$$A \in L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

operátor nem lezárható!

Útm. Az

$$f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|f_n\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

viszont

$$Af_n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

6.2.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, nyílt halmaz,

$$\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega) := \{u \in \mathfrak{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{tr}(u) \subset \Omega \,\text{kompakt}\},$$

akkor az

$$A : \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \qquad Af := \Delta f$$

operátor lezárható!

Útm. Ha

$$(f_n, g_n) \in \Gamma(A) \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, hogy valamely $f \in L^2(\Omega)$ függvény esetén

$$f_n \xrightarrow{(L^2, \|\cdot\|_{L^2})} 0, \quad g_n = \Delta f_n \xrightarrow{(L^2, \|\cdot\|_{L^2})} f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, akkor – parciálisan integrálva – tetszőleges $\varphi \in \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega)$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int g_n \varphi = \int (\Delta f_n)\varphi = \int f_n \Delta\varphi$$

teljesül. Így az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\int f\varphi = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega)).$$

Mivel $\mathfrak{C}_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban (vö. pl. [?]), ezért $f = 0$. ■

A 6.2.12. feladat-beli állítás azt mutatja, hogy jogos az alábbi értelmezés.

6.2.3. definíció. Adot $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, ill. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor esetén azt mondjuk, hogy az $\overline{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ operátor az A **lezárása**, ha

$$\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A})$$

teljesül.

Világos, hogy az $\overline{A}$ lezárásra az alábbiak teljesülnek:

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \left\{x \in \mathcal{X} \mid \exists (x_n) \in \mathcal{D}(A)^\mathbb{K},\ \lim(x_n) = x :\ (Ax_n)\,\text{konvegens}\ \mathcal{Y}\text{-ban}\right\},$$

$$\overline{A}x := \lim(Ax_n) \qquad \left(x \in \mathcal{D}(\overline{A}) :\ (x_n) \in \mathcal{D}(A)^\mathbb{K},\ \lim(x_n) = x,\ (Ax_n)\,\text{konvegens}\ \mathcal{Y}\text{-ban}\right).$$

Látható az is, hogy

$$\mathcal{D}(\overline{A}) \subset \overline{\mathcal{D}(A)} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}(\overline{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(A)},$$

továbbá valamely lezárható operátor pontosan akkor zárt, ha értelmezési tartománya megegyezik lezártjának értelmezési tartományával.

6.2.15. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér, ill. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha A korlátos, akkor lezárható, továbbá $\overline{A}$ korlátos és

   $$\|\overline{A}\| = \|A\|.$$

   Ha ezen felül $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ még Banach-tér is, akkor

   $$\mathcal{D}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}(A)},$$

   és $\overline{A}$ a 4.5.1. feladatbeli B operátor.

2. Ha A inkeltív és lezárható, úgy A^{-1} pontosan akkor lezárható, ha $\overline{A}$ inkjektív. Ez utóbbi esetben

   $$\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}.$$

   Ha ezen felül $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ még Banach-tér is, és $\overline{A}^{-1}$ korlátos, akkor

   $$\mathcal{R}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Útm.

1. Ha $y \in \mathcal{Y}$, továbbá
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
olyan sorozat, amelyre
$$\lim(x_n) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim(Ax_n) = y$$
teljesül, akkor
$$\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|x_n\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$
következtében $y = 0$ és (vö. 6.2.12/5. feladat) A lezárható. Ha $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$, akkor alkalmas
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
esetén
$$\lim(x_n) = x \qquad \text{és} \qquad \|\overline{A}x\|_{\mathcal{Y}} = \lim\left(\|\overline{A}x_n\|_{\mathcal{Y}}\right) \leq \|A\| \cdot \lim(\|x_n\|_{\mathcal{X}}) = \|A\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}.$$
Így tehát $\overline{A}$ korlátos és
$$\|\overline{A}\| \leq \|A\|.$$
$A \subset \overline{A}$ következménye a fordított irányú
$$\|\overline{A}\| \geq \|A\|$$
egyenlőtlenség. Tudjuk, hogy
$$\mathcal{D}(\overline{A}) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}.$$
Ha $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ még Banach-tér is és $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ akkor alkalmas
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat esetén $\lim(x_n) = x$, ahonnan
$$\|Ax_m - Ax_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|x_m - x_n\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$
Ezért (Ax_n) konvergens és így $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$, azaz
$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{D}(A)}.$$
Az állítás többi része a kiterjesztés egyértelműségének következménye.

2. Tegyük fel, hogy A^{-1} lezárható és valamely $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$ esetén
$$\overline{A}x = 0$$
teljesül. Ekkor alkalmas
$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatra
$$\lim(x_n) = x \qquad \text{és} \qquad \lim(Ax_n) = 0,$$

ahonnan

$$Ax_n \in \mathcal{D}(A^{-1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és (vö. 6.2.12/5. feladat) $x = 0$ következik. Így $\overline{A}$ injektív. Ha pedig $\overline{A}$ injektív, akkor, akkor $\overline{A}^{-1}$ folytatása A^{-1}-nek, amely zárt (vö. 6.2.7/2. feladat). A^{-1} tehát lezárható és

$$\overline{A^{-1}} \subset \overline{A}^{-1}.$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy

$$\overline{A^{-1}} \supset \overline{A}^{-1}, \qquad \text{azaz} \qquad \Gamma(\overline{A}^{-1}) \subset \overline{\Gamma(A^{-1})}$$

teljesül. Ha

$$(y, x) \in \Gamma\left(\overline{A}^{-1}\right),$$

akkor $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$ és

$$y = \overline{A}x,$$

azaz alkalmas

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$\lim(x_n) = x \qquad \text{és} \qquad \lim(Ax_n) = y.$$

Így

$$y_n := Ax_n \in \mathcal{D}(A^{-1}) \qquad \text{és} \qquad x_n = A^{-1}y_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért

$$(y, x) = \lim(y_n, A^{-1}y_n) \in \overline{\Gamma(A^{-1})}.$$

Az

$$\mathcal{R}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

állítás pedig a 6.2.7/5. feladat, ill.

$$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(\overline{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(A)}$$

következménye. ■

7. fejezet

Szimmetrikus operátorok

7.1. A szimmetrikus operátor fogalma

7.1.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ (lineáris) operátort **szimmetrikus**nak nevezzük, ha

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \qquad (u, v \in \mathcal{D}(A)).$$

Azt mondjuk továbbá, hogy A **maximálisan szimmetrikus**, ha A szimmetrikus és bármely $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, $A \subset B$ szimmetrikus operátor esetén $A = B$ teljesül.

7.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $u \in l_\infty(\mathbb{R})$ esetén

$$A_u : l_2 \to l_2, \qquad A_u(x_n) := (u_n x_n),$$

akkor az A (lineáris) operátor (maximálisan) szimmetrikus!

Útm. Világos, hogy minden $x \in l_2$, ill. $u \in l_\infty(\mathbb{R})$ esetén $ux \in l_2$, így ha $u \in l_\infty(\mathbb{R})$, akkor bármely $x, y \in l_2$ esetén

$$\langle A_u x, y\rangle = \langle (u_n x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{u_n y_n} = \langle (x_n), (u_n y_n)\rangle = \langle x, A_u y\rangle . \quad \blacksquare$$

7.1.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha adott $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér és $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ függvény esetén

$$A_\varphi : L^2 \to L^2, \qquad A_\varphi u := \varphi u,$$

akkor az A_φ (lineáris) operátor (maximálisan) szimmetrikus!

Útm. Tetszőleges $u, v \in L^2$ esetén

$$\langle A_\varphi u, v\rangle = \langle \varphi u, v\rangle = \int \varphi u \overline{v}\, \mathrm{d}\mu = \int u \overline{\varphi v}\, \mathrm{d}\mu = \langle u, \varphi v\rangle = \langle u, A_\varphi v\rangle . \quad \blacksquare$$

7.1.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X}_1 := \{f \in \mathfrak{W}_{1,2}[a,b] : \; f(a) = 0 = f(b)\} \,,$$

$$\mathcal{X}_2 := \{f \in \mathfrak{W}_{1,2}[0,+\infty) : \; f(0) = 0\} \,, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{X}_3 := \mathfrak{W}_{1,2}(\mathbb{R})$$

(vö. 11.5. fejezet), és

$$A_k u := -\imath\hbar u' \qquad (k \in \{1,2,3\}, \; u \in \mathcal{X}_k) \,,$$

akkor bármely $k \in \{1,2,3\}$ esetén az

$$A_k \in L^2[a,b] \to L^2[a,b]$$

(lineáris) operátor (a **kvantummechanika impulzus-operátora**) szimmetrikus!

Útm. Ha

- $k = 1$, akkor parciálisan integrálva (u és v abszolút folytonos)

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle &= \int_a^b \left(-\imath\hbar u'\right) \overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1 = -\imath\hbar \left[u\overline{v}\right]_a^b + \imath\hbar \int_a^b u\overline{v'} \, \mathrm{d}\mu_1 = \\ &= \int_a^b u \left(\overline{-\imath\hbar v'}\right) \, \mathrm{d}\mu_1 = \langle u, A_1 v\rangle \quad (u, v \in \mathcal{D}(A_1)). \end{aligned}$$

- $k = 2$, akkor tetszőleges $u, v \in \mathcal{D}(A_2)$ esetén

$$\langle A_2 u, v\rangle = \int_0^{+\infty} \left(-\imath\hbar u'\right) \overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} \left(-\imath\hbar u'\right) \overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1,$$

  így parciálisan integrálva (u és v abszolút folytonos) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle A_2 u, v\rangle &= -\imath\hbar \lim_{\omega \to +\infty} \left\{ \left[u\overline{v}\right]_0^{\omega} - \int_0^{\omega} u'\overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1 \right\} = \\ &= -\imath\hbar \left\{ \lim_{\omega \to +\infty} \left[u\overline{v}\right]_0^{\omega} - \int_0^{+\infty} u'\overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1 \right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} u\overline{(-\imath\hbar v')} \, \mathrm{d}\mu_1 = \langle u, A_2 v\rangle \quad (u, v \in \mathcal{D}(A_2)). \end{aligned}$$

- $k = 3$, akkor tetszőleges $u, v \in \mathcal{D}(A_3)$ esetén

$$\langle A_3 u, v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\imath\hbar u'\right) \overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{\alpha \to -\infty} \lim_{\omega \to +\infty} \int_{\alpha}^{\omega} \left(-\imath\hbar u'\right) \overline{v} \, \mathrm{d}\mu_1,$$

így parciálisan integrálva (u és v abszolút folytonos) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\langle A_3 u, v\rangle &= -\imath\hbar \lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\omega\to+\infty}\left\{[u\overline{v}]_\alpha^\omega - \int_\alpha^\omega u'\overline{v}\,\mathrm{d}\mu_1\right\} = \\ &= -\imath\hbar\left\{\lim_{\alpha\to-\infty}\lim_{\omega\to+\infty}[u\overline{v}]_\alpha^\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} u'\overline{v}\,\mathrm{d}\mu_1\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{(-\imath\hbar v')}\,\mathrm{d}\mu_1 = \langle u, A_3 v\rangle \quad (u, v\in\mathcal{D}(A_3)). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.1.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 < m \in \mathbb{R}$,

$$Au := -\frac{\hbar^2}{2m}u'' \quad (u\in\mathfrak{W}_{2,2}[a,b]:\ u(a) = 0 = u(b)),$$

akkor az $A \in L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ (lineáris) operátor (a **kvantummechanika Hamilton-operátora**) szimmetrikus!

Útm. Parciálisan integrálva (u' és v' abszolút folytonos) kapjuk, hogy tetszőleges $u, v \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle &= \int_a^b\left(-\frac{\hbar^2}{2m}u''\right)\overline{v}\,\mathrm{d}\mu_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[u'v\right]_a^b + \frac{\hbar^2}{2m}\int_a^b u'\overline{v'}\,\mathrm{d}\mu_1 = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left[u\overline{v'}\right]_a^b + \int_a^b u\overline{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}v''\right)}\,\mathrm{d}\mu_1 = \langle u, Av\rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.1.1. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$u(x) := x^2 - 1 \quad (x\in[-1,1]) \qquad \text{és} \qquad Af := (uf')' \quad (f\in\mathfrak{C}^2[-1,1]),$$

akkor az A (lineáris) operátor szimmetrikus!

Útm.

7.1.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ szimmetrikus operátorok, továbbá $\alpha\in\mathbb{R}$, úgy

1. ha A injektív, akkor A^{-1} szimmetrikus;
2. αA szimmetrikus;
3. $A + B$ szimmetrikus;
4. ha $[A, B] = O$, akkor AB szimmetrikus!

Útm.

7.1.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ szimmetrikus operátor, akkor a

$$h(x,y) := \langle Ax, y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{D}(A))$$

leképezés hermitikus forma!

Útm. Világos, hogy ha

- $x, y \in \mathcal{D}(A)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor
$$h(\alpha x, y) = \langle A(\alpha x), y\rangle = \langle \alpha(Ax), y\rangle = \alpha\langle Ax, y\rangle = \alpha h(x,y);$$
- $x, y, z \in \mathcal{D}(A)$, akkor
$$h(x+y, z) = \langle A(x+y), z\rangle = \langle Ax + Ay, z\rangle = \langle Ax, z\rangle + \langle Ay, z\rangle = h(x,z) + h(y,z);$$
- $x, y \in \mathcal{D}(A)$, akkor
$$h(x,y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \overline{\langle Ay, xx\rangle} = \overline{h(y,x)}. \quad \blacksquare$$

7.1.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, akkor igazak az alábbi állítások.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **esetén**
$$A \text{ szimmetrikus} \qquad \Longrightarrow \ (\not\Leftarrow) \qquad \langle Au, u\rangle \in \mathbb{R} \quad (u \in \mathcal{D}(A)).$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **esetén**
$$A \text{ szimmetrikus} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle Au, u\rangle \in \mathbb{R} \quad (u \in \mathcal{D}(A)).$$

Útm.

1. lépés. Ha A szimmetrikus, akkor tetszőleges $u \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\langle Au, u\rangle = \overline{\langle u, Au\rangle} = \overline{\langle Au, u\rangle},$$

azaz

$$\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R} \qquad (u \in \mathcal{D}(A));$$

2. lépés. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor pl.

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2, \qquad Au := (-u_2, u_1) \quad (u \in \mathcal{X})$$

esetén

$$\langle Au, u\rangle = -u_2u_1 + u_1u_2 = 0 \in \mathbb{R} \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

de ha

$$u := (2{,}3), \qquad v := (4{,}5),$$

akkor

$$\langle Au, v\rangle = -12 + 10 \neq -10 + 12 = \langle u, Av\rangle\,.$$

3. lépés. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor – alkalmazva a 7.1.5. gyakorló feladatbeli hermitikus formára a polarizációs azonosságot (vö. 1.4.7. feladat) –, tetszőleges

$$T \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad u, v \in \mathcal{D}(T)$$

esetén

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \frac{1}{4}\{\langle T(u+v), u+v\rangle - \langle T(u-v), u-v\rangle + \\ &+\imath\,\langle T(u+\imath v), u+\imath v\rangle - \imath\,\langle T(u-\imath v), u-\imath v\rangle\},\end{aligned}$$

és u-nak v-vel való felcserélésével, ill. a komplex konjugáltakra való áttéréssel

$$\begin{aligned}\langle u, Tv\rangle &= \frac{1}{4}\{\langle u+v, T(u+v)\rangle - \langle u-v, T(u-v)\rangle + \\ &+\imath\,\langle u+\imath v, T(u+\imath v)\rangle - \imath\,\langle u-\imath v, T(u-\imath v)\rangle\}\end{aligned}$$

adódik. Így, ha

$$\langle Aw, w\rangle \in \mathbb{R} \qquad (w \in \mathcal{D}(A)),$$

akkor

$$\langle Aw, w\rangle = \overline{\langle w, Aw\rangle} = \langle w, Aw\rangle \qquad (w \in \mathcal{D}(A)),$$

ezért a

$$T = A$$

esetre felírt fenti két összefüggés jobb oldalai egyenlőek, ennélfogva

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \qquad (u, v \in \mathcal{D}(A))$$

teljesül, azaz A szimmetrikus. ■

7.1.7. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ komplex euklideszi tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$, úgy

1. ha A szimmetrikus, akkor
$$\|(\lambda I - A)u\| \geq |\Im(\lambda)| \cdot \|u\| \qquad (\lambda \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cup \{0\},\ u \in \mathcal{D}(A));$$
2. ha
$$\|(\lambda I - A)u\| \geq |\Im(\lambda)| \cdot \|u\| \qquad (\lambda = \imath\mu\ (0 \neq \mu \in \mathbb{R}),\ u \in \mathcal{D}(A)),$$
akkor A szimmetrikus!

Útm.

1. Ha A szimmetrikus és $\lambda = 0$, akkor tirviálisan teljesül az egyenlőtlenség, ha pedig $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, akkor minden $u \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)u\|^2 &= \|((\Re(\lambda) + \imath\Im(\lambda))\, I - A)\, u\| = \|(\Re(\lambda)I - A)\, u + \imath\Im(\lambda)u\| = \\
&= \|(\Re(\lambda)I - A)\, u\|^2 + \langle(\Re(\lambda)I - A)\, u, \imath\Im(\lambda)u\rangle + \\
&\quad + \langle\imath\Im(\lambda)u, (\Re(\lambda)I - A)\, u\rangle + (\Im(\lambda))^2\, \|u\|^2 = \\
&= \|(\Re(\lambda)I - A)\, u\|^2 - \imath\Im(\lambda)\, \{\Re(\lambda)\langle u, u\rangle - \langle Au, u\rangle\} + \\
&\quad + \imath\Im(\lambda)\, \{\Re(\lambda)\langle u, u\rangle - \langle u, Au\rangle\} + (\Im(\lambda))^2\, \|u\|^2 = \\
&= \|(\Re(\lambda)I - A)\, u\|^2 + (\Im(\lambda))^2\, \|u\|^2 \geq \\
&= (\Im(\lambda))^2\, \|u\|^2.
\end{aligned}$$

2. Ha

$$0 \neq \mu \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lambda = \imath\mu,$$

akkor tetszőleges $u \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\|(\imath\mu I - A)u\|^2 = \mu^2\|u\|^2 + \|Au\|^2 + \imath\mu\, \{\langle Au, u\rangle - \langle u, Au\rangle\}\,.$$

Így

$$\|(\lambda I - A)u\| \geq |\Im(\lambda)| \cdot \|u\|$$

miatt

$$0 \leq \|Au\|^2 + \imath\mu\, \{\langle Au, u\rangle - \langle u, Au\rangle\} = \|Au\|^2 - 2\mu\Im(\langle Au, u\rangle),$$

azaz

$$\|Au\|^2 \geq 2\mu\Im(\langle Au, u\rangle),$$

ahonnan

$$\Im(\langle Au, u\rangle) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$$

következik, így (vö. 7.1.6. feladat) A szimmetrikus. ■

A 7.1.7. feladat következményeként elmondható, hogy ha

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \qquad (\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \quad \text{euklideszi tér}, \quad \|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle,$$

és az

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$$

operátor szimmetrikus, akkor $\lambda I - A$ injektív, $(\lambda I - A)^{-1}$ korlátos és

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\Im(\lambda)|} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}).$$

7.1.2. definíció. Legyen $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ szimmetrikus operátoror. Azt mondjuk, hogy

1. A **alulról**, ill. **felülről korlátos**, ha alkalmas $k \in \mathbb{R}$, ill. $K \in \mathbb{R}$ számmal

$$\langle Ax, x\rangle \geq k\langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{D}(A)),$$

   ill.

$$\langle Ax, x\rangle \leq K\langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{D}(A))$$

   teljesül. Ebben az esetben a k, ill. a K számot az A operátor **alsó**, ill. **felső korlát**jának nevezzük.

2. A **pozitív** ($A \geq 0$), ill. **negatív operátor** ($A \leq 0$), ha a $k := 0$ alsó korlátja A-nak, ill. $K := 0$ felső korláttja A-nak. Ha ezenfelül A még injektív is, akkor azt mondjuk, hogy A **pozitív definit**, ill. **negatív definit operátor**.

3. A **kisebb vagy egyenlő**, mint B, ha

$$\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B) \qquad \text{és} \qquad \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(B))$$

   teljesül.

7.1.1. példa. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi \in \mathfrak{C}[a, b]$, $\varphi \geq 0$, akkor

$$A_\varphi : L^2[a, b] \to L^2[a, b], \qquad A_\varphi f := \varphi f$$

pozitív operátor!

Világos, hogy A_φ szimmetrikus (vö. 7.1.2. feladat), továbbá bármely $u \in L^2[a, b]$ függvény esetén

$$\langle A_\varphi u, u\rangle_{L^2} = \int_a^b \varphi u\bar{u} = \int_a^b \varphi|u|^2. \quad \blacksquare$$

A 7.1.5. gyakorló feladatbeli skaláris szorzatra vonatkozó Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség a következő alakú:

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{D}(A)). \tag{7.1.1}$$

7.1.8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén $A, B \in L(\mathcal{X})$, A szimmetrikus és pozitív, továbbá AB szimmetrikus, akkor igaz az

$$|\langle (AB)x, x\rangle| \leq \|B\|\langle Ax, x\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

állítás (**Reid-egyenlőtlenség**)!

Útm.

1. lépés. Mivel A és AB szimmetrikus, ezért bármely $x, y \in \mathcal{X}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle AB^n x, y\rangle = \langle B^{n-1}x, ABy\rangle = \langle AB^{n-1}x, By\rangle = \langle B^{n-2}x, AB^2 yx\rangle = \ldots = \langle x, AB^n y\rangle,$$

azaz AB^n is szimmetrikus. Így a (7.1.1) Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} |\langle AB^n x, x\rangle| &=& |\langle x, AB^n x\rangle| = |\langle Ax, B^n x\rangle| \leq \sqrt{\langle Ax, x\rangle}\sqrt{\langle AB^n x, B^n x\rangle} = \\ &=& \sqrt{\langle Ax, x\rangle}\sqrt{\langle x, AB^{2n}x\rangle} = \sqrt{\langle Ax, x\rangle}\sqrt{\langle AB^{2n}x, x\rangle} \leq \\ &\leq& \dfrac{1}{2}\left\{\langle Ax, x\rangle + \langle AB^{2n}x, x\rangle\right\}. \end{array}\right.$$

2. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(**) \qquad |\langle ABx, x\rangle| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2^n}\langle AB^{2^n}x, x\rangle.$$

Valóban, $n = 1$ esetén $(**)$ nem más, mint $(*)$ egy speciális esete. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll $(**)$, akkor a $(*)$-ból adódó

$$\langle AB^{2^n}x, x\rangle \leq \frac{1}{2}\left\{\langle Ax, x\rangle + \langle AB^{2^{n+1}}x, x\rangle\right\}$$

egyenlőtlenséget $(**)$-ba helyettesítve látható, hogy $(**)$ igaz bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

3. lépés. $\|B\| = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló. Ha $\|B\| = 1$, akkor

$$\langle AB^{2^n}x, x\rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|^{2^n} \cdot \|x\|^2 = \|A\| \cdot \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

ahonnan

$$\lim\left(\frac{1}{2^n}\langle AB^{2^n}x, x\rangle\right) = 0$$

következik. Így

$$(***) \qquad |\langle ABx, x\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\langle Ax, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Ha pedig $\|B\| > 0$, akkor $\left\|\dfrac{B}{\|B\|}\right\| = 1$, így a $\dfrac{B}{\|B\|}$ operátorra alkalmazható a $(***)$ egyenlőtlenség. ■

7.1.9. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ operátorok esetén mutassuk meg, hogy igaz a

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Bv\rangle \quad (u, v \in \mathcal{X}) \qquad \Longrightarrow \qquad A, B \in L(\mathcal{X})$$

implikáció (**Hellinger-Toeplitz-tétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha

$$u_n \in \mathcal{X} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(u_n) = u \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lim(Bu_n) = v \in \mathcal{X},$$

akkor bármely $w \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle w, v \rangle = \lim\left(\langle w, Bu_n \rangle\right) = \lim\left(\langle Aw, u_n \rangle\right) = \langle Aw, u \rangle = \langle w, Bu \rangle,$$

azaz

$$v = Bu,$$

így $\Gamma(B)$ zárt, amiből $B \in L(\mathcal{X})$ következik (vö. 6.2.1. tétel).

2. lépés. Hasonlóan látható be $\Gamma(A)$ zártsága. ■

A 7.1.9. feladatbeli állítás az egyenletes korlátosság tételének felhasználásával is belátható. Bármely $y \in B_1(0)$ esetén a

$$\varphi_y(x) := \langle x, By \rangle \qquad (x \in \mathcal{X})$$

nyilvánvalóan lineáris leképezésre

$$|||\varphi||| = \|By\|,$$

ahol $\|\cdot\|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$ (vö. 4.2.31. feladat). Az

$$\mathcal{O} := \{\varphi_y : \mathcal{X} \to \mathbb{K} : \; y \in B_1(0)\}$$

halmaz pontonként korlátos, hiszen a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával a tetszőleges $y \in B_1(0)$ esetén fennálló

$$|\varphi_y(x)| = |\langle x, By \rangle| = |\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|Ax\|$$

becsléshez jutunk. Az 5.1.4. feladatbeli állítás következményeként $\mathcal{O}$ egyenletesen korlátos, azaz

$$|||B||| = \sup\{\|By\| \in \mathbb{R} : \; y \in B_1(0)\} = \sup\{|||\varphi_y||| \in \mathbb{R} : \; y \in B_1(0)\} < +\infty.$$

Ha a 7.1.9. feladatbeli állításban $A = B$, akkor a Hellinger-Toeplitz tétel következményeként elmondható, hogy ha A valamely Hilbert-téren értelmezett szimmetrikus, lineáris operátor, akkor A szükségképpen korlátos, ill. folytonos, azaz nem-korlátos, szimmetrikus operátor nem lehet az egész téren értelmezett operátor.

7.1.10. feladat. Legyen

$$M:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K},\qquad M:=[\alpha_{mn}]_{m,n\in\mathbb{N}}$$

olyan hermitikus végtelen márix, hogy az

$$Ax:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}x_n\right)_{m\in\mathbb{N}}\qquad (x=(x_n)\in l_2)$$

operátor képhalmaza l_2, azaz

$$\overline{\alpha_{nm}}=\alpha_{mn}\qquad (m,n\in\mathbb{N}),\qquad \text{és}\qquad Ax\in l_2\quad (x\in l_2)$$

teljesüljön. Igazoljuk, hogy A folytonos!

Útm. Világos, hogy A lineáris, továbbá

$$Ax\in l_2\quad (x\in l_2)\qquad\Longleftrightarrow\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}x_n\right|^2\in\mathbb{R}$$

következtében bármely $x,y\in l_2$ esetén

$$\begin{aligned}\langle x,Ay\rangle_{l_2} &= \sum_{m=1}^{\infty}x_m\overline{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}y_n}=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{nm}\overline{y_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{nm}x_m\overline{y_n}=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{nm}x_m\overline{y_n}=\langle Ax,y\rangle_{l_2}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy A az egész l_2 téren értelmezett szimmetrikus operátor, így a Hellinger-Toepliz-tétel (vö. 7.1.9. feladat) következtében folytonos is. ■

7.2. Adjungált operátorok

7.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér és $A\in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ operátor esetében pontosan egy olyan $B\in L(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ operátor van, amelyre

$$\langle Au,v\rangle_{\mathcal{Y}}=\langle u,Bv\rangle_{\mathcal{X}}\quad (u\in\mathcal{X},\ v\in\mathcal{Y})$$

és B normájára

$$\|B\|=\|A\|$$

teljesül!

Útm. Tetszőleges $v\in\mathcal{Y}$ esetén az

$$f_v:\mathcal{X}\to\mathbb{K},\qquad f_v(u):=\langle Au,v\rangle_{\mathcal{Y}}$$

leképezésre $f_v\in\mathcal{X}^*$, ui.

$$f_v=\langle\cdot,v\rangle_{\mathcal{Y}}\circ A.$$

Ezért (vö. **??**. tétel) pontosan egy olyan $\alpha \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$\langle u, \alpha \rangle_{\mathcal{X}} = f_v(u) = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{Y}} \quad (u \in \mathcal{X}).$$

Így, ha

$$Bv := \alpha \qquad (v \in \mathcal{Y}),$$

akkor $B \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ és

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup\{\|Bv\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \ \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1\} = \sup\{|\langle u, Bv \rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1, \ \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1\} = \\ &= \sup\{|\langle Au, v \rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1, \ \|v\|_{\mathcal{Y}} \leq 1\} = \sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1\} = \\ &= \|A\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Világos, hogy ha az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorról csak annyit követelünk meg, hogy lineáris legyen: $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, de a korlátosságot nem írjuk elő, akkor nem egyetlen, az

$$\langle Au, v \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle u, Bv \rangle_{\mathcal{X}} \qquad (u \in \mathcal{D}(A), \ v \in \mathcal{D}(B))$$

tulajdonsággal rendelkező (A, B) operátorpár létezhet, ui. ha pl.

$$\mathcal{D}(B) = \{0 \in \mathcal{Y}\},$$

akkor tetszőleges (A, B) pár rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Ha az (A, B) operátorpár rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor tetszőleges $v \in \mathcal{D}(B)$ esetén az

$$f_v : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{K}, \qquad f_v(u) := \langle Au, v \rangle_{\mathcal{Y}}$$

(lineáris) funkcionál folytonos, ui. minden $u \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$f_v(u) = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle u, Bv \rangle_{\mathcal{X}}.$$

Így, ha $\mathcal{D}(A)$ az $\mathcal{X}$-nek sűrű altere:

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$$

(A ún. **sűrűn értelmezett operátor**), akkor van f_v-nek egyértelmű kiterjesztése az

$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{D}(A)}$$

térre (vö. 4.5.1. feladat), azaz pontosan egy olyan (v, ill. A meghatározta) $w \in \mathcal{X}$ van, hogy

$$\langle Au, v \rangle_{\mathcal{Y}} = f_v(u) = \langle u, w \rangle_{\mathcal{X}} \qquad (u \in \mathcal{D}(A)).$$

Ez motiválja a következő fogalom bevezetését.

7.2.1. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér,

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X},$$

akkor a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^*) &:= \{v \in \mathcal{Y} : \ \mathcal{D}(A) \ni u \mapsto \langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}} \text{ folytonos}\} = \\ &= \{v \in \mathcal{Y} : \ \exists w \in \mathcal{X} : \ \langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle u, w\rangle_{\mathcal{X}} \ (u \in \mathcal{D}(A))\}, \end{aligned}$$

$$A^*v := w, \quad (v \in \mathcal{D}(A^*), \text{ ha } \langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle u, w\rangle_{\mathcal{X}} \ ((u \in \mathcal{D}(A)))$$

lineáris operátort az A operátor **adjungált**jának nevezzük.

Világos, hogy

1. az A^* adjungált operátor maximális abban az értelemben, hogy minden, a fenti tulajdonsággal rendelkező (A, B) operátorpár esetén
$$B \subset A^*$$
teljesül;
2. ha A sűrűn definiált operátor, akkor
$$A \text{ szimmetrikus} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset A^*.$$
3. ha
$$A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) : \qquad \overline{\mathcal{D}(A)} = \overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{X},$$
akkor
$$A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad B^* \subset A^*,$$
ui. a
$$\langle Bu, v\rangle = \langle u, B^*v\rangle \qquad (u \in \mathcal{D}(B), v \in \mathcal{D}(B^*))$$
egyenlőség következménye
$$\langle Au, v\rangle = \langle u, B^*v\rangle \qquad (u \in \mathcal{D}(A)),$$
azaz
$$A^*v = B^*v \qquad (v \in \mathcal{D}(B)).$$
4. az A^* operátor lineáris:
$$A^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}),$$
ui. ha $\alpha \in \mathbb{K}$ és
$$\langle Au, v_k\rangle = \langle u, w_k\rangle \qquad (u \in \mathcal{D}(A)) \quad (k \in \{1,2\}),$$

akkor

$$\langle Au, v_1 + \alpha v_2 \rangle = \langle Au, v_1 \rangle + \overline{\alpha}\langle Au, v_3 \rangle = \langle u, v_1 + \alpha v_2 \rangle \qquad (u \in \mathcal{D}(A)),$$

így, ha

$$v_k \in \mathcal{D}(A^*) \qquad (k \in \{1,2\}),$$

akkor

$$v_1 + \alpha v_2 \in \mathcal{D}(A^*) \qquad \text{és} \qquad A^*(v_1 + \alpha v_2) = A^* v_1 + \alpha A^* v_2.$$

7.2.1. példa. Ha adott $u \in l_\infty$ esetén

$$A_u : l_2 \to l_2, \qquad A_u x := (u_n x_n),$$

akkor az A_u folytonos, lineáris operátor adjungáltja az

$$(A_u)^* = A_{\overline{u}}$$

operátor, ui. bármely $x, y \in l_2$ és $z := A^*{}_u y$ esetén

$$\langle (u_n x_n), (y_n) \rangle = \langle A_u x, y \rangle = \langle x, A_u^* y \rangle = \langle (x_n), (z_n) \rangle$$

miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{z_n}.$$

Ez pedig akkor teljesül tetszőleges $x \in l_2$-re, ha

$$\overline{z} = u\overline{y},$$

azaz

$$z = \overline{u} y.$$

7.2.2. példa. Az

$$A : l_2 \to l_2, \qquad Au := (0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$$

folytonos lineáris operátor (vö. 4.2.41. feladat) adjungáltja az

$$A^* : l_2 \to l_2, \quad Av := (v_1, v_2, \ldots)$$

operátor, ui. tetszőleges $u, v \in l_2$ esetén

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} \overline{v_n} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \overline{v_{m+1}} = \langle u, A^* v \rangle.$$

7.2.3. példa. Ha

$$\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R}), \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2} \qquad \text{és} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

akkor az

$$A_\alpha u := u(\cdot - \alpha) \qquad (u \in \mathcal{X})$$

korlátos, lineáris operátor adjungáltja az

$$(A_\alpha)^* = A_{-\alpha}$$

operátor, ui. tetszőleges $u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle u, A_{-\alpha} v\rangle = \int u\overline{v(\cdot + \alpha)}\,\mathrm{d}\mu_1 = \int u(\cdot - \alpha)\overline{v}\,\mathrm{d}\mu_1 = \langle A_\alpha u, v\rangle.$$

7.2.4. példa. Megmutatható, hogy ha

$$Au := -\imath\hbar u' \qquad (u \in \mathfrak{W}_{1,2}[a,b] : \; u(a) = 0 = u(b))\,,$$

akkor az

$$A \in \mathfrak{L}\left(L^2[a,b] \curvearrowright L^2[a,b]\right)$$

operátorra:

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2[a,b],$$

és A adjungáltja az

$$A^* v := -\imath\hbar v' \qquad (v \in \mathfrak{W}_{1,2}[a,b])$$

operátor.

7.2.2. feladat. Lássuk be, hogy ha

$$K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$$

folytonos függvény,

$$\mathcal{X} := L^2[a,b] \qquad (\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2}),$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Au)(x) := \int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [a,b])$$

(lineáris) operátor korlátos, és A adjungáltja az

$$A^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (A^*v)(y) := \int_a^b \overline{K(x,y)}v(x)\,\mathrm{d}x \quad (y \in [a,b])$$

operátor!

Útm.

1. lépés. Ha

$$u \in L^2[a,b],$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség (vö. 11.4.11/4. tétel) következtében bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L^2}^2 &= \int_a^b \left|\int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)u(y)|\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y \int_a^b |u(y)|^2\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \cdot \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

2. lépés. A Fubini-tétel alkalmazásával (vö. 11.4.14. tétel) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle &= \int_a^b Af(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int_a^b f(y)\left(\overline{\int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)\,\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \langle f, A^*g\rangle \quad (f,g \in \mathcal{X}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$Af(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (f \in L^2[0,1],\ x \in [0,1])$$

(folytonos, lineáris) operátor adjungáltja az

$$A^*f(x) := \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (f \in L^2[0,1],\ x \in [0,1])$$

operátor!

Útm. Ha

$$f,g \in L^2[0,1],$$

akkor a Fubini-tétel alkalmazásával (vö. 11.4.14. tétel) azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_0^1 Af(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^1 f(y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\left(\overline{\int_y^1 g(x)\,\mathrm{d}x}\right)\,\mathrm{d}y = \\
&= \langle f, A^*g\rangle \quad (f, g \in \mathcal{X}). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7.2.4. feladat. Határozzuk meg a 4.2.3. feladatbeli A operátor adjungáltját a $p = 2$ esetben!

Útm. Ha

$$u, v \in L^2[0,1]$$

és

$$A^*v(x) := \int_0^1 \left(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)y - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x)y^2\right)v(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$
\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^{1/2} xu(s)\,\mathrm{d}s - \int_{1/2}^1 x^2u(s)\,\mathrm{d}s\right)v(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s)xu(s) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}x^2u(s)\right)v(x)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(s)x - \chi_{[\frac{1}{2},1]}x^2v(x)\,\mathrm{d}x\right)u(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \langle u, A^*v\rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7.2.5. feladat. Mutassuk meg, hogy adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és $v, w \in \mathcal{X}$ esetén az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Au := \langle u, v\rangle w$$

folytonos, lineáris operátor adjungáltja az

$$A^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad A^*z := \langle z, w\rangle v$$

operátor!

Útm. Minden $u, v, w, z \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle Au, z\rangle = \langle\langle u, v\rangle w, z\rangle = \langle u, v\rangle \cdot \langle w, z\rangle = \langle u, v\rangle \cdot \overline{\langle z, w\rangle} = \langle u, \langle z, w\rangle v\rangle = \langle u, A^*z\rangle. \quad \blacksquare$$

7.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi \in \mathfrak{C}[0,1]$, akkor az

$$A_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1], \qquad A_\varphi f := \varphi f$$

(folytonos, lineáris) operátorra

$$A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$$

teljesül!

Útm. Ha

$$f, g \in L^2[0,1] \qquad \text{és} \qquad h := A_\varphi^* g,$$

akkor

$$\langle A_\varphi f, g \rangle = \langle f, h \rangle,$$

azaz

$$\int \varphi f \overline{g} = \int f \overline{h}.$$

Az utóbbi egyenlőség pedig biztosan fennáll, ha

$$\overline{h} = \overline{g}\varphi,$$

azaz

$$h = \overline{\varphi} g.$$

Ezért az adjungált egyértelműsége következtében

$$A_\varphi^* g = h = \overline{\varphi} g,$$

és így

$$A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}. \quad \blacksquare$$

7.2.7. feladat. Mutassuk meg, hogy

1. ha

$$Af(x) := \sqrt{2} f(2x) \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$A \neq A^* \qquad \text{és} \qquad A^* A = AA^* = I;$$

2. ha

$$Bf(x) := \sin(x) f(x + 2\pi) \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$B \neq B^*, \qquad B^* B = BB^* \neq I$$

teljesül!

Útm.

1. Mivel bármely $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, ill. μ_1-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle Af, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} f(2x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

ezért

$$A^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}),\ \mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

így

$$A \neq A^*$$

és

$$A^* A = AA^* = I.$$

2. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\sin(x)| \leq 1,$$

ezért B korlátos és bármely $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ esetén

$$\langle Af, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) f(x + 2\pi)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\sin(t) g(t - 2\pi)}\,\mathrm{d}t,$$

ezért

$$B^* f(x) = \sin(x) f(x - 2\pi) \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}),\ \mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

így

$$B^* \neq B,$$

és bármely $f \in L^2(\mathbb{R})$, ill. μ_1-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$B^* B f(x) = \sin(x)\left(\sin(x - 2\pi) f(x + 2\pi - 2\pi)\right) = \sin^2(x) f(x),$$

ill.

$$BB^* f(x) = \sin(x)\left(\sin(x + 2\pi) f(x - 2\pi + 2\pi)\right) = \sin^2(x) f(x),$$

ahonnan

$$B \neq B^*$$

és

$$B^* B = BB^* \neq I$$

következik. ■

7.2.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}), \qquad (\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Z}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Z}})$$

Hilbert-tér, továbbá

$$A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) \qquad \text{és} \qquad C \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{Z}),$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha
$$\overline{D(A)} = \mathcal{X},$$
akkor bármely $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*,$$
ill. ($\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén)
$$(\alpha I + A)^* = \overline{\alpha} I + A^*.$$

2. Ha
$$\overline{\mathcal{D}(CA)} = \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathcal{D}(C)} = \mathcal{Y},$$
akkor
$$(CA)^* \supset A^* C^*,$$
sőt, ha még $C \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ is teljesül, akkor
$$(CA)^* = A^* C^*.$$

3. Ha
$$\overline{\mathcal{D}(A + B)} = \mathcal{X},$$
akkor
$$(A + B)^* \supset A^* + B^*,$$
sőt, ha még $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is teljesül, akkor
$$(A + B)^* = A^* + B^*.$$

4. $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$.

5. $\Gamma(A^*)$ zárt.

6. Ha A injektív és
$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y},$$
akkor A^* is injektív és
$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

7. $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Longleftrightarrow A^* \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, és az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ esetben
$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Útm.

1. 2. és 3. triviális következménye.
2. Mivel
$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{D}(CA)} \subset \overline{\mathcal{D}(A)},$$
ezért
$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X},$$
így ha $y \in \mathcal{D}(A^*C^*)$, akkor
$$\langle A^*C^*y, x\rangle = \langle C^*y, Ax\rangle = \langle y, CAx\rangle \qquad (x \in \mathcal{D}(CA)),$$
azaz
$$y \in \mathcal{D}((CA)^*) \qquad \text{és} \qquad (CA)^*y = A^*C^*y,$$
ahonnan
$$A^*C^* \subset (CA)^*$$
következik. Ha még $C \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ is teljesül, akkor már csak azt kell belátni, hogy
$$\mathcal{D}((CA)^*) \subset \mathcal{D}(A^*C^*).$$
Valóban, ha $y \in \mathcal{D}((CA)^*)$, akkor bármely
$$x \in \mathcal{D}(CA) = \mathcal{D}(A)$$
esetén
$$\langle (CA)^*y, x\rangle = \langle y, CAx\rangle = \langle C^*y, Ax\rangle,$$
tehát $C^*y \in \mathcal{D}(A^*)$ és így $y \in \mathcal{D}(A^*C^*)$.
3. Mivel
$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A+B) \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathcal{D}(A+B)} = \mathcal{X},$$
ezért ha
$$y \in \mathcal{D}(A^* + B^*) = \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(B^*),$$
akkor
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(A)) \qquad \text{és} \qquad \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(B)).$$
Így
$$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)),$$
ahonnan
$$y \in \mathcal{D}((A+B)^*) \qquad \text{és} \qquad (A+B)^*y = (A^* + B^*)y$$
következik. Ez azt jelenti, hogy
$$A^* + B^* \subset (A+B)^*.$$

Ha még $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is teljesül, akkor $\mathcal{D}(B^*) = \mathcal{Y}$ miatt már csak azt kell belátni, hogy

$$\mathcal{D}((A+B)^*) \subset \mathcal{D}(A^* + B^*) = \mathcal{D}(A^*).$$

Valóban, ha $y \in \mathcal{D}((A+B)^*)$, akkor bármely

$$x \in \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$$

esetén

$$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, (A+B)^* y\rangle.$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle,$$

ezért

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, (A+B)^* y - B^* y\rangle,$$

ahonnan $y \in \mathcal{D}(A^*)$, azaz

$$\mathcal{D}((A+B)^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$$

következik.

4. $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$, ui.

$$\begin{array}{lcl} v \in \mathcal{N}(A^*) & \Longleftrightarrow & \underbrace{v \in \mathcal{D}(A^*) : \ A^* v = 0 \in \mathcal{X}} \\ & & \left(\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}\right) \Updownarrow \\ v \in \mathcal{R}(A)^{\perp} & \Longleftrightarrow & \overbrace{\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle = 0 \quad (u \in \mathcal{D}(A))}. \end{array}$$

5. A $\Gamma(A^*)$ halmaz zártsága azt jelenti, hogy minden olyan

$$v_n \in \mathcal{D}(A^*) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén, amelyre

$$\lim(v_n) = v \qquad \text{és} \qquad \lim(A^* v_n) = w$$

teljesül, igaz a $w = A^* v$ egyenlőség. Mivel a skaláris szorzat folytonos, ezért

$$\langle Au, v\rangle = \langle Au, \lim(v_n)\rangle = \lim\left(\langle Au, v_n\rangle\right) = \lim\left(\langle u, A^* v_n\rangle\right) = \langle u, \lim(A^* v_n)\rangle = \langle u, w\rangle.$$

6. $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{Y}^{\perp} = \{0 \in \mathcal{Y}\}$, tehát A^* injektív. Mivel

$$\begin{array}{c} w \in \mathcal{D}\left((A^*)^{-1}\right) : \ (A^*)^{-1} w = u \ \ (w \in \mathcal{X}, \ v \in \mathcal{Y}) \\ \Updownarrow \\ v \in \mathcal{D}(A^*) \text{ és } A^* v = w \\ \Updownarrow \\ \langle \widetilde{u}, v\rangle = \langle A^{-1}\widetilde{u}, w\rangle \ \ \left(\widetilde{u} \in \mathcal{D}\left(A^{-1}\right)\right) \\ \Updownarrow \\ \langle Au, v\rangle = \langle u, w\rangle \ (u \in \mathcal{D}(A)) \\ \Updownarrow \left(\text{ui. } \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y} \text{ miatt } \overline{\mathcal{D}\left(A^{-1}\right)} = \mathcal{Y}\right) \\ w \in \mathcal{D}\left(\left(A^{-1}\right)^*\right) : \ \left(A^{-1}\right)^* w = u \end{array}$$

ezért

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

7. Ez a 7.2.1. feladatbeli állítás triviális következménye. ■

Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér, továbbá

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*, \qquad \text{ill.} \qquad \psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}^*$$

a 4.4.12. feladatbeli izometria, akkor tetszőleges $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor esetén

$$A^* = \varphi^{-1} \circ A' \circ \psi.$$

7.2.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, akkor az identikus operátorra

$$I^* = I$$

teljesül!

Útm. Ha $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Iy\rangle. \quad \blacksquare$$

7.2.10. feladat. Mutassuk meg, hogy

1. a 7.2.3. feladatbeli A operátorra

$$A \neq A^*, \qquad AA^* \neq I, \qquad AA^* \neq A^*A;$$

2. ha

$$Bf(x) := \int_x^1 y^2 \left(\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}y \qquad (f \in L^2[0,1],\ x \in [0,1]),$$

akkor

$$B = B^*, \qquad BB^* \neq I$$

teljesül!

Útm.

1. Ha

$$f(x) := 1 \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$Af(x) = x, \qquad A^*f(x) = 1 - x, \qquad AA^*f(x) = x - \frac{x^2}{2}, \qquad A^*Af(x) = \frac{1-x^2}{2}.$$

2. Ha
$$\varphi(t) := t^2 \qquad (t \in [0,1]),$$
és
$$M_\varphi f := \varphi f \qquad (f \in L^2[0,1]),$$
akkor $M_\varphi^* = M_\varphi$ (vö. 7.2.6. feladat) és
$$B = A^* M A,$$
így (vö. 7.2.8/2. feladat)
$$B^* = (A^* M A)^* = A^* M^* A^{**} = A^* M A = B.$$
Ha
$$f(x) := 1, \quad g(x) := x^4 \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor bármely $x \in [0,1]$ esetén
$$Af(x) = \int_x^1 y^2 \left(\int_0^y 1 \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}y = \int_x^1 y^2 \int_0^y 1 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}y = \int_x^1 y^3 \,\mathrm{d}y = \frac{1-x^4}{4},$$
ill.
$$A^*Af(x) = A(Af)(x) = \frac{1}{4}Af(x) - \frac{1}{4}Ag(x).$$
Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén
$$Ag(x) = \int_x^1 y^2 \int_0^y u^4 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}y = \int_x^1 \frac{y^7}{5} \,\mathrm{d}y = \frac{1-x^8}{40},$$
ezért
$$A^*Af(x) = \frac{1-x^4}{16} - \frac{1-x^8}{160} \neq f(x)$$
azaz $A^*A \neq I$. ■

7.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér esetén azt mondjuk, hogy az
$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X}), \quad \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$$
operátor **önadjungált** vagy **hermitikus**, ha $A^* = A$.

Világos, hogy

1. ha A önadjungált és injektív, akkor A^{-1} is önadjungált;
2. ha A önadjungált, akkor A maximálisan szimmetrikus (vö. 7.1.1. definíció), azaz ha B szimmetrikus és $A \subset B$, akkor $A = B$. Ha ui. $A \subset B$, akkor mivel $B^* \subset A^*$, ezért
$$A \subset B \subset B^* \subset A^*,$$
így $A = A^*$ miatt $A = B$.

3. ha $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$ és A szimmetrikus, akkor A korlátos (vö. 7.1.9. feladat), és így önadjungált.

7.2.5. példa. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor a

$$B := A + A^*$$

operátor hermitikus, ui.

$$B^* = (A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^* = B.$$

7.2.6. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{K}^n$, $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Au := Mu = \left[\sum_{k=1}^{n} M_{ik}u_k\right]_{i\in\{1,\ldots,n\}}.$$

operátor pontosan akkor önadjungált, ha az M mátrix önadjungált, ui.

1. mivel tetszőleges $u, v \in \mathcal{X}$ esetén egyrészt

$$\langle Au, v\rangle = \langle Mu, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} M_{ik}u_k\right)\overline{v_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ik}u_k\overline{v_i},$$

   másrészt pedig

$$\begin{aligned}\langle u, Av\rangle &= \langle u, Mv\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{ki}v_i\right)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{ki}}\,\overline{v_i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{ki}}u_k\overline{v_i},\end{aligned}$$

   ezért az $M^* = M$ egyenlőségből $A^* = A$ következik.

2. ha $i, k \in \{1,\ldots,n\}$, akkor az

$$u := e_k, \qquad v := e_i$$

   kanonikus bázisvektorokkal

$$\langle Ae_k, e_i\rangle = M_{ik} \qquad \text{és} \qquad \langle e_k, Ae_i\rangle = \overline{M_{ki}},$$

   ezért

$$A^* = A \qquad \Longrightarrow \qquad M^* = M.$$

7.2.7. példa. Ha adott $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér és $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ függvény esetén

$$A_\varphi : L^2 \to L^2, \qquad A_\varphi u := \varphi u,$$

akkor az A_φ (lineáris) operátor önadjungált.

7.2.8. példa. Megmutatható, hogy ha $1 \neq z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1$,

$$A_z u := -\imath\hbar u' \qquad \left(u \in \mathfrak{W}_{1,2}[a,b] :\ u(b) = zu(a)\right),$$

akkor az

$$A_z \in L^2[a,b] \to L^2[a,b]$$

(lineáris) operátor önadjungált.

7.2.9. példa. Ha $0 < m \in \mathbb{R}$,

$$Au := -\frac{\hbar^2}{2m}u'' \qquad \left(u \in \mathfrak{W}_{2,2}[a,b] :\ u(a) = 0 = u(b)\right),$$

akkor az

$$A \in L^2[a,b] \to L^2[a,b]$$

(lineáris) operátor önadjungált.

7.2.10. példa. Ha $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{L^2}$, akkor az

$$Au := u(-\cdot) \quad (u \in \mathcal{X})$$

(lineáris) operátor (**a kvantummechanika paritás-operátora**) korlátos, ui. minden $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L^2}^2 &= \langle Au, Au\rangle_{L^2} = \int u(-\cdot)\overline{u(-\cdot)}\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x)\overline{u(-x)}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} u(t)\overline{u(t)}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{u(t)}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \int u\overline{u}\,\mathrm{d}\mu_1 = \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

és önadjungált, ui.

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle_{L^2} &= \int Au\overline{v}\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} u(t)\overline{v(-t)}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\overline{v(-t)}\,\mathrm{d}\mu_1(t) = \int u\overline{Av}\,\mathrm{d}\mu_1 = \langle u, Av\rangle \quad (u, v \in \mathcal{X}). \end{aligned}$$

7.2.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := l_2$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{l_2}$, $a = (a_n) \in \mathcal{X}$, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad A(x_n) := (a_n x_n)$$

operátor pontosan akkor hermitikus, ha a valós sorozat!

Útm. Világos, hogy A

- lineáris, hiszen bármely $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén
$$\begin{aligned} A(x + \alpha y) &= (a_n(x_n + \alpha y_n)) = (a_n x_n + \alpha a_n y_n) = (a_n x_n) + \alpha(a_n y_n) = \\ &= Ax + \alpha A y. \end{aligned}$$
- korlátos, hiszen $\lim(a_n) = 0$, így bármely $x = (x_n) \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|Ax\|^2_{\mathcal{X}} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \cdot |x_n|^2 \le \max\{|a_n|^2 \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} \cdot \|x\|^2_{\mathcal{X}}.$$

Ha A önadjungált és $e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\langle Ae_n, e_n \rangle = a_n \|e_n\|^2_{\mathcal{X}} = a_n = \langle e_n, Ae_n \rangle = \overline{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$a_n = \overline{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Ha

$$a_n \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{a_n y_n} = \langle x, Ay \rangle,$$

azaz A önadjungált. ■

7.2.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor pontosan egy olyan $S, T \in L(\mathcal{X})$ hermitikus operátorpár van, amelyre fennáll az

$$A = S + \imath T$$

egyenlőség!

Útm. Ha

$$S := \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad T := \frac{1}{2\imath}(A - A^*),$$

akkor

$$S + \imath T = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A,$$

így

$$S^* = \frac{1}{2}(A^* + A) = S \qquad \text{és} \qquad T^* = -\frac{1}{2\imath}(A^* - A) = \frac{1}{2\imath}(A - A^*) = T.$$

Ha valamely $\widetilde{S}, \widetilde{T} \in L(\mathcal{X})$ operátorpárra

$$A = \widetilde{S} + \imath\widetilde{T},$$

akkor

$$O = S - \widetilde{S} + \imath(T - \widetilde{T}), \qquad \text{ill.} \qquad O = O^* = S - \widetilde{S} - \imath(T - \widetilde{T})$$

következtében

$$S = \widetilde{S} \qquad \text{és} \qquad T = \widetilde{T}. \quad \blacksquare$$

7.2.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}), \qquad (\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Z}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Z}})$$

Hilbert-tér, úgy

1. ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor
$$(A^*)^* = A;$$
2. ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor
$$\|A^*A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|;$$
3. ha $A \in L(\mathcal{X})$ és $A^* = A$, akkor A spektrálsugarára:
$$\rho(A) = \|A\|;$$
4. a
$$\varphi : L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}), \qquad \varphi(A) := A^*$$
leképezés folytonos!

Útm.

1. Minden $u \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{Y}$ esetén
$$\langle v, (A^*)^*u\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle A^*v, u\rangle_{\mathcal{X}} = \overline{\langle u, A^*v\rangle_{\mathcal{X}}} = \overline{\langle Au, v\rangle_{\mathcal{Y}}} = \langle v, Au\rangle_{\mathcal{Y}}.$$
2. Pl.
$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$$
és tetszőleges $u \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|Au\|_{\mathcal{Y}}^2 = \langle Au, Au\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle A^*Au, u\rangle_{\mathcal{X}} \leq \|A^*Au\|_{\mathcal{X}} \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} \leq \|A^*A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}}^2.$$
3. Ha $A = A^*$, akkor az előző állítás következtében
$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2,$$
és (teljes indukcióval) könnyen belátható, hogy
$$\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\lim\left(\sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|}\right) = \lim\left(\sqrt[2^n]{\|A\|^{2^n}}\right) = \|A\|,$$

így

$$\rho(A) = \lim\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) = \|A\|.$$

4. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $A, B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ olyan, hogy $\|A - B\| < \varepsilon$, akkor

$$\|\varphi(A) - \varphi(B)\| = \|A^* - B^*\| = \|(A-B)^*\| = \|A - B\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

7.2.14. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér,

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}): \qquad \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X},$$

továbbá

$$(*) \qquad \|(\imath\mu I - A)\,u\| \geq |\mu| \cdot \|u\| \qquad (\mu \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{D}(A))$$

és

$$(**) \qquad \mathcal{R}(\imath I - A) = \mathcal{R}(-\imath I - A) = \mathcal{X},$$

akkor A önadjungált!

Útm. Tudjuk (vö. 7.1.7. feladat), hogy a $(*)$ azzal egyenértékű, hogy A szimmetrikus, és így $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$ miatt $A \subset A^*$. Azt kell tehát megmutatni, hogy $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$, innen már következik, hogy $A = A^*$. Ha $u \in \mathcal{D}(A^*)$, akkor $(*)$ és $(**)$ következtében $\imath I - A$ injektív és $\mathcal{D}(\imath I - A) = \mathcal{X}$. Így, ha

$$v := (\imath I - A)^{-1}(\imath I - A^*)u,$$

akkor

$$v \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*) \qquad \text{és} \qquad A^*v = Av.$$

Ezért

$$(\imath I - A^*)(u - v) = (\imath I - A^*)u - (\imath I - A^*)v = (\imath I - A)u - (\imath I - A)v = 0,$$

azaz

$$u - v \in \mathcal{N}(\imath I - A^*) = \mathcal{R}(-\imath I - A)^{\perp} = \mathcal{X}^{\perp} = \{0\},$$

ezért $u = v \in \mathcal{D}(A)$. $\blacksquare$

Megmutatható, hogy a második feltételben $\imath$, ill. $-\imath$ helyett olyan (λ_+, λ_-) komplex számpár is írható, amelyre

$$\Re(\lambda_+) > 0 \qquad \text{és} \qquad \Re(\lambda_-) < 0$$

teljesül.

7.2.15. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $A \in L(\mathcal{X})$ önadjungált operátor, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén fennáll a

$$\|(A + \imath I)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

egyenlőség!

Útm. Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned}
\|(A+\imath I)x\|^2 &= \langle (A+\imath I)x, (A+\imath I)x\rangle = \\
&= \langle Ax, Ax\rangle + \langle Ax, \imath x\rangle + \langle \imath x, Ax\rangle + \langle \imath x, \imath x\rangle = \\
&= \|Ax\|^2 - \imath\langle Ax, x\rangle + \imath\langle x, Ax\rangle - \imath^2\|x\|^2 = \\
&= \|Ax\|^2 + \|x\|^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.2.16. feladat. Tetszőleges $a > 0$ esetén határozzuk meg az

$$A : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty), \qquad Ax(t) :\equiv x(at)$$

operátor adjungáltját!

Útm. Mivel bármely $x, y \in L^2(0,+\infty)$ esetén

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^{+\infty} x(at)y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x(s)\frac{1}{a}y\left(\frac{s}{a}\right)\,\mathrm{d}s = \langle x, A^*y\rangle,$$

ezért

$$A^*y(t) \equiv \frac{1}{a}y\left(\frac{t}{a}\right). \quad \blacksquare$$

7.2.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A^*))^\perp$.
2. $\mathcal{N}(A^*) = (\mathcal{R}(A))^\perp$.
3. $\mathcal{N}(A) = \{0\} \quad\Longleftrightarrow\quad \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y}$.

Útm.

1. **1. lépés.** Megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{N}(A) \subset (\mathcal{R}(A^*))^\perp.$$

Ha $x \in \mathcal{N}(A)$ és $z \in \mathcal{R}(A^*)$, akkor alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ esetén

$$A^*y = z,$$

így

$$\langle x, z\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0.$$

Ezért

$$x \in (\mathcal{R}(A^*))^{\perp}.$$

2. lépés. Megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{N}(A) \supset (\mathcal{R}(A^*))^{\perp}.$$

Ha

$$v \in (\mathcal{R}(A^*))^{\perp},$$

akkor

$$A^* A v \in \mathcal{R}(A^*),$$

így

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^* A v\rangle = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$Av = 0, \qquad \text{azaz} \qquad v \in \mathcal{N}(A).$$

2. Az előző pont és a 7.2.13/1. feladat felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathcal{N}(A^*) = (\mathcal{R}((A^*))^*)^{\perp} = (\mathcal{R}(A))^{\perp}.$$

3. **1. lépés.** Ha $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, akkor

$$((\mathcal{R}(A))^{\perp})^{\perp} = (\mathcal{N}(A^*))^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{Y},$$

azaz

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y}$$

(vö. 2.5.9. gyakorló feladat).

2. lépés. Ha

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y},$$

akkor (vö. 2.5.9. gyakorló feladat)

$$(\mathcal{N}(A))^{\perp} = \mathcal{Y}.$$

Így (vö. 2.5.8. feladat)

$$\mathcal{N}(A^{\perp}) = \mathcal{R}(A^{\perp}) = ((\mathcal{R}(A^{\perp})^{\perp})^{\perp} = \mathcal{Y}^{\perp} = \{0\}. \quad \blacksquare$$

7.2.18. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, $A \in L(\mathcal{X})$ önadjungált, akkor A normája a

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$$

összefüggés alapján számítható!

Útm. Ha $A^* = A$, akkor A triviálisan szimmetrikus, így (vö. 7.1.6. feladat)

$$\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Ha $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$, akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \leq \|Ax\|_{\mathcal{X}} \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|A\| \cdot \|x\|^2_{\mathcal{X}} = \|A\|,$$

ahonnan

$$\nu(A) := \sup\{|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\} \leq \|A\|$$

következik. Ha $x \in \mathcal{X}$: $\|x\|_{\mathcal{X}} \neq 0$, akkor

$$|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| = \|x\|^2_{\mathcal{X}} \cdot \underbrace{\left|\left\langle A\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}, \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}\right\rangle\right|}_{\nu(A)} \leq \nu(A)\|x\|^2_{\mathcal{X}}$$

Így bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén (vö. 1.4.6., 7.1.5., 7.1.6., ill. 1.4.11. feladat)

$$\begin{aligned} 4\Re(\langle Ax, y\rangle_{\mathcal{X}}) &= \langle A(x+y), x+y\rangle_{\mathcal{X}} - \langle A(x-y), x-y\rangle_{\mathcal{X}} \leq \\ &\leq \nu(A)\cdot(\|x+y\|^2_{\mathcal{X}} + \|x-y\|^2_{\mathcal{X}}) = 2\nu(A)\cdot(\|x\|^2_{\mathcal{X}} + \|y\|^2_{\mathcal{X}}) \end{aligned}$$

Ha most $x \in \mathcal{X}$ olyan vektor, amelyre $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$ és $\|Ax\|_{\mathcal{X}} \neq 0$, akkor az

$$y := \frac{Ax}{\|Ax\|_{\mathcal{X}}}$$

vektorral

$$\Re(\langle Ax, y\rangle) = \|Ax\|_{\mathcal{X}} \leq \nu(A),$$

azaz $\|A\| \leq \nu(A)$. ∎

7.2.19. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, $A \in L(\mathcal{X})$ szimmetrikus, akkor A alulról és felülről is korlátos, továbbá A normája a

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$$

összefüggés alapján számítható!

Útm. Mivel A korlátos, ezért alkalmas $c > 0$ számra

$$\|A\| \leq c,$$

ahonnan

$$\pm\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}} \leq |\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \leq \|x\|^2_{\mathcal{X}}$$

következik, azaz A alulról is éf felülről is korlátos. Mivel A szimmetrikus $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, ezért (vö. 7.2.2. definíció utáni 3. megjegyzés) A önadjungált, így (vö. 7.2.18. feladat)

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}. \quad \blacksquare$$

7.2.3. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $A \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ önadjungált operátor esetén az

$$\mathfrak{A} := \langle A\rangle_u := \langle u, Au\rangle, \qquad \text{ill. a} \qquad \Delta\mathfrak{A} := \|Au - \mathfrak{A}u\|$$

számot az A operátor $u \in \mathcal{D}(A)$ vektorhoz tartozó **várható** (**átlag**-, **közép**-) **érték**ének, ill. **szórás**ának nevezzük.

Mivel A önadjungált operátor, ezért

$$\langle A\rangle_u = \langle u, Au\rangle = \langle A^*u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \overline{\langle u, Au\rangle} = \overline{\langle A\rangle}_u,$$

azaz $\langle A\rangle_u \in \mathbb{R}$. Sőt – lévén, hogy az $A - \langle A\rangle_u I$ operátor is önadjungált –, a szórásnégyzetre igaz a

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{A}^2 &= \|Au - \mathfrak{A}u\|^2 = \langle (A - \mathfrak{A}I)u, (A - \mathfrak{A}I)u\rangle = \left\langle u, (A - \mathfrak{A}I)^2 u\right\rangle = \\ &= \left\langle u, (A^2 - 2\mathfrak{A}A + \mathfrak{A}^2 I)u\right\rangle = \left\langle A^2\right\rangle_u - \langle A\rangle_u^2\end{aligned}$$

összefüggés, – feltéve, hogy $u \in \mathcal{D}(A^2)$, azaz $u \in \mathcal{D}(A)$ és $Au \in \mathcal{D}(A)$.

7.2.20. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor igaz az

$$\langle A\rangle_u \in \mathbb{R} \quad (u \in \mathcal{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = A^*$$

ekvivalencia!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha az A operátorra

$$\langle A\rangle_u \in \mathbb{R} \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

akkor tetszőleges $x, y \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\langle x + \alpha y, A(x + \alpha y)\rangle = \overline{\langle x + \alpha y, A(x + \alpha y)\rangle},$$

azaz

$$\langle x, Ax\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Ay\rangle + \alpha\langle y, Ax\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, Ay\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} + \alpha\overline{\langle x, Ay\rangle} + \overline{\alpha}\overline{\langle y, Ax\rangle} + \overline{\alpha}\alpha\overline{\langle y, Ay\rangle}.$$

Így

$$\overline{\alpha}\langle x, Ay\rangle + \alpha\langle y, Ax\rangle = \alpha\overline{\langle x, Ay\rangle} + \overline{\alpha}\overline{\langle y, Ax\rangle} = \alpha\langle Ay, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Ax, y\rangle.$$

Ez $\alpha = 1$, ill. $\alpha = \imath$ esetén azt jelenti, hogy

$$\langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle + \langle Ax, y\rangle,$$

ill.

$$-\langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle - \langle Ax, y\rangle,$$

ahonnan

$$\langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle$$

következik. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$A = A^*.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha az A operátorra $A = A^*$, akkor bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle u, Au\rangle = \langle A^*u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \overline{\langle u, Au\rangle},$$

azaz

$$\langle A\rangle_u \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

7.2.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, továbbá $A, B \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ önadjungált operátorok és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$\langle A + B\rangle_u = \langle A\rangle_u + \langle B\rangle_u, \qquad \langle \alpha A\rangle_u = \alpha\langle A\rangle_u$$

(a várható érték lineáris)!

7.2.21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, ill. $A, B \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ önadjungált operátorok, továbbá az $u \in \mathcal{X}$ vektorra

$$u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B): \qquad Au \in \mathcal{D}(B), \quad Bu \in \mathcal{D}(A)$$

teljesül, akkor a $\mathcal{C} := \langle [B, A]\rangle_u$ számmal fennáll a

$$\Delta\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B} \geq \frac{1}{2}|\mathcal{C}|$$

ún. **Robertson-féle határozatlansági reláció**!

Útm. Mivel bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \langle [B, A]u, u\rangle &= \langle (B - \alpha I)(A - \beta I)u, u\rangle - \langle (A - \beta I)(B - \alpha I)u, u\rangle = \\ &= \langle (B - \alpha I)(A - \beta I)u, u\rangle - \langle u, (B - \alpha I)(A - \beta I)u\rangle = \\ &= 2\imath\Im\left(\langle (B - \alpha I)(A - \beta I)u, u\rangle\right), \end{aligned}$$

ezért, ha

$$\mathfrak{A} := \langle u, Au\rangle \qquad \text{és} \qquad \mathfrak{B} := \langle u, Bu\rangle,$$

akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B} &= \|(A-\mathfrak{A}I)u\|\cdot\|(B-\mathfrak{B}I)u\| \geq |\langle (A-\mathfrak{A}I)u, (B-\mathfrak{B}I)u\rangle| = \\ &= |\langle (B-\mathfrak{B}I)(A-\mathfrak{A}I)u, u\rangle| \geq |\Im\left(\langle (B-\mathfrak{B}I)(A-\mathfrak{A}I)u, u\rangle\right)| = \\ &= 2^{-1}\,|\langle [B,A]u, u\rangle|\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7.2.11. példa. Ha $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

$$A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Af)(x) := xf(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$B \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Bf := -\imath\hbar f',$$

és

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(B) := \mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad /\overline{\mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})/$$

akkor tetszőleges esetén $x \in \mathbb{R}$

$$([A,B]u)(x) = (ABu)(x) - (BAu)(x) = \imath\hbar\left(xu'(x) - \frac{d}{dx}(xu(x))\right) = -\imath\hbar u(x),$$

így $[A,B] \subset \frac{\hbar}{\imath}I$, ahonnan

$$\Delta\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B} \geq \frac{\hbar}{2}$$

következik (**Heisenberg-féle határozatlansági reláció**).

7.2.22. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $A, B \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ önadjungált operátorok, és az $u \in \mathcal{X}$ vektorra

$$u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B): \qquad Au \in \mathcal{D}(B), \quad Bu \in \mathcal{D}(A), \quad \|u\| = 1$$

teljesül, akkor a

$$\mathcal{C} := \sqrt{\left[\frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u\right]^2 + \left[\frac{1}{2\imath}\langle[A,B]\rangle_u\right]^2}$$

számmal fennáll a

$$\Delta\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B} \geq |\mathcal{C}|$$

egyenlőtlenség (**Schrödinger-féle határozatlansági reláció**)!

Útm. Mivel

$$\mathfrak{A}^2 = \|Au - \mathfrak{A}u\|^2,$$

így a

$$v := Au - \mathfrak{A}u$$

vektorra

$$\mathfrak{A}^2 = \langle v, v \rangle.$$

Ha

$$w := Bu - \mathfrak{B}u,$$

akkor a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával

$$(*) \qquad \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \geq |\langle v, w\rangle|^2 = \left[\tfrac{\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{\langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle}{2\imath}\right]^2$$

adódik. Mivel

$$\langle v, w\rangle = \langle Au - \mathfrak{A}u, Bu - \mathfrak{B}u\rangle\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle (A - \mathfrak{A}I)u, (B - \mathfrak{B}I)u\rangle = \langle u, (A - \mathfrak{A}I)(B - \mathfrak{B}I)u\rangle = \\
&= \langle u, (AB - A\mathfrak{B}I - B\mathfrak{A}I + \mathfrak{A}\mathfrak{B}I)u\rangle = \\
&= \langle u, ABu\rangle - \langle u, A\mathfrak{B}Iu\rangle - \langle u, B\mathfrak{A}Iu\rangle + \langle u, \mathfrak{A}\mathfrak{B}Iu\rangle = \\
&= \langle u, ABu\rangle - \mathfrak{B}\,\langle u, Au\rangle - \mathfrak{A}\,\langle u, Bu\rangle + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\,\langle u, u\rangle = \\
&= \langle AB\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u + \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u = \\
&= \langle AB\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u,
\end{aligned}$$

ill. hasonló számolással

$$\langle w, v\rangle = e\langle BA\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u$$

adódik. Így

$$\langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle = \langle AB\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u - \langle BA\rangle_u + \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u = \langle [A, B]\rangle_u$$

és

$$\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle = \langle AB\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u + \langle BA\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u = \langle \{A, B\}\rangle_u - 2\langle A\rangle_u\langle B\rangle_u.$$

Az iménti két egyenlőséget $(*)$-ba helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$|\langle v, w\rangle|^2 = \left[\frac{1}{2}\langle\{A, B\}\rangle_u - \langle A\rangle_u\langle B\rangle_u\right]^2 + \left[\frac{1}{2\imath}\langle [A, B]\rangle_u\right]^2. \quad \blacksquare$$

7.2.23. feladat. Igazoljuk, hogy ha a 7.2.21 feladatbeli A, B operátorok esetén

$$\widetilde{A} := A - \langle A\rangle_u I \qquad \text{és} \qquad \widetilde{B} := B - \langle B\rangle_u I,$$

akkor fennáll a

$$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = [A, B]$$

egyenlőség!

Útm.

$$\begin{aligned}
[\widetilde{A}, \widetilde{B}] &= \{A - \langle A\rangle_u I\}\{B - \langle B\rangle_u I) - (B - \langle B\rangle_u I)(A - \langle A\rangle_u I\} = \\
&= \{AB - \langle A\rangle_u B - \langle B\rangle_u A + \langle A\rangle_u \langle B\rangle_u\} - \{BA - \langle B\rangle_u A - \langle A\rangle_u B + \langle A\rangle_u \langle B\rangle_u\} = \\
&= [A, B]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

7.2.24. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$ projektor, akkor A önadjungált, pozitív operátor!

Útm. Mivel A folytonos projekció, ezért $\mathcal{N}(A)$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben (vö. 6.2.11. feladat), így a Riesz-felbontás szerint (vö. 2.5.6. feladat)

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A),$$

azaz bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén van olyan

$$u_1, u_2 \in \mathcal{R}(A), \qquad \text{ill.} \qquad v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A)^{\perp},$$

hogy

$$x = v_1 + u_2, \quad y = u_1 + v_2, \qquad \text{ill.} \qquad Ax = v_1, \quad Ay = v_2.$$

Ezért

$$\langle Ax, y\rangle = \langle v_1, u_1 + v_2\rangle = 0 + \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \langle v_1 + u_2, v_2\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$

ill.

$$\langle Ax, x\rangle = \langle v_1, v_1 + u_2\rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, u_2\rangle = \|v_1\|^2 \geq 0. \quad \blacksquare$$

Világos, hogy ha A projektor, akkor

$$O \leq A \leq I, \qquad \text{továbbá} \qquad A = O \qquad \text{vagy} \qquad \|A\| = 1$$

teljesül.

7.2.1. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, úgy

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^*))$$

teljesül!

Útm.

7.2.25. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$e_k \in \mathcal{X} \quad (k \in \mathcal{N}) \quad \text{ONR}, \qquad U := \begin{cases} \mathcal{L}(\{e_0, \ldots, e_n\}) & (\mathcal{N} = \{0, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N}), \\ \overline{\mathcal{L}(\{e_n \in \mathcal{X}:\ n \in \mathbb{N}\})} & (\mathcal{N} = \mathbb{N}), \end{cases}$$

úgy, ha A az U (zárt) altérre való projekció $/\,Ax = u\ (x = u + v,\, u \in U,\, v \in U^{\perp})/$, akkor

$$Ax = \sum_{k\in\mathcal{N}} \widehat{x}(k) e_k = \sum_{k\in\mathcal{N}} \langle x, e_k\rangle\, e_k$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $Ax \in U$, ezért (vö. 1.4.59. feladat)

$$Ax = \sum_{k\in\mathcal{N}} \langle Ax, e_k\rangle\, e_k.$$

Így – lévén, hogy A önadjungált –, azt kapjuk, hogy

$$Ax = \sum_{k\in\mathcal{N}} \langle x, Ae_k\rangle\, e_k = \sum_{k\in\mathcal{N}} \langle x, e_k\rangle\, e_k. \quad \blacksquare$$

7.2.26. feladat. Igazoljuk, hogy az $(L^2[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ Lebesgue-féle Hilbert-térben az

$$M := \{k \in \mathcal{X}:\ \exists\, c \in \mathbb{K}:\ k(x) = c\ (x \in [a,b])\}$$

altér zárt, majd

1. tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén számítsuk ki Ax-et, ahol A az M-re való projekció,
2. mutassuk meg, hogy minden $u \in \mathcal{X}$-hez pontosan egy olyan $v \in M$ van, amelyre

$$\int_a^b v\, \mathrm{d}\mu_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad u - v \in M$$

teljesül!

Útm.

1. Mivel

$$M = \mathcal{L}(\{\widehat{1}\}) \qquad \text{és} \qquad \|\widehat{1}\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^b 1\, \mathrm{d}\mu_1} = \frac{1}{\sqrt{b-a}},$$

ezért

$$Ax = \left\langle x, \frac{\widehat{1}}{\|\widehat{1}\|_{L^2}} \right\rangle \frac{\widehat{1}}{\|\widehat{1}\|_{L^2}} = \left(\int_a^b x \, \mathrm{d}\mu_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right) \frac{1}{\sqrt{b-a}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, \mathrm{d}\mu_1 .$$

2. Ha

$$u_n \in M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $c_n \in \mathbb{K}$, hogy

$$u_n(x) = c_n \quad (x \in [a, b]).$$

Ha van olyan $u \in \mathcal{X}$, hogy

$$\|u - u_n\|_{L^2} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

akkor $L^2[a, b]$ teljessége (vö. 1.3.130. feladat) miatt (u_n) Cauchy-sorozat. Ekkor (c_n) is Cauchy-sorozat, így $\mathbb{K}$ teljessége miatt van olyan $c \in \mathbb{K}$, hogy $\lim(c_n) = c$, ezért

$$u(x) = c \qquad (x \in [a, b]),$$

így $u \in M$.

3. A Riesz-felbontás miatt tehát

$$\mathcal{X} = M \oplus M^{\perp},$$

ahol

$$M^{\perp} = \left\{ u \in L^2[a, b] : \int_a^b u \, \mathrm{d}\mu_1 = 0 \right\}$$

(vö. 1.4.33. feladat), azaz minden $u \in \mathcal{X}$-hez pontosan egy olyan $c \in \mathbb{K}$ és $v \in M^{\perp}$ van, hogy

$$u(x) = c + v(x) \qquad (x \in [a, b]). \quad \blacksquare$$

7.2.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér,

$$\{e_n \in \mathcal{A} : \; n \in \Gamma\}$$

teljes ONR, továbbá

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$$

ortogonális projekció (vö. 4.3.17. feladat), akkor fenáll az

$$Ax = \sum_{n \in \Gamma} \langle x, e_n \rangle e_n$$

egyenlőség!

Útm.

7.2.27. feladat. Legyen

$$\Pi_2 := \left\{ f : [-1{,}1] \to \mathbb{R} : \ \exists \text{legfeljebb másodfokú } p \text{ polinom} : \ f = p|_{[-1,1]} \right\} \subset L^2[-1{,}1].$$

1. Adjuk meg az
$$A : L^2[-1{,}1] \to \Pi_2$$
ortogonális projekciót!
2. Az
$$f_1(x) := x^3, \quad f_2(x) := \sin(x) \qquad (x \in [-1{,}1])$$
$L^2[-1{,}1]$-beli függvények esetén határozzuk meg az
$$Af_k \qquad (k \in \{1{,}2\})$$
elemeket!

Útm.

1. Mivel Π_2 véges dimenziós altrér $L^2[-1{,}1]$-ben, így zárt is a
$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$$
skaláris szorzat által indukált normára nézve (vö. 1.3.75. feladat utáni megjegyzés). Ezért (vö. 7.2.2. feladat), ha b_0, b_1, b_2 ONB Π_2-ben, akkor
$$Af = \sum_{k=0}^{2} \langle f, b_k \rangle b_k \qquad (f \in L^2[-1{,}1])$$
teljesül. Mivel
$$\Pi_2 = \text{span}\ \{e_0, e_1, e_2\}$$
ahol
$$e_0(x) := 1, \quad e_1(x) := x, \quad e_2(x) := x^2 \qquad (x \in [-1{,}1]),$$
ezért Gram-Schmdt-algoritmussal (vö. 1.4.49. feladat) alkalmas b_0, b_1, b_2 ONB-t konstruálunk. Mivel
$$\|e_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2, \qquad \|e_2\|^2 = \int_{-1}^{1} |x|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \qquad \text{és} \qquad \langle e_0, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = 0,$$
ezért
$$b_0 := \sqrt{\frac{1}{2}} e_0, \qquad b_1 := \sqrt{\frac{3}{2}} e_1$$
ONB a span $\{e_0, e_1\}$ térben. Így
$$e_2 - (\langle e_2, b_0 \rangle b_0 + \langle e_2, b_1 \rangle b_1) = e_2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{3}{2}} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x}_{=0} = e_2 - \frac{1}{3}$$

merőleges b_0-ra és b_1-re. A

$$\left\| e_2 - \frac{1}{3} \right\|^2 = \frac{8}{45}$$

egyenlőség következtében legyen tehát

$$b_2 := \sqrt{\frac{45}{8}} \left(e_2 - \frac{1}{3} \right).$$

2. Mivel

$$\begin{aligned}
Af_1 &= \sum_{k=0}^{2} \langle f_1, b_k \rangle b_k = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} b_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x}_{=0} + \sqrt{\frac{3}{2}} b_1 \int_{-1}^{1} x^4 \, \mathrm{d}x + \sqrt{\frac{45}{8}} \underbrace{\int_{-1}^{1} \left(x^5 - \frac{x^3}{3} \right) \mathrm{d}x}_{=0} = \\
&= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} b_1 = \frac{3}{5} e_1,
\end{aligned}$$

ezért

$$Af_1(x) = \frac{3x}{5} \qquad (x \in [-1,1]).$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
Af_2 &= \sum_{k=0}^{2} \langle f_2, b_k \rangle b_k = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} b_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin(x) \, \mathrm{d}x}_{=0} + \sqrt{\frac{3}{2}} b_1 \int_{-1}^{1} x \sin(x) \, \mathrm{d}x + \sqrt{\frac{45}{8}} \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin(x) \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x}_{=0} = \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} b_1 \left([-x \cos(x)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} x \cos(x) \, \mathrm{d}x \right) = \frac{3}{2} e_1 \left(2\cos(1) + 2\sin(1) \right) = \\
&= \left(3\cos(1) + 3\sin(1) \right) e_1
\end{aligned}$$

következtében

$$Af_2(x) = 3x\cos(1) + 3x\sin(1) \qquad (x \in [-1,1]). \quad \blacksquare$$

7.2.4. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \in L(\mathcal{X})$ (folytonos, lineáris) operátor **normális**, ha

$$[A^*A, AA^*] = A^*A - AA^* = O \in L(\mathcal{X}).$$

Világos, hogy ha A normális, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén a $\lambda I - A$ operátor is normális, hiszen

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)(\lambda I - A)^* &= \lambda I(\lambda I)^* - \lambda I A^* - A(\lambda I)^* + AA^* = \\ &= \lambda\overline{\lambda} I^* - \lambda A^* - \overline{\lambda} A I^* + A^* A = \\ &= (\lambda I)^*\lambda I - A^*\lambda I - (\lambda I)^* A + A^* A = (\lambda I - A)^*(\lambda I - A).\end{aligned}$$

7.2.28. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \in L(\mathcal{X})$, úgy A pontosan akkor normális, ha

$$\|Au\| = \|A^*u\| \qquad (u \in \mathcal{X})$$

teljesül!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = \langle u, A^*Au\rangle = \langle u, AA^*u\rangle = \langle A^*u, A^*u\rangle = \|A^*u\|^2.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Bármely $u, v \in \mathcal{X}$ esetén (vö. 1.4.7. feladat utáni megjegyzés)

$$\begin{aligned}\Re\left(\langle Au, Av\rangle\right) &= \frac{\|Au + Av\|^2 - \|Au - Av\|^2}{4} = \frac{\|A^*u + A^*v\|^2 - \|A^*u - A^*v\|^2}{4} = \\ &= \Re\left(\langle A^*u, A^*v\rangle\right),\end{aligned}$$

így (a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben v helyett $\imath v$-t írva)

$$0 = \langle Au, Av\rangle - \langle A^*u, A^*v\rangle = \langle A^*Au - AA^*u, v\rangle.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$A^*A - AA^* = O,$$

azaz A normális. ■

Ez azt jelenti, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor normális, akkor

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*),$$

sőt bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\mathcal{N}(\lambda I - A) = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*).$$

7.2.29. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, úgy az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor pontosan akkor normális, ha a 7.2.12. feladatbeli S és T operátor felcserélhető!

Útm.

1. lépés. Ha A normális, akkor

$$\begin{aligned} ST &= \frac{1}{4\imath}(A+A^*)(A-A^*) = \\ &= \frac{1}{4\imath}\left(A^2 + A^*A - AA^* - (A^*)^2\right) = \\ &= \frac{1}{4\imath}(A-A^*)(A+A^*) = \\ &= TS. \end{aligned}$$

2. lépés. Ha

$$ST = TS,$$

akkor

$$\begin{aligned} A^*A &= (S-\imath T)(S+\imath T) = \\ &= S^2 - \imath TS + \imath ST + T^2 = \\ &= S^2 - \imath ST + \imath TS + T^2 = \\ &= (S+\imath T)(S-\imath T) = \\ &= AA^*. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.2.5. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-terek esetén azt mondjuk, hogy az $A \in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor **unitér**, ha

$$A^*A = I \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad AA^* = I \in L(\mathcal{Y}).$$

7.2.12. példa. Ha

$$\varphi \in \mathfrak{C}[0,1]: \qquad |\varphi(x)| = 1 \quad (x \in [0,1]),$$

továbbá $\mathcal{X} := L^2[0,1]$, akkor az

$$A_\varphi f := \varphi f \qquad (f \in \mathcal{X})$$

lineáris operátor unitér, hiszen $A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$ (vö. 7.2.6. feladat), így

$$(A_\varphi^* A_\varphi) f(x) = \overline{\varphi(x)}\varphi(x) f(x) = |\varphi(x)|^2 f(x) \qquad (x \in [a,b])$$

miatt $A_\varphi^* A_\varphi = I$. Hasonlóan látható be, hogy $A_\varphi A_\varphi^* = I$.

7.2.30. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá $A, B \in L(\mathcal{X})$ unitér operátorok, akkor

1. AB unitér,
2. bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle,$$
3. bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|Ax\| = \|x\|,$$
4. A bijektív, továbbá A^{-1} is unitér,
5. az A normájára fennáll a
$$|||A||| = 1$$
egyenlőség!

Útm.

1. Világos, hogy
$$(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$
2. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle A^{-1}Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$
3. Az iménti egyenlőség miatt bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$
4. Mivel
$$A^*A = I \in L(\mathcal{X}),$$
ezért A injektív és $A^{-1} \subset A^*$. Mivel
$$AA^* = I \in L(\mathcal{Y}),$$
ezért A szürjektív, azaz
$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}.$$
Ez azt jelenti, hogy
$$A^{-1} = A^*.$$
5. A 4.2.2. gyakorló feladat alapján
$$|||A||| = \sup\{\|Ax\| \in \mathbb{R} : \; x \in \mathcal{X}, \; \|x\| = 1\} = \sup\{\|x\| \in \mathbb{R} : \; x \in \mathcal{X}, \; \|x\| = 1\} = 1. \quad \blacksquare$$

7.2.31. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ komplex Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, ill. $A \in L(\mathcal{X})$, úgy

1. igazazak az

   $$A \text{ izometrikus} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^*A = I \in L(\mathcal{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

   ekvivalenciák
2. A pontosan akkor unitér, ha izometrikus és szürjektív!

Útm.

1. Ha A izometrikus, azaz

   $$\|Ax\| = \|x\| \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

   akkor

   $$\langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

   és így

   $$\langle (A^*A - I)x, x\rangle = 0 \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

   Ez azt jelenti, hogy (vö. 7.1.5. ill. 1.4.8. feladat), hogy

   $$A^*A = I, \qquad \text{azaz} \qquad \langle (A^*A - I)x, y\rangle = 0 \quad (x, y \in \mathcal{X}),$$

   ahonnan

   $$(*) \qquad \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

   következik. Ha pedig A-ra $(*)$ teljesül, akkor az $y := x$ választással azt kapjuk, hogy A izometrikus.
2. Ha az A operátor unitér, akkor $A^*A = I$, így A izometrukus. $AA^* = I$ következtében A szürjektív. Ha pedig A izometrikus és szürjektív, akkor az izometria miatt valamely $x \in \in \mathcal{X}$ esetén az $Ax70$ egyenlőségből $x = 0$ következik, ami azt jelenti, hogy A injektív (így bijektív). Így, ha az

   $$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

   egíyenlőségben $y := A^{-1}z$, akkor

   $$\langle Ax, z\rangle = \langle x, A^{-1}z\rangle \quad (x, z \in \mathcal{X}).$$

   Ennélfogva $A^{-1} = A^*$, és így $A^*A = AA^* = I$. ■

7.2.32. feladat. Ha adott $a \in \mathbb{Z}$ és $\mathcal{X} := l_2(\mathbb{Z})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{l_2}$ (vö. 1.4.7. példa) esetén

$$A_a : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (A_a x)(n) := x(n-a) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

továbbá

$$\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (\Delta x)(n) := x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(**diszkrét Laplace-operátor**), akkor

1. számítsuk ki A_a^*-t, majd indokoljuk meg, hogy A_a unitér;
2. számítsuk ki Δ_a^*-t;
3. határozzunk meg olyan $\epsilon_k \in \mathbb{R}$ számokat, hogy az

$$x_k(n) := \exp(\imath k n) \qquad (n \in \mathbb{Z},\ k \in [-\pi, \pi])$$

függvényekre

$$(\Delta x_k)(n) = \epsilon_k x_k(n) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

teljesüljön! Igaz-e, hogy

$$x_k \in l_2(\mathbb{Z}) \qquad (k \in [-\pi, \pi])$$

teljesül?

Útm.

1. Ha $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$ és $a \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\begin{aligned} \langle x, A_a y \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} (A_a y)(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} y(n-a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x(k+a)} y(k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{(A_{-a} x)(n)} y(k) = \langle A_{-a} x, y \rangle. \end{aligned}$$

Mivel bármely $x \in l_2(\mathbb{Z})$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(A_{-a} A_a x)(n) = (A_a x)(n+a) = x(n+a-a) = x(n),$$

ezért

$$A_{-a} = A_a^{-1}.$$

2. Mivel bármely $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$ esetén

$$\begin{aligned} \langle x, \Delta y \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} (\Delta y)(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} \{ y(n+1) - y(n-1) - 2y(n) \} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n-1)} y(n) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n+1)} y(n) - 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} y(n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\{ x(n-1) + x(n+1) - 2x(n) \}} y(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{(\Delta x)(n)} y(n) = \\ &= \langle \Delta x, y \rangle, \end{aligned}$$

azért

$$\Delta^* = \Delta,$$

azaz Δ önadjungált.

3. Világos, hogy ha $n \in \mathbb{Z}$ és $k \in [-\pi, \pi]$, akkor

$$\begin{aligned}(\Delta x_k)(n) &= x_k(n+1) + x_k(n-1) - 2x_k(n) = e^{\imath k(n+1)} + e^{\imath k(n-1)} - 2e^{\imath kn} = \\ &= \left(e^{\imath k} + e^{-\imath k} - 2\right) e^{\imath kn} = (2\cos(k) - 2)e^{\imath kn} =: \epsilon_k x_k(n).\end{aligned}$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$|x_k(n)| = |e^{\imath kn}| = 1,$$

ezért $x_k \notin l_2(\mathbb{Z})$, hiszen $x_k \in l_2(\mathbb{Z})$ esetén az

$$x_k(n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \pm\infty)$$

határérték-relációnak kellene teljesülnie. ■

7.2.33. feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1, \; z \neq 1\}, \qquad \varphi(x) := \frac{x - \imath}{x + \imath}$$

leképezés bijekció, és inverzére

$$\varphi^{-1}(y) \equiv \imath \frac{1+y}{1-y}$$

teljesül!

Útm. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\varphi(x)|^2 = \left|\frac{x-\imath}{x+\imath}\right|^2 = \frac{x-\imath}{x+\imath} \cdot \frac{x+\imath}{x-\imath} = 1,$$

ezért

$$\mathcal{R}_\varphi \subset \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}.$$

Világos, hogy $1 \notin \mathcal{R}_\varphi$, továbbá ha

$$y := \frac{x-\imath}{x+\imath}, \qquad \text{akkor} \qquad x = \imath \frac{1+y}{1-y}.$$

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$x = \overline{x} \iff \imath \frac{1+y}{1-y} = -\imath \frac{1+\overline{y}}{1-\overline{y}} \iff (1+y)(1-\overline{y}) = -(1-y)(1+\overline{y}) \iff y\overline{y} = 1. \quad ■$$

7.2.6. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$ önadjungált operátor, akkor az

$$(A - \imath I)(A + \imath I)^{-1} =: \varphi(A) \in L(\mathcal{X})$$

operátort az A operátor **Cayley-transzformált**jának nevezzük.

7.2.34. feladat. Igazoljuk, hogy a 7.2.6. definícióbeli $\varphi(A)$ operátor unitér!

Útm. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\varphi(A)^*\varphi(A) &= \left((A - \imath I)(A + \imath I)^{-1}\right)^* (A - \imath I)(A + \imath I)^{-1} = \\ &= (A - \imath I)^{-1}(A + \imath I)(A - \imath I)(A + \imath I)^{-1} = I,\end{aligned}$$

hiszen a két középső tényező felcserélhető. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\varphi(A)^*\varphi(A) = I. \quad \blacksquare$$

8. fejezet

Kompakt operátorok

8.1. A kompakt és a teljesen folytonos operátor fogalma

8.1.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetén az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátort **kompakt**nak nevezzük, ha bármely $H \subset \mathcal{X}$ korlátos halmaz $A[H] \subset \mathcal{Y}$ képe prekompakt halmaz. Ha az A operátor még folytonos is, akkor A-t **teljesen folytonos**nak nevezzük.

8.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha alkalmas $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és $\alpha > 0$ esetén

$$H := \left\{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : \; x, y \in [a, b], \; |u| \leq \alpha\right\},$$

ill. az $F : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{X} : \; \|u\| \leq \alpha\},$$

akkor az

$$(Au)(x) := \int_a^b F(x, y, u(y))\, \mathrm{d}y \qquad (u \in \mathcal{D}(A), \; x \in [a, b]),$$

operátor teljesen folytonos!

Útm. Mivel F egyenletes folytonos, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy bármely

$$(x, y, u), (z, y, v) \in H, \quad |x - z| + |u - v| < \delta$$

esetén

$$(*) \qquad |F(x, y, u) - F(z, y, v)| < \varepsilon.$$

Ezek után megmutatjuk, hogy

1. az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operátor folytonos. Ha $u \in \mathcal{D}(A)$, akkor $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és

$$|u(y)| \leq \alpha \qquad (y \in [a, b]).$$

Így az

$$Au : [a, b] \to \mathbb{R}$$

függvény szintén folytonos. Ezért bármely $u, v \in \mathcal{D}(A)$ esetén, ha

$$\|u - v\| = \max\{|u(y) - v(y)| \in \mathbb{R} : \ y \in [a, b]\} < \delta,$$

akkor $(*)$ miatt

$$\|Au - Av\| = \max\left\{\left|\int_a^b \{F(x, y, u(y)) - F(x, y, v(y))\}\, \mathrm{d}y\right| \in \mathbb{R} : \ y \in [a, b]\right\} \leq (b - a)\varepsilon.$$

2. az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operátor kompakt. Mivel a $\mathcal{D}(A)$ halmaz korlátos, ezért csak azt kell belátni, hogy $\mathcal{R}(A)$ prekompakt. Világos, hogy

- $\mathcal{R}(A)$ korlátos, hiszen, ha

  $$M := \max\{|F(x, y, u)| \in \mathbb{R} : \ (x, y, u) \in H\} < +\infty,$$

  akkor tetszőleges $u \in R(A)$ esetén

  $$\|Au\| = \max\left\{\left|\int_a^b F(x, y, u(y))\, \mathrm{d}y\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [a, b]\right\} \leq (b - a)M.$$

- $\mathcal{R}(A)$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, hiszen ha $x, z \in [a, b]$ olyan, hogy $|x - z| < \delta$, akkor $(*)$-ból

  $$|(Au)(x) - (Au)(z)| \leq \int_a^b |F(x, y, u(y)) - F(z, y, u(y))|\, \mathrm{d}y \leq (b - a)\varepsilon \qquad (u \in \mathcal{D}(A))$$

  következik. ■

8.1.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátor esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Az A operátor kompakt.

(2) Bármely

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat esetén van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (Ax_{ν_n}) sorozat konvergens $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

Útm.

1. lépés /**(1)** $\Rightarrow$ **(2)**/. Triviális, hiszen ha

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben/, akkor a

$$H := \{x_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz korlátos $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben/, így $A[H]$ prekompaktsága, azaz $\overline{A[H]}$ kompaktsága azt jelenti (vö. 1.2.89. feladat), hogy alkalmas (ν_n) indexsorozat esetén az (Ax_{ν_n}) sorozat konvergens $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. Ha az N halmaz korlátos $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben, akkor az

$$M := A[N]$$

halmaz prekompakt $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban, hiszen bármely

$$y_n \in A[N] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetén van olyan

$$x_n \in N \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy

$$y_n = Ax_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és (x_n) korlátos $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben, így a feltétel következményeként van az $(y_n) = (Ax_n)$ sorozatnak $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/ konvergens részsorozata. ■

8.1.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Az A operátor kompakt.

(2) A nyílt egységgömb A szerinti képe prekompakt $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

(3) Alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén az

$$A[K_\varepsilon(0)]$$

halmaz prekompakt $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

(4) Bármely

$$x_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-beli/ korlátos sorozat esetén van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (Ax_{ν_n}) sorozat konvergens $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Mivel a nyílt egységgömb korlátos halmaz, ezért A kompaktságának következtében (A szerinti) képe prekompakt $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (3)/. Mivel a nyílt egységgömb a zérusnak nyílt környezete: $K_1(0)$, ezért A kompaktságának következtében (A szerinti) képe prekompakt $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/.

3. lépés /(3) $\Rightarrow$ (4)/. Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén az

$$A[K_\varepsilon(0)]$$

prekompakt /$(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/, majd legyen $r > 0$ olyan szám, amelyre

$$K_r(0) \subset K_\varepsilon(0)$$

teljesül. Ha (x) korlátos sorozat $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben, azaz

$$\sup\{\|x_n\|_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\} =: M \in \mathbb{R},$$

akkor

$$u_n := \frac{r}{M+1} x_n \in K_r(0) \subset K_\varepsilon(0) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$A(u_n) \in A[K_\varepsilon(0)] \subset \overline{A[K_\varepsilon(0)]} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik.

$$\overline{A[K_\varepsilon(0)]}$$

kompaktságának következtében alkalmas (ν_n) indexsorozatra (Au_{ν_n}) konvergens $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban. Ez azt jelenti, hogy (Ax_{ν_n}) is konvergens $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban.

4. lépés /(4) ⇒ (1)/. Vö. 8.1.2 feladat. ■

8.1.4. feladat. Lássuk be, hogy az

$$A : (\mathfrak{C}^1[0{,}1], \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^1}) \to (\mathfrak{C}[0{,}1], \|\cdot\|_\infty), \qquad Au := u$$

operátor kompakt!

Útm. Ha (f_n) korlátos sorozat a $(\mathfrak{C}^1[0{,}1], \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^1})$ normált térben, akkor alkalmas $K > 0$ szám esetén

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = \|f_n\|_{\mathfrak{C}^1} \leq K$$

teljesül. A Lagrange-féle középértéktétel következtében így bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $x, y \in [0{,}1]$ esetén

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$F := \{f_n \in \mathfrak{C}^1[0{,}1] : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz A operátor szerinti képe, azaz az $A[F]$ halmaz elemei egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. Az Arsel$\grave{a}$-Ascoli-lemma következtében (vö. 1.3.2. állítás) $A[F]$ prekompakt, azaz alkalmas (ν_n) indexsorozat esetén az

$$f_{\nu_n} \in \overline{F} \subset \mathfrak{C}^1[0{,}1] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, ami azt jelenti (vö. 8.1.2. feladat), hogy A kompakt. ■

8.1.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\varphi \in \mathfrak{C}[0,1]$, akkor az

$$A : (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty), \qquad Au := \varphi u$$

operátor pontosan a $\varphi = 0$ esetben kompakt!

Útm. Világos, hogy $\varphi = 0$ esetén A kompakt. Ha pedig $\varphi \neq 0$, akkor alkalmas $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumra

$$m := \min\{|\varphi(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} > 0.$$

Így az

$$u_n(s) := \sin\left(2^n \cdot \frac{s-a}{b-a} \cdot \pi\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ s \in [0,1])$$

sorozatra

$$u_n \in \mathfrak{C}[0,1] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy az (u_n) sorozat korlátos, továbbá az (Au_n) sorozatnak nincsen Cauchy-féle részsorozata, hiszen az

$$s_n := a + \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számsorozat minden tagja beleesik az $[a,b]$ intervallumba:

$$s_n \in [a,b] \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így bármely $k, l \in \mathbb{N}$: $k > l$ esetén

$$\begin{aligned}
\|Ax_k - Ax_l\|_\infty &= \max\{|u_k(s) - u_l(s)| \in \mathbb{R} : \ s \in [0,1]\} \geq \\
&\geq m \cdot \max\{|\varphi(s)(u_k(s) - u_l(s))| \in \mathbb{R} : \ s \in [0,1]\} \geq \\
&\geq m|u_k(s_n) - u_l(s_n)| = m|\sin(2^{k-n-1}\pi) - \sin(\pi/2)| = \\
&= m|0 - 1| = m.
\end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy A nem kompakt. ■

8.1.6. feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$B : l_2 \to l_2, \qquad Bu := (u_2, u_3, \ldots)$$

operátor nem kompakt!

Útm. Az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \in l_2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, és az (Ae_n) sorozatnak nincsen Cauchy-féle , így konvergens részsorozata, hiszen

$$Ae_n = e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és így} \qquad \|Ae_m - Ae_n\|_2 = 2 \quad (m \neq n),$$

ezért A nem kompakt. ■

8.1.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek, $\emptyset \neq M \subset \mathcal{X}$ korlátos halmaz, ill. $A : M \to \mathcal{Y}$ teljesen folytonos operátor, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $A_n : M \to \mathcal{Y}$ teljesen folytonos operátor, hogy

1. $\|Ax - A_n x\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{n}$ $(x \in M)$;
2. $\dim(\mathrm{span}(A_n[M])) < +\infty$;
3. $A_n[M] \subset \mathrm{co}(A[M])$ (vö. 1.3.10. definíció, ill. 1.3.49. feladat)!

Útm. Mivel M korlátos és A kompakt, ezért $A[M]$ prekompakt. Így tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén (vö. 1.2.87. feladat) van olyan $N \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_N \in A[M]$, hogy

$$(*) \qquad A[M] \subset \bigcup_{k=1}^{N} K_{1/n}(Ax_k),$$

azaz

$$\min\{\|Ax - x_k\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : k \in \{1, \ldots, N\}\} \leq \frac{1}{n} \qquad (x \in M).$$

Ha

$$\alpha_k(x) := \max\left\{0, \frac{1}{n} - \|Ax - x_k\|_{\mathcal{Y}}\right\} \qquad (x \in M)$$

és

$$A_n x := \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) x_k}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in M)$$

(**Schauder-operátor**) , akkor

- $(*)$ miatt legalább egy k esetén $\alpha_k(x) > 0$, így

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) > 0 \qquad (x \in M).$$

- bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén A_n folytonos, hiszen A folytonos és minden $k \in \{1, \ldots, N\}$ esetén α_k folytonos.
- a nyilvánvaló

$$A[M] \subset \mathrm{span}\,(Ax_1, \ldots, Ax_N)$$

tartalmazás következtében

$$\dim(\mathrm{span}\,(A_n[M])) \leq N < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

- bármely $x \in M$ esetén

$$\|A_n x - Ax\|_{\mathcal{Y}} = \left\| A_n x - \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) x_k}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)} \right\|_{\mathcal{Y}} = \frac{\left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)(x_k - Ax) \right\|_{\mathcal{Y}}}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)} \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) \|x_k - Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) \frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)} = \frac{1}{n}.$$

- bármely $x \in M$ esetén

$$\|A_n x\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A_n x - Ax\|_{\mathcal{Y}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{n} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

  Mivel $A[M]$ prekompakt, ezért korlátos is, így $A_n[M]$ is korlátos. Mivel $A_n[M]$ a $\operatorname{span}(Ax_1, \ldots, Ax_N)$ véges dimenziós tér részhalmaza, ezért $A_n[M]$ prekompakt, ahonnan A_n kompaktsága következik.

- mivel

$$A_n x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(x) A x_k, \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_k(x) := \frac{\alpha_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k(x)}$$

  és $\lambda_k(x) \in [0,1]$, valamint $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k(x) = 1$, ezért

$$A_n[M] \subset \operatorname{co}(A[M]). \quad \blacksquare$$

8.1.8. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kompakt operátor, akkor $\mathcal{R}(A)$ és $\overline{\mathcal{R}(A)}$ szeparábilis!

Útm. Ha

$$H_n := \overline{A[K_n(0)]} \subset \mathcal{Y} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor A kompaktsága következtében H_n kompakt, így (vö. 3.1.1. feladat) szeparábilis. Mivel

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n,$$

ezért $\mathcal{R}(A)$ szeparábilis. Világos, hogy $\mathcal{R}(A)$ sűrű $\overline{\mathcal{R}(A)}$-ban, így $\overline{\mathcal{R}(A)}$ is szeparábilis. $\blacksquare$

8.1.9. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor igaz az

$$A \text{ kompakt} \qquad \Longrightarrow \qquad A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

implikáció!

Útm. Ha A kompakt, akkor bármely $H \subset \mathcal{X}$ korlátos halmaz esetén $A[H]$ prekompakt, azaz $\overline{A[H]}$ kompakt. Innen $\overline{A[H]}$, ill. $A[H] \subset \overline{A[H]}$ miatt $A[H]$ korlátossága következik. Így (vö. 4.3.1/2. feladat) A korlátos operátor: $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. $\blacksquare$

A kompakt, lineáris $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorok halmazának jelölésére a

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ A \text{ kompakt}\}$$

szimbólumot használjuk, az $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetben $K(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et pedig $K(\mathcal{X})$-szel rövidítjük. Így a 8.1.9. feladatbeli állítás azt jelenti, hogy

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

8.1.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor pontosan egy olyan $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor van, mely kiterjesztése A-nak és amelyre

$$\mathcal{D}(B) = \overline{\mathcal{D}(A)}$$

teljesül, továbbá B szintén kompakt operátor!

Útm.

1. lépés. Legyen $(\widehat{\mathcal{Y}}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{Y}}})$ olyan Banach-tér, hogy alkalmas $\varphi : \mathcal{Y} \to \widehat{\mathcal{Y}}$ izometrikus izomorfiával

$$\overline{\varphi[\mathcal{Y}]} = \widehat{\mathcal{Y}}$$

(vö. 1.3.143. feladat). Így az A operátor felfogható, mint $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{Y}})$.

2. lépés. A 4.5.1. feladat állítása következtében pontosan egy olyan B lineáris operátor van, amelyre $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(B)$ teljesül. Ha $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, továbbá

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = x,$$

akkor a B operátort értelmezzük a

$$Bx := \lim(Ax_n)$$

utasítással (vö. 4.5.1. feladat útmutatója). Mivel (x_n) konvergens, ezért korlátos is, így A kompaktságának következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy alkalmas $y \in \mathcal{Y}$ vektorra

$$y = \lim(Ax_{\nu_n}).$$

Mivel valamely konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, ezért

$$\lim(Ax_{\nu_n}) = Bx,$$

azaz $Bx = y$. Ez pedig azt jelenti, hogy $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

3. lépés. Megmutatjuk, hogy a fenti B operátor kompakt. Legyen

$$x_n \in \mathcal{D}(B) = \overline{\mathcal{D}(A)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n^{(k)} \in \mathcal{D}(A)$, hogy

$$\left\| x_n - x_n^{(k)} \right\|_{\mathcal{X}} < \frac{1}{k}$$

teljesül. Ennélfogva az $\left(x_n^{(n)}\right)$ sorozat is korlátos. A kompaktságának következtében van olyan (ν_l) indexsorozat, hogy az $\left(Ax_{\nu_l}^{(\nu_l)}\right)$ sorozat konvergens:

$$y := \lim\left(Ax_{\nu_l}^{(\nu_l)}\right) \in \mathcal{Y}.$$

Így

$$\begin{aligned}\|Bx_{\nu_l}-y\|_{\mathcal{Y}} &\leq \left\|Bx_{\nu_l}-Bx_{\nu_l}^{(\nu_l)}\right\|_{\mathcal{Y}}+\left\|Ax_{\nu_l}^{(\nu_l)}-y\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \|B\|\cdot\left\|x_{\nu_l}-x_{\nu_l}^{(\nu_l)}\right\|_{\mathcal{Y}}+\left\|Ax_{\nu_l}^{(\nu_l)}-y\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \|B\|\cdot\frac{1}{\nu_l}+\left\|Ax_{\nu_l}^{(\nu_l)}-y\right\|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0 \quad (l\to\infty).\end{aligned}$$

(x_{ν_l}) tehát olyan részsorozat, amelyre (Bx_{ν_l}) konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy B kompakt. ■

8.1.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $A\in\mathfrak{L}(\mathcal{X}\curvearrowright\mathcal{Y})$, úgy A kompaktsága maga után vonja az $\overline{A}$ lezárt kompaktságát!

Útm. Ha A kompakt, akkor (vö. 8.1.10. feladat) van olyan kompakt $B\in\mathfrak{L}(\mathcal{X}\curvearrowright\mathcal{Y})$ operátor, amelyre

$$A\subset B \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathcal{D}(A)}=\mathcal{D}(B)$$

teljesül. Mivel B korlátos (vö. 8.1.9. feladat), ezért B zárt (vö. 6.2.7/3. feladat). Ez azt jelenti, hogy $\overline{A}\subset B$, ahonnan $\overline{A}$ kompaktsága következik. ■

8.1.12. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $A\in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ véges rangú operátor: $\dim(\mathcal{R}(A))<+\infty$, akkor A kompakt!

Útm. Ha

$$x_n\in\mathcal{X} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

korlátos sorozat, akkor (vö. 4.3.1. feladat) (Ax_n) korlátos $\mathcal{R}(A)$-ban, ezért $\dim(\mathcal{R}(A))<+\infty$ következtében (vö. 4.1.1/1. gyakorló feladat, ill. 1.3.74. feladat) alkalmas (ν_n) indexsorozat esetén (Ax_{ν_n}) konvergens, ami azt jelenti, hogy A kompakt. ■

8.1.1. példa.

1. A zérusoperátor kompakt, hiszen véges rangú.
2. A 4.2.41. feladatbeli A operátor kompakt, hiszen

$$\mathcal{R}(A)\subset\operatorname{span}(\{v\}).$$

A 8.1.12. feladatbeli azt is jelenti, hogy ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A\in L(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, továbbá $\mathcal{Y}$ véges dimenziós, akkor A kompakt. Így pl. $\dim(\mathbb{K})=1<+\infty$ következtében az $\mathcal{X}^*$ duális tér elemei kompakt operátorok.

8.1.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor az $I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ identikus operátor pontosan akkor kompakt, ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós!

Útm. Ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós, akkor a fentiek miatt I kompakt operátor. Ha $\mathcal{X}$ nem véges dimenziós, akkor van olyan $H \subset \mathcal{X}$ korlátos, zárt, de nem kompakt halmaz (vö. 1.2.78. feladat), hogy

$$\overline{I[H]} = H.$$

Ez azt jelenti, hogy I nem kompakt. ■

8.1.14. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$, ill. $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}})$ normált tér, akkor

1. bármely $A, B \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A + \alpha B \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

azaz $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris altere $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-nak;

2. a $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $A \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ operátorok esetén igaz a

$$(B \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \quad \text{vagy} \quad A \in K(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})) \qquad \Longrightarrow \qquad A \circ B \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$$

implikáció!

Útm.

1. Világos, hogy $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \neq \emptyset$, hiszen a zérusoperátor triviálisan kompakt. Ha

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben/, akkor A kompaktsága következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (Ax_{ν_n}) sorozat konvergens $/(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/ (vö. 8.1.2. feladat). Világos, hogy az (x_{ν_n}) sorozat is $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben/ korlátos, így B kompaktsága következtében van olyan (μ_n) indexsorozat, hogy $(Bx_{\nu_{\mu_n}})$ konvergens. Mivel $(Ax_{\nu_{\mu_n}})$ részsorozata az (Ax_{ν_n}) sorozatnak, ezért $(Ax_{\nu_{\mu_n}})$ is konvergens. Ez azt jelenti, hogy

$$((A + \alpha B)x_{\nu_{\mu_n}}) = (Ax_{\nu_{\mu_n}})) + \alpha(Bx_{\nu_{\mu_n}}))$$

konvergens.

2. Ha H korlátos $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben, akkor B folytonossága következtében $B[H]$ szintén korlátos. Ezért, ha A kompakt, akkor az

$$A[B[H]] = (A \circ B)[H]$$

halmaz prekompakt. Ha B kompakt, akkor $B[H]$ prekompakt, azaz $\overline{B[H]}$ kompakt. Az A folytonossága következtében $A[\overline{B[H]}]$ kompakt. Ez azt jelenti, hogy az $A[B[H]]$ halmaz, mint az $A[\overline{B[H]}]$ kompakt halmaz részhalmaza prekompakt (vö. 1.1.54. feladat). ■

Az iménti feladatbeli második állítás azt jelenti, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$, akkor az $A \in K(\mathcal{X})$ operátornak nincsen korlátos inverze, hiszen ellenkező esetben az $I = A^{-1}A$ identikus operátor kompakt lenne, ami $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$ miatt nem lehetséges (vö. 8.1.13. feladat).

8.1.15. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, akkor $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zárt az $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ térben, azaz $(K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ Banach-tér!

Útm. Az állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy tetszőleges

$$A_n \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátorsorozat és $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor esetén, ha

$$\lim(\|A_n - A\|) = 0,$$

akkor $A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Ha

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat, akkor A_1 kompaktásga miatt $(A_1 x_n)$-ből kiválasztható konvergens részsorozat. Ez azt jelenti, hogy (x_n)-nek van olyan $\left(x_n^{(1)}\right)$ részsorozata, hogy $\left(A_1\left(x_n^{(1)}\right)\right)$ konvergens /$(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/. Az A_2 operátor kompaktsága következtében az $\left(A_2\left(x_n^{(1)}\right)\right)$ sorozatból is kiválasztható konvergens részsorozat, azaz $\left(x_n^{(1)}\right)$-nek van olyan $\left(x_n^{(2)}\right)$ részsorozata, amelyre $\left(A_2\left(x_n^{(2)}\right)\right)$ konvergens /$(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban/. Ekkor persze az $\left(A_1\left(x_n^{(2)}\right)\right)$ sorozat is konvergens. Folytatva az eljárást, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén olyan

$$\left(x_n^{(1)}\right), \ldots, \left(x_n^{(k)}\right)$$

sorozatokhoz jutunk, hogy $\left(x_n^{(k)}\right)$ részsorozata $\left(x_n^{(k-1)}\right)$-nek és $\left(x_n^{(1)}\right)$ részsorozata (x_n)-nek, így a

$$z_k := x_k^{(k)} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

diagonális sorozat is részorozata (x_n)-nek. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(A_n z_k)$ sorozat konvergens. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy az (Az_k) sorozat is konvergens, amiből már A kompaktsága következik. Mivel $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ teljes, ezért elég azt belátni, hogy (Az_k) Cauchy-sorozat. Mivel bármely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|Az_k - Az_l\|_{\mathcal{Y}} = \left\|Ax_k^{(k)} - Ax_l^{(l)}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \left\|Ax_k^{(k)} - A_n x_k^{(k)}\right\|_{\mathcal{Y}} + \left\|A_n x_k^{(k)} - A_n x_l^{(l)}\right\|_{\mathcal{Y}} + \left\|A_n x_l^{(l)} - Ax_l^{(l)}\right\|_{\mathcal{Y}},$$

és (x_n) korlátossága miatt alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|x_n\|_{\mathcal{X}} \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért, ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3K}, \qquad \text{akkor az} \qquad (A_n z_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(A_n x_k^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

sorozat konvergenciája következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy ha $N \leq k, l \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left\| Ax_k^{(k)} - A_n x_l^{(l)} \right\|_{\mathcal{Y}} < \frac{\varepsilon}{3},$$

és így

$$\begin{aligned} \|Az_k - Az_l\|_{\mathcal{Y}} &= \left\| Ax_k^{(k)} - Ax_l^{(l)} \right\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \|A - A_n\| \cdot \|z_k\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{3} + \|A - A_n\| \cdot \|z_k\|_{\mathcal{X}} < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Az iménti feladatbeli állítás azt jelenti, hogy **ha valamely korlátos lineáris operátor tetszőleges pontossággal közelíthető kompakt** (pl. véges rangú) **operátorokkal az indukált operátornormában, akkor a szóban forgó operátor kompakt**.

8.1.2. példa. Ha $k \in \mathbb{N}$ és

$$A_k : l_2 \to l_2, \qquad A(x_n) := \left(x_n^k\right), \qquad \text{ahol} \qquad x_n^k := \begin{cases} \dfrac{x_n}{n} & (n \leq k), \\ \\ 0 & (n > k) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $A_k \in L(l_2)$ véges rangú operátor. Így bármely $x \in l_2$ esetén

$$\|(A - A_k)x\|_{l_2}^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} \leq \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \frac{1}{(k+1)^2} \|x\|_{l_2},$$

ahonnan

$$\|A_k - A\| \leq \frac{1}{(k+1)^2}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(\|A_k - A\|) = 0$$

következik. Ez a fenti megjegyzés értelmében azt jelenti, hogy az

$$A : l_2 \to l_2, \qquad A(x_n) := \left(\frac{x_n}{n}\right)$$

operátor kompakt.

8.1.16. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér, ill. $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}$, továbbá $A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor van olyan

$$A_n \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad \dim(\mathcal{R}(A_n)) < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátorsorozat, hogy

$$\lim(\|A - A_n\|) = 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha A véges rangú: $\dim(\mathcal{R}(A)) < +\infty$, akor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $\dim(\mathcal{R}(A)) = +\infty$, ekkor (vö. 8.1.8. feladat) $\overline{\mathcal{R}(A)}$ végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert-tér. Ez azt jelenti (vö. 3.1.9. feladat), hogy $\overline{\mathcal{R}(A)}$-ban van megszámlálható, teljes ONR:

$$\{e_n \in \overline{\mathcal{R}(A)} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Így ha

$$P_n : \overline{\mathcal{R}(A)} \to M_n := \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$$

ortogonális projekció (vö. 4.3.17. feladat) és

$$A_n := P_k A \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\mathcal{R}(A_n) \subset M_n$ következtében A_n véges rangú operátor $(n \in \mathbb{N})$.

2. lépés. Ha $(\|A - A_n\|)$ nem nullsorozat, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ számra

$$\|A - A_n\| \geq \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ezért van olyan

$$x_n \in \mathcal{X} : \quad \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorsorozat, hogy

$$\|(A - A_n)x_n\|_{\mathcal{Y}} \geq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az A operátor kompaktsága következtében feltehető, hogy van olyan $y \in \mathcal{Y}$ vektor, amelyre

$$\lim(Ax_n) = y$$

(vö. 8.1.2. feladat). Így azt kapjuk (vö. 7.2.2. gyakorló feladat), hogy

$$\begin{aligned}(A - A_n)x_n &= (I - P_n)Ax_n = (I - P_n)y + (I - P_n)(Ax_n - y) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle y, e_k \rangle_{\mathcal{Y}} e_k + (I - P_n)(Ax_n - y).\end{aligned}$$

Figelemve véve, hogy

$$\|A_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

az iménti egyenlőtlenségből az

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \|(A - A_n)x_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \langle y, e_k \rangle_{\mathcal{Y}}^2} + 2\|Ax_n - y\|_{\mathcal{Y}}$$

becslést kapjuk. Az $n \to \infty$ határátmenettel pedig azt kapjuk, hogy

$$\lim(\|(A - A_n)x_n\|_{\mathcal{Y}}) = 0,$$

ami nem lehetséges. ■

8.1.17. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, úgy A pontosan akkor kompakt, ha A^* kompakt!

Útm. Ha A kompakt, akkor alkalmas – véges rangú operátorokból álló –

$$A_n \in L(\mathcal{X}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$\lim(\|A - A_n\|) = 0$$

teljesül (vö. 8.1.16. feladat). Mivel A^* véges rangú (vö. 7.2.1. gyakorló feladat), ezért

$$\lim(\|A^* - A_n^*\|) = \lim(\|A - A_n\|) = 0$$

(vö. 7.2.8. feladat). Ez azt jelenti, hogy A^* kompakt. Így A kompaktságából A^* kompaktsága, ebből pedig

$$A = (A^*)^*$$

kompaktsága következik. ■

8.2. Kompakt operátorok

8.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha az

$$A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \qquad A = [a_{mn}]_{m,n \in \mathbb{N}}$$

ún. végtelen mátrixra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < +\infty,$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (l_2, \|\cdot\|_{l_2})$ normált teret tekintve az

$$A : l_2 \to l_2, \qquad x = (x_n) \mapsto A(x) := (A_m(x_n))_{m \in \mathbb{N}} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \right)$$

operátorra $A \in K(l_2)$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $x = (x_n) \in l_2$, akkor

- a feltételből

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \leq +\infty, \qquad \text{azaz} \qquad (a_{mn})_{n \in \mathbb{N}} \in l_2,$$

  így a Hölder-egyenlőtlenség (vö. [15]) következtében

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn} x_n| \leq \|(a_{mn})_{n \in \mathbb{N}}\|_{l_2} \cdot \|x\|_{l_2} < +\infty,$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \in \mathbb{K} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

következik. Ez azt jelenti, hogy bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_m : l_2 \to \mathbb{R}, \qquad A_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n.$$

- a Hölder-egyenlőtlenség (vö. [15]) felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $x = (x_n) \in l_2$ esetén

$$\|Ax\|_{l_2}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \right|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty} \left(\|x\|_{l_2}^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \right) = \|x\|_{l_2}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < +\infty,$$

azaz

$$(A_m(x))_{m \in \mathbb{N}}) \in l_2.$$

- $A \in L(l_2)$, és az iménti becslésből

$$\|A\| \le \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2}$$

következik.

2. lépés. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $x \in l_2$, akkor az

$$A_m^{[k]} := \begin{cases} A_m(x) & (m \le k), \\ \\ 0 & (m > k), \end{cases}$$

ill. az

$$A^{[k]} : l_2 \to l_2, \qquad x \mapsto A^{[k]} x := \left(A_m^{[k]} x \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

operátorra

$$A^{[k]} \in L(l_2),$$

ill.

$$A^{[k]} x = \left(A_m^{[k]} x \right)_{m \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n \right)_{m \in \mathbb{N}} \qquad (x \in l_2),$$

ahol

$$b_{mn} = \begin{cases} a_{mn} & (m \le k), \\ \\ 0 & (m > k) \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Az $A^{[k]}$ operátorra az 1. lépésben igazoltakhoz hasonló állítások láthatók be, hiszen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_{mn}|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < +\infty.$$

Mivel $\mathcal{R}(A^{[k]})$ véges dimenziós, ezért bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén az $A^{[k]}$ operátor kompakt.

3. lépés. A Hölder-egyenlőtlenség következményeként azt kapjuk, hogy bármely $x = (x_n) \in l_2$ esetén

$$\left\| \left(A - A^{[k]}\right) x \right\|_{l_2}^2 = \sum_{m=k+1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \right|^2 \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \|x\|_{l_2}^2,$$

így

$$\left\| A - A^{[k]} \right\| \leq \sqrt{\sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2} \longrightarrow 0 \qquad (k \to \infty),$$

ahonnan

$$\lim_{k \to \infty} \left(A^{[k]}\right) = A \qquad /(L(l_2), \|\cdot\|)\text{-ban}/$$

következik. Ez pedig azt jelenti (vö. 8.1.15. feladat), hogy A kompakt. ■

8.2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$,

$$u_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{és} \qquad v_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ONR, továbbá

$$\alpha_n \in \mathbb{C} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az

$$Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, u_n \rangle v_n \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátor pontosan akkor

- véges rangú: $\dim(\mathcal{R}(A)) < +\infty$, ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre

  $$\alpha_n = 0 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N})$$

  teljesül;
- korlátos, ha az (α_n) sorozat is korlátos;
- kompakt, ha

  $$\lim(\alpha_n) = 0$$

  teljesül!

Útm.

- Világos, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\alpha_n \neq 0$, akkor $v_n \in \mathcal{R}(A)$. Így a $\{v_n\}$ rendszer lineáris függetlenségéből már következik az állítás.
- Ha (α_n) korlátos, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén $|\alpha_n| \leq K$, akkor a Bessel-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, u_n \rangle_{\mathcal{X}} v_n \right\|_{\mathcal{X}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \cdot |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq K^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle_{\mathcal{X}}|^2 \leq K^2 \|x\|_{\mathcal{X}}^2,$$

azaz A korlátos operátor. Ha (α_n) nem korlátos, akkor bármely $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan m index, hogy $|\alpha_m| \geq K$. Ezért

$$\|Au_m\|_{\mathcal{X}} = |\alpha_m| \geq K,$$

azaz A nem korlátos.

- Ha $\lim(\alpha_n) = 0$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor az

$$A_k : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad A_k x := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \langle x, u_n \rangle v_n$$

lineáris operátorok korlátosak és véges rangúak, így kompaktak is. Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\|(A - A_k)x\|_{\mathcal{X}}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, u_n \rangle_{\mathcal{X}} v_n - \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \langle x, u_n \rangle_{\mathcal{X}} v_n \right\|_{\mathcal{X}}^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \langle \alpha_n x, u_n \rangle_{\mathcal{X}} v_n \right\|_{\mathcal{X}}^2 \leq \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle \alpha_n x, u_n \rangle_{\mathcal{X}}|^2 \leq \\
&\leq \sup \left\{ |\alpha_n|^2 \in \mathbb{R} : \; k+1 \leq n \in \mathbb{N} \right\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle_{\mathcal{X}}|^2 = \\
&= \sup \left\{ |\alpha_n|^2 \in \mathbb{R} : \; k+1 \leq n \in \mathbb{N} \right\} \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}^2,
\end{aligned}$$

így

$$\|A - A_k\| \leq \sqrt{\sup \{|\alpha_n|^2 \in \mathbb{R} : \; k+1 \leq n \in \mathbb{N}\}},$$

ahonnan

$$\lim_{k \to \infty} (A_k) = A,$$

azaz A kompaktsága következik. Ha az (α_n) sorozat korlátos, de $(\alpha_n) \notin \mathfrak{c}_0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $N \in \mathbb{N}$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén $|\alpha_n| \geq \varepsilon$. Így, ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \geq N$, akkor

$$\|Au_m - Au_n\|_{\mathcal{X}}^2 = \|\alpha_m v_m - \alpha_n v_n\|_{\mathcal{X}}^2 = |\alpha_n|^2 + |\alpha_m|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

azaz az (Au_n) sorozat nem Cauchy-sorozat, így nem is konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy A nem kompakt. ■

8.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (l_2, \|\cdot\|_{l_2})$, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad x = (x_n) \mapsto Ax := \left(\frac{x_{n-1}}{n} \right) \qquad /x_0 := 0/$$

és a

$$B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad x = (x_n) \mapsto Bx := \left(\frac{x_n}{n+1} \right)$$

operátor kompakt!

Útm. Ha

$$a_{mn} := \begin{cases} \frac{1}{m} & (n = m-1), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \quad \text{és} \quad b_{mn} := \begin{cases} \frac{1}{m+1} & (n = m), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $x = (x_n) \in l_2$ esetén

$$Ax = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n\right)_{m\in\mathbb{N}} \qquad \text{és} \qquad Bx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n\right)_{m\in\mathbb{N}},$$

továbbá

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |b_{mn}|^2 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty.$$

Így a 8.2.1. feladatból A, ill. B kompaktsága következik. ■

8.2.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $A \in K(\mathcal{X})$ projektor, akkor $\mathcal{R}(A)$ zárt halmaz!

Útm. Ha $x \in \mathcal{X}$ és

$$u_n \in \mathcal{R}(A), \quad v_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozatok, amelyekre

$$\lim(u_n) = x \qquad \text{és} \qquad Av_n = u_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, akkor A folytonossága következtében

$$Ax = A(\lim(u_n)) = \lim(Au_n) = \lim(A(Av_n)) = \lim(A^2 v_n) = \lim(Av_n) = \lim(u_n) = x.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$x = Ax \in \mathcal{R}(A),$$

ahonnan már $\mathcal{R}(A)$ zártsága következik. ■

8.2.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor igaz az

$$A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A' \in K(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$$

ekvivalencia (**Schauder-tétel**)!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Megmutatjuk, hogy tetszőleges

$$v_n \in \mathcal{Y}^* \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat esetén az

$$A' v_n \subset \overline{\mathcal{Y}^*} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak van $\mathcal{Y}^*$-ban korlátos részsorozata. Ha A kompakt, akkor (vö. 1.1.14. feladat) a

$$H := \overline{A[K_1(0)]}$$

kompakt része $\mathcal{Y}$-nak. Ha

$$f_n := v_n|_H \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor (v_n) korlátossága következtében van olyan $K \geq 0$, hogy

$$\|v_n\|_{\mathcal{Y}^*} \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá az

$$\{f_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{C}(H, \mathbb{K})$$

halmaz pontonként korlátos, sőt egyenlő mértékben egyenletesen folytonos is, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $x, y \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |v_n(x) - v_n(y)| = v_n(x - y)| \leq \|v_n\|_{\mathcal{Y}^*} \cdot \|x - y\|_{\mathcal{X}} \leq K\|x - y\|_{\mathcal{X}}.$$

Így az Arselà–Ascoli–lemma (vö. 1.3.2. feladat) következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy (v_{ν_n}) a kompakt H-n egyenetesen konvergens. Mivel

$$\begin{aligned}
\left\|A'v_{\nu_m} - A'v_{\nu_n}\right\|_{\mathcal{X}^*} &= \sup\left\{|A'v_{\nu_m}(x) - A'v_{\nu_n}(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in K_1(0)\right\} = \\
&= \sup\{|v_{\nu_m}(Ax) - v_{\nu_n}(Ax)| \in \mathbb{R} : \ x \in K_1(0)\} = \\
&= \sup\{|v_{\nu_m}(y) - v_{\nu_n}(y)| \in \mathbb{R} : \ y \in A[K_1(0)]\} = \\
&= \sup\{|f_{\nu_m}(y) - f_{\nu_n}(y)| \in \mathbb{R} : \ y \in A[K_1(0)]\} \leq \\
&\leq \sup\{|f_{\nu_m}(y) - f_{\nu_n}(y)| \in \mathbb{R} : \ y \in H\} = \\
&= \|f_{\nu_m} - f_{\nu_n}\|_\infty,
\end{aligned}$$

és (f_{ν_n}) Cauchy-sorozat a $(\mathfrak{C}(H, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben, ezért $(A'v_{\nu_n})$ Cauchy-sorozat $\mathcal{X}^*$-ban, így $\mathcal{X}^*$ teljessége (vö. 4.4.1. feladat utáni megjegyzés) miatt $(A'v_{\nu_n})$ konvergens is $\mathcal{X}^*$-ban.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha A' kompakt, akkor az előző lépés következtében

$$A'' := (A')' \in K(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{Y}^{**}).$$

Így a 8.1.14/2. feladatbeli állítás következtében

$$A'' \circ \delta_{\mathcal{X}} \in K(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^{**}),$$

ahol $\delta_{\mathcal{X}} := \delta$ a 4.5.30. feladatbeli (folytonos) lineáris izometria. Könnyen megmutatható, hogy

$$A'' \circ \delta_{\mathcal{X}} = \delta_{\mathcal{Y}} \circ A.$$

Valóban, bármely $v \in \mathcal{Y}^*$, ill. $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$(A''(\delta_{\mathcal{X}}(x)))(v) = \delta_{\mathcal{X}}(x)(A'v) = (A'v)(x) = v(Ax) = \delta_{\mathcal{Y}}(Ax)(v),$$

és ezért

$$A''(\delta_{\mathcal{X}}(x)) = \delta_{\mathcal{Y}}(Ax).$$

Így

$$\delta_{\mathcal{Y}} \circ A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{**}).$$

Ha most

$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat, akkor $\delta_{\mathcal{Y}} \circ A$ kompaktsága következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy a $(\delta_{\mathcal{Y}}(Ax_{\nu_n}))$ sorozat konvergens $\mathcal{Y}^{**}$-ban. Így $\delta_{\mathcal{Y}}$ izometriája folytán (Ax_{ν_n}) Cauchy-sorozat $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$-ban, ezért annak teljessége következtében konvergens is. Ez azt jelenti, hogy $A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

8.2.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor igaz az

$$A^{-1} \in L(\mathcal{X}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A')^{-1} \in L(\mathcal{X}^*)$$

ekvivalencia!

Útm.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$, akkor $(A^{-1})' \in L(\mathcal{X}^*)$ és

$$(A^{-1})' \circ A' = (A \circ A^{-1})' = I' = (A^{-1} \circ A)' = A' \circ (A^{-1})'.$$

Ez azt jelenti, hogy A'-nak van korlátos inverze és

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ha A'-nak van korlátos inverze, akkor az iméntiek miatt $A'' \in L(X^{**})$. Így

$$K := \left\|(A'')^{-1}\right\| > 0$$

következtében (vö. 8.2.5. tétrel útmutatója)

$$\|\delta_{\mathcal{X}}(x)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \left\|(A'')^{-1}(A''(\delta_{\mathcal{X}}(x)))\right\|_{\mathcal{X}^{**}} \leq \left\|(A'')^{-1}\right\|_{L(\mathcal{X}^{**})} \cdot \left\|A''\delta_{\mathcal{X}}(x)\right\|_{\mathcal{X}^{**}} \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Ezért $\delta_{\mathcal{X}}$ izometriája miatt tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} = \| = \|\delta_{\mathcal{X}}(Ax)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \left\|A''(\delta_{\mathcal{X}}(x))\right\|_{\mathcal{X}^{**}} \geq \frac{1}{K}\|\delta_{\mathcal{X}}(x)\|_{\mathcal{X}^{**}} = \frac{1}{K}\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Ez azt jelenti, hogy A inektív, hiszen $Ax = 0$-ból

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} = 0 \geq \frac{1}{K}\|x\|_{\mathcal{X}}$$

miatt $\|x\|_{\mathcal{X}} = 0$, azaz $x = 0$ következik. Így A' injektivitása következtében (vö. 4.5.28. feladat) A szürjektív. Megmutattuk tehát, hogy A bijektív. Ez azt jelenti, hogy $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$ (vö. 6.1.4. feladat). ■

8.2.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in K(\mathcal{X})$ és $B := I - A$, akkor

1. $\mathcal{N}(B)$ véges dimenziós altere $\mathcal{X}$-nek;
2. $\mathcal{R}(B)$ zárt altere $\mathcal{Y}$-nak!

Útm.

1. A 8.1.14/1. feladatbeli, ill. a 8.1.9. feladatbeli állítások következményeként $B \in L(\mathcal{X})$, így

$$\mathcal{N}(B) = B^{-1}[\{0\}]$$

zárt altér $\mathcal{X}$-ben. Ha tehát az

$$x_n \in \mathcal{N}(B) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, akkor A kompaktsága következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy alkalmas $y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lim(Ax_{\nu_n}) = y.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{\nu_n} \in \mathcal{N}(B)$, ezért

$$Bx_{\nu_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{\nu_n} - Ax_{\nu_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{\nu_n} = Ax_{\nu_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így a fenti határérték-reláció, ill. $\mathcal{N}(B)$ zártásga következtében

$$\lim(x_{\nu_n}) = y \in \mathcal{N}(B).$$

Ez azt jelenti (vö. 1.3.78. feladat), hogy $\mathcal{N}(B)$ véges dimenziós.

2. Mivel $\mathcal{N}(B)$ véges dimenziós, ezért (vö. 4.5.9. feladat), akkor alkalams $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ zárt altér esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{Z},$$

speciálisan

$$\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{Z} = \{0\}.$$

Ha most $B_{\mathcal{Z}} := B|_{\mathcal{Z}}$, akkor

- $B_{\mathcal{Z}}$ injektív, hiszen $B_{\mathcal{Z}}u = 0$-ból $u = 0$ következik.
- $\mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}}) = \mathcal{R}(B)$, hiszen a triviális $\mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}}) \subset \mathcal{R}(B)$ tartalmazáson felül a

$$Bu = B(x+y) = Bx + By = By \qquad (u = x + y,\, x \in \mathcal{N}(B),\, y \in \mathcal{Z})$$

egyenlőségből $\mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}}) \supset \mathcal{R}(B)$ következik.

Elegendő tehát azt megmutatni, hogy $\mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}})$ zárt. Ha tehát $v \in \overline{\mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}})}$, akkor alkalmas

$$u_n \in \mathcal{Z} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozattal

$$u_n - Au_n = B_{\mathcal{Z}}u_n = Bu_n \longrightarrow v \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty).$$

Ha az (u_n) sorozat nem korlátos, akkor valamely (ν_n) indexsorozattal $\lim(\|u_{\nu_n}\|) = +\infty$. Ha most

$$y_n := \frac{u_{\nu_n}}{\|u_{\nu_n}\|} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $(B_{\mathcal{Z}} y_n)$ korlátos, ezért

$$(*) \qquad y_n - Ay_n = B_{\mathcal{Z}}(y_n) = \tfrac{1}{\|u_{\nu_n}\|} B_{\mathcal{Z}}(u_{\nu_n}) \longrightarrow 0 \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty).$$

Mivel (y_n) korlátos és A kompakt, ezért alkalmas (μ_n) indexsorozattal, ill. $z \in \mathcal{X}$ vektorral

$$Ay_{\mu_n} \longrightarrow z \quad (n \to \infty).$$

A fentiek következtében ez azt jelenti, hogy $\lim(y_{\mu_n}) = z \in \mathcal{Z}$, hiszen $\mathcal{Z}$ zárt, ill.

$$\|y_{\mu_n} - z\| \leq \|y_{\mu_n} - Ay_{\mu_n}\| + \|Ay_{\mu_n} - z\| \longrightarrow 0 + 0 = 0 \quad (n \to \infty).$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|y_n\| = 1$, ezért $\|z\| = 1$, azaz $z \neq 0$. A $(*)$ határértékreláció ismételt alklamazásával így azt kapjuk, hogy $B_{\mathcal{Z}} z = 0$, azaz $B_{\mathcal{Z}}$ nem injektív, ami nem lehetséges. Ez azt jelenti, hogy az (u_n) sorozat korlátos. A kompaktsága következtében így van olyan (τ_n) indexsorozat, hogy

$$Au_{\tau_n} \longrightarrow z \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty).$$

A fentiek alapján így

$$u_{\tau_n} - Au_{\tau_n} = B_{\mathcal{Z}} u_{\tau_n} \longrightarrow v \quad (n \to \infty),$$

ebből pedig

$$u_{\tau_n} = B_{\mathcal{Z}} u_{\tau_n} + Au_{\tau_n} \longrightarrow v + z =: w \in \mathcal{X} \quad (n \to \infty)$$

következik. A $B_{\mathcal{Z}}$ operátor folytonossága következtében így

$$B_{\mathcal{Z}} u_{\tau_n} \longrightarrow B_{\mathcal{Z}} w = v \in \mathcal{R}(B_{\mathcal{Z}}). \quad \blacksquare$$

8.2.8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in K(\mathcal{X})$ és $B := I - A$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások (**Fredholm-alternatíva**)!

(1) B injektív.

(2) B szürjektív.

(3) B bijektív.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Ha B injektív és nem szürjektív, azaz

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R}(B) \neq \mathcal{X},$$

akkor (vö. 8.2.7. feladat) $\mathcal{X}_1$ valódi, zárt altere $\mathcal{X}$-nek. Ha

$$\mathcal{X}_{n+1} := B[\mathcal{X}_n] \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

- $\mathcal{X}_n$ a B, így az A-nak is invariáns halmaza, hiszen
  (a) ha B-nek invariáns halmaza, akkor

$$x \in \mathcal{X}_n \quad \Longrightarrow \quad Ax = x - Bx \in \mathcal{X}_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

  azaz A-nak is invariáns halmaza.

  (b) ha
  - $n = 1$, akkor $x \in \mathcal{X}_1 = B[\mathcal{X}]$-ből $Bx \in B[\mathcal{X}] = \mathcal{X}_1$ következik.
  - valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in \mathcal{X}_{n+1} = B[\mathcal{X}_n],$$

    akkor alkalmas $y \in \mathcal{X}_n$ esetén $x = By$. Így $\mathcal{X}_n$ invariáns voltát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x = By \in \mathcal{X}_n \quad \Longrightarrow \quad Bx \in \mathcal{X}_{n+1} = B[\mathcal{X}_n].$$

- $\mathcal{X}_n$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben (vö. 8.2.7. feladat).
- $\mathcal{X}_{n+1} \subsetneqq \mathcal{X}_n$, hiszen
  (a) $\mathcal{X}_{n+1} \subset \mathcal{X}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ egyszeűen következik abból, hogy $\mathcal{X}_n$ a B-nek invariáns halmaza, ui.

$$\mathcal{X}_{n+1} = B[\mathcal{X}_n] \subset \mathcal{X}_n.$$

  (b) $\mathcal{X}_{n+1} \neq \mathcal{X}_n$ $(n \in \mathbb{N})$, ui. $\mathcal{R}(B) \neq \mathcal{X}$ következtében van olyan $y \in \mathcal{X}$, hogy

$$Bx \neq y \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

  továbbá B injektív /ui. $B(Bx)) \neq By \Rightarrow Bx \neq y$/, így

$$\underbrace{B^{[n+1]}x}_{\in B^{[n+1]}[\mathcal{X}]=\mathcal{X}_{n+1}} \neq \underbrace{B^{[n]}x}_{\in B^{[n]}[\mathcal{X}]=\mathcal{X}_n} \qquad (x \in \mathcal{X})$$

  (vö. 10.1.3. definíció).

A 2.4.10. feladatbeli állítás következtében bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $u_n \in \mathcal{X}_n$, hogy

$$\|u_n\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \rho(u_n, \mathcal{X}_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Ha most $m, n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $m > n$, akkor $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}_n$, és így

$$Bu_n + u_m - Bu_m \in \mathcal{X}_{n+1}$$

és

$$\|Au_n - Au_m\| = \|u_n - (Bu_n + u_m - Bu_m)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy (Au_n) nem Cauchy-sorozat, így nincsen konvergens részsorozata sem. Ez azonban nem lehetséges, hiszen (u_n) korlátos és A kompakt, ezért (Au_n)-nek van konvergens részsorozata. Így tehát B szürjektív.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (1)/. Ha $B = I - A$ szürjektív, akkor (vö. 4.5.28. feladat) B' injektív. Schauder tétele (vö. 8.2.5. feladat) következtében így A-val együtt A' is kompakt. Mivel $B' = I' - A'$, ezért B' szürjektív. Tehát B' bijektív, így van korlátos inverze is (vö. 6.1.4. feladat). A 8.2.6. feladatbeli állítás felhasználásával így azt kaptuk, hogy B-nek van korlátos inverze, tehát injektív. ■

8.2.1. példa. Ha $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$,

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \qquad f : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{C},$$

akkor az

$$(Au)(x) := \int_a^b f(x,y)u(y)\,dy \qquad (u \in \mathcal{X},\ x \in [a,b])$$

operátor kompakt (vö. 8.1.1. feladat). Így az, hogy bármely $v \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ mellett pontosan egy olyan $u \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ van, amelyre

$$u(x) - \int_a^b f(x,y)u(y)\,dy = v(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül, egyenérékű azzal, hogy bármely $v \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ mellett legalább egy ilyen u van. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy

$$u(x) - \int_a^b f(x,y)u(y)\,dy = 0 \qquad (x \in [a,b]) \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) = 0 \quad (x \in [a,b]).$$

8.2.9. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $u, v \in \mathcal{X}$,

$$Ax := \langle x, u\rangle v \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

akkor A kompakt!

Útm. Világos, hogy $A \in L(\mathcal{X})$ (vö. 4.2.41. feladat), továbbá

$$\mathcal{R}(A) \subset \operatorname{span}(\{v\}),$$

ezért A véges rangú, és így kompakt (vö. 8.1.12. feladat). ■

9. fejezet

Spektrum

9.1. Operátorok sajátértéke

Lineáris algebrai tanulmányainkból nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{X} := \mathbb{K}^n$, $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Ax := Mx = \left[\sum_{k=1}^{n} M_{ik}x_k\right]_{i\in\{1,\ldots,n\}},$$

akkor

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A)) = n,$$

azaz A vagy injektív és szürjektív, vagy pedig nem injektív és nem szürjektív, továbbá egyenértékűek az alábbi állítások:

1. a $\lambda I - A$ operátor nem injektív:

   $$\mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\};$$

2. a $\lambda E - M$ mátrix determinánsára

   $$\det(\lambda E - M) = 0$$

   teljesül ($E \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $Eu = Iu$ $(u \in \mathcal{X})$);

3. van olyan $0 \neq u \in \mathbb{K}^n$ vektor, hogy

   $$Au = \lambda u, \qquad \text{azaz} \qquad Mu = \lambda u;$$

4. a

   $$\lambda E - M$$

   mátrix nem invertálható;

5. a

   $$\lambda I - A$$

   operátor nem bijektív.

9.1.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ lineáris operátor esetén a $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A operátor **sajátérték**ének, ill. az $u \in \mathcal{X}$ vektort az A operátor λ sajátértékhez tartozó **sajátvektor**ának nevezzük, ha

$$0 \neq u \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad Au = \lambda u$$

teljesül. Az

$$\mathcal{A}_\lambda := \mathcal{N}(\lambda I - A)$$

pedig λ sajátértékéhez tartozó **sajátalteret** jelöli. Az $\mathcal{A}_\lambda$ altér dimenzióját a λ sajátérték **(geometriai) multiplicitás**ának nevezzük.

Látható, hogy valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ szám pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha a $\lambda I - A$ operátor nem injektív, azaz $\mathcal{A}_\lambda \neq \{0\}$.

9.1.1. példa.

1. A 4.1.8. feladatbeli A operátor esetén

$$Ae_n = \frac{1}{n} e_n, \qquad \text{ahol} \qquad e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. A 4.1.3. gyakorló feladatbeli (α_n) sorozathoz tartozó A diagonáloperátor sajátértékeinek halmaza a $p = q$ esetben nem más mint

$$\{\alpha_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\},$$

a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér pedig

$$\{(x_n) \in l_p : \; x_n = 0 \, (\alpha_n \neq \lambda)\}.$$

3. A 4.1.4. gyakorló feladatbeli φ függvénnyel való szorzás-operátornak $p = q$ esetén
   - nincsen sajátértéke, ha bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ szám esetén az $\{f = \lambda\}$ halmaz nullmértékű;
   - λ az A sajátértéke, ha $\{f = \lambda\}$ pozitív mértékű, és a hozzá tartozó sajátaltér:

$$\{f \in L^p(\Omega) : \; f(x) = 0 \; (\text{m.m. } x \in \Omega : \; \varphi(x) \neq \lambda)\}.$$

A kvantummechanikában nagy jelentősége van az alábbi feladatban megfogalmazott állításnak.

9.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{X}$ lineáris tér és az $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ operátorok kommutálnak, továbbá A-nak van nem-elfajuló sajátértéke (a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós), akkor A-nak és B-nek van közös sajátvektora!

Útm. Ha valamely $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $0 \neq u \in \mathcal{X}$ esetén $Au = \lambda u$, továbbá $\dim(\mathcal{A}_\lambda) = 1$, akkor $[A, B] = O$ következtében

$$A(Bu) = B(Au) = B(\lambda u) = \lambda(Bu),$$

azaz Bu sajátvektora A-nak, ugynazzal a λ sajátértékkel. Ez azt jelenti, hogy valamely $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$ esetén $Bu = \mu u$, azaz u sajátvektora B-nek is. ■

Ha A-nak és B-nek van közös u sajátvektora, akkor persze

$$[A, B]u = 0,$$

hiszen ha valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ill. $0 \neq u \in \mathcal{X}$ esetén

$$Au = \lambda u \qquad \text{és} \qquad Bu = \mu u,$$

akkor

$$ABu = A(\mu u) = \mu(Au) = \mu\lambda u = \lambda\mu u = \lambda(Bu) = B(\lambda u) = BAu.$$

9.1.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér és $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ lineáris operátor, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A operátor páronként különböző sajátértékei, akkor a hozzájuk tartozó $u_1, \ldots, u_k$ sajátvektorok függetlenek.
2. Ha A korlátos és λ sajátértéke A-nak, akkor
$$|\lambda| \leq \|A\|.$$
3. Ha A izometrikus és λ sajátértéke A-nak, akkor $|\lambda| = 1$.
4. Ha $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$-et skaláris szorzat generálja: $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} = \langle\cdot,\cdot\rangle$, és
   (a) az A operátor szimmetrikus, akkor A minden sajátértéke valós;
   (b) az A operátor izometrikus vagy szimmetrikus, továbbá u, ill. v az A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai, akkor $u \perp v$.

Útm.

1. Ha $k = 1$, akkor $u_1 \neq 0$ miatt az állítás teljesül. Ha valamely $2 \leq k \in \mathbb{N}$ esetén az $u_1, \ldots, u_{k-1}$ vektorok lineárisan függetlenek és
$$(*) \qquad \sum_{l=1}^{k} \alpha_l u_l = 0,$$
akkor
$$0 = (\lambda_k I - A)\sum_{l=1}^{k} \alpha_l u_l = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)u_l = \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(\lambda_k - \lambda_l)u_l.$$

Így az indukciós feltevésből

$$\alpha_l(\lambda_k - \lambda_l) = 0 \qquad (l \in \{1, \ldots, k-1\}),$$

azaz tetszőleges $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ esetén $\alpha_l = 0$ következik. Tehát $(*)$ az

$$\alpha_k u_k = 0$$

egyenlőségre redukálódik. Mivel u_k sajátvektor, ezért $u_k \neq 0$, így $\alpha_k = 0$, azaz az $u_1, \ldots, u_k$ vektorok függetlenek.

2. Ha λ sajátértéke A-nak, akkor alkalmas $u \in \mathcal{D}(A)$ vektorral

$$Au = \lambda u,$$

ahonnan

$$|\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}} = \|\lambda u\|_{\mathcal{X}} = \|Au\|_{\mathcal{X}} \leq \|A\| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}},$$

azaz

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

következik.

3. Ha u az izometrikus A operátor λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \|Au\|_{\mathcal{X}} = \|\lambda u\|_{\mathcal{X}} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{X}},$$

ahonnan

$$|\lambda| = 1$$

következik.

4. Ha valamely λ, μ sajátértékek esetén

$$Au = \lambda u, \qquad \text{ill.} \qquad Av = \mu v,$$

úgy

(a) $\|u\|_{\mathcal{X}} \neq 0$, ezért

$$\lambda \|u\|^2_{\mathcal{X}} = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \|u\|^2_{\mathcal{X}}.$$

(b) ha

- A izometrikus, akkor

$$\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle \lambda u, \mu v \rangle = \lambda \overline{\mu} \langle u, v \rangle,$$

azaz

$$(1 - \lambda \overline{\mu}) \langle u, v \rangle = 0.$$

A μ sajátértékkel beszorozva ezt az egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$(\mu - \lambda |\mu|^2) \langle u, v \rangle = 0, \qquad \text{azaz} \qquad (\mu - \lambda) \langle u, v \rangle = 0,$$

így $\lambda \neq \mu$ esetén

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

- A szimmetrikus, akkor pl. $\lambda \neq 0$ esetén

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda}Au, v\right\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle u, Av\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle u, v\rangle.$$

Így

$$\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\langle u, v\rangle = 0$$

és ezért $\lambda \neq \mu$ esetén

$$\langle u, v\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

9.1.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, és az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor normális, továbbá

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértéke A-nak, ill. $0 \neq u \in \mathcal{A}_\lambda$, azaz $Au = \lambda u$, akkor

$$A^*u = \overline{\lambda}u$$

teljesül;

2. λ, μ sajátértékei A-nak, akkor igaz a

$$\lambda \neq \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_\lambda \perp \mathcal{A}_\mu$$

implikáció!

Útm.

1. Egy korábbi egyenlőséget felhasználva (vö. 7.2.4. definíció utáni megjegyzés)

$$\mathcal{N}(\lambda I - A) = \mathcal{N}((\lambda I - A)^*) = \mathcal{N}(\overline{\lambda}I - A^*).$$

2. Ha

$$0 \neq u \in \mathcal{A}_\lambda, \qquad \text{ill.} \qquad 0 \neq v \in \mathcal{A}_\mu,$$

akkor

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle = \langle u, \overline{\mu}v\rangle = \mu\langle u, v\rangle,$$

ahonnan

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0,$$

azaz

$$u \perp v$$

következik. $\blacksquare$

9.1.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\qquad K(x,y):=\begin{cases} y-xy & (y\in[0,x]),\\ \\ x-xy & (y\in[x,1]),\end{cases}$$

akkor az

$$A:\mathfrak{C}[0,1]\to\mathfrak{C}[0,1],\qquad Au:=\int_0^1 K(\cdot,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

operátor sajátértékei:

$$\lambda_n:=\frac{1}{n^2\pi^2}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

a megfelelő sajátfüggvények pedig

$$u_n(x):=\sin(n\pi x)\qquad(x\in[0,1]),$$

továbbá minden sajátérték geometriai multiplicitása 1, azaz a sajátértékekhez tartozó sajátaltér egydimenziós!

Útm. Ha $\lambda\in\mathbb{K}$, $u\in\mathfrak{C}[0,1]$, akkor

$$Au=\lambda u$$

pontosan akkor teljesül, ha bármely $x\in[0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}\lambda u(x) &= \int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y=\\ &= \int_0^x (y-xy)u(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^1 (x-xy)u(y)\,\mathrm{d}y=\\ &= \int_0^x yu(y)\,\mathrm{d}y+x\left\{\int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 yu(y)\,\mathrm{d}y\right\},\end{aligned}$$

ahonnan

$$u(0)=0=u(1)$$

következik. Sőt, az is látható, hogy ha u az A sajátfüggvénye, akkor $u\in\mathfrak{D}$, így bármely $x\in[0,1]$ esetén

$$\lambda u'(x)=xu(x)+\int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 yu(y)\,\mathrm{d}y-xu(x)=\int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 yu(y)\,\mathrm{d}y.$$

Innen pedig az következik, hogy $u\in\mathfrak{D}^2$ és

$$\lambda u''(x)=-u(x)\qquad(x\in[0,1]).$$

Így $u\in\mathfrak{C}^2[0,1]$, és $\lambda=0$ esetén

$$u(x)=0\qquad(x\in[0,1]),$$

azaz 0 nem sajátértéke A-nak. $\lambda\neq0$ esetén az u sajátfüggvény megoldása a

$$(*)\qquad y\in\mathfrak{C}^2[0,1],\qquad \lambda y''+y=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

peremérték-feladatnak. A differenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy a megoldástér egydimenziós és a megoldások

$$u(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad (x \in [0,1])$$

alakúak. Az $u(1) = 0$ feltételből

$$\lambda = (n\pi)^{-2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Ezzel beláttuk, hogy ha $\lambda \neq 0$ sajátértéke A-nak, akkor

$$\lambda = \lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és a λ_n sajátértékhez tartozó sajátfüggvényekre

$$u_n(s) = \sin(n\pi x) \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül, továbbá $\mathcal{N}(\lambda_n I - A)$ egydimenziós. Fordítva, minden ilyen alakú λ szám sajátértéke A-nak. ■

9.1.5. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$ esetén mutassuk meg, hogy

1. ha az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor kompakt és szimmetrikus, akkor vagy $\|A\|$ vagy pedig $-\|A\|$ sajátértéke A-nak;
2. ha az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor sajátértéke a $\|A\|$ szám, akkor fennáll a

$$\|I + A\| = 1 + \|A\|$$

egyenlőség!

Útm.

1. Mivel
$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle_{\mathcal{X}}| \in \mathbb{R} : \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$$
(vö. 7.2.19. feladat), ezért alkalmas
$$x_n \in \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatra
$$\lim(\langle Ax_n, x_n\rangle_{\mathcal{X}}) \in \{-\|A\|, \|A\|\}.$$
Ha
$$\lim(\langle Ax_n, x_n\rangle_{\mathcal{X}}) = \|A\|$$
(a másik eset ugyanígy tárgyalható), akkor A kompaktsága következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, amelyre
$$\lim(Ax_{\nu_n}) =: y \in \mathcal{X}$$

teljesül. Mivel

$$\|Ax_{\nu_n} - \|A\|x_{\nu_n}\|_{\mathcal{X}}^2 \leq -2\|A\| \cdot \Re(\langle Ax_{\nu_n}, x_{\nu_n}\rangle) + 2\|A\|^2,$$

ezért

$$\lim(Ax_{\nu_n} - \|A\|x_{\nu_n}) = 0 \in \mathcal{X}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy alkalmas $x \in \mathcal{X}$ esetén $\lim(x_{\nu_n}) = x$ és

$$Ax = A\lim(x_{\nu_n}) = \lim(Ax_{\nu_n}) = \lim(\|A\|x_{\nu_n}) = \|A\|\|A\|\lim(x_{\nu_n}) = x.$$

(vö. ha az $A \in L(\mathcal{X})$ operátor kompakt és szimmetrikus, akkor vagy $\|A\|$ vagy pedig $-\|A\|$ sajátértéke A-nak;

2. Tegyük fel, hogy valamely $u \in \mathcal{X}$, $\|u\|_{\mathcal{X}} = 1$ vektorra $Au = \|A\|u$ teljesül. Ekkor

$$\|I + A\| \geq \|(I + A)u\|_{\mathcal{X}} = (1 + \|A\|)\|u\|_{\mathcal{X}} = 1 + \|A\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|I + A\| \geq \|A\|. \quad \blacksquare$$

9.2. Operátorok spektruma

Mint ahogy az a 9.1.2/1. feladatbeli állításból is látható, véges dimenziós $\mathcal{X}$ tér esetén valamely $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operátornak legfeljebb véges sok (véges **algebrai multiplicitású**[1]) sajátértéke lehet, továbbá az alábbi két eset közül pontosan az egyik teljesül:

- a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám sajátértéke A-nak, azaz $\lambda I - A$ nem injektív, így nem is bijektív;
- a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám nem sajátértéke A-nak, azaz $\lambda I - A$ injektív (és egyúttal bijektív), továbbá
$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X})$$
(vö. 4.2.33. feladat).

Végtelen dimenziós $\mathcal{X}$ tér esetén más jelenségek is felléphetnek. Előfordulhat pl., hogy A-nak nincsen sajátértéke, vagy pl. az, hogy $\lambda I - A$ injektivitása nem egyenértékű bijektivitásával.

[1] Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ az A operátor sajátértéke, akkor λ algebrai multiplicitása megadja, hogy λ hányszoros gyöke az A operátornak megfelelő M mátrix karakterisztikus polinomjának.

9.2.1. példa. A
$$J : l_p \to l_p, \qquad Ju := (0, u_1, u_2, \ldots)$$
operátornak nincsen sajátértéke, hiszen ellenkező esetben valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ számra
$$0 = \lambda u_1, \qquad u_{n-1} = \lambda u_n \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$
teljesülne, ami nem lehetséges, ui. ekkor $\lambda = 0$ esetén $u_{n-1} = 0$, ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, azaz
$$u_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor λ-val átosztva ugyanerre az eredményre jutunk. Sőt az is könnyen belátható, hogy J injektív, így a
$$0I - J = -J \in L(l_p)$$
is az, de $-J$ nem szürjektív, hiszen értékkészlete nem tartalmazza az
$$(1,0,0,\ldots) \in l_p$$
sorozatot.

Végtelen dimenziós $\mathcal{X}$ tér esetén így, ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$, akkor $\mathbb{K}$ elemei az alábbi tulajdonságok közül pontosan az egyikkel jellemezhetők:

- $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda I - A$ nem injektív:
$$\mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\},$$
azaz alkalmas $0 \neq u \in \mathcal{A}$ vektor esetén $Au = \lambda u$;
- $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda I - A$ injektív és $(\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{A})$;
- $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda I - A$ injektív és $(\lambda I - A)^{-1} \notin L(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

9.2.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, ill. az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ lineáris operátor esetén az
$$r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \ \mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}, \ (\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{A})\right\},$$
ill. a
$$\sigma(A) := \mathbb{K} \backslash r(A)$$
halmazt A **rezolvens-halmaz**ának, ill. **spektrum**ának nevezzük. Ha $r(A) \neq \emptyset$, akkor az
$$R_\lambda := (\lambda I - A)^{-1} \qquad /\lambda \in r(A)/$$
operátor az A **rezolvense**.

Világos, hogy

- ha $\mathcal{X} = \{0\}$, akkor
$$r(A) = \mathbb{K} \qquad \text{és} \qquad \sigma(A) = \emptyset,$$
ezért a továbbiakban (általában) feltesszük, hogy $\mathcal{X} \neq \{0\}$;
- ha a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám sajátértéke A-nak, akkor
$$\mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\},$$
így $\lambda \in \sigma(A)$;
- ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $A \in L(\mathcal{X})$, úgy
$$\lambda \in r(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda I - A \quad \text{bijektív},$$
azaz
$$\forall\, v \in \mathcal{X}\ \exists | u \in \mathcal{X}: \ (\lambda I - A)u = v \quad / \Leftrightarrow\ \lambda u - Au = v/,$$
ui. $\lambda \in r(A)$ esetén
$$\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\},$$
így $\lambda I - A$ injektív és
$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{A})$$
következtében $\lambda I - A$ triviálisan szürjektív, továbbá ha a $\lambda I - A$ operátor bijektív, akkor
$$\lambda I - A \in L(\mathcal{X})$$
miatt a Banach-féle homeomorfia-tételt (vö. 6.1.4. feladat) felhasználva azt kapjuk, hogy
$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X})$$
teljesül;
- a $\sigma(A)$ halmaznak egy
$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \uplus \sigma_d(A).$$
diszjunkt felbontását kaphatjuk az alábbi részhalmazok bevezetésével:
$$\sigma_d(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}: \ \mathcal{N}(\lambda I - A) \neq \{0\}\} \quad (A \text{ **diszkrét spektruma**}),$$ [2]
$$\sigma_c(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{K}: \ \mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\},\ (\lambda I - A)^{-1} \notin L(\mathcal{X}, \mathcal{A})\right\}$$
(A **folytonos spektruma**).

[2] Az A operátor diszkrét spektruma tehát nem más, mint A sajátértékeinek halmaza.

9.2.2. példa. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Au := \alpha u$$

operátor spektrumára

$$\sigma(A) = \{\alpha\}$$

teljesül, ui. az

$$\alpha I - A = O,$$

ami nem bijektív, így $\alpha \in \sigma(A)$, továbbá tetszőleges $\alpha \neq \beta \in \mathbb{K}$ számra

$$\beta I - A = (\beta - \alpha)I,$$

ami invertálható:

$$((\beta-\alpha)I)^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha} I \in L(\mathcal{X}),$$

így $\beta \notin \sigma(A)$.

9.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\dim(\mathcal{X}) < \infty$, akkor

$$\sigma(A) = \sigma_d(A), \qquad \text{azaz} \qquad \sigma_c(A) = \emptyset,$$

teljesül!

Útm. Mivel

$$\sigma_d(A) \subset \sigma(A),$$

ezért elég azt belátni, hogy

$$\sigma_d(A) \supset \sigma(A)$$

teljesül. Ha valamely $\lambda \in \sigma(A)$ nem sajátértéke A-nak, azaz $\lambda \notin \sigma_d(A)$, akkor $\lambda I - A$ ugyan injektív, de $(\lambda I - A)^{-1}$ korlátossága (vö. 4.2.33. feladat) miatt $\lambda \notin \sigma_c(A)$, ami nem lehetséges. ■

9.2.3. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \qquad \mathcal{H} := \mathfrak{C}^1([a,b],\mathbb{R}), \qquad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty,$$

$$Au := u' \quad (u \in \mathcal{H}),$$

akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \in \sigma(A)$, ui.

$$u(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in [a,b]) \qquad \Longrightarrow \qquad u' = \lambda u,$$

így

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) = \mathbb{R}, \qquad r(A) = \emptyset.$$

9.2.4. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad \mathcal{H} := \left\{f \in \mathfrak{C}^1([a,b],\mathbb{R}):\ f(b)=0\right\}, \quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty,$$

$$Au := u' \quad (u \in \mathcal{H}),$$

akkor

$$\sigma(A) = \emptyset, \qquad \text{azaz} \qquad r(A) = \mathbb{R},$$

továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$u = (\lambda I - A)^{-1} v$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$u' = \lambda u - v, \qquad u(b) = 0,$$

így

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp\left(\int_b^x \lambda \,\mathrm{d}t\right) \cdot \int_b^x \left\{(-v(t)) \cdot \exp\left(-\int_b^t \lambda \,\mathrm{d}s\right)\right\} \mathrm{d}t = \\ &= -e^{\lambda(x-b)} \cdot \int_b^x v(t) e^{\lambda(b-t)} \,\mathrm{d}t = -\int_b^x e^{\lambda(x-t)} v(t) \,\mathrm{d}t \quad (x \in [a,b]). \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in \mathcal{X}$ esetén

$$(R_\lambda v)(x) = \int_x^b e^{\lambda(x-t)} v(t) \,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

9.2.2. feladat. Adott $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{L^2}$ és

$$Au := u(-\cdot) \quad (u \in \mathcal{X})$$

(lineáris) operátor esetén határozzuk meg a diszkrét és a folytonos spektrumot!

Útm. Világos, hogy

$$A^n = \begin{cases} I & (n \equiv 0\ (2)), \\ \\ A & (n \equiv 1\ (2)) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

- $\sigma_d(A) = \{-1,1\}$, ui.
  - ha valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
    $$0 \neq u \in \mathcal{N}(\lambda I - A),$$
    akkor egyrészt
    $$Au = \lambda u,$$

másrészt a fentiekből látható, hogy

$$(*) \qquad u = Iu = A^2u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda^2 u,$$

$$(\lambda^2 - 1)u = 0,$$

azaz $\lambda \in \{-1,1\}$;

– ha $u \in$ páros, ill. páratlan függvény:

$$u(x) = u(-x), \qquad \text{ill.} \qquad u(x) = -u(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$Au = u, \qquad \text{ill.} \qquad Au = -u,$$

azaz

$$-1,1 \in \sigma_d(A);$$

- $\sigma(A) = \sigma_d(A)$, ui. ha $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\sigma_d(A)$ és
  – $u \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$, akkor a $(*)$ összefüggés miatt

$$(\lambda^2 - 1)u = 0,$$

azaz $u = 0$, így $\lambda I - A$ injektív;

– tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ esetén az

$$u(x) := \frac{\lambda v(x) + v(-x)}{\lambda^2 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $u \in \mathcal{X}$ és

$$((\lambda I - A)u)\,(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left\{\lambda^2 v(x) + \lambda v(-x) - \lambda v(-x) - v(x)\right\} = v(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz $\lambda I - A$ szürjektív. ■

9.2.3. feladat. Adott $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ és $u \in \mathcal{X}$ esetén határozzuk meg az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Au)(x) := \int_a^x u(x)\,dx \qquad (x \in [a,b]),$$

operátor spektrumát!

Útm. Világos, hogy $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, továbbá

- A nem szürjektív, ui. ha valamely $u \in \mathcal{X}$ esetén $v = Au$, akkor $v \in \mathfrak{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, tehát a nem differenciálható folytonos függvények nem tartoznak A képterébe;
- minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda I - A$ bijektív, ui.

1. injektív, hiszen ha valemely $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$u \in \mathcal{N}(\lambda I - A),$$
azaz
$$\int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t = \lambda u(x) \quad (x \in [a,b]),$$
akkor
$$u \in \mathfrak{C}^1[a,b], \quad u(a) = 0 \quad \text{és} \quad u = \lambda u',$$
azaz
$$u(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]);$$

2. szürjektív, hiszen ha tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ esetén
$$u(x) := \frac{1}{\lambda}v(x) - \frac{1}{\lambda}h(x)\exp(x/\lambda) \quad (x \in [a,b]),$$
ahol
$$h(x) := -\frac{1}{\lambda}\int_a^x v(t)\exp(-t/\lambda)\,\mathrm{d}t \quad (x \in [a,b]),$$
akkor $u \in \mathcal{X}$, és így
$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)u(x) &= \lambda u(x) - \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= v(x) - h(x)e^{x/\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_a^x h(t)e^{t/\lambda}\,\mathrm{d}t = \\
&= v(x) - h(x)e^{x/\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t = \\
&\quad + \left[h(t)e^{t/\lambda}\right]_a^x - \int_a^x h'(t)e^{t/\lambda}\,\mathrm{d}t = \\
&= v(x) - \frac{1}{\lambda}\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x \left(-\frac{1}{\lambda}\right)v(t)e^{-t/\lambda}e^{t/\lambda}\,\mathrm{d}t = \\
&= v(x) \quad (x \in [a,b]).
\end{aligned}$$

$$\lambda I - A \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R})$$
bijektivitása következtében
$$\sigma(A) \subset \{0\},$$
és mivel A nem szürjektív, így
$$0I - A = -A$$
sem az, ezért
$$\sigma(A) = \{0\}. \quad \blacksquare$$

9.2.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ és

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Au)(x) := xu(x) \quad (x \in [a,b]),$$

akkor

1. $A \in L(\mathcal{X})$;
2. minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda I - A$ injektív, azaz $\sigma_d(A) = \emptyset$;
3. $\sigma(A) = [a,b]$;
4. ha $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$ és $v \in \mathcal{X}$, akkor fennáll az

   $$(R_\lambda v)(x) = \frac{v(x)}{x-\lambda} \qquad (x \in [a,b])$$

   egyenlőség!

Útm.

1. Korábban láttuk, hogy $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, továbbá tetszőleges $u \in \mathcal{X}$ esetén

   $$\begin{aligned} \|Au\| &= \max\{|xu(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \leq \\ &\leq \max\{|x| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \cdot \max\{|u(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = \\ &= \max\{|a|,|b|\} \cdot \|u\| \end{aligned}$$

   miatt $A \in L(\mathcal{X})$. Sőt, ha

   $$u(x) := 1 \qquad (x \in [a,b]),$$

   akkor $\|u\| = 1$ és

   $$\max\{|a|,|b|\} \leq \|\mathrm{id}|_{[a,b]}\| = \|Au\| \leq \|A\| \cdot \|u\| = \|A\|,$$

   így

   $$\|A\| = \max\{|a|,|b|\}.$$

2. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$, akkor

   $$(\lambda I - A)u = 0,$$

   azaz

   $$(\lambda - x)u(x) = 0 \quad (x \in [a,b]).$$

   Innen

   $$u(x) = 0 \quad (\lambda \neq x \in [a,b])$$

   következik. Így u folytonossága miatt $u = \widehat{0}$, ahonnan

   $$\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\},$$

   azaz $\lambda I - A$ injektív,

   $$\sigma_d(A) = \emptyset.$$

3. $\sigma_d(A) = \emptyset$ miatt elegendő megmutatni, hogy

$$\lambda I - A \quad \text{szürjektív} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in \mathbb{R}\backslash[a,b].$$

Valóban, ha $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$ és $v \in \mathcal{X}$, akkor az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) := \frac{v(x)}{\lambda - x}$$

(folytonos) függvényre

$$(\lambda I - A)u = v.$$

Ha viszont $\lambda \in [a,b]$ és

$$v : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := 1,$$

akkor nincs olyan $u \in \mathcal{X}$, amelyre

$$(\lambda I - A)u = v,$$

ui. ellenkező esetben a

$$v(x) = (\lambda - x)u(x) \qquad (x \in [a,b])$$

összefüggésbe $x = \lambda$-t helyettesítve más (kép)függvényt kapnánk.

4. Az eddigiek alapján világos, hogy $r(A) = \mathbb{R}\backslash[a,b]$ és $v \in \mathcal{X}$ esetén

$$(R_\lambda v)(x) = \left((\lambda I - A)^{-1} v\right)(x) = \frac{v(x)}{\lambda - x} \qquad (x \in [a,b]).$$

Megjegyzések.

1. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ a Lebesgue-féle Hilbert-tér, azaz

$$\mathcal{X} = L^2[a,b], \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2},$$

akkor A nem más, mint a kvantummechanika helyzet-operátora. Ebben az esetben is könnyen belátható, hogy

$$\sigma_d(A) = \emptyset, \qquad \text{ill.} \qquad \sigma(A) = [a,b] :$$

- Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$ és μ_1 az egydimenziós Lebesgue-mérték, akkor

$$\mu_1(\{x \in [a,b] : \ (\lambda - x)u(x) \neq 0\}) = 0,$$

és mivel $\mu_1 - m.m.\ x \in [a,b]$ esetén $\lambda - x \neq 0$, ezért

$$\mu_1(\{x \in [a,b] : \ u(x) \neq 0\}) = 0,$$

azaz $u = 0 \in \mathcal{X}$, így

$$\sigma_d(A) = \emptyset.$$

- Ha $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$, akkor minden $x \in [a,b]$ esetén $\lambda - x \neq 0$, ezért a
$$h(x) := \frac{1}{\lambda - x} \qquad (x \in [a,b])$$
folytonos, így mérhető. Következésképpen a
$$B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Bv := hv$$
lineáris operátor korlátos és – mint ahogy azt korábban beláttuk – $\|B\| = \|h\|_\infty$. $B = R_\lambda$, ui. tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ esetén
$$((\lambda I - A)(hv))(x) = \lambda \cdot \frac{v(x)}{\lambda - x} - x \cdot \frac{v(x)}{\lambda - x} = v(x) \qquad (x \in [a,b]).$$
Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}\backslash[a,b] \subset r(A)$. Most megmutatjuk, hogy $r(A) \subset \mathbb{R}\backslash[a,b]$ is teljesül. Ha ugyanis
$$\lambda \in r(A) \cap [a,b] \neq \emptyset$$
volna, akkor a rezolvens definíciója miatt
$$R_\lambda(\lambda I - A) = I$$
lenne. Ha most tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén
$$u_\varepsilon := \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)},$$
akkor
$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)u_\varepsilon\|_{L^2} &= \left\|\left(\widehat{\lambda} - \mathrm{id}_{[a,b]}\right) u_\varepsilon\right\|_{L^2} = \left\|\left(\widehat{\lambda} - \mathrm{id}_{[a,b]}\right) u_\varepsilon u_\varepsilon\right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |(\lambda - x)u_\varepsilon(x)| \cdot \|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^2},\end{aligned}$$
ui.
$$\sup_{x\in[a,b]} |(\lambda - x)u_\varepsilon(x)| = \sup_{\lambda-\varepsilon<x<\lambda+\varepsilon} |\lambda - x| = \varepsilon.$$
Így
$$\|u_\varepsilon\|_{L^2} = \|R_\lambda(\lambda I - A)u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|R_\lambda\| \cdot \|(\lambda I - A)u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|R_\lambda\| \cdot \varepsilon \cdot \|u_\varepsilon\|_{L^2},$$
ahonnan $\|R_\lambda\| \geq 1/\varepsilon$ következik, ami ellentmond annak, hogy R_λ korlátos. ■

2. Az előzőek általánosításaként megmutatható, hogy adott $p \in [1,+\infty)$ szám, $(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ σ-véges mértéktér és $\varphi \in L^\infty$ esetén az
$$A_\varphi u := \varphi u \quad (u \in L^p)$$
korlátos lineáris operátor spektruma megegyezik a φ függvény $\mathcal{R}_{\text{ess}}(\varphi)$ **lényeges értékkészlet**ével[3], ui.

[3] $\mathcal{R}_{\text{ess}}(\varphi) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \; \mu(\{x \in \mathcal{X} : \; |\varphi(x) - \alpha| < \varepsilon\}) > 0 \; (\varepsilon > 0)\} = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \; (\varphi - \widehat{\alpha})^{-1} \notin L^\infty\right\}$

- ha $\lambda \notin \mathcal{R}_{\text{ess}}(\varphi)$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$\mu\left(\{x \in \mathcal{X} : \ |\lambda - \varphi(x)| < \varepsilon\}\right) = 0,$$

így $\|\varphi - \widehat{\lambda}\|_\infty \geq \varepsilon$, ezért a

$$\psi := \frac{1}{\widehat{\lambda} - \varphi}$$

függvényre $\psi \in L^\infty$. Mivel

$$A_\psi \, A_{\widehat{\lambda} - \varphi} = A_{\widehat{\lambda} - \varphi} \, A_\psi = I,$$

ezért

$$A_{\widehat{\lambda} - \varphi} u = \left(\widehat{\lambda} - \varphi\right) u = \lambda u - \varphi u = (\lambda I - A_\varphi) u \qquad (u \in \mathcal{X})$$

miatt az A_ψ operátor az A_φ rezolvense, azaz $\lambda \notin \sigma(A_\varphi)$.

- Ha $\lambda \in \mathcal{R}_{\text{ess}}(\varphi)$, akkor a

$$H_n := \left(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right), \qquad K_n := \varphi^{-1}[H_n] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

halmazsorozat és az

$$u_n := \chi_{K_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetén

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A_\varphi) u_n\|_p^p &= \left\| \left(\widehat{\lambda} - \varphi\right) u_n \right\|_p^p = \int_{K_n} \left|\widehat{\lambda} - \varphi\right|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \frac{1}{n^p} \cdot \mu(K_n) = \frac{1}{n^p} \cdot \|u_n\|_p^p . \end{aligned}$$

Ezért $\lambda I - A_\varphi$ nem korlátos alulról. Így $\lambda \notin r(A_\varphi)$, azaz $\lambda \in \sigma(A_\varphi)$, hiszen ha $\lambda \in r(A_\varphi)$ teljesülne, akkor mivel $(L^p, \|\cdot\|_p)$ Banach-tér, létezne $(\lambda I - A_\varphi)$-nek korlátos inverze, azaz $\lambda I - A_\varphi$ alulról korlátos lenne. ■

9.2.5. feladat. Adott $\mathcal{X} := L^2[0,2\pi]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$, ill.

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad (Au)(x) := \int_0^{2\pi} \cos(x - y) u(y) \, \mathrm{d}y \quad (x \in [0,2\pi])$$

operátor esetében határozzuk meg $\sigma_d(A)$-t és $\lambda \in \sigma_d(A)$ esetén $\mathcal{N}(\lambda I - A)$-t!

Útm. Ha $\lambda \in \sigma_d(A)$, akkor valamely $0 \neq u \in \mathcal{X}$ függvényre

$$\lambda u(x) = (Au)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x - y) u(y) \, \mathrm{d}y \qquad (x \in [0,2\pi]),$$

azaz

$$(*) \qquad \lambda u(x) = \cos(x) \int_0^{2\pi} \cos(y) u(y) \, \mathrm{d}y + \sin(x) \int_0^{2\pi} \sin(y) u(y) \, \mathrm{d}y \quad (x \in [0,2\pi])$$

pontosan akkor teljesül, ha

- $\lambda = 0$ esetén
$$u \in \{f \in \mathcal{X} : \ \langle \cos, f \rangle = \langle \sin, f \rangle = 0\} \,,$$
ill.
- $\lambda \neq 0$ esetén
$$u \in \{[0,2\pi] \ni x \to \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \,.$$

A második esetben $(*)$-ba $x = 0$-t, ill. $x = \pi/2$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy
$$\lambda\alpha = \alpha \int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \alpha\pi, \qquad \text{ill.} \qquad \lambda\beta = \beta \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\,\mathrm{d}y = \beta\pi,$$
azaz $\lambda = \pi$. Tehát
$$\sigma_d(A) = \{0, \pi\}$$
és
$$\mathcal{N}(-A) = \{u \in \mathcal{X} : \ \langle \cos, u \rangle = \langle \sin, u \rangle = 0\} \,,$$
ill.
$$\mathcal{N}(\pi I - A) = \{[0,2\pi] \ni x \to \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \,. \quad \blacksquare$$

9.2.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$,
$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad K(x,y) := \begin{cases} (1-x)y & (y \in [0,x]), \\ \\ (1-y)x & (y \in [x,1]), \end{cases}$$
akkor az
$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Au)(x) := \int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in [0,1])$$
operátorra
$$\sigma_d(A) = \left\{(n\pi)^{-2} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
és
$$\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{[0,1] \ni x \mapsto \beta \sin(n\pi x) : \ n \in \mathbb{N}, \ \beta \in \mathbb{R}\} \qquad (\lambda \in \sigma_d(A))$$
teljesül!

Útm. Ha $\lambda \in \sigma_d(A)$, akkor valamely $0 \neq u \in \mathcal{X}$ függvényre
$$\begin{aligned} \lambda u(x) = (Au)(x) &= \int_0^1 K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^x (1-x)yu(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (1-y)xu(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^x yu(y)\,\mathrm{d}y + x\left(\int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 yu(y)\,\mathrm{d}y\right) \quad (x \in [0,1]). \end{aligned}$$

Látható, hogy

$$u \in \mathfrak{C}^2[0,1] \qquad \text{és} \qquad u(0) = 0 = u(1),$$

továbbá tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} \lambda u'(x) &= xu(x) + \int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 yu(y)\,\mathrm{d}y - xu(x) = \int_x^1 u(y)\,\mathrm{d}y, \\ \lambda u''(x) &= -u(x). \end{aligned}$$

Innen $0 \notin \sigma_d(A)$, ui. $\lambda = 0$ esetén $u = 0 \in \mathcal{X}$ lenne. Ha $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, akkor az u függvényre

$$u \in \mathfrak{C}^2[0,1], \qquad \lambda u'' + u = \widehat{0}, \qquad u(0) = 0 = u(1).$$

A

$$\mathbb{K} \ni \mu \mapsto \lambda\mu^2 + 1$$

karakterisztikus polinom gyökei:

$$\mu_1 = \imath/\sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 = -\imath/\sqrt{\lambda},$$

ezért minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén az

$$u_{\alpha,\beta}(x) := \alpha \cos\left(x/\sqrt{\lambda}\right) + \beta \sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\lambda u''_{\alpha,\beta} + u_{\alpha,\beta} = \widehat{0}.$$

Az

$$u(0) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad u(1) = 0$$

egyenlőségek következtében

$$\alpha = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lambda = (n\pi)^{-2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy minden ilyen λ, ill. u sajátérték, ill. sajátfüggvény. ■

9.2.7. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, akkor tetszőleges

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ esetén

$$\sigma(\alpha A + \beta I) = \Sigma := \{\alpha\lambda + \beta \in \mathbb{K} : \ \lambda \in \sigma(A)\};$$

2. $\lambda, \mu \in r(A)$ esetén

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu \quad \textbf{(rezolvens-egyenlet)} \qquad \text{és} \qquad [R_\lambda, R_\mu] = O$$

teéjesül!

Útm.

1. Mivel
$$\mu \in \sigma(\alpha A + \beta I) \quad \Leftrightarrow \quad \mu I - (\alpha A + \beta I) = \underbrace{\alpha\left(\alpha^{-1}(\mu - \beta) I - A\right) \quad \text{nem bijektív}}_{\Updownarrow}$$
$$\overbrace{\alpha^{-1}(\mu - \beta) I - A \quad \text{nem bijektív}},$$
ezért, ha valamely $\mu \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda := \alpha^{-1}(\mu - \beta)$, akkor
$$\mu = \alpha\lambda + \beta \qquad \text{és} \qquad \lambda \in \sigma(A),$$
azaz $\mu \in \Sigma$. Ha $\mu \in \Sigma$, akkor van olyan $\lambda \in \sigma(A)$, hogy $\mu = \alpha\lambda + \beta$ ($\lambda := \alpha^{-1}(\mu - \beta)$), azaz $\lambda I - A$ nem bijektív, így $\mu \in \Sigma$.

2. Világos, hogy
$$R_\lambda = R_\lambda I = R_\lambda(\mu I - A) R_\mu = R_\lambda \left[(\mu - \lambda) I + \lambda I - A\right] R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu + R_\mu,$$
és így
$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda, \qquad \text{azaz} \qquad R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \quad \blacksquare$$

9.2.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér esetén az $f \in \mathbb{C} \to \mathcal{X}$ függvényt **analitikus**nak nevezzük, ha
$$\forall\, a \in \mathcal{D}_f \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \alpha_n \in \mathcal{X} \; (n \in \mathbb{N}): \quad K_\varepsilon(a) \subset \mathcal{D}_f$$
és minden $z \in K_\varepsilon(a)$ esetén
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - a)^n.$$

9.2.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, akkor

1. $\sigma(A) = \sigma(A')$;
2. $r(A) \subset \mathbb{K}$ nyílt halmaz, és az
$$R : r(A) \to L(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \qquad R(\lambda) := R_\lambda$$
függvény analitikus;
3. $\sigma(A) \subset \mathbb{K}$ kompakt halmaz;
4. $|\lambda| > \|A\| \quad \Longrightarrow \quad R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$;
5. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ és $\mathcal{X} \neq \{0\}$ esetén $\sigma(A) \neq \emptyset$ (**Gelfand-Mazur-tétel**), ill. A spektrálsugarára:
$$\rho(A) \Big/ = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) \Big/ = \sup\{|\lambda| \in \mathbb{R} : \; \lambda \in \sigma(A)\}$$
teljesül (**Gelfand-formula**)!

Útm.

1. lépés. Mivel A-nak pontosan akkor van korlátos inverze, ha az A' duális operátornak is (vö. 8.2.6. feladat), ezért

$$\lambda \in r(A) \iff (\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}) \iff (\lambda I' - A')^{-1} \in L(\mathcal{X}^*) \iff \lambda \in r(A').$$

2. lépés. Ha $\mathcal{X} = \{0\}$, akkor A a zérusoperátor, így $r(A) = \mathbb{K}$. Ha pedig $\mathcal{X} \neq \{0\}$ és $\mu \in r(A)$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor az

$$S := \mu I - A, \qquad T := \lambda I - A$$

operátorokra $S, T \in L(\mathcal{X})$, S bijektív, $S^{-1} \in L(\mathcal{X})$ és

$$\|S - T\| = \|(\mu - \lambda)I\| = |\mu - \lambda|,$$

azaz

$$\left\|S^{-1}(S - T)\right\| \leq \left\|S^{-1}\right\| \cdot \|S - T\| = \left\|S^{-1}\right\| \cdot |\mu - \lambda|.$$

Így (vö. 5.2.22. feladat) minden olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, amelyre $\left\|S^{-1}\right\| \cdot |\mu - \lambda| < 1$, a $\lambda I - A$ operátor bijektív, azaz $\lambda \in r(A)$. $\mathcal{X} \neq \{0\}$ következtében van olyan $v \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$, hogy $\|v\|_{\mathcal{X}} \leq 1$, és S^{-1} bijektivitása következtében $u := S^{-1}v \neq 0$ és

$$\left\|S^{-1}\right\| \geq \left\|S^{-1}v\right\|_{\mathcal{X}} = \|u\|_{\mathcal{X}} > 0.$$

Ha $\varepsilon := 1/\left\|S^{-1}\right\| > 0$, akkor $K_\varepsilon(\mu) \subset r(A)$, azaz $r(A)$ nyílt halmaz.
Az R függvény analitkusságához megmutatjuk, hogy

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (R_\mu)^{n+1} (\lambda - \mu)^n \qquad (\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda - \mu| < 1/\|R_\mu\|).$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy ha λ ilyen és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k (R_\mu)^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} (R_\mu)^{n+1} R_\lambda.$$

Valóban, a rezolvensekre vonatkozó kommutátoros összefüggés és a rezolvens-egyenlet következtében, ha $n = 0$, akkor

$$R_\mu + (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda = R_\mu - (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = R_\mu + (R_\lambda - R_\mu) = R_\lambda,$$

ill. ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén R_λ a fenti alakú, akkor

$$\begin{aligned}
R_\lambda &= \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k (R_\mu)^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} (R_\mu)^{n+1} R_\lambda = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k (R_\mu)^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} (R_\mu)^{n+1} \{R_\mu + (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda\} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k (R_\mu)^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} (R_\mu)^{n+2} + (\mu - \lambda)^{n+2} (R_\mu)^{n+2} R_\lambda = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (\mu - \lambda)^k (R_\mu)^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+2} (R_\mu)^{n+2} R_\lambda.
\end{aligned}$$

Mivel
$$|\mu-\lambda|\cdot\|R_\mu\|<1,$$
ezért
$$\left\|(\mu-\lambda)^{n+1}(R_\mu)^{n+1}R_\lambda\right\|\leq(|\mu-\lambda|\cdot\|R_\mu\|)^{n+1}\cdot\|R_\lambda\|\longrightarrow 0\quad(n\to\infty).$$

3. lépés. Mivel $r(A)\subset\mathbb{K}$ nyílt halmaz, ezért $\sigma(A)=\mathbb{K}\backslash r(A)$ zárt halmaz. Megmutatjuk, hogy
$$\boxed{\lambda\in\sigma(A)\quad\Longrightarrow\quad|\lambda|\leq\|A\|},$$
azaz $\sigma(A)\subset\mathbb{K}$ korlátos is. Ha most
$$S:=\lambda I\qquad\text{és}\qquad T:=\lambda I-A,$$
akkor $|\lambda|>\|A\|\Longrightarrow\lambda\neq 0$ és így (vö. 5.2.22. feladat)
$$\left\|S^{-1}(S-T)\right\|\leq\left\|S^{-1}\right\|\cdot\|S-T\|=\left\|\frac{1}{\lambda}I\right\|\cdot\|A\|=\frac{\|A\|}{|\lambda|}<1,$$
így T bijektív, azaz $\lambda\notin\sigma(A)$.

4. lépés. Tegyük fel, hogy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathcal{X}\neq\{0\}$ esetén $\sigma(A)=\emptyset$, azaz $r(A)=\mathbb{C}$. Ekkor az
$$R:\mathbb{C}\to L(\mathcal{X}),\qquad R(\lambda):=R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$$
függvény korlátos, hiszen az előző pontbeli bekeretezett implikáció miatt $|\lambda|>\|A\|$, és így
$$\|\lambda I-A\|\geq\big|\|\lambda u\|-\|Au\|\big|\geq\big|\|\lambda|\cdot\|u\|-\|A\|\cdot\|u\|\big|=(|\lambda|-\|A\|)\|u\|,$$
azaz $\lambda I-A$ injektív és $(\lambda I-A)^{-1}\in L(\mathcal{X})$, továbbá
$$(*)\qquad\|R_\lambda\|=\left\|(\lambda I-A)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}\longrightarrow 0\qquad(|\lambda|\to+\infty).$$
Mivel R analitikus, így folytonos, ezért a norma folytonossága (vö. 1.3.41. gyakorló feladat) miatt az
$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\qquad f(\lambda):=\|R_\lambda\|$$
függvény folytonos, és $(*)$ miatt korlátos is. Így Liouville-tétele[4] következtében f állandófüggvény, azaz van olyan $c\in\mathbb{R}$, hogy minden $\lambda\in\mathbb{C}$ esetén $\|R_\lambda\|=c$. Ennélfogva van olyan $C\in L(\mathcal{X})$ operátor, hogy $R_\lambda=C$ $(\lambda\in\mathbb{C})$. A $(*)$ határérték-reláció miatt azonban $C=O$. Ez pedig ellentmond annak, hogy $\mathcal{X}\neq\{0\}$.

5. lépés. Ha $|\lambda|>\|A\|$, akkor
$$\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\|<1,$$
így $I-(1/\lambda)A$ injektív,
$$\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\in L(\mathcal{X}),$$

[4] Ha az $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ függvény analitikus és korlátos, akkor f állandófüggvény.

továbbá

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = \left(\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}A^n.$$

6. lépés. Világos, hogy ha $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan, hogy

$$|\lambda| > \rho(A) = \limsup\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right),$$

akkor az $L(\mathcal{X})$-beli együtthatós

$$\sum_{n=0}\left((1/\lambda)^{n+1}A^n\right)$$

hatványsor abszolút konvergens az $L(\mathcal{X})$ térben, $|\lambda| < \rho(A)$ esetén pedig divergens. Így, ha $|\lambda| > \rho(A)$, akkor az

$$\widehat{R}_\lambda := \sum_{n=0}^{\infty}\left((1/\lambda)^{n+1}A^n\right)$$

operátorra

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)\widehat{R}_\lambda &= \widehat{R}_\lambda(\lambda I - A) = \sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda)^n A^n - \sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda)^{n+1}A^{n+1} = \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty}(1/\lambda)^n A^n - \sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda)^{n+1}A^{n+1} = \\ &= I,\end{aligned}$$

és így

$$\widehat{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}),$$

ahonnan

$$\lambda \in r(A) \qquad \text{és} \qquad R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n$$

következik. Igaz tehát a

$$k := \sup\{|\lambda| \in \mathbb{R} : \ \lambda \in \sigma(A)\} \le \rho(A)$$

egyenlőtlenség. Tehát R_λ Laurent-sora konvergens minden $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > k$ esetén. Az ilyen λ-kra

$$\lim\left(\left\|\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^n\right\|\right) = 0,$$

ezért az $\varepsilon := |\lambda| - k$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy ha $N \le n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left\|\left(\frac{1}{k+\varepsilon}A\right)^n\right\| \le 1, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[n]{\|A^n\|} \le k + \varepsilon, \qquad \text{ahonnan} \qquad \rho(A) \le k. \quad \blacksquare$$

Mivel

$$\emptyset \neq \sigma(A) \subset \mathbb{K}$$

kompakt halmaz, ezért az abszolútérték-függvény folytonossága, ill. a Weierstraß-tétel (vö. 1.1.58. feladat) következtében van olyan $\lambda \in \sigma(A)$, hogy A spektrálsugarára

$$\rho(A) = |\lambda|.$$

9.2.5. példa. A (másodfajú) Volterra-féle integráloperátor (vö. 5.2.12. feladat) esetében

$$\|A^n\| \leq \mu^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$\rho(A) = \lim\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right) \leq \mu(b-a) \cdot \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) = 0,$$

ahonnan

$$\sup\{|\lambda| \in \mathbb{R}: \ \lambda \in \sigma(A)\} = 0.$$

9.2.9. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in K(\mathcal{X})$, akkor igazak az alábbi állítások!

1. Ha $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$, akkor $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A)\backslash\{0\} \subset \sigma_d(A)$.
3. $\sigma(A)$ véges vagy alkalmas $0 \neq \lambda_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim(\lambda_n) = 0$ sorozattal

$$\sigma(A) = \{\lambda_n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Útm.

1. Ha $\dim(\mathcal{X}) = +\infty$ és $0 \notin \sigma(A)$, akkor $0I - A = -A$, ill. A injektív és $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$, így (vö. 8.1.14/2. feladat)

$$I = A^{-1} \circ A \in K(\mathcal{X}),$$

ez pedig nem lehetséges (vö. 8.1.13. feladat).

2. Ha $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_d(A)$, akkor $\lambda I - A$ injektív, viszont

$$\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right),$$

és az $\frac{1}{\lambda}A$ operátor kompaktsága, valamint a 8.2.8, ill. a 6.1.4. feladatbeli állítás következtében az $I - \frac{1}{\lambda}A$ operátornak van korlátos inverze. Ez azt jelenti, hogy a $\lambda I - A$ operátornak is van korlátos inverze, azaz $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. Ha $r \in (0, +\infty)$ és a
$$\{\mu \in \sigma(A): \ |\mu| > r\}$$
halmaz végtelen, akkor az előző állítás következtében az A operátornak van olyan (λ_n) sajátértékeiből, ill. (u_n) sajátvektoraiból álló sorozata, hogy
$$\lambda_m \neq \lambda_n \quad (m, n \in \mathbb{N}: \ m \neq n) \qquad \text{és} \qquad \|u_n\| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Ezért a
$$H_n := \text{span}\ \{u_1, \ldots, u_n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
halmazsorozat izoton:
$$H_n \subset H_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
A 2.4.10. feladatbeli állítás következtében bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $v_n \in H_n$, hogy
$$\|v_n\| = 1 \qquad \text{és} \qquad \rho(v_n, H_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$
Ezért az (v_n) vektorsorozatra
- $Av_n \in H_n$ $(n \in \mathbb{N})$, hiszen
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \qquad \Longrightarrow \qquad Av_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k \in H_n.$$
- $\lambda_n v_n - Av_n \in H_{n-1}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$, hiszen
$$\lambda_n v_n - Av_n = \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \alpha_k u_k \in H_{n-1}.$$

Így bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n$ esetén
$$\begin{aligned} \|Av_m - Av_n\| &= \|\lambda_m v_m - (Av_n + \lambda_m v_m - Av_m)\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \left\| v_m - \frac{1}{\lambda_m}(Av_n + \lambda_m v_m - Av_m) \right\|. \end{aligned}$$
Mivel $m > n$ következtében
$$Av_m \in H_{m-1} \qquad \text{és} \qquad Av_n \in H_n \subset H_{m-1},$$
ezért
$$\|Av_m - Av_n\| \geq |\lambda_m| \cdot \rho(v_m, H_{m-1}) > \frac{r}{2},$$
azaz az (Av_n) sorozatból nem választható ki Cauchy-féle, így konvergens részsorozat sem. Ez azonban nem lehetséges, hiszen (v_n) korlátos és A kompakt. ■

Van olyan kompakt operátor, amelynek spektruma csak a zérusból áll.

9.2.6. példa. A 8.2.3. feladatbeli kompat A operátor esetében

$$r(A) = \sup\{|\lambda| \in \mathbb{R} : \ \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{(n+1)!}}\right) = 0,$$

így $\sigma(A) \supset \{0\}$ következtében $\sigma(A) = \{0\}$.

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $A \in K(\mathcal{X})$ és $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, akkor a 8.2.8. feladatban megfogalmazott állítás azt jelenti, hogy egyenértékűek az alábbi állítások.

(1) Bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$(\lambda I - A)u = f.$$

(2) $(\lambda I - A)u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0 \in \mathcal{X}.$

9.2.10. feladat. Igazoljuk, hogy adott $1 < p < +\infty$ esetén a

$$B : l_p \to l_p, \quad Bu := (u_2, u_3, \ldots) \qquad \text{és a} \qquad J : l_p \to l_p, \quad Ju := (0, u_1, u_2, \ldots)$$

operátorra

1. $\sigma(B) = \sigma(J) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \leq 1\}$;
2. $\sigma_d(B) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| < 1\}$, ill. $\sigma_d(J) = \emptyset$

teljesül!

Útm.

1. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$B^n u = (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots) \quad (u \in l_p), \qquad \text{és} \qquad J^n u = (0, \ldots, 0, u_1, u_2, \ldots) \quad (u \in l_p)$$

ezért nyilvánvalóan[5]

$$\|B^n\| = \|J^n\| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tehát

$$\rho(B) = \rho(J) = 1,$$

ahonnan

$$\sigma(B), \sigma(J) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \leq 1\}.$$

2. Mivel J invertálható: $\mathcal{N}(J) = \{0\}$, ezért $0 \notin \sigma_d(J)$. Ha $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, akkor

$$u \in \mathcal{N}(\lambda I - J) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda u = Ju \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda u_1 = 0, \quad \lambda u_n = u_{n-1} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz $u = 0$. Így tehát $\sigma_d(J) = \emptyset$. ■

[5] Ennek belátása a 4.2.9. gyakorló feladatbeli számoláshoz hasonló.

9.2.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\cdot\|_{L^2}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az

$$A_\alpha u := u(\cdot - \alpha) \qquad (u \in \mathcal{X})$$

korlátos lineáris operátor bijektív, és spektrumára, ill. diszkrét spektrumára

$$\sigma(A_\alpha) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| = 1\} & (\alpha \neq 0), \\ \\ \{1\} & (\alpha = 0), \end{cases} \qquad \text{ill.} \qquad \sigma_d(A_\alpha) = \begin{cases} \emptyset & (\alpha \neq 0), \\ \\ \{1\} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. $A_\alpha \, A_{-\alpha} = I = A_{-\alpha} \, A_\alpha$, ui. minden $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$(A_\alpha \, A_{-\alpha}) \, u = A_\alpha u(\cdot + \alpha) = u = A_{-\alpha} u(\cdot - \alpha) = (A_{-\alpha} \, A_\alpha) \, u.$$

2. lépés. Mivel

$$\left\|A_\alpha^{-1}\right\| = \|A_{-\alpha}\| = 1$$

(vö. 4.2.6. gyakorló feladat), ezért

$$\left\|A_\alpha^{-1}(A_\alpha - (\lambda I - A_\alpha))\right\| \leq \left\|A_\alpha^{-1}\right\| \cdot \|A_\alpha - (\lambda I - A_\alpha)\| = \|-\lambda I\| = |\lambda|,$$

így a korábbiak miatt $|\lambda| < 1$ esetén $\lambda I - A_\alpha$ bijektív, ill. $\|A_\alpha\| = 1$ következtében

$$\sigma(A_\alpha) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| = 1\}.$$

Az $\alpha = 0$ esetben $A_0 = I$, így

$$\lambda I - A_0 = (\lambda - 1) I$$

pontosan akkor bijektív, ha $\lambda \neq 1$, és $\lambda = 1$ esetén az

$$1 \cdot I - A_0 = O$$

operátor nem injektív, tehát

$$\sigma_d(A_0) = \sigma_d(A_0) = \{1\}.$$

Az $\alpha \neq 0$ esetben, ha $|\lambda| = 1$, akkor $\lambda I - A_\alpha$ injektív, de nem szürjektív, ui.

- ha $u \in \mathcal{N}(\lambda I - A_\alpha)$, akkor $A_\alpha u = \lambda u$, azaz

$$|u(x - \alpha)| = |\lambda| \cdot |u(x)| = |u(x)| \quad (\mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

tehát u α-periodikus (μ_1-m.m.), így $\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R})$ miatt $u = \widehat{0}$ (μ_1-m.m.), ami azt jelenti, hogy $u = 0 \in \mathcal{X}$;

- ha $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$ esetén hasonlóan megy) és

$$v(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0, \alpha)), \\ \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $v \in \mathcal{X}$ és nincsen olyan $u \in \mathcal{X}$, hogy

$$(\lambda I - A_\alpha)\, u = v$$

lenne. Ebben az esetben

$$\lambda u(x) - u(x - \alpha) = v(x) \quad (\mu_1\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$|u(x - \alpha)| = |\lambda| \cdot |u(x)| = |u(x)| \quad (\mu_1\text{-m.m. } x \in (-\infty,0) \cup [\alpha, +\infty)),$$

teljesülne, ami azt jelentené, hogy $|u|$ a $(-\infty,0)$, ill. az $[\alpha, +\infty)$ intervallumokon α-periodikus (μ_1-m.m.) lenne. ■

9.2.12. feladat. Legyen $c \in l_\infty$ és számítsuk ki az

$$A_c : l_2 \to l_2, \qquad A_c u := (c_n u_n)$$

operátor esetében $\sigma_d(A_c)$-t, $r(A_c)$-t és $\sigma(A_c)$-t!

Útm.

1. Világos, hogy
$$A_c e_n = c_n e_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
ahol
$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
így bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén $c_n \in \sigma_d(A_c)$. Más sajátértéke nincsen A_c-nek, ui. ha
$$\lambda \in \sigma_d(A_u) \qquad \text{és} \qquad 0 \neq u \in \mathcal{N}(\lambda I - A_c),$$
akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $u_n \neq 0$ és $A_c u = \lambda u$ miatt $c_n u_n = \lambda u_n$, azaz $\lambda = c_n$. Így A_c sajátértékeinek halmaza:
$$\sigma_d(A_c) = \{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}.$$
2. Tudjuk (vö. 4.2.17. feladat), hogy
$$\|A_c\| = \|(c_n)\|_\infty,$$
így mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$A_c^n u = (c_n^n u_n) \qquad (u \in l_2),$$
ezért
$$r(A_c) = \lim \left(\sqrt[n]{\|A_c^n\|} \right) = \|A_c\| = \|(c_n)\|_\infty.$$

3. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $c_n \in \sigma(A_c)$. Mivel $\sigma(A_c)$ kompakt, így zárt is, és

$$\sigma(A_c) = \overline{\sigma(A_c)} \supset \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}}.$$

Ha valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\lambda \notin \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}},$$

akkor van olyan $\delta > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\lambda - c_n| \geq \delta$. Ha tetszőleges $v \in l_2$ esetén

$$u_n := \frac{v_n}{\lambda - c_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 < +\infty,$$

azaz $u \in l_2$ és

$$(\lambda I - A_c)u = v.$$

Így $\lambda I - A_c$ injektív, azaz $\lambda \notin \sigma(A_c)$, innen pedig

$$\sigma(A_c) \subset \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}}$$

következik. Így tehát

$$\sigma(A_c) = \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}}. \quad \blacksquare$$

9.2.13. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz esetén van olyan $A : l_2 \to l_2$ korlátos, lineáris operátor, amelyre

$$\sigma(A) = K$$

teljesül!

Útm. Mivel K kompakt, ezért (vö. 3.1.1. feladat) alkalmas

$$H := \{c_n \in \mathbb{C} : \; n \in \mathbb{N}\}$$

halmazra $\overline{H} = K$ teljesül. Így $(c_n) \in l_\infty$, továbbá ha

$$A : l_2 \to l_2, \qquad Au := (c_n u_n),$$

akkor (vö. 9.2.12. feladat)

$$\sigma(A) = \overline{\{c_n \in \mathbb{K} : \; n \in \mathbb{N}\}} = K. \quad \blacksquare$$

9.2.14. feladat. Igazoljuk az

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m,n\in\mathbb{N}:\ m\neq n)$$

egyenlőséget!

Útm. Ha

$$\mathcal{X} := \left\{u\in\mathfrak{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}):\ u^{(2k)}(0)=0=u^{(2k)}(1)\ (k\in\mathbb{N})\right\}, \qquad \langle u,v\rangle := \int_0^1 uv \quad (u,v\in\mathcal{X}),$$

akkor az

$$A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}, \qquad Au := u''$$

lineáris operátor szimmetrikus, ui. tetszőleges $u,v\in\mathcal{X}$ esetén

$$\langle Au,v\rangle = \int_0^1 u''v = [u'v]_0^1 - \int_0^1 u'v' = 0 - [uv']_0^1 + \int_0^1 uv'' = 0-0+\langle u,Av\rangle = \langle u,Av\rangle\,.$$

Felhasználjuk, hogy $\sigma_d(A)\subset\mathbb{R}$ és A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak (vö. 9.1.2. feladat). Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor az

$$u_n(x) := \sin(n\pi x) \qquad (x\in[0,1])$$

függvényre $u_n\in\mathcal{X}$ és

$$Au_n = -n^2\pi^2 u_n,$$

azaz u_n az A operátor $-n^2\pi^2$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Ezért

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \langle u_m,u_n\rangle = 0 \qquad (m,n\in\mathbb{N}:\ m\neq n). \quad \blacksquare$$

9.2.1. házi feladat. Igazoljuk közvetlen számolással is az

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m,n\in\mathbb{N}:\ m\neq n)$$

egyenlőséget!

9.2.3. definíció. Ha $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ normált tér, p legalább elsőfokú polinom, azaz valamely $n\in\mathbb{N}$, ill. $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$: $a_n\neq 0$ esetén

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (z\in\mathbb{K}),$$

továbbá $A\in\mathfrak{L}(\mathcal{X})$, akkor

$$p(A) := a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n.$$

Világos, hogy ha $A \in L(\mathcal{X})$, akkor $p(A) \in L(\mathcal{X})$ (vö. 4.3.10 feladat, ill. az azt követő megjegyzés).

9.2.15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, úgy, ha

1. p polinom, akkor
$$\sigma(p(A)) = \{p(\mu) \in \mathbb{K} : \ \mu \in \sigma(A)\}\,;$$
2. A injektív és $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$, akkor inverzének spektrumára
$$\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\mu} \in \mathbb{K} : \ \mu \in \sigma(A)\right\}$$
teljesül!

Útm.

1. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és
$$q(z) := \lambda - p(z) \qquad (z \in \mathbb{K}),$$
akkor q is polinom, így alkalmas $n \in \mathbb{N}$, ill. $c, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$ esetén
$$\begin{aligned}
\lambda \notin \sigma(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda I - p(A)\text{-nak van korlátos inverze} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad p(A)\text{-nak van korlátos inverze} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad c\,(A-\mu_1 I)\cdot\ldots\cdot(A-\mu_n I)\,\text{-nek van korlátos inverze} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad A-\mu_k I\text{-nek van korlátos inverze} \quad (k \in \{1,\ldots,n\}) \quad \Longleftrightarrow \\
&\qquad\ \text{(vö. 5.2.24. gyakorló feladat)} \\
&\Longleftrightarrow \quad q \text{ gyökei nincsenek } \sigma(A)\text{-ban} \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad q(\mu) \neq 0 \quad (\mu \in \sigma(A)) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda \neq p(\mu) \quad (\mu \in \sigma(A)).
\end{aligned}$$
Így
$$\sigma(p(A)) = \{p(\mu) \in \mathbb{K} : \ \mu \in \sigma(A)\}\,.$$
2. Ha $A \in L(\mathcal{X})$, A injektív és $A^{-1} \in L(\mathcal{X})$, akkor
$$(-A)^{-1} = (0I - A)^{-1} \in L(\mathcal{X}),$$
azaz $0 \notin \sigma(A)$. Mivel valamely $\mu \in \mathbb{K}$ esetén
$$\frac{1}{\mu}I - A^{-1} = -\frac{1}{\mu}A^{-1}(\mu I - A)$$

és $\frac{1}{\mu}A^{-1}$-nek van korlátos inverze, ezért

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\in\sigma(A^{-1}) &\iff \frac{1}{\mu}I-A^{-1}\text{-nek nincsen korlátos inverze} \iff\\ &\iff -\frac{1}{\mu}A^{-1}(\mu I-A)\text{-nak nincsen korlátos inverze} \iff\\ &\iff \mu I-A\text{-nak nincsen korlátos inverze} \iff\\ &\iff \mu\in\sigma(A).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sigma(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\mu}\in\mathbb{K}:\ \mu\in\sigma(A)\right\}. \quad \blacksquare$$

9.2.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2_{\mathcal{X}}:=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$, $A\in L(\mathcal{X})$, úgy

1. $\sigma(A^*)=\left\{\overline{\lambda}\in\mathbb{K}:\ \lambda\in\sigma(A)\right\}$.
2. ha A önadjungált, úgy $\sigma_d(A)\subset\mathbb{R}$.
3. ha A normális úgy alkalmas $\lambda\in\sigma(A)$ esetén $|\lambda|=\|A\|$.
4. ha A önadjungált, akkor $\|A\|\in\sigma(A)$ vagy $-\|A\|\in\sigma(A)$ teljesül!

Útm.

1. $\lambda\in r(A)$ $\iff$ $\lambda I-A$ bijektív $\iff$ $(\lambda I-A)'$ bijektív $\iff$ $(\lambda I-A)^*$ bijektív $\iff$ $\overline{\lambda}I-A^*$ bijektív $\iff$ $\overline{\lambda}\in r(A^*)$.
2. Ha $\lambda\in\sigma_d(A)$, akkor alkalmas $0\neq u\in\mathcal{X}$ esetén $Au=\lambda u$, azaz

$$\begin{aligned}\lambda\|x\|^2_{\mathcal{X}} &= \lambda\langle u,u\rangle_{\mathcal{X}}=\langle\lambda u,u\rangle_{\mathcal{X}}=\langle Au,u\rangle_{\mathcal{X}}=\langle u,A^*u\rangle_{\mathcal{X}}=\langle u,Au\rangle_{\mathcal{X}}=\\ &= \langle\lambda u,u\rangle_{\mathcal{X}}=\overline{\lambda}\langle u,u\rangle_{\mathcal{X}}=\overline{\lambda}\|x\|^2_{\mathcal{X}},\end{aligned}$$

   így

$$(\lambda-\overline{\lambda})\|x\|^2_{\mathcal{X}}=0,$$

   ahonnan $\lambda=\overline{\lambda}$ következik.
3. A 9.2.8. feladat utáni megjegyzés következtében azt kell megmutatni, hogy $\rho(A)=\|A\|$. Mivel

$$\begin{aligned}\|A^2\|^2 &= \|A^2(A^2)^*\|=\left\|A^2(A^*)^2\right\|=\left\|A^2(A^*)^2\right\|=\left\|(AA^*)^2\right\|=\\ &= \|(AA^*)(AA^*)\|=\|AA^*\|^2=(\|A^2\|)^2,\end{aligned}$$

   és bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén A^n normális (**Házi feladat.**), ezért

$$\|A\|^{2^n}=\left\|A^{2^n}\right\| \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Így

$$\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\|A^n\|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[1/2^n]{\|A^{2^n}\|}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\|A\|^{2^n\cdot\frac{1}{2^n}}\right)=\|A\|.$$

4. Feltehető, hogy $A\neq O$, különben az állítás triviális. Így, ha

$$r:=\|A\|>0,$$

akkor a

$$B:=\frac{1}{r}A$$

operátorra $\|B\|=1$ teljesül. Ekkor (vö. 4.2.2. definíció) van olyan

$$x_n\in\mathcal{X}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

sorozat, amelyre

$$\|x_n\|_{\mathcal{X}}=1\quad(n\in\mathbb{N})\qquad\text{és}\qquad\lim(\|Bx_n\|_{\mathcal{X}})=1.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\left\|(I-B^2)x_n\right\|_{\mathcal{X}}^2 &= \left\langle(I-B^2)x_n,(I-B^2)x_n\right\rangle_{\mathcal{X}}=\\ &= \|x_n\|_{\mathcal{X}}^2+\|B^2x_n\|_{\mathcal{X}}^2-2\left\langle B^2x_n,x_n\right\rangle_{\mathcal{X}}\leq\\ &\leq 2-2\langle Bx_n,Bx_n\rangle_{\mathcal{X}}=\\ &= 2-2\|Bx_n\|_{\mathcal{X}}^2,\end{aligned}$$

így

$$\lim\left(\left\|(I-B^2)x_n\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)=0,$$

ami azt jelenti, hogy $1\in\sigma(B^2)$. Innen pedig az következik, hogy $1\in(\sigma(B))^2$ (vö. 9.2.15. feladat), azaz

$$1\in\sigma(B)\qquad\text{vagy}\qquad-1\in\sigma(B).\quad\blacksquare$$

9.2.4. definíció. Adott $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2:=\langle\cdot,\cdot\rangle$, ill. $A\in L(\mathcal{X})$ operátor esetén a

$$W(A):=\{\langle Ax,x\rangle\in\mathbb{K}:\ x\in\mathcal{X},\ \|x\|=1\}$$

halmazt A **numerikus értékkészleté**nek nevezzük.

Világos, hogy

$$W(A)\subset\{z\in\mathbb{K}:\ |z|\leq|||A|||\}.$$

9.2.7. példa. Ha

$$A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\qquad Ax:=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\0\end{bmatrix},$$

akkor

$$W(A)=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=\frac{1}{2}\right\},$$

hiszen bármely $x\in\mathbb{C}^2$, $\|x\|=1$ esetén van olyan $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ill. $t\in[0,1]$, hogy

$$x=e^{\imath\beta}[t,e^{\imath\alpha}\sqrt{1-t^2}]^T,$$

így

$$\langle Ax,x\rangle=\ldots=e^{\imath\alpha}t\sqrt{1-t^2}$$

és

$$\max\left\{t\sqrt{1-t^2}\in\mathbb{R}:\ t\in[0,1]\right\}=\frac{1}{2}.$$

9.2.8. példa. A

$$B:l_2\to l_2,\qquad Bu:=(u_2,u_3\ldots)$$

operátor esetében $|||B|||=1$, így

$$W(B)\subset\overline{\mathbb{T}}:=\{z\in\mathbb{K}:\ |z|\le 1\}.$$

Megmutatjuk, hogy $W(B)=\mathbb{T}$ is igaz. Ha $z\in\mathbb{T}$, akkor az

$$x_z:=(1,z,z^2,z^3,\ldots)$$

vektorra $x\in l_2$ és

$$Bx=zx,$$

azaz bármely $z\in\mathbb{T}$ esetén z sajátértéke B-nek, az x_z sajátvektorral. Így $\mathbb{T}\subset W(B)$. Ha valamely $z\in\mathbb{K}$, $|z|=1$ esetén $z\in W(B)$, akkor alkalmas $x\in\mathcal{X}$ egységvektorra

$$z=\langle Bx,x\rangle$$

teljesülne, ezért $\|B\|=1$ (vö. 4.2.9. feladat) következtében

$$1=|z|=|\langle Bx,x\rangle|\le\|Bx\|\cdot\|x\|\le\|x\|\cdot\|x\|=1,$$

azaz alkalmas $z\in\mathbb{K}$ számra

$$Bx=zx$$

teljesülne (vö. 1.4.3. feladat utáni megjegyzés). Nem nehéz kiszámolni, hogy csak az $x=x_z$ sorozatra teljeül $Bx=zx$, így $|z|=1$ miatt $x\notin l_2$.

9.2.17. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ $A \in L(\mathcal{X})$ normális operátor, akkor fennáll a

$$\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$$

tartalmazás!

Útm. Ha $\lambda \in \sigma(A)$, akkor (vö. 7.2.4. definíció utáni megjegyzés) A-val együtt $\lambda I - A$ is normális, így alkalmas

$$x_n \in \mathcal{X}, \quad \|x_n\| = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim(\|(\lambda I - A)x_n\|) = 0$$

(vö. 5.2.1. feladat). A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(\langle(\lambda I - A)x_n, x_n\rangle) = 0,$$

ahonnan

$$\lim(\langle Ax_n, x_n\rangle) - \lambda\langle x_n, x_n\rangle = 0$$

következik. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle x_n, x_n\rangle = 1,$$

ezért

$$\lim(\langle Ax_n, x_n\rangle) = \lambda$$

azaz

$$\lambda \in \overline{W(A)}. \quad \blacksquare$$

9.2.18. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$ önadjungált operátor, akkor igazak az alábbi állítások!

1. $W(A) \subset \mathbb{R}$.
2. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Útm.

1. Mivel A önadjungált, ezért bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

   Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, azaz $W(A) \subset \mathbb{R}$.

2. Mivel A normális, ezért

$$\sigma(A) \subset \overline{W(A)} \subset \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

9.2.19. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $A \in L(\mathcal{X})$ unitér operátor, akkor spektruma az egységkörön van, azaz fennáll a

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| = 1\}$$

tartalmazás!

Útm. Ha A unitér, akkor (vö. 7.2.30/5. feladat)

$$|||A||| = 1,$$

így (vö. 9.2.8. feladat útmutatója: 4. lépés)

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \leq 1\}.$$

Mivel

$$\sigma(A^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| = 1\}$$

(vö. 9.2.16/1. feladat) és

$$A^* = A^{-1},$$

ezért a 9.2.15/2. feladat felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\sigma(A) \subset \left\{\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} : \ \lambda \in \sigma(A^*)\right\} \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \geq 1\}. \quad \blacksquare$$

9.2.20. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, továbbá $u \in \mathcal{X}$ az

$$A \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$$

önadjungált operátor $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvekora, akkor A-nak az u-hoz tartozó várható értékére és szórására

$$\mathfrak{A} = \langle A\rangle_u = \lambda, \qquad \text{ill.} \qquad \Delta\mathfrak{A} = 0$$

teljesül!

Útm. Ha

$$u \in \mathcal{D}(A), \quad \|u\| = 1 \qquad \text{és} \qquad Au = \lambda u,$$

akkor

$$\mathfrak{A} = \langle A\rangle_u = \langle u, Au\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda$$

és

$$\Delta\mathfrak{A} = \|Au - \mathfrak{A}u\| = \|Au - \lambda u\| = \|0\| = 0. \quad \blacksquare$$

9.2.21. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{X} := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$R \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (Rf)(x) := xf(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$P \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Pf := -\imath\hbar f',$$

ill.

$$H \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Hf := -\frac{\hbar^2}{2m} f'',$$

és

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(R) := \mathcal{D}(P) := \mathcal{D}(H) := \mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad /\overline{\mathfrak{C}_0^\infty(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})/$$

(a kvantummechanika helyzet-, impulzus- és Hamilton-operátora), akkor

1. $P = \frac{\imath m}{\hbar}[H, R]$;
2. H valamely sajátértékéhez tartozó u normált sajátfüggvényére $\langle P \rangle_u = 0$

teljesül!

Útm.

1. Ha valamely $f \in \mathcal{D}$ esetén

$$u(x) := xf(x) \qquad \text{és} \qquad v(x) := f(x) + xf'(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} -\frac{2m}{\hbar^2}([H,R]u)(x) &= xf''(x) - u''(x) = xf''(x) - v'(x) = \\ &= xf''(x) - f'(x) - f'(x) - xf''(x) = -2f'(x) = \frac{2}{\imath\hbar}(Pu)(x). \end{aligned}$$

2. Ha $u \in \mathcal{D}$ a szimmetrikus H operátor (vö. 7.1.4. példa) valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékéhez tartozó normált sajátvektora, azaz

$$Hu = \lambda u, \qquad \|u\|_{L^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 1,$$

akkor a P operátor u-hoz tartozó várható értéke:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_u &= \frac{\imath m}{\hbar}\langle [H,R] \rangle_u = \frac{\imath m}{\hbar} = \\ &= \frac{\imath m}{\hbar}\langle u, HRu - RHu \rangle = \frac{\imath m}{\hbar}\{\langle u, HRu \rangle - \langle u, RHu \rangle\} = \\ &= \frac{\imath m}{\hbar}\{\langle Hu, Ru \rangle - \langle u, RHu \rangle\} = \frac{\imath m}{\hbar}\{\langle \lambda u, Ru \rangle - \langle u, R\lambda u \rangle\} = \\ &= \frac{\imath\lambda m}{\hbar}\{\langle u, Ru \rangle - \langle u, Ru \rangle\} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.2.22. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, az $A \in L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ önadjungált operátor sajátvektorainak

$$\{u_n \in \mathcal{D}(A) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

rendszere ONR:

$$Au_n = \alpha u_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \langle u_m, u_n\rangle = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

$\mathcal{Y} := \overline{\mathrm{span}\,(u_n)}$, és valamely $u \in Y$ esetén $Au \in \mathcal{Y}$, akkor fennálnak az

$$\langle A\rangle_u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\langle u_n, u\rangle|^2, \qquad (\Delta\mathfrak{A})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \langle A\rangle)^2 \, |\langle u_n, u\rangle|^2$$

egyenlőségek!

Útm. Mivel

$$\{u_n \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

teljes ONR $\mathcal{Y}$-ban, ezért (vö. 1.4.58. feladat) bármely $u \in \mathcal{Y}$ esetén

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u\rangle u_n.$$

Mivel

$$\langle u, u\rangle = 1,$$

ezért

$$1 = \langle u, u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |\langle u_n, u\rangle|^2.$$

Az

$$Au \in \mathcal{Y}$$

feltételből

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, Au\rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Au_n, u\rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle u_n, u\rangle u_n$$

következik, így

$$\langle A\rangle_u = \langle u, Au\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle u_n, u\rangle \langle u, u_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\langle u_n, u\rangle|^2.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} (\Delta\mathfrak{A})^2 &= \langle (A - \mathfrak{A}I)u, (A - \mathfrak{A}I)u\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \langle A\rangle) \langle u_n, u\rangle u_n, \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m - \langle A\rangle) \langle u_m, u\rangle u_m \right\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.2.23. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ olyan operátor, amelyre $r(A) \neq \emptyset$, akkor A zárt operátor!

Útm. Ha $\lambda \in r(A)$, akkor a

$$B := (\lambda I - A)^{-1}$$

operátor korlátos. Ha pedig

$$x_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = x \qquad \text{és} \qquad \lim(Ax_n) = y$$

teljesül, akkor

$$B(\lambda x - y) = B(\lim(\lambda x_n - y_n)) = \lim(B(\lambda I - A)x_n)) = \lim(x_n) = x,$$

ahonnan – mindkét oldalra alkalmazva a $\lambda I - A$ operátort –

$$\lambda x - y = (\lambda I - A)x$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $x \in \mathcal{D}(A)$ és $Ax = y$, azaz A zárt operátor. ■

10. fejezet

Fixponttételek

10.1. Kontrakciók

Az 1.2.9/2. definíció fényében valamely $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér esetén a $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ leképezést **Lipschitz-folytonos**nak nevezünk, ha alkalmas $L \in [0, +\infty)$ számmal

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljesül.

10.1.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér esetén azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ leképezés

- **nem-expanzív**, ha Lipschitz-folytonos és $L \leq 1$;
- **kontraktív** vagy **kontrakció**, ha Lipschitz-folytonos és $L < 1$.

A $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ metrikus tér esetén a

$$\varphi : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad \varphi(f)(x) := 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f \quad (x \in [0,1])$$

leképezés pl. kontrakció, hiszen bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$ és $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^x (f-g)\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^x |f-g| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(x-0)\sup\{|f(t)-g(t)| \in \mathbb{R} : \ t \in [0,x]\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}x\rho_\infty(f,g), \end{aligned}$$

így

$$\rho_\infty(\varphi(f), \varphi(g)) = \sup\{|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\} \leq \frac{1}{2}\rho_\infty(f,g).$$

10.1.1. példa. Ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor bármely $r > 0$ esetén a

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & (\|x\| \leq r), \\ \\ \dfrac{r}{\|x\|}x & (\|x\| > r) \end{cases}$$

leképezés nem-expanzív, ui.

- egyrészt bármely $a, b \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$ esetén

  $$\langle a - \varphi(a), \varphi(b) - \varphi(a)\rangle \leq 0,$$

  hiszen ez a $\|x\| \leq r$ esetben
  $$\varphi(x) = x$$
  miatt triviális, ha pedig $\|x\| \geq r$, akkor pedig a

  $$\langle a - \varphi(a), \varphi(b) - \varphi(a)\rangle = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{r}{\|a\|}\right)\{\langle a, b\rangle - r\|a\|\} & (\|b\| \leq r), \\ \\ \left(1 - \dfrac{r}{\|a\|}\right)\left\{r\dfrac{\langle a, b\rangle}{\|b\|} - r\|a\|\right\} & (\|b\| > r) \end{cases}$$

  egyenlőség felhasználásával az

  $$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

  (Cauchy-Bunyakovszkij-) egyenlőtlenség következménye;

- másrészt pedig bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

  $$x - y = \varphi(x) - \varphi(y) + x - \varphi(x) + \varphi(y) - y =: \varphi(x) - \varphi(y) + a,$$

  így
  $$\|x - y\|^2 = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 + \|a\|^2 + 2\langle a, \varphi(x) - \varphi(y)\rangle \geq 0,$$

  továbbá

  $$\langle a, \varphi(x) - \varphi(y)\rangle = -\langle x - \varphi(x), \varphi(y) - \varphi(x)\rangle - \langle y - \varphi(y), \varphi(x) - \varphi(y)\rangle \geq 0$$

  következtében
  $$\|x - y\|^2 \geq \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2.$$

10.1.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\xi \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$, továbbá

$$p_\varepsilon(x) := \exp(-\varepsilon|x-\xi|) \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor a

$$(\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{p_\varepsilon})$$

normált tér (vö. 1.3.14. feladat) esetén a

$$\varphi : \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R}), \qquad (\varphi(f))(x) := \int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in [a,b])$$

leképezés Lipschitz-folytonos!

Útm. Ha

- $x \geq \xi$, akkor

$$\begin{aligned} |(\varphi(f))(x)| &= \left|\int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_\xi^x (f(t)p_\varepsilon(t))\exp(\varepsilon(t-\xi))\,\mathrm{d}t\right| \leq \\ &\leq \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \cdot \int_\xi^x \exp(\varepsilon(t-\xi))\,\mathrm{d}t = \\ &= \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \{\exp(\varepsilon(x-\xi)) - 1\}\,; \end{aligned}$$

- $x \leq \xi$, akkor

$$\begin{aligned} |(\varphi(f))(x)| &= \left|\int_x^\xi f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^\xi (f(t)p_\varepsilon(t))\exp(-\varepsilon(t-\xi))\,\mathrm{d}t\right| \leq \\ &\leq \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \cdot \int_x^\xi \exp(-\varepsilon(t-\xi))\,\mathrm{d}t = \\ &= \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \{\exp(-\varepsilon(x-\xi)) - 1\}\,. \end{aligned}$$

Így

$$|(\varphi(f))(x)|\,p_\varepsilon(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \cdot (1 - p_\varepsilon(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f\|_\infty^{p_\varepsilon} \qquad (x \in [a,b]),$$

ahonnan

$$\|\varphi(f)\|_\infty^{p_\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f\|_\infty^{p_\varepsilon}$$

következik. Mivel φ lineáris, ezért tetszőleges $f, g \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ esetén

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty^{p_\varepsilon} = \|\varphi(f-g)\|_\infty^{p_\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f-g\|_\infty^{p_\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

10.1.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha

1. $\mathcal{X} := [1, +\infty)$,
$$\rho(x,y) := |x-y| \qquad (x,y \in \mathcal{X}),$$
akkor az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén a
$$\varphi(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathcal{X})$$
leképezés kontrakció;

2. $\mathcal{X} := \left[0, \frac{1}{3}\right]$,
$$\rho(x,y) := |x-y| \qquad (x,y \in \mathcal{X}),$$
akkor az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér esetén a
$$\varphi(x) := \frac{1}{8} + x^2 \qquad (x \in \mathcal{X})$$
leképezés kontrakció!

Útm.

1. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy}\right| = |x-y|\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| < \frac{1}{2}|x-y|.$$
Ez azt jelenti, hogy φ kontrakció.

2. Bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leq \frac{2}{3}|x-y|.$$
Ez azt jelenti, hogy φ kontrakció. ■

10.1.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre

- $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$;
- $\exists q \in [0,1) \, \forall x \in [a,b] : \; |\varphi'(x)| \leq q$

teljesül, akkor φ kontrakció (az $([a,b], |\cdot|)$ normált térben)!

Útm. A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával tetszőleges $x, y \in [a,b]$ (és alkalmas $\xi \in (a,b)$) esetén azt kapjuk, hogy
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| \leq q|x-y|,$$
azaz φ kontrakció. ■

10.1.2. példa. Ha

$$\varphi(x) := \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5} \qquad (x \in [-1,1])$$

akkor

- bármely $x \in [-1,1]$ esetén

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \varphi([-1,1]) \subset [-1,1],$$

- bármely $\xi \in [-1,1]$ esetén

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{3}{4}|\xi|^2 \leq \frac{3}{4}, \qquad \text{így} \qquad |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$$

kontrakció a $([-1,1], |\cdot|)$ normált térben.

10.1.1. gyakorló feladat. Adott $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ szám és

$$f(x) := -\alpha x^2 + 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

leképezés esetén adjunk meg olyan $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumot, hogy a

$$\varphi(x) := f(x) \qquad (x \in [a,b])$$

leképezés kontrakció legyen az $([a,b], |\cdot|)$ normált térben!

Útm.

10.1.2. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az $(L^2[0,1], \|\cdot\|_{L^2})$ normált térben a

$$\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1], \qquad \varphi(f)(x) := (x+1)\int_0^1 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in [0,1])$$

leképezés kontrakció!

Útm.

10.1.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, p)$ normált tér, $b \in \mathcal{X}$, továbbá $A \in L(\mathcal{X})$ (korlátos, lineáris operátor), úgy a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \varphi(x) := Ax + b$$

leképezés pontosan akkor kontrakció, ha teljesül a $\|A\| < 1$ egyenlőtlenség!

Útm.

1. lépés. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $q := \|A\|$ számmal $q \in [0,1)$ és bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$p(\varphi(x) - \varphi(y)) = p(Ax - Ay) = p(A(x-y)) \leq \|A\| p(x-y) \leq qp(x-y).$$

2. lépés. Ha φ kontrakció és $L \in [0,1)$ a 10.1.1. definícióbeli állandó, akkor

$$p(Ax) = p(A(x-0)) = p(Ax - A0) = p(\varphi(x) - \varphi(0)) \leq Lp(x-0) = Lp(x),$$

ahonnan $\|A\| \leq q < 1$ következik. ■

10.1.5. feladat. Mutassuk meg ha $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, továbbá $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olyan folytonos függvény, amelyre alkalmas $L : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L(x)\|y - z\| \qquad (x \in I,\ y, z \in \mathbb{R}^d)$$

teljesül, és a $\mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d)$ vektorteret a $\|\cdot\|_\infty^p$ súlyozott normával látjuk el (vö. 1.3.14. feladat), ahol

$$p(x) := \exp\left(-\left|\int_\tau^x L(s)\,\mathrm{d}s\right|\right) \qquad (x \in I),$$

akkor tetszőleges $\tau \in J \subset I$ kompakt intervallum esetén az

$$A : \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d) \to \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d), \qquad A(y)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in J)$$

leképezés kontrakció!

Útm. Ha $u, v \in \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d)$, ill. $x \in J$, akkor

$$\begin{aligned}
\|A(u)(x) - A(v)(x)\| &= \left\|\int_\tau^x f(s,u(s))\,\mathrm{d}s - \int_\tau^x f(s,v(s))\,\mathrm{d}s\right\| \leq \\
&\leq \left|\int_\tau^x \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|\ \mathrm{d}s\right| \leq \\
&\leq \left|\int_\tau^x L(s)\,\|u(s) - v(s)\|\ \mathrm{d}s\right| = \\
&= \left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)} p(s)\,\|u(s) - v(s)\|\ \mathrm{d}s\right| \leq \\
&\leq \left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)}\,\|u - v\|_\infty^p\ \mathrm{d}s\right| = \\
&= \left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)}\,\mathrm{d}s\right| \cdot \|u - v\|_\infty^p\,.
\end{aligned}$$

Így, ha

$$\alpha := \min\{p(x) \in \mathbb{R} :\ x \in J\},$$

akkor $x \geq \tau$ esetén

$$\left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)}\,\mathrm{d}s\right| = \int_\tau^x \left(\frac{1}{p(s)}\right)'\,\mathrm{d}s = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(\tau)} = \frac{1-p(x)}{p(x)} \leq \frac{1-\alpha}{p(x)},$$

ill. $x \leq \tau$ esetén

$$\left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)}\,\mathrm{d}s\right| = \int_x^\tau \left(-\frac{1}{p(s)}\right)'\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{p(\tau)} + \frac{1}{p(x)} = \frac{1-p(x)}{p(x)} \leq \frac{1-\alpha}{p(x)}.$$

Ezért bármely $x \in J$ esetén

$$p(x)\,\|A(u)(x) - A(v)(x)\| \leq p(x)\left|\int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)}\,\mathrm{d}s\right| \cdot \|u-v\|_\infty^p \leq (1-\alpha)\,\|u-v\|_\infty^p\,,$$

tehát

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty^p \leq (1-\alpha)\,\|u-v\|_\infty^p\,. \quad \blacksquare$$

10.1.3. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy minden Lipschitz-folytonos leképezés folytonos!

Útm.

10.1.2. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \rho)$ félmetrikus tér és $x^* \in \mathcal{X}$ esetén azt mondjuk, hogy x^* fixpontja valamely $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ leképezésnek, ha $\varphi(x^*) = x^*$.

10.1.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

függvény monoton növekedő, továbbá valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén

$$\varphi(a) > a \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) < b,$$

akkor φ-nek van fixpontja az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ normált térben!

Útm. Legyen

$$H := \{x \in [a,b] : \ \varphi(x) \geq x\}\,.$$

Mivel $a \in H$, ezért $H \neq \emptyset$. Így – lévén, hogy H korlátos –, alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(H) = \xi \in (a,b).$$

Az elemi analízisből ismeretes (vö. pl. [11]), hogy ekkor van olyan monoton növekedő

$$x_n \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, amelyre

$$x_n < \xi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) = \xi$$

teljesül. Mivel

$$x \leq f(x) \qquad (x \in [a, \xi)),$$

ezért

$$(*) \qquad x_n \leq f(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill. f monotonitása következtében

$$(**) \qquad f(x_n) \leq f(\xi).$$

Az $(f(x_n))$ sorozat tehát monoton növekedő és felülről korlátos $/f(\xi)$ felső korlát/, így konvergens is. $(*) - (**)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\xi = \lim(x_n) \leq \lim(f(x_n)) \leq f(\xi).$$

Legyen most

$$y_n \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan monoton csökkenő sorozat, amelyre

$$y_n > \xi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) = \xi.$$

Mivel $b \notin H$ és $\xi = \sup(H)$, ezért bármely $y \in (\xi, b]$ esetén $y > f(y)$, ahonnan

$$(***) \qquad y_n > f(y_n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

következik. Mivel f monoton növekedő, ezért

$$(****) \qquad f(y_n) \geq f(\xi) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(f(y_n))$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos $/f(\xi)$ alsó korlát/, így konvergens is. $(***) - (****)$-ból az $n \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\xi = \lim(y_n) \geq \lim(f(y_n)) \geq f(\xi).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\xi \leq f(\xi) \quad \text{és} \quad \xi \geq f(\xi), \qquad \text{azaz} \qquad f(\xi) = \xi. \quad \blacksquare$$

10.1.7. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér, $\varphi, \psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ egymással felcserélhető leképezések, azaz

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi,$$

és φ-nek pontosan egy fixpontja van, akkor φ fixpontja a ψ-nek is fixpontja!

Útm. Ha valamely $x^* \in \mathcal{X}$ esetén x^* a φ egyetlen fixpontja, akkor

$$\varphi(\psi(x^*)) = \psi(\varphi(x^*)) = \psi(x^*)$$

következtében $\psi(x^*)$ fixpontja φ-nek. Így a feltételek köbetkeztében $\psi(x^*) = x^*$, azaz x^* fixpontja ψ-nek. $\blacksquare$

10.1.8. feladat. Igazoljuk, hogy a $(\mathfrak{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ normált térben a

$$\varphi : \mathfrak{c}_0 \to \mathfrak{c}_0, \qquad \varphi((x_n)) := \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

leképezés kontrakció! Van-e φ-nek fixpontja?

Útm. Világos, hogy

- φ kontrakció, hiszen bármely $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathfrak{c}_0$ esetén

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x_n - y_n|}{n+1} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \leq \frac{1}{2}\|x-y\|_\infty;$$

- $0 \in \mathfrak{c}_0$ fixpontja φ-nek: $\varphi(0) = 0$. ■

10.1.4. gyakorló feladat. Igazoljuk, hogy az $(l_2, \|\cdot\|_{l_2})$ normált térben a

$$\varphi : l_2 \to l_2, \qquad \varphi((x_n)) := \frac{(x_n)}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

leképezés kontrakció! Van-e φ-nek fixpontja?

Útm.

10.1.9. feladat. Adott $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ szám, ill.

$$\varphi(x) := \sqrt{\alpha + x} \qquad (x \in I := [0,1+\sqrt{\alpha}])$$

függvény esetén

1. mutassuk meg, hogy
$$f[I] \subset I$$
teljesül;
2. igazoljuk, hogy φ pontosan akkor kontrakció az $(I, |\cdot|)$ normált térben, ha $\alpha > 1/4$;
3. mutassuk meg, hogy φ-nek egyetlen fixpontja van, majd adjunk meg olyan konvergens, rekurzív sorozatot, amlynek a ez a fixpont a határértéke!

Útm.

1. Mivel
$$\varphi(0) = \sqrt{\alpha} > 0,$$
φ monoton növekedő, továbbá
$$\varphi(1+\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha}} < 1 + \sqrt{\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < 2,$$
ezért $f[I] \subset I$ teljesül.

2. Mivel bármely $x, y \in I$ esetén

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\sqrt{\alpha + x} - \sqrt{\alpha + y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{\alpha + x} + \sqrt{\alpha + y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot |x - y|,$$

   ezért φ pontosan akkor kontrakció az $(I, |\cdot|)$ normált térben, ha

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha > \frac{1}{4}.$$

3. Mivel valamely $x \geq 0$ esetén

$$\sqrt{\alpha + x} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2},$$

   és

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \in I,$$

   ezért φ-nek egyetlen fixpontja van. Ha

$$x_1 := \sqrt{\alpha}, \qquad x_n := \varphi(x_{n-1}) = \sqrt{\alpha + x_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

   akkor indukcióval megmutatható, hogy (x_n) monoton növekedő és felülről korlátos (egy felső korltája φ fixpontja). Így konvergens is és az $\xi := \lim(x_n)$ számra $\xi = \lim(x_{n-1})$, így

$$\xi = \sqrt{\alpha + \xi}, \qquad \text{azaz} \qquad \xi = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}. \qquad \blacksquare$$

10.1.10. feladat. A

$$\varphi(x) := \frac{x + 2}{x + 1} \qquad (x \in I := [1,2])$$

függvény esetén

1. mutassuk meg, hogy

$$f[I] \subset I$$

   teljesül;

2. igazoljuk, hogy φ kontrakció az $(I, |\cdot|)$ normált térben;

3. mutassuk meg, hogy φ-nek egyetlen fixpontja van!

Útm.

1. Mivel bármely $x \in I$ esetén

$$1 < \frac{x + 2}{x + 1} = 1 + \frac{1}{x + 1} \leq 1 + \frac{1}{2} < 2,$$

   ezért

$$f[I] \subset I.$$

2. Ha $x, y \in I$, akkor

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \left|\frac{x+2}{x+1} - \frac{y+2}{y+1}\right| = \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} \leq \frac{1}{4} \cdot |x-y|,$$

   azaz φ kontrakció.

3. Mivel tetszőleges $x \geq 0$ esetén

$$\frac{x+2}{x+1} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{2},$$

   és

$$\sqrt{2} \in I,$$

   ezért φ-nek egyetlen fixpontja van. ■

10.1.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus tér,

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

kontrakció, azaz alkalmas $L \in [0,1)$ esetén

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x, y),$$

akkor φ-nek legfeljebb egy fixpontja van!

Útm. Ha $u, v \in \mathcal{X}$ fixpontja φ-nek, azaz

$$\varphi(u) = u \qquad \text{és} \qquad \varphi(v) = v,$$

akkor

$$\rho(u, v) = \rho(\varphi(u), \varphi(u)) \leq L\rho(u, v),$$

ahonnan

$$0 \leq \rho(u, v)(L-1)$$

ami $L < 1$ miatt csak úgy lehetséges, hogy $\rho(u, v) = 1$, azaz $u = v$. ■

10.1.12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $H \subset \mathcal{X}$ és a $\varphi : H \to H$ leképezésre

$$(u, v \in H : \ u \neq v) \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| < \|u - v\|, \tag{10.1.1}$$

teljesül, úgy

1. φ-nek legfeljebb egy fixpontja van (H-ban);
2. ha H kompakt, akkor φ-nek pontosan egy fixpontja van (**Edelstein-féle fixponttétel**)!

Útm.

1. Ha $u, v \in H$ fixpontja φ-nek és $u \neq v$, akkor $\varphi(u) = u$ és $\varphi(v) = v$, így

$$\|u - v\| > \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|,$$

ami nem lehetséges.

2. A norma folytonossága (vö. 1.3.41. feladat) és H kompaktsága folytán az

$$f : H \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x - \varphi(x)\|$$

függvénynek van minimumhelye (vö. 1.1.58. feladat), azaz alkalmas $u \in H$ esetén

$$\|u - \varphi(u)\| = f(u) = \inf\{f(y) \in \mathbb{R} : \ y \in H\} = \inf\{\|y - \varphi(y)\| \in \mathbb{R} : \ y \in H\}.$$

Erre az $u \in H$ vektorra $\varphi(u) = u$, hiszen ellenkező esetben

$$f(\varphi(u)) = \|\varphi(u) - \varphi(\varphi(u))\| < \|u - \varphi(u)\| = f(u)$$

teljesülne, ami nem lehetséges. ■

10.1.5. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \ln(1 + e^x)$$

leképezésre teljesül (10.1.1), de φ-nek nincsen fixpontja!

Útm.

10.1.6. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$$

leképezésre teljesül (10.1.1), de φ-nek nincsen fixpontja!

Útm.

10.1.1. házi feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi : [1, +\infty) \to [1, +\infty), \qquad \varphi(x) := x + \frac{1}{x}$$

leképezésre teljesül (10.1.1), de φ-nek nincsen fixpontja!

10.1.13. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér, $\varphi_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan kontrakció-sorozat, amelyre

1. $\exists\, q \in [0,1)\ \ \forall\, x, y \in \mathcal{X}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \rho(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) \leq q\rho(x,x)$,
2. $\exists\, x_\infty \in \mathcal{X}:\ \lim(\varphi_n(x_\infty)) = x_\infty$,

teljesül, akkor az

$$x_0 \in \mathcal{X}, \qquad x_{n+1} := \varphi_n(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzióval definiált (x_n) sorozat konvergens és határértékére igaz a $\lim(x_n) = x_\infty$ állítás!

Útm. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1}, x_\infty) &= \rho(\varphi_n(x_n), x_\infty) \leq \rho(\varphi_n(x_n), \varphi_n(x_\infty)) + \rho(\varphi_n(x_\infty), x_\infty) \leq \\ &\leq q\rho(x_n, x_\infty) + \rho(\varphi_n(x_\infty), x_\infty),\end{aligned}$$

így a $\lim(\varphi_n(x_\infty)) = x_\infty$ határértékreláció következményeként azt kapjuk, hogy

$$\limsup \rho(x_n, x_\infty) \leq q \limsup \rho(x_n, x_\infty),$$

azaz $\limsup \rho(x_n, x_\infty) = 0$, ahonnan $\lim(x_n) = x_\infty$ következik. ■

10.1.14. feladat. Az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ normált tér esetén adjunk példát olyan nem-expanziv leképezésre, amelynek nincsen fixpontja, ill. amelynek végtelen sok fixpontja van!

Útm. A $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := x + 1, \qquad \text{ill.} \qquad \psi(x) := x$$

leképezések nem-expanzívek, hiszen bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|, \qquad \text{ill.} \qquad |\psi(x) - \psi(y)| = |x - y|.$$

φ-nek nincsen fixpontja, ψ esetén pedig minden $\xi \in \mathbb{R}$ pont fixpont. ■

10.1.3. definíció. Adott $\mathcal{X}$ halmaz és $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ leképezés esetén φ n**-edik iteráltját** a következőképpen értelmezzük:

$$\varphi^{[0]} := \mathrm{id}_{\mathcal{X}}, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{[n]} := \varphi \circ \varphi^{[n-1]} = \overset{1}{\breve{\varphi}} \circ \ldots \circ \overset{n}{\breve{\varphi}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A

$$\varphi(x) := 4x(1-x) \qquad (x \in [0,1])$$

leképezés esetében $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, hiszen bármely $x \in [0,1]$ esetén $x \geq 0$ és $1 - x \geq 0$, így $4x(1-x) \geq 0$, továbbá

$$4x(1-x) = 4x - 4x^2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \leq 1.$$

Némi számolással látható, hogy az első három iterált tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén a következő:

$$\begin{aligned}
\varphi^{[1]}(x) &= \varphi(x) = 4x(1-x),\\
\varphi^{[2]}(x) &= \varphi(\varphi(x)) = 4\{4x(1-x)\}(1-4x(1-x)) =\\
&= -16x(-1+x)(1-4x+4x^2),\\
\varphi^{[3]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(x))) = -64x(-1+x)(1-4x+4^2)(1-16x+80x^2-128x^3+64x^4) =\\
&= 64x-1344x^2+10752x^3+90112x^5-106496x^6+65536x^7-16384x^8.
\end{aligned}$$

Az n-edik iterált kiszámítása komputeralgebrai eszközök segítségével, vagy a következő megfontolás alapján történik. Olyan $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekciót keresünk, amelynek értékkészletére $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_\varphi$. Világos, hogy az

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1], \qquad f(y) := \sin^2(y) = \frac{1+\cos(2y)}{2}$$

leképezés egy ilyen bijekció, továbbá bármely $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arccos(1-2x) \qquad (x \in [0,1]).$$

Így tetszőleges $x \in [0,1]$, ill. $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi^{[1]}(x) &= \varphi(x) = \varphi(\sin^2(y)) = 4\sin^2(y)(1-\sin^2(y)) =\\
&= 4\sin^2(y)\cos^2(y) = (2\sin(y)\cos(y))^2 = \sin^2(2y),\\
\varphi^{[2]}(x) &= \varphi(\varphi^{[1]}(x)) = \varphi(\varphi(\sin^2(y)) = \varphi(\sin^2(2y)) = \sin^2(4y),\\
\varphi^{[3]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(x))) = \varphi(\varphi^{[2]}(x)) = \varphi(\sin^2(4y)) = \sin^2(8y),\\
\varphi^{[4]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) = \varphi(\varphi^{[3]}(x)) = \varphi(\sin^2(8y)) = \sin^2(16y).
\end{aligned}$$

Innen teljes indukcióval azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$-ra

$$\varphi^{[n]}(x) = \varphi^{[n]}(\sin^2(y)) = \sin^2(2^n y) = \sin^2(2^{n-1}\arccos(1-2x)) \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül.

10.1.15. feladat. Határozzuk meg a

$$\varphi(x) := 2x(1-x) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$$

leképezés esetén az n-edik iterált explicit alakját!

Útm. Az

$$f : (-\infty,0] \to \left[0, \frac{1}{2}\right), \qquad f(y) := \frac{1-e^{2y}}{2}$$

leképezés bijekció és

$$y = f^{-1}(x) := \frac{1}{2}\ln(1-2x) = \ln(\sqrt{1-2x}) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Így bármely $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ és $y \in (-\infty,0]$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi^{[1]}(x) &= \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1-e^{2y}}{2}\right) = 2\frac{1-e^{2y}}{2}\left(1 - \frac{1-e^{2y}}{2}\right) = \\
&= \frac{(1-e^{2y})(1+e^{2y}}{2} = \frac{1-e^{4y}}{2}, \\
\varphi^{[2]}(x) &= \varphi(\varphi^{[1]}(x)) = \varphi\left(\varphi\left(\frac{1-e^{2y}}{2}\right)\right) = \frac{1-e^{8y}}{2}, \\
\varphi^{[3]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(x))) = \varphi(\varphi^{[2]}(x)) = \varphi\left(\frac{1-e^{8y}}{2}\right) = \frac{1-e^{16y}}{2}, \\
\varphi^{[4]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x)))) = \varphi(\varphi^{[3]}(x)) = \varphi\left(\frac{1-e^{16y}}{2}\right) = \frac{1-e^{32y}}{2}, \\
\varphi^{[5]}(x) &= \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))) = \varphi(\varphi^{[4]}(x)) = \varphi\left(\frac{1-e^{32y}}{2}\right) = \frac{1-e^{64y}}{2}.
\end{aligned}$$

Innen teljes indukcióval azt kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\varphi^{[n]}(x) = \varphi^{[n]}\left(\frac{1-e^{2y}}{2}\right) = \frac{1-e^{2^{n+1}y}}{2} = \frac{1-e^{2^n\ln(1-2x)}}{2} \qquad \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right). \quad \blacksquare$$

10.1.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ kompakt metrikus tér,

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

pedig olyan leképezés, amelyre

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) < \rho(x, y) \qquad (x, y \in \mathcal{X} : \ x \neq y)$$

teljesül, akkor φ-nek egyetlen $x^* \in \mathcal{X}$ fixpontja van, és tetszőleges $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén az

$$u_n := \varphi^{[n]}(u_0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\lim(u_n) = x^*$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $x^* \in \mathcal{X}$ és $y^* \in \mathcal{X}$ fixpontja φ-nek, akkor

$$\varphi(x^*) = x^* \qquad \text{és} \qquad \varphi(y^*) = y^*,$$

így

$$\rho(x^*, y^*) > \rho(\varphi(x^*), \varphi(y^*)) = \rho(x^*, y^*),$$

ami nem lehetséges.

2. lépés. Könnyen belátható, hogy az

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \rho(\varphi(x), x)$$

függvény folytonos, ezért a tér kompaktsága folytán van olyan $x^* \in \mathcal{X}$, hogy

$$f(x^*) = \inf \{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}\}$$

teljesül. Mivel

$$f(x^*) \leq f(\varphi(x^*)) = \rho\left(\varphi^{[2]}(x^*), \varphi(x^*)\right) < \rho(\varphi(x^*), x^*) = f(x^*),$$

ezért

$$\varphi(x^*) = x^*,$$

azaz x^* fixpontja φ-nek.

3. lépés. Ha $u_0 \in \mathcal{X}$ és

$$u_n := \rho(\varphi^{[n]}(u_0), x^*) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$u_{n+1} = \rho(\varphi^{[n+1]}(u_0), x^*) = \rho\left(\varphi^{[n+1]}(u_0), \varphi(x^*)\right) < \rho\left(\varphi^{[n]}(u_0), x^*\right) = u_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$u := \inf \{u_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} = \lim(u_n).$$

Ha most (ν_n) olyan indexsorozat, amelyre

$$a := \lim_{n\to\infty} \varphi^{[\nu_n]}(u_0) \in \mathcal{X},$$

akkor

$$\rho(a, x^*) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\varphi^{[\nu_n]}(u_0), x^*\right) = \lim_{n\to\infty} u_{\nu_n} = u.$$

Hasonló megfontolással

$$\rho(\varphi(a), \varphi(x^*)) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\varphi^{[\nu_n+1]}(u_0), x^*\right) = u = \rho(a, x^*)$$

adódik, azaz

$$a = x^*.$$

Ez azt jelenti, hogy x^* a

$$\left(\varphi^{[n]}(u_0)\right)$$

sorozat egyetlen torlódási pontja, így $\mathcal{X}$ kompaktságának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\varphi^{[n]}(u_0)\right) = x^*. \quad \blacksquare$$

10.2. A Weissinger-féle fixponttétel

10.2.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér és az

$$\alpha_n \in [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra, ill. a $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ leképezésre $(\alpha_n) \in l_1$, ill.

$$\rho\left(\varphi^{[n]}(u), \varphi^{[n]}(v)\right) \leq \alpha_n \cdot \rho(u, v) \qquad (u, v \in \mathcal{X},\ n \in \mathbb{N}_0) \tag{10.2.1}$$

teljesül, akkor

(i) φ-nek pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy olyan $u^* \in \mathcal{X}$ létezik, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*;$$

(ii) bármely $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén az

$$u_n := \varphi^{[n]}(u_0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(u_n) = u^*$;

(iii) tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén igazak az alábbi becslések:

- $\rho(u_n, u^*) \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\right) \rho(u_0, u_1)$ **(a-priori becslés)**,
- $\rho(u_n, u^*) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\right) \rho(u_n, u_{n+1})$ **(a-posteriori becslés)**

(**Weissinger-féle fixponttétel**)!

Útm.

1. lépés. Ha tetszőleges $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén

$$u_n := \varphi^{[n]}(u_0) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\rho(u_n, u_{n+1}) = \rho\left(\varphi^{[n]}(u_0), \varphi^{[n]}(u_1)\right) \overset{(10.2.1)}{\leq} \alpha_n \cdot \rho(u_0, u_1) \qquad (n \in \mathbb{N}_0), \tag{10.2.2}$$

így – a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával – bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho(u_{n+k}, u_{n+k+1}) \overset{(10.2.2)}{\leq} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}\right) \rho(u_0, u_1),$$

azaz

$$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha_k\right) \cdot \rho(u_0, u_1) \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\right) \cdot \rho(u_0, u_1). \tag{10.2.3}$$

A

$$\sum(\alpha_k)$$

sor konvergenciája következtében az (u_n) sorozat Cauchy-sorozat, amely a tér teljessége miatt konvergens. Ezért, ha

$$\lim(u_n) =: u^* \in \mathcal{X},$$

akkor φ folytonossága (φ Lipschitz-tulajdonságú) következtében

$$\varphi(u^*) = \varphi(\lim(u_n)) = \lim(\varphi(u_n)) = \lim(u_{n+1}) = u^*,$$

azaz $u^* \in \mathcal{X}$ fixpontja f-nek.

2. lépés. Ha $u^*, v^* \in \mathcal{X}: u^* \neq v^*$ fixpontjai φ-nek, azaz

$$\varphi(u^*) = u^* \qquad \text{és} \qquad \varphi(v^*) = v^*,$$

akkor

$$\varphi^{[2]}(u^*) = \varphi(u^*) = u^*, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{[2]}(v^*) = \varphi(v^*) = v^*.$$

Teljes indukcióval rögtön adódik, hogy tetszőleges $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\varphi^{[n]}(u^*) = \varphi(u^*) = u^*, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{[n]}(v^*) = \varphi(v^*) = v^*,$$

ezért

$$\rho(u^*, v^*) = \rho\left(\varphi^{[n]}(u^*), \varphi^{[n]}(v^*)\right) \overset{(10.2.1)}{\leq} \alpha_n \cdot \rho(u^*, v^*) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

hiszen a

$$\sum(\alpha_n)$$

sor konvergenciája miatt

$$\lim(\alpha_n) = 0.$$

3. lépés. Ha $n \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges, akkor

- a háromszög-egyenlőtlenség egy változatának (vö. 1.2.4/2. feladat) következményeként

  $$|\rho(u_{n+m}, u_n) - \rho(u_n, u^*)| \leq \rho(u_{n+m}, u^*) \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty),$$

  ezért

  $$\rho(u_{n+m}, u_n) \longrightarrow \rho(u_n, u^*) \qquad (m \to \infty).$$

  Így a (10.2.3) egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk az a-priori becslést.

- a (10.2.1) egyenlőtlenség következtében

  $$\rho(u_{n+m}, u_{n+m+1}) = \rho\left(\varphi^{[m]}(u_n), \varphi^{[m]}(u_{n+1})\right) \leq \alpha_m \cdot \rho(u_n, u_{n+1}) \qquad (m \in \mathbb{N}_0),$$

  ezért

  $$\rho(u_n, u_{n+m}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \rho(u_{n+k}, u_{n+k+1}) \leq \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\right) \rho(u_n, u_{n+1}) \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

  Így

  $$\rho(u_n, u_{n+m}) \longrightarrow \rho(u_n, u^*) \qquad (m \to \infty)$$

  következménye az a-posteriori becslés. ■

Ha teljesülnek a 10.2.1. feladatbeli állítás feltételei, akkor bármely $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén konvergens az

$$u_{n+1} = \varphi^{[n+1]}(u_0) = \varphi\left(\varphi^{[n]}(u_0)\right) = \varphi(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív sorozat és

$$\lim(u_n) = u^*.$$

Az alábbiakban speciális jobboldalú közönséges differenciálegyenletek lokális megoldásának létezésére és annak egyértelműségére adunk elégséges feltételt. Eltérően más módszerektől (vö. pl. [31] vagy [33]), ennek a tárgyalásnak megvan az az előnye, hogy alkalmazásakor nincsen szükség ún. további feltételre.

10.2.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ nyílt halmaz, $(\tau, \xi) \in \Omega$, továbbá

(1) valamely $a, b > 0$ esetén a

$$\mathcal{H}_{a,b} := [\tau - a, \tau + a] \times \{y \in \mathbb{R}^m : \ \|y - \xi\| \leq b\},$$

hengerre $\mathcal{H}_{a,b} \subset \Omega$,

(2) $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ olyan folytonos függvény, amelyre alkalmas $L \geq 0$ esetén

$$\|f(u,v) - f(u,w)\| \leq L\|v - w\| \qquad ((u,v),(u,w) \in \mathcal{H}_{a,b}),$$

(3) $\alpha := \min\{a, b/M\}$, ahol

$$0 < M := \max\{\|f(x,y)\| \in \mathbb{R} : \ (x,y) \in \mathcal{H}_{a,b}\},$$

akkor pontosan egy olyan differenciálható

$$\phi : [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \to \mathbb{R}^m$$

függvény van, amelyre

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül (**Picard-Lindelöf-tétel**)!

Útm. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([\tau - \alpha, \tau + \alpha], \mathbb{R}^m) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{K} := \{u \in \mathcal{X} : \ \|u - \xi\|_\infty \leq b\},$$

akkor

$$I := [\tau - \alpha, \tau + \alpha]$$

esetén az

$$A(y)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, y(s))\, ds \qquad (y \in \mathcal{K}, \ x \in I)$$

ún. **Picard-operátor**ra

$$A : \mathcal{K} \to \mathcal{K},$$

azaz bármely $y \in \mathcal{K}$ esetén $A(y) \in \mathcal{K}$, hiszen f folytonossága következtében $A(y)$ folytonos és bármely $x \in I$ esetén

$$\|A(y)(x) - \xi\| \leq \left| \int_\tau^x \|f(s, y(s))\| \, ds \right| \leq M|x - \tau| \leq M\alpha \leq M\frac{b}{M} = b.$$

Ezért tetszőleges $k \in \mathbb{N}_0$ esetén képezhető az

$$A^{[k]} := \overset{0}{\smile}{A} \circ \ldots \circ \overset{k}{\smile}{A}$$

iterált leképezés, amelyre teljesül a

$$(*) \qquad \left\|A^{[k]}(u)(x) - A^{[k]}(v)(x)\right\| \leq \frac{|x - \tau|^k}{k!} L^k \|u - v\|_\infty \qquad (u, v \in \mathcal{K},\ x \in I)$$

becslés, ui.

- ha $k = 0$, akkor a szuprémum definíciója alapján az állítás nyilvánvaló.
- ha $k = 1$ és $u, v \in \mathcal{K}$, ill. $x \in I$, akkor

$$\begin{aligned} \|A(u)(x) - A(v)(x)\| &= \left\| \int_\tau^x f(s, u(s))\, \mathrm{d}s - \int_\tau^x f(s, v(s))\, \mathrm{d}s \right\| \leq && (10.2.4) \\ &\leq \left| \int_\tau^x \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\, \mathrm{d}s \right| \leq && (10.2.5) \\ &\leq \left| \int_\tau^x L\|u(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}s \right| \leq && (10.2.6) \\ &\leq |x - \tau| L \|u - v\|_\infty; && (10.2.7) \end{aligned}$$

- ha valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a $(*)$ becslés, akkor bármely $u, v \in \mathcal{K}$, ill. $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned} \left\|A^{[k+1]}(u)(x) - A^{[k+1]}(v)(x)\right\| &\leq \left\|A(A^{[k]}(u))(x) - A(A^{[k]}(v))(x)\right\| \overset{(10.2.7)}{\leq} \\ &\leq \left| \int_\tau^x L \left\|A^{[k]}(u)(s) - A^{[k]}(v)(s)\right\| ds \right| \overset{\text{ind. felt.}}{\leq} \\ &\leq \left| \int_\tau^x L \frac{|s - \tau|^k}{k!} L^k \|u - v\|_\infty \, ds \right| = \\ &= \frac{L^{k+1}}{k!} \|u - v\|_\infty \left| \int_\tau^x (s - \tau)^k \, ds \right| = \\ &= \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} |x - \tau|^{k+1} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Így teljesülnek a Weissinger-féle fixponttétel (vö. 10.2.1. feladatbeli állítás) feltételei, azaz pontosan egy olyan $\phi \in \mathcal{K}$ van, amelyre

$$A(\phi) = \phi,$$

hiszen $(*)$-ot tovább becsülve azt kapjuk, hogy

$$\left\| A^{[k]}(u)(x) - A^{[k]}(v)(x) \right\| \leq \frac{\alpha^k L^k}{k!} \|u - v\|_\infty \qquad (u, v \in \mathcal{K},\ x \in I,\ k \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan

$$\left\| A^{[k]}(u) - A^{[k]}(v) \right\|_\infty \leq \frac{\alpha^k L^k}{k!} \|u - v\|_\infty \qquad (u, v \in \mathcal{K},\ k \in \mathbb{N}_0)$$

következik, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k L^k}{k!} = \exp(\alpha L) - 1 < +\infty. \quad \blacksquare$$

A Weissinger-féle fixponttétel következtében tehát ϕ a

$$\phi_0 \in \mathcal{K}, \qquad \phi_{k+1}(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, \phi_k(s))\, \mathrm{d}s \quad (x \in I,\ k \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív sorozat határfüggvénye (**szukcesszív approximáció**). A ϕ határfüggvénynek a sorozat n-edik tagjától való eltérésére a

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{(\alpha L)^n}{n!} e^{\alpha L} \max\left\{ |\phi_1(x) - \phi_0(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in I \right\} \qquad (x \in I)$$

becslés adódik, hiszen a Weissinger-féle a-priori becslés következtében

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} \right) \max\left\{ |\phi_1(x) - \phi_0(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in I \right\} \qquad (x \in I)$$

teljesül és a bármely $k, n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló

$$(k+n)! = \underbrace{(k+n)}_{\geq n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(k+1)}_{\geq 1} \cdot k! \geq n! \cdot k!$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^{k+n}}{(n+k)!} = (\alpha L)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{(n+k)!} \leq \\ &\leq \frac{(\alpha L)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} = \frac{(\alpha L)^n}{n!} e^{\alpha L}. \end{aligned}$$

10.3. A Banach-féle fixponttétel

10.3.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér és $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ kontrakció, azaz alkalmas $q \in [0,1)$ esetén

$$\rho(\varphi(u), \varphi(v)) \leq q \cdot \rho(u,v) \qquad (u, v \in \mathcal{X}),$$

akkor

(i) φ-nek pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy olyan $u^* \in \mathcal{X}$ létezik, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*;$$

(ii) bármely $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén az

$$u_n := \varphi(u_{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzióval értelmezett (u_n) sorozat konvergens és $\lim(u_n) = u^*$;

(iii) tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén igazak az alábbi becslések:

- $\rho(u_n, u^*) \leq \dfrac{q^n}{1-q} \cdot \rho(u_0, u_1)$ (a-priori becslés),
- $\rho(u_n, u^*) \leq \dfrac{q}{1-q} \cdot \rho(u_{n-1}, u_n)$ (a-posteriori becslés);

(iv) a konvergencia-sebességre

$$\rho(u_n, u^*) \leq q \cdot \rho(u_{n-1}, u^*) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül (**Banach-Tyihonov-Cacciopoli-féle fixponttétel**)!

Útm. Teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$\rho\left(\varphi^{[n]}(u), \varphi^{[n]}(v)\right) \leq q^n \cdot \rho(u,v) \qquad (u, v \in \mathcal{X},\ n \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan az

$$\alpha_n := q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra vonatkozó

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{l=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}$$

egyenlőtlenség felhasználásával az a-priori becslés

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(u_0, u_1) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

alakú (vö. 10.2.1. feladat). A φ leképezés kontrakciós tulajdonságát felhasználva kapjuk a konvergencia-sebességre vonatkozó formulát:

$$\rho(u_n, u^*) = \rho(\varphi(u_{n-1}), \varphi(u^*)) \leq q \cdot \rho(u_{n-1}, u^*) \,/\!\leq \rho(u_{n-1}, u^*)/ \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\rho(u_n,u^*)\leq q\cdot\rho(u_{n-1},u^*)\leq q\cdot\rho(u_{n-1},u_n)+q\cdot\rho(u_n,u^*),$$

ahonnan átrendezéssel

$$\rho(u_n,u^*)-q\cdot\rho(u_n,u^*)\leq q\cdot\rho(u_{n-1},u_n),$$

azaz a

$$\rho(u_n,u^*)\leq\frac{q}{1-q}\cdot\rho(u_{n-1},u_n)\qquad(n\in\mathbb{N})$$

a-poszteriori becslés adódik. ■

A 10.3.1. feladatban az $(\mathcal{X},\rho)$ metrikus tér teljessége nem hagyható el. A $((0,+\infty),\rho_2)$ metrikus tér pl. nem teljes /ui. az $x_n:=1/n$ $(n\in\mathbb{N})$ Cauchy-sorozat nem konvergens $((0,+\infty),\rho_2)$-ben/, és a

$$\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty),\qquad\varphi(x):=\frac{1}{2}x$$

leképezés ugyan kontrakció:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=\frac{1}{2}|x-y|\qquad(x,y\in(0,+\infty)),$$

de nincsen fixpontja, hiszen nincsen olyan $u^*>0$ szám, amelyre

$$\frac{1}{2}u^*=u^*$$

teljesülne.

Fontos hangsúlyozni, hogy a 10.3.1. feladatban a q **kontrakciós állandó**ra $q<1$ teljesül, hiszen a $(\mathbb{C},\rho_2)$ térben a

$$G:=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \frac{1}{2}\leq|z|\leq 1\right\}$$

halmaz zárt, azaz (G,ρ_2) teljes metrikus tér, és ha φ az $\alpha\in(0{,}2\pi)$ szöggel való, origó körüli forgatás, akkor φ-re

$$|\varphi(w)-\varphi(z)|=|w-z|\qquad(w,z\in G)$$

teljesül, de φ-nek nincsen fixpontja, hiszen $0\notin G$.

10.3.2. feladat. Lássuk be, hogy az

$$5x^3-20x+4=0$$

haramdfokú eygenletnek pontosan egy gyöke van a $[-1{,}1]$ intervallumban! Az $u_0:=0$ értékből kiindulva a Banach-féle fixponttételbeli közelítő sorozatnak hány tagját kell kiszámítani, hogy a közelítő elem és a fixpont eltérése az a-priori, ill. az a-posteriori-becslés szerint ne legyen nagyobb, mint $\varepsilon:=0{,}01$?

Útm. Ha

$$\psi(x):=\frac{x^3}{4}+\frac{1}{5}\qquad(x\in\mathbb{R})$$

akkor ψ folytonossága, $\psi(-1) < 0$, ill. $\psi(1) > 0$ következtében ψ-nek van a $[-1,1]$ intervallumban zérushelye. A 10.1.2. feladatból tudjuk, hogy a

$$\varphi(x) := \psi(x) \qquad (x \in [-1,1])$$

függvény kontrakció. Így a $([-1,1], \rho_2)$ tér teljessége $/[-1,1] \subset \mathbb{R}$ zárt/ következtében pontosan egy olyan $u^* \in [-1,1]$ van, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*.$$

Ha $u_0 := 0$, akkor

$$u_2 = \varphi(u_1) = 1/5,$$

ill. az n-edik lépés után az a-priori becslésből

$$\frac{q^n}{1-q}|u_1 - u_0| = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{5} \leq \varepsilon = \frac{1}{100},$$

azaz

$$n \geq \frac{\ln(1/80)}{\ln(3/4)} \approx 15{,}2322$$

következik. Így 16 iterációra van szükség. Az a-posteriori becslésből azt kapjuk, hogy

$$|u_n - u^*| \leq \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{1/(1-3/4)=4} |u_{n+1} - u_n|.$$

Az alábbi táblázatban néhány iteráció látható a-posteriori becsléssel:

n	u_n	$4\lvert u_{n+1} - u_n\rvert$
0	0,000	0,800
1	0,200	0,808
2	0,202	

(az $u_0 := 0$-ból kiindulva kiszámítottuk az

$$u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(0) = 1/5, \qquad u_2 = \varphi(u_1) = \varphi(1/5) = 101/500$$

értékeket). Látható, hogy már két iterációs lépés után az a-posteriori hiba alá lehet kerülni. ■

10.3.3. feladat. Igazoljuk, hogy bármely $A > 0$ szám esetén a

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right) \qquad \left(x \in \left[\sqrt{\frac{A}{2}}, +\infty\right)\right)$$

leképezés esetében pontosan egy olyan

$$u^* \in \left[\sqrt{\frac{A}{2}}, +\infty\right)$$

van, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*$$

teljesül, majd $A := 2$ esetén becsüljük meg a második iterációval kapott értéknek u^*-tól való eltérését!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy bármely

$$I := \left[\sqrt{\frac{A}{2}}, +\infty\right)$$

esetén

$$\varphi(x) \in I \qquad (x \in I).$$

Valóban, ha $x \in I$, akkor

$$\sqrt{\frac{A}{2}} \le \frac{1}{2x}\left(x - \sqrt{\frac{A}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2x}\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right) = \varphi(x).$$

2. lépés. Világos, hogy φ deriválható és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \qquad (x \in I),$$

továbbá φ' monoton növekedő, hiszen bármely $x, y \in I$, $x \le y$ esetén

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{y^2}\right) = \varphi'(y).$$

Ezért a tetszőleges $x \in I$ esetén fennálló

$$\varphi'\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right) \le \varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \le \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségpárból, ill. a

$$\varphi'\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$$

egyenlőségből

$$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{2} \qquad (x \in I)$$

következik. Így a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $x, y \in I$ és alkalmas $\xi \in I$ esetén

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|,$$

azaz φ kontrakció.

3. lépés. Mivel $I \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz, ezért (I, ρ_2) teljes metrikus tér. Teljesülnek tehát a Banach-féle fixponttétel feltételei, így φ-nek pontosan egy fixpontja van I-ben, azaz pontosan egy olyan $u^* \in I$ van, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2}\left(u^* + \frac{A}{u^*}\right) = u^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad u^* = \sqrt{A}.$$

4. lépés. Ha $A := 2$ és $u_0 := 1$, akkor $\varphi(1) = 3/2$ és

$$u_2 = \varphi^{[2]}(1) = \varphi(\varphi(1)) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}41\dot{6},$$

és a hibára pl. az

$$\left|u_2 - \sqrt{2}\right| \le \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}|u_2 - u_2| = \left|\frac{3}{2} - \frac{17}{12}\right| = \frac{1}{12} = 0{,}08\dot{3}$$

becslés adható. ■

10.3.4. feladat. Bizonyítsuk be a Banach-féle fixponttétel következő (lokális) változatát! Ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$, $a \in \mathcal{X}$, ill. $r > 0$, továbbá $\varphi : H \to \mathcal{X}$ olyan leképezés, amelyre

- $B_r(a) \subset H$,
- $\exists\, q \in [0{,}1)\, \forall\, x, y \in B_r(a): \quad \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \le q\rho(x, y)$,
- $\rho(a, \varphi(a)) \le (1 - q)r$

teljesül, akkor φ-nek pontosan egy – u^*-gal jelölt – fixpontja van $B_r(a)$-ban, és az

$$u_0 \in B_r(a), \qquad u_n = \varphi(u_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(u_n) = u^*$ teljesül.

Útm.

1. lépés. Mivel $B_r(a)$ zárt az $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus térben (vö. 1.2.22. feladat), ezért $(B_r(a), \rho)$ szintén teljes metrikus tér.

2. lépés. Ha tehát $x \in B_r(a)$, akkor

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi(x), a) &\le \rho(\varphi(x), \varphi(a)) + \rho(\varphi(a), a) \le \\
&\le q\rho(x, a) + \rho(\varphi(a), a) \le \\
&\le qr + \rho(\varphi(a), a) \le qr + r(1 - q) = r.
\end{aligned}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi(x) \in B_r(a)$ $(x \in B_r(a))$.

3. lépés. A feltételekből tehát az következik, hogy a

$$\psi(x) := \varphi(x) \qquad (x \in B_r(a))$$

leképezés esetén

$$\psi : B_r(a) \to B_r(a)$$

kontrakció. Így a $(B_r(a), \rho)$ tér teljessége folytán pontosan egy olyan $u^* \in B_r(a)$ van, amelyre

$$\varphi(u^*) = \psi(u^*) = u^*. \quad ■$$

10.3.5. feladat. A Balaton vizére fektetett derékszögű koordinátarendszerre vonatkozóan valamely vitorláshajó az $y = x^2$ egyenletű parabola mentén szeli a hullámokat a $(3{,}9)$ és a $(0{,}0)$ koordinátájú pont között. Határozzuk meg a hajónak azt a pozícióját, amely a lehető legközelebb van a $P := (2, -1/2)$ koordinátájú pontban elhelyezkedő bójához!

Útm. Az $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$ metrikus térben a P pontnak az

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0{,}3],\ y = x^2\right\}$$

halmaztól való távolságát, pontosabban a P-t legjobban közelítő A-beli elemet kell meghatározni. Mivel $\mathbb{R}^2$ véges dimenziós és A zárt, ezért ilyen elem létezik. Világos, hogy ennek a közelítő elemnek az első koordinátája nem más, mint a

$$d(x) := \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} \qquad (x \in [0{,}3]),$$

ill. a $t := d^2$ függvény minimumhelye. Mivel

$$t(0) = \frac{17}{4} > \frac{13}{4} = t(1) \qquad \text{és} \qquad t(3) = \frac{365}{4} > \frac{13}{4} = t(1),$$

továbbá

$$t'(x) = 2(x-2) + 4x\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = 4x^3 + 4x - 4 \qquad (x \in [0{,}3]),$$

ezért az

$$x^3 + x - 1 = 0 \qquad (x \in [0{,}3])$$

egyenlet megoldását keressük. Ez nem más, mint a

$$\varphi : [0{,}3] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

leképezés fixpontja. Mivel

$$\varphi[[0{,}3]] \subset [0{,}3]$$

és az

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right| = \frac{2x}{(1+x^2)^2} =: f(x) \qquad (x \in [0{,}3])$$

függvénynek az $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$-ban van maximumhelye, ezért

$$f(x) \leq f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{8} =: q \qquad (x \in [0{,}1]),$$

így

a $H := [0{,}3]$ halmazzal valamint az $a := 1{,}5$, $r := 1{,}5$ számokkal

teljesülnek a 10.3.4. feladatban megfogalmazott feltételek. ■

10.3.1. gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ kontrakció, azaz alkalmas $q \in [0,1)$ esetén

$$\rho(\varphi(u), \varphi(v)) \leq q\rho(u, v) \qquad (u, v \in \mathcal{X}),$$

és $x^* \in \mathcal{X}$ fixpontja φ-nek, akkor bármely $x \in \mathcal{X}$ pontra

$$\rho(x, x^*) \leq \frac{1}{1-q}\rho(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

teljesül!

Útm.

10.3.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér,

$$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

pedig olyan leképezés, hogy alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén $\phi^{[n]}$ kontrakció, akkor ϕ-nek pontosan egy fixpontja van!

Útm. Ha

$$\varphi := \phi^{[n]} \qquad \text{és} \qquad \psi := \varphi,$$

akkor a Banach-féle fixponntétel (vö. 10.3.1. feladat) következtében φ-nek pontosan egy fixpontja van. Mivel φ és ψ felcserélhető:

$$\varphi \circ \psi = \phi^{[n]} \circ \phi = \phi^{[n+1]} = \phi \circ \phi^{[n]},$$

ezért (vö. 10.1.7. feladat) ψ-nek van fixpontja. Ha ψ-nek két különböző fixpontja lenne: $x^* \in \mathcal{X}$ és $y^* \in \mathcal{X}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\phi^{[n]}(x^*) = x^* \qquad \text{és} \qquad \phi^{[n]}(y^*) = y^*$$

teljesülne, ami nem lehetséges, hiszen a

$$\varphi := \phi^{[n]}$$

leképezésnek pontosan egy fixpontja van. ■

10.3.7. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}$ konvex és zárt, továbbá

$$\varphi : A \to A$$

nem-expanzív leképezés, akkor van olyan

$$x_n \in A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, hogy

$$\|\varphi(x_n) - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesül!

Útm. Ha $y \in A$ és $\lambda \in (0{,}1]$, továbbá

$$\varphi_\lambda(x) := \lambda y + (1-\lambda)\varphi(x) \qquad (x \in A)$$

akkor $y, \varphi(x) \in A$, ill. A konvexitása következtében

$$\varphi_\lambda(x) \in A \qquad (x \in A).$$

Világos, hogy φ_λ folytonos, továbbá

$$\|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(\widetilde{x})\| = (1-\lambda)\cdot\|\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})\| \leq (\underbrace{1-\lambda}_{<1})\cdot\|x-\widetilde{x}\| \qquad (x, \widetilde{x} \in A),$$

azaz φ_λ kontrakció. Ezért a Banach-féle fixponttétel (vö. 10.3.1. feladat) következtében bármely $\lambda \in (0{,}1)$ esetén pontosan egy olyan $x \in A$ van, hogy

$$\varphi_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$$

teljesül. Továbbá

$$\|\varphi(x_\lambda) - x_\lambda\| = \left\|\frac{1}{1-\lambda}\cdot(\varphi_\lambda(x_\lambda) - \lambda y) - x_\lambda\right\| = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\|x_\lambda - y\| \longrightarrow 0 \qquad (\lambda \to 0).$$

Ezek után a

$$\lambda := \frac{1}{n}$$

választás megfelelő. ■

Világos, hogy ha$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek, $H \subset \mathcal{X}$, ill. $\phi : H \to \mathcal{Y}$ olyan folytonos leképezés, amelynek van H-ban fixpontja, akkor

$$\eta(\varphi, H) := \inf\{\|\varphi(x) - x\| \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = 0$$

teljesül. Az

$$\eta(\varphi, H) = 0$$

egyenlőség persze akkor is fennálhat, ha φ-nek nincsen fixpontja. Erre vonatkozik a

10.3.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$ konvex, korlátos és zárt halmaz, továbbá

$$\varphi : H \to H$$

nem-expanzív leképezés, akkor fennáll az

$$\eta(\varphi, H) = 0$$

egyenlőség!

Útm. Ha $a \in H$ és $\varepsilon > 0$, akkor H korlátossága következtében van olyan $t \in (0{,}1)$, hogy

$$t \cdot \operatorname{diam}(H) < \varepsilon.$$

Mivel H konvex, ezért a

$$\psi(x) := ta + (1-t)\varphi(x) \in H \qquad (x \in H),$$

azaz a

$$\psi : H \to H$$

leképezés jóldefiniált. Mivel H zárt, ezért (a normából származó metrikára nézve) teljes is. Mivel φ nem-expanzív, ezért bármely $x, y \in H$ esetén

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| = (1-t)\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq (1-t)\|x - y\|,$$

azaz ψ kontkakció. A Banach-féle fixponttétel következtében így pontosan egy olyan $h \in H$ van, amelyre

$$\psi(h) = h.$$

Erre a h-ra

$$\begin{aligned}\|\varphi(h) - h\| &= \|\varphi(h) - \psi(h)\| = \|\varphi(h) - ta - \varphi(h) + t\varphi(h)\| = \\ &= t\|\varphi(h) - a\| \leq t \cdot \mathrm{diam}\,(H) \leq \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül. ■

10.3.9. feladat. Személtessük a 10.3.8. feladatbeli állítást a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér, a

$$H := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \; 0 = f(1) \leq f(t) \leq f(1) = 1 \, (t \in [0,1])\}$$

halmaz, ill. az

$$A : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad (Af)(x) := xf(x) \, (x \in [0,1])$$

operátor segítségével!

Útm. Világos, hogy H konvex, korlátos ($\mathrm{diam}\,(H) = 1$), és zárt, továbbá az A operátorra

$$A[H] \subset H$$

teljesül. $\|A\| = 1$ (vö. 4.2.7. feladat) következtében A nem-expanzív, hiszen bármely $u, v \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre

$$\|Au - Av\|_\infty = \|A(u - v)\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|u - v\|_\infty.$$

A-nak egyetlen fixpontja van:

$$u(x) \equiv 0,$$

de $u \notin H$. Ha $t \in (0,1)$,

$$a(x) := x \qquad (x \in [0,1]),$$

továbbá

$$\psi(f) := ta + (1-t)Af \qquad (f \in \mathfrak{C}[0,1]),$$

(vö. **??**. feladat útmutatója), akkor ψ-nek egyetlen fixpontja van H-ban:

$$h(x) := \frac{tx}{1-(1-t)x} \qquad (x \in [0,1]).$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$\|Ah - h\|_\infty \leq t$$

teljesül. ■

Vegyük észre a 10.3.9. feladatbeli A operátor alábbi érdekes tulajdonságát: ha $u_0 \in H$, akkor az

$$(A^{[n]}u_0)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat tagja a lehető „legmesszebbre távolodnak” az u_0 kezdőfüggvénytől:

$$\|u_0 - A^{[n]}u_0\|_\infty = \max\{|u_0(x) - x^n u_0(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\} \to 1 = \operatorname{diam}(H) \qquad (n \to \infty).$$

10.3.10. feladat. Személtessük a 10.3.8. feladatbeli állítást az $(l_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, a

$$H := \left\{ x = (x_n) \in l_1 : \ x_n \geq 0 \, (n \in \mathbb{N}), \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \right\}$$

halmaz, ill. a

$$J : l_1 \to l_1, \qquad Jx := (0, x_1, x_2, \ldots)$$

operátor segítségével!

Útm. Világos, hogy H konvex, korlátos ($\operatorname{diam}(H) = 2$), és zárt, továbbá a J operátorra

$$J[H] \subset H$$

teljesül. $\|J\| = 1$ (vö. 4.2.9. feladat) következtében J nem-expanzív, hiszen bármely $u, v \in l_1$ függvényre

$$\|Ju - Jv\|_1 = \|J(u-v)\|_1 \leq \|J\| \cdot \|u - v\|_1.$$

J-nak egyetlen fixpontja van:

$$u_n := 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

de $u \notin H$. Ha $t \in (0,1)$,

$$a := (1,0,0,\ldots),$$

továbbá

$$\psi(u) := ta + (1-t)Ju \qquad (u \in l_1),$$

(vö. **??**. feladat útmutatója), akkor ψ-nek egyetlen fixpontja van H-ban:

$$h := (t, t(1-t), t(1-t)^2, t(1-t)^3, \ldots).$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$\|Jh - h\|_1 \leq t$$

teljesül. ■

A 10.3.10. feladatbeli J operátornak is megvan a 10.3.10. feladat utáni megjegyzésben megfogalmazott érdekes tulajdonsága: ha $u_0 \in H$, akkor a

$$(J^{[n]}u_0)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat tagja a lehető „legmesszebbre távolodnak" az u_0 kezdősorozattól:

$$\|u_0 - J^{[n]}u_0\|_1 = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k - u_{k-n}| \to 2 = \operatorname{diam}(H) \qquad (n \to \infty).$$

A 10.3.8. feladatbeli állítás azt jalenti, hogy ha φ nemexpanzív leképezés, akkor φ-nek legalább **approximatív fixpont**jai vannak, azaz olyan

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok, amelyekre

$$\lim(\|\varphi(x_n) - x_n\|) = 0$$

teljesül. Ha egy ilyen sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) =: u \in H,$$

akkor φ folytonossága következtében

$$\|\varphi(u) - u\| = 0,$$

azaz

$$\varphi(u) = u.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy u fixpontja φ-nek. Könnyen megoldható tehát a

10.3.11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér,

1. $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$ kompakt halmaz, $\varphi : H \to H$ folytonos leképezés, úgy φ-nek pontosan akkor van fixpontja, ha
$$\eta(\varphi, H) = 0$$
teljeül;
2. $\emptyset \neq H \subset \mathcal{X}$ kompakt, konvex halmaz,
$$\varphi : H \to H$$
nem-expanzív leképezés, akkor φ-nek van fixpontja!

Útm.

1. A H halmaz kompaktsága és a
$$\psi(x) := \|x - \varphi(x)\| \qquad (x \in \mathcal{X})$$
függvény folytonossága következtében
$$\eta(\varphi, H) = \min\{\psi(x) \in \mathbb{R} : \; x \in H\},$$
tehát $\eta(\varphi, H)$ pontosan akkor teljesül, ha alkalmas $u \in H$ esetén
$$\|u - \varphi(u)\| = 0, \qquad \text{azaz} \qquad u = \varphi(u).$$

2. Mivel minden nem-expanzív leképezés folytonos, ezért ez az állítás a fenti megjegyzés közvetlen következménye. ■

10.3.12. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ metrikus tér, $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes metrikus tér, és $\varphi : \mathcal{P} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, továbbá

(i) bármely $p \in \mathcal{P}$ esetén a $\varphi(p, \cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ függvény kontrakció, azaz alkalmas $\alpha \in [0,1)$ esetén
$$\rho(\varphi(p, u), \varphi(p, v)) \leq \alpha\rho(u, v) \qquad (p \in \mathcal{P}, \; u, v \in \mathcal{X}),$$

(ii) minden $x \in \mathcal{X}$ esetén a $\varphi(\cdot, x) : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$ leképezés folytonos,

akkor a
$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{X}, \qquad \Phi(p) := x_p^*$$
függvény folytonos, ahol tetszőleges $p \in \mathcal{P}$ esetén ${x^*}_p$ a $\varphi(p, \cdot)$ függvény fixpontja!

Útm. Ha valamely $p \in \mathcal{P}$ esetén ${x^*}_p$ fixpontja $\varphi(p, \cdot)$-nek, akkor tetszőleges $q \in \mathcal{P}$ esetén
$$\begin{aligned}
\rho(x_p^*, x_q^*) &= \rho(\varphi(p, x_p^*), \varphi(q, x_q^*)) \leq \\
&\leq \rho(\varphi(p, x_p^*), \varphi(q, x_q^*)) + \rho(\varphi(q, x_p^*), \varphi(q, x_q^*)) \leq \\
&\leq \rho(\varphi(p, x_p^*), \varphi(q, x_q^*)) + \alpha\varphi(x_p^*, x_q^*),
\end{aligned}$$
ezért
$$\rho(x_p^*, x_q^*) \leq \frac{1}{1-\alpha}\rho(\varphi(q, x_p^*)), \varphi(p, x_q^*)). \qquad \blacksquare$$

10.3.13. feladat. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, ill. $A \in L(\mathcal{X})$, $\|A\| < 1$ operátor esetén mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $B \in L(H)$ operátor van, amelyre
$$AB + I = B$$
teljesül!

Útm. Ha
$$\Phi : L(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{X}), \qquad \varphi(H) := AH + I,$$

akkor Φ kontrakció, hiszen bármely $H, G \in L(\mathcal{X})$ operátor esetén

$$\|\Phi(H) - \Phi(G)\| = \|AH - AG\| = \|A(H - G)\| \leq \|A\| \cdot \|H - G\|\,.$$

Mivel $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ teljessége következtében $(L(\mathcal{X}), \|\cdot\|)$ is teljes (vö. 4.3.8/2. feladat), így a Banach-féle fixponttétel következményeként pontosan egy olyan $B \in L(H)$ operátor van, amelyre

$$\Phi(B) = B, \qquad \text{azaz} \qquad AB + I = B$$

teljesül. ■

Ha tehát $B_0 \in L(\mathcal{X})$, akkor a

$$B_n := \Phi(B_{n-1}) = AB_{n-1} + I \qquad (n \in \mathbb{N})$$

operátorsorozat az $(L(\mathcal{X}), \|\cdot\|)$ Banach-térben konvergens, speciálisan $B_0 := I$ esetén

$$\begin{aligned} B_n &= AB_{n-1} + I &&= A^2B_{n-2} + AI + I = A^2B_{n-2} + A + I = \\ &= AB_{n-1} + I &&= A^3B_{n-3} + A^2I + AI + I = A^3B_{n-3} + A^2 + A + I = \\ &= \quad \ldots &&= \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right), \end{aligned}$$

így

$$B = \lim(B_n) = \lim\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

10.3.14. feladat. Lássuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X})$, $\|A\| < 1$, akkor $I - A$ injektív, $I - A \in L(\mathcal{X})$,

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \qquad \text{és} \qquad (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

teljesül, tobábbá bármely $b \in \mathcal{X}$ esetén az

$$(*) \qquad x = Ax + b \qquad /x \in \mathcal{X}/$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van: az

$$u = (I - A)^{-1}b$$

vektor, amely határértéke az

$$x_n := \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) b \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatnak (vö. 5.2.5. feladat)!

Útm. Mivel

$$\|A\| < 1,$$

ezért a

$$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \varphi(x) := Ax + b$$

leképezés kontrakció (vö. 10.1.4. feladat), így tetszőleges $x_0 \in \mathcal{X}$ esetén az

$$x_n := Ax_{n-1} + b \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens:

$$\lim(x_n) =: u \in \mathcal{X}.$$

Speciálisan, ha $x_0 := b$, akkor

$$\begin{aligned} x_n &= Ax_{n-1} + b = A^2 x_{n-2} + Ab + b = A^3 x_{n-3} + A^2 b + Ab + b = \\ &= \ldots = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) b, \end{aligned}$$

ennélfogva

$$u = \lim(x_n) = \lim(B_n b) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) b,$$

hiszen a normában való konvergencia a pontonkénti konvergenciát implikálja (vö. 5.0.39. feladat). Így φ-nek pontosan egy fixpontja van: u. Ez azt jelenti, hogy a $(*)$ egyenletnek pontosan egy megoldása van: u. Mivel $b \in \mathcal{X}$ tetszőleges, pl. $b = 0$, innen az következik, hogy

$$\ker(I - A) = \{0\},$$

azaz az $I - A$ operátor injektív, sőt

$$(I - A)^{-1} b = u.$$

Ezért a fentiek következtében

$$(I - A)^{-1} b = u = \lim(x_n) = \lim\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) b = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) b,$$

azaz

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} A^{\infty}.$$

A norma folytonosságából, ill. az

$$\sum_{k=0}^{n} A^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} A^{\infty} \qquad (n \to \infty)$$

határérték-relációból

$$\lim\left(\left\|\sum_{k=0}^{n} A^k\right\|\right) = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\|$$

következik. Így

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} \qquad (n \to \infty),$$

ennélfogva

$$\|(I-A)^{-1}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\| = \lim\left(\left\|\sum_{k=0}^{n} A^k\right\|\right) = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|} \in \mathbb{R},$$

azaz

$$(I-A)^{-1} \in L(\mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

10.3.15. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{K}^d$, $M \in \mathbb{K}^{d \times d}$, akkor az alábbi két állítás egynértékű!

1) Az

$$x = Mx + b \qquad \Big/ x \in \mathbb{K}^d \Big/$$

egyenletrendszernek pontosan egy $u \in \mathbb{K}^d$ megoldása van és az

$$u_0 \in \mathbb{K}^d, \qquad u_{n+1} := Mu_n + b \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra $\lim(u_n) = u$ teljesül.

2) $\rho(M) < 1$.

Útm.

1. lépés. Ha

$$\rho(M) < 1,$$

akkor (vö. 1.3.107. feladat) alkalmas $p : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ norma esetén

$$\rho(M) \leq \operatorname{lub}_p(M) < 1.$$

Ezért a

$$\varphi(x) := Mx + b \qquad (x \in \mathbb{K}^d)$$

leképezés kontrakció (vö. 10.1.4. feladat), továbbá az

$$u_0 \in \mathbb{K}^d, \qquad u_{n+1} := \varphi(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens és az

$$u := \lim(u_n) \in \mathbb{K}^d$$

határelemre

$$\varphi(u) = u$$

teljesül. Világos, hogy

$$u = Mu + b,$$

továbbá az

$$x = Mx + b \qquad /x \in \mathbb{K}^d/$$

egyenlet minden megoldása fixpontja φ-nek, azaz az iménti egyenletnek pontosan egy megoldása van.

2. lépés. Ha
$$\rho(M) \geq 1$$
és alkalmas $\lambda \in \mathbb{C}$, ill. $0 \neq v \in \mathbb{K}^d$ esetén
$$Mv = \lambda v,$$
akkor megmutatjuk, hogy van olyan $z \in \mathbb{K}^d$ vektor, hogy ha u az
$$x = Mx + b \qquad /x \in \mathbb{K}^d/$$
egyenlet megoldása, akkor az
$$u_0 := u - z$$
kezdőelem esetén az
$$u_{n+1} := Mu_n + b \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat nem konvergál u-hoz. Az u megoldásank az iménti sorozat n-edik tagjától való eltérésére $u - u_0 = z$, ill.
$$\begin{aligned} u - u_n &= Mu + b - Mu_{n-1} - b = M\left(u - u_{n-1}\right) = \\ &= M(Mu - Mu_{n-2}) = \ldots = M^n(u - u_0) = \\ &= M^n z \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$
teljesül. Ha most

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ és $z := v$, akkor
$$u - u_n = M^n v = \lambda M^{n-1} v = \ldots = \lambda^n v.$$
Így ha $p : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ norma, akkor $|\lambda| \geq 1$ és $v \neq 0$ miatt
$$p(u - u_n) = |\lambda|^n p(v) \geq p(v) > 0,$$
azaz (u_n) nem konvergál u-hoz ($\mathbb{C}^d$-ben).
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor M-nek $\overline{\lambda}$ is sajátértéke és a hozzá tartozó sajátvektor $\overline{v}$. Ennélfogva $v + \overline{v} \in \mathbb{R}^d$, és így a fentiek következtében
$$u - u_n = M^n z = M^n v + M^n \overline{v} = \lambda^n v + \overline{\lambda}^n \overline{v}.$$
Ezért $\mathbb{R}^d$-ben (sőt $\mathbb{C}^d$-ben is)
$$(*) \qquad \lambda^n v + \overline{\lambda}^n \overline{v} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$
Hasonlóan
$$z := \imath(v - \overline{v}) \in \mathbb{R}^d,$$

és így

$$u - u_n = M^n z = \imath \left(M^n v - M^n \overline{v}\right) = \imath \left(\lambda^n v - \overline{\lambda}^n \overline{v}\right),$$

ahonnan $\mathbb{R}^d$-ben (sőt $\mathbb{C}^d$-ben is)

$$\imath \left(\lambda^n v - \overline{\lambda}^n \overline{v}\right) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz

$$(**) \qquad \lambda^n v - \overline{\lambda}^n \overline{v} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következik. $(*)$ és $(**)$ figyelembe vételével azt kapjuk, hogy $\mathbb{C}^d$-ben

$$\lim(2\lambda^n v) = 0.$$

Így ha $p : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}$ norma, akkor $|\lambda| \geq 1$ és $v \neq 0$ miatt

$$p\left(2\lambda^n v\right) = 2|\lambda|^n p(v) \geq p(v) > 0.$$

azaz (u_n) nem konvergál u-hoz. ■

Ha a 10.3.15. feladatbeli M mátrixra $\rho(M) < 1$, és $p : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ olyan norma, amelyre

$$\rho(M) \leq \operatorname{lub}_p(M) < 1$$

teljesül, akkor fennállnak az alábbi hibabecslések:

$$p(u - u_n) \leq \frac{(\operatorname{lub}_p(M))^n}{1 - \operatorname{lub}_p(M)} p(u_1 - u_0) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(a-prori becslés);

$$p(u - u_n) \leq \frac{(\operatorname{lub}_p(M))^n}{1 - \operatorname{lub}_p(M)} p(u_n - u_{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(a-posteriori becslés).
Világos, hogy bármely $d \in \mathbb{N}$, ill. $b \in \mathbb{K}^d$ és $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ esetén az

$$(*) \qquad Ax = b \qquad /x \in \mathbb{K}^d/$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$(**) \qquad x = Mx + b \qquad /x \in \mathbb{K}^d/$$

egyenletrendszerrel, ahol

$$M := E_d - A.$$

Ezért, ha

$$\det(A) \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \rho(M) < 1$$

teljesül, akkor egyrészt feltehető, hogy

$$a_{kk} \neq 0 \qquad (k \in \{1, \dots, d\}),$$

hiszen A ebben az esetben véges sok sorcserével ilyen mártixszá alakítható, továbbá a

$$\varphi(x) := Mx + b \qquad (x \in \mathbb{K}^d)$$

leképezés kontkakció, azaz (vö. 10.3.15. feladat) az

$$u_0 \in \mathbb{K}^d, \qquad u_{n+1} := Mu_n + b \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens és az

$$u := \lim(u_n)$$

határelem megoldása a $(*)$ egyenletrendszernek. Ezért, ha

$$A = L + D + U,$$

ahol

$$L := (l_{ij}) : \quad l_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & (j > i), \\ \\ 0 & (j \leq i), \end{cases}$$

$$D := (d_{ij}) : \quad d_{ij} := \begin{cases} a_{ii} & (i = j), \\ \\ 0 & (j \neq i), \end{cases}$$

$$U := (u_{ij}) : \quad u_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & (j < i), \\ \\ 0 & (j \geq i), \end{cases}$$

akkor a $(*)$ egyenletrendszer ekvivalens a

$$Dx = -(L + U)x + b \quad \left/x \in \mathbb{K}^d\right/,$$

ill. a

$$(L + D)x = -Ux + b \quad \left/x \in \mathbb{K}^d\right/$$

egyenletrendszerrel. Így D, ill. $L + D$ invertálhatósága következtében a $(**)$ egyenletrendszer ekvivalens a

$$x = Tx + c \qquad \left/x \in \mathbb{K}^d\right/,$$

egyenletrendszerrel, ahol

$$T := -D^{-1}(L + U) \quad \text{és} \quad c := D^{-1}b,$$

ill.

$$T := -(L + D)^{-1}U \quad \text{és} \quad c := (L + D)^{-1}b.$$

Könnyen beláthatók tehát az alábbi tételek.

10.3.1. tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, ill. $b \in \mathbb{K}^d$ és

$$A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{d\times d}: \qquad a_{kk} \neq 0 \quad (k \in \{1, \ldots, d\}),$$

akkor a $(*)$ egyenletrendszer esetében egyenértékűek az alábbi állítások:

(1) $(*)$-nak pontosan egy u megoldása van, és ha

$$T := -D^{-1}(L+U), \qquad \text{ill.} \qquad c := D^{-1}b,$$

akkor az

$$u_0 \in \mathbb{K}^d, \qquad u_{n+1} := Tu_n + c \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat (**Jacobi-iteráció**) konvergens:

$$\lim(u_n) = u.$$

(2) $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1.$

10.3.2. tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, ill. $b \in \mathbb{K}^d$ és

$$A = [a_{kl}] \in \mathbb{K}^{d\times d}: \qquad a_{kk} \neq 0 \quad (k \in \{1, \ldots, d\}),$$

akkor a $(*)$ egyenletrendszer esetében egyenértékűek az alábbi állítások:

(1) $(*)$-nak pontosan egy u megoldása van, és ha

$$T := -(L+D)^{-1}U, \qquad \text{ill.} \qquad c := (L+D)^{-1}b,$$

akkor az

$$u_0 \in \mathbb{K}^d, \qquad u_{n+1} := Tu_n + c \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat (**Gauß-Seidel-iteráció**) konvergens:

$$\lim(u_n) = u.$$

(2) $\rho((L+D)^{-1}U) < 1.$

10.3.1. házi feladat. Igazoljuk, hogy ha

1. az A mátrixra

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{d} |a_{il}| \quad (i \in \{1,\ldots,d\}) \quad \text{vagy} \quad |a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{d} |a_{ik}| \quad (k \in \{1,\ldots,d\})$$

   (A **átlódomináns**), akkor

$$\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$$

   teljesül, azaz a Jacobi-iteráció konvergens!

2. az A mátrixra

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{d} |a_{il}| \qquad (i \in \{1,\ldots,d\}),$$

   akkor

$$\rho((L+D)^{-1}U) < 1$$

   teljesül, azaz a Gauß-Seidel-iteráció konvergens!

10.3.16. feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f \in \mathfrak{D}^2, \qquad f'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathfrak{D}_f),$$

továbbá valamely $[a,b]$ $/-\infty < a < b < +\infty/$ intervallummal $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$,

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [a,b] \qquad (x \in [a,b])$$

és

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} < 1 \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor pontosan egy olyan $\xi \in [a,b]$ van, amelyre

$$f(\xi) = 0,$$

és tetszőleges $x_0 \in [a,b]$ mellett az

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat ξ-hez konvergál (**Newton-módszer**)!

Útm. A feltételek következtében a

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

függvényre

$$\varphi[[a,b]] \subset [a,b], \qquad \varphi \in \mathfrak{D},$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

és

$$|\varphi'(x)| < 1 \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül. Ekkor pontosan egy olyan $\xi \in [a, b]$ van, amelyre

$$\varphi(\xi) = \xi, \qquad \text{azaz} \qquad f(\xi) = 0,$$

és tetszőleges $x_0 \in [a, b]$ mellett az

$$x_{n+1} := \varphi(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat határértéke ξ. ■

10.3.17. feladat. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény van, amelyre

$$u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x u \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül, majd határozzuk is meg ezt a függvényt!

Útm. Korábbról tudjuk, hogy a

$$\varphi : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad \varphi(f)(x) := 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f \quad (x \in [0,1])$$

leképezés kontrakció, így $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ tér teljessége folytán φ-nek pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy olyan $u^* \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvény létezik, amelyre

$$\varphi(u^*) = u^*.$$

Ha

$$u_0(x) := 1 \qquad (x \in [0,1])$$

és

$$u_{n+1} := \varphi(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az (u_n) sorozat (egyenletesen) konvergál az u függvényhez $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$-ben (vö. 1.2.28. feladat). Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$u_1(x) = \varphi(u_0)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x}{2},$$

$$u_2(x) = \varphi(u_1)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 + \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$u_2(x) = \varphi(u_2)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8}\right)\mathrm{d}t = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3,$$

ezért a teljes indukcióval bizonyítható

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k \qquad (x \in [0,1])$$

egyenlőségből

$$u^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \exp(x/2) \qquad (x \in [0,1])$$

következik. Sőt az a-pripri becslésből az is látható, hogy

$$\rho_\infty(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho_\infty(u_1, u_0) = \frac{2^{-n}}{1-\frac{1}{2}} \sup\left\{\left|\frac{x}{2}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1]\right\} = 2^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \blacksquare$$

10.3.18. feladat. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvény van, amelyre

$$1 \leq f(x) \leq 1+x \quad \text{és} \quad f(x) - \left(\int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = 1 \qquad (x \in [0,1])$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy a

$$H := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \ 1 \leq f(x) \leq 1+x \ (x \in [0,1])\}$$

halmaz zárt a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_\infty)$ teljes metrikus térben, hiszen ha valamely

$$f_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetén

$$\lim(f_n) = f, \qquad \text{azaz} \qquad f_n \rightrightarrows f \quad (n \to \infty),$$

akkor

$$\lim(f_n(x)) = f(x) \quad \text{és} \quad 1 \leq f_n(x) \leq 1+x \qquad (x \in [0,1])$$

következtében

$$1 \leq f(x) \leq 1+x \qquad (x \in [0,1]),$$

azaz $f \in H$. Így (H, ρ_∞) is teljes metrikus tér.

2. lépés. A

$$(\varphi(f))(x) := 1 + \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \qquad (f \in H, \ x \in [0,1])$$

leképezésre $\varphi(f) \in H$, hiszen $\varphi(f)$ nyilván folytonos, és bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} 1 \leq (\varphi(f))(x) \quad &\leq \quad 1 + \left(\int_0^x \frac{1}{2}(1+t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)^2 \leq 1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right)^2 \leq \\ &\leq \quad 1 + x^2 \leq 1 + x. \end{aligned}$$

3. lépés. A $\varphi : H \to H$ leképezés kontrakció, mivel bármely $f, g \in H$ és $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}
|(\varphi(f)(x) - (\varphi(g)(x)| &= \left| \left(\int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 - \left(\int_0^x \frac{1}{2} g(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \right| = \\
&= \left| \int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{2} g(t)\,\mathrm{d}t \right| \cdot \left| \int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^x \frac{f(t) - g(t)}{2}\,\mathrm{d}t \right| \cdot \left| \int_0^x \frac{1+t}{2} + \int_0^x \frac{1+t}{2} \right| \leq \\
&\leq x \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty(f,g) \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \leq 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_\infty(f,g) \cdot \frac{3}{2} = \\
&= \frac{3}{4} \cdot \rho_\infty(f,g). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

10.3.19. feladat. Igazoljuk, hogy ha $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és

$$q := \sup \left\{ \int_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1] \right\} < 1,$$

akkor bármely $g \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén pontosan egy olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ van, hogy

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = g(x) \qquad (x \in [0,1]),$$

és amelyre teljesül a

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-q}$$

becslés!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben a

$$\varphi : \mathfrak{C}[0,1] \to \mathfrak{C}[0,1], \qquad (\varphi(f))(x) := g(x) + \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

leképezés kontrakció. Valóban, bármely $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén $\varphi(f) \in \mathfrak{C}[0,1]$, továbbá minden $f, h \in \mathfrak{C}[0,1]$ függvényre

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f) - \varphi(h)\|_\infty &= \sup \left\{ \left| \int_0^1 k(x,y)\{f(y) - h(y)\}\,\mathrm{d}y \right| \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1] \right\} \leq \\
&\leq \|f - h\|_\infty \sup \left\{ \int_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \ x \in [0,1] \right\} = q\|f - h\|_\infty.
\end{aligned}$$

2. lépés. Ha f a φ fixpontja, azaz

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\left\{\left|g(x) - \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\right\} \leq \\ &\leq \sup\{|g(x)| \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\} + \|f\|_\infty \sup\left\{\int_0^1 |k(x,y)|\, dy \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\right\} \leq \\ &\leq \|g\|_\infty + q\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

és

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + q\|f\|_\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|f\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-q}. \quad \blacksquare$$

10.3.20. feladat. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény van, amelrye

$$f(x) - \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{2+x+y} f(y)\,\mathrm{d}y = \ln(x+3)\cos(xe^x) \qquad (x \in (0,1))$$

teljesül!

Útm. Mutassuk, meg, hogy fenti függvényegyenletnek van a $[0,1]$-en értelmezett folytonos (így egyenletesen folytonos) megoldása! $\blacksquare$

10.3.21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá az $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operátor esetén van olyan $\alpha, L > 0$, hogy bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^2 \qquad \text{és} \qquad \|Ax - Ay\| \leq L\|x-y\|,$$

akkor tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$Au = v$$

teljesül (**Zarantonello-tétel**)!

Útm. Világos, hogy ha $v \in \mathcal{X}$, úgy pontosan akkor létezik egyértelműen olyan $u \in \mathcal{X}$, amelyre

$$Au = v,$$

ha valamely $\varepsilon > 0$ szám esetén u fixpontja a

$$\varphi(x) := x - \varepsilon(Ax - v) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

leképezésnek. Az $\mathcal{X} = \{0\}$ triviális esettől eltekintve megmutatható, hogy φ kontrakció. Valóban, bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\varepsilon\langle Ax - Ay, x - y\rangle + \varepsilon^2\|Ax - Ay\|^2 \leq \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\varepsilon\langle Ax - Ay, x - y\rangle + \varepsilon^2 L^2\|x - y\|^2 \leq \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\varepsilon\alpha\|x - y\|^2 + \varepsilon^2 L^2\|x - y\|^2 = \\
&= (1 - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 L^2)|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Világos, hogy

$$k := 1 - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 L^2 \geq 0,$$

sőt, ha $\varepsilon = 2\alpha/L$, akkor $k = 0$. Így bármely $\varepsilon \in (0{,}2\alpha/L)$ esetén a $q := \sqrt{k}$ számra $q \in [0{,}1)$, továbbá

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q\|x - y\|,$$

azaz φ kontrakció. A Banach-féle fixponttétel következtében tehát pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, amelyre

$$u = \varphi(u) = u - \varepsilon(Au - v),$$

azaz

$$Au = v. \quad \blacksquare$$

Ha tehát az iménti feladatban $\varepsilon \in (0{,}2\alpha/L)$, akkor bármely $u_0 \in \mathcal{X}$ esetén az

$$u_{n+1} := u_n - \varepsilon(Au_n - v) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzívan definiált sorozat konvergens,

$$\lim(u_n) = u,$$

és

$$\|u - u_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q}\|u_0 - u_1\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

10.3.22. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós Hilbert-tér, $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, továbbá az

$$\mathfrak{a} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathfrak{b} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

olyan funkcionálok, amelyekre

(1) bármely $\alpha \in \mathcal{X}$ esetén az

$$f_\alpha : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) := \mathfrak{a}(\alpha, x) \qquad (x \in \mathcal{X})$$

funkcionál folytonos és lineáris,

(2) alkalmas $L, \gamma > 0$ esetén, ha $x, y, z \in \mathcal{X}$, akkor

$$\gamma\|x-y\|^2 \leq \mathfrak{a}(x, x-y) - \mathfrak{a}(y, x-y) \qquad \text{és} \qquad |\mathfrak{a}(x,z) - \mathfrak{a}(y,z)| \leq L\|x-y\| \cdot \|z\|,$$

(3) $\mathfrak{b}$ folytonos és lineáris,

akkor tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $u \in \mathcal{X}$ van, hogy

$$\mathfrak{a}(v, u) = \mathfrak{b}(u)$$

teljesül ((nemlineáris) **Lax-Milgram-tétel**)!

Útm. A Riesz-Fréchet-tétel (vö. **??**. tétel) következtében bármely $\alpha \in \mathcal{X}$ esetén pontosan egy olyan $A\alpha \in \mathcal{X}$ elem van, amelyre

$$\mathfrak{a}(\alpha, x) = \langle A\alpha, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Az így definiált A operátorra **(2)** következtében

$$\gamma\|x-y\|^2 \leq \langle Ax - Ay, x-y\rangle, \qquad |\langle Ax - Ay, \alpha\rangle| \leq L\|x-y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X})$$

teljesül. Ezért

$$\|Ax - Ay\| = \sup\{|\langle Ax - Ay, \alpha\rangle| \in \mathbb{R} :\ \alpha \in \mathcal{X},\ \|\alpha\| \leq 1\} \leq L\|x-y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X}).$$

Ismét a Riesz-Fréchet-tételt használva azt kapjuk, hogy alkalmas $v \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mathfrak{b}(u) = \langle v, u\rangle \qquad (u \in \mathcal{X}).$$

Így az

$$\mathfrak{a}(v, u) = \mathfrak{b}(u)$$

egyenlet nem más, mint az

$$Au = v \qquad (u \in \mathcal{X})$$

egyenlet. Ez pedig egyértelműen megoldható (vö. 10.3.21. feladat). ■

Ha speciálisan az

$$\mathfrak{a} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

funkcionál bilineáris és korlátos, továbbá elliptikus, akkor a 10.3.22. feladatbeli állítás nem más mint a lineáris Lax-Milgram-tétel (vö. 4.4.13. feladat).

A 4.4.14 feladathoz hasonlóan itt is igazolható a „jobboldaltól való folytonos függés” (**stabilitás**). Ha ugyanis $f, g \in \mathcal{X}$, akkor az

$$u := A^{-1}f \qquad \text{és} \qquad v := A^{-1}g$$

elemekre

$$\begin{aligned} \|A^{-1}f - A^{-1}g\|^2 &= \|u - v\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\langle Au - Av, u - v\rangle = \langle f - g, u - v\rangle \leq \\ &\leq \|f - g\| \cdot \|u - v\| = \|f - g\| \cdot \|A^{-1}f - A^{-1}g\|, \end{aligned}$$

azaz

$$\|A^{-1}f - A^{-1}g\| \leq \|f - g\|,$$

ami azt jelenti, hogy az A^{-1} „**megoldásoperátor**” folytonos.

10.3.23. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $H \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, továbbá valamely $K : H \times H \to \mathbb{K}$ folytonos függvényre

$$q := \max\left\{\int_H |K(x, y)| \,\mathrm{d}y \in \mathbb{R} : \; x \in H\right\} < 1,$$

akkor bármely $g \in \mathfrak{C}(H)$ esetén pontosan egy olyan $f \in \mathfrak{C}(H)$ van, amelyre

$$f(x) = g(x) + \int_H K(x, y)f(y) \,\mathrm{d}y \qquad (x \in H)$$

teljesül (vö. 5.2.11. feladat)!

Útm. Az

$$Au := \int_H K(\cdot, y)u(y) \,\mathrm{d}y \qquad (u \in \mathfrak{C}(H))$$

operátorra tetszőleges $x \in H$, ill. $u \in \mathfrak{C}(H)$ esetén $Au \in \mathfrak{C}(H)$, ill.

$$|(Au)(x)| \leq \int_H |K(x, y)| \cdot |u(y)| \,\mathrm{d}y \leq \int_H |K(x, y)| \cdot \|u\|_\infty \,\mathrm{d}y \leq q \cdot \|u\|_\infty$$

teljesül, ezért bármely $u \in \mathfrak{C}(H)$ esetén

$$\|Au\|_\infty \leq q \cdot \|u\|_\infty,$$

azaz A korlátos és $\|A\| < 1$. ■

10.3.24. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $a, b \in \mathbb{R}$ számokra $a < 0 < b$, akkor pontosan egy olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény van, amelyre

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x s f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül, majd határozzuk meg ezt a függvényt!

Útm. Ha $\varepsilon > b - a$, akkor a 10.1.1. feladatbeli súlyfüggvénnyel $(\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{p_\varepsilon})$ Banach-tér (vö. 1.3.9. házi feladat), ill. az

$$A : \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}), \qquad A(y)(x) := \frac{x^2}{2} + \int_0^x s y(s)\,\mathrm{d}s$$

leképezés kontrakció, hiszen bármely $u, v \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$, ill. $x \in [a, b]$ esetén

$$\left| \int_0^x (u(s) - v(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq (b - a) \left| \int_0^x |u(s) - v(s)|\,\mathrm{d}s \right|,$$

és így

$$\|Au - Av\|_\infty^p \leq \frac{b - a}{\varepsilon} \|u - v\|_\infty^p.$$

Ezért a Banach-féle fixponttétel következtében pontosan egy olyan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény van, amelyre

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x s f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül. Ha

$$f_0(x) := 1 \quad (x \in [a, b]) \qquad \text{és} \qquad f_{n+1} := A(f_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az (f_n) sorozat (egyenletesen) konvergál az f függvényhez $(\mathfrak{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty^p)$-ben (vö. 1.3.66. feladat). Mivel bármely $x \in [a, b]$ esetén

$$f_1(x) = A(f_0)(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x s\,\mathrm{d}s = x^2,$$

$$f_2(x) = A(f_1)(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x s^3\,\mathrm{d}s = x^2 + \frac{x^4}{4},$$

$$f_3(x) = A(f_2)(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24},$$

ezért a teljes indukcióval bizonyítható

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k \qquad (x \in [a, b])$$

egyenlőségből

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k = \exp(x^2/2) - 1 \qquad (x \in [a, b])$$

következik. ■

10.3.25. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, továbbá $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ olyan folytonos függvény, amelyre alkalmas $L : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L(x)\|y - z\| \qquad (x \in I,\ y, z \in \mathbb{R}^d),$$

akkor pontosan egy olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ differenciálható függvény van, amelyre

$$(*) \qquad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in I), \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Világos, hogy a valamely $\tau \in J \subset I$ intervallum esetén a $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ függvényre pontosan akkor teljesül $(*)$, ha φ folytonos és

$$(**) \qquad \varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in J),$$

hiszen

- ha φ-re $(*)$ teljesül, akkor φ szükségképpen folytonos és bármely $x \in J$ esetén

$$\varphi(x) - \xi = \varphi(x) - \varphi(\tau) = \int_\tau^x \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s,$$

  azaz φ-re $(**)$ teljesül;
- ha a $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ folytonos függvényre $(**)$ teljesül, akkor $x = \tau$ helyettesítéssel, ill. $(**)$ differenciálásával látható, hogy φ-re $(*)$ teljesül.

2. lépés. Az

$$A : \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d) \to \mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d), \qquad A(y)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \qquad (x \in J)$$

leképezés kontrakció a 10.1.5. feladatban bevezetett súlyozott normára nézve. Így, ha $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^d$ tetszőleges folytonos függvény és $\tau \in J \subset I$ kompakt intervallum, akkor a

$$\varphi_{n+1} := A(\varphi_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

függvénysorozat J-re való leszűkítései konvergálnak A egyetlen $\mathfrak{C}(J, \mathbb{R}^d)$-beli fixpontjához. Így (φ_n) egyenletesen konvergál J-n egy olyan függvényhez, amire $(**)$ (és persze $(*)$) teljesül. Mivel $\tau \in J \subset I$ tetszőleges, ezért (φ_n) az I intervallum minden pontjában konvergens. A kapott határfüggvényre minden kompakt részintervallumon $(**)$ teljesül, ezért magán az I-n is. ■

10.3.26. feladat. Igazoljuk, hogy ha $d \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $b : I \to \mathbb{R}^d$, $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ folytonos vektor-, ill. mátrixértékű függvények, akkor bármely $\tau \in I$ és $\xi \in \mathbb{R}^d$ esetén pontosan egy olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ differenciálható függvény van, amelyre

$$\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x) \quad (x \in I), \qquad \varphi(\tau) = \xi$$

teljesül!

Útm. Mivel b és A folytonos, ezért az

$$f(x, y) := A(x)y + b(x) \qquad ((x, y) \in I \times \mathbb{R}^d)$$

függvényre

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| = \|A(x)(y - z)\| \le |||A(x)||| \cdot \|y - z\| \qquad (x \in I,\ y, z \in \mathbb{R}^d)$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|$, ill. $|||\cdot|||$ valamely $\mathbb{R}^d$-beli, ill. $\mathbb{R}^{d\times d}$-beli norma. ■

10.3.27. feladat. Határozzunk meg olyan $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\varphi'(x) = (2\varphi_1(x) + 4\varphi_2(x), 2\varphi_1(x)) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(0) = (1,2)$$

teljesül!

Útm. Ha

$$\varphi_0(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}), \\
\varphi_2(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \varphi_1(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel a

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei:

$$\lambda = 4, \quad \mu = -2 \quad \text{és a megfelelő sajátvektorok:} \quad u = (1{,}1/2), \quad v = (-1{,}1),$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2u + v,$$

ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k u + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k v = 2 \cdot 4^k u + (-2)^k v,$$

azaz

$$\varphi_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(4x)^k}{k!} \right) 2u + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2x)^k}{k!} \right) v \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\varphi_n(x) \to \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\varphi(x) := e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelelő. ■

10.3.28. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, ill. az $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvényre $f \in \mathfrak{C}^1$, továbbá alkalmas $a \in \Omega$ elemre

$$\det(f'(a)) \neq 0$$

teljesül, akkor van olyan $U \subset \Omega$ nyílt környezete a-nak, ill. $V \subset \mathbb{R}^d$ nyílt környezete $f(a)$-nak, hogy $f|_U$ bijektív és fennáll az

$$f[U] = V$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Ha

$$A := f'(a) \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}$$

akkor f' folytonossága következtében van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\|f'(x) - A\| < \varepsilon \qquad (x \in U := K_\delta(a)).$$

Ha most

$$y \in \mathbb{R}^d,$$

akkor a

$$B : \Omega \to \mathbb{R}^d, \qquad Bx := x + A^{-1}(y - f(x)),$$

operátornak pontosan akkor lesz valamely $u \in U$ a fixpontja, ha

$$f(u) = y.$$

Mivel bármely $x \in U$ esetén

$$B'(x) = E_d - (A - f'(x) = A^{-1}(A - f'(x)),$$

ezért (vö. 4.3.10. feladat)

$$\|B'(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - f'(x)\| < \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \varepsilon = \frac{1}{2},$$

ezért

$$\|B(x_1) - B(x_2)\|_2 \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_2 \qquad (x_1, x_2 \in U)$$

következik. Mivel B kontrakció, ezért B-nek legfeljebb egy fixpontja van U-ban (vö. **??**. feladat), így $f|_U$ injektív.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a

$$V := f[U]$$

halmaz nyílt. Ha $v \in V$, akkor alkalmas $u \in U$ esetén $f(u) = v$. Így U nyíltsága következtében van olyan $r > 0$ olyan szám, hogy

$$M := \overline{K_r(u)} \subset U.$$

teljesül. Ha $y \in K_{\varepsilon r}(v)$, akkor

$$\|B(u) - u\|_2 = \|A^{-1}(y - f(u))\|_2 = \|A^{-1}(y - v)\|_2 < \|A^{-1}\| \cdot \|y - v\|_2 = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \varepsilon r = \frac{r}{2}.$$

Ha $x \in M$, akkor

$$\|B(x) - u\|_2 \leq \|B(x) - B(u)\|_2 + \|B(u) - u\|_2 < \frac{1}{2}\|x - u\|_2 + \frac{r}{2} \leq r,$$

tehát $B(x) \in M$, ami azt jelenti, hogy $B[M] = M$. Mivel B kontrakció M-en, továbbá M teljes, ezért a Banach-féle fixponttétel közetkeztében pontosan egy olyan $u^* \in M$ van, amelyre

$$B(u^*) = u^{\cdot}$$

Így

$$y = f(u^*) \in f[M] \subset f[U] = V. \quad \blacksquare$$

10.4. A Brouwer-féle fixponttétel

10.4.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén a

$$\varphi : [a,b] \to [a,b]$$

függvény folytonos, akkor alkalmas $u \in (a,b)$ esetén $\varphi(u) = u$ teljesül!

Útm. Világos, hogy a

$$\psi(x) := \varphi(x) - x \qquad (x \in [a,b])$$

függvény folytonos, továbbá

$$\psi(a) = \varphi(a) - a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \psi(b) = \varphi(b) - b \leq 0,$$

hiszen

$$\varphi(a) \geq a \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) \leq b.$$

A

$$\psi(a) = 0, \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(b) = 0$$

egyenlőség csak a

$$\varphi(a) = a, \qquad \text{ill. a} \qquad \varphi(b) = b$$

esetben fordul elő. Ez azt jelenti, hogy vagy az

$$u := a, \qquad \text{ill.} \qquad u := b$$

fixpontja φ-nek, vagy

$$\psi(a) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad \psi(b) < 0.$$

Így a Bolzano-tétel következtében va olyan $u \in (a,b)$, amelyre

$$0 = \psi(u) = \varphi(u) - u,$$

azaz

$$\varphi(u) = u. \quad \blacksquare$$

A 10.4.1. feladatbeli állítást a Bolzano-tétel felhasználásával láttuk be. Megmutatható, hogy a Bolzano-tétel levezethető a 10.4.1. feladatbeli állításból. Erre vonatkozik a

10.4.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0,$$

akkor alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén $\varphi(\xi) = 0$ teljesül!

Útm. Feltehető, hogy

$$\varphi(a) < 0 \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) > 0$$

(a $\varphi(a) > 0$ és $\varphi(b) < 0$ eset hasonlan tárgyalható). A

$$H := \{x \in [a,b] : \ \varphi(x) \leq 0\}$$

halmaz nem üres és felülről korlátos, ezért alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(H) = \xi \in [a,b].$$

Legyen

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = \xi$$

teljesül. f folytonossága miatt

$$\lim(f(x_n)) = f(\xi),$$

ezért

$$f(x_n) \leq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

felhasználásával azt kapjuk, hogy $f(\xi) \leq 0$ (és így $\xi < b$). Ha $f(\xi) < 0$ lenne, akkor f folytonossága következtében alkalmas $c \in (\xi, b]$ esetén $f(c) < 0$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy ξ felső korlátja H-nak. ■

Előfordulhat, hogy φ-nek akkor is pontosan egy fixpontja va, ha nem folytonos.

10.4.1. példa. A

$$\varphi : [0,1] \to [0,1], \qquad \varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2x & (x \in [0, \frac{1}{4}]), \\ \\ \dfrac{1}{2} & (x \in (\frac{1}{4},1]) \end{cases}$$

függvény nyilvánvalóan nem folytonos:

$$\lim_{\frac{1}{4}-0} \varphi = 1 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\frac{1}{4}+0} \varphi,$$

mégis pontosan egy fixpontja van:

$$u = \frac{1}{2},$$

hiszen az

$$\frac{1}{2} + 2x = x$$

egyenletnek nincsen a

$$\left[0, \frac{1}{4}\right]$$

intervallumban megoldása és

$$\frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{4},1\right].$$

10.4.3. feladat. Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén, ha $k \in \mathbb{N}_0$, akkor egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0), \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^k$$

leképezésnek van fixpontja.

(2) Bármely

$$\varphi : B_1(0) \to \mathbb{R}^d, \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^k$$

leképezés esetén, ha

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0)),$$

akkor alkalmas $u \in B_1(0)$ esetén

$$\varphi(u) = 0$$

teljesül!

Útm.

1. lépés /**(1)** $\Rightarrow$ **(2)**/. Ha **(1)** teljesül, **(2)** pedig nem, akkor van olyan

$$\varphi : B_1(0) \to \mathbb{R}^d, \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^k$$

leképezés, melyre bármely $x \in \partial B_1(0)$ esetén

$$\varphi(x) = x$$

és amely sehol sem veszi fel a nullvektort. Így, ha $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ és

$$\Phi(x) := -\frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|} \qquad (x \in B_1(0)),$$

akkor $\Phi \in \mathfrak{C}^k$ és **(1)** következtében alkalmas $u \in B_1(0))$ esetén

$$u = \Phi(u).$$

Mivel a Φ leképezésre

$$\Phi(u) \in \partial B_1(0)$$

teljesül, ezért $u \in \partial B_1(0)$, és így

$$u = -\frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|} = -\frac{u}{\|u\|} = -u.$$

Ez azt jelenti, hogy $u = 0$, ami ellentmond annak, hogy $u \in \partial B_1(0)$.

2. lépés /**(2)** $\Rightarrow$ **(1)**/. Ha **(2)** teljesül, **(1)** pedig nem, akkor alkalams

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0), \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^k$$

leképezés esetén nincsen olyan $u \in B_1(0)$, amelyre

$$\varphi(u) = u.$$

Így bármely $x \in B_1(0)$ esetén

$$\varphi(x) \neq x.$$

Ha tetszőleges $x \in B_1(0)$ esetén

$$\Psi(\lambda) := \|x + \lambda(\varphi(x) - x)\|^2 = \|x - \varphi(x)\|^2\lambda^2 + 2\langle x, \varphi(x) - x\rangle \lambda + \|x\|^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\Psi(0) = \|x\|^2 \leq 1, \qquad \Psi(1) = \|\varphi(x)\|^2 \leq 1, \qquad \Psi(\lambda) \longrightarrow +\infty \quad (\lambda \to \pm\infty).$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in B_1(0)$ esetén pontosan egy olyan $\xi \in \mathbb{R}$ van, amelyre

$$\Psi(\xi) = 1.$$

Elemi számolással igazolható, hogy

$$\xi = \xi(x) := -\frac{\langle x, \varphi(x) - x\rangle}{\|x - \varphi(x)\|^2} - \sqrt{\frac{\langle x, \varphi(x) - x\rangle^2}{\|x - \varphi(x)\|^4} + \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \varphi(x)\|^2}}.$$

Mivel $\|x\| = 1$, azaz $x \in \partial B_1(0)$ esetén

$$\Psi(0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \xi(x) = 0,$$

ezért a

$$\Upsilon(x) := x + \xi(x)(x - \varphi(x)) \qquad (x \in B_1(0))$$

függvényre

$$\|\Upsilon(x)\|^2 = \Psi(\xi(x)) = 1 \qquad (x \in B_1(0)), \qquad \text{valamint} \qquad \Upsilon(x) = x \quad (x \in \partial B_1(0)).$$

A **(2)** állítás így azt jelenti, hogy Υ-nek van zérushelye, ami ellentmond annak, hogy bármely $x \in \partial B_1(0)$ esetén

$$\|\Upsilon(x)\|^2 = 1. \quad \blacksquare$$

Mint ahogy a 10.4.3. feladatban, ill. a továbbiakban is valamely kompakt halmazon értelmezett függvény differenciálhatóságakor feltételezzük, hogy az illető függvény kiterjeszthető valamely, a kompakt halmazt lefedő nyílt halmazra úgy, hogy a kiterjesztett függvény differenciálható.

10.4.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\| \cdot \|^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle$, és nincsen olyan

$$\psi : B_1(0) \to \partial B_1(0), \qquad \psi \in \mathfrak{C}^1$$

függvény, amelyre

$$\psi(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

teljesül, akkor bármely

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0), \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^1$$

leképezésnek van fixpontja!

Útm. Ha

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0) \qquad \varphi \in \mathfrak{C}^1$$

olyan leképezés, amelynek nincsen fixpontja, azaz

$$\varphi(x) \neq x \qquad (x \in B_1(0)),$$

akkor tetszőleges $x \in B_1(0)$ esetén az x, ill. $\varphi(x)$ pontokat összekötő

$$\mathfrak{E} := \left\{ x + t(x - \varphi(x)) \in \mathbb{R}^d : \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

egyenesnek pontosan akkor van az egységgömb határán pontja, ha valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|x + \lambda(x - \varphi(x))\|^2 = 1.$$

Világos, hogy az ilyen λ-ra

$$\lambda = \lambda_{\pm}(x) := \frac{\langle x, \varphi(x) - x \rangle \pm \sqrt{\langle x, \varphi(x) - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|\varphi(x) - x\|^2}}{\|\varphi(x) - x\|^2}$$

teljesül. Mivel φ folytonosan deriválható, ezért λ_+ is az, sőt

$$\|\varphi(x) - x\| > 0$$

miatt ez igaz $B_1(0)$ valamely (nyílt) környezetében is. Világos, hogy ha $x \in K_1(0)$, akkor

$$\langle x, \varphi(x) - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|\varphi(x) - x\|^2 > 0.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\langle x, \varphi(x) - x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|\varphi(x) - x\|^2 > 0 \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

is igaz. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség következtében

$$\langle x, \varphi(x) \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 \leq 1 \qquad (x \in \partial B_1(0)),$$

így az

$$\langle x, \varphi(x) \rangle = 1$$

esetben

$$\|\varphi(x)\| = 1,$$

azaz
$$\varphi(x) \in \partial B_1(0)$$
és
$$\langle x, \varphi(x) \rangle = \|\varphi(x)\|.$$
Mivel
$$x \neq 0 \neq \varphi(x),$$
ezért itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha alkalmas $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ esetén
$$x = \mu\varphi(x),$$
azaz $\mu = \pm 1$, ami nem lehetséges, hiszen
$$\langle x, -x \rangle = -1$$
és
$$x \neq \varphi(x).$$
Így
$$\langle x, \varphi(x) \rangle < 1$$
és
$$\langle x, \varphi(x) - x \rangle = \langle x, \varphi(x) \rangle - 1 < 0.$$
λ_+ folytonossága következtében így λ_+ pozitív $B_1(0)$ alkalmas (nyílt) környezetében is. Ez azt jelenti, hogy a
$$\psi(x) := x + \lambda_+(x)(x - \varphi(x)) \qquad (x \in B_1(0))$$
függvény folytonosan differenciálható,
$$\psi(x) \in \partial B_1(0) \qquad (x \in B_1(0))$$
és
$$\psi(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0)),$$
hiszen
$$\lambda(x) = 0 \qquad (x \in \partial B_1(0)). \quad \blacksquare$$

10.4.5. feladat. Igazoljuk, hogy adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén egyenértékűek az alábbi állítások!

(1) Bármely

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

folytonos függvénynek van fixpontja.

(2) Nincsen olyan

$$\psi : B_1(0) \to \partial B_1(0)$$

folytonos függvény, amelyre

$$\psi(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

teljesül.

(3) Egyetlen $a \in \partial B_1(0))$ és

$$\phi : [0,1] \times \partial B_1(0) \to \partial B_1(0)$$

folytonos függvény esetében sem igaz a

$$\phi(0, x) = x, \quad \phi(1, x) = a \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

állítás.

(4) Ha

$$\omega : B_1(0) \to \mathcal{X}$$

folytonos függvény és $\omega \neq 0$, akkor van olyan $\lambda > 0$ szám és $u \in \partial B_1(0)$ vektor, amelyre

$$\omega(u) = \lambda u$$

teljesül.

Útm.

1. lépés /(1) $\Rightarrow$ (2)/. Ha lenne a **(2)**-beli tulajdonságokkal rendelkező ψ függvény, akkor a

$$\varphi(x) := -\psi(x) \qquad (x \in B_1(0))$$

folytonos függvényre

$$\varphi : B_1(0) \to \partial B_1(0)$$

teljesülne. Így **(1)** következtében alkalmas $u \in B_1(0)$ esetén

$$u = \varphi(u),$$

azaz $u \in \partial B_1(0)$, ahonnan

$$u = \psi(u) = -\varphi(u) = -u, \qquad \text{és így} \qquad u = 0$$

következne, ami nem lehetséges, hiszen $0 \notin \partial B_1(0)$.

2. lépés /(2) $\Rightarrow$ (3)/. Ha létezne a **(3)**-beli tulajdonsággal rendelkező ϕ függvény és tetszőleges $a \in B_1(0)$ esetén

$$\psi(x) := \begin{cases} a & \left(\|x\| \leq \frac{1}{2}\right), \\ \\ \phi\left(2 - 2\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right) & \left(\|x\| \geq \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

akkor – lévén, hogy

$$x \in B_1(0), \qquad \|x\| = \frac{1}{2}$$

esetén

$$\psi(x) = \phi(1,2x) = a$$

– a

$$\psi : B_1(0) \to \partial B_1(0)$$

függvény folytonos. Ha $x \in \partial B_1(0)$, akkor $\|x\| = 1$, azaz

$$\psi(x) = \phi(0, x) = x,$$

ami ellentmond a **(2)**-beli állításnak.

3. lépés /(3) $\Rightarrow$ (1)/. Ha

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

olyan folytonos függvény, amelynek van fixpontja, akkor bármely

$$x \in B_1(0), \quad \|x\| = 1$$

és $\alpha \in [0,1/2)$ esetén

$$x - 2\alpha\varphi(x) \neq 0,$$

hiszen ellenkező esetben

$$1 = \|x\| = 2\alpha\|\varphi(x)\| \leq 2\alpha < 1$$

teljesülne, ami nem lehetséges. Az is látható, hogy ha

$$x \in B_1(0), \qquad \|x\| = 1$$

és $\alpha \in [1/2,1]$, akkor

$$2x - 2\alpha x - \varphi(2x - 2\alpha x) \neq 0,$$

hiszen ellenkező esetben az

$$u := 2x - 2\alpha x$$

fixpontja lenne φ-nek. Így tehát a

$$\phi : [0,1] \times \partial B_1(0) \to \partial B_1(0), \qquad \phi(\alpha, x) := \begin{cases} \dfrac{x - 2\alpha\varphi(x)}{\|x - 2\alpha\varphi(x)\|} & (\alpha \in [0,1/2]), \\ \\ \dfrac{2x - 2\alpha x - \varphi(2x - 2\alpha x)}{\|2x - 2\alpha x - \varphi(2x - 2\alpha x)\|} & ([1/2,1]) \end{cases}$$

függvény folytonos, továbbá

$$\phi(0,x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|} & (\alpha \in [0{,}1/2])\,, \\ \\ \dfrac{2x - \varphi(2x)}{\|2x - \varphi(2x)\|} & (\alpha \in [1/2{,}1])\,, \end{cases}$$

ill. az

$$u := -\frac{\varphi(0)}{\|\varphi(0)\|}$$

elemre

$$\phi(1,x) = u,$$

ami ellentmond **(3)**-nak.

4. lépés /**(2)** $\Rightarrow$ **(4)**/**.** Ha az

$$\omega : B_1(0) \to \mathcal{X}$$

függvény folytonos és $\omega \neq 0$, akkor a

$$\theta : B_1(0) \to \mathcal{X}, \qquad \theta(x) := \begin{cases} -\omega(4\|x\|x) & (\|x\| \leq 1/2), \\ \\ (2\|x\| - 1)x - (2 - 2\|x\|)\omega\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & (\|x\| \geq 1/2) \end{cases}$$

függvényre tetszőleges $x \in \partial B_1(0)$ esetén

$$\theta(x) = x$$

teljesül. Így alkalmas $z \in B_1(0)$ esetén $\theta(z) = 0$, hiszen ellenkező esetben a

$$\psi(z) := \frac{\theta(z)}{\|\theta(z)\|} \qquad (z \in B_1(0))$$

folytonos függvényre

$$\psi(z) = z \qquad (z \in \partial B_1(0))$$

teljesülne, ami **(2)** miatt nem lehetséges. Világos, hogy $\|z\| \geq 1/2$, egyébként a $4\|z\|z$ vektor zérushelye lenne ω-nak. Így θ definíciójából

$$(2\|z\| - 1)z = (2 - 2\|z\|)\omega\left(\frac{z}{\|z\|}\right)$$

következik, ami azt jelenti, hogy az

$$u := \frac{z}{\|z\|}, \qquad \text{ill. a} \qquad \lambda := \frac{2\|z\| - 1}{2 - 2\|z\|} \cdot \|z\|$$

választás megfelelő.

5. lépés /(4) ⇒ (1)/. Ha

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

folytonos függvény, amelynek nincsen fixpontja, akkor az

$$\omega : B_1(0) \to \mathcal{X}, \qquad \omega(x) := \varphi(x) - x$$

folytonos leképezésre $\omega \neq 0$. Így **(4)** kövezkeztében alklamas $\lambda > 0$ szám és $u \in \partial B_1(0)$ esetén

$$\omega(u) = \lambda u,$$

ahonnan

$$|\lambda + 1| = \|(\lambda + 1)u\| = \|\omega(u) + u\| = \|\varphi(u)\| \leq 1,$$

azaz $\lambda \leq 0$ következik, ami nem lehetséges. ■

A 10.4.5. feladatbeli állításoknak véges dimenziós esetben külön nevük van.

10.4.1. tétel. (**Brouwer-féle fixponttétel**.) Az $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén bármely folytonos

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

leképezésnek van fixpontja.

Biz. Legyen $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, majd az állítással ellentétben tegyük fel, hogy van olyan folytonos

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

leképezés, amelynek nincsen fixpontja, azaz

$$\varphi(u) \neq u \qquad (u \in B_1(0)).$$

1. lépés. *Megmutatjuk, hogy bármely $\varepsilon \in (0,1)$ esetén van olyan folytonos*

$$\psi : B_1(0) \to B_{1-\varepsilon}(0)$$

leképezés, amelynek nincsen fixpontja. Mivel $B_1(0)$ kompakt, ezért (vö. 10.3.8. feladat előtti megjegyzés, ill. 10.3.11. feladat)

$$0 < \eta(\varphi, B_1(0)) < 1.$$

Így tetszőleges

$$\varepsilon \in (0, \eta(\varphi, B_1(0)))$$

szám esetén legyen

$$\psi(x) := \min\{1 - \varepsilon, \|\varphi(x)\|\} \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|} \qquad (x \in B_1(0)).$$

Ekkor a folytonos

$$\psi : B_1(0) \to B_{1-\varepsilon}(0)$$

leképezésnek nincsen fixpontja, hiszen, ha $x \in B_1(0)$ olyan, hogy

- $\|\varphi(x)\| \geq 1-\varepsilon$, akkor

$$\|\varphi(x)-\psi(x)\| = \left\|\varphi(x) - \frac{1-\varepsilon}{\|\varphi(x)\|}\varphi(x)\right\| = |\|\varphi(x)\| - (1-\varepsilon)|\,\frac{\|\varphi(x)\|}{\|\varphi(x)\|} \leq \varepsilon$$

  következtében

$$\|x-\psi(x)\| \geq \|x-\varphi(x)\| - \|\psi(x)-\varphi(x)\| \geq \eta(\varphi, B_1(0)) - \varepsilon > 0,$$

  így $x \neq \psi(x)$.

- $\|\varphi(x)\| \geq 1-\varepsilon$, akkor $\varphi(x) = \psi(x)$.

2. lépés. *Megmutatjuk, hogy van olyan*

$$p = (p_1, \ldots, p_d) : B_1(0) \to K_1(0)$$

függvény, amelynek minden koordinátafüggvénye d-változós polinom, és amelynek nincsen fixpontja. Világos, hogy az előző lépésbeli $\varepsilon \in (0,1)$ szám, ill.

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_d) : B_1(0) \to B_{1-\varepsilon}(0)$$

leklépezés esetén

$$\delta := \min\{\eta(\psi, B_1(0)), \varepsilon\} > 0.$$

$B_1(0)$ kompaktsága következtében (vö. 2.3.1. tétel) bármely $l \in \{1, \ldots, d\}$ esetén van olyan

$$p_l : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

d-változós polinom, hogy

$$|\psi_l(x) - p_l(x)| < \varepsilon \qquad (x \in B_1(0)).$$

Ennélfogva a

$$p(x) := (p_1(x), \ldots, p_d(x)) \qquad (x \in B_1(0))$$

függvényre

$$\|\psi(x) - p(x)\| \leq \delta/2 \qquad (x \in B_1(0)).$$

Világos, hogy bármely $x \in B_1(0)$ esetén

$$\|p(x)\| \leq \|\psi(x)\| + \frac{\delta}{2} < 1,$$

valamint

$$\|x - p(x)\| \geq \|x-\psi(x)\| - \|p(x)-\psi(x)\| \geq \frac{\delta}{2} > 0$$

teljesül.

3. lépés. A 10.4.4. feladatbeli állítás következtében van olyan

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) : B_1(0) \to \partial B_1(0), \qquad \tau \in \mathfrak{C}^1$$

függvény, amelyre

$$\tau(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

teljesül. *Megmutatjuk, hogy van olyan $\lambda_0 > 0$ szám, hogy bármely $\lambda \in [0, +\lambda_0)$ esetén a*

$$f_\lambda : B_1(0) \to B_{1+\lambda}(0), \qquad f_\lambda(x) := x + \lambda\tau(x)$$

leképezés bijektív.

- A 10.4.4. feladat előtti megjegyzés értelmében elmondható, hogy $B_1(0)$ kompaktsága, ill. τ simasága miatt van olyan $K > 0$ szám, amelyre

  $$\|\tau'(x)\| \leq K \qquad (x \in B_1(0))$$

  teljesül. Mivel $\tau \in \mathfrak{C}^1$, ezért bármely $u, v \in B_1(0)$, $y \in B_{1+\lambda}(0)$, ill. $\lambda \in [0,1/K)$ esetén

  $$\|(y - \lambda\tau(u)) - (y - \lambda\tau(v))\| = \lambda\|\tau(u) - \tau(v)\| \leq \lambda K\|u - v\|.$$

  Ez azt jelenti, hogy a

  $$B_1(0) \ni x \mapsto y - \lambda\tau(x)$$

  leképezés kontrakció, így legfeljebb csak egy fixpontja lehet. Ennélfogva az

  $$f_\lambda(x) = y$$

  egyenletnek legfeljebb egy megoldása va, ami azt jelenti, hogy tetszőleges $\lambda \in [0,1/K)$ esetén az f_λ leképezés injektív.

- Világos, hogy az

  $$f_\lambda : \partial B_1(0) \to \partial B_{1+\lambda}(0)$$

  leképezés minden $\lambda \geq 0$ szám esetén bijektív, hiszen ha $x \in \partial B_1(0)$, akkor $\|x\| = 1$, és így

  $$f_\lambda(x) = x + \lambda x = (1 + \lambda)x.$$

  Ezért már csak azt kell belátni, hogy alkalmas $\lambda_0 > 0$ szám esetén, ha $\lambda \in [0, +\lambda_0)$, akkor

  $$f_\lambda : K_1(0) \to K_{1+\lambda}(0)$$

  szürjektív.

- Mivel bármely $x \in B_1(0)$ esetén

  $$f'_\lambda(x) = E_d + \lambda\tau'(x),$$

  ezért az

  $$F(\lambda, x) := \det(f'_\lambda(x)) \qquad ((\lambda, x) \in [0, +\infty) \times B_1(0))$$

  függvény folytonossága $/F(\lambda, x)$ a λ-nak olyan polinomja, amelynek főegyütthatója $\det(\tau(x))/$, ill. $\det(f_0(x)) \equiv 1$ következtében van olyan $\lambda_0 > 0$, hogy tetszőleges $\lambda \in [0, \lambda_0)$, ill. $x \in B_1(0)$ esetén $\det(f_\lambda(x)) \neq 0$.

- Tegyük fel, hogy $\lambda \in [0, \lambda_0)$, ill. a

$$G_\lambda := f_\lambda[K_1(0)] \subset K_{1+\lambda}(0).$$

halmazra

$$G_\lambda \neq K_{1+\lambda}(0)$$

teljesül. Ekkor alkalmas $\beta \in \partial G_\lambda$, $\beta \notin \partial B_{1+\lambda}(0)$ elemhez van olyan

$$y_n \in G_\lambda \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, amelyre

$$\lim(y_n) = \beta \in K_{1+\lambda}(0)$$

teljesül. Így $B_1(0)$ kompaktsága következtében az

$$x_n := f_\lambda^{-1}(y_n) \in K_1(0) \subset B_1(0) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak van olyan (x_{ν_n}) konvergens részsorozata, amelyre

$$\lim(x_{\nu_n}) =: \alpha \in B_1(0) \subset B_{1+\lambda}(0).$$

Mivel f_λ folytonos, ezért

$$f_\lambda(\alpha) = f_\lambda(\lim(x_{\nu_n})) = \lim(f_\lambda(x_{\nu_n})) = \lim(y_{\nu_n}) = \beta,$$

ennélfogva $\alpha \notin \partial B_1(0)$, azaz $\alpha \in K_1(0)$. Mivel

$$\det(f_\lambda'(\alpha)) \neq 0,$$

az inverz függvényről szóló tétel következtében β belő pontja a

$$G_\lambda = f_\lambda[K_1(0)]$$

halmaznak. Ez azt jelenti, hogy

$$G_\lambda = K_{1+\lambda}(0),$$

azaz

$$f_\lambda : K_1(0) \to K_{1+\lambda}(0)$$

bijektív.

4. lépés. Mivel a $B_{1+\lambda}(0)$ halmaz térfogatára (vö. 11.4.13. tétel)

$$\mu_1(B_{1+\lambda}(0)) = \int_{K_{1+\lambda}(0)} 1 \, \mathrm{d}x = \pm \int_{K_1(0)} \det(f_\lambda'(x)) \, \mathrm{d}x,$$

ezért, ha $a_0, \ldots a_{d-1} \in \mathbb{R}$ az $F(\lambda, x)$ polinom együtthatói, akkor

$$\int_{K_1(0)} \det(f_\lambda'(x)) \, \mathrm{d}x = \lambda^d \int_{K_1(0)} \det(\tau'(x)) \, \mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \lambda^k.$$

Másrészt

$$\mu_1(B_{1+\lambda}(0)) = (1+\lambda)^d \mu_1(B_1(0)) =: \lambda^d \mu_1(B_1(0)) + \sum_{k=0}^{d-1} b_k \lambda^k.$$

Az együtthatók összehasonlításával azt kapjuk, hogy

$$\pm \int_{K_1(0)} \det(f'_\lambda(x))\,\mathrm{d}x = \mu_1(B_1(0)).$$

Mivel

$$\det(\tau'(x)) \equiv 0,$$

ui.

$$\tau : B_1(0) \to \partial B_1(0), \qquad \tau(x) = x \qquad (x \in \partial B_1(0))$$

nem invertálható egyetlen pontban sem, ezért

$$\mu_1(B_1(0)) = 0,$$

ami nem lehetséges.

Az így kapott ellentmondás azt mutatja, hogy az eredeti feltevésünk hamis volt. ■

Világos, hogy a 10.4.1. feladat állítása akkor is igaz marad, hogy ha tetszőleges $r > 0$ esetén $B_1(0)$ helébye $B_r(0)$-et írunk, ahol

$$B_r(0) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; x_1^2 + \ldots x_d^2 \leq 1\right\},$$

hiszen ha

$$\mu : B_r(0) \to B_1(0)$$

homeomorfizmus (vö. 1.3.57. feladat) és $\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$ folytonos, akkor

$$\mu^{-1} \circ \varphi \circ \mu : B_r(0) \to B_r(0)$$

is folytonos. Így, ha u fixpontja φ-nek, azaz

$$\varphi(u) = u \qquad \text{és} \qquad x := \mu^{-1}(u),$$

akkor x fixpontja a folytonos

$$\mu^{-1} \circ \varphi \circ \mu$$

leképezésnek:

$$(\mu^{-1} \circ \varphi \circ \mu)(x) = (\mu^{-1} \circ \varphi)(u) = \mu^{-1}(\varphi(u)) = \mu^{-1}(u) = x.$$

10.4.6. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, zárt és konvex halmaz, akkor bármely

$$\varphi : H \to H$$

leképezésnek van fixpontja!

Útm. Mivel $\emptyset \neq H$ korlátos, ezért (az $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi teret tekintve) van olyan $r > 0$, hogy

$$H \subsetneq B_r(0).$$

Mivel $\emptyset \neq H$ konvex és zárt, ezért tetszőleges $x \in B_r(0)$ esetén pontosan egy olyan $a \in H$ van, hogy egyrészt

$$\|x - a\| = \rho(x, H),$$

ahol $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$ (vö. 2.5.1. feladat), másrészt pedig H kompaktsága (vö. 1.3.78. feladat) következtében az

$$A_H : \mathbb{R}^d \to H, \qquad A_H(x) := a$$

metrikus projekció folytonos (vö. 4.3.16. feladat). Így a

$$\varphi \circ A_H : B_r(0) \to B_r(0)$$

leképezés, mint folytonos leképezések kompozíciója ismét folytonos. Ezért (vö. 10.4.1. feladat) van olyan $u \in B_r(0)$, hogy

$$u = (\varphi \circ A_H)(u) = \varphi(A_H(u)) \in H.$$

Világos, hogy

$$A_H(u) = u,$$

ezért

$$\varphi(u) = u$$

teljesül. ■

10.4.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix minden eleme pozitív, akkor A-nak van legalább egy pozitív sajátértéke, amelyhez tartozó sajátvektor komponensei nem-negatív számok (**Perron-Frobenius-tétel**)!

Útm. Ha az

$$e_1 \dots, e_d \in \mathbb{R}^d$$

kanonikus bázis esetén

$$\mathcal{S}_d := \mathrm{co}\,(e_1, \dots, e_d) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; x_k \geq 0\,(k \in \{1, \dots, d\}),\, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} x_k = 1 \right\},$$

akkor S_d nem-üres. korlátos, zárt és konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, ezért a folytonos

$$\varphi(x) := \frac{Ax}{\|Ax\|_1} \qquad (x \in \mathcal{S}_d)$$

leképezésnek van fixpontja (vö. 10.4.6. feladat), azaz valamely $u \in \mathcal{S}_d$ esetén

$$\varphi(u) = u.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{Au}{\|Au\|_1} = u,$$

ahonan

$$Au = \|Au\|_1 u$$

következik. Látható tehát, hogy az u vektor az A mátrix

$$\lambda := \|Au\|_1$$

sajátértékéhez tartozó sajátvektora. ■

10.4.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

függvény folytonos valamely $r > 0$ eseténa $B_r(0)$ gömbön és bármely $x \in \partial B_r(0)$ pontra

$$\langle \varphi(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{d} \varphi_k(x) x_k \geq 0,$$

akkor alkalmas $u \in B_r(0)$ esetén $\varphi(u) = 0$, azaz a $\varphi(x) = 0$ egyenletnek van megoldása a $B_r(0)$ gömbön!

Útm. Ha bármely $x \in B_r(0)$ esetén $\varphi(x) \neq 0$, akkor a

$$\psi(x) := -r \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|} \qquad (x \in B_r(0))$$

függvény folytonos. Így a Brouwer-féle fixponttétel következtében van olyan $u \in B_r(0)$, hogy $\psi(u) = u$. Mivel bármely $x \in B_r(0)$ esetén

$$\|\psi(x)\| = \left\| -r \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|} \right\| = r,$$

ezért $\mathcal{R}_\psi = \partial B_r(0)$. Így

$$u \in \partial B_r(0) \qquad \text{és} \qquad \|u\| = r > 0,$$

ahonnan

$$0 < \langle u, u \rangle = \langle \psi(u), u \rangle = \frac{-r}{\|\varphi(u)\|} \langle \varphi(u), u \rangle \leq 0$$

következik, ami nem lehetséges. ■

10.4.9. feladat. Igazoljuk, hogy ha a
$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
folytonos függvény esetén van olyan $\alpha \in (0,1)$ és $\beta > 0$ szám, hogy
$$\|\varphi(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta \qquad (x \in \mathbb{R}^d),$$
akkor φ-nek van fixpontja!

Útm. Ha
$$H := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\| \leq \beta/(1-\alpha)\right\},$$
akkor
$$\varphi[H] \subset H,$$
hiszen bármely $x \in H$ esetén
$$\|\varphi(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta \leq \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} + \beta = \frac{\beta}{1-\alpha},$$
azaz
$$\varphi(x) \in H.$$
Ezért a Brouwer-féle fixponttétel következtében van olyan
$$u \in H \subset \mathbb{R}^d,$$
amelyre
$$\varphi(u) = u. \quad \blacksquare$$

10.4.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér esetén $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, $T > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, továbbá

(1) az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ függvény T-periodikus az első változójában, azaz
$$f(x+T, y) = f(x,y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d),$$

(2) f folytonos és alkalmas $L \geq 0$ esetén
$$\|f(u,v) - f(u,w)\| \leq L\|v-w\| \qquad ((u,v),(u,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d),$$

(3) bármely $y \in \partial B_1(0)$ esetén
$$\langle f(x,y), y\rangle < 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az

$$(*) \qquad y' = f \circ (\mathrm{id}, y), \qquad y(0) = \xi$$

kezdetiérték-feladatnak van a
$$\varphi(0) = \varphi(T)$$
feltételnek eleget tévő T-periodikus megoldása!

Útm.

1. lépés. A **(2)** feltétel (vö. 10.2.2. feladat) következtében a szóban forgó feladatnak pontosan egy lokális megoldása van, amely a

$$\varphi : I_{\max} \to \mathbb{R}^d$$

megoldássá folytatható. Látható, hogy $B_1(0)$ invariáns halmaz, azaz bármely $\xi \in B_1(0)$ esetén a a fázistér ξ pontjából induló trajektóriák $B_1(0)$-ban maradnak. Valóban, ha valamely $\tau \in I_{\max}$ esetén a φ megoldásra

$$\|\varphi(\tau)\| = 1,$$

akkor a

$$\phi(x) := \frac{1}{2}\|\varphi(x)\|^2 \qquad (x \in I_{\max})$$

függvényre

$$\phi'(\tau) = \big\langle \varphi'(\tau), \varphi(\tau) \big\rangle = \langle f(\tau, \varphi(\tau)), \varphi(\tau) \rangle < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ esetén a $\phi|_{[\tau,\tau+\varepsilon)}$ függvény monoton csökkenő, és így bármely $x \in [\tau, \tau+\varepsilon)$ esetén $\varphi(x) \in B_1(0)$. Ebből az is következik, hogy $[0, +\infty) \subset I_{\max}$, hiszen a maximális megoldásnak az értelmezési tartománya csak akkor lehet ennél szűkebb, ha a megoldás nem korlátos (f az egész fázistéren definiálva van).

2. lépés. Sőt, az is látható, hogy ha a $\xi_1, \xi_2 \in B_1(0)$ kezdeti értékekhez tartozó ψ_1, ψ_2 maximális megoldásokra a

$$(\psi_1 - \psi_2)(x) = \xi_1 - \xi_2 + \int_0^x \{f(t, \psi_1(t)) - f(t, \psi_2(t))\}\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [0, +\infty))$$

egyenlőség következtében

$$\|(\psi_1 - \psi_2)(x)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| + \int_0^x L\|(\psi_1 - \psi_2)(t)\|\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [0, +\infty))$$

teljesül. Alkalmazva a Grönwall-lemmát (vö. 5.2.17. feladat), azt kapjuk, hogy

$$\|(\psi_1 - \psi_2)(x)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| \cdot \exp(Lx) \qquad (x \in [0, +\infty)),$$

azaz a megoldás folytonosan függ a kezdeti értékektől.

3. lépés. A fenti állítás következményeként a

$$\mathcal{P} : B_1(0) \to B_1(0), \qquad \mathcal{P}(\xi) := \varphi(T)$$

ún. **Poincaré-leképezés** folytonos, tehát $\mathcal{P}$-nek van fixpontja: $\varphi(0)$. Ez azt jelenti, hogy mind φ, mind pedig a $\varphi(\cdot + T)$ függvény megoldása a $(*)$ kezdetiérték-feladatnak (f periodikus az első változójában). Az egyértelműség (vö. 10.2.2. feladat) miatt ez a két függvény egyenlő, azaz $(*)$ φ megoldása T-periodikus. ∎

10.4.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$e_1 \ldots, e_d \in \mathbb{R}^d$$

kanonikus bázis esetén

$$\mathcal{S}_d := \mathrm{co}\,(e_1, \ldots, e_d) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; x_k \geq 0\,(k \in \{1, \ldots, d\}),\, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} x_k = 1 \right\},$$

és $H_1, \ldots, H_d \subset \mathcal{S}_d$ olyan zárt halmazok, amelyekre tetszőleges $\mathcal{N} \subset \{1, \ldots, d\}$ indexhalmaz esetén

$$\mathrm{co}\,(e_k : \; k \in \mathcal{N}) \subset \bigcup_{k \in \mathcal{N}} H_k,$$

akkor

$$H_1 \cap \ldots \cap H_d \neq \emptyset$$

teljesül (**Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-lemma**)!

Útm. Tetszőleges $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén legyen

$$d_k(x) := \rho(x, H_k), \quad \varphi_k(x) := \frac{x_k + d_k(x)}{1 + d_1(x) + d_d(x)} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{S}_d).$$

Ekkor a

$$\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$$

függvény nyilvánvalóan folytonos (vö. 1.2.43. feladat). Mivel $\mathcal{S}_d$ nem-üres, korlátos, zárt és konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, ezért φ-nek van fixpontja (vö. 10.4.6. feladat), azaz alkalmas

$$u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathcal{S}_d$$

elemre

$$\varphi(u) = u.$$

Világos, hogy

$$u \in H_1 \cup \ldots \cup H_d,$$

azaz valamely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén

$$d_k(u) = 0.$$

Ez azonban a

$$\varphi_k(u) = u_k$$

egyenlőség miatt azt jelenti, hogy φ_k definíciójában a nevező 1-gyel egyenlő. Innen pedig

$$d_1(u) = \ldots = d_d(u) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad u \in H_1 \cap \ldots \cap H_d$$

következik. ■

10.4.12. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az

$$e_1 \ldots, e_d \in \mathbb{R}^d$$

kanonikus bázis esetén

$$\mathcal{S}_d := \mathrm{co}\,(e_1, \ldots, e_d) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; x_k \geq 0\,(k \in \{1, \ldots, d\}),\; \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} x_k = 1 \right\},$$

és a

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : \mathcal{S}_d \to \mathbb{R}^d$$

folytonos függvényre

$$\langle p, \varphi(p) \rangle \leq 0 \qquad (p \in \mathcal{S}_d),$$

akkor van olyan $u \in \mathcal{S}_d$, amelyre

$$\varphi_1(u), \ldots, \varphi_d(u) \leq 0$$

teljesül!

Útm. Ha

$$H_k := \{p \in \mathcal{S}_d : \; \varphi_k(p) \leq 0\} \qquad (k \in \{1, \ldots, d\}),$$

akkor bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén H_k zárt és teljesíti a 10.4.11. feladat követelményeit, hiszen ellenkező esetben alkalmas $\mathcal{N} \subset \{1, \ldots, d\}$ indexhalmaz, ill.

$$p \in \mathrm{co}\,(e_k : \; k \in \mathcal{N})$$

esetén

$$\varphi_k(p) > 0 \qquad (k \in \mathcal{N})$$

lenne, ahonnan

$$\langle p, \varphi(p) \rangle = \sum_{k=1}^{d} p_k \varphi_k(p) > 0$$

következne, ami nem lehetséges. Innen (vö. 10.4.11. feladat)

$$u \in H_1 \cap \ldots \cap H_d$$

következik. ■

10.5. A Schauder-féle fixponttétel

10.5.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{X} := l_2, \qquad \|\cdot\| := \|\cdot\|_{l_2},$$

akkor az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a

$$\varphi(x) := \left(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots\right) \qquad (x = (x_n) \in B_1(0))$$

leképezésre

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0),$$

φ folytonos, de nincsen fixpontja!

Útm. Világos, hogy

- bármely $x \in B_1(0)$ esetén

  $$\|\varphi(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 1,$$

  ezért

  $$\varphi : B_1(0) \to B_1(0);$$

- φ folytonos, hiszen bármely $x, a \in \mathcal{X}$ esetén

  $$\|\varphi(x) - \varphi(a)\|^2 = \left(\sqrt{1-\|x\|^2} - \sqrt{1-\|a\|^2}\right)^2 + \|x-a\|^2,$$

  így

  $$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(a) \qquad (x \to a).$$

- φ-nek nincsen fixpontja, hiszen ellenkező esetben az

  $$u \in B_1(0), \qquad \varphi(u) = u$$

  elemre

  $$(**) \qquad \|u\| = \|\varphi(u)\| = 1$$

  teljesülne, így u komponenseire

  $$\begin{aligned} u_1 &= (\varphi(u))_1 = \sqrt{1-\|u\|^2} = 0, \\ u_2 &= (\varphi(u))_2 = u_1 = 0, \\ u_3 &= (\varphi(u))_2 = u_2 = 0, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

azaz

$$u_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\|x\| = 0,$$

ami ellentmond $(**)$-nak. ■

10.5.1. gyakorló feladat. Adott, végtelen dimenziós $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ szeparábilis Hilbert-tér esetén adjunk példát olyan folytonos

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

leképezésre, amelynek nincsen fixpontja!

Útm.

10.5.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ végtelen dimenziós normált tér, akkor van olyan folytonos

$$\varphi : B_1(0) \to B_1(0)$$

leképezés, amelynek nincsen fixpontja!

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy van olyan $M \subset B_1(0)$ zárt halmaz, amely homeomorf az $[1, +\infty)$ intervalummal, azaz van folytonos olyan

$$h : M \to [1, +\infty)$$

bijekció, amelynek inverze is folytonos. Ha $e_1 \in \partial B_1(0)$, akkor

$$U_1 := \text{span}\,(e_1) \subsetneqq \mathcal{X}$$

zárt lineáris altér, ezért a 2.4.10. feladatbeli állítás következtében van olyan $e_2 \in \partial B_1(0)$, hogy

$$\rho(e_2, U_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Az

$$U_2 := \text{span}\ (e_1, e_2) \subsetneqq \mathcal{X}$$

is zárt altér és – ismét a 2.4.10. feladatbeli állítás következtében van olyan $e_3 \in \partial B_1(0)$, hogy

$$\rho(e_3, U_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Így teljes indukcióval olyan

$$e_n \in \partial B_1(0), \qquad \text{ill.} \qquad U_n := \text{span}\ (e_1, \ldots, e_n) \subsetneqq \mathcal{X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat értelmezhető, amelyre

$$\rho(e_{n+1}, U_n) \geq \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen

$$e_{n,t} := e_n + t(e_{n+1} - e_n) \qquad (t \in [0,1],\, n \in \mathbb{N}),$$

és

$$M_n := \{e_{n,t} \in \mathcal{X} :\ t \in [0,1]\}.$$

Ekkor

- bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $t \in [0,1]$ esetén

$$\rho(e_{n,t}, U_n) \geq \frac{t}{2},$$

hiszen $t = 0$ esetén ez triviális, ha pedig $t > 0$, akkor bármely $u \in U_n$ esetén

$$e_{n,t} - u = t(e_{n+1} - v),$$

ahol

$$v := \frac{1}{t}\left((1-t)e_n + u\right),$$

így

$$v \in U_n \qquad \text{és} \qquad \|e_{n+1} - v\| \geq \rho(e_{n+1}, U_n) \geq \frac{1}{2},$$

következtében

$$\|e_{n,t} - u\| \geq t\|e_{n+1} - v\| \geq \frac{t}{2}.$$

- bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m < n$, ill. $t \in [0,1]$ esetén

$$\rho(e_{n,t}, U_m) \geq \frac{1}{10},$$

hiszen ez az $5t \geq 1$ esetben az iméntiek miatt triviális ($U_m \subset U_n$), ha pedig $5t \leq 1$, akkor – lévén, hogy bármely $u \in U_m \subset U_{n-1}$ esetén fennáll a

$$\|e_n - u\| \geq \rho(e_n, U_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

becslés – igaz az alábbi egyenlőtlenséglánc:

$$\begin{aligned}
\|e_{n,t} - u\| &= \|(e_{n,t} - u) - t(e_n - e_{n+1}\| \geq \\
&\geq \|e_n - u\| - t\|e_n - e_{n+1}\| \geq \\
&\geq \frac{1}{2} - 2t \geq \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

2. lépés. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $M_n \subset U_{n+1}$, ezért a fentiek következtében

$$M_{n+1} \cap M_n = \{e_{n+1,0}\} = \{e_{n,1}\}$$

és

$$\rho(M_n, M_m) \geq \frac{1}{10} \qquad (|n-m| \geq 2).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

hamaz zárt, és ha

$$h(e_{n,t}) := n + t \qquad (t \in [0{,}1],\, n \in \mathbb{N}),$$

akkor a $h : M \to [1, +\infty)$ leképezés folytonos. Ha

$$x_n \in M \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan sorozat, amelyre valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lim(x_n) = x$$

teljesül, akkor (x_n) Cauchy-féle, így alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén igaz az

$$N \leq m, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_m - x_n\| < \frac{1}{10}$$

implikáció. Ez azt jelenti, hogy ha $N \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n \in M_N \cup M_{N+1} \subset M.$$

A M_N és M_{N+1} halmaz nyilvánvalóan zárt, ezért

$$x \in M_N \cup M_{N+1},$$

így h dfiníciója miatt

$$h(x_n) \longrightarrow h(x) \qquad (n \to \infty).$$

Világos, hogy a

$$h^{-1}(n+t) \equiv e_{n,t}$$

inverz leképezés is folytonos.

3. lépés. A Tietze-tétel (vö. 1.1.38. feladat) következtében h-nak van $B_1(0)$-ra folytonos kiterjesztése:

$$H : M \to [1, +\infty).$$

Mivel

$$S : [1, +\infty) \to [1, +\infty), \qquad S(x) := x + 1$$

olyan folytonos leképezés, amelynek nincsen fixpontja, ezért a

$$\varphi := h^{-1} \circ S \circ H : B_1(0) \to M$$

folytonos leképezésnek sincsen fixpontja. Ellenkező esetben ui. alkalmas $u \in B_1(0)$ esetén

$$u = \varphi(u) = h^{-1} \circ S \circ H(u) = h^{-1}(S(H(u))), \qquad \text{azaz} \qquad h(u) = S(h(u))$$

lenne, azaz $h(u)$ fixpontja lenne S-nek, ami nem lehetséges. ■

Végtelen dimenziós normált terek esetében is megfogalmazható a Brouwer-féle fixponttételhez hasonló állítás, további feltételek előírásával. Ez pedig nem más, mint az, hogy

„$B_r(0)$ **zártsága és korlátossága helyett kompaktságát**"

követeljük meg.
A Brouwer-féle fixponttétel végtelen dimenziós általánosításaként kapjuk az alábbi feladatban megfogalmazott állítást.

10.5.3. feladat. (**Schauder-féle fixponttétel**) Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, továbbá $\emptyset \neq \mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ konvex, korlátos és zárt halmaz,

$$\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{X}$$

pedig olyan teljesen folytonos operátor, amelyre

$$\varphi[\mathcal{K}] \subset \mathcal{K},$$

akkor φ-nek van fixpontja, azaz van olyan $u \in \mathcal{K}$, hogy

$$\varphi(u) = u$$

teljesül!

Útm. Feltehető, hogy $0 \in \mathcal{K}$, hiszen ellenkező esetben tetszőleges $a \in \mathcal{K}$ esetén $\mathcal{K}$ helyett az

$$\mathcal{X} \ni x - a$$

eltolással keletkező halmazt vizsgáljuk. A 8.1.7. feladat következményeként tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\mathcal{X}_n$ véges dimenziós altere $\mathcal{X}$-nek és olyan

$$\varphi_n : \mathcal{K} \to \mathcal{X}_n$$

folytonos operátor, amelyre

$$(*) \qquad \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| \leq \frac{1}{n} \qquad (x \in \mathcal{K}).$$

Ha most

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{X}_n \cap \mathcal{K} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\mathcal{K}_n$ olyan konvex, korlátos és zárt halmaz $\mathcal{X}$-ben, amelyre $0 \in \mathcal{K}_n$, továbbá

$$\varphi_n[\mathcal{K}] \subset \text{co}\,(\varphi[\mathcal{K}]) \subset \mathcal{K},$$

hiszen $\mathcal{K}$ konvex. Az 1.3.57. feladatbeli állítás következtében $\mathcal{K}$, ill. $B_1(0)$ homeomorfak. Így a Brouwer-féle fixponttétel következtében a

$$\varphi_n : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$$

operátornak van fixpontja: u_n, azaz

$$\varphi_n(u_n) = u_n \qquad (n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{K}_n).$$

Így $(*)$ következtében

$$(**) \qquad \|\varphi(u_n) - u_n\| \leq \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$, ezért az (u_n) sorozat korlátos. Ezért ϕ teljesen folytonossága következtében van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy

$$\lim(\varphi(u_{\nu_n})) = v \in \mathcal{K}.$$

Így $(**)$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\|v - u_{\nu_n}\| \leq \|v - \varphi(u_{\nu_n})\| + \|\varphi(u_{\nu_n}) - u_{\nu_n}\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ennélfogva

$$\lim(u_{\nu_n}) = v.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi(u_{\nu_n}) \in \mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$ zárt, ezért $v \in \mathcal{K}$. Végül φ folytonossága következtében

$$\varphi(v) = \varphi(\lim(u_{\nu_n})) = \lim(\varphi(u_{\nu_n})) = v,$$

azaz v fixpontja φ-nek. ■

10.5.4. feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$k \in \mathfrak{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f \in \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}),$$

akkor bármely $R > 0$ esetén van olyan $u \in \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R})$, hogy

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, y, u(y))\, \mathrm{d}y = f(x) \qquad (x \in [a,b]) \tag{10.5.1}$$

és

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [a,b]\} \leq R + \|f\|_\infty,$$

ahol a $\lambda \geq 0$ számra

$$\lambda(b-a) \cdot \max\{|k(x,y,r)| \in \mathbb{R} :\ (x,y) \in [a,b]^2,\ r \leq R + \|f\|_\infty\} \leq R$$

teljesül!

Útm. Ha $R > 0$,

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{K} := \{u \in \mathcal{X} :\ \|u\|_\infty \leq R + \|f\|_\infty\},$$

akkor az

$$Uu(x) := f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y, u(y))\, dy \qquad (u \in \mathcal{X},\ x \in [a, b]) \tag{10.5.2}$$

Uriszon-féle integráloperátor teljesíti a Schauder-féle fixponttétel feltételeit, mivel

- $\mathcal{K} \neq \emptyset$, hiszen $f \in \mathcal{K}$, sőt $\mathcal{K}$ korlátos;
- $\mathcal{K}$ zárt, hiszen ha

  $$u_n \in \mathcal{K} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim(u_n) =: u,$$

  akkor

  $$\|u\|_\infty \leq \|u_n\|_\infty + \|u_n - u\|_\infty \leq R + \|f\|_\infty + \|u_n - u\|_\infty \longrightarrow R + \|f\|_\infty \qquad (n \to \infty),$$

  így $u \in \mathcal{K}$;
- $\mathcal{K}$ konvex, ui. tetszőleges $u, v \in \mathcal{K}$, ill. $t \in [0,1]$ esetén

  $$\begin{aligned} \|tu + (1-t)v\|_\infty &\leq t\|u\|_\infty + (1-t)\|v\|_\infty \leq \\ &\leq t(R + \|f\|_\infty) + (1-t)(R + \|f\|_\infty) = R + \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

  azaz

  $$tu + (1-t)v \in \mathcal{K};$$
- tetszőleges $u \in \mathcal{K}$ esetén $U(u) \in \mathcal{K}$, hiszen egyrészt f egyenletes folytonosága, továbbá k folytonossága miatt k egyenletesen folytonos az

  $$[a, b] \times [-R - \|f\|_\infty, R + \|f\|_\infty]$$

  téglán, így bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha

  $$\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |v_2 - v_1|\} \leq \delta,\ |v_1|,\ |v_2| \leq R + \|f\|_\infty,$$

  akkor

  $$|k(x_1, y_1, v_1) - k(x_2, y_2, v_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda(b-a)} \qquad \text{és} \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

  ezért $u \in \mathcal{K}$, $|x_1 - x_2| \leq \delta$ esetén

  $$|(Uu)(x_1) - (Uu)(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + \int_a^b \lambda |k(x_1, y, u(y)) - k(x_2, y, u(y))|\, \mathrm{d}t \leq \varepsilon,$$

  ahonnan

  $$Uu \in \mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}) \qquad (u \in \mathcal{K})$$

  következik, másrészt pedig

  $$\begin{aligned} \|Uu\|_\infty &= \|f + \lambda \int_a^b k(\cdot, y, u(y))\, dy\|_\infty \leq \\ &\leq \|f\|_\infty + \lambda(b-a) \max\left\{|k(x, y, r)| \in \mathbb{R} :\ (x, y) \in [a, b]^2,\ r \leq R + \|f\|_\infty\right\} \leq \\ &\leq \|f\|_\infty + R; \end{aligned}$$

- az $U[\mathcal{K}]$ halmaz prekompakt, hiszen az iméntiek következtében bármely $H \subset \mathcal{K}$ korlátos halmaz esetén $U[H]$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, továbbá

$$U[H] \subset \mathcal{K}$$

következtében $U[H]$ elemei pontonként korlátosak, így alkalmazható az Arzelá-Ascoli-lemma (vö. 1.3.2. állítás);

- az U operátor folytonos, hiszen ha $\varepsilon > 0$ és $u, v \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, továbbá $R \geq 0$ olyan, hogy

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty + R - 1,$$

akkor az előző pontbeli $\delta > 0$ szám, ill.

$$\delta' := \min\{\delta, 1\} \qquad \text{és} \qquad \|u - v\|_\infty \leq \delta'$$

esetén, ha $x \in [a,b]$, akkor

$$|(Uu)(x) - (Uv)(x)| \leq \int_a^b |k(x,y,u(y)) - k(x,y,v(y))| \, dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

ui.

$$\|u - v\|_\infty \leq \delta' \leq \delta, \qquad \|u\|_\infty \leq R + \|f\|_\infty - 1$$

és

$$\|v\|_\infty \leq \|v - u\|_\infty + \|u\|_\infty \leq \delta' + R + \|f\|_\infty - 1 \leq 1 + R + \|f\|_\infty - 1 = R + \|f\|_\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\|Uu - Uv\|_\infty \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Ha az iménti feladatban

- k korlátos függvény, akkor bármely $R > 0$ esetén létezik a (10.5.1) egyenletnek $u \in \mathfrak{C}[a,b]$ megoldása, hacsak

$$\lambda \leq \frac{R}{(b-a)\|k\|_\infty}.$$

Az $R \to +\infty$ határesetben tetszőleges $\lambda > 0$ számra van (10.5.1)-nek megoldása. Ha pl. $f \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, akkor pontosan egy olyan $u \in \mathfrak{C}([a,b],\mathbb{R})$ van, amelyre

$$u(x) - \lambda \int_a^b \sin(u(y)) \, dy = f(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül.

- $k \in \mathfrak{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ill. $g \in \mathfrak{C}([a,b] \times, \mathbb{R})$, akkor az U operátor speciális esete a

$$Hu(x) := \int_a^b k(x,y) g(y, u(y)) \, dy \qquad (u \in \mathcal{X},\ x \in [a,b])$$

Hammerstein-operátor.

10.5.5. feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér,

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

olyan teljesen folytonos operátor, amelyre igaz a

$$(\exists\, r > 0\ \forall\, t \in [0,1]\ \forall\, u \in \mathcal{X},\ u = tAu) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\| \leq r$$

implikáció, akkor A-nak van fixpontja (**Leray-Schauder-tétel**)!

Útm. Ha

$$H := \{u \in \mathcal{X} : \ \|u\| \leq 2r\}\,,$$

akkor H nem-üres, zárt, korlátos és konvex halmaz. Így a

$$Bu := \begin{cases} Au & (\|Au\| \leq 2r)\,, \\ \\ \dfrac{2rAu}{\|Au\|} & (\|Au\| > 2r) \end{cases}$$

operátor triviálisan folytonos és korlátos. Megmutatjuk, hogy B kompakt is. Valóban, ha

$$x_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat, akkor alkalmas (ν_n) indexsorozat esetén az alábbi két eset közül pontosan az egyik teljesül.

1. eset. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|Au_{\nu_n}\| \leq 2r.$$

Ekkor H korlátossága, ill. A kompaktsága következtében van olyan (μ_n) indexsorozat, hogy

$$\lim(Au_{\nu_{\mu_n}}) = \lim(Bu_{\nu_{\mu_n}}) =: y \in \mathcal{X}.$$

2. eset. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|Au_{\nu_n}\| > 2r.$$

Ekkor H korlátossága, ill. A kompaktsága következtében van olyan (μ_n) indexsorozat, hogy

$$\lim(Au_{\nu_{\mu_n}}) =: y \in \mathcal{X}.$$

Világos, hogy $y \neq 0$, hiszen

$$\|Au_{\nu_{\mu_n}}\| > 2r > 0.$$

Így

$$Bu_{\nu_{\mu_n}} = \frac{2rAu_{\nu_{\mu_n}}}{\|Au_{\nu_{\mu_n}}\|} \longrightarrow \frac{2ry}{\|y\|} \qquad (n \to \infty).$$

Így a Schauder-féle fixponttétel következtében B-nek van fixpontja, azaz alkalmas $h \in H$ esetén

$$Bu = u.$$

Ha

- $\|Au\| \leq 2r$, akkor
$$u = Bu = Au,$$
azaz u fixpontja A-nak is.

- $\|Au\| > 2r$, akkor
$$u = Bu = \frac{2rAu}{\|Au\|} = \underbrace{\frac{2r}{\|Au\|}}_{=:t\in[0,1]} Au$$
következtében
$$\|u\| = 2r.$$
Így ha
$$u = tAu \qquad (t \in [0,1]),$$
akkor
$$\|u\| \leq r,$$
ami nem lehetséges, azaz ez az eset nem lép fel. ■

A továbbiakban az
$$y' = f \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, y), \qquad y(\tau) = \xi \tag{10.5.3}$$
kezdetiérték-feladat megoldhatóságával foglalkozunk, ahol $f \in \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, $(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_f$.

10.5.6. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy $\tau \in I$, és $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ olyan függvény, hogy $\Gamma_\varphi \subset \mathcal{D}_f$, akkor a φ függvény pontosan abban az esetben lesz a (10.5.3) kezdetiérték-feladat megoldása, ha $\varphi \in \mathfrak{C}$ és
$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\, ds \qquad (x \in I) \tag{10.5.4}$$
teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha φ a (10.5.3) kezdetiérték-feladat megoldása, akkor $\varphi \in \mathfrak{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$, így $\varphi \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m)$ és tetszőleges $x \in I$ esetén
$$\varphi(x) - \xi = \varphi(x) - \varphi(\tau) = \int_\tau^x \varphi'(s)\, ds = \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\, ds.$$

2. lépés. Ha a $\varphi \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m)$ függvényre teljesül a (10.5.4) egyenlőség, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}(I)$ és
$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in I) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\tau) = \xi + 0 = \xi. \quad ■$$

A 10.5.6. feladatbeli állítás tehát azt jelenti, hogy a $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor lesz a (10.5.3) kezdetiérték-feladat megoldása, ha φ fixpontja a

$$P : \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m), \qquad P(y)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, y(s))\, ds \qquad (x \in I) \tag{10.5.5}$$

Picard-operátornak (azaz $\varphi \in \mathfrak{C}(I, \mathbb{R}^m)$ és $T(\varphi) = \varphi$).

Ha $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $(\tau, \xi) \in \Omega$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor Ω nyíltsága miatt van olyan $a, b > 0$, hogy a

$$\mathcal{H}_{a,b} := [\tau - a, \tau + a] \times B_b(\xi) := [\tau - a, \tau + a] \times \{y \in \mathbb{R}^m : \ \|y - \xi\| \leq b\}, \tag{10.5.6}$$

hengerre $\mathcal{H}_{a,b} \subset \Omega$, ill. $\mathcal{H}_{a,b}$ kompaktsága és f folytonossága következtében

$$0 \leq M := \max\{\|f(x, y)\| \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in \mathcal{H}_{a,b}\} < +\infty. \tag{10.5.7}$$

Világos, hogy ha f állandófüggvény, azaz alkalmas $c \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$f(x, y) = c \qquad ((x, y) \in \Omega),$$

akkor az

$$y' = f \circ (id_{\mathbb{R}}, y), \qquad y(\tau) = \xi \tag{10.5.8}$$

kezdetiérték-feladat lokálisan megoldható. Valóban, ha $c = 0 \in \mathbb{R}^m$, akkor Ω nyíltsága miatt van olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy $\tau \in \operatorname{int}(I)$ és a

$$\varphi(x) := \xi \qquad (x \in I)$$

függvény megoldása lesz (10.5.8)-nak, ha pedig $0 \neq c \in \mathbb{R}^m$, azaz

$$M = \|c\|$$

teljesül, akkor az $\alpha := \min\{a, b/M\}$ pozitív számmal a

$$\varphi(x) := \xi + (x - \tau)c \qquad (x \in [\tau - \alpha, \tau + \alpha])$$

függvény olyan megoldása lesz (10.5.8)-nak, hogy bármely

$$x \in [\tau - \alpha, \tau + \alpha]$$

esetén

$$\varphi(x) \in \mathcal{H}_{a,b}.$$

10.5.7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $M > 0$, akkor a (10.5.8) kezdetiérték-feladatnak van lokális megoldása (**Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel**)!

Útm. Ha

$$\mathcal{X} := \mathfrak{C}([\tau-\alpha,\tau+\alpha],\mathbb{R}^m) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{K} := \{u \in \mathcal{X}: \ \|u-\xi\|_\infty \le b\},$$

akkor

$$I := [\tau-\alpha,\tau+\alpha]$$

esetén a

$$P(y)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s,y(s))\,ds \qquad (y \in \mathcal{K},\ x \in I) \tag{10.5.9}$$

Picard-operátor teljesíti a Schauder-féle fixponttétel feltételeit, hiszen

- $\mathcal{K} \neq \emptyset$, ui. az

  $$u(x) = \xi \qquad (x \in I)$$

  függvényre $u \in \mathcal{K}$;

- $\mathcal{K}$ konvex, ui. tetszőleges $u, v \in \mathcal{K}$ és $t \in [0,1]$ esetén a

  $$w := tu + (1-t)v \in \mathcal{X}$$

  elemre

  $$\begin{aligned} \|w-\xi\|_\infty &= \|tu+(1-t)v-\xi+t\xi-t\xi\|_\infty = \\ &= \|t(u-\xi)+(1-t)(v-\xi)\|_\infty \le \\ &\le t\|u-\xi\|_\infty+(1-t)\|v-\xi\|_\infty \le tb+(1-t)b = b, \end{aligned}$$

  azaz $w \in \mathcal{K}$;

- $\mathcal{K}$ zárt, ui. tetszőleges

  $$u_n \in \mathcal{K} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  függvénysorozat esetén, ha

  $$u := \lim(u_n),$$

  akkor az u határfüggvényre

  $$\|u-\xi\|_\infty - b \le \|u-\xi\|_\infty - \|u_n-\xi\|_\infty \le \|u-u_n\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

  azaz

  $$\|u-\xi\|_\infty \le b$$

  teljesül, így $u \in \mathcal{K}$;

- $\mathcal{K}$ korlátos, ui. tetszőleges $u \in \mathcal{K}$ esetén

  $$\|u\|_\infty = \|u-\xi+\xi\|_\infty \le \|u-\xi\|_\infty + \|\xi\|_\infty \le b + \|\xi\|_\infty;$$

- tetszőleges $y \in \mathcal{K}$ esetén $P(y) \in \mathcal{K}$, azaz

$$P : \mathcal{K} \to \mathcal{K},$$

ui. F folytonossága következtében $P(y)$ folytonos és bármely $x \in I$ esetén

$$\|P(y)(x) - \xi\| \leq \left| \int_\tau^x \|F(s, y(s))\| \, ds \right| \leq M|x - \tau| \leq M\alpha \leq M\frac{b}{M} = b;$$

- P folytonos, ui. tetszőleges

$$u_n \in \mathcal{K} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetén, ha

$$\lim(\|u - u_n\|_\infty) = 0$$

(azaz az (u_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens), továbbá F egyenletes folytonossága következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha

$$(x, y), (x, z) \in \mathcal{H}_{a,b}$$

olyan, hogy

$$\|(x, y) - (x, z)\| = \|y - z\| < \delta,$$

akkor

$$\|F(x, y) - F(x, z)\| < \varepsilon,$$

ill. $x \in I$ esetén

$$\begin{aligned} \|P(u_n)(x) - P(u)(x)\| &\leq \left| \int_\tau^x \|F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))\| \, ds \right| \leq \\ &\leq \varepsilon|x - \tau| \leq \varepsilon\alpha, \end{aligned}$$

azaz

$$\|P(u_n) - P(u)\|_\infty \leq \varepsilon\alpha;$$

- P kompakt, ui. $\mathcal{K}$ korlátos és $P[\mathcal{K}]$ prekompakt, hiszen
  - a $P[\mathcal{K}]$ halmaz elemei egyenletesen korlátosak, hiszen tetszőleges $u \in \mathcal{K}$ és $x \in I$ esetén

$$\|P(u)(x)\| \leq \|\xi\| + \left| \int_\tau^x \|F(s, u(s)) \, ds\| \right| \leq \|\xi\| + M|x - \tau| \leq \|\xi\| + \alpha M,$$

  azaz

$$\|P(u)\|_\infty \leq \|\xi\| + \alpha M;$$

  - a $P[\mathcal{K}]$ halmaz elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, hiszen, ha $x, \widetilde{x} \in I$ és $u \in \mathcal{K}$, akkor

$$\|P(u)(x) - P(u)(\widetilde{x})\| \leq \left| \int_x^{\widetilde{x}} \|F(s, u(s))\| \, ds \right| \leq M|x - \widetilde{x}|$$

  (vö. 1.3.2. feladat). ■

11. fejezet

Alapismeretek

11.1. Halmazok, relációk, függvények

Az A és B halmazok **egyesítés**ét $A \cup B$, **metszet**ét $A \cap B$, **különbség**ét $A \backslash B$ jelöli; az **üres halmaz** jele: $\emptyset$. Ha A a B halmaz része, akkor ezt írjuk: $A \subset B$ (megengedve, hogy $A = B$). Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B egyesítésére az $A \uplus B$ jelölést használjuk. Az **egész szám**ok halmazát $\mathbb{Z}$, a pozitív egész számok halmazát $\mathbb{N}$, a **természetes szám**ok halmazát $\mathbb{N}_0$ $(= \mathbb{N} \cup \{0\})$, a **valós szám**ok halmazát $\mathbb{R}$, a **komplex szám**ok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli. Minthogy sok állítás egyaránt érvényes mind a valós, mind a komplex számok halmazára, ezért az $\mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ helyett a $\mathbb{K}$ jelölést is használni fogjuk.

11.1.1. definíció. Az $\mathcal{M}$ halmazt **halmazrendszer**nek nevezzük, ha $\mathcal{M}$ minden eleme halmaz.

Halmazrendszer pl. $\{\emptyset\}$, de adott $\mathcal{H}$ halmaz esetén a $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ **hatványhalmaz** ($\mathcal{H}$ részhalmazainak a halmaza) is halmazrendszer.
Adott A, B halmazok esetében $A \to B$, ill. B^A jelöli azon függvényeknek a halmazát, amelyek képhalmaza B, értelmezési tartománya része A-nak, ill. egyenlő A-val. Az $f \in B^A$ függvényre használjuk még az $f : A \to B$ jelölést is. Ha B halmazrendszer, akkor **halmazértékű függvény**ről beszélünk. Ebben az esetben gyakran használjuk az $(f_x : x \in \mathcal{D}_f)$, továbbá az f_x $(x \in \mathcal{D}_f)$, ill. az $(f_x)_{x \in \mathcal{D}_f}$ **indexes jelölés**módot, továbbá f értékkészletére az $\{f_x : x \in \mathcal{D}_f\}$ jelölést is. Ha az $A =: I$ halmaz neve **indexhalmaz**, és $f_i =: \mathcal{H}_i$, akkor a $(\mathcal{H}_i : i \in I)$ függvényt **indexelt halmazrendszer**nek nevezzük. $I = \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N})$ neve halmaz**sorozat**. Valamely $(\mathcal{H}_i : i \in I)$ indexelt halmazrendszer $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ értékkészletének egyesítését, ill. metszetét az

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i, \qquad \text{ill. a} \qquad \bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$$

szimbólummal jelöljük. Ha

$$I = \{1, \ldots, n\} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{vagy} \qquad I = \mathbb{N},$$

akkor ezekre az

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{H}_i,\quad \bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{H}_i,\qquad \text{ill. az}\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_i,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_i$$

jelölést használjuk.

11.1.2. definíció. Adott $\mathcal{M}$ halmazrendszer esetén

1. $\mathcal{M}_\cup$, ill. $\mathcal{M}_\cap$ jelöli az $\mathcal{M}$-beli halmazok összes véges egyesítéseiből, ill. összes véges metszeteiből álló halmazrendszert:

$$\mathcal{M}_\cup := \left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k:\ n\in\mathbb{N},\ A_1,\dots,A_n\in\mathcal{M}\right\},$$

ill.

$$\mathcal{M}_\cap := \left\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k:\ n\in\mathbb{N},\ A_1,\dots,A_n\in\mathcal{M}\right\}$$

/$A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i,j\in\{1,\dots,n\}: i\neq j)$ esetén használni fogjuk az $\mathcal{M}_\uplus$ jelölést is/.

2. $\mathcal{M}_\sigma$, ill. $\mathcal{M}_\delta$ jelöli az $\mathcal{M}$-beli halmazok összes megszámlálható egyesítéseiből, ill. összes megszámlálható metszeteiből álló halmazrendszert:

$$\mathcal{M}_\sigma := \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k:\ A_k\in\mathcal{M}\ (k\in\mathbb{N})\right\},$$

ill.

$$\mathcal{M}_\delta := \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k:\ A_k\in\mathcal{M}\ (k\in\mathbb{N})\right\}.$$

Azt mondjuk továbbá, hogy az A halmaz az $\mathcal{M}$ halmazrendszerre nézve $\mathcal{M}_\sigma$-, ill. $\mathcal{M}_\delta$**-halmaz**, ha $A\in\mathcal{M}_\sigma$, ill. $A\in\mathcal{M}_\delta$.

Világos, hogy $\mathcal{M}_\cup$ uniózárt ($\cup$-stabil) és $\mathcal{M}_\cap$ metszetzárt ($\cap$-stabil), továbbá $\mathcal{M}_\sigma$ zárt a szigma-unióra és $\mathcal{M}_\delta$ zárt a szigma-metszetre.
Az $\cup$ és a $\cap$, ill. a σ és a δ „operációk” iterálhatók:

$$\mathcal{M}_{\cap\cup} := (\mathcal{M}_\cap)_\cup \quad\text{és}\quad \mathcal{M}_{\cup\cap} := (\mathcal{M}_\cup)_\cap \qquad (\mathcal{M}_{\cup\cup}=\mathcal{M}_\cup,\quad \mathcal{M}_{\cap\cap}=\mathcal{M}_\cap),$$

hasonlóan értelmezhető $\mathcal{M}_{\cap\cup\cup}$ és $\mathcal{M}_{\cup\cap\cup}$ stb., ill.

$$\mathcal{M}_{\delta\sigma} := (\mathcal{M}_\delta)_\sigma \quad\text{és}\quad \mathcal{M}_{\sigma\delta} := (\mathcal{M}_\sigma)_\delta \qquad (\mathcal{M}_{\sigma\sigma}=\mathcal{M}_\sigma,\quad \mathcal{M}_{\delta\delta}=\mathcal{M}_\delta),$$

hasonlóan értelmezhető $\mathcal{M}_{\sigma\delta\sigma}$ és $\mathcal{M}_{\delta\sigma\delta}$ stb.
Könnyen belátható, hogy

$$\mathcal{M}\subset\mathcal{M}_\sigma\subset\mathcal{M}_{\sigma\delta}\subset\mathcal{M}_{\sigma\delta\sigma}\subset\dots,\qquad \text{ill.}\qquad \mathcal{M}\subset\mathcal{M}_\delta\subset\mathcal{M}_{\delta\sigma}\subset\mathcal{M}_{\delta\sigma\delta}\subset\dots$$

11.1.3. definíció. Adott $\mathcal{H}$ halmaz és $\mathcal{H}$-beli (A_n) halmazsorozat $/A_n \subset \mathcal{H}\ (n \in \mathbb{N})/$

1. **limesz inferior**ja a
$$\liminf(A_n) := \{x \in \mathcal{H} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ x \notin A_n\}| < \infty\}$$
halmaz;
2. **limesz szuperior**ja a
$$\limsup(A_n) := \{x \in \mathcal{H} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ x \in A_n\}| = \infty\}$$
halmaz.

Az (A_n) halmazsorozat

- limesz inferiorja tehát olyan $\mathcal{H}$-beli elemek halmaza, amelyek véges sok kivétellel a halmazsorozat mindegyik tagjához hozzátartoznak;
- limesz szuperiorja pedig olyan $\mathcal{H}$-beli elemek halmaza, amelyek a halmazsorozat végtelen sok tagjához tartoznak hozzá.

Világos, hogy

1. $x \in \liminf(A_n)$ pontosan akkor teljesül, ha alkalmas $N \in \mathbb{N}$ esetén
$$x \in A_m \quad (N \leq m \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad x \in \bigcap_{N \leq m \in \mathbb{N}} A_m,$$
így
$$\boxed{\liminf(A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \leq k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} \ ;$$
2. $x \in \limsup(A_n)$ pontosan akkor teljesül, ha bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén
$$x \in \bigcup_{N \leq m \in \mathbb{N}} A_m,$$
így
$$\boxed{\limsup(A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \leq k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \ ;$$
3. $\liminf(A_n) \subset \limsup(A_n)$.

Ha pl.

- $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ és

$$A_n := (-\infty, (-1)^n/n), \qquad \text{ill.} \qquad B_n := (n, +\infty) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

  akkor

$$\liminf(A_n) = (-\infty,0), \qquad \limsup(A_n) = (-\infty,0];$$

  ill.

$$\liminf(B_n) = \emptyset = \limsup(B_n);$$

- $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ és

$$A_n := \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{n}\right] & (n = 2k+1)\ (k \in \mathbb{N}_0), \\ & \\ [0, n] & (n = 2l)\ (l \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

  akkor

$$\liminf(A_n) = \{0\}, \qquad \limsup(A_n) = [0, +\infty);$$

- $\mathcal{H} := \mathbb{R}$ és

$$A_n := \begin{cases} \left[-2 - \dfrac{1}{n},1\right) & (n = 2k+1)\ (k \in \mathbb{N}_0), \\ & \\ \left[-1,2 + \dfrac{1}{n}\right) & (n = 2l)\ (l \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

  akkor

$$\liminf(A_n) = [-1,1), \qquad \limsup(A_n) = [-2,2].$$

11.1.4. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{H}$-beli (A_n) halmazsorozat

- **monoton bővülő** vagy **izoton** ($(A_n) \prec$), ha

$$A_n \subset A_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

- **monoton szűkülő** vagy **antiton** ($(A_n) \succ$), ha

$$A_n \supset A_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

- **konvergens**, ha $\liminf(A_n) = \limsup(A_n)$. Ebben az esetben a

$$\lim(A_n) := \liminf(A_n) = \limsup(A_n)$$

  jelölést használjuk és az $A := \lim(A_n)$ halmazt az (A_n) halmazsorozat **határhalmazának** nevezzük.

11.1.1. állítás. Könnyen belátható, hogy

1. $(A_n) \prec \quad \Longleftrightarrow \quad (A_n^c) \succ$;
2. $(\limsup(A_n))^c = \liminf(A_n^c)$, és így $(\lim(A_n))^c = \lim(A_n^c)$;
3. $\lim(A_n) = \emptyset$ pontosan akkor igaz, ha minden $\mathcal{H}$-beli x-hez csak véges sok olyan n index van, amelyre $x \in A_n$ /így pl. ha

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j),$$

akkor $\lim(A_n) = \emptyset$/.

4. Ha $(A_n) \prec$, ill. $(A_n) \succ$, akkor

$$\lim(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{ill.} \qquad \lim(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ui.

- $(A_n) \prec$ esetén
  - $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, így

$$\liminf(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =: A,$$

és

  - $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, így

$$\limsup(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A = A,$$

ill.

- $(A_n) \succ$ esetén $(A_n^c) \prec$, így

$$(\lim(A_n))^c = \lim(A_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c.$$

11.1.5. definíció. A $(\mathcal{H}_i :\ i \in I)$ indexelt halmazrendszer **Descartes-szorzat**án a

$$\times_{i\in I}\mathcal{H}_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} \mathcal{H}_i :\ \text{minden } i \in I \text{ esetén } f_i \in \mathcal{H}_i \right\}$$

függvények halmazát értjük.

Ha minden $i \in I$ esetén H_i ugyanaz a $\mathcal{H}$ halmaz, akkor a Descartes szorzatot a

$$\mathcal{H}^I := \times_{i \in I} \mathcal{H}$$

szimbólummal jelöljük. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $(\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ indexelt halmazrendszer Descartes-szorzatára a

$$\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_n$$

jelölést használjuk. Ennek a Descartes-szorzatnak az elemeit **rendezett n-es**eknek nevezzük, és $(f_1, \ldots, f_n)$ alakba írjuk. A

$$\mathcal{H}_1 = \ldots = \mathcal{H}_n =: \mathcal{H}$$

esetén

$$\mathcal{H}^n := \mathcal{H} \times \ldots \times \mathcal{H}\text{-t}$$

írunk. $\mathcal{H}^n$ tehát nem más, mint az

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \mathcal{H}$$

függvények halmaza. Az $f(i) = f_i$ elemet f **i-edik komponens**ének vagy **tag**jának nevezzük ($i \in \{1, \ldots, n\}$). Ha I tetszőleges indexhalmaz, akkor a

$$pr_i : \times_{i \in I} \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i, \qquad pr_i(f) := f(i)$$

függvényt az **i-edik komponensre való projekció**nak nevezzük.

11.1.6. definíció. Az A és a B halmazok $A \triangle B$ **szimmetrikus differenciáját** az alábbi módon értelmezzük:

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Látható, hogy $A \triangle B$-t az $A \cup B$ halmaz azon elemei alkotják, amelyek A és B közül pontosan az egyikhez tartoznak hozzá:

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

11.1.2. állítás. Ha A, B, C halmaz, akkor igazak az alábbi állítások.

1. $A \triangle B = B \triangle A$;
2. $A \triangle A = \emptyset$;
3. $A \triangle B \subset A \cup B$;
4. $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

11.1.3. állítás. Ha A halmaz, $(B_\gamma :\ \gamma \in \Gamma)$ indexelt halmazrendszer, akkor

$$A\bigcap\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(A\bigcap B_\gamma\right), \qquad \text{ill.} \qquad A\bigcup\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\left(A\bigcup B_\gamma\right).$$

11.1.4. állítás. Ha A halmaz, és $(B_\gamma :\ \gamma \in \Gamma)$ pedig olyan indexelt halmazrendszer, hogy tetszőeges $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \subset A$, akkor

$$A\backslash\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash B_\gamma), \qquad \text{ill.} \qquad A\backslash\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash B_\gamma).$$

11.1.5. állítás. Ha $\mathcal{H}$ halmaz, akkor minden, az $A_\gamma \subset \mathcal{H}$ $(\gamma \in \Gamma)$ feltételnek eleget tévő indexelt halmazrendszer esetén

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c, \qquad \text{ill.} \qquad \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

(**De-Morgan-azonosságok**).

Így például, ha $A, B \subset \mathcal{H}$, akkor

$$A \vartriangle B = (A\cup B)\backslash(A\cap B) = (A^c\cap B^c)^c\cap(A\cap B)^c,$$

továbbá

$$A\cap(\mathcal{H}\backslash B) = A\backslash(A\cap B),$$

ui.

- $A\cap(\mathcal{H}\backslash B) = A\cap B^c$ és
- $A\backslash(A\cap B) = A\cap(A\cap B)^c = A\cap(A^c\cup B^c) = (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c) = A\cap B^c.$

11.1.7. definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy az $\mathcal{O}$ halmazrendszer a $\mathcal{H}$ halmaz **osztályozás**a, ha

1° $A, B \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad A\cap B = \emptyset,$

2° $\emptyset \neq A \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad A \subset \mathcal{H},$

3° $\bigcup \mathcal{O} = \mathcal{H}$

teljesül. $\mathcal{O}$ elemeit **osztály**oknak nevezzük.

11.1.1. példa. A $\mathcal{H} := \{a,b,c\}$ háromelemű halmaznak osztályozásai az alábbi halmazrendszerek:

$$\mathcal{O}_1 := \{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \qquad \mathcal{O}_2 := \{\{a\},\{b,c\}\}, \qquad \mathcal{O}_3 := \{\{b\},\{a,c\}\},$$

$$\mathcal{O}_4 := \{\{c\},\{a,b\}\}, \qquad \mathcal{O}_5 := \{\{a,b,c\}\}.$$

11.1.8. definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy a $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ reláció ($\mathcal{H}$-beli) **ekvivalencia**, ha

1° ϱ **reflexív**, azaz minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $(x,x) \in \varrho$,

2° ϱ **szimmetrikus**, azaz bármely $x,y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(x,y) \in \varrho \qquad \Longrightarrow \qquad (y,x) \in \varrho,$$

3° ϱ **antiszimmetrikus**: minden $x,y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(x,y),(y,x) \in \varrho \qquad \Longrightarrow \qquad x = y,$$

4° ϱ **tranzitív**, azaz tetszőleges $x,y,z \in \mathcal{H}$ esetén

$$((x,y) \in \varrho \ \wedge \ (y,z) \in \varrho) \qquad \Longrightarrow \qquad (x,z) \in \varrho.$$

11.1.9. definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy a $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ reláció ($\mathcal{H}$-beli) **rendezés**, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus, azaz, ha

$$((x,y) \in \varrho \ \wedge \ (y,x) \in \varrho) \qquad \Longrightarrow \qquad x = y.$$

A ϱ rendezés **láncszerű**, ha $\mathcal{H}$ bármely két eleme **összehasonlítható**, azaz ha

$$(x,y) \in \varrho \qquad \text{vagy} \qquad (y,x) \in \varrho.$$

11.1.2. példa. Ha $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz, akkor a $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

- $(x,y) \in \varrho :\Longleftrightarrow x,y \in \mathcal{H}$ reláció ekvivalencia,
- $(x,y) \in \varrho :\Longleftrightarrow x = y \ (x,y \in \mathcal{H})$ reláció ekvivalencia.

11.1.3. példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{N}$ és $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(x, y) \in \varrho \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege megegyezik},$$

akkor ϱ ekvivalencia.

11.1.4. példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{Z}$ és adott $2 \leq m \in \mathbb{N}$ esetén $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(x, y) \in \varrho \quad :\Longleftrightarrow \quad m|(x - y),$$

akkor ϱ ekvivalencia.

11.1.5. példa. Ha $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz, akkor a $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$(x, y) \in \varrho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x = y \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

reláció rendezés (**diszkrét rendezés**), ami pontosan akkor láncszerű, ha $\mathcal{H}$ egyelemű.

11.1.6. példa. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{N}$ és $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olyan reláció, hogy

$$(m, n) \in \varrho \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{N}_0 : \; m + c = n \quad (m, n \in \mathcal{H}),$$

akkor ϱ (láncszerű) rendezés.

11.1.7. példa. Tetszőleges $\mathcal{H}$ halmaz esetén az

$$(A, B) \in \rho \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset B \quad (A, B \subset \mathcal{H})$$

reláció $\mathcal{P}(\mathcal{H})$-beli rendezés, ami pontosan akkor láncszerű, ha $\mathcal{H}$ egyelemű.

Könnyen belátható, hogy tetszőleges $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén

- ha $\mathcal{O}$ osztályozása $\mathcal{H}$-nak, $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, és

  $$(x, y) \in \varrho \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ ugyanazon osztály eleme, mint } y,$$

  akkor ϱ ($\mathcal{H}$-beli) ekvivalencia;
- ha ϱ ($\mathcal{H}$-beli) ekvivalencia, továbbá

  $$[x] := \{y \in \mathcal{H} : \; (x, y) \in \varrho\} \quad (x \in \mathcal{H})$$

  akkor a

  $$\mathcal{H}/\varrho := \mathcal{O} := \{[x] : \; x \in \mathcal{H}\}$$

  halmazrendszer (a ρ-**ekvivalenciaosztályok** halmaza) osztályozása $\mathcal{H}$-nak.

Világos, hogy $\mathcal{H}/\varrho \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Az 11.1.4-beli ϱ reláció esetében az egész számok halmazán létrehozott osztályozásnak m eleme van. Egy-egy osztályba azok az egész számok tartoznak, amelyek m-mel osztva ugyanazt a maradékot adják.
Az egyes ekvivalenciaosztályok kapcsolatára vonatkozik a

11.1.6. állítás. Ha $\varrho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ekvivalencia, akkor bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$[x] = [y] \qquad \Longleftrightarrow \qquad [x] \cap [y] \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, y) \in \rho.$$

11.1.10. definíció. Ha a ρ reláció $\mathcal{H}$-beli rendezés, akkor a $(\mathcal{H}, \rho)$ (rendezett) párt **rendezett halmaz**nak nevezzük, továbbá valamely $x \in \mathcal{H}$ és $A \subset \mathcal{H}$ esetén azt mondjuk, hogy

- az x az A ($\mathcal{H}$-beli) **felső korlát**ja, ha bármely $y \in A$ esetén $(y, x) \in \rho$,
- az x az A ($\mathcal{H}$-beli) **alsó korlát**ja, ha bármely $y \in A$ esetén $(x, y) \in \rho$,
- az x az A **maximális eleme**, ha $x \in A$ és bármely $y \in A$ esetén

$$(x, y) \in \rho \qquad \Longrightarrow \qquad x = y,$$

- az x az A **minimális eleme**, ha $x \in A$ és bármely $y \in A$ esetén

$$(y, x) \in \rho \qquad \Longrightarrow \qquad x = y.$$

Az $(\mathbb{N}, \leq)$ rendezett halmaz esetén az $\mathbb{N}$ halmaznak 1 a minimális eleme, de nincsen maximális eleme. Az, hogy valamely rendezett halmaz esetén van-e maximális elem, sok esetben igen fontos kérdés. Az alábbiakban olyan feltételeket fogalmazunk meg, amelyek a maximális elem létezését biztosítják.

11.1.1. tétel. (Kuratowski-Zorn-lemma.) Ha a $(\mathcal{H}, \varrho)$ rendezett halmaz bármely – a ρ rendezéssel – láncszerűen rendezett $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ részhalmaza felülről korlátos, akkor $\mathcal{H}$-nak van maximális eleme.

11.1.2. tétel. (Kiválasztási axióma.) Ha $\Gamma \neq \emptyset$ és bármely $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{H}_\gamma \neq \emptyset$, akkor van olyan

$$f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_\gamma$$

(ún. **kiválasztási**) **függvény**, amely minden $\gamma \in \Gamma$-hoz $\mathcal{H}_\gamma$ valamely elemét rendeli:

$$f(\gamma) \in \mathcal{H}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Az 11.1.1. tétel az 11.1.5. definíció fényében azt jelenti, hogy bármely nem-üres halmazokból álló indexelt halmazrendszer Descartes-szorzata nem üres.

11.1.11. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in A \to B$ függvény

- **injektív**, ha
$$(x, y \in \mathcal{D}_f: \ x \neq y) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \neq f(y);$$
- **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_f = B$;
- **bijektív** vagy **bijekció**, ha injektív és szürjektív.

11.1.12. definíció. Valamely $f : A \to B$ függvény és $\mathcal{H}$ halmaz esetén az

$$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B: \ x \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}_f\}$$

halmazt a $\mathcal{H}$ halmaz f **függvény által létesített kép**ének, az

$$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f: \ f(x) \in \mathcal{H}\}$$

halmazt pedig a $\mathcal{H}$ halmaz f **függvény által létesített őskép**ének nevezzük.

Így f^{-1} tekinthető a következő leképezésnek is:

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \qquad \mathcal{H} \mapsto \{x \in \mathcal{D}_f: \ f(x) \in \mathcal{H}\}.$$

Valamely $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(B)$ halmaz(rendszer)nek f^{-1} szerinti képe tehát az

$$f^{-1}[\mathcal{M}] := \left\{f^{-1}[\mathcal{H}] \subset A: \ \mathcal{H} \in \mathcal{M}\right\}$$

halmaz(rendszer). Világos, hogy

$$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f.$$

11.1.8. példa.

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

$$f[[1{,}2]] = [1{,}4] \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[1{,}4] = [-2, -1] \cup [1{,}2].$$

11.1.7. állítás. Adott $f : A \to B$ függvény és $\mathcal{H} \subset A$, továbbá $C, D \subset B$ halmazok esetében

- fenáll az
$$f^{-1}[C \backslash D] = f^{-1}[C] \backslash f^{-1}[D]$$
egyenlőség, így pl.
$$f^{-1}[D^c] = f^{-1}[B \backslash D] = f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[D] = A \backslash f^{-1}[D] = \left(f^{-1}[D]\right)^c;$$
- f pontosan akkor bijektív, ha minden $C \subset A$ esetén
$$f[A \backslash C] = B \backslash f[C].$$

11.1.8. állítás. Az
$$f : A \to B$$
függvény és az
$$A_\gamma \subset A \quad (\gamma \in \Gamma), \qquad \text{ill. a} \qquad B_\delta \subset B \quad (\delta \in \Delta)$$
feltételeknek eleget tévő indexelt halmazrendszerek esetén
$$f\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f[A_\gamma]$$
és
$$f\left[\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f[A_\gamma] \quad (\text{„=”} \iff f \text{ injektív}),$$
ill.
$$f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j] \qquad \text{és} \qquad f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j].$$

11.2. Egyenlőtlenségek

Tetszőleges $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$, ill. $p \in (0,1]$ esetén
$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \tag{11.2.1}$$
hiszen a triviálistól különböző $(b \neq 0)$ esetben az
$$f(x) := 1 + x^p - (1+x)^p \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} \geq 0 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

azaz f monoton növekedő:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan az

$$x := \frac{a}{b} \geq 0$$

helyettesítéssel az egyenlőtlenség adódik.

11.2.1. definíció. Adott $I \subset \mathbb{R}$ (nem-elfajuló) intervallum esetén azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény

1. **konvex**, ha bármely $x, y \in I$ és bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

2. **szigorúan konvex**, ha bármely $x, y \in I : x \neq y$ és bármely $\lambda \in (0,1)$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y);$$

3. **konkáv**, ill. **szigorúan konkáv**, ha $-f$ konvex, ill. szigorúan konvex.

A definícióban a $\lambda := 1/2$ helyettesítéssel konvex f-re az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in I: \; x \neq y)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami teljes indukcióval általánosítható, azaz igaz a

11.2.1. tétel. Ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in I$ esetén

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

(**Jensen-egyenlőtlenség**).

A definíció alapján könnyen belátható, hogy az

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

fügvény konvex, így a Jensen-egyenlőtlenség következménye a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index és $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok esetén fennálló

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

(számtani és négyzetes közepek közötti) egyenlőtlenség.

Differenciálható függvények esetén a deriváltat használhatjuk a konvexitás jellemzésére.

11.2.2. tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ (nem-elfajuló) intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.

1. Az f pontosan akkor szigorúan konvex, ha $f''(x) \geq 0$ $(x \in I)$ és nincs olyan $J \subset I$ intervallum, hogy $f''(x) = 0$ $(x \in J)$ volna.
2. Az f pontosan akkor szigorúan konkáv, ha $f''(x) \leq 0$ $(x \in I)$ és nincs olyan $J \subset I$ intervallum, hogy $f''(x) = 0$ $(x \in J)$ volna.

A második derivált segítségével ellenőrizhetőek az alábbi

11.2.1. példák.

1. Az
$$f(x) := e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan konvex.
2. Az
$$f(x) := \ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan konkáv.
3. Az
$$f(x) := x^\alpha \qquad (0 < x \in \mathbb{R};\ 0 < \alpha \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan konvex, ill. konkáv, ha $\alpha > 1$, ill. $\alpha < 1$.
4. Az
$$f(x) := \left(x^{1/p} + 1\right)^p \qquad (0 < x \in \mathbb{R};\ 1 < p \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan konkáv.
5. Az
$$f(x) := \frac{x}{1+x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan konkáv.

Az
$$f(x) := e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény konvexitását felhasználva belátható, hogy ha
$$p, q \in (1, +\infty) : \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

akkor bármely $a, b \in [0, +\infty)$ szám esetén

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{11.2.2}$$

(**Young-egyenlőtlenség**), hiszen az $a = 0$ vagy $b = 0$ esetén egyenlőséget kapunk, ha pedig $a, b > 0$, akkor f konvexitását felhasználva az

$$f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}x\right) \leq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahonnan

$$ab = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = \exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\right) \leq \frac{1}{p}\exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q}\exp(\ln(b^q)) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

következik.
Az

$$f(x) := \ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény konkávitását felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index és $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\ln\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \ldots + \ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\right),$$

ahonnan az $\ln$ függvény szigorú monotonitásának figyelembe vételével az

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad (0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$$

(**számtani és mértani közepek közötti**) **egyenlőtlenség** adódik.

Ha $0 < p \in \mathbb{R}$, akkor az

$$f(x) := x^p \qquad (x \in [0, +\infty))$$

függvény konvexitását, ill. konkávitását, továbbá a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy bármely $a, b \in [0, +\infty)$ esetén

$$(a+b)^p = \left(2 \cdot \frac{a+b}{2}\right)^p \begin{cases} \leq 2^p \cdot \dfrac{a^p + b^p}{2} = 2^{p-1}(a^p + b^p) & (p \geq 1), \\ \\ \geq 2^p \cdot \dfrac{a^p + b^p}{2} = 2^{p-1}(a^p + b^p) & (p \leq 1). \end{cases} \tag{11.2.3}$$

További egyenlőtlenség igazolásához lesz igen hasznos segédeszköz a

11.2.3. tétel. Ha $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ szigorúan konkáv függvény és

$$f(x, y) := y \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (x, y \in (0, +\infty)),$$

akkor minden $n \in \mathbb{N}$ index és $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in (0, +\infty)$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right),$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha van olyan $t \in (0, +\infty)$, hogy bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k/y_k = t$.

Bizonyítás. Világos, hogy $n = 1$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. Ha $n = 2$, akkor φ konkávitását felhasználva a

$$\lambda := \frac{y_1}{y_1 + y_2}$$

választással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) &= y_1 \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2 \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right) = \\
&= (y_1 + y_2) \cdot \left\{\frac{y_1}{y_1 + y_2} \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1 + y_2} \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right\} \leq \\
&\leq (y_1 + y_2) \cdot \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right) = \\
&= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2).
\end{aligned}$$

φ konkávitásának következményeként pontosan akkor van egyenlőség, ha $x_1/y_1 = x_2/y_2$ teljesül. Nagyobb n-ekre az állítás indukcióval bizonyítható. ■

Így,

1. ha

$$\varphi(x) := \sqrt{x} \qquad (x > 0),$$

akkor

$$f(x, x) \equiv \sqrt{x}\sqrt{y},$$

így bármely $n \in \mathbb{N}$ index és $0 < x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\sqrt{y_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$

azaz az

$$x_k =: a_k^2 \quad \text{és} \quad y_k =: b_k^2 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

választással a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget kapjuk.

2. ha valamely $p \in (1, +\infty)$ esetén

$$\varphi(x) := x^{1/p} \qquad (x > 0),$$

akkor

$$f(x, y) \equiv x^{1/p} y^{1/q},$$

ahol $q := 1 - 1/p$, így bármely $n \in \mathbb{N}$ index és $0 < x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{1/p} y_k^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/q},$$

azaz az

$$x_k =: a_k^p, \quad \text{ill.} \quad y_k =: b_k^q \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

választással a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

Hölder-egyenlőtlenséget kapjuk.

3. ha valamely $p \in (1, +\infty)$ esetén

$$\varphi(x) := \left(x^{1/p} + 1\right)^p \qquad (x > 0),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ index és $0 < x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{1/p} + y_k^{1/p}\right)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/p}\right)^p,$$

azaz az

$$x_k =: a_k^p \quad \text{és} \quad y_k =: b_k^p \qquad (k \in \{1, \ldots, n\})$$

választással a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

Minkowski-egyenlőtlenséget kapjuk.

11.2.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 \leq a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$: $p > 1$ és $1/p + 1/q = 1$, akkor fennáll a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/p} = \max\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \in \mathbb{R}:\ b_k \geq 0\,(k \in \{1, \ldots, n\}),\ \sum_{k=1}^{n} b_k^q = 1\right\}$$

egyenlőség!

Útm. Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget! ■

11.2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $p \in (0,1)$, $0 \leq a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, akkor fennáll a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Mivel $1/p > 1$, ezért a $q := 1/(1-p)$ számra $p + 1/q = 1$. Így (vö. 11.2.1. feladat) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}\right\}^{p} &= \max\left\{c_1 \sum_{k=1}^{n} a_k^p + c_2 \sum_{k=1}^{n} b_k^p \in \mathbb{R}:\ c_1, c_2 > 0,\ c_1^q + c_2^q = 1\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \max\left\{c_1 a_k^p + c_2 b_k^p \in \mathbb{R}:\ c_1, c_2 > 0,\ c_1^q + c_2^q = 1\right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p. \quad ■\end{aligned}$$

11.2.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $t \in (0,1)$, $a, b \in [0, +\infty)$ akkor

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b$ teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha $0 < a \leq b$, akkor az

$$f(x) := x^{-t} \qquad (x \in [a, b])$$

függvény folytonos és monoton csökkenő, így

$$a^{1-t} - b^{1-t} = (1-t)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (1-t)(b-a)a^{-t}$$

és

$$a^t b^{1-t} \leq a + (1-t)(b-a) = ta + (1-t)b.$$

Ha pedig $0 < b < a$, akkor az előző érvelésben a $t \leftrightarrow t-1$ szerepcserével a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

2. lépés. Világos, hogy $a = b$ esetén egyenlőség áll fenn. Ha

$$a^t b^{1-t} = ta + (1-t)b \qquad \text{és} \qquad ab = 0,$$

akkor $a = b = 0$. Ha pedig $a, b > 0$, akkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^t = t\left(\frac{a}{b}\right) + (1-t).$$

Így az $x := a/b$ számra

$$x^t - tx = 1 - t.$$

Ha $x \neq 1$, azaz $a \neq b$, akkor az

$$g(x) := x^t - tx \qquad (x \in (0,1))$$

függvény szigorúan monoton növekedő, hiszen $t \in (0,1)$ miatt

$$g'(x) = tx^{t-1} - t = t(x^{t-1} - 1) > 0 \qquad (x \in (0,1)).$$

Így $0 < x < 1$ esetén

$$x^t - tx < 1 - t. \quad \blacksquare$$

11.2.4. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $p, q \in \mathbb{R}$: $p > 1$ és $1/p + 1/q = 1$, akkor

1. $2 \leq p$ esetén
$$|x+y|^p + |x-y|^p \leq 2^{p-1}\left(|x|^p + |y|^p\right) \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
ill.
2. $p > 2$ esetén
   (a) $(1 + x^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) \quad (x \in [0,1]),$

   (b) $(1+x)^q + (1-x)^q \leq 2(1+x^p)^{\frac{1}{p-1}} \quad (x \in [0,1]),$

   (c) $|x+y|^q + |x-y|^q \leq 2\left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

teljesül!

Útm.

1. Ha $2 \leq p$ és
$$\varphi(t) := (1+t)^p + (1-t)^p - 2^{p-1}\left(1 + t^p\right) \qquad (t \in [0,1]),$$
akkor
$$\varphi(1) = 2^p - 2^{p-1} \cdot 2 = 0$$
és tetszőleges $t \in (0,1)$ esetén
$$\varphi'(t) = p(1+t)^{p-1} - p(1-t)^{p-1} - 2^{p-1}pt^{p-1}.$$

Ha

$$\psi(t) := (t+1)^{p-1} - (t-1)^{p-1} \qquad (t \in [1, +\infty)),$$

akkor

$$\psi(1) = 2^{p-1}$$

és bármely $t \in (1, +\infty)$ esetén

$$\psi'(t) = (p-1)\left((t+1)^{p-2} - (t-1)^{p-2}\right) \geq 0,$$

azaz ψ monoton növekedő, így bármely $t \in [1, +\infty)$ esetén $\psi(t) \geq 2^{p-1}$. Ha tehát $t \in (0{,}1)$, akkor

$$\varphi'(t) = pt^{p-1}\left(\left(\frac{1}{t}+1\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{t}-1\right)^{p-1} - 2^{p-1}\right) \geq 0,$$

azaz φ monoton növekedő és bármely $t \in [0{,}1]$ esetén

$$(1+t)^p + (1-t)^p - 2^{p-1}(1+t^p) \leq \varphi(1) = 0,$$

azaz

$$(1+t)^p + (1-t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p).$$

Legyen most $x, y \in \mathbb{R}$. Feltehető, hogy $x \neq 0$, hiszen ellenkező esetben a triviális

$$|y|^p + |-y|^p = 2|y|^p \leq 2^{p-1}|y|^p$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Hasonlóan látható be, hogy az $y = 0$ eset is kizárható. Így tehát, ha $y \in (0, x]$, akkor $0 < y/x \leq 1$, és így

$$\begin{aligned} |x+y|^p + |x-y|^p &= x^p\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)^p + \left(1-\frac{y}{x}\right)^p\right) \leq \\ &\leq 2^{p-1}x^p\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = \\ &= 2^{p-1}\left(|x|^p + |y|^p\right). \end{aligned}$$

Az $x, y > 0$ eset az $x \leftrightarrow y$ szerepcserével az előzőre vezethető vissza. Ha $x > 0$, akkor az $y \leftrightarrow -y$ szerepcserével ismét az előző esetet kapjuk.,. ha pedig $x, y < 0$, akkor a xx, ill. a $-y$ számokra alkalmazva az előző egyenlőtlenséget végül a bizonyítandó állításhoz jutunk.

2. Ha $p > 2$ és

   (a) $x \in (0{,}1)$, akkor

$$\frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1+x^q)^{p-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{p}{n}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}x^{qn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{2n}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}x^{qn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{2n}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{2n}x^{2nq} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{p}{2n}x^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}x^{2nq}\right].$$

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az iménti összeg mind három tagja nemnegatív. Ez $n=0$ esetén nyilvánvaló: $1-0-1=0$. Ha pedig $n>1$, akkor legyen

$$S := \binom{p}{2n}x^{2n} - \binom{p-1}{2n-1}x^{q(2n-1)} - \binom{p-1}{2n}x^{2nq} =$$

$$= \frac{p\cdot\ldots\cdot(p-2n+1)}{(2n)!}x^{2n} - \frac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-1-2n+1+1)}{(2n-1)!}x^{q(2n-1)} -$$

$$-\frac{(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-1-2n+1)}{(2n)!}x^{2nq} =$$

$$= \frac{(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2n)}{(2n-1)!}x^{2n}\left\{\frac{p(p-1)}{2n(p-2n)} - \frac{p-1}{p-2n}x^{q(2n-1)-2n} - \frac{p-1}{2n}x^{2nq-2n}\right\}.$$

Mivel

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad \text{azaz} \qquad p+q=pq, \qquad \text{és így} \qquad (p-1)(q-1)=1,$$

ezért

$$q = 1+\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

következtében

$$2nq-2n = 2n(q-1) = \frac{2n}{p-1}$$

és

$$q(2n-1)-2n = 2nq-2n-q = \frac{2n}{p-1} - q = \frac{2n}{p-1} - \frac{p}{p-1} = \frac{2n-p}{p-1}.$$

Az

$$\frac{p(p-1)}{2n(p-2n)} = \frac{p-1}{2n} + \frac{p-1}{p-2n},$$

egyenlőség felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$S = \frac{(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-2n)}{(2n-1)!}x^{2n}\left\{\frac{p-1}{2n}\left(1-x^{\frac{2n}{p-1}}\right) + \frac{p-1}{p-2n}\left(1-x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{(2-p)\cdot\ldots\cdot(2n-p)}{(2n-1)!}x^{2n}\left\{\frac{p-1}{2n}\left(1-x^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{p-1}{2n-p}\left(1-x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right)\right\}.$$

Ha most

$$\varphi(t) := \frac{1}{2n}\left(1-t^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{1}{2n-p}\left(1-t^{\frac{2n-p}{p-1}}\right) \qquad (t\in[0,1]),$$

akkor $\varphi(1) = 0$ és bármely $t \in [0,1]$ esetén

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{p-1} t^{\frac{2n}{p-1}-1} + \frac{1}{p-1} t^{\frac{2n-p}{p-1}-1} \geq 0,$$

azaz φ monoton növekedő, így bármely $t \in [0,1]$ esetén

$$\varphi(t) \leq \varphi(1) = 0.$$

Így

$$S = -\frac{(2-p) \cdot \ldots \cdot (2n-p)}{(2n-1)!} x^{2n} \left\{ \frac{p-1}{2n} \left(1 - x^{\frac{2n}{p-1}}\right) - \frac{p-1}{2n-p} \left(1 - x^{\frac{2n-p}{p-1}}\right) \right\} \geq 0.$$

(b) Ha $x \in [0,1]$ és

$$y := \frac{1-x}{1+x} \in [0,1],$$

akkor

$$1 + y = \frac{2}{1+x} \qquad \text{és} \qquad 1 - y = \frac{2x}{1+x}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1-y}{1+y} = x.$$

Így az előző állítás következtében

$$(1+y)^p + (1-y)^p \geq 2(1+y^q)^{p-1},$$

és $1/(p-1) = q-1$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$2\left((1+y)^p + (1-y)^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \geq 2^q(1+y^q).$$

Mivel $p/(p-1) = q$, ezért

$$2^q(1+y^q) \leq 2(1+y)^q \left\{ 1 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^p \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Végül pedig

$$\begin{aligned}
(1+x)^q + (1-x)^q &= \left(1 + \frac{1-y}{1+y}\right)^q + \left(1 - \frac{1-y}{1+y}\right)^q = \\
&= \frac{2^q}{(1+y)^q} + \frac{2^q y^q}{(1+y)^q} = 2^q \frac{1+y^q}{(1+y)^q} \leq \\
&\leq \left\{ 1 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^p \right\}^{\frac{1}{p-1}} = \\
&= 2\left(1 + x^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

(c) Az (1) végén lévő bizonyításhoz hasonlóan (c)-ből triviálisan következik. ■

11.3. Algebrai struktúrák

A valós számok körében szokásos műveletek (összeadás, szorzás) fogalmát általánosítva az algebrai művelet, ill. struktúra értelmezéséhez jutunk.

11.3.1. definíció. Adott $\emptyset \neq A, B$ halmazok és $n \in \mathbb{N}$ szám esetén az

$$f : A^n \to A$$

függvényt az A halmaz (n-változós) (**belső** vagy **algebrai**) **művelet**ének (A**-beli** **művelet**nek), a

$$g : B \times A \to A$$

függvényt pedig az A halmaz (B-re vonatkozó) **külső** **művelet**ének (A**-beli** B**-művelet**nek) nevezzük. Azt mondjuk, hogy az (A, M) rendezett pár **algebrai struktúra** (röviden **algebra**), ha M minden eleme A (belső vagy külső) művelete. Az A halmazt a struktúra **tartóhalmaz**ának nevezzük.

11.3.1. megjegyzés.

- Ha pl. $M = \{f, g\}$, akkor az $(A, \{f, g\})$ algebrai stuktúrát az (A, f, g) hármassal jelöljük.
- $\mathcal{P}(A)$ műveletei pl. az

  $$\vee, \wedge : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A), \qquad \vee(H, K) := H \cup K, \quad \wedge(H, K) := H \cap K$$

  függvények, így a $(\mathcal{P}(A), \vee, \wedge)$ hármas algebrai struktúra.
- Ha nem okoz félreértést (azaz egyértelmű, hogy mik a műveletek), akkor az algebrai struktúrát a tartóhalmazával jelöljük.
- Ha $\triangle$ kétváltozós A-beli művelet: $\triangle\colon A \times A \to A$, illetve ha $\star$ az A halmaz B-re vonatkozó külső művelete: $\star : B \times A \to A$, akkor tetszőleges $x, y \in A$, $\lambda \in B$ esetén a

  $$\triangle\,(x, y) =: x \,\triangle\, y, \qquad \text{ill. a} \qquad \star\,(\lambda, x) =: \lambda \star x$$

  jelölést használjuk.

Az algebrai struktúra defincíójában az (A, f, g) hármasra azért nem használjuk a 'rendezett' jelzőt, mert f és g sorrendje közömbös.
Műveletekkel kapcsolatban az alábbi tulajdonságok alapvető jelentőségűek.

11.3.2. definíció. Adott $(A, \triangledown, \vartriangle)$ algebrai struktúra esetén azt mondjuk, hogy

1. a $\triangledown : A \times A \to A$ művelet **asszociatív**, ill. **kommutatív**, ha bármely $x, y, z \in A$ esetén
$$x\triangledown(y\triangledown z) = (x\triangledown y)\triangledown z, \qquad \text{ill.} \qquad x\triangledown y = y\triangledown z;$$
2. a $\triangledown : A \times A \to A$ művelet **disztributív** a $\vartriangle$: $A \times A \to A$ műveletre nézve, ha bármely $x, y, z \in A$ esetén
$$(x \vartriangle y)\triangledown z = (x\triangledown z) \vartriangle (y\triangledown z) \qquad \text{és} \qquad z\triangledown(x \vartriangle y) = (z\triangledown x) \vartriangle (z\triangledown y);$$
3. az $n \in A$ elem a struktúra, ill. az A **neutrális eleme** a $\triangledown : A \times A \to A$ műveletre nézve, ha
$$x\triangledown n = n\triangledown x = x \qquad (x \in A).$$
Ebben az esetben az $a \in A$ elem $\triangledown$-ra vonatkozó **inverz**ének nevezünk valamely $\widetilde{a} \in A$ elemet, ha
$$a\triangledown\widetilde{a} = \widetilde{a}\triangledown a = n$$
teljesül. Amennyiben $\triangledown$ neve **szorzás**, ill. **összeadás**, akkor n neve **egységelem**, ill. **zéruselem**.

11.3.1. példák. A belső műveletes algebrai struktúrák közül a legfontosabbak a következők.

- Ha $G \neq \emptyset$, továbbá a $\vartriangle$: $G \times G \to G$ művelet asszociatív, van G-nek $\vartriangle$-ra nézve neutrális eleme, továbbá bármely G-beli elemnek van inverze $\vartriangle$-ra nézve, akkor a $(G, \vartriangle)$ algebrai struktúrát **csoport**nak nevezzük. Ha $\vartriangle$ még kommutatív is, akkor **Abel-csoport**ról beszélünk. $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ pl. Abel-csoportot alkot nak a szorzásra nézve.
- Ha $R \neq \emptyset$, a $\triangledown : R \times R \to R$ művelet asszociatív és disztributív a $\vartriangle$: $R \times R \to R$ műveletre nézve, továbbá az $(R, \vartriangle)$ struktúra Abel-csoport, akkor az $(R, \vartriangle, \triangledown)$ algebrai struktúrát **gyűrű**nek nevezzük.
- Ha $T \neq \emptyset$, a $\triangledown : T \times T \to T$ művelet disztributív a $\vartriangle$: $T \times T \to T$ műveletre nézve, $(T, \vartriangle)$ Abel-csoport az $n \in T$ neutrális elemmel, továbbá $T^* := T\backslash\{n\}$ esetén a $(T^*, \triangledown)$ struktúra Abel-csoport, akkor a $(T, \vartriangle, \triangledown)$ algebrai struktúrát (kommutatív) **test**nek nevezzük. T elemeit **skalár**oknak, $T = \mathbb{K}$ esetén **szám**oknak nevezzük.

Bizonyos esetekben nem célszerű algebrai struktúrák között különbséget tenni. Ezt a kétműveletes algebrai struktúrákkal kapcsolatban részletezzük, megjegyezve, hogy a bevezetésre kerülő fogalmak értelemszerű módosításokkal egyéb algebrai sruktúrákra is átvihetők.

11.3.3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, +, \cdot)$, $(\widetilde{A}, \boxplus, \boxdot)$ belső műveletes algebrai struktúrák

- **homomorf**ak, ha van olyan $\varphi : A \to \widetilde{A}$ leképezés, amely **művelettartó** ($\varphi \in Hom(A, \widetilde{A})$), azaz tetszőleges $x, y \in A$ esetén

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \boxplus \varphi(y) \qquad \text{és} \qquad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \boxdot \varphi(y);$$

- **izomorf**ak (jelben $A \cong \widetilde{A}$), ha homomorfak és a fenti φ leképezés bijektív.

Ha a $\cdot$, ill. a $\boxdot$ műveletek A-nak, ill. $\widetilde{A}$-nak valamely B halmazra vonatkozó külső műveletei (a másik – azaz a $+$, ill. $\boxplus$ művelet – belső művelet), akkor a homomorfizmuson (művelettartáson) a

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \boxplus \varphi(y) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \boxdot \varphi(x) \qquad (\lambda \in B,\ x, y \in A)$$

egyenlőségek teljesülését értjük.

Mivel izomorf algebrai strukturák algebrai tulajdonságaikban megegyeznek, ezért ha két algebrai struktúra egymással izomorf, akkor – algebrai szempontból – azonosnak tekintjük őket.
Az alábbiakban egyik legfontosabb, belső és külső művelettel ellátott algebrai struktúráról lesz szó, amely a matematika különböző fejezeteiben és a fizikában is fontos szerepet játszik.

11.3.4. definíció. Ha $(T, +, \cdot)$ test és a $(T, +)$ Abel-csoport neutrális elemét 1-gyel jelöljük, akkor valamely $\mathcal{X}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{X}, \boxplus, \boxdot)$ algebrai struktúra **vektortér (lineáris tér) T-re vonatkozóan** vagy **T-vektortér**, ha

$$\boxplus : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxdot : T \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

olyan belső, ill. külső műveletek (amelyeket **összeadás**nak, ill. **skalárral való szorzás**nak hívunk), hogy az $(\mathcal{X}, \boxplus)$ algebrai struktúra csoport, továbbá a T-beli $+$ és $\cdot$ műveleteket valamint a $\boxplus$-ot és $\boxdot$-t az alábbi szabályok kapcsolják össze:

1. $\lambda \boxdot (x \boxplus y) = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$ $(\lambda \in T,\ x, y \in \mathcal{X})$;
2. $(\lambda + \mu) \boxplus x = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$ $(\lambda, \mu \in T,\ x \in \mathcal{X})$;
3. $\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = (\lambda\mu) \boxdot x$ $(\lambda, \mu \in T,\ x \in \mathcal{X})$;
4. $1 \boxdot x = x$ $(x \in \mathcal{X})$.

Az $\mathcal{X}$ elemeit **vektor**oknak, az $\mathcal{X}$-nek $\boxplus$-ra vonatkozó neutrális elemét – az $\mathcal{X} \ni \Theta$ elemet – **nullvektor**nak nevezzük, továbbá tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ esetén a $\boxplus$-ra vonatkozó inverzet $-x$-szel jelöljük, és x **ellentett**jének, az $x - y := x \boxplus (-y)$ elemet pedig x és y **különbség**ének nevezzük. Ha félreértés veszélye nem áll fenn, akkor jelölésben nem teszünk különbséget $+$ és $\boxplus$, ill. $\cdot$ és $\boxdot$ között: a vektortér jelölésére az $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ szimbólumot használjuk (az egyszerűség kedvéért sokszor a szorzás jelét is elhagyjuk, azaz $\lambda \cdot x$ helyett λx-et írunk). Ha nyilvánvaló, hogy mik a műveletek, akkor a vektorteret egyszerűen az $\mathcal{X}$ **tartóhalmaz**zal jelöljük. Ha félreértés veszélye nem áll fenn, akkor a Θ nullvektort gyakran csak a 0 szimbólummal jelöljük.

Nem nehéz belátni, hogy a nullvektor, ill. az ellentett egyértelmű, továbbá bármely $\lambda \in T$, ill. $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\lambda\Theta = \Theta, \qquad 0x = \Theta, \quad \lambda x = \Theta \quad \Longrightarrow \quad (\lambda = 0 \ \vee x = \Theta), \qquad -x = (-1)x,$$

továbbá

$$y + (x - y) = x, \qquad \text{ill.} \qquad x + y = y + x, \qquad x + y = z \quad \Longleftrightarrow \quad x = z - y.$$

11.3.1. példa. Ha T test és $\{x\}$ tetszőleges egyelemű halmaz, akkor az $x \boxplus x := x$, $\lambda \boxdot x := = x$ műveletekkel T-vektorteret kapunk. Mivel itt x a nullvektor, ezért ezt így jelöljük: $\{0\}$.

11.3.2. példa. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén T^n vektortér T-re vonatkozóan, ha az összeadást és a skalárral való szorzást így értelmezzük:

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in T^n),$$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \qquad (\lambda \in T,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n).$$

11.3.3. példa. Az $n = 1$ esetben tehát $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{R}$-re, ill. $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{C}$-re vonatkozóan.

11.3.4. példa. A $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$-re vonatkozóan is, ha az összeadást és a számmal való szorzást így értelmezzük:

$$x + y := (a + c) + (b + d)\imath \qquad (x = a + b\imath,\ y = c + d\imath \in \mathbb{C}),$$

$$\lambda x := \lambda a + (\lambda b)\imath, \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ x = a + b\imath \in \mathbb{C}).$$

Sőt, minden komplex vektortér egyben valós vektortér is, ha a számmal való szorzást leszűkítjük a valós számokra. $\mathbb{C}^n$ esetén pl. így olyan vektorteret kapunk, amelyet a

$$\mathbb{C}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\Re(x_1), \Im(x_1), \ldots, \Re(x_n), \Im(x_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

megfeleltetéssel az $\mathbb{R}^{2n}$ vektortérrel azonosíthatunk.

11.3.5. példa. Az $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{R}$-re vonatkozóan akkor is, ha az összeadást és a számmal való szorzást így értelmezzük:

$$x \boxplus y := \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right), \quad \lambda \boxdot x := \lambda^3 x \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}).$$

11.3.6. példa. Ha $H \neq \emptyset$ és T test, akkor T^H vektortér T-re vonatkozóan, ha az összeadást és a skalárral való szorzást így értelmezzük:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \qquad (x \in H,\ \lambda \in T,\ f, g : H \to T).$$

11.3.7. példa. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{K}^{m\times n}$ vektortér $\mathbb{K}$-ra vonatkozóan, ha mátrixok összeadását és skalárral való szorzását a szokásos módon értelmezzük:

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \qquad \left(A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}, B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{K}^{m\times n}\right),$$

$$\lambda A := [\lambda a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \qquad \left(\lambda \in \mathbb{K},\ A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{K}^{m\times n}\right).$$

11.3.5. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén valamely I indexhalmazon értelmezett, $\mathcal{X}$-beli értékeket felvevő függvényeket, azaz $\mathcal{X}^I$ elemeit ($\mathcal{X}$-beli) **vektorrendszer**eknek nevezzük. Valamely vektorrendszert **véges**nek nevezünk, ha I véges, **végtelen**nek, ha I végtelen halmaz. A vektorrendszert **rendezett**nek nevezzük, ha az I indexhalmazon adott egy láncszerű rendezés.

A korábbi jelölésekkel összhangban (vö. 11.1. fejezet) a vektorrendszert az

$$(x_i)_{i\in I}, \qquad (x_i : i \in I), \qquad x_i \in \mathcal{X} \quad (i \in I)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. Az $x(i) = x_i$ elemet a vektorrendszer **i-edik tag**jának nevezzük. Sok esetben célszerű a vektorrendszert egyetlen betűvel jelölni, méghozzá általában azzal a betűvel, melynek indexelésével a tagokat megadjuk, pl.

$$x := (x_i : i \in I).$$

Ha $I = \emptyset$, akkor $(x_i : i \in I)$ nem más, mint az ún. **üres rendszer**: $\emptyset$. Ha rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén $I = \{1, \ldots, n\}$, akkor az

$$x = (x_i : i \in \{1, \ldots, n\})$$

vektorrendszert egyszerűen csak az

$$x_1, \ldots, x_n$$

szimbólummal jelöljük. Sőt, ebben az esetben a vektorrendszert rendezettnek is tekintjük, a felírási sorrendnek megfelelő rendezéssel.
Az identitás-függvény felhasználásával az egész $\mathcal{X}$ vektortér is tekinthető vektorrendszernek ($I = \mathcal{X}$).
Az $(x_j)_{j\in J}$ ($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszert az $(x_i)_{i\in I}$ ($\mathcal{X}$-beli) rendszer **részrendszer**ének nevezzük, ha $J \subset I$.
Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vektorrendszert soha nem az értékkészletével, azaz tagjainak

$$\{x_i \in \mathcal{X} : \ i \in I\}$$

halmazával adjuk meg, ui. egy függvény és értékkészlete különböző dolgok; az előbbi egyértelműen meghatározza az utóbbit, fordítva ez azonban nem igaz. Előfordulhat pl. hogy a függvény nem injektív, így egy adott szituációban egy vektor többször is előfordulhat, míg az

$$\{x_i \in \mathcal{X} : \ i \in I\}$$

halmaznak minden eleme különböző.
A továbbiakban (és mindig, ha mást nem mondunk) a $T = \mathbb{K}$ testre vonatkozó vektorterekkel foglalkozunk.

11.3.6. definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ **altér** az $\mathcal{X}$ vektortérben, ha bármely $u, v \in \mathcal{A}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$u + \lambda v \in \mathcal{A}.$$

11.3.7. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{X}$ vektor az $x_1, \ldots, x_n$ ($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer **lineáris kombinációj**a, ha alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ számokkal

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

teljesül. Az $(x_i)_{i\in\emptyset}$ üres rendszer lineáris kombinációján a nullvektort értjük: $\sum\limits_{i\in\emptyset} x_i := 0$.
Az $(x_i)_{i\in I}$ vektorrendszer **lineáris burkának** nevezzük a

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(x_i) \ &:= \ \langle x_i : \ i \in I\rangle := \\ &:= \ \{x \in \mathcal{X} : \ x \text{ lineáris kombinációja } (x_i) \text{ valamely véges részrendszerének}\} = \\ &= \ \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathcal{X} : \ n \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathcal{X},\ \lambda_k \in \mathbb{K}\right\} \end{aligned}$$

halmazt.

Könnyen belátható, hogy

- az $\operatorname{span}(x_i)$ altér $\mathcal{X}$-ben, amelyet szokás az $(x_i)_{i\in I}$ **vektorrendszer generálta altér**nek is nevezni.
- ha $\mathcal{Y}$ olyan altér $\mathcal{X}$-ben, amelyre
$$x_i \in \mathcal{Y} \qquad (i \in I),$$
akkor $\operatorname{span}(x_i) \subset \mathcal{Y}$, azaz $\operatorname{span}(x_i)$ a legszűkebb olyan altér $\mathcal{X}$-ben, amely tartalmazza x_i-t $(i \in I)$:
$$\operatorname{span}(x_i) = \bigcap \{\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} : \mathcal{Y} \text{ altér és } x_i \in \mathcal{Y}\ (i \in I)\}\,.$$

11.3.8. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén azt mondjuk, hogy

1. az
$$x_1, \ldots, x_n$$
($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer **lineárisan független**, ha
$$\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\right);$$
2. az
$$x := (x_i : i \in I)$$
($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer **(lineárisan) független**, ha bármely $J \subset I$ véges indexhalmaz esetén $x := (x_j : j \in J)$ lineárisan független.
3. az
$$x := (x_i : i \in I)$$
($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer **(lineárisan) összefüggő**, ha nem (lineárisan) független.

Az
$$x := (x_i : i \in \emptyset)$$
üres rendszert is lineárisan független rendszernek tekintjük. Valamely
$$x := (x_i : i \in I)$$
($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer tehát pontosan akor lineárisan összefüggő, ha alkalmas $J \subset I$ véges indexhalmaz és $\lambda_j \in \mathbb{K}$ $(j \in J)$ esetén
$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$$
teljesül.

11.3.9. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén azt mondjuk, hogy az $(x_i : i \in I)$ ($\mathcal{X}$-beli) vektorrendszer **(Hamel-)bázis**a $\mathcal{X}$-nek, ha

$$(x_i) \text{ lineárisan független} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{X} = \operatorname{span}(x_i).$$

11.3.1. tétel. Adott $\mathcal{X}$ vektortér esetén egyenértékűek az alábbi állítások.

- Az $(x_i)_{i\in I}$ bázisa $\mathcal{X}$-nek.
- Az $(x_i)_{i\in I}$ maximálisan független vektorrendszer, azaz lineárisan független és nincsen olyan $J \supsetneqq I$ indexhalmaz, amelyre $(x_j)_{j\in J}$ lineárisan független volna.
- Bármely $x \in \mathcal{X}$ egyértelműen írható fel $(x_i)_{i\in I}$ lineáris kombinációjaként.

11.3.2. tétel. Ha az $\mathcal{X}$ vektortér esetén $(x_i : i \in I)$ ($\mathcal{X}$-beli) független vektorrendszer és $(x_l : l \in L)$ olyan (nem feltétlenül független) vektorrendszer, amelyre

$$I \subset L \qquad \text{és} \qquad \mathcal{X} = \operatorname{span}(x_l : l \in L)$$

teljesül, akkor alkalmas $I \subset J \subset L$ indexhalmaz esetén $(x_j : j \in J)$ bázisa $\mathcal{X}$-nek.

Bizonyítás.

1. lépés. Ha

$$\mathcal{H} := \{h : J \to \mathcal{X} : \quad I \subset J \subset L \quad \text{és} \quad h|_I = (x_i : i \in I), \quad h \text{ lineárisan független}\},$$

akkor $\mathcal{H} \neq \emptyset$, hiszen $(x_i)_{i\in I} \in \mathcal{H}$. Világos, hogy ha $\rho \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$(f, g) \in \rho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g \quad \text{és} \quad g|_{\mathcal{D}_f} = f,$$

akkor ρ rendezés $\mathcal{H}$-n.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy $(\mathcal{H}, \rho)$-ban bármely láncszerűen rendezett $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ halmaz felülről korlátos. Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ láncszerűen rendezett, akkor a

$$F : \bigcup_{f\in\mathcal{A}} \mathcal{D}_f \to \mathcal{X}, \qquad F(j) := f(j) \quad (j \in \mathcal{D}_f,\ f \in \mathcal{A})$$

jelölés bevezetésével olyan F vektorrendszert értelmeztünk, amelyre $F|_I = (x_i : i \in I)$ és amely $\mathcal{D}_F \subset L$ miatt $(x_l : l \in L)$ egy részrendszere. F lineárisan független. Ellenkező esetben alkalmas nem-üres

$$r : R \to \mathcal{X}, \qquad R = \{j_1, \ldots, j_n\} \subset \mathcal{D}_F$$

részrendszer esetén alkalmas $\alpha_k \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ számokkal

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(j_k) = 0 \tag{11.3.1}$$

teljesülne. Így mivel $R \subset \mathcal{D}_F$, R véges és $\mathcal{A}$ láncszerűen rendezett, ezért létezik olyan $g \in \mathcal{A}$, hogy $R \subset \mathcal{D}_g$, viszont az r részrendszerre is teljesül (11.3.1) és r részrendszere g-nek, következésképpen g nem lehet lineárisan független, azaz $g \notin \mathcal{A}$. Ez azt jelenti, hogy a F vektorrendszer felső korlátja $\mathcal{A}$-nak.

3. lépés. A Zorn-lemma (vö. 11.1.1. állítás) következtében $\mathcal{A}$-nak van maximális elme: $f : J \to \mathcal{X}$, amely $f \in \mathcal{A}$ miatt lineárisan független, és amelyre $I \subset J \subset L$ teljesül. Most már csak azt kell megmutatni, hogy $f = (x_l :\ l \in J)$ generátorrendszer $\mathcal{X}$-ben. Ehhez azonban elég azt belátni, hogy

$$\{x_l :\ l \in L\} \subset \operatorname{span}(x_l :\ l \in J). \tag{11.3.2}$$

teljesül, hiszen $(x_l :\ l \in L)$ generátorrendszer $\mathcal{X}$-ben. Ha (11.3.2) nem teljesülne, akkor alkalmas $j_0 \in L \backslash J$ esetén meg tudnánk adni egy $x_{j_0} \notin \operatorname{span}(x_l :\ l \in J)$ tulajdonsággal rendelkező vektort. Ebben az esetben az

$$\widetilde{f} : J \cup \{j_0\} \to \mathcal{X}, \qquad \widetilde{f}(j) := \begin{cases} x_j & (j \in J), \\ \\ x_{j_0} & (j = j_0) \end{cases}$$

vektorrendszer lineárisan független lenne, azaz $\widetilde{f} \in A$ teljesülne, ami ellentmond f maximalitásának. ■

Alkalmazva a 11.3.2. tételt az üres rendszerre és az $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ rendszerre, könnyen belátható a

11.3.3. tétel. Bármely $\mathcal{X}$ vektortérben van bázis.

11.3.4. tétel. Ha az $(x_i :\ i \in I)$ és az $(y_j :\ j \in J)$ vektorrendszerek bázisai valamely $\mathcal{X}$ vektortérnek, akkor $|I| = |J|$, azaz van olyan $\varphi : I \to J$ leképezés, amely bijektív.

Mivel minden $\mathcal{X}$ vektortér vektorrendszernek tekinthető, ezért bizonyos fogalmak, mint pl. *függetlenség*, *bázis*, átvihetők vektortérbeli halmazokra is. Ezzel kapcsolatos a

11.3.10. definíció. Ha az $\mathcal{X}$ vektortér esetén $M \subset \mathcal{X}$, akkor azt mondjuk, hogy az M halmaz **lineárisan független**, **lineárisan összefüggő**, ill. **bázis** $\mathcal{X}$-ben, ha

$$f : M \to M, \qquad f(x) := x$$

vektorrendszer lineárisan függetlten, lineárisan összefüggő, ill. bázis $\mathcal{X}$-ben, továbbá

$$\operatorname{span}(M) := \operatorname{span}(f).$$

Így adott $\mathcal{X}$ vektortér, ill.

$$x_i \in \mathcal{X} \qquad (i \in I)$$

vektorrendszer esetén az

$$M := \{x_i \in \mathcal{X} : \ i \in I\}$$

halmaz pontosan akkor lineárisan független rendszer, ill. bázisa $\mathcal{X}$-nek, ha az $(x_i)_{i\in I}$ vektorrendszer lineárisan független, ill. bázisa $\mathcal{X}$-nek.

11.3.11. definíció. Ha $\mathcal{X}$ vektortér, $A, B \subset \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A + B := \{a + b \in \mathcal{X} : \ a \in A, \, b \in B\}, \qquad \{a\} + B =: a + B \quad (a \in \mathcal{X}),$$

$$\alpha A := \{\alpha a \in \mathcal{X} : \ a \in A\}.$$

11.3.8. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{A} := \{(a,0) : \ a \in \mathbb{R}\}$, $r := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, akkor

$$r + \mathcal{A} = \{r + u : \ u \in \mathcal{A}\} = \{(x + a, y + 0) : \ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}\},$$

azaz $r + \mathcal{A}$ nem más mint az y abszcisszájú vízszintes egyenes.

11.3.12. definíció. Ha $\mathcal{X}$ vektortér, $A, B \subset \mathcal{X}$ altér és $A \cap B = \{0\}$, akkor

$$A + B =: A \oplus B$$

(**direkt összeg**).

Nem nehéz belátni, hogy

$$x \in A \oplus B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists| \, u \in A, \, v \in B : \ x = u + v.$$

11.3.1. állítás. Ha $\mathcal{A}$ altér az $\mathcal{X}$ vektortérben, akkor

$$(x, y) \in \rho \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathcal{A} \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

reláció $\mathcal{X}$-beli ekvivalencia. Így, ha $x \in \mathcal{X}$, akkor

$$[x] = \{u \in \mathcal{X} : \ x - u \in \mathcal{A}\} = \{x + y \in \mathcal{X} : \ y \in \mathcal{A}\} = x + \mathcal{A}.$$

A ρ-ekvivalenciaosztályok halmazára $\mathcal{X}/\varrho$ helyett gyakran az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ jelölés használatos. Mivel bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x, y, u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$((x, y) \in \rho \ \wedge \ (u, v) \in \rho) \quad \Longrightarrow \quad (x + u, y + v) \in \rho, \qquad (x, y) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad (\lambda x, \lambda y) \in \rho,$$

ezért az

$$[x] + [y] := [x + y] \quad (x, y \in \mathcal{X}), \qquad \lambda \cdot [x] := [\lambda \cdot x] \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in \mathcal{X})$$

műveletekkel $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ halmaz vektortér, amelyet az $\mathcal{X}$ vektortér $\mathcal{A}$ altere szerinti **faktorterének** vagy **hányadosterének** nevezünk. Az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$-beli nullvektor: $[0] = \mathcal{A}$.

11.3.9. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{A} := \{(a,0) :\ a \in \mathbb{R}\}$, akkor

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{A} = \left\{r + \mathcal{A} :\ r \in \mathbb{R}^2\right\} = \{(x,0) + \mathcal{A} :\ x \in \mathbb{R}\},$$

azaz $\mathbb{R}^2/\mathcal{A}$ nem más mint az $\mathbb{R}^2$-beli vízszintes egyenesek halmaza.

11.3.10. példa. Világos, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$, akkor

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{X} :\ \int_0^1 f = 0 \right\}$$

altér $\mathcal{X}$-ben. Ha

$$e : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad e(x) := 1,$$

akkor $([e])$ bázisa $\mathcal{X}/\mathcal{A}$-nak, hiszen

- $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0$ következtében $e \notin \mathcal{A}$, tehát $[e] \neq 0$, így $([e])$ lineárisan független.
- ha
  $$f \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lambda := \int_0^1 f,$$
  akkor
  $$\int_0^1 (f - \lambda e) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda = 0$$
  következtében
  $$f - \lambda e \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz} \qquad [f] = \lambda[e].$$

11.3.13. definíció. Adott $\mathcal{X}$ vektortér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetében

1. $\mathcal{X}$ dimenziója:
   $$\dim(\mathcal{X}) := \begin{cases} 0 & (\mathcal{X} = \{0\}), \\ n & (\text{van olyan } n \in \mathbb{N}, \text{ hogy ha } (x_i)_{i \in I} \text{ bázisa } \mathcal{X}\text{-nek, akkor } |I| = n), \\ \infty & (\mathcal{X}\text{-nek nincsen véges bázisa}); \end{cases}$$
2. $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ kodimenziója: $(\operatorname{codim}(\mathcal{A}) :=) \operatorname{codim}_{\mathcal{X}} \mathcal{A} := \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A})$.

Világos, hogy ha $\mathcal{A} = \mathcal{X}$, akkor $\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{0\}$, így $\text{codim}\,(\mathcal{X}) = 0$.

11.3.5. tétel. Ha $\mathcal{X}$ vektortérnek $\mathcal{A}$ altere, amelyben a B vektorrendszer bázis, akkor van olyan C bázis $\mathcal{X}$-ben, hogy B részrendszere C-nek és

$$\{x + \mathcal{A} : \; x \in C \backslash B\}$$

bázisa az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ faktortérnek.

Az iménti tétel következménye a

11.3.2. állítás. Ha $\mathcal{A}$ altér $\mathcal{X}$-ben, akkor

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}) + \text{codim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}).$$

11.3.2. megjegyzés.

1. Ha $\mathcal{A}$ az $\mathcal{X}$-nek olyan nem-triviális altere, hogy valamely $x \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{A}$ vektorra

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \text{span}\,(\{x\}),$$

akkor $\dim(\text{span}\,(\{x\})) = 1$ miatt $\text{codim}_{\mathcal{X}}\mathcal{A} = 1$.

2. Ha $f : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ lineáris, azaz bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ és $u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v),$$

akkor a

$$\ker(f) := \{u \in \mathcal{X} : \; f(u) = 0\}$$

halmaz altér $\mathcal{X}$-ben és

$$\text{codim}_{\mathcal{X}}(\ker(f)) \leq 1,$$

hiszen $f = 0$ esetén $\ker(f) = \mathcal{X}$, és könnyen belátható, hogy $f \neq 0$ esetén az

$$\mathcal{A} := \ker(f)$$

kielégíti a fenti feltételeket.

11.3.11. példa. A 11.3.2. példabeli vektortér esetében

$$\dim(T^n) = n,$$

és $T = \mathbb{K}$ esetén az

$$e_1 = (1{,}0, \ldots, 0), \; \ldots, \; e_n = (0, \ldots, 0{,}1)$$

vektorok bázist alkotnak (**kanonikus bázis**).

11.3.12. példa. A 11.3.7 példabeli vektortér esetében

$$\dim(\mathbb{K}^{m\times n}) = mn,$$

és az $E_{kl} \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

$$E_{11} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, E_{mn} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok bázist alkotnak.

11.3.13. példa. A $\mathbb{K}^{n\times n}$ (négyzetes) mátrixok vetorterében alteret alkotnak az

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) := \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ A^T = A\right\}$$

szimmetrikus mátrixok, ill. az

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) := \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ A^T = -A\right\}$$

antiszimmetrikus mátrixok, továbbá

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2},$$

hiszen

$$\left\{E_{kl} + E_{kl}^T\right\}_{1\le k\le l\le n}, \qquad \text{ill.} \qquad \left\{E_{kl} - E_{kl}^T\right\}_{1\le k\le l\le n}$$

bázis $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$-ben, ill. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$-ben.

11.3.14. példa. A négyzetes mátrixok $\mathbb{K}^{n\times n}$ vetorterében nem alkotnak alteret a

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) := \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A^* = A\right\}$$

hermitikus vagy **Hermite-féle mátrix**ok, ill. a

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) := \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ \det(A) \neq 0\right\}$$

invertálható mátrixok. Az utóbbiak pl. azért, mert a O zérusmátrixra $O \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ teljesül.

11.3.15. példa. Ha $H = T = \mathbb{K}$, akkor a 11.3.6. példabeli vektortér egy altere $\mathcal{P}$, ahol

$$f \in \mathcal{P} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}_0,\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}: \; f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (z \in \mathbb{K}),$$

továbbá $\dim(\mathcal{P}) = \infty$. $\mathcal{P}$-ben alteret alkotnak a legfeljebb n-edfokú polinomok:

$$\Pi_n := \{f \in \mathcal{P} : \; \mathrm{Grad}\,(f) \leq n\}, \qquad \text{és} \qquad \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n,$$

továbbá

$$\dim(\Pi_n) = n + 1,$$

de $n \in \mathbb{N}$ esetén nem alkotnak alteret $\mathcal{P}$-ben a pontosan n-edfokú polinomok, hiszen a 0 zéruspolinomra

$$0 \notin \{f \in \mathcal{P} : \; \mathrm{Grad}\,(f) = n\}$$

teljesül.

11.3.6. tétel. Ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ vektortér, és az $(x_i : \; i \in I)$ vektorendszer bázis $\mathcal{X}$-ben, továbbá $y_i \in \mathcal{Y}$ $(i \in I)$, akkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ homomorfizmus létezik, amelyre bármely $i \in I$ esetén $\varphi(x_i) = y_i$ teljesül.

11.3.14. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz

1. **véges**, ha $\mathcal{H} = \emptyset$, vagy alkalmas $n \in \mathbb{N}$ és $f : \mathcal{H} \to \{1, \ldots, n\}$ esetén f injektív;
2. **végtelen**, ha nem véges;
3. **megszámlálható**, ha végtelen és alkalmas $f : \mathcal{H} \to \mathbb{N}$ esetén f injektív;
4. **legfeljebb megszámlálható**, ha véges vagy megszámlálható.

Halmazok megszámlálhatóságával kapcsolatban alapvető fontosságúak a

11.3.0. állítások.

1. Megszámlálható halmazok legfeljebb megszámlálható egyesítése megszámlálható hamaz.
2. Ha $\mathcal{X}$ megszámlálható halmaz, $\mathcal{Y}$ pedig végtelen halmaz, továbbá $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ szürjektív leképezés, akkor $\mathcal{Y}$ megszámlálható.
3. $\mathbb{Q}$ megszámlálható és bármely $I \subset \mathbb{R}$ nem egy pontból álló intervallum nem megszámlálható halmaz.

11.4. Mérték és integrál

11.4.1. definíció. Adott $\mathcal{X}$ halmaz és $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ esetén azt mondjuk, hogy Ω ($\mathcal{X}$-beli) **szigma-algebra** (σ**-algebra**), ha teljesülnek a következő feltételek:

$(\sigma A_1): \ \mathcal{X} \in \Omega;$

$(\sigma A_2): \ A \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \Omega;$

$(\sigma A_3): \ A_n \in \Omega \ \ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Omega.$

Ω elemeit **mérhető halmaz**oknak, az $(\mathcal{X}, \Omega)$ rendezett párt **mérhető tér**nek nevezzük.

Az $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ halmazrendszer tehát pontosan akkor ($\mathcal{X}$-beli) szigma-algebra, ha $\mathcal{X} \in \Omega$, továbbá komplementerzárt és zárt a szigma-unióra. A definícióból (és elemi halmazelméleti azonosságokból) rögtön adódik, hogy $\emptyset \in \Omega$, ui. $\emptyset = X^c$, továbbá a

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}), \qquad \{\emptyset, \mathcal{X}, A, A^c\} \quad (\emptyset \neq A \subset \mathcal{X}), \qquad \{\emptyset, \mathcal{X}\}$$

halmazok ($\mathcal{X}$-beli) σ-algebrák (ez utóbbit szokás **triviális** σ**-algebrának** nevezni). Sőt, bármely $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér esetén, ha $A \in \Omega$, továbbá

$$\Omega_A := \{A \cap B \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \ B \in \Omega\},$$

akkor (A, Ω_A) is mérhető tér. Az is könnyen belátható, hogy σ-algebrák metszete σ-algebra, ezért van értelme „legszűkebb” σ-algebráról beszélni. Ha ui. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$,

$$\Sigma := \{\Omega \subset \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \ \Omega \ \sigma\text{-algebra}, \ \mathcal{M} \subset \Omega\},$$

akkor a

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\Omega\in\Sigma} \Omega$$

halmazrendszer a legszűkebb $\mathcal{M}$-et tartalmazó σ-algebra, amelyet szokás az $\mathcal{M}$ **halmazrendszer által generált** σ**-algebrának** nevezni. Világos, hogy ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ szigma-algebra, akkor $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

11.4.1. példa. Ha $\mathcal{X} := \{1,2,3,4,5,6,7\}$ és $\mathcal{M} := \{\{1,2\}, \{6\}\}$, akkor

$$\sigma(\mathcal{M}) = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{6\}, \{1,2,3,4,5,7\}, \{1,2,6\}, \{3,4,5,7\}, \{3,4,5,6,7\}\}.$$

11.4.2. definíció. Ha $d \in \mathbb{N}$ és $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, továbbá valamely

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad b := (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$$

esetén

$$[a, b) := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \; a_1 \leq x < b_1, \ldots, a_d \leq x < b_d\right\},$$

és

$$\mathbb{I}_d := \left\{A \subset \mathcal{X} : \; A = [a, b), \; a, b \in \mathbb{R}^d, \; a \leq b\right\},$$

ill.

$$\mathcal{I}_d := (\mathbb{I}_d)_\cup = \left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : \;\; n \in \mathbb{N}, \; A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{I}_d\right\},$$

akkor az $\mathbb{R}^d$-beli

$$\sigma\left(\mathcal{I}_d\right) = \sigma\left(\mathbb{I}_d\right) =: \Omega_d$$

halmazrendszer elemeit **Borel-halmaz**oknak vagy **Borel-mérhető halmaz**oknak nevezzük.

Az elnevezés oka a

11.4.1. állítás. $\Omega_d = \sigma\left(\mathcal{N}\right) = \sigma\left(\mathcal{Z}\right) /= \sigma\left(\mathcal{K}\right)/$, ahol

$\mathcal{N} := \left\{A \subset \mathbb{R}^d : \; A \text{ nyílt}\right\}, \quad \mathcal{Z} := \left\{A \subset \mathbb{R}^d : \; A \text{ zárt}\right\}, \quad \mathcal{K} := \left\{A \subset \mathbb{R}^d : \; A \text{ kompakt}\right\}.$

Megmutatható, hogy Ω_d kontinuum számosságú, és hogy minden $d \in \mathbb{N}$ esetén van $\mathbb{R}^d$-ben nem Borel-mérhető halmaz: $\Omega_d \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (vö. [4], 40. old.). A $d = 1$ esetben $\overline{\Omega}_1$ jelöli a **kibővített értelemben Borel-mérhető halmaz**ok σ-algebráját, azaz

$$A \in \overline{\Omega}_1 \quad :\Longleftrightarrow \quad A = B \cup C, \; B \in \Omega_1, \; C \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}\}.$$

A továbbiakban **Borel-halmaz**on kibővített értelemben Borel-mérhető halmazt fogunk érteni.

11.4.3. definíció. Adott $\mathcal{X}$ halmaz és $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ ($\mathcal{X}$-beli) **(halmaz)gyűrű**, ha teljesülnek a következő feltételek:

$(Gy_1): \; \mathcal{R} \neq \emptyset;$

$(Gy_2): \; A, B \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A \backslash B \in \mathcal{R};$

$(Gy_3): \; A, B \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}.$

A definícióból (és elemi halmazelméleti azonosságokból) rögtön adódik, hogy $\emptyset \in \mathcal{R}$, ui. tetszőleges $A \in \mathcal{R}$ esetén $\emptyset = A \backslash A \in \mathcal{R}$, továbbá minden szigma-algebra egyúttal gyűrű is. A 11.4.3. definícióbeli elnevezés oka az, hogy az $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ algebrai struktúra gyűrű.

11.4.2. példa.

1. Az $\mathcal{R} := \{A \subset \mathcal{X} : \; A \text{ véges}\}$ gyűrű $\mathcal{X}$-ben.
2. A 11.4.2. definícióbeli $\mathcal{I}_d$ halmaz gyűrű $\mathbb{R}^d$-ben.
3. Az $\mathbb{R}^d$-beli Jordan-mérhető halmazok szintén gyűrűt alkotnak ($\mathbb{R}^d$-ben).

Ha $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^d$ tégla, azaz alkalmas $a, b \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{T} \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d],$$

akkor $\mathbb{T}$ **térfogat**ának, ill. **Jordan-mérték**ének nevezzük a

$$\lambda_d(\mathbb{T}) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) \geq 0$$

(valós) számot. Ha pedig $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}^d$, akkor azt mondjuk, hogy H **Jordan-mérhető**, amennyiben H korlátos, és valamely $H \subset \mathbb{T} := [a, b] \subset \mathbb{R}^d$ kompakt tégla, ill.

$$f^H(x) := \begin{cases} 1 & (x \in H), \\ 0 & (x \in \mathbb{T} \backslash H) \end{cases}$$

függvényre $f^H \in \mathfrak{R}(\mathbb{T})$. A Jordan-mérhető $H \subset \mathbb{R}^d$ halmaz esetén a

$$\lambda_d(H) := \int_{\mathbb{T}} f^H$$

(valós) számot a H halmaz **Jordan-mérték**ének nevezzük.

11.4.4. definíció. Ha $\mathcal{R}$ (halmaz)gyűrű, és a $\nu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ függvényre

$(\nu_1) : \; \nu(\emptyset) = 0;$

$(\nu_2) : \; A_n \in \mathcal{R} : \quad A_m \cap A_n = \emptyset \;\; (m, n \in \mathbb{N} : \; m \neq n)$: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ esetén

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

teljesül, akkor ν-t **kvázimérték**nek nevezzük.

11.4.3. példa.

1. A Jordan-mérték kvázimérték.
2. Ha $\mathcal{R}$ ($\mathcal{X}$-beli) gyűrű, $\omega \in \mathcal{X}$, $\{\omega\} \in \mathcal{R}$ és

$$\nu_\omega : \mathcal{R} \to [0, +\infty], \qquad \nu_\omega(A) := \begin{cases} 1 & (\omega \in A), \\ \\ 0 & (\omega \notin A), \end{cases}$$

akkor ν_ω kvázimérték (az ω **pontra koncentrált Dirac-féle kvázimérték**).

11.4.5. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, és a $\mu : \Omega \to [0, +\infty]$ függvényre

$(\mu_1): \ \mu(\emptyset) = 0;$

$(\mu_2): \ A_n \in \Omega : \quad A_m \cap A_n = \emptyset \ \ (m, n \in \mathbb{N} : \ m \neq n)$ esetén

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

teljesül, akkor μ-t **mérték**nek, az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ rendezett hármast pedig **mértéktér**nek nevezzük.

Világos, hogy minden mérték egyúttal kvázimérték is. Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér és adott egy, az $\mathcal{X}$ halmaz elemeire vonatkozó T tulajdonság, azaz valamely

$$T : \mathcal{X} \to \{i, h\}$$

logikai függvény, ahol bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén $T(x) = i$ azt jelenti, hogy T teljesül x-re, $T(x) = h$ pedig azt, hogy T nem teljesül x-re,[1] akkor azt mondjuk, hogy a T tulajdonság μ-majdnem mindenütt[2] igaz, ha van olyan

$$A \in \Omega, \qquad \mu(A) = 0$$

(ún. **nullmérétkű**) halmaz, hogy bármely $x \in A^c$ esetén T teljesül x-re.

[1] Például az $f, g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvények esetében, ha $x \in \mathcal{X}$, akkor $T(x) = i$ jelentse azt, hogy $f(x) = g(x)$, $T(x) = h$ pedig azt, hogy $f(x) \neq g(x)$.

[2] Röviden: T μ-m.m.

11.4.4. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, akkor a

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & (A = \emptyset), \\ \\ +\infty & (A \neq \emptyset) \end{cases} \qquad (A \in \Omega)$$

   leképezés mérték.

2. Ha $\mathcal{X}$ tetszőleges halmaz, akkor a

$$\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty], \qquad \mu(A) := \begin{cases} |A| & (A \text{ véges}), \\ \\ +\infty & (A \text{ nem véges}) \end{cases}$$

   leképezés mérték (**számláló mérték**).

3. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{N}, \qquad \Omega := \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

   és

$$p_n \in [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   akkor a

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} p_n \qquad (A \in \Omega)$$

   leképezés mérték.

4. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}, \qquad \Omega := \mathcal{P}(\mathcal{X}),$$

   akkor a

$$\mu(A) := \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \qquad (A \in \Omega)$$

   leképezés mérték (**Gauß-mérték**).

5. A Jordan-mérték a fenti értelemben nem mérték, hiszen a Jordan-mérhető halmazok rendszere nem szigma-algebra, ui. $\mathbb{R}^d$ nem korlátos.

11.4.1. tétel. Ha $\nu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ kvázimérték, akkor tetszőleges $A, A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazokra, ha

1. valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_k \cap A_l = \emptyset$ $(k, l \in \{1, \ldots, n\} : \; k \neq l)$, úgy
$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k);$$
2. valamely $k, l \in \mathbb{N}$ esetén $A_k \subset A_l$, úgy $\nu(A_k) \leq \nu(A_l)$;
3. $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, úgy $\nu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

11.4.2. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, akkor

1. tetszőleges $A, B \in \Omega$: $A \subset B$ esetén
$$\mu(A) \leq \mu(B), \qquad \text{ill.} \qquad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A),$$
sőt ha $\mu(A) < +\infty$ is igaz, akkor
$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A);$$
2. az
$$A_n \in \Omega : \qquad A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$
halmazsorozatra
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim(\mu(A_n)) = \sup\left\{\mu(A_n) \in [0, +\infty] : \; n \in \mathbb{N}\right\};$$
3. az
$$A_n \in \Omega : \qquad A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \mu(A_1) < +\infty$$
halmazsorozatra
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim(\mu(A_n)) = \inf\left\{\mu(A_n) \in [0, +\infty] : \; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

11.4.6. definíció. Adott $\mathcal{X}$ halmaz esetén azt mondjuk, hogy a

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty]$$

függvény **külső mérték**, ha

$(\mu^*{}_1)$: $\mu^*(\emptyset) = 0$;

$(\mu^*{}_2)$: tetszőleges $A \subset B \subset \mathcal{X}$ esetén

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B);$$

$(\mu^*{}_3)$: az $A_n \subset \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$: halmazsorozatra

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

11.4.5. példa.

1. Ha valamely $\mathcal{X}$ halmaz esetén

$$\nu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty]$$

kváziemérték, akkor (vö. 11.4.1. tétel) ν külső mérték.

2. Ha $\mathcal{R}$ gyűrű $\mathcal{X}$-ben,

$$\nu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$$

kvázimérték, továbbá

$$\inf \emptyset := +\infty,$$

akkor a

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \in [0, +\infty] : \ A_n \in \mathcal{R}\,(n \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}))$$

függvény olyan külső mérték, amelyre bármely $A \in \mathcal{R}$ esetén

$$\mu^*(A) = \nu(A)$$

teljesül.

11.4.7. definíció. tetszőleges $\mathcal{X}$ halmaz, ill.

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty]$$

külső mérték esetén azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ halmaz μ^*-mérhető, ha bármely $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ halmaz esetén

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

11.4.6. példa. Világos, hogy $\emptyset$, ill. $\mathcal{X}$ μ^*-mérhető, sőt az is könnyen belátható, hogy az

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \ \mu^*(A) = 0\}$$

halmazrendszer elemei is μ^*-mérhetőek.

11.4.3. tétel. (**Carathéodory**) Ha $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty]$ külső mérték, akkor az

$$\Omega_{\mu^*} := \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \ A \ \mu^*\text{-mérhető}\}$$

halmazrendszer ($\mathcal{X}$-beli) σ-agebra és a $\mu := \mu^*|_{\Omega_{\mu^*}}$ leképezés mérték.

11.4.8. definíció. Ha $\mathcal{J}_d$ jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli Jordan-mérhető halmazok gyűrűjét, továbbá

$$\lambda_d : \mathcal{J}_d \to [0, +\infty)$$

Jordan-mérték, akkor a

$$\lambda_d^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(A_n) \in [0, +\infty] : \ A_n \in \mathcal{J}_d \, (n \in \mathbb{N}), \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$$

leképezést **Lebesgue-féle külső mérték**nek, az

$$\mathcal{L}_d := \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \ A \ \lambda_d^*\text{-mérhető} \right\}$$

σ-algebrát pedig **Lebesgue-féle σ-algebrának**, a

$$\mu_d : \mathcal{L}_d \to [0, +\infty], \qquad \mu_d(A) := \lambda_d^*(A)$$

mértéket **Lebesgue-mérték**nek, a $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \mu_d)$ hámast pedig **Lebesgue-féle mértéktér**nek nevezzük.

11.4.7. példa.

1. Világos, hogy minden $H \subset \mathbb{R}^d$ Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mérhető és $\lambda_d(H) = \mu_d(H)$. Speciálisan, ha $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^d$ tégla, akkor

$$\mu_d(\mathbb{T}) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k).$$

A $d = 1$ esetben tehát

$$\mu_1(\mathbb{T}) = b - a \qquad (\mathbb{T} \in \{[a,b], [a,b), (a,b], (a,b)\}).$$

2. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor (vö. 11.4.2. tétel)

$$\mu_1((-\infty,b]) = \mu_1((-\infty,b)) = \mu_1([a,+\infty)) = \mu_1((a,+\infty)) = \mu_1((-\infty,+\infty)) = +\infty,$$

hiszen pl. bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu_1((-\infty,b]) = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n,b]\right) = \lim(\mu_1((b-n,b])) = \lim(n) = +\infty.$$

3. A nem Jordan-mérhető

$$H := [0,1] \cap \mathbb{Q}, \qquad \text{ill.} \qquad H := [0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

halmaz Lebesgue-mérhető, hiszen $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ megszámlálható, így ha $a : \mathbb{N} \to [0,1]\cap\mathbb{Q}$ bijektív (sorozat), akkor

$$\mu_1(\{a_n\}) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill. a mérték (μ_2)-tulajdonsága következtében a H halmazra

$$\mu_1(H) = \begin{cases} 0 & (H = [0,1] \cap \mathbb{Q}), \\ & \\ 1 & (H = [0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) \end{cases}$$

adódik (vö. 11.4.2. tétel).

4. Ha $\mathbb{D}$ jelöli a **triadikus Cantor-halmaz**t (**Smith-Volterra-Cantor-halmaz**t), akkor $\mathbb{D}$ olyan kontinuum számosságú halmaz, amelyre $\mu_1(\mathbb{D}) = 0$.

5. Az Ω_d Borel-halmazok szigma-algebrájára $\Omega_d \subsetneqq \mathcal{L}_d$. A $\beta_d := \mu_d|_{\Omega_d}$ leképezést **Lebesgue-Borel-mérték**nek vagy röviden **Borel-mérték**nek nevezzük.

11.4.9. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \Omega)$, ill. $(\mathcal{Y}, \Theta)$ mérhető tér esetén az $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ függvényt **mérhető**nek, ill. (Ω, Θ)**-mérhető**nek nevezzük, ha bármely $B \in \Theta$ esetén $f^{-1}[B] \in \Omega$ teljesül. Ha speciálisan $\mathcal{Y} = \overline{\mathbb{R}}$, ill. $\Theta = \overline{\Omega_1}$, akkor ($\Omega$-)mérhetőségről beszélünk. Az $(\Omega_d, \overline{\Omega_1})$-mérhető **függvény**eket **Borel-mérhető**nek, az $(\mathcal{L}_d, \overline{\Omega_1})$-mérhető **függvény**eket pedig **Lebesgue-mérhető**nek nevezzük. Ha $A \in \Omega$, akkor azt mondjuk, hogy az $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény (Ω_A-)mérhető, ha az

$$f^A(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in A), \\ 0 & (x \in \mathcal{X} \setminus A) \end{cases}$$

függvény Ω-mérhető.

11.4.4. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér és $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, úgy f pontosan akkor (Ω-)mérhető, ha

$$\{f * \alpha\} := \{x \in \mathcal{X} : \; f(x) * \alpha\} \in \Omega \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

ahol $* \in \{<, >, \leq, \geq\}$.

11.4.8. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $A \subset \mathcal{X}$, akkor a $\chi_A : \mathcal{X} \to \{0,1\}$ karakterisztikus függvény pontosan akkor mérhető, ha $A \in \Omega$, hiszen bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\chi_A \geq \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & (\alpha > 1), \\ A & (\alpha \in (0,1]), \\ \mathcal{X} & (\alpha \leq 0). \end{cases}$$

2. Ha $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, akkor f Borel-mérhető, hiszen bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\{f \geq \alpha\}$ zárt halmaz. Így, ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, akkor minden mérhető $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f \circ g$ is mérhető, hiszen

$$\{f \circ g \geq \alpha\} = (f \circ g)^{-1} [[\alpha, +\infty)] = g^{-1} \left[f^{-1} [[\alpha, +\infty)]\right].$$

3. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ pedig mérhető függvény, akkor tetszőleges $p \in (0, +\infty)$ esetén $|f|^p$ is mérhető, hiszen

$$\{|f| \geq \alpha\} = \{f \leq -\alpha\} \cup \{f \geq \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

így $|f|$ is mérhető és minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Omega \ni \{|f|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} \mathcal{X} & (\alpha \leq 0), \\ \{|f| \geq \alpha^{1/p}\} & (\alpha > 0). \end{cases}$$

11.4.9. példa.

1. Ha $(\mathcal{X},\Omega)$ mérhető tér, $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ és $|f|$ mérhető, akkor f nem feltétlenül mérhető, hiszen ha $\mathcal{X}:=\{0,1,2\}$, akkor az
$$\Omega:=\{\emptyset,\mathcal{X},\{0\},\{1,2\}\}$$
halmaz σ-algebra $\mathcal{X}$-ben, továbbá az
$$f(0):=f(1):=1,\qquad f(2):=-1$$
függvény esetén $|f|$ triviálisan mérhető, de
$$\{f=-1\}=\{2\}\notin\Omega$$
miatt f nem mérhető.
2. Ha $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$ monoton függvény, akkor f Borel-mérhető, ui. pl. monoton növekedő esetben bármely $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén az $\{f\leq\alpha\}$ nívóhalmaz vagy üres, vagy olyan intervallum, amelynek baloldali határpontja $\inf(I)$, jobboldali határpontja pedig
$$\sup\{x\in I:\ f(x)\leq\alpha\}.$$
3. Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton függvény, akkor f Lebesgue-mérhető, ui. $\mathbb{R}$ intervallum és
$$\Omega_1\subset\mathcal{L}_1.$$

11.4.10. definíció. Valamely $(\mathcal{X},\Omega)$ mérhető tér, és

1. $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy f **lépcsős függvény** ($f\in L_0$), ha f mérhető és $\mathcal{R}_f$ véges;
2. $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy $f\in L_0^+$, ha $f\in L_0$: $f\geq 0$;
3. $f:\mathcal{X}\to[0,+\infty]$ esetén azt mondjuk, hogy $f\in L^+$, ha van olyan
$$f_n\in L_0^+\qquad(n\in\mathbb{N})$$
sorozat hogy
$$f_n\nearrow f\qquad(n\to\infty)$$
teljesül.

11.4.10. példa. A

$$\Delta : [0,1] \to \{0,1\}, \qquad \Delta(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}), \\ \\ 0 & (x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) \end{cases}$$

Dirichlet-függvény lépcsősfüggvény, hiszen – mint a $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ halmaz karakterisztikus függvénye – mérhető és értékkészlete véges.

11.4.5. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, akkor valamely

1. $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor mérhető, ha van olyan

   $$f_n \in L_0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   amelyre
   $$\lim(f_n) = f;$$

2. $f : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ függvény pontosan akkor mérhető, ha $f \in L^+$;
3. korlátos $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor mérhető, ha van olyan

   $$f_n \in L_0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   sorozat amelyre
   $$f_n \rightrightarrows f \qquad (n \to \infty).$$

Könnyen belátható, hogy az $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényre

$$f \in L_0^+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}}.$$

11.4.11. definíció. Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, és

1. az $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in L_0^+/ =: L_0^+(\mu)/$, akkor

   $$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\}) \in [0, +\infty].$$

2. az $f : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ függvényre $f \in L^+/ =: L^+(\mu)/$, akkor

   $$\int f \, \mathrm{d}\mu := \lim \left(\int f_n \, \mathrm{d}\mu \right),$$

   ahol
   $$f_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad f_n \nearrow f \quad (n \to \infty).$$

11.4.2. állítás. Könnyen belátható, hogy ha az

$$f : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$$

függvényre $f \in L^+$, akkor

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \quad (\mu\text{-m.m.})$$

továbbá valamely

$$f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvény pontosan akkor mérhető, ha

$$f^+ := \max\{f,0\} = \frac{|f| + f}{2} \in L^+ \qquad \text{és} \qquad f^- := -\min\{f,0\} = \frac{|f| - f}{2} \in L^+$$

11.4.11. példa. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $\omega \in \mathcal{X}$: $\{\omega\} \in \Omega$, ill. μ_ω az ω-pontra koncentrált Dirac-mérték és $f \in L^+$, akkor

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_\omega = f(\omega),$$

- ha $f \in L_0^+$, akkor egyetlen olyan $\alpha \in \mathcal{R}_f$ van, amelyre

  $$\omega \in \{f = \alpha\}.$$

  Mivel μ_ω definíciója miatt

  $$\mu_\omega(\{f = \alpha\}) = 1, \qquad \text{ha} \qquad \alpha = f(\omega),$$

  különben

  $$\mu_\omega(\{f = \alpha\}) = 0,$$

  így

  $$\int f \, \mathrm{d}\mu_\omega = \sum_{\alpha \in R_f} \alpha \cdot \mu_\omega(\{f = \alpha\}) = f(\omega);$$

- ha pedig $f \in L^+$, akkor van olyan

  $$f_n \in L_0^+ \quad (n \in \mathbb{N}) : \qquad (f_n) \nearrow f \quad (n \to \infty),$$

  így

  $$\int f \, \mathrm{d}\mu_\omega = \lim \left(\int f_n \, \mathrm{d}\mu_\omega \right) = \lim (f_n(\omega)) = f(\omega).$$

11.4.6. tétel. **(Levi)** Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, és

$$f_n \in L^+ \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

úgy

1. ha
$$f_n \nearrow f \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim_n (f_n) = \sup_n (f_n) \in L^+$$
és
$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$
2. nyilvánvalóan
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^+$$
és
$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

11.4.7. tétel. **(Fatou-lemma)** Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, és

$$f_n \in L^+ \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\int \liminf_n (f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \left(\int f_n \, \mathrm{d}\mu \right),$$

ill. ha $F \in L^+$ olyan függvény, amelyre

$$\int F \, d\mu < +\infty \qquad \text{és} \qquad f_n \leq F \quad \mu \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\limsup_n \left(\int f_n \, d\mu \right) \leq \int \limsup_n (f_n) \, d\mu.$$

11.4.12. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, és $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény esetén azt mondjuk, hogy f /a μ méréték szerint/ **integrálható** – jelben $f \in L$ / $f \in L(\mu)$/ –, ha

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \qquad \Big/ \Longleftrightarrow \qquad \int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int f^- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \Big/$$

és $f \in L$ esetén az

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

(valós) számot f **integráljának** nevezzük.

Ha $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, akkor f-et integrálhatónak nevezzük, amennyiben $\Re(f), \Im(f) \in L$, továbbá

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int \Re(f) \,\mathrm{d}\mu + \imath \int \Im(f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $A \in \Omega$ és $f \in L$, akkor az

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int f \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu \tag{11.4.1}$$

számot az f függvény A **halmazon vett integrál**jának nevezzük. Ha $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \mu_d)$ a Lebesgue-féle mértéktér, akkor valamely integrálható f függvényt **Lebesgue-integrálható**nak, ill. a (11.4.1)-beli számot pedig az f (A halmazon vett) **Lebesgue-integrál**jának nevezzük. Ha az integrációs változót is ki akarjuk írni, akkor (11.4.1) helyett gyakran azt írjuk, hogy

$$\int_A f(x)\mu(\,\mathrm{d}x), \qquad \int_A f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{vagy} \qquad \int_A f(x) \,\mathrm{d}x, \quad \text{ill.} \quad \int_A f(x) \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_d)$$

(ez utóbbi kettőt persze csak a Lebesgue-integrál esetében).

11.4.12. példa.

1. Az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mu_1)$ Lebesgue-féle mértéktér, ill. tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ esetén
   (a) $\chi_{[a,b]}$ integrálható és
   $$\int \chi_{[a,b]} \,\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1([a,b]) = b - a.$$
   (b) $\chi_{[a,+\infty]}$ nem integrálható, ui.
   $$\int \chi_{[a,+\infty]} \,\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1([a,+\infty]) = +\infty.$$
2. Ha μ véges mérték, akkor bármely korlátos függvény integrálható.

11.4.8. tétel. Ha $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \mu_d)$ a Lebesgue-féle mértéktér, $A \subset \mathbb{R}^d$ Jordan-mértehtő halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, úgy f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha μ_d-m.m. $x \in A$ estén $f \in \mathfrak{C}[x]$.

11.4.9. tétel. Ha $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \mu_d)$ a Lebesgue-féle mértéktér, és valamely Jordan-mérhető $A \subset \mathbb{R}^d$ halmazon értelmezett $f : A \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, akkor f Lebesgue-integrálható, és f Riemann-integrálja megegyezik

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu_d$$

Lebesgue-integráljával.

11.4.10. tétel. (Lebesgue) Ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, $A \in \Omega$ és $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ mérhető függvényekből álló olyan sorozat, hogy

- μ-m.m. $x \in A$ esetén az $(f_n(x))$ sorozat konvergens,
- valamely $f : A \to [0, +\infty]$ integrálható függvény esetén

$$|f_n| \leq f \quad \mu\text{-m.m.} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ eseetén $f_n \in L$, továbbá $\lim(f_n) \in L$ és

$$\int_A \lim(f_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim\left(\int_A f_n \,\mathrm{d}\mu\right).$$

11.4.13. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, $p \in (0, +\infty)$, ill. $A \in \Omega$ (mérhető) halmaz esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(A) \quad &:= \quad \{f : A \to \mathbb{R} :\ f \text{ mérhető és } |f|^p \in L\} = \\ \\ &= \quad \{f : A \to \mathbb{R} :\ f \text{ mérhető és } \|f\|_p < +\infty\},\end{aligned}$$

ill.

$$\mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty(A) := \{f : A \to \mathbb{R} :\ f \text{ mérhető és } \|f\|_\infty < +\infty\},$$

ahol

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p} := \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p},$$

ill.

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty := \|f\|_{L^\infty} \quad &:= \quad \inf\{\alpha \in (0, +\infty) :\ |f| \leq \alpha \ \mu\text{-m.m.}\} = \\ \\ &= \quad \operatorname{ess\,sup}_A |f| := \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in A \setminus N} |f(x)|.\end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy ha $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, $A \in \Omega$ és $p \in [1, +\infty]$, akkor

- $\mathcal{L}^p$ lineáris tér $\mathbb{R}$-re vonatkozóan, ha a skalárral való szorzást és az összeadást a szokásos módon értelmezzük,
- az
$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p : \ \|f\|_p = 0\}$$
halmaz altér $\mathcal{L}^p$-ben,
- az
$$f \sim g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f = g \qquad \mu\text{-m.m.} \quad (f, g \in \mathcal{L}^p)$$
reláció ekvivalencia.

A továbbiakban az $\mathcal{L}^p$ lineáris tér $\mathcal{N}$ altér szerinti faktorterére az L^p jelölést fogjuk használni:
$$L^p := \mathcal{L}^p/\mathcal{N} = \{[f] = f + \mathcal{N} : \ f \in \mathcal{L}^p\},$$
ill.ha valamely $f \in \mathcal{L}^p$ függvény esetén $g \in [f]$, akkor $\int g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$ következtében bármely $g \in [f]$ esetén
$$\int [f] \, \mathrm{d}\mu := \int g \, \mathrm{d}\mu,$$
Az $[f] \in L^p$ ekvivalenciaosztály, ill. $\int [f] \, \mathrm{d}\mu$ helyett egyszerűen csak f-et, ill. $\int f \, \mathrm{d}\mu$-t írunk.
Ha
$$\mathcal{X} := \mathbb{R}, \qquad \Omega := \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \mu \quad \text{a számláló mérték}, \qquad A \subset \mathbb{R},$$
továbbá

1. valamely $d \in \mathbb{N}$ esetén $A = \{1, \ldots, d\}$, akkor tetszőleges
$$f : A \to \mathbb{R}$$
függvény mérhető, és bármely $p \in [1, +\infty)$ esetén $|f|^p$ integrálható, minden $p \in [1, +\infty]$ esetén
$$L^p = \{f : A \to \mathbb{R}\} \qquad \text{és} \qquad f = (f(1), \ldots, f(d))$$
következtében L^p azonosítható $\mathbb{R}^d$-vel, sőt
$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{d} |f(k)|^p\right)^{1/p} \qquad (f \in L^p \cong \mathbb{R}^d),$$
ill.
$$\|f\|_\infty = \max\{|f(k)| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} \qquad (f \in L^\infty \cong \mathbb{R}^d).$$

2. $A=\mathbb{N}$, akkor tetszőleges
$$f:A\to\mathbb{R}$$
függvény mérhető, és bármely $p\in[1,+\infty)$ esetén
$$L^p=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|^p\right)^{1/p}<+\infty\right\}=:l_p,$$
ill.
$$L^\infty=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\ \sup\{|f(n)|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\}<+\infty\right\}=:l_\infty.$$

11.4.11. tétel. Ha $(\mathcal{X},\Omega,\mu)$ mértéktér, $A\in\Omega$, és

1. μ **véges**, azaz $\mu(\mathcal{X})<+\infty$, akkor bármely $1\leq p<q<+\infty$ esetén $L^\infty\subsetneqq L^q\subsetneqq L^p$, és
$$\|f\|_p\leq(\mu(\mathcal{X}))^{1/p-q/q}\cdot\|f\|_q\qquad(f\in L^q).$$
2. alkalmas $q\in(0,+\infty)$ esetén $f\in L^q$, akkor
$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty;$$
3. $p\in[1,+\infty]$, akkor bármely $f,g\in L^p$ függvényre
$$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p\qquad(\textbf{Minkowski-egyenlőtlenség});$$
4. $p,q\in[1,+\infty]$: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, akkor bármely $f\in L^p$ és $g\in L^q$ függvényre $f\cdot g\in L^1$ és
$$\|f\cdot g\|_1\leq\|f\|_p\cdot\|g\|_q\qquad(\textbf{Hölder-egyenlőtlenség});$$
5. $p\in[1,+\infty)$, ill. $f_n\in L^p$ $(n\in\mathbb{N})$ olyan függvénysorozat, amelyre
   - μ-m.m. $x\in A$ esetén $\lim(f_n(x))\in\mathbb{R}$,
   - alkalmas $g:A\to\mathbb{R}$ mérhető függvényre
$$|f_n|\leq g\quad(n\in\mathbb{N}),\qquad\int_A g^p\,\mathrm{d}\mu<+\infty,$$
   akkor van olyan mérhető $f:A\to\mathbb{R}$ függvény, hogy
$$f=\lim(f_n)\qquad\mu\text{-m.m.}$$
   és erre az f-re
$$f\in L^p,\qquad\text{ill.}\qquad\lim\left(\|f-f_n\|_p\right)=0\qquad(\textbf{Lebesgue-tétel}).$$

11.4.1. feladat. Igazoljuk, hogy ha $p \in (0,1)$, továbbá $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér,

$$f, g \in L^p: \qquad f, g \geq 0,$$

akkor fennáll az

$$\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$$

egyenlőtlenség!

Útm. Vö. 11.2.2. feladat. ■

11.4.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$p, q \in \mathbb{R}: \qquad p > 1, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

továbbá $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, $f, g \in L^p$, akkor

1. $p \geq 2$ esetén
$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$
2. $p < 2$ esetén
$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

teljesül!

Útm.

1. A 11.2.4/1. feladat következményeként azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &= \int \left(|f+g|^p + |f-g|^p\right) \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq 2^{p-1} \int (|f|^p + |g|^p) \, \mathrm{d}\mu = \\ &= 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).\end{aligned}$$
2. Mivel
$$p/q = p - 1 \in (0,1) \qquad \text{és} \qquad f \pm g \in L^p$$
következtében
$$|f+g|^q, |f-g|^q \in L^{p/q},$$
ezért a 11.2.4/2/(c)., ill. a 11.4.1. feladat következményeként azt kapjuk, hogy
$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q = \int (|f+g|^p)^{q/p} \, \mathrm{d}\mu + \int (|f-g|^p)^{q/p} \, \mathrm{d}\mu =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left((|f+g|^q)^{p/q}\right)^{q/p} \mathrm{d}\mu + \int \left((|f-g|^q)^{p/q}\right)^{q/p} \mathrm{d}\mu \le \\
&\le \left(\int (|f+g|^q + |f-g|^q)^{q/p} \,\mathrm{d}\mu\right)^{q/p} \le \\
&\le 2\left(\int \left((|f|^p + |g|^p)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p/q} \mathrm{d}\mu\right)^{q/p} = \\
&= 2\left(\int (|f|^p + |g|^p)\,\mathrm{d}\mu\right)^{q/p} = \\
&= 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

11.4.1. állítás. Ha $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, $p \in (0, +\infty)$,

$$\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$$

olyan mértékek, amelyekre

$$\nu(A) \le \mu(A) \qquad (A \in \Omega)$$

teljesül, úgy valamely mérhető $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\nu \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int |f|^p \,\mathrm{d}\nu \le \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right).$$

Biz. Legyen

$$g_n \in L_0^+(\mu) \quad (n \in \mathbb{N})$$

olyan függvénysorozat, amelyre

$$g_n \nearrow f \qquad (n \to \infty).$$

Ekkor

$$\int g_n \,\mathrm{d}\nu = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \nu(\{f = y\}) \le \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \mu(\{f = y\}) = \int g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Így

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\nu = \lim \left(\int g_n \,\mathrm{d}\nu\right) \le \lim \left(\int g_n \,\mathrm{d}\mu\right) = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu. \quad \blacksquare$$

11.4.1. tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (nem egy pontból álló) intervallum, (I, Ω, μ) Lebesgue-stuktúra, azaz

$$\Omega := \{A \subset I : \ A \in \Omega_1\} \qquad \mu := \mu_1 | \Omega,$$

továbbá $f : I \to \mathbb{R}$, és minden $J \subset I$ kompakt intervallum esetén $f \in \mathfrak{R}(J)$, akkor igaz az

$$f \in L^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_I |f| \in \mathbb{R} \text{ (improprius Riemann-integrál konvergens)}$$

ekvivalencia, azaz f pontosan akkor Lebesgue-integrálható, ha $|f|$-nek az I-n konvergens az improprius Riemann-integrálja.

Biz. Legyen

$$J_n \subset J_{n+1} \subset I \qquad (n \in \mathbb{N})$$

olyan kompakt intervallumok sorozata, amelyre

$$\lim\left(\max(J_n)\right) = \sup(I) \qquad \text{és} \qquad \lim\left(\min(J_n)\right) = \inf(I)$$

teljesül. Ekkor

$$|f|\chi_{J_n} \nearrow |f| \qquad (n \to \infty),$$

így a Levi-tétel (vö. 11.4.6. tétel) következtében

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu = \lim\left(\int |f| \cdot \chi_{J_n} \, \mathrm{d}\mu\right) = \lim\left(\int_{\min(J_n)}^{\max(J_n)} |f|\right) = \int_I |f|$$

(improprius Riemann-integrál). Tehát

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_I |f| < +\infty. \quad \blacksquare$$

A fenti tételben $\int_I |f|$ helyett nem írható $\int_I f$, ui. ha

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad (x \in (0, +\infty) =: I),$$

akkor f folytonos, így mérhető, valamint $\int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$,[3] ui.

- bármely $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$0 < \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x \leq \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha \to \frac{\pi}{2} \qquad (\alpha \to 0);$$

[3] **Dirichlet-integrál**

- az
$$F(\omega) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right)$$
függvényre
$$F(\omega) \equiv \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
és $\lim\limits_{+\infty} F \in \mathbb{R}$, hiszen
$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right) = 0 \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right),$$
továbbá
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi};$$

de $f \notin L^1(0, +\infty)$, hiszen a minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{|\sin(x)|}{(n+1)\pi} \qquad (x \in [n\pi, (n+1)\pi])\,,$$
fennálló becslés miatt
$$\begin{aligned}\int |f|\,\mathrm{d}\mu \;&\geq\; \int \sum_{n=1}^{\infty} |f|\chi_{[n\pi,(n+1)\pi]}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int |f|\chi_{[n\pi,(n+1)\pi]}\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty.\end{aligned}$$

11.4.12. tétel. **(Cavalieri-elv.)** Ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ (Lebesgue-mérhető) halmazra $\mu_{d+1}(\Omega) < +\infty$ teljesül, akkor majdnem minden $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

1. a
$$\Omega(\xi) := \left\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d :\ (x_1, \ldots, x_d, \xi) \in \Omega\right\}$$
halmaz Lebesgue-mérhető;
2. a
$$\xi \mapsto \mu_d(\Omega(\xi))$$
függvény Lebesgue-integrálható és
$$\mu_{d+1}(\Omega) = \int \mu_d(\Omega(\xi))\,\mathrm{d}\xi.$$

11.4.13. tétel. (**Integrálok transzformációja.**) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz,

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

olyan bijektív $\mathfrak{C}^1$-beli függvény, amelynek az inverze is $\mathfrak{C}^1$-beli ($\mathfrak{C}^1$**-diffeomoerfizmus**), továbbá $f : \Phi[\Omega] \to \mathbb{R}$. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. Az f függvény pontosan akkor Legebsgue-integrálható, ha az

   $$f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')| : \Omega \to \mathbb{R}$$

   függvény Legebsgue-integrálható.

2. Ha f Legebsgue-integrálható, akkor

   $$\int f = \int f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|.$$

Speciálisan az Ω halmaz (Lebesgue-)mértéke az $f(x) \equiv 1$ függvény $\Phi[\Omega]$-n vett integráljaként kapható meg:

$$\mu_1(\Omega) = \int |\det(\Phi')|.$$

11.4.14. tétel. (**Fubini-tétel.**) Ha valamely $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ esetén $A_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, ill. $A_1 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ Lebesgue-mérhető halmaz,

$$f : A_1 \times A_2 \to \overline{\mathbb{R}}$$

Lebesgue-integrálható függvény, akkor

1. majdnem minden $x \in A$ esetén az $f(x, \cdot) : A_2 \to \overline{\mathbb{R}}$, ill. az $x \mapsto \int f(x,y)\,\mathrm{d}y$ függvény Lebesgue-integrálható;

2. majdnem minden $y \in B$ esetén az $f(\cdot, y) : A_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, ill. az $y \mapsto \int f(x,y)\,\mathrm{d}x$ függvény is Lebesgue-integrálható;

3. az f függvény Lebesgue-integráljára

   $$\int f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

   azaz

   $$\int f\,\mathrm{d}\mu_{d_1 \cdot d_2} = \int \left(\int f\,\mathrm{d}\mu_{d_2} \right) \mathrm{d}\mu_{d_1} = \int \left(\int f\,\mathrm{d}\mu_{d_1} \right) \mathrm{d}\mu_{d_2}$$

   teljesül.

11.4.14. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \Omega)$ mérhető tér, ill.

$$\mu, \nu : \Omega \to [0, +\infty]$$

mértékek esetén azt mondjuk, hogy ν **abszolút folytonos** μ-re nézve (jelben $\nu \ll \mu$), ha

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0 \qquad (A \in \Omega).$$

11.4.3. állítás. Ha $\emptyset \neq \mathcal{X}$, ill. $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér, továbbá $f \in L^+$, akkor a

$$\mu_f : \Omega \to [0, +\infty], \qquad \mu_f(A) := \int_A f \, d\mu$$

leképezés (ún. **súlyfüggvény**) olyan mérték amely abszolút folytonos μ-re nézve, azaz amelyre

$$\mu_f \ll \mu$$

teljesül.

Világos, hogy

- $f \geq 0$ következtében
$$\mu_f(A) \geq 0 \qquad (A \in \Omega);$$
- az
$$f \cdot \chi_\emptyset = \chi_\emptyset \in L_0^+$$
egyenlőség következtében
$$\mu_f(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int f \cdot \chi_\emptyset \, d\mu = \int \chi_\emptyset \, d\mu = \mu(\emptyset) = 0;$$
- az
$$A_n \in \Omega \qquad (n \in \mathbb{N})$$
páronként diszjunkt halmazokról álló sorozatra, ha
$$A := \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \text{akkor} \qquad f \cdot \chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{A_n},$$
így (vö. 11.4.6/2. tétel)
$$\mu_f(A) = \int f \cdot \chi_A \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \cdot \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n);$$
- ha valamely $A \in \Omega$ (mérhető) halmazra $\mu(A) = 0$, akkor nyilván
$$f \cdot \chi_A = 0 \qquad (\mu\text{-m.m.}),$$
ezért (vö. 11.4.2. állítás)
$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \cdot \chi_A \, d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

11.5. Abszolút folytonos függvények, Szoboljev-terek

11.5.1. definíció. Adott $-\infty < a < b < +\infty$ esetén az $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ függvényt **egyenletesen folytonos**nak nevezzük – jelben $f \in \mathfrak{EC}[a,b]$ –, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $x, y \in [a,b]$ esetén

$$|x-y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

11.5.2. definíció. Adott $-\infty < a < b < +\infty$ esetén azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ függvény **Lipschitz-folytonos** – jelben $f \in \mathfrak{LC}[a,b]$ –, ha van olyan $L > 0$, hogy bármely $x, y \in [a,b]$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

11.5.3. definíció. Adott $-\infty < a < b < +\infty$ esetén valamely $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ függvényt **abszolút folytonos**nak nevezünk – jelben $f \in \mathfrak{AC}[a,b]$ –, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges

$$\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbb{N},\ (a_k, b_k) \subset [a,b]\ (k \in \mathcal{N}),\ (a_k,b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset\ (k, l \in \mathcal{N}:\ k \neq l)$$

esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} (b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Belátható, hogy adott $-\infty < a < b < +\infty$, ill. $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ függvény esetén igazak az alábbi állítások.

1. $f \in \mathfrak{LC}[a,b] \implies f \in \mathfrak{AC}[a,b] \implies f \in \mathfrak{EC}[a,b]$[4]
2. $f, g \in \mathfrak{AC}[a,b] \implies f \pm g,\ fg \in \mathfrak{AC}[a,b]$.
3. $(f, g \in \mathfrak{AC}[a,b]$ és $\inf \mathcal{R}_g > 0) \implies f/g \in \mathfrak{AC}[a,b]$.
4. $f \in \mathfrak{AC}[a,b] \iff \exists g \in L^1[a,b]$:
$$f(x) = f(a) + \int_a^x g \,\mathrm{d}\mu_1 \quad (x \in [a,b]).$$[5]
5. Ha $f \in \mathfrak{AC}[a,b]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[x]$ (μ_1-m.m. $x \in [a,b]$), továbbá mivel $f \in \mathfrak{C}$, ezért f korlátos, és így $f \in L^2[a,b]$ (ez azonban nem mindig teljesül f'-re: pl. az $L^2[0,1]$-beli $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény esetében).

[4] A fenti $\mathcal{N}$ halmazra $|\mathcal{N}| = 1$ teljesül.

[5] $\displaystyle\int_a^x g \,\mathrm{d}\mu_1 := \int g \cdot \chi_{[a,x]} \,\mathrm{d}\mu_1$

6. $f, g \in \mathfrak{AC}[a,b] \implies$
$$\int_a^b f'g \,\mathrm{d}\mu_1 = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' \,\mathrm{d}\mu_1.$$
7. Ha $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ korlátos és μ_1-mérhető, továbbá a $g \in \mathfrak{AC}[a,b]$ függvényre $g[[a,b]] \subset [c,d]$, akkor
$$(f \circ g) \cdot g' \in L^1[a,b],$$
továbbá minden $\alpha, \beta \in [a,b]$ esetén
$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_\alpha^\beta (f \circ g)g' \,\mathrm{d}\mu_1.$$
8. Ha minden $\alpha > 0$ esetén $f \in \mathfrak{AC}[0,\alpha]$ és $f' \in L^2[0,+\infty)$, akkor $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega) = 0$, ui. ekkor
$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega \left(f\overline{f'} + f'\overline{f}\right) \mathrm{d}\mu_1 = \langle f, f'\rangle_{L^2} + \langle f', f\rangle_{L^2} \in \mathbb{K},$$
így
$$\lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega \left(f\overline{f'} + f'\overline{f}\right) \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega (f\overline{f})' \,\mathrm{d}\mu_1 = \lim_{\omega\to+\infty} |f(\omega)|^2 - |f(0)|^2,$$
azzaz $\lim\limits_{\omega\to+\infty} |f(\omega)|^2 \in \mathbb{R}$, ezért $f \in L^2[0,+\infty)$ következtében $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega) = 0$.
9. Hasonlóan látható be, hogy ha minden $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ esetén $f \in \mathfrak{AC}[\alpha,\beta]$ és $f' \in L^2(\mathbb{R})$, akkor $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} f(\alpha) = 0 = \lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega)$.

11.5.4. definíció.

$$\mathfrak{W}_{1,2}[a,b] := \left\{f \in L^2[a,b] :\ f \in \mathfrak{AC}[a,b],\ f' \in L^2[a,b]\right\},$$

$$\mathfrak{W}_{1,2}[0,+\infty) := \left\{f \in L^2[0,+\infty) :\ f \in \mathfrak{AC}[0,\alpha]\ (\alpha > 0),\ f' \in L^2[0,+\infty)\right\},$$

$$\mathfrak{W}_{1,2}(\mathbb{R}) := \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) :\ f \in \mathfrak{AC}[\alpha,\beta]\ (-\infty < \alpha < \beta < +\infty),\ f' \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$

$$\mathfrak{W}_{2,2}[a,b] := \left\{f \in L^2[a,b] :\ f \in \mathfrak{C}^1[a,b],\ f' \in \mathfrak{AC}[a,b],\ f'' \in L^2[a,b]\right\}.$$

Belátható, hogy pl. az első, ill. az utolsó esetben a
$$(\mathfrak{W}_{k,2}[a,b], \|\cdot\|_{\mathfrak{W}_{k,2}[a,b]}) \qquad (k \in \{1{,}2\})$$
normált terek teljesek, ahol
$$\|f\|_{\mathfrak{W}_{k,2}[a,b]} := \sum_{l=0}^k \left\|f^{(k)}\right\|_{L^2} \qquad (f \in \mathfrak{W}_{k,2}[a,b],\ k \in \{1{,}2\}).$$

12. fejezet

Útmutató a gyakorló feladatok megoldásához

12.1. Az 1. fejezet gyakorló feladatai

12.1.1. Topologikus terek

Az 1.1.1. gyakorló feladat.

1. $\mathcal{X} \in \mathcal{U}(x)$.
2. Minden $A \in \mathcal{U}(x)$ esetén van olyan $B \in \mathcal{G}$, hogy
$$x \in B \subset A,$$
ahonnan $x \in A$ következik.
3. Ha $A, B \in \mathcal{U}(x)$, akkor alkalmas $C, D \in \mathcal{G}$ (nyílt) halmazokkal
$$x \in C \subset A$$
és $x \in D \subset B$, és így
$$x \in C \cap D \subset A \cap B.$$
Lévén, hogy $C \cap D$ nyílt, ezért
$$A \cap B \in \mathcal{U}(x).$$
4. Ha $A \subset \mathcal{U}(x)$, akkor alkalmas $C \in \mathcal{G}$ esetén
$$x \in C \subset A.$$
Ha valamely $B \subset \mathcal{X}$ esetén $A \subset B$, akkor
$$x \in C \subset B,$$
azaz B környezete x-nek.

5. Bármely $A \in \mathcal{U}(x)$ esetén alkalmas $C \in \mathcal{G}$ nyílt halmazzal $C \subset A$. Így a

$$B := C$$

választással tetszőleges $y \in B$ esetén $y \in B \subset A$, azaz $A \in \mathcal{U}(y)$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.2. gyakorló feladat.

Minden állítás az 1.1.9. feladat következménye.

1. Mivel
$$\overline{A}^c = \operatorname{int}(A^c) \in \mathcal{G},$$
így
$$\overline{A} \in \mathcal{F}, \qquad \text{továbá} \qquad \overline{A^c} = (\operatorname{int}(A))^c \supset A^c,$$
ezért $\overline{A} \supset A$.

2. Világos, hogy
$$\overline{A} \subset A \iff A^c \subset (\overline{A})^c = \operatorname{int}(A^c) \iff A^c \in \mathcal{G} \iff A \in \mathcal{F}.$$

3. Mivel
$$\left(\overline{\overline{A}}\right)^c = \operatorname{int}((\overline{A})^c) = \operatorname{int}(\operatorname{int}(A^c)) = \operatorname{int}(A^c) = (\overline{A})^c,$$
ezért $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4. Ez az állítás triviális (vö. 1.1.5/4. definíció).

5. Mivel
$$\begin{aligned}(\overline{A \cup B})^c &= \operatorname{int}((A \cup B)^c) = \operatorname{int}(A^c \cap B^c) = \operatorname{int}(A^c) \cap \operatorname{int}(B^c) = \\ &= (\overline{A})^c \cap (\overline{B})^c = (\overline{A} \cup \overline{B})^c,\end{aligned}$$
ezért
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

6. Mivel
$$\begin{aligned}(\overline{A \cap B})^c &= \operatorname{int}((A \cap B)^c = \operatorname{int}(A^c \cup B^c) \supset \operatorname{int}(A^c) \cup \operatorname{int}(B^c) = \\ &= (\overline{A})^c \cup (\overline{B})^c = (\overline{A} \cap \overline{B})^c,\end{aligned}$$
ezért
$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Megjegyzés. Most sem írható egyenlőség, ui. ha pl. $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával látjuk el, akkor az

$$A := \mathbb{Q}, \qquad \text{ill.} \qquad B := \mathbb{Q}^c$$

halmazokkal

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{Q \cap \mathbb{Q}^c} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.1.3. gyakorló feladat.

$\mathcal{G}$ triviálisan $\cup$-stabil, $\emptyset, N_{a,b} \in \mathcal{G}$, továbbá ha $A, B \in \mathcal{G}$ és $A \cap B \neq \emptyset$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{Z}$ esetén $n \in A \cap B$. Így van olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, hogy $N_{n,\alpha} \subset A$, ill. $N_{n,\beta} \subset B$, ezért

$$N_{n,\alpha\beta} \subset N_{n,\alpha} \cap N_{n,\beta} \subset A \cap B,$$

azaz $A \cap B \in \mathcal{G}$. Világos, hogy $N_{a,b} \in \mathcal{G}$ nyílt, sőt zárt is, hiszen

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \backslash \bigcup_{l=1}^{b-1} N_{a+l,b} \qquad \text{és} \qquad N := \bigcup_{l=1}^{b-1} N_{a+l,b}$$

zárt halmazok véges uniója. Világos, hogy $\mathrm{int}\,(N) = \emptyset$, $\mathrm{int}\,(\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}) = \emptyset$, így $\overline{N} = \mathbb{Z}$, sőt

$$\mathfrak{B}_n = \{N_{n,b} \subset \mathbb{Z} : \ b \in \mathbb{N}\} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Megjegyzés. Ezzel újabb bizonyítékát kaptuk annak, hogy végtelen sok prímszám van. Ha ugyanis a prímszámok $\mathbb{P}$ halmaza véges lenne, akkor az

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

halmaz – mint zárt halmazok véges uniója – maga is zárt lenne, és mivel minden $2 \leq n \in \mathbb{N}$ számnak van prímosztója, ezért

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} \backslash \{-1,1\},$$

ami azt jelentené, hogy $\{-1,1\}$ nyílt , azaz $\mathcal{G}$-beli lenne, ez viszont nem lehetséges. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

Az 1.1.4. gyakorló feladat.

Vö. a topológia, ill. a környezetbázis definíciója (1.1.1., ill. 1.1.9. definíció). $\blacksquare$

vissza a feladathoz

Az 1.1.5. gyakorló feladat.

Világos, hogy ha $f \in \mathfrak{C}[a]$ – azaz bármely

$$V \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(a))$$

($\mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$-beli) környezethez van olyan

$$U \in U_{\mathcal{X}}(a)$$

($\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$-beli) környezet, amelyre $f[U] \subset V$ –, akkor

$$\forall V \in \mathfrak{B}_{f(a)}\ \exists U \in \mathfrak{B}_a:\ f[U] \subset V$$

is igaz. Fordítva, ha $V \subset \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(f(a))$, akkor a

$$W \in \mathfrak{B}_{f(a)}, \qquad \text{ill.} \qquad W \subset V$$

választással van olyan $U \in \mathfrak{B}_a$, hogy $f[U] \subset W \subset V$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.6. gyakorló feladat.

Ha tetszőleges $a \in \mathcal{X}$ esetén

$$V \in \mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(f(g(a)),$$

akkor f folytonossága következtében alkalmas

$$U \in \mathcal{U}_{\mathcal{Y}}(g(a))$$

esetén $f[U] \subset V$. Mivel g is folytonos, ezért alkalmas $W \subset \mathcal{U}_{\mathcal{X}}(a)$ környezet esetén $g[W] \subset U$, azaz $f \circ g$ folytonos. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.7. gyakorló feladat.

p_1, ill. p_2 pontosan akkor folytonos, ha bármely $A \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}$, ill. $B \in \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}$ (nyílt) halmaz esetén

$$p_1^{-1}[A] = A \times \mathcal{Y} \in \mathcal{G}|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}, \qquad \text{ill.} \qquad p_2^{-1}[B] = \mathcal{X} \times B \in \mathcal{G}|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}.$$

Valamely, ezeket a halmazokat nyílt halmazként tartalmazó topológia akkor lesz a legdurvább, ha ezek a halmazok szubbázisát képezik. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.8. gyakorló feladat.

1. $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ és az $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ függvény folytonos.
2. $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

vissza a feladathoz

Az 1.1.9. gyakorló feladat.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ha f homeomorfizmus, akkor

$$f^{-1} : (\mathcal{Y}, \mathcal{G}_{\mathcal{Y}}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{G}_{\mathcal{X}})$$

folytonos. Ezért, ha A $\mathcal{X}$-beli zárt halmaz: $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$, akkor $f[A] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$, hiszen $f[A]$ nem más, mint az A halmaz f^{-1}-szerinti őséképe.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ha f zárt leképezés és $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$, akkor $f[A] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$. Mivel $f[A]$ az A halmaz f^{-1} szerinti ősképe, ezért f^{-1} folytonos.

(1) $\Rightarrow$ (3): Ha az előbbi két bizonyítás során a *zárt* jelzőt *nyílt*-ra cseréljük, akkor az első és a harmadik állítás egyenértékűsége is könnyen belátható. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.10. gyakorló feladat.

1. Ha $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ a diszkrét topologikus tér, azaz $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$, továbbá $x, y \in \mathcal{X}\colon x \neq y$, akkor az
$$U := \{x\}, \qquad V := \{y\}$$
környezetekre $U \cap V = \emptyset$.
2. Az a, ill. a b pont egyetlen környezete, azaz az $\mathcal{X} = \{a, b\}$ halmaz tartalmazza b-t, ill. a-t. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.11. gyakorló feladat.

Az $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ topologikus tér pontosan akkor T_2-tér, ha bármely

$$(x, y) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \backslash \Delta$$

esetén van olyan $U \in \mathcal{U}(x)$ és $V \in \mathcal{U}(y)$ környezet, amelyre $U \cap V = \emptyset$. Így, ha

- $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ T_2-tér, akkor $U\times V$ az (x,y) pont olyan nyílt környezete a szorzattérben, hogy
$$(U\times V)\cap\Delta=\emptyset.$$
Így
$$(x,y)\notin\overline{\Delta}\qquad\text{és}\qquad\Delta=\overline{\Delta},$$
azaz Δ zárt halmaz a szorzattérben.
- Δ zárt halmaz a szorzattérben, akkor bármely $x,y\in\mathcal{X}$, $x\neq y$ esetén $(x,y)\notin\Delta$. Így (x,y)-nak a szorzattérben van olyan $U\times V$ nyílt környezete, hogy
$$(U\times V)\cap\Delta=\emptyset,$$
ennélfogva U, mint x egy környezete, ill. V, mint y egy környezete nyílt diszjunkt halmazok, azaz $(\mathcal{X},\mathcal{G})$ T_2-tér. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.12. gyakorló feladat.

1. Az $(\mathcal{Y},\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}})$ altér Hausdorff-tér volta annak a ténynek az egyszerű következménye, hogy valamely $V\in\mathcal{G}|_{\mathcal{Y}}$ (nyílt) halmaz pontosan akkor környezete az $x\in\mathcal{Y}$ pontnak, ha alkalmas $U\in\mathcal{U}(x)$ halmazzal $V=U\cap\mathcal{Y}$.
2. Ha $x\in\mathcal{X}$, akkor bármely $y\in\mathcal{X}$, $y\neq x$ esetén van olyan $U\in\mathcal{U}(x)$ és $V\in\mathcal{U}(y)$, hogy $U\cap V=\emptyset$. Mivel $x\notin V$, ezért $y\notin\overline{\{x\}}$, azaz $\overline{\{x\}}=\{x\}$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.13. gyakorló feladat.

Mivel f és $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$ folytonos, ezért az 1.1.7. feladatbeli állítás következtében a
$$h:(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})\to(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}),\qquad(x,y)\mapsto h(x,y):=(f(x),y)$$
függvény folytonos. Az $(\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}})$ Hausdorff-tér volta következtében a $\Delta_{\mathcal{Y}}$ átló zárt az $(\mathcal{Y}\times\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben, így az
$$\{(x,f(x))\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}:\ x\in\mathcal{X}\}=h^{-1}[\Delta_{\mathcal{Y}}]$$
halmaz zárt az $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathcal{G}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ szorzattérben. ■

vissza a feladathoz

Az 1.1.14. gyakorló feladat.

Az állítás a definíció, ill. a De-Morgan-azonosságok (vö. 11.1.5. állítás) egyszerű következménye. ■

vissza a feladathoz

12.1.2. Metrikus terek

Az 1.2.1. gyakorló feladat.

1. Mivel $\mathcal{K}(H,\mathbb{K})$ vektortér, ezért ρ_∞ jólértelmezett. Világos, hogy ρ_∞ szemidefinit, szimmetrikus, valamint definit is egyben (ui. $f \neq g$ azt jelenti, hogy alkalmas $x \in H$ esetén $f(x) \neq g(x)$). A háromszög-egyenlőtlenség a következőképpen látható be. Ha $x \in H$, akkor
$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &\leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x\in H}|f(x)-h(x)| + \sup_{x\in H}|h(x)-g(x)| = \\ &= \rho_\infty(f,h)+\rho_\infty(h,g), \end{aligned}$$
ahonnan
$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in H}|f(x)-g(x)| \leq \rho_\infty(f,h)+\rho_\infty(h,g)$$
következik.
2. Ha $p \in [1,+\infty]$, akkor ρ_p nyilvánvalóan pozitív szemidefinit és szimmetrikus. A ρ_p defintsége abból következik, hogy bármely $x,y \in \mathbb{K}^d$ esetén $x \neq y$ pontosan akor teljesül, ha alkalmas $k \in \{1,\ldots,d\}$ indexszel $x_k \neq y_k$. A ρ_∞-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség az előző állítás következményeként adódik, a
$$H := \{1,\ldots,d\}, \qquad f : H \to \mathbb{R}, \quad f(k) := x_k$$
választással. A háromszög-egyenlőtlenség $p=1$ esetén triviális, $p \in (1,+\infty)$ pedig a Minkowski-egyenlőtlenség (vö. 11.2. fejezet) közvetlen következménye.
3. (l_∞,ρ_∞) a $(\mathcal{K}(H,\mathbb{K}),\rho_\infty)$ egy speciális esete ($H := \mathbb{N}$). ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.2. gyakorló feladat.

Az 1.2.3. feladat közvetlen következménye. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.3. gyakorló feladat.

1. ρ nem metrika, hiszen ha a
$$g(x) := 0, \quad f(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \in (0,1))$$
függvények esetében
$$\rho(f,g) = \sup\left\{\left|\frac{1}{x}\right| \in \mathbb{R} : \ x \in (0{,}1)\right\} = +\infty.$$

2. Mivel d metrika, ezért bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén $d(x, y) \geq 0$, így

$$\rho(x, y) \geq \min\{1{,}0\} = 0,$$

azaz ρ pozitív szemidefinit. ρ szimmetrikus is, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = \rho(y, x).$$

Ha $x, y, z \in \mathcal{X}$, akkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset: $d(x, z) \geq 1$ vagy $d(z, y) \geq 1$. Ekkor $\rho(x, z) = 1$, vagy $\rho(z, y) = 1$, így

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \leq 1 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

2. eset: $d(x, z) < 1$ és $d(z, y) < 1$. Ekkor a d-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = \\ &= \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(z, y)\} = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Így ρ-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
Végül ρ definit is, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{X}: x \neq y$ esetén $d(x, y) > 0$, ahonnan

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} > 0$$

következik.

3. ρ nem metrika, hiszen ha a

$$g(x) := 0, \quad f(x) := x^2 - 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomra $f \neq 0 = g$ és

$$\rho(f, g) = |f(0) + f'(1) - g(0) - g'(1)| \neq 0.$$

4. $(\mathcal{X}, \rho)$ nem metrikus tér, mivel $\mathcal{X} = \emptyset$, hiszen bármely $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - 1\right| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (1-x)^2 < x^2 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 - 2x < 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x \qquad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad -x < -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.4. gyakorló feladat.

Világos, hogy ρ nem-negatív és szimmetrikus. A

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$$

függvény injektivitása következtében

$$\rho(x,y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y.$$

A háromszög-gyenlőtlenség pedig a következőképpen látható be. Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\rho(x,y) = |\varphi(x)-\varphi(z)+\varphi(z)-\varphi(y)| \leq |\varphi(x)-\varphi(z)|+|\varphi(z)-\varphi(y)| = \rho(x,z)+\rho(z,y). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.5. gyakorló feladat.

Világos, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $\rho_f(x,y) \geq 0$ és $\rho_f(x,y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) = f(y)$. Ez viszont az f függvény injektivitása miatt azzal egyenértékű, hogy $x = y$, így ρ pozitív definit. ρ szimmetriája az abszolútérték homogenitásának következménye. A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, hiszen bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \rho_f(x,z) + \rho_f(z,y) &= |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \geq |f(x) - f(z) + f(z) - f(x)| = \\ &= |f(x) - f(y)| = \rho_f(x,y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.6. gyakorló feladat.

Mivel a

$$\varphi(x) := f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő és folytonos, továbbá

$$\lim_{\pm\infty} \varphi = \pm 1,$$

ezért az abszolútérték tulajdonságaiból egyszerűen adódik ρ metrika volta. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

Az 1.2.7. gyakorló feladat.

1. Ha
   - $p = 0$, akkor $\rho(x,y) := 1$ $(x,y \in \mathbb{R})$, így $\rho(x,y) \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz ρ nem metrika.
   - $p \in (0,1]$, akkor bármely $x,y,z \in \mathbb{R}$ esetén
     (a) $\rho(x,y) \geq 0$ és $\rho(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$,
     (b) $\rho(x,y) = |x-y|^p = |y-x|^p = \rho(y,x)$,
     (c) ρ-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen (vö. 11.2. fejezet)
     $$\begin{aligned}\rho(x,y) &= |x-y|^p = |x-z+z-y|^p \leq (|x-z|+|z-y|)^p \leq \\ &\leq |x-z|^p + |z-y|^p = \rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$
     ezért ρ metrika.
   - $p > 1$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
     $$\rho(-x,x) = |-x-x|^p = 2^p|x|^p \not\leq |-x|^p + |x|^p = \rho(-x,0)+\rho(0,x),$$
     azaz ρ nem metrika.
2. ρ nem metrika, hiszen
   $$\rho\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
3. ρ metrika hiszen bármely $0 < x,y,z \in \mathbb{R}$ esetén $\rho(x,y) \geq 0$ és
   - $\rho(x,y) = 0 \iff \ln(x/y) = 0 \iff x = y$;
   - $\rho(x,y) = |\ln(x/y)| = |\ln(x) - \ln(y)| = |\ln(y) - \ln(x)| = |\ln(y/x)| = \rho(y,x)$;
   - $\rho(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)| \leq |\ln(x) - \ln(z)| + |\ln(z) - \ln(z)| =$
     $$= |\ln(x/z)| + |\ln(z/y)| = \rho(x,z)+\rho(z,y). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.8. gyakorló feladat.

1. ρ nem metrika, ui. pl. $x := 3$, $y := 0$ és $z := 1$ esetén nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:
   $$\rho(3,0) = 9 > 4+1 = \rho(3,1)+\rho(0,1).$$

2. Ha
$$f(t) := \sqrt{t} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$
akkor f monoton növő, $f(t) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $t = 0$ és minden $s, t \in [0, +\infty)$ esetén
$$f(s+t) \leq f(s) + f(t),$$
ugyanis
$$\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s+t \leq s + 2\sqrt{st} + t.$$

3. ρ nem metrika, ugyanis $\rho(1, -1) = 0$.

4. ρ nem metrika, ugyanis $\rho(2{,}1) = 0$.

5. Ha
$$f(t) := \frac{t}{1+t} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$
akkor f monoton növő, $f(t) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $t = 0$ és minden $s, t \in [0, +\infty)$ esetén
$$f(s+t) \leq f(s) + f(t),$$
ugyanis
   - ha $s, t \in [0, +\infty)$: $s < t$, akkor $1 + s < 1 + t$ és mivel
   $$f(t) = \frac{t+1-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$
   az $f(s) < f(t)$ egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha
   $$-\frac{1}{1+s} < -\frac{1}{1+t},$$
   azaz, ha
   $$\frac{1}{1+s} > \frac{1}{1+t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1+s < 1+t;$$
   - ha $s, t \in [0, +\infty)$, akkor
   $$f(s+t) = \frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} = f(s) + f(t),$$
   így ρ metrika.

6. ρ metrika, ui. az
$$f(x) := a^x \qquad (x > 0)$$
függvény szigorúan monoton növekedő. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.9. gyakorló feladat.

Világos, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\rho(x,y) \geq 0, \qquad \rho(x,x) = \min\{1, |x_2 - x_2|\} = 0 \qquad \text{és} \qquad \rho(x,y) = \rho(y,x),$$

továbbá

$$\rho(x,y) = 1 > 0, \qquad \text{ha} \qquad x_1 \neq y_1,$$

ill.

$$\rho(x,y) = \min\{1, |x_2 - y_2|\} > 0, \qquad \text{ha} \qquad x_1 = y_2 \qquad \text{és} \qquad x_2 \neq y_2,$$

azaz $\rho(x,y) > 1$, amennyiben $x \neq y$. Így bármely $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén, ha

- $x_1 \neq y_1$, akkor $x_1 \neq z_1$ vagy $y_1 \neq z_1$ és így $\rho(x,z) = 1$ vagy $\rho(y,z) = 1$. Tehát $\rho(x,y) \geq 0$ és $\rho(z,y) \geq 0$ miatt

$$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

- $x_1 = y_1$, akkor

$$\rho(x,y) = \min\{1, |x_2 - y_2|\}.$$

  Így ha $x_1 \neq z_1$, akkor

$$\rho(x,y) \leq 1 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

- $x_1 = y_1 = z_2$, akor

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \min\{1, |x_2 - y_2|\} \leq \min\{1, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \leq \\ &\leq \min\{1, |x_2 - z_2|\} + \min\{1, |z_2 - y_2|\} = \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.10. gyakorló feladat.

1. ρ_H triviálisan pozitív definit, ill. szimmetrikus. A

$$\rho_H(x,y) \leq \rho_H(x,z) + \rho_H(z,y)$$

   háromszög-egyenlőtlenség pedig így látható be: $x_k \neq y_k$-ból $x_k \neq z_k$ vagy $y_k \neq z_k$ következik, ahonnan $\rho_H(x,y)$-hoz a k-adik komponens 1-gyel, $\rho_H(x,z) + \rho_H(z,y)$-hoz pedig 1-gyel vagy 2-vel járul hozzá.

2. Bármely $(x,y), (u,v), (w,z) \in \mathcal{X}$ esetén

   (a) $\rho\left((x,y),(u,v)\right) = 0 \iff (x,y) = (u,v)$, hiszen ha

- $\rho\left((x,y),(u,v)\right) = 0$, akkor $x \neq u$ esetén

$$\rho\left((x,y),(u,v)\right) = |x-u| + y + v > 0$$

teljesülne, ami nem lehetséges, továbbá az $x = u$ egyenlőségből $|y-v| = 0$, azaz $y = v$ következik.

- $(x,y) = (u,v)$, akkor $x = u$ következtében $\rho\left((x,y),(u,v)\right) = |y-v| = 0$.

(b) ha

- $x = u$, akkor

$$|a-b| \leq \begin{cases} |a-c| + |c-b|, \\ \\ |a+b| = |a| + |b| = a+b \end{cases} \qquad (a,b,c \in [0,1])$$

miatt a háromszög-egyenlőtlenség triviálisan teljesül,

- $x \neq u$, $x \neq w$ és $w \neq u$, akkor

$$\begin{aligned} |x-u| + y + v &\leq |x-w| + |w-u| + y + v = \\ &= |x-w| + |w-u| + y - z + z + v \leq \\ &\leq |x-w| + |w-u| + y + z + z + v, \end{aligned}$$

amiből a háromszög-egyenlőtlenség már következik,

- $x \neq u$, $x = w$ és $w \neq u$, akkor

$$\begin{aligned} |x-u| + y + v &= |w-u| + y - z + z + v \leq \\ &\leq |w-u| + |y-z| + z + v, \end{aligned}$$

ahonnan a háromszög-egyenlőtlenség következik,

- $x \neq u$, $w = u$, akkor a fentiekhez hasonlóan kapjuk a háromszög-egyenlőtlenséget.

Így az 1.2.3. feladat következményeként ρ metrika. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.11. gyakorló feladat.

Világos, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén ρ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, továbbá

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = \rho(x,z) + \rho(z,y) \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

és

$$x = y \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(x, y) = 0.$$

Hogy ρ metrika legyen, a

$$\rho(x, y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$f(x) = f(y) \qquad \Longrightarrow \qquad x = y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

implikációnak is igaznak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ρ pontosan akkor lesz metrika, ha f injektív. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.12. gyakorló feladat.

Az 1.2.1. definíció közvetlen következménye. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.13. gyakorló feladat.

1. Az $\alpha > 0$ következtében $\alpha \cdot \varphi$ triviálisan pozitív szemidefinit, és teljesül rá a háromszög-egyenlőtlenség. Szintén $\alpha > 0$ következménye, hogy bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$\alpha \cdot \varphi(x, y) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x, y) > 0.$$
2. A definíció egyszerű következménye a $\varphi + \psi$ félmetrika volta. Mivel bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén
$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\varphi(x, y) \quad \text{vagy} \quad \psi(x, y) > 0),$$
ezért $\varphi + \psi$ pontosan akkor lesz metrika, ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ esetén $\varphi(x, y) \neq 0$, vagy $\psi(x, y) \neq 0$ teljesül.
3. Ha $\omega := \max\{\varphi, \psi\}$, akkor ω pozitív szemidefinit és szimmetrikus, továbbá
$$\varphi(x, y) \leq \varphi(x, z) + \varphi(z, y) \leq \omega(x, z) + \omega(z, y) \qquad (x, y, z \in \mathcal{X})$$
és
$$\psi(x, y) \leq \psi(x, z) + \psi(z, y) \leq \omega(x, z) + \omega(z, y) \qquad (x, y, z \in \mathcal{X})$$
következtében még a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül rá, azaz ω félmetrika. Végül
$$\omega(x, y) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\varphi(x, y) > 0 \quad \text{vagy} \quad \psi(x, y) > 0)$$
miatt ω pontosan akkor lesz metrika, ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ esetén $\varphi(x, y) \neq 0$, vagy $\psi(x, y) \neq 0$ teljesül. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.14. gyakorló feladat.

1. lépés. Világos, hogy $\widetilde{\rho}$ örökli ρ-tól a szemidefinit tulajdonságot és a szimmetriát. A háromszög-egyenlőtlenség pedig az 1.2.7 feladat következménye (vö. 1.2.1/2. házi feladat).

Megjegyzés. Látható, hogy $\widetilde{\rho}$ pontosan akkor metrika, ha ρ is metrika.

2. lépés. Ha (ρ_n) $\mathcal{X}$-beli metrikák tetszőleges sorozata, akkor ρ_F jóldefiniált, hiszen

$$0 \leq \frac{\rho_n(x,y)}{1+\rho_n(x,y)} < 1 \qquad (x,y \in \mathcal{X};\ n \in \mathbb{N})$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

egyenlőség következtében a ρ_F-et definiáló sor konvergens. Világos, hogy ρ_F örökli ρ_n-től a szemidefinit tulajdonságot és a szimmetriát $(n \in \mathbb{N})$, a háromszög-egyenlőtlenség pedig úgy látható be, hogy az első lépés következményeként $\widetilde{\rho_n}$-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, majd a konvergens sorokra vonatkozó szabályok alapján ρ_F-re is. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.15. gyakorló feladat.

$$K_1(0) = [0,1), \qquad K_2(1) = [0,1] \cup (2,3), \qquad K_4(1) = \mathcal{X},$$
$$K_2(4) = (2,4] = K_3(4) \qquad \text{és} \qquad K_4(4) = (0,1] \cup (2,4]. \quad ■$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.16. gyakorló feladat.

Az

- $(\mathbb{R}^2, \rho_0)$ metrikus térben $K_1(0) = \{0\}$.
- $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ metrikus térben $K_1(0)$ a $(-1,0)$ és az $(1,0)$ pontokat összekötő szakaszra, mint átlóra rajzolható nyílt négyzet.
- $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ metrikus térben $K_1(0)$ a 0 középpontú, egységsugarú nyílt körlap.
- $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ metrikus térben $K_1(0)$ a $(-1,-1)$ és az $(1,1)$ pontokat összekötő szakaszra, mint átlóra rajzolható nyílt négyzet. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.17. gyakorló feladat.

1. lépés. Ha $f \in A$ és

$$\varepsilon := \inf \{f(x) \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\},$$

akkor bármely

$$g \in \mathfrak{C}[a,b], \qquad \rho_\infty(f,g) < \varepsilon/2$$

esetén

$$\inf \{g(x) \in \mathbb{R} : \; x \in [a,b]\} > 0,$$

azaz $g \in A$, tehát A nyílt.

2. lépés. Könnyen belátható, hogy B^c nyílt, azaz B zárt. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.18. gyakorló feladat.

$$A' = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \in \mathbb{R}^2 : \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 : \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0,0)\}. \quad ■$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.19. gyakorló feladat.

Megmutatjuk, hogy az $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$, ill. az $(\mathbb{R}^2, \rho)$ metrikus térben

$$\mathrm{int}\,(A) = (0,1) \times (-1,1) \qquad \text{és} \qquad \overline{A} = [0,1] \times [-1,1],$$

ill.

$$\mathrm{int}\,(A) = A \qquad \text{és} \qquad \overline{A} = [0,1] \times [-1,1],$$

ahonnan

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathrm{int}\,(A) = ([0,1] \times \{-1,1\}) \cup (\{0,1\} \times [-1,1]),$$

ill.

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathrm{int}\,(A) = [0,1] \times \{-1,1\}$$

következik.

1. lépés. Ha $x = (x_1, x_2) \in (0,1) \times (-1,1)$ és

$$\varepsilon := \min\{1 - x_1, x_1, 1 - |x_2|\},$$

akkor $K_\varepsilon^{\rho_E}(x) \subset A$, azaz $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$-ben $x \in \mathrm{int}\,(A)$. Mivel $\varepsilon \leq 1$, ezért

$$K_\varepsilon^{\rho}(x) \subset K_\varepsilon^{\rho_E}(x)) \subset A,$$

így $(\mathbb{R}^2, \rho)$-ban is $x \in \operatorname{int}(A)$.
Ha most

$$x = (x_1, x_2) \in \{0,1\} \times (-1,1),$$

akkor a

$$\delta := 1 - |x_2| > 0$$

számra

$$K_\delta^\rho(x) \subset \{0,1\} \times (-1,1) \subset A,$$

azaz $(\mathbb{R}^2, \rho)$-ban $x \in \operatorname{int}(A)$. Belátható, hogy tetszőleges $r > 0$ esetén

$$K_r^{\rho_E}(x) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash A) \neq \emptyset,$$

azaz $x \in \partial A \cap A$ és $x \notin \operatorname{int}(A)$ az $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$ metrikus térben.

2. lépés. Ha

$$x = (x_1, x_2) \in [0,1] \times \{-1,1\} \qquad \text{és} \qquad \varepsilon > 0,$$

akkor az $y := (x_1, y_2)$,

$$y_2 := \begin{cases} -1 + \min\{1, \varepsilon\}/2 & (x_2 = -1), \\ 1 - \min\{1, \varepsilon\}/2 & (x_2 = 1) \end{cases}$$

vektorra

$$y \in K_\varepsilon^\rho(x) \cap A \qquad \text{és} \qquad y \in K_\varepsilon^{\rho_E}(x) \cap A,$$

így $x \in \overline{A}$ mind $(\mathbb{R}^2, \rho)$-ban, mind pedig $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$-ben. Már csak azt kell megmutatni, hogy ha

$$x \in \mathbb{R}^2 \backslash ([0,1] \times [-1,1]),$$

akkor $x \notin \overline{A}$ mind $(\mathbb{R}^2, \rho)$-ban, mind pedig $(\mathbb{R}^2, \rho_E)$-ben, azaz alkalmas $1 \geq \varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon^\rho(x) \cap A = \emptyset = K_\varepsilon^{\rho_E}(x) \cap A.$$

Könnyen belátható, hogy az

$$\varepsilon := \begin{cases} \min\{1, |x_2| - 1\} & (|x_2| > 1), \\ \min\{1, |x_1|\} & (x_1 < 0,\ |x_2| \leq 1), \\ \min\{1, x_1 - 1\} & (x_1 > 1,\ |x_2| \leq 1) \end{cases}$$

szám megfelelő. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.20. gyakorló feladat.

1. lépés. Ha $(x,y)\in A$, azaz $x>0$ és $\varepsilon := x$, akkor bármely $(u,v)\in K_\varepsilon((x,y))$ esetén

$$|u-x| \leq \sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2} = \rho_E((u,v),(x,y)) < \varepsilon = x,$$

és így

$$u = x+u-x \geq x-|u-x| > x-x = 0,$$

azaz $(u,v)\in A$, ahonnan $K_\varepsilon((x,y))\subset A$ következik.

2. lépés. Belátjuk, hogy

$$\overline{A} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0\right\}.$$

- Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $x\geq 0$ és $U\in\mathcal{U}((x,y))$, akkor alkalmas $\varepsilon>0$ esetén $K_\varepsilon((x,y))\subset U$. Világos, hogy

  $$x+\frac{\varepsilon}{2}>0,$$

  így bármely $y\in\mathbb{R}$ esetén

  $$\left(x+\frac{\varepsilon}{2},y\right)\in A$$

  és

  $$\rho_E\left(\left(x+\frac{\varepsilon}{2},y\right),(x,y)\right) = \sqrt{\left(x+\frac{\varepsilon}{2}-x\right)^2+(y-y)^2} = \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

  ezért

  $$\left(x+\frac{\varepsilon}{2},y\right)\in K_\varepsilon((x,y))\subset U,$$

  tehát $(x,y)\in\overline{A}$.

- Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $x<0$ és $\varepsilon:=-x$, akkor az eddigek alapján könnyen belátható, hogy bármely

  $$(u,v)\in K_\varepsilon((x,y))$$

  esetén $u<0$. Tehát

  $$K_\varepsilon((x,y))\cap A = \emptyset,$$

  és így (x,y) nem érintkezési pontja A-nak.

3. lépés. Mivel A nyílt, ezért $\operatorname{int}(A)=A$, így

$$\partial A = \overline{A}\setminus\operatorname{int}(A) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0\right\}. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.21. gyakorló feladat.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{int}(A)=\emptyset$, azaz bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén $A\notin\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ha ugyanis valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén $A\in\mathcal{U}\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor alkalmas $\varepsilon>0$ számra igaz a $K_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\subset A$ tartalmazás. Ha most $\delta>0$ olyan szám, amelyre $\delta<\varepsilon$ és

$$K_\delta\left(\frac{1}{n}\right)\cap K_\delta\left(\frac{1}{n+1}\right)=\emptyset,$$

akkor

$$K_\delta\left(\frac{1}{n}\right)\subset K_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\subset A,$$

továbbá

$$K_\delta\left(\frac{1}{n}\right)\cap A=\left\{\frac{1}{n}\right\},$$

ami ellenntmond annak, hogy $K_\delta\left(\frac{1}{n}\right)\subset A$, hiszen

$$\frac{1}{n}+\frac{\delta}{2}\in K_\delta\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. lépés. Mivel $A\subset\overline{A}$ és $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$, ezért $\{0\}\subset\overline{A}$, azaz

$$A\cup\{0\}\subset\overline{A}.$$

Az $A\cup\{0\}$ halmaz komplementerére

$$(A\cup\{0\})^c=\mathbb{R}\backslash(A\cup\{0\})=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right),$$

így $A\cup\{0\}$ kompelementere – mint nyílt halmazok egyesítése – maga is nyílt halmaz. Ezért $A\cup\{0\}$ zárt halmaz, tehát

$$\overline{A}\subset\overline{A\cup\{0\}}=A\cup\{0\}.$$

3. lépés. $\partial A=\overline{A}\backslash\operatorname{int}(A)=\overline{A}=A\cup\{0\}$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.22. gyakorló feladat.

Mivel $\mathbb{R}$-ben egy nemnegatív tagokból álló összegsorozat pontosan akkor nullsorozat, ha az egyes tagok is nullsorozatok, ezért az állítás nyilvánvaló. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.23. gyakorló feladat.

Ha mind az értelmezési tartományban, mind pedig a képtérben környezetbázisnak az adott pont körüli nyílt gömbök rendszerét tekintjük (vö. 1.2.11. házi feladat), akkor az 1.1.5. feladat fényében az állítás nyilvánvaló. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.24. gyakorló feladat.

Ha $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ és $\varepsilon > 0$, akkor a

$$\delta := \varepsilon/3 \qquad \text{és} \qquad (y_n) \in \mathbb{K}^N : \quad \rho((x_n),(y_n)) < \delta$$

választással

$$\begin{aligned}
\rho(f((x_n)), f((y_n))) &= \rho((x_{n+1} - x_n), (y_{n+1} - y_n)) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_{n+1} - y_{n+1} + y_n - x_n|}{1 + |x_{n+1} - y_{n+1} + y_n - x_n|} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{|x_{n+1} - y_{n+1}|}{1 + |x_{n+1} - y_{n+1}|} + \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_{n+1} - y_{n+1}|}{1 + |x_{n+1} - y_{n+1}|} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |y_n - x_n|} = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n+1} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |y_n - x_n|} \leq \\
&\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |y_n - x_n|} = \\
&= 3 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = \\
&= 3\rho((x_n)), f((y_n))) < 3\delta = \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.2.25. gyakorló feladat.

1. Mivel minden $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2| \leq \rho_E(x, y),$$

így ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \varepsilon/7$, akkor

$$\rho_E(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

azaz f egyenletesen folytonos.

2. Mivel minden $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq \left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right| \leq \rho_E(x, y),$$

így ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \varepsilon$, akkor

$$\rho_E(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

azaz f egyenletesen folytonos.

3. Ha $\varepsilon := 1$ és $\delta > 0$, akkor alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén $1/n < \delta$. Így az

$$u_n := (0, n), \quad v_n := (0, n + 1/n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra

$$\rho_E(u_n, v_n) = 1/n < \delta \qquad \text{és} \qquad |f(u_n) - f(v_n)| = 2 + 1/n^2 \geq \varepsilon,$$

azaz f nem egyenletesen folytonos. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.26. gyakorló feladat.

1. Mivel bármely $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x, a) - \rho(y, a)| \leq \rho(x, y)$$

(vö. 1.2.4/2. feladat), így ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \varepsilon$, akkor

$$\rho(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

azaz f egyenletesen folytonos.

2. Vö. 1.2.43. feladat útmutatója. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.27. gyakorló feladat.

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, \alpha) + \rho(\alpha, \beta) + \rho(\beta, y_n), \qquad \rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, \beta),$$

ezért

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(\alpha, \beta)| \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(\beta, y_n),$$

így az

$$\lim(\rho(\alpha, x_n)) = \lim(\rho(\beta, y_n)) = 0$$

egyenlőségből

$$\lim(\rho(x_n, y_n)) = \rho(\alpha, \beta)$$

következik (vö. 1.2.4/1. feladat). ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.28. gyakorló feladat.

Használjuk fel az 1.2.72. feladatbeli állítást! A

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1[\mathcal{X}] \to \varphi_2[\mathcal{X}] \qquad \text{és} \qquad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2[\mathcal{X}] \to \varphi_1[\mathcal{X}]$$

izometriák egyenletesen folytonosságuk révén kiterjeszthetők

$$\psi : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2 \qquad \text{és} \qquad \omega : \mathcal{Y}_2 \to \mathcal{Y}_1$$

izometriává. Mivel

- bármely $x \in \varphi_1[\mathcal{X}]$ esetén
$$(\omega \circ \psi)(x) = x \qquad \text{és} \qquad \overline{\varphi_1[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}_1;$$
- bármely $x \in \varphi_2[\mathcal{X}]$ esetén
$$(\psi \circ \omega)(x) = x \qquad \text{és} \qquad \overline{\varphi_2[\mathcal{X}]} = \mathcal{Y}_2,$$

ezért (vö. 1.2.42. feladat)

$$\omega \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}_1} \qquad \text{és} \qquad \psi \circ \omega = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}_2},$$

amiből ψ bijektivitása következik. ■

vissza a feladathoz

Az 1.2.29. gyakorló feladat.

Ha a H halmaz kompakt lenne, akkor bármely

$$f_n \in H \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat esetén volna H-ban konvergens (f_{ν_n}) részsorozat. Mivel

$$f_{\nu_n}(x) = x^{\nu_n} \qquad (x \in [0{,}1]) \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \nu_n = +\infty,$$

ezért bármely $x \in [0{,}1)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_{\nu_n}(x) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty} f_{\nu_n}(1) = 1.$$

Így az (f_{ν_n}) függvénysorozat pontonkénti limesze az

$$f : [0{,}1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0{,}1)), \\ & \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

függvény. Az (f_{ν_n}) függvénysorozat egyenletesen is konvergens (vö. 1.2.28. feladat), ezért kompakt H esetén az f határfüggvénynek folytonosnak kellene lennie. ■

vissza a feladathoz

12.1.3. Normált terek

Az 1.3.1. gyakorló feladat.

Mivel bármely $x \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\begin{aligned}
(\max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\})^p &= \max\{|x_k|^p \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \leq d \cdot \max\{|x_k|^p \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\} = \\
&= d \cdot (\max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\})^p,
\end{aligned}$$

ezért

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p} \cdot \|x\|_\infty \qquad (x, y \in \mathbb{K}^d),$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk (vö. 1.2.1. feladat). ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.2. gyakorló feladat.

Az 1.3.1. definíció közvetlen következménye. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.3. gyakorló feladat.

1. lépés. Ha $f \in \mathcal{P}$, akkor alkalmas $m \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $0 \neq K \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\sum_{k=0}^{m} |a_k| \leq K$, akkor bármely $1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| x^k \leq \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k| \right) x^m \leq K x^m.$$

Így a hányadoskritérium felhasználásával a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{K n^m}{n!} \right)$$

sor konvergens, ahonnan a majoránskritérium figyelembe vételével a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{|f(n)|}{n!} \right)$$

sor konvergenciája következik. Tehát $0 \leq p(f) \in \mathbb{R}$. Az abszolút homogenitás, ill. a háromszög-egyenlőtlenség a konvergens sorokra vonatkozó számolási szabályok segítségével látható be. Ha $p(f) = 0$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) = 0$. Mivel egy, a zéruspolinomtól különböző polinomnak csak véges sok zérushelye lehet, ezért $f = \widehat{0}$.

3. lépés. Mivel bármely $f \in \mathcal{P}$ esetén $|f|$ folytonos, ezért $[a, b]$ kompaktsága következtében $0 \leq p_{[a,b]}(f) \in \mathbb{R}$. Világos, hogy az abszolút homogenitás és a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, hiszen bármely $f \in \mathcal{P}$ esetén

$$p_{[a,b]}(f) = \left\| f|_{[a,b]} \right\|_\infty .$$

Ha $p_{[a,b]}(f) = 0$, akkor bármely $x \in [a, b]$ esetén $f(x) = 0$. Mivel minden a zéruspolinomtól különböző polinomnak véges sok gyöke van, ezért $f = \widehat{0}$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.4. gyakorló feladat.

1. Ha $\tau \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathcal{X}$, akkor

$$\begin{aligned} p(\tau x) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(\tau x) = \sum_{k=1}^{n} |\tau| \alpha_k p_k(x) = |\tau| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(x) = |\tau| p(x), \\ p(x+y) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(x+y) \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k (p_k(x) + p_k(y)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(y) = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

2. Mivel bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\alpha_k > 0$, ezért a feltétel azzal egyenértékű, hogy bármely $x \in \mathcal{X} \backslash \{0\}$ esetén $p(x) > 0$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.5. gyakorló feladat.

1. Világos, hogy $\|\cdot\|_1$ abszolút homogén, hiszen bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|\alpha f\|_1 = \int_a^b \|(\alpha f)(x)\| \, \mathrm{d}x = \int_a^b \|\alpha f(x)\| \, \mathrm{d}x = |\alpha| \cdot \int_a^b \|f(x)\| \, \mathrm{d}x = |\alpha| \cdot \|f\|_1.$$

A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, mivel bármely $f, g \in \mathcal{X}$, ill. $x \in [a, b]$ esetén

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_a^b \|f(x) + g(x)\| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b (\|f(x)\| + \|g(x)\|) \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \|f(x)\| \, \mathrm{d}x + \int_a^b \|g(x)\| \, \mathrm{d}x = \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

Ha valamely $f \in \mathcal{X}$ esetén $\|f\|_1 = 0$, akkor $\|f\| = 0$, azaz

$$f(x) = 0 \in \mathbb{R}^d \qquad (x \in [a, b]).$$

2. Világos, hogy $\|\cdot\|_2$ abszolút homogén, hiszen bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|\alpha f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \|(\alpha f)(x)\|^2 \, \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_a^b \|\alpha f(x)\|^2 \, \mathrm{d}x} = |\alpha| \cdot \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 \, \mathrm{d}x} = |\alpha| \cdot \|f\|_2.$$

A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, mivel bármely $f, g \in \mathcal{X}$, ill. $x \in [a, b]$ esetén

- egyrészt, ha $\|g\|_2^2 = 0$, azaz

$$\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

akkor

$$g(x) = 0 \in \mathbb{R}^d \qquad (x \in [a,b]),$$

a $\|g\|_2^2 \neq 0$ esetben pedig a

$$\lambda := \frac{\displaystyle\int_a^b \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x}$$

számmal

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (\|f(x)\| - \lambda\|g(x)\|)^2 \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x - 2\lambda \int_a^b \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \,\mathrm{d}x + \lambda^2 \int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x - \left(\int_a^b \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \,\mathrm{d}x\right)^2 \left(\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{-1}, \end{aligned}$$

azaz

$$\int_a^b \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x}$$

(Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség),

- másrészt pedig

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 &= \int_a^b \|f(x) + g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_a^b \|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \,\mathrm{d}x + \int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x + 2\sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x} + \\ &\quad + \int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x = \left(\sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b \|g(x)\|^2 \,\mathrm{d}x}\right)^2 = \\ &= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2, \end{aligned}$$

azaz

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Ha valamely $f \in \mathcal{X}$ esetén $\|f\|_2 = 0$, akkor $\|f\|^2 = 0$, azaz

$$f(x) = 0 \in \mathbb{R}^d \qquad (x \in [a,b]).$$

3. Világos, hogy $\|\cdot\|_\infty$ abszolút homogén, hiszen bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_\infty &= \max\{\|\alpha f(x)\| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = \\ &= |\alpha| \cdot \max\{\|f(x)\| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = \\ &= |\alpha| \cdot \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, mivel bármely $f, g \in \mathcal{X}$, ill. $x \in [a,b]$ esetén

$$\|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

így

$$\|f+g\|_\infty = \max\{\|f(x)+g(x)\| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ha valamely $f \in \mathcal{X}$ esetén $\|f\|_\infty = 0$, akkor

$$\max\{\|f(x)\| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} = 0, \qquad \text{azaz} \qquad f(x) = 0 \in \mathbb{R}^d \quad (x \in [a,b]). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.6. gyakorló feladat.

Ha $x, y \in \overline{\mathcal{A}}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor alkalmas

$$(x_n), (y_n) \in \mathcal{A}$$

sorozatok esetén

$$\lim(x_n) = x \qquad \text{és} \qquad \lim(y_n) = y.$$

Mivel $\mathcal{A}$ altér, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n + y_n \in \mathcal{A}$, ill. $\alpha x_n \in \mathcal{A}$ ahonnan

$$x + y = \lim(x_n + y_n) \in \overline{\mathcal{A}}$$

ill.

$$\alpha x = \lim(\alpha x_n) \in \overline{\mathcal{A}}$$

következik. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

Az 1.3.7. gyakorló feladat.

1. Ha az $x_n, y_n \in \mathcal{X}$, $\alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra

$$\lim(x_n) =: x \in \mathcal{X}, \qquad \lim(y_n) =: y \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lim(\alpha_n) =: \alpha \in \mathbb{K}$$

teljesül, akkor

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|(\alpha_n - \alpha)(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x + \alpha(x_n - x)\| \leq \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\|, \end{aligned}$$

ill.

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$$

következtében az állítás nyilvánvaló.

2. Ha $\lim(x_n) = a$, akkor f, ill. g folytonossága következtében

$$\lim(f(x_n)) = f(a), \qquad \text{ill.} \qquad \lim(g(x_n)) = g(a),$$

így

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a) = (f + g)(a) \qquad (n \to \infty).$$

3. Ha $\lim(x_n) = a$, akkor f, ill. g folytonossága következtében

$$\lim(f(x_n)) = f(a), \qquad \text{ill.} \qquad \lim(g(x_n)) = g(a),$$

így

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \longrightarrow f(a)g(a) = (fg)(a) \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.8. gyakorló feladat.

Ha

$$\alpha := \|x_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az (α_n) nemnegatív tagú sorozatra alkalmazva a hányados-, ill. a gyökkritériumot (vö. pl. [28]) a bizonyítandó állításokat kapjuk. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

Az 1.3.9. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A halmaz konvex, hiszen ha

$$x+\imath y, u+\imath v \in A, \qquad \text{ill.} \qquad \alpha \in [0{,}1],$$

akkor

$$\alpha(x+\imath y)+(1-\alpha)(u+\imath v)=\alpha x+(1-\alpha)u+\imath(\alpha y+(1-\alpha)v)$$

és

$$\begin{aligned}
&[\alpha x+(1-\alpha)u]^2+4\,[\alpha y+(1-\alpha)v]^2 = \\
=\;& \alpha^2x^2+2\alpha(1-\alpha)xu+(1-\alpha)^2u^2+4\,[\alpha^2y^2+2\alpha(1-\alpha)yv+(1-\alpha)^2v^2] = \\
=\;& \alpha^2(x^2+4y^2)+2\alpha(1-\alpha)(xu+4yv)+(1-\alpha)^2(u^2+4v^2) \leq \\
\leq\;& \alpha^2+2\alpha(1-\alpha)\frac{x^2+u^2+4y^2+4v^2}{2}+(1-\alpha)^2 \leq \\
\leq\;& \alpha^2+2\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2=(\alpha+1-\alpha)^2=1,
\end{aligned}$$

így

$$\alpha(x+\imath y)+(1-\alpha)(u+\imath v) \in A.$$

2. lépés. Az A halmaz szimmetrikus, hiszen ha

$$x+\imath y \in A, \qquad \text{ill.} \qquad \alpha \in \mathbb{R}: \; |\alpha|<1,$$

akkor

$$\alpha(x+\imath y)=\alpha x+\imath\alpha y$$

és

$$(\alpha x)^2+4(\alpha y)^2=\alpha^2(x^2+4y^2)\leq \alpha^2<1,$$

azaz

$$\alpha(x+iy)\in A. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.10. gyakorló feladat.

Ha $x, y \in A$ és $\alpha \in [0{,}1]$, akkor

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq p(\alpha x)+p((1-\alpha)y)=\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)<\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon=\varepsilon,$$

azaz

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A,$$

tehát A konvex.
Ha $x \in A$ és $|\alpha| \leq 1$, akkor

$$p(\alpha x) \leq |\alpha| p(x) \leq |\alpha|\varepsilon \leq \varepsilon,$$

azaz $\alpha x \in A$, tehát A szimmetrikus.
Ha $x \in \mathcal{X}$, akkor $p(x) = 0$ esetén az $\alpha := 1$ választással $\frac{x}{\alpha} \in A$ triviálisan teljesül. Ha viszont $x \in \mathcal{X}$ olyan, hogy $p(x) > 0$ és $\beta > 0$, akkor

$$p\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{p(x)}{\beta} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta > \frac{p(x)}{\varepsilon}.$$

Így az

$$\alpha := \frac{p(x)}{\varepsilon} + 1 > 0$$

számra

$$p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{x}{\alpha} \in A,$$

tehát A elnyelő. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.11. gyakorló feladat.

1. Mivel

$$y \in K_\varepsilon(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x + (y - x) \in x + K_\varepsilon(0),$$

ezért

$$K_\varepsilon(x) = x + K_\varepsilon(0).$$

2. Az 1.3.10. gyakorló feladat közvetlen következménye. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.12. gyakorló feladat.

Az állítás a nyom definíciójának következménye, ui. A^*A, ill. AA^* átlójának k-adik, ill. l-edik eleme $\|A_{*k}\|_2^2$-tel, ill. $\|A_{l*}\|_2^2$-tel egyezik meg, és bármely mátrix nyoma sajátrértékeinek összege. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.13. gyakorló feladat.

Ha

$$1 < d := m = n \in \mathbb{N},$$

akkor az $E \in \mathbb{K}^{d\times d}$ egységmátrixra

$$\|E\| = d > 1,$$

ami ellentmond az 1.3.25. példabeli állításnak. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.14. gyakorló feladat.

Ha

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n} \qquad \text{és} \qquad B \in \mathbb{K}^{n\times q},$$

akkor

$$\begin{aligned}
\|A\cdot B\|_c &= \sqrt{mq}\cdot \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{il}\right| \in \mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\},\, l\in\{1,\ldots,q\}\right\} \leq \\
&\leq \sqrt{mq}\cdot \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ki}|\cdot|b_{il}| \in \mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\},\, l\in\{1,\ldots,q\}\right\} \leq \\
&\leq \sqrt{mq}\cdot n\cdot \sup\{|a_{ki}|\in\mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\},\, i\in\{1,\ldots,n\}\}\cdot \\
&\quad \cdot \sup\{|b_{il}|\in\mathbb{R}:\ i\in\{1,\ldots,n\},\, l\in\{1,\ldots,q\}\} = \\
&= \sqrt{mn}\cdot \sup\{|a_{ki}|\in\mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\},\, i\in\{1,\ldots,n\}\}\cdot \\
&\quad \cdot\sqrt{nq}\,\sup\{|b_{il}|\in\mathbb{R}:\ i\in\{1,\ldots,n\},\, l\in\{1,\ldots,q\}\} = \\
&= \|A\|_c\cdot\|B\|_c. \quad ■
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.15. gyakorló feladat.

Ha

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \qquad \text{ill.} \qquad B \in \mathbb{K}^{n\times q}$$

és $x \in \mathbb{K}^n$, akkor

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_p^p &= \sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right|^p \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|^p|x_l|^p \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\sup\left\{|a_{kl}|^p \in \mathbb{R}:\ l\in\{1,\ldots,n\}\right\}\cdot\sum_{l=1}^{n}|x_l|^p \leq \\
&\leq m\cdot\sup\left\{|a_{kl}|^p\in\mathbb{R}:\ k\in\{1,\ldots,m\},\, l\in\{1,\ldots,n\}\right\}\cdot\|x\|_p^p = \\
&= \frac{m}{(\sqrt{mn})^p}\cdot\|A\|_c^p\cdot\|x\|_p^p \leq \frac{m}{(\sqrt{mn})^p}n^{p-1}\cdot\|A\|_c^p\cdot\|x\|_p^p = \\
&= \left(\frac{m}{n}\right)^{1-p/2}\cdot\|A\|_c^p\cdot\|x\|_p^p. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.16. gyakorló feladat.

1. Világos, hogy

$$\|A^*\|_2 = \sqrt{\mu_{max}((A^*)^*A^*)} = \sqrt{\mu_{max}(AA^*)} = \sqrt{\mu_{max}(A^*A)} = \|A^*\|_2.$$

Ha A unitér, akkor bármely $x \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax = x^*x = \|x\|_2^2,$$

így

$$\|A\|_2 = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{\|x\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = 1.$$

2. Mivel U unitér mátrix, ezért az indukált norma definícióját felhasználva

$$\begin{aligned}
\|AU\|_2 &= \sup\left\{\frac{\|(AU)x\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\|A(Ux)\|_2}{\|Ux\|_2}\in\mathbb{R}:\ x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \sup\left\{\frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}\in\mathbb{R}:\ y\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\} = \\
&= \|A\|_2,
\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}\|UA\|_2 &= \sup\left\{\frac{\|(UA)x\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\; x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\}= \\ &= \sup\left\{\frac{\|U(Ax)\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\; x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\}= \\ &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\in\mathbb{R}:\; x\in\mathbb{K}^d\backslash\{0\}\right\}= \\ &= \|A\|_2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.17. gyakorló feladat.

Az

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix nyilvánvalóan normális, és $\rho(A) = 1$. Azonban A Frobenius-normájára

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} > 1$$

teljesül. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.18. gyakorló feladat.

A p szubmultiplikatív, hiszen bármely $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ esetén

$$\begin{aligned} p(A\cdot B) &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left|\sum_{i=1}^{d} a_{ki}b_{kl}\right| \leq \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left\{\sum_{i=1}^{d}|a_{ki}|\cdot|b_{kl}|\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left\{\sum_{i=1}^{d}|a_{ki}|\cdot\sum_{k=1}^{d}|b_{kl}|\right\} = \left(\sum_{k,i=1}^{d}|a_{ki}|\right)\cdot\left(\sum_{k,l=1}^{d}|b_{kl}|\right) = \\ &= p(A)\cdot p(B). \end{aligned}$$

Ha

$$\varphi(x) := p(B(x)), \quad B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (x = (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{K}^d),$$

akkor

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{d} |x_k| = \|x\|_1 \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d).$$

a p-hez illeszkedő norma. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.19. gyakorló feladat.

Világos, hogy $\sigma(A) = \{0,1\}$, így $\rho(A) = 1$, továbbá

$$\|A\|_\infty = 2, \qquad \|A\|_1 = 4, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{6}, \qquad \|A\|_F = \sqrt{6}.$$

Mivel A háromszögmátrix (így A-nak a főátlójában vannak a sajátértékei), ezért az 1.3.107. feladatbeli transzformációt nem szükséges végrehajtani. Viszont W_ε és W_ε^{-1} szerepét fel kell cserélnünk, hiszen a Jordan-féle normálalakkal ellentétben A átlói alatt 0-tól különböző értékekek szerepelnek. Ha $\varepsilon > 0$ és $\delta := \varepsilon/2$, továbbá

$$V_\delta := \operatorname{diag}\{\delta^{-1}, \delta^{-2}, \delta^{-2}\},$$

akkor

$$V_\delta^{-1} = \operatorname{diag}\{\delta, \delta^2, \delta^2\},$$

és így

$$V_\delta^{-1} A V_\delta = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \\ 2\delta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezért a

$$\|B\|_\varepsilon := \|V_\delta^{-1} B V_\delta\|_\infty \qquad (B \in \mathbb{K}^{3\times 3})$$

mátrixnormával

$$\rho(A) = 1 \leq \|A\|_\varepsilon = \sup\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right\} \leq 1 + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon. \quad ■$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.20. gyakorló feladat.

Mivel $(l_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér (vö. [15]), ezért ha $x = (x_k) \in l_2$, akkor

$$\|x\|_\infty^2 = (\sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\})^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_\infty^2,$$

azaz $\|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$, így $l_2 \subset l_\infty$. Ezért, ha az $(x^{(n)}) = ((x^n)_k)$ sorozat Cauchy-sorozat $(l_2, \|\cdot\|_2)$-ben, akkor $(x^{(n)})$ Cauchy-sorozat $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$-ben is. Mivel $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ teljes normált tér (vö. 1.3.1/2. példa), ezért alklamas $x = (x_k) \in l_\infty$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = 0.$$

Azt kell tehát már csak megmutatni, hogy

$$x \in l_2 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_2 = 0.$$

Mivel $(x^{(n)})$ Cauchy-sorozat $(l_2, \|\cdot\|_2)$-ben, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $x^{(n)}$ konvergens $(l_2, \|\cdot\|_\infty)$-ben, ezért mnden $M \in \mathbb{N}$-hez van olyan $m_M \in \mathbb{N}$, hogy ha $m_M \geq N$, akkor

$$\left\|x^{(m)} - x\right\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\varepsilon}{2} \qquad (m_M \leq m \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^2} &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^2} \leq \\ &\leq \|x^{(n)} - x^{(n)}\|_2 + \sqrt{M}\|x^{(m)} - x\|_\infty < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N} \left(n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^2} \right),$$

azaz

$$x^{(n)} - x \in l_2 \qquad (n \geq N),$$

ami $x^{(n)} \in l_2$ miatt azt jelenti, hogy

$$x = x^{(n)} - (x^{(n)} - x) \in l_2, \qquad \text{ill.} \qquad \lim \left(\|x^{(n)} - x\|_2\right) = 0. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 1.3.21. gyakorló feladat.

Ha

$$f_n(x) := \sqrt{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}} \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in [a,b])$$

akkor

$$f \in \mathfrak{C}^1[a,b] \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad f_n \rightrightarrows f \quad (n \to \infty),$$

ahol

$$f(x) := \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \qquad (x \in [a,b]).$$

Ezért (f_n) Cauchy-sorozat a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, így a $(\mathfrak{C}^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben is. Világos, hogy $f \notin \mathfrak{C}^1[a,b]$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.22. gyakorló feladat.

A $\mathcal{H}$ halmaz nem prekompakt a $(\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben, hiszen $\mathcal{H}$ elemei nem egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak: van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $\delta > 0$ esetén alkalmas $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in [0,1]$: $|x-y| < \delta$ mellett

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon.$$

Ha ui. $n \in \mathbb{N}$, akkor az

$$|f_n(\pi/2n) - f_n(0)| = |\sin(\pi/2) - \sin(0)| = 1 =: \varepsilon$$

választással tetszőleges $\delta > 0$ esetén

$$\lim(\pi/2n) = 0,$$

így ha alkalmas $\mathbb{N} \ni n$-re

$$x := \pi/2n \qquad \text{és} \qquad y := 0,$$

akkor $|x-y| < \delta$. ■

vissza a feladathoz

Az 1.3.23. gyakorló feladat.

1. Mivel bármely $f \in \mathcal{H}_1$ esetén, ha $x \in [0,1]$ és $\alpha \in [1,2)$, akkor
   - $|f(x)| = |x^\alpha| \leq 1$, ezért $\mathcal{H}_1$ elemei egyenletesen korlátosak, így pontonként is korlátosak;

- $|f'(x)| = |\alpha x^{\alpha-1}| \leq 2$, így a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával (vö. 1.3.140. feladat) $f \in \mathfrak{LC}[0,1]$, ezért $\mathcal{H}_1$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak.

2. Világos, hogy az
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$
függvénysorozatra
$$f_n \in \mathcal{H}_2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Az (f_n) sorozat minden részsorozata pontonként az
$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in [0,1)), \\ \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$
függvényhez konvergál. Így az (f_n) sorozatnak nincsen egyenletesen konvergens részsorozata, azaz $\mathcal{H}_2$ nem prekompakt.
Megjegyzés. Az előzőekhez hasonlóan megmutatható, hogy $\mathcal{H}_2$ elemei egyenletesen korlátosak, így (vö. 1.3.2.tétel) $\mathcal{H}_2$ elemei nem egyformán folytonosak.

3. Mivel bármely $f \in \mathcal{H}_3$ esetén
$$|f'(x)| = \left|-\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq 1 \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}),$$
ezért a korábbiakhoz hasonlóan a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával (vö. 1.3.140. feladat) $f \in \mathfrak{LC}[0,1]$, így $\mathcal{H}_3$ elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. Viszont $\mathcal{H}_3$ elemei nem pontonként korlátosak, hiszen
$$f_n(0) = n\cos\left(\frac{0}{n}\right) \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty).$$
Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{H}_3$ nem prekompakt. ■

vissza a feladathoz

12.1.4. Euklideszi terek

Az 1.4.1. gyakorló feladat.

Valamely $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{X}$ esetén $x \in M^\perp$ pontosan akkor teljesül, ha
$$0 = \langle x, m \rangle = m_1 x_1 + \ldots + m_d x_d. \quad ■$$

vissza a feladathoz

Az 1.4.2. gyakorló feladat.

1. lépés. Mivel

$$\|x+\alpha y\|^2 = \langle x+\alpha y, x+\alpha v\rangle = \|x\|^2 + \alpha\overline{\alpha}\|y\|^2 + 2\Re(\alpha\langle x,y\rangle),$$

$$\|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha v\rangle = \|x\|^2 + \alpha\overline{\alpha}\|y\|^2 - 2\Re(\alpha\langle y,x\rangle),$$

ezért

$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad\Longleftrightarrow\quad \Re(\alpha\langle x,y\rangle)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \langle x,y\rangle = 0.$$

2. lépés. Házi feladat.

vissza a feladathoz

Az 1.4.3. gyakorló feladat.

1. Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n = 0 \qquad (x=\pm 1,\ k\in\{0,\ldots,n-1\}),$$

ezért bármely $m,n\in\mathbb{N}$, $n>m$ esetén (az $m>n$ eset ugyanígy tárgyalható) a

$$\varphi_n(x) := \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \qquad (x\in[-1{,}1],\ n\in\mathbb{N}_0)$$

függvényekre parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\varphi_n\varphi_m &= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x = \ldots\\ &= (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

hiszen $m+n>2m$. Ha pedig $m=n$, akkor – hasonlóan az iménti számításhoz – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\varphi_m\varphi_m &= (-1)^m\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x =\\ &= (2m!)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\,\mathrm{d}x = 0 = \frac{(m!)^2 2^{2m+1}}{2m+1}.\end{aligned}$$

2. Kétszer deriválva azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \begin{cases} f_n''(x) + (2n+1-x^2)f_n(x) = 0 & (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0)), \\ \\ f_m''(x) + (2m+1-x^2)f_m(x) = 0 & (x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}_0), \end{cases}$$

továbbá a Bernoulli-L'Hospital-szabály (vö. [19]) felhasználásával tetszőleges $a > 0$ és $k \in \mathbb{N}_0$ számra

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^k}{e^{-ax^2}} = 0.$$

Így parciálisan integrálva bármely $m, n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n' f_m &= \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f_n' f_m = \\ &= \lim_{N\to\infty} [f_n(x)f_m(x)]_{-N}^{N} - \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f_n f_m' = \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_n f_m' \end{aligned}$$

adódik. Hasonlóan látható be az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n'' f - m = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n f_m'' \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőség is. Így a $(*)$ egyenlőségeket f_m-mel, ill. f_n-nel szorozva kapjuk, hogy

$$(2n+1-2m-1) \int_{-\infty}^{+\infty} f_n f_m = 0 \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0).$$

Szintén parciálisan integrálva jutunk az

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} H_n'(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \ldots = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n!\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

egyenlőséghez. ■

vissza a feladathoz

Az 1.4.4. gyakorló feladat.

$$z_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad z_3(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1) \qquad (t \in [-1,1]).$$

vissza a feladathoz

12.2. A 4. fejezet gyakorló feladatai

Az 4.1.1. gyakorló feladat.

1. Az $\mathcal{N}(A)$ halmaz altér $\mathcal{D}(A)$-ban (így $\mathcal{X}$-ben is), hiszen bármely $u, v \in \mathcal{N}(A)$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén

$$A(u + \alpha v) = A(u) + \alpha A(v) = 0 + \alpha 0 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad u + \alpha v \in \mathcal{N}(A).$$

   Az $\mathcal{R}(A)$ halmaz altér $\mathcal{Y}$-ban, ui. tetszőleges $w, z \in \mathcal{R}(A)$ és $\beta \in \mathbb{K}$ esetén van olyan $u, v \in \mathcal{D}(A)$, hogy

$$A(u) = w, \qquad \text{ill.} \qquad A(v) = z,$$

   ahonnan

$$w + \beta z = A(u) + \beta A(v) = A(u + \beta v) \in \mathcal{R}(A)$$

   következik.

2. Világos, hogy a $0 \in \mathcal{X}$ elemre

$$A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0), \qquad \text{azaz} \qquad A(0) = 0 \in \mathcal{Y},$$

   továbbá A pontosan akkor injektív, ha bármely $u, v \in \mathcal{D}(A)$, $u \neq v$ esetén

$$A(u) \neq A(v), \qquad \text{azaz} \qquad A(u - v) = A(u) - A(v) \neq 0.$$

3. Ez az állítás nyilvánvaló, hiszen $\mathcal{R}(A)$ nem más, mint az A értékkészlete. ■

vissza a feladathoz

A 4.1.2. gyakorló feladat.

Mivel a differenciáloperátor lineáris, ezért az injektivitáshoz használhatjuk a 4.1.1/2. gyakorló feladatban megfogalmazott állítást.

1. lépés. Világos, hogy az

$$f(x) := c \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \qquad (x \in [a, b])$$

függvényre $f \in \mathcal{N}(A)$, ill. $\kappa = 1$ esetén $f \in \mathcal{N}(A_4)$, ezért

$$\mathcal{N}(A) \neq \{0\} \neq \mathcal{N}(A_4),$$

azaz A, ill. $\kappa = 1$ esetén A_4 nem injektív.

2. lépés. A_1 injektív, hiszen ha

$$A_1 f(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$f(x) = 0 \qquad (x \in [a,b]).$$

Látható,hogy

$$\mathcal{D}(A_1^{-1}) = \mathcal{X},$$

hiszen ha $g \in \mathcal{X}$, akkor az

$$f(x) := \int_a^x g \qquad (x \in [a,b])$$

vektorra

$$f \in \mathcal{D}(A_1) \qquad \text{és} \qquad A_1 f = g,$$

azaz

$$(A_1^{-1} g)(x) = \int_a^x g \qquad (g \in \mathcal{X},\ x \in [a,b]).$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$\mathcal{D}(A_2^{-1}) = \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad (A_2^{-1} g)(x) = -\int_x^b g \qquad (g \in \mathcal{X},\ x \in [a,b]),$$

$$\mathcal{D}(A_3^{-1}) = \left\{ g \in \mathcal{X} :\ \int_a^b g = 0 \right\}$$

és

$$(A_3^{-1} g)(x) = \int_a^x g \quad (g \in \mathcal{D}(A_3^{-1}),\ x \in [a,b]),$$

ill. $\kappa \neq 1$ esetén

$$\mathcal{D}(A_4^{-1}) = \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad (A_4^{-1} g)(x) = \int_a^x g + \frac{\kappa}{1-\kappa} \int_a^b g \qquad (g \in \mathcal{X},\ x \in [a,b]). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.1.3. gyakorló feladat.

1. lépés. Látható, hogy $\mathcal{D}(A) \neq \emptyset$, sőt az $(l_p, \|\cdot\|_p)$ normált teret tekintve az is elmondható, hogy

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = l_p$$

(vö. 3.2.3. feladat). Az A operátor lineáris, hiszen bármely

$$x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

esetén $(a_n x_n), (a_n y_n) \in l_q$-ból $(a_n(x_n + \alpha y_n)) \in l_q$, azaz $x + \alpha y \in \mathcal{D}(A)$ következik.

2. lépés. Mivel

$$\mathcal{N}(A) = \{x = (x_n) \in l_p : \; (a_n x_n) \in l_q, \, a_n x_n = 0 \, (n \in \mathbb{N})\} \, ,$$

úgy A pontosan akkor injektív, ha

$$a_n \neq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezért injektív A, ill. valamely $y = (y_n) \in l_q$ esetén $Ax = y$ pontosan akkor teljesül, ha

$$y_n = a_n x_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_n = \frac{y_n}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az inverz operátor az

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozathoz tartozó (l_q-ból l_p-be képező diagonáloperátor). ■

vissza a feladathoz

A 4.1.4. gyakorló feladat.

1. lépés. Látható, hogy $\mathcal{D}(A) \neq \emptyset$, sőt az $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ normált teret tekintve az is elmondható, hogy

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = L^p(\Omega),$$

azaz A ún. **sűrűn értelmezett operátor**, hiszen ha $f \in L^p(\Omega)$, akkor az

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : \; |\varphi(x)| \leq n, \, \|x\|_2 \leq n, \, |f(x)| \leq n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

izoton halmazsorozatra nyilvánvalóan

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n,$$

és így az

$$f_n := \chi_{\Omega_n} f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatra

$$f_n \in \mathcal{D}(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ill. a Lebesgue-tétel következtében

$$f_n \to f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

/ $L^p(\Omega)$-ban/. Az A lineáris, hiszen bármely

$$f, g \in \mathcal{D}(A), \qquad \text{ill.} \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

esetén $\varphi f, \varphi g \in L^q(\Omega)$-ból

$$\varphi(f + \alpha g) \in L^q(\Omega),$$

azaz

$$\varphi(f + \alpha g) \in \mathcal{D}(A)$$

következik.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy A pontsan akkor injektív, ha $\varphi(x) \neq 0$ (m.m. $x \in \Omega$).

- Ha A injektív és

  $$\Omega_0 := \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}, \quad \text{ill.} \quad N := \{f \in L^p(\Omega) : \ f(x) = 0\, (x \in \Omega \backslash \Omega_0)\},$$

  akkor bármely $f \in N$ esetén

  $$f \in \mathcal{D}(A) \qquad \text{és} \qquad Af = 0.$$

  Így A injektivitása folytán $f = 0$. Ez azt jelenti, hogy Ω_0 nullmértékű halmaz.
- Ha m.m. $x \in \Omega$ esetén

  $$\varphi(x) \neq 0 \qquad \text{és} \qquad Af = 0,$$

  akkor

  $$\varphi(x) f(x) = 0 \qquad (\text{m.m.} \quad x \in \Omega),$$

  így $f(x) = 0$ (m.m. $x \in \Omega$), azaz $f = 0$.

Világos, hogy injektív A esetén A^{-1} nem más, mint a

$$\psi(x) := \begin{cases} 1/\varphi(x) & (x \in \Omega : \ \varphi(x) \neq 0), \\ \\ 0 & (x \in \Omega : \ \varphi(x) = 0) \end{cases}$$

függvénnyel való szorzás operátora.

Megjegyzés. Ha $p = q$ esetén van olyan $K > 0$ szám, amellyel

$$|\varphi(x)| \leq K \qquad (\text{m.m.} \quad x \in \Omega),$$

akkor $\mathcal{D}(A) = L^p(\Omega)$, hiszen ekkor bármely $f \in L^p(\Omega)$ esetén $\varphi f \in L^p(\Omega)$. ■

vissza a feladathoz

A 4.1.5. gyakorló feladat.

Ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ injektív, és $u, v \in \mathcal{R}(A)$, továbbá

$$x := A^{-1}u \in \mathcal{D}(A), \qquad \text{ill.} \qquad y := A^{-1}v \in \mathcal{D}(A),$$

akkor

$$Ax = u, \qquad \text{ill.} \qquad Ay = v,$$

így A linearitása alapján tetszőleges $\alpha \in \mathbb{K}$ számra

$$A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay = u + \alpha v$$

teljesül. Ismét felhasználva A^{-1} definícióját

$$A^{-1}(u + \alpha v) = x + \alpha y = A^{-1}u + \alpha A^{-1}v$$

adódik. ■

vissza a feladathoz

A 4.1.6. gyakorló feladat.

1. Ha $A, B, C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((A+B)+C) &= (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)) \cap \mathcal{D}(C) = \\ &= \mathcal{D}(A) \cap (\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C)) = \\ &= \mathcal{D}(A + (B + C)), \end{aligned}$$

és bármely

$$x \in \mathcal{D}((A+B)+C) = \mathcal{D}(A + (B + C))$$

esetén

$$\begin{aligned} ((A+B)+C)x &= (A+B)x + Cx = Ax + Bx + Cx = \\ &= Ax + (B+C)x = (A + (B+C)x, \end{aligned}$$

azaz

$$(A+B)+C = A + (B+C).$$

Hasonlóan igaz, hogy

$$\mathcal{D}(A+B) = D(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B+A),$$

és bármely

$$x \in \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(B+A)$$

esetén

$$(A+B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B+A)x,$$

azaz

$$A + B = B + A.$$

2. Ha

$$C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}), \qquad B \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{W}) \qquad \text{és} \qquad A \in \mathfrak{L}(\mathcal{W} \curvearrowright \mathcal{Z}),$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((AB)C) &= \{x \in \mathcal{D}(C) :\, Cx \in \mathcal{D}(B),\, BCx \in \mathcal{D}(A)\} = \\ &= \{x \in \mathcal{D}(BC) :\, BCx \in \mathcal{D}(A)\} = \mathcal{D}(A(BC)), \end{aligned}$$

és bármely

$$x \in \mathcal{D}((AB)C) = \mathcal{D}(A(BC))$$

esetén

$$((AB)Cx = (AB)(Cx) = A(B(Cx)) = A(BC)x,$$

azaz

$$(AB)C = (A(BC).$$

Ha

$$C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}), \qquad \text{és} \qquad A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{W}),$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{D}((A+B)C) &= \{x \in \mathcal{D}(C) :\; Cx \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)\} = \\ &= \{f \in \mathcal{D}(C) :\; Cx \in \mathcal{D}(A)\} \cap \{x \in \mathcal{D}(C) :\; Cx \in \mathcal{D}(B)\} = \\ &= \mathcal{D}(AC) \cap \mathcal{D}(BC) = \mathcal{D}(AC + BC), \end{aligned}$$

és bármely

$$x \in \mathcal{D}((A+B)C) = \mathcal{D}(AC + BC)$$

esetén

$$(A+B)Cx = ACx + BXx = (AC + BX)x,$$

azaz

$$(A+B)C = AC + BC.$$

3. Ha
$$B, C \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}), \qquad \text{és} \qquad A \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y} \curvearrowright \mathcal{W}),$$
akkor
$$\begin{aligned} \mathcal{D}(AB + AC) &= \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(AC) = \\ &= \{x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C) : \; Bx \in \mathcal{D}(A), \, Cx \in \mathcal{D}(A)\} \subset \\ &\subset \{x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(C) : \; Bx + Cx \in \mathcal{D}(A)\} = \\ &= \mathcal{D}(A(B + C)), \end{aligned}$$
és bármely
$$x \in \mathcal{D}(AB + AC) \subset \mathcal{D}(A(B + C))$$
esetén
$$(AB + AC)x = ABx + ACx = A(Bx + Cx) = A(B + C)x,$$
azaz
$$AB + AC \subset A(B + C). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 4.1.7. gyakorló feladat.

Bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén
$$\begin{aligned} (A^2 f)(x, y) &= (A(Af))(x, y) = \frac{1}{2}\{(Af)(x, y) - (Af)(y, x)\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{f(x, y) - f(y, x)}{2} - \frac{f(y, x) - f(x, y)}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{4}(2f(x, y) - 2f(y, x)) = (Af)(x, y). \end{aligned}$$
Látható, hogy az
$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} : \; f \text{ szimmetrikus}\}$$
és az
$$\mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} : \; f \text{ antiszimmetrikus}\}$$
alterekre
$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$$
teljesül, hiszen bármely
$$(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$$

esetén

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y)+f(y,x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x,y)-f(y,x)\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.1. gyakorló feladat.

Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$|\widehat{u}(n)| \leq \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty,$$

ezért

$$\|\widehat{u}\|_{l_\infty} = \sup\{|\widehat{u}(n)| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{Z}\} \leq \|f\|_\infty. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.2. gyakorló feladat.

Világos, hogy valamely $K \geq 0$ pontosan akkor korlátja A-nak, ha K felső korlátja a

$$\left\{ \frac{\|Ax\|_\mathcal{Y}}{\|x\|_\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \; 0 \neq x \in \mathcal{D}(A) \right\}$$

(valós) számhalmaznak. Így, ha

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \sup\left\{ \frac{\|Ax\|_\mathcal{Y}}{\|x\|_\mathcal{X}} \in \mathbb{R} : \; 0 \neq x \in \mathcal{D}(A) \right\}, \\
K_2 &:= \sup\left\{ \|Ax\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \; x \in \mathcal{D}(A), \; \|x\|_\mathcal{X} = 1 \right\}, \\
K_3 &:= \sup\left\{ \|Ax\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \; x \in \mathcal{D}(A), \; \|x\|_\mathcal{X} \leq 1 \right\}, \\
K_4 &:= \sup\left\{ \|Ax\|_\mathcal{Y} \in \mathbb{R} : \; x \in \mathcal{D}(A), \; \|x\|_\mathcal{X} < 1 \right\},
\end{aligned}$$

akkor $K_1 < +\infty$ esetén

$$\|A\| = K_1.$$

Ha valamely $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\|x\|_\mathcal{X} = 1,$$

akkor

$$\frac{\|Ax\|_\mathcal{Y}}{\|x\|_\mathcal{X}} = \|Ax\|_\mathcal{Y},$$

ezért

$$K_2 \leq K_1, \qquad K_2 \leq K_3, \qquad \text{ill.} \qquad K_4 \leq K_3.$$

Ha $0 \neq x \in \mathcal{D}(A)$, akkor

$$\frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \left\| A\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \right\|_{\mathcal{Y}}$$

és

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \right\| = 1,$$

ahonnan

$$K_1 \leq K_2, \qquad \text{azaz} \qquad K_2 = K_1$$

következik. Ha

$$0 < \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1,$$

akkor

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}},$$

azaz

$$K_3 \leq K_1 = K_2, \qquad \text{tehát} \qquad K_3 = K_2.$$

Végül ha

$$x_n \in \mathcal{D}(A), \quad \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim(\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}}) = K_2,$$

akkor az

$$u_n := \frac{n}{n+1}x_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$\|u_n\|_{\mathcal{X}} = \frac{n}{n+1} < 1 \qquad \text{és} \qquad \lim(\|Au_n\|_{\mathcal{Y}}) = \lim\left(\frac{n}{n+1}\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}}\right) = K_2.$$

Innen pedig az következik, hogy

$$K_4 \geq K_2 = K_3, \qquad \text{azaz} \qquad K_4 = K_3. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.3. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A operátorra $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui. egyrészt

$$Au \in \mathbb{K} \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

hiszen $u \in \mathcal{X}$ miatt van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|u_n| \leq 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

és így a majoránskritérium miatt

$$0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty,$$

másrészt, ha $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A(u+\alpha v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + \alpha v_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{2^n} = Au + \alpha Av.$$

2. lépés. Az A operátorra $A \in L(\mathcal{X})$, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Au\|_{\mathcal{Y}} &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sup\{|u_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}}{2^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|_{\mathcal{X}}}{2^n} = \|u\|_{\mathcal{X}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|u\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

3. lépés. Az A operátor normájára

$$\|A\| = 1,$$

ui. egyrészt a fentiekből

$$\|Au\|_{\mathcal{Y}} \leq 1 \qquad (u \in \mathcal{X} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} \leq 1),$$

ennélfogva

$$\|A\| \leq 1,$$

másrészt

$$\sup\{\|Au\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ \|u\|_{\mathcal{X}} = 1\} = 1,$$

hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

következtében

$$\forall \varepsilon \in (0{,}1)\ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} > 1 - \varepsilon,$$

így az

$$x_n := \begin{cases} 1 & (n \leq N), \\ \\ 0 & (n > N) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$(x_n) \in \mathfrak{c}_0, \qquad \|(x_n)\|_\infty = 1,$$

továbbá

$$|A(x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\right| = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} > 1-\varepsilon,$$

azaz

$$1-\varepsilon < |A(x_n)| = \|A(x_n)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|(x_n)\|_{\mathcal{X}} = \|A\|. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.4. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A operátorra

$$A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}),$$

ui. egyrészt

$$Au \in \mathbb{R} \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

hiszen ha $u \in \mathcal{X}$, akkor

$$\|Au\|_{l_2}^2 = 0 + 16|u_1|^2 + |u_2|^2 + 16|u_3|^2 + |u_4|^2 + \ldots \leq 16 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty,$$

másrészt, ha $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} A(u+\alpha v) &= (0{,}4(u_2+\alpha v_2), u_2+\alpha v_2{,}4(u_3+\alpha v_3)), u_4+\alpha v_4, \ldots) = \\ &= (0{,}4u_1, u_2{,}4u_3, u_4, \ldots) + \alpha(0{,}4v_1, v_2{,}4v_3, v_4, \ldots) = \\ &= Au + \alpha Av. \end{aligned}$$

2. lépés. Az A operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

ui. bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Au\|_{l_2}^2 = \|0{,}4u_1, u_2{,}4u_3, u_4, \ldots\|_{l_2}^2 \leq 16\|u\|_{l_2}^2.$$

3. lépés. Az A operátor normájára

$$\|A\| = 4,$$

ui. egyrészt a fentiekből

$$\|Au\| \leq 4 \qquad (u \in X: \ \|u\| \leq 1),$$

ennélfogva

$$\|A\| \leq 4,$$

másrészt, ha

$$u := (1{,}0{,}0, \ldots),$$

akkor

$$\|u\|_{l_2} = 1$$

és

$$4 = \|(0{,}4{,}0, \ldots)\|_{l_2} = \|Au\| \leq \|A\| \cdot \|u\|_{l_2} = \|A\|. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.5. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A operátorra $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ui. ha $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(0) = f(0) + \alpha g(0) = Af + \alpha Ag.$$

2. lépés. Az A operátorra $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ui. bármely $f \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|Af\|_{\mathcal{Y}} = |f(0)| \leq \sup\{|f(t)| : \ t \in [0{,}1]\} = \|f\|_{\infty} = \|f\|_{\mathcal{X}};$$

3. lépés. Az A operátor normájára

$$\|A\| = 1,$$

ui. egyrészt a fentiekből

$$\|Af\|_{\mathcal{Y}} \leq 1 \qquad (f \in \mathcal{X} : \ \|f\|_{\mathcal{X}} \leq 1),$$

ennélfogva

$$\|A\| \leq 1,$$

másrészt

$$\sup\{\|Af\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ \|f\|_{\mathcal{X}} = 1\} = 1,$$

hiszen a

$$\varphi : [0{,}1] \to \mathbb{K}, \qquad \varphi(t) := 1$$

függvényre

$$\varphi \in \mathfrak{C}[0{,}1] \qquad \text{és} \qquad \|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| \in \mathbb{R} : \ t \in [0{,}1]\} = 1,$$

ahonnan

$$1 = |\varphi(0)| = |A\varphi| \leq \|A\varphi\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{X}} = \|A\|$$

következik. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

A 4.2.6. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A operátorra $A_\alpha \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui.[1] ha $u, v \in \mathcal{X}$ és $\mu \in \mathbb{R}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} A_\alpha(u+\mu v)(x) &= (u+\mu v)(x-\alpha) = u(x-\alpha)+\mu v(x-\alpha) = \\ &= \lambda A_\alpha u(x) + \mu A_\alpha v(x). \end{aligned}$$

2. lépés. Az A_α operátor normájára $A_\alpha \in L(\mathcal{X})$ és $\|A_\alpha\| = 1$, ui.

$$\|A_\alpha u\|_{L^2}^2 = \int |u(\cdot - \alpha)|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int |u|^2 \, \mathrm{d}\mu_1 = \|u\|_{L^2}^2 \qquad (u \in \mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.7. gyakorló feladat.

1. lépés. Az A operátorra $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui. ha $u, v \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} A(u+\alpha v) &= \sum_{y\in S} \langle u+\alpha v, y\rangle y = \sum_{y \in S} \{\langle u, y\rangle y + \alpha \langle v, y\rangle y\} = \\ &= \sum_{y\in S} \langle u, y\rangle y + \alpha \sum_{y\in S} \langle v, y\rangle y = Au + \alpha Av. \end{aligned}$$

2. lépés. Az A operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| \le 1,$$

ui. a Pitagorasz-tétel egy általánosítása és a Bessel-egyenlőtlenség (vö. 1.4.37. és 1.4.53. feladat) miatt bármely $u \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &= \left\| \sum_{y\in S} \langle u, y\rangle y \right\|^2 = \sum_{y\in S} \|\langle u, y\rangle \, y\|^2 = \\ &= \sum_{y\in S} |\langle u, y\rangle|^2 \cdot \|y\|^2 = \sum_{y \in S} |\langle u, y\rangle|^2 \le \\ &\le \|u\|^2, \end{aligned}$$

így

$$\|Au\| \le \|u\|,$$

ahonnan $\|A\| \le 1$ következik.

[1] Belátható, hogy bármely $u \in L^2(\mathbb{R})$ esetén $u(\cdot - \alpha) \in L^2(\mathbb{R})$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

3. lépés. Ha $y \in S$, akkor $Ay = y$, így

$$\|A\| \cdot \|y\| \geq \|Ay\| = \|y\|,$$

azaz $1 \leq \|A\|$. Ez azt jelenti, hogy

$$\|A\| = 1.$$

Megjegyzés. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2, \qquad S := \{e_1, e_2\},$$

akkor Au nem más, mint az $u \in \mathcal{X}$ merőleges vetülete az $\mathrm{span}\,(S)$ altéren:

$$Au = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.8. gyakorló feladat.

1. lépés. Mivel bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
(A(f+\alpha g))(x) &= (f+\alpha g)(0) + \{(f+\alpha g)(1) - (f+\alpha g)(0)\}\, x = \\
&= f(0) + \alpha g(0) + f(1)x + \alpha g(1)x - f(0)x - \alpha g(0)x = \\
&= f(0) + (f(1) - f(0))x + \alpha g(0) + \alpha(g(1) - g(0))x = \\
&= (Af + \alpha Ag)(x) \quad (x \in [0,1]),
\end{aligned}$$

ezért $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$.

2. lépés. Minden $f \in \mathcal{X}$ és $x \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}
|(Af)(x)| &= |f(0) + (f(1) - f(0))x| = |f(0)(1-x) + f(1)x| \leq \\
&\leq |f(0)|(1-x) + |f(1)|x \leq \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,1]\}\,(1-x) + \\
&\quad + \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,1]\}\, x = \\
&= \sup\{|f(x)| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,1]\} = \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

így

$$\|Af\| \leq \|f\|,$$

ahonnan $A \in L(\mathcal{X})$, ill. $\|A\| \leq 1$ következik.

3. lépés. Ha

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\varphi \in \mathcal{X}, \qquad \|\varphi\|_\infty = 1$$

és

$$\begin{aligned} 1 &= \sup\{|x| \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\} = \\ &= \sup\{|\varphi(0) + (\varphi(1) - \varphi(0))x| \in \mathbb{R} :\ x \in [0,1]\} = \\ &= \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vissza a feladathoz

A 4.2.9. gyakorló feladat.

1. lépés. Ha $p \in [1, +\infty)$, akkor

$$\|Bu\|_{l_p} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

ill. $p = +\infty$ esetén

$$\|Bu\|_{l_\infty} = \sup\{|u_n| \in \mathbb{R} :\ 2 \leq n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|u_n| \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\} = \|u\|_{l_\infty} \qquad (u \in l_\infty),$$

és az

$$e_2 := (0,1,0,0,\ldots)$$

sorozatra bármely $p \in [1, +\infty]$ esetén

$$\|Be_2\|_{l_p} = 1.$$

2. lépés. Ha $p \in [1, +\infty)$, akkor

$$\|Ju\|_{l_p} = \left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \qquad (u \in l_p),$$

ill. $p = +\infty$ esetén

$$\|Ju\|_{l_\infty} = \sup\{|u_n| \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\} = \|u\|_{l_\infty} \qquad (u \in l_\infty). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.10. gyakorló feladat.

1. lépés. $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, ui. bármely $f, g \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén esetén

$$\begin{aligned} A(f+\alpha g)(t) &= \int_0^\pi \cos(tx)(f+\alpha g)(x)\,dx = \int_0^\pi \cos(tx)f(x)\,dx + \\ &\quad +\alpha \int_0^\pi \cos(tx)g(x)\,dx = \\ &= Af(t) + \alpha Ag(t) \quad (t \in [0,\pi]). \end{aligned}$$

2. lépés. Mivel bármely $t \in [0,\pi]$ esetén

$$|Af(t)| = \left| \int_0^\pi \cos(tx)f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^\pi |\cos(tx)| \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \cdot \int_0^\pi |\cos(tx)|\,\mathrm{d}x,$$

és

$$\int_0^\pi |\cos(tx)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi, \qquad \text{ill.} \qquad \int_0^\pi |\cos(0x)|\,\mathrm{d}x = \pi,$$

ezért

$$|Af(t)| \leq \|f\|_\infty \cdot \max\left\{ \int_0^\pi |\cos(tx)|\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} : \ t \in [0,\pi] \right\} = \|f\|_\infty \cdot \pi,$$

ahonnan

$$A \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|A\| \leq \pi$$

következik.

3. lépés. Ha

$$\varphi(t) := 1 \qquad (t \in [0,\pi]),$$

akkor

$$\|\varphi\|_\infty = 1$$

és

$$\pi = \left| \int_0^\pi \cos(0x)\,\mathrm{d}t \right| = |A\varphi(0)| \leq \sup_{t\in[0,\pi]} |A\varphi(t)| = \|A\varphi\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_\infty = \|A\|,$$

tehát

$$\|A\| = \pi. \qquad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.2.11. gyakorló feladat.

A $\mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R})$ téren a $\|\cdot\|_\infty$ normát bevezetve azt kapjuk, hogy

1. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| \leq \int_0^1 |u| \leq 1,$$
így $\|\phi\| \leq 1$. Mivel az
$$u(x) := 1 \qquad (x \in [-1,1])$$
függvényre $\phi(u) = 1$, így $\|\phi\| = 1$.

2. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| \leq \int_{-1}^1 |u| \leq 2,$$
így $\|\phi\| \leq 2$. Mivel bármely $\varepsilon \in (0,1)$ esetén a
$$\varphi_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & (x < -\varepsilon), \\ x/\varepsilon & (-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon), \\ 1 & (x > \varepsilon) \end{cases} \qquad (x \in [-1,1])$$
függvényre
$$\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R}),$$
ezért
$$\phi(\varphi_\varepsilon) = 2 - 2\varepsilon + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \operatorname{sgn}(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \geq 2 - 4\varepsilon,$$
így
$$\|\phi\| \geq 2 - 4\varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \|\phi\| = 2.$$

3. bármely
$$u \in \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R}), \qquad \|u\|_\infty \leq 1$$
esetén
$$|\phi(u)| \leq \int_{-1}^1 |u(x)|\,\mathrm{d}x + |u(0)| \leq \int_{-1}^1 \|u\|_\infty\,\mathrm{d}x + |u(0)| \leq 3,$$
így $\|\phi\| \leq 3$. Ha bármely $\varepsilon \in (0,1)$ esetén
$$\varphi_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

olyan folytonos függvény, amelyre

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & (x < -\varepsilon), \\ -(2/\varepsilon)x - 1 & (-\varepsilon < x < 0), \\ (2/\varepsilon)x - 1 & (0 < x < \varepsilon), \\ 1 & (x > \varepsilon), \end{cases}$$

akkor

$$\phi(\varphi_\varepsilon) = 3 - 2\varepsilon + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon \geq 3 - 2\varepsilon,$$

ezért

$$\|\phi\| \geq 3 - 2\varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \|\phi\| = 3. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.3.1. gyakorló feladat.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \sqrt[4]{n} - n\sqrt[4]{n}x & (x \in [0,1/n)), \\ 0 & (x \in [1/n,1]), \end{cases}$$

akkor

$$\left\|\varphi_n - \widehat{0}\right\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{3\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

de

$$\varphi_n(0) \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.4.1. gyakorló feladat.

Az

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$$

normált tér, ill. a $\varphi \in L(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ folytonos lineáris funkcionál esetében, ha

$$e_1, \ldots, e_d$$

jelöli az $\mathbb{R}^d$-beli kanonikus bázist, akkor bármely

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

vektorra

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{d} x_k \varphi(e_k) =: \sum_{k=1}^{d} x_k \alpha_k =: \langle x, \alpha \rangle .$$

Így a Hölder-egyenlőtlenség (vö. 11.2. fejezet) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|\varphi(x)| = |\,\langle x,\alpha\rangle\,| \leq |x_1\alpha_1| + \ldots + |x_d\alpha_d| \leq \|x\|_p \cdot \|\alpha\|_q,$$

ahonnan

$$\|\varphi\| \leq \|\alpha\|_q$$

következik. Világos, hogy ha

$$u := (u_1, \ldots, u_d),$$

ahol

$$u_k := |\alpha_k|^{q-1}\mathrm{sgn}\,(\alpha_k) \qquad (k \in \{1, \ldots, d),$$

akkor a

$$q = p(q-1), \qquad |\alpha_k|^q = |\alpha_k|^{p(q-1)} = |u_k|^p$$

egyenlőségek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\varphi(u)| &= |\,\langle u,\alpha\rangle\,| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1/p} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} = \|\alpha\|_q \cdot \|u\|_p, \end{aligned}$$

amiből

$$\|\varphi\| = \|\alpha\|_q$$

következik. Így a

$$\Phi : (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_q) \to (\mathcal{X}^*, \|\cdot\|), \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \mapsto \varphi_a$$

leképezés izometrikus izomorfizmus, ahol

$$\varphi_\alpha(x) := \sum_{k=1}^{d} \alpha_k x_k \qquad \left(x = (x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.5.1. gyakorló feladat.

1. lépés. Az $\mathcal{A}$ halmaz altér, ui. ha $(a,a,a), (b,b,b) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$(a,a,a) + \alpha(b,b,b) = (a+\alpha b, a+\alpha b, a+\alpha b) \in \mathcal{A}.$$

2. lépés. Világos, hogy $f \in \mathcal{A}^*$, ui. ha $(a,a,a),(b,b,b) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f((a,a,a)+\alpha(b,b,b)) &= f(a+\alpha b, a+\alpha b, a+\alpha b) = \\ &= a+\alpha b = f(a,a,a)+\alpha f(b,b,b) \end{aligned}$$

és $\mathcal{X}$ véges dimenziós (vö. 4.2.33. ill. 4.3.1. feladat).

3. lépés. Az f funkcionál normájára

$$\|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ui.

- minden $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\|(x,x,x)\|_2 = \sqrt{3}\cdot|x|,$$
ezért
$$|f(x,x,x)| = |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot|x| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\|(x,x,x)\|_2,$$
így
$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}};$$
- mivel
$$\|(1,1,1)\|_2 = \sqrt{3},$$
ezért
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot|f(1,1,1)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\|f\|\cdot\|(1,1,1)\|_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\|f\|\cdot\sqrt{3} = \|f\|. \end{aligned}$$

4. lépés. Így tehát van olyan $F \in \mathcal{X}^*$:

$$f \subset F, \qquad \|F\| = \|f\|,$$

és pontosan egy olyan $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ van, hogy

$$F(x,y,z) = ax+by+cz \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3), \qquad \|F\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Következésképpen

$$x = f(x,x,x) = F(x,x,x) = (a+b+c)x \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

azaz

$$a+b+c=1, \qquad \text{ill.} \qquad \|(a,b,c)\|_2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

azaz

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}.$$

Mivel

$$\left(a+b+c=1 \quad \wedge \quad a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad a^2-\frac{2a}{3}+b^2-\frac{2b}{3}+c^2-\frac{2c}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\left(c-\frac{1}{3}\right)^2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a=b=c=\frac{1}{3},$$

ezért

$$F(x,y,z)=\frac{x+y+z}{3} \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 4.5.2. gyakorló feladat.

1. lépés. Az $\mathcal{A}$ halmaz altér, hiszen ha $(a,b,c),(u,v,w)\in\mathcal{A}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor

$$a+b+c=0=u+v+w,$$

így

$$(a,b,c)+\alpha(u,v,w)=(a+\alpha u,b+\alpha v,c+\alpha w)\in\mathcal{A},$$

hiszen

$$a+\alpha u+b+\alpha v+c+\alpha w=(a+b+c)+\alpha(u+v+w)=0+0=0.$$

2. lépés. Az f funkcionálra $f\in\mathcal{A}^*$, ui. ha $(a,b,c),(u,v,w)\in\mathcal{A}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f((a,b,c)+\alpha(u,v,w)) &= f(a+\alpha u,b+\alpha v,c+\alpha w)=a+\alpha u+b+\alpha v= \\ &= (a+b)+\alpha(u+v)=f(a,b,c)+\alpha f(u,v,w), \end{aligned}$$

és $\mathcal{X}$ véges dimenziós (vö. 4.2.33. ill. 4.3.1. feladat).

3. lépés. Az f funkcionál normájára

$$\|f\|=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

ui.

- Mivel minden $(x,y,z)\in\mathcal{A}$ esetén $z=-(x+y)$, ezért olyan $K\geq 0$ számot keresünk, amelyre

$$|f(x,y,z)|=|x+y|\leq K\|(x,y,z)\|_2=K\sqrt{x^2+y^2+(-x-y)^2} \quad (x,y\in\mathbb{R}),$$

azaz

$$(x+y)^2 \leq K^2\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right) \qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

A számtani és a négyzetes közép közötti

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{(x+y)^2}{2} \leq x^2+y^2 \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

alapján

$$K^2\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right) \geq \frac{3}{2}K^2(x+y)^2 \qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Így a

$$K := \sqrt{\frac{2}{3}}$$

választással

$$|f(x,y,z)| \leq K\|(x,y,z)\|_2 \qquad (x,y,z\in\mathbb{R}),$$

amiből

$$\|f\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

következik.

- Mivel

$$\|(1,1,-2)\|_2 = \sqrt{6},$$

ezért

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot|f(1,1,-2)| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\|f\|\cdot|(1,1,-2)\|_2 = \|f\|.$$

Megjegyzés. A norma definíciója miatt olyan $\xi := (x,y,z) \in \mathcal{A}$ elemet keresünk, amelyre

$$|f(\xi)| = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\|\xi\|_2,$$

azaz

$$|x+y| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{x^2+y^2+(-x-y)^2},$$

ahonnan

$$(x-y)^2 = 0$$

következik.

4. lépés. Így tehát van olyan $F \in \mathcal{X}^*$:

$$f \subset F, \qquad \|F\| = \|f\|$$

és pontosan egy olyan $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ van, hogy

$$F(x, y, z) = ax + by + cz \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3), \quad \|F\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Következésképpen

$$x + y = f(x, y, -x - y) = F(x, y, -x - y) = ax + by + c(-x - y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$(a - c)x + (b - c)y = x + y \iff a - c = 1 \wedge b - c = 1 \iff a = b \wedge c = a - 1,$$

illetve

$$\|(a, b, c)\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{azaz} \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{3}.$$

Így

$$a^2 + a^2 + (a - 1)^2 = \frac{2}{3}, \qquad \text{azaz} \qquad a = \frac{1}{3}.$$

Ezért

$$F(x, y, z) = \frac{x + y - 2z}{3} \qquad \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

12.3. Az 5. fejezet gyakorló feladatai

Az 5.0.3. gyakorló feladat.

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty,$$

ezért

$$\lim(|x_n|) = 0,$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(x_m)\|_p) = 0$$

következik. Világos, hogy a

$$(\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \in l_p \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ esetén

$$\begin{aligned} A_k(\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}} &= (\delta_{km}\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}} = (\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}}, \\ A_l(\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}} &= (\delta_{lm}\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}} = (0)_{m\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Ezért

$$\|(A_k - A_l)(\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}}\|_p = \|(\delta_{km})_{m\in\mathbb{N}}\|_p = 1,$$

ahonnan

$$\|A_k - A_l\| \geq 1$$

következik. Ez azt jelenti, hogy (A_n) nem Cauchy-sorozat, így nem is konvergens.
Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy

$$\|A_k - A_l\| = 1 \qquad (k, l \in \mathbb{N}: \ k \neq l),$$

hiszen

$$\|A_k(x_m) - A_l(x_m)\|_p \leq (|x_k|^p + |x_l|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^p\right)^{1/p} = \|(x_r)_{r\in\mathbb{N}}\|_p. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

Az 5.1.1. gyakorló feladat.

1. lépés. A $p = +\infty$, $q = 1$ eseteket illetően utalunk az 5.1.10. feladatra.

2. lépés. Ha

$$(\alpha_k) \in l_q,$$

akkor a Hölder-egyenlőtlenség (vö. [15]) következménye, hogy bármely $(x_n) \in l_p$ esetén a

$$\sum_{n=1} (\alpha_n x_n)$$

sor konvergens.

3. lépés. Ha pedig

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_p, \|\cdot\|_p) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (\mathbb{K}, |\cdot|),$$

továbbá bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n : l_p \to \mathbb{K}, \qquad A_n(x_k) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

akkor A_n nyilvánvalóan lineáris. Az

$$\alpha^{[n]} := (\alpha_k^{[n]}) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$$

sorozatra a Hölder-egyenlőtlenség (vö. [15]) felhasználásával

$$|A_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_k^{[n]} x_k\right| \leq \left\|\alpha_k^{[n]}\right\|_q \|x\|_p \qquad (x = (x_k) \in l_p)$$

adódik, ahonnan A_n folytonossága, ill.

$$\|A_n\| \leq \left\|\alpha_k^{[n]}\right\|_q \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Így, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

(a) $p = 1$, $q = +\infty$ esetén a triviális

$$\alpha^{[n]} = 0$$

esettől eltekintve válasszunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy

$$\left|\alpha_N^{[n]}\right| = \left\|\alpha^{[n]}\right\|_\infty$$

legyen

$$\Big/ k \leq N \qquad \text{és} \qquad \alpha_N^{[n]} = \alpha_N \leq 0 \Big/ .$$

Így az

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}, \qquad x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (n = N), \\ \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x^{(n)} \in l_1 \qquad \text{és} \qquad \left\|x^{(n)}\right\|_1 = 1.$$

Az A_n definíciója következtében

$$\left|A_n(x^{(n)})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{(n)}\right| = |\alpha_N| = \left\|\alpha^{[n]}\right\|_\infty ,$$

és így

$$\left\|\alpha^{[n]}\right\|_\infty \leq \|A_n\|.$$

(b) a

$$p, q \in (1, +\infty), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

esetben ismét a triviális

$$\alpha^{[n]} = 0$$

esettől eltekintve az

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}, \qquad x_k^{(n)} := \begin{cases} \dfrac{|\alpha_k|^q}{\alpha_k} & (\alpha_k \neq 0,\ k \leq n), \\ 0 & (\text{egyébként}) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sorozatra

$$x^{(n)} \in l_p \qquad \text{és} \qquad q = (q-1)p$$

miatt

$$\left\|x^{(n)}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q\right)^{1/p} = \left(\left\|\alpha^{[n]}\right\|_q\right)^{q/p},$$

ezért

$$\|x^{(n)}\|_p \neq 0$$

és

$$\frac{\left|A_n(x^{(n)})\right|}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\sum\limits_{k=1}^n |\alpha_k|^q}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\left\|\alpha^{[n]}\right\|_q^q}{\|x^{(n)}\|_p} = \left\|\alpha^{[n]}\right\|_q^{q(1-1/p)} = \left\|\alpha^{[n]}\right\|_q,$$

és így

$$\left\|\alpha^{[n]}\right\|_q \leq \|A_n\|.$$

Mindkét esetben beláttuk tehát, hogy

$$\|A_n\| = \left\|\alpha^{[n]}\right\|_q \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel az (A_n) sorozat pontonként konvergens,

$$(l_p, \|\cdot\|_p) \qquad \text{és} \qquad (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

Banach-tér (vö. 1.3.129. feladat), ezért az

$$A : l_p \to \mathbb{K}, \qquad Ax := \lim(A_n x)$$

operátor lineáris és folytonos, amelyre

$$\|A\| \leq \sup\{\|A_n\| \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\|\alpha^{[n]}\|_q \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty.$$

Mivel

$$\sup\left\{\|\alpha^{[n]}\|_q \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \sup\left\{\left(\sum\limits_{k=1}^n |\alpha_k|^q\right)^{1/q} \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left(\sum\limits_{k=1}^\infty |\alpha_k|^q\right)^{1/q} & (q < +\infty), \\ \sup\{|\alpha_k| \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{N}\} & (q = +\infty), \end{cases}$$

ezért

$$(\alpha_k) \in l_q. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

12.4. A 7. fejezet gyakorló feladatai

A 7.1.1. gyakorló feladat.

Mivel bármely $f, g \in \mathfrak{C}^2[-1,1]$ esetén

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= \int_{-1}^{1} g(uf')' = [guf']_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g'uf' = \\ &= [guf')]_{-1}^{1} - [g'uf]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (ug')'f = \\ &= \langle f, Ag\rangle,\end{aligned}$$

hiszen

$$u(\pm 1) = 0,$$

ezért A szimmetrikus. ■

vissza a feladathoz

A 7.1.2. gyakorló feladat.

1. Ha valamely $u, v \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\widetilde{u} := Au, \qquad \text{ill.} \qquad \widetilde{v} := Av,$$

akkor A injektivitása miatt

$$u = A^{-1}\widetilde{u}, \qquad v = A^{-1}\widetilde{v},$$

és így

$$\left\langle A^{-1}\widetilde{u}, \widetilde{v}\right\rangle = \left\langle A^{-1}\langle\widetilde{u}, AA^{-1}\widetilde{v}\right\rangle = \left\langle AA^{-1}\widetilde{u}, A^{-1}\widetilde{v}\right\rangle = \langle Au, v\rangle = \left\langle\widetilde{u}, A^{-1}\widetilde{v}\right\rangle.$$

2. Bármely $u, v \in \mathcal{D}(A)$ esetén

$$\langle(\alpha A)u, v\rangle = \langle\alpha Au, v\rangle = \alpha\langle Au, v\rangle = \alpha\langle u, Av\rangle = \langle u, \alpha Av\rangle = \langle u, (\alpha A)v\rangle.$$

3. Bármely $u, v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ esetén

$$\begin{aligned}\langle(A+B)u, v\rangle &= \langle Au + Bu, v\rangle = \langle Au, v\rangle + \langle Bu, v\rangle = \\ &= \langle u, Av\rangle + \langle u, Bv\rangle = \langle u, (A+B)v\rangle.\end{aligned}$$

4. Ha $v \in \mathcal{D}(A)$, ill. $u \in \mathcal{D}(B)$ olyan vektorok, amelyekre

$$Av \in \mathcal{D}(B), \qquad Bu \in \mathcal{D}(A),$$

akkor

$$\langle ABu, v\rangle = \langle A(Bu), v\rangle = \langle Bu, Av\rangle = \langle u, B(Av)\rangle = \langle u, BAv\rangle. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

A 7.2.1. gyakorló feladat.

Ha

$$r := \dim(\mathcal{R}(A))$$

és $x \in \mathcal{X}$, akkor – lévén, hogy $\mathcal{N}(A^*)$ zárt altér (vö. 4.3.5. feladat) – Riesz felbontási tételének következtében (vö. 2.5.6. feladat), alkalmas $u \in \mathcal{N}(A^*)$, ill.

$$v \in (\mathcal{N}(A^*))^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A)$$

esetén

$$x = u + v.$$

Így

$$A^*x = A^*(u + v) = 0 + A^*v = A^*v,$$

ahonnan

$$\mathcal{R}(A^*) = A^*[\mathcal{R}(A)]$$

következik, ami azt jelenti, hogy

$$\dim(\mathcal{R}(A^*)) \leq r.$$

Mivel

$$(A^*)^* = A,$$

ezért

$$r \leq \dim(\mathcal{R}(A^*)$$

is igaz, amennyiben

$$\dim(\mathcal{R}(A^*)) < +\infty$$

teljesül. $\blacksquare$

vissza a feladathoz

A 7.2.2. gyakorló feladat.

Mivel bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$Ax \in \mathcal{A},$$

ezért (vö. 1.4.58/2. feladat)

$$Ax = \sum_{n \in \Gamma} \langle Ax, e_n \rangle e_n \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Így

$$Ax = \sum_{n \in \Gamma} \langle Ax, e_n \rangle e_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle x, Ae_n \rangle e_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle x, e_n \rangle e_n \qquad (x \in \mathcal{X}),$$

hiszen A önadjungált (vö. 7.2.24. feladat),

$$e_n \in \mathcal{A} \qquad (n \in \Gamma). \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

12.5. A 10. fejezet gyakorló feladatai

A 10.1.1. gyakorló feladat.

Világos, hogy bármely

$$0 < \alpha \in \mathbb{R}$$

esetén f grafikonja olyan lefelé nyitott parabola, amely az x-tengelyt az

$$x = 0, \qquad x = \frac{2}{\alpha}$$

pontokban metszi, és az $x = 1/\alpha$ pontban $1/\alpha$ a maximuma. Mivel f deriválható és

$$f'(x) = 2 - 2\alpha x = 2(1 - \alpha x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$|f'(x)| < 1$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$|2(1 - \alpha x)| < 1,$$

azaz ha

$$\frac{1}{2\alpha} < x < \frac{3}{2\alpha}.$$

Mivel

$$f(x) \in \left[\frac{3}{4\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right] \subset \left[\frac{1}{2\alpha}, \frac{3}{2\alpha}\right] \qquad \left(x \in \left[\frac{1}{2\alpha}, \frac{3}{2\alpha}\right]\right),$$

ezért az

$$a := \frac{1}{2\alpha}, \qquad \text{ill.} \qquad b := \frac{3}{2\alpha}$$

választás megfelelő. ■

vissza a feladathoz

A 10.1.2. gyakorló feladat.

Mivel bármely $f, g \in L^2[0,1]$ esetén

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| &= \left|(x+1)\int_0^1 t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t - (x+1)\int_0^1 t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \\
&= \left|(x+1)\int_0^1 t \cdot \{f(t) - g(t)\}\,\mathrm{d}t\right| \leq \\
&\leq |x+1|\sqrt{\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t} = \\
&= |x+1| \cdot (1/\sqrt{3}) \cdot \|f-g\|_{L^2},
\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_{L^2} &\leq (1/\sqrt{3}) \cdot \|f-g\|_{L^2} \cdot \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x} = \\
&= \sqrt{7/9} \cdot \|f-g\|_{L^2},
\end{aligned}$$

azaz φ kontrakció. ■

vissza a feladathoz

A 10.1.3. gyakorló feladat.

Ha φ kontrakció és $L \geq 0$ a Lipschitz-állandó, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén a

$$\delta := \frac{\varepsilon}{1+L} > 0$$

számmal igaz, hogy ha valamely $x, y \in \mathcal{X}$ elemekre $\rho(x,y) < \delta$, akkor

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x,y) < L\delta < \varepsilon,$$

azaz φ folytonos. ■

vissza a feladathoz

A 10.1.4. gyakorló feladat.

Világos, hogy

- φ kontrakció, hiszen bármely $(x_n), (y_n) \in l_2$ esetén
$$\|\varphi((x_n)) - \varphi((y_n))\|_{l_2} = \frac{1}{2}\|(x_n) - (y_n)\|_{l_2}.$$
- Az l_2-beli
$$(2/1,2/2,2/3,2/4,\ldots)$$
sorozat fixpontja φ-nek. ■

vissza a feladathoz

A 10.1.5. gyakorló feladat.

Mivel φ deriválható, ezért bármely $x, y \in \mathbb{R}$ (ill. alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$) esetén
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| = \frac{e^\xi}{1 + e^\xi} \cdot |x - y| < |x - y|.$$
φ-nek nincsen fixpontja, hiszen ellenkező esetben lenne olyan $u \in \mathbb{R}$, amelyre $\varphi(u) = u$ teljesülne, ami azt jelentené, hogy
$$\ln(1 + e^u) = u, \qquad \text{azaz} \qquad 1 + e^u = e^u.$$
Ez viszont nem lehetséges. ■

vissza a feladathoz

A 10.1.6. gyakorló feladat.

Ha $u, v \in \mathbb{R}$: $u < v$ és $\vartheta \in (u, v)$, akkor
$$\begin{aligned}
|\varphi(u) - \varphi(v)| &= \left|u + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(u) - v - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(v)\right| = \\
&= |u - v| \cdot \left|1 - \frac{\operatorname{arctg}(u) - \operatorname{arctg}(v)}{u - v}\right| = \\
&= |u - v| \cdot |1 - \operatorname{arctg}'(\vartheta)| = |u - v| \cdot \left|1 - \frac{1}{1 + \vartheta^2}\right| = \\
&= |u - v| \cdot \left|\frac{\vartheta^2}{1 + \vartheta^2}\right| = |u - v| \cdot \frac{\vartheta^2}{1 + \vartheta^2} < |u - v|.
\end{aligned}$$

A φ leképezésnek nincsen fixpontja, hiszen

$$\mathcal{R}_{\text{arctg}} = (-\pi/2, \pi/2)$$

miatt nincsen olyan $u^* \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\operatorname{arctg}(u^*) = \frac{\pi}{2}$$

teljesülne. ■

vissza a feladathoz

A 10.3.1. gyakorló feladat.

Teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$\rho\left(\varphi^{[n]}(u), \varphi^{[n]}(v)\right) \leq q^n \cdot \rho(u,v) \qquad (u, v \in \mathcal{X},\ n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel $(q^n) \in l_1$, ezért bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$\begin{aligned}
\rho(x, x^*) &= \rho\left(x, \lim(\varphi^{[n]}(x))\right) = \lim\left(\rho(x, \varphi^{[n]}(x))\right) \leq \\
&\leq \lim\left(\rho(x,\varphi(x)) + \rho\left(\varphi(x), \varphi^{[2]}(x)\right) + \ldots + \rho\left(\varphi^{[n-1]}(x), \varphi^{[n]}(x)\right)\right) \leq \\
&\leq \lim\left(\rho(x,\varphi(x))\left\{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right\}\right) = \\
&= \frac{1}{1-q}\rho(x,\varphi(x))
\end{aligned}$$

következik. ■

vissza a feladathoz

A 10.5.1. gyakorló feladat.

Mivel $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér, ezért a 10.5.1. feladatbeli módszert követve tegyük fel, hogy

$$\mathcal{M} := \{e_n \in \mathcal{X} :\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

teljes ortonormált rendszer a térben, továbbá legyen $J \in L(\mathcal{X})$ olyan operátor, amelyre

$$Je_n = e_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

tehát, ha valamely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n e_n, \qquad \text{akkor} \qquad Jx = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n J e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n e_{n+1}$$

(vö. 4.1.6 feladat). Ha $\|\cdot\|^2 := \langle\cdot,\cdot\rangle$, akkor a

$$\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \Phi(x) := \sqrt{1-\|x\|^2}e_0 + Jx$$

leképezés folytonos, hiszen bármely $x, a \in \mathcal{X}$ esetén

$$\|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leq \sqrt{1-\|x\|^2} - \sqrt{1-\|a\|^2} + |||J||| \cdot \|x-a\|,$$

ezért

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(a) \qquad (x \to a).$$

Így a

$$\varphi(x) := \Phi(x) \qquad (x \in B_1(0))$$

leképezés is folytonos. Megmutatjuk, hogy φ-nek nincsen fixpontja. Ha $u \in B_1(0)$ olyan vektor, amelyre $\varphi(u) = u$, akkor

$$u = \sqrt{1-\|u\|^2}e_0 + Ju, \qquad \text{azaz} \qquad u - Ju = \sqrt{1-\|u\|^2}e_0.$$

Ha $u = 0$, akkor J linearitása folytán $J0 = 0$, így

$$0 = \sqrt{1-\|u\|^2}e_0, \qquad \text{azaz} \qquad \sqrt{1-\|u\|^2} = 0,$$

ahonnan $\|u\| = 1$ következik, ez azonban nem lehetséges. Ha $\|u\| = 1$, akkor $Ju = u$. Azonban J-nek nincsne fixpontja $B_1(0)$-n, mert ellenkező esetben $\mathcal{M}$ nem lenne teljes ortonormált rendszer. Tehát már csak a

$$0 < \|u\| < 1$$

lehetőség marad. Mivel $\mathcal{M}$ teljes ortonormált rendszer, ezért alkalmas $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n,$$

ahonnan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|u\|^2 < 1$$

következik. Azonban

$$\begin{aligned} u - Ju &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_{n+1} = \\ &= a_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} e_n = \\ &= a_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) e_n, \end{aligned}$$

így

$$a_0 = \sqrt{1 - \|u\|^2} \qquad \text{és} \qquad a_n = a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ami nem lehetséges, hiszen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty. \quad \blacksquare$$

vissza a feladathoz

13. fejezet

A jegyzetben említett matematikusok

1. **Alexander, James Waddell**
   (Sea Bright, 1888. IX. 19 - Princeton, 1971. IX. 23.)
2. **Apollóniosz**
   (i. e. 262 - i. e. 190 körül)
3. **Arselà, Cesare**
   (Santo Stefano di Magra, 1847. III. 6. - Santo Stefano di Magra, 1912. III. 15.)
4. **Ascoli, Giulio**
   (Trieszt, 1843. I. 20. - Milánó, 1896. VII. 12.)
5. **Auerbach, Herman**
   (Ternopil, 1901. X. 26. - Belzec, 1942. VIII. 17.)
6. **Baire, René Louis**
   (Párizs, 1874. I. 21. - Chambéry, 1932. VII. 5.)
7. **Banach, Stefan**
   (Krakkó, 1892. III. 30. - Lvov, 1945. VIII. 31.)
8. **Bernoulli, Johann**
   (Bázel, 1667. VII. 27. - Bázel, 1748. I. 1.)
9. **Bessel, Friedrich Wilhelm**
   (Minden, 1784. VII. 22. - Königsberg, 1846. III. 17.)
10. **Bernstein, Szergej Natanovics**
    (Ogyessza, 1880. III. 5. - Moszkva, 1968. X. 26.)
11. **Bohnenblust, Henri Frederic**
    (1906. III. 22. - Santa Barbara, 2000. III. 30.)
12. **Bolzano, Bernard Placidus Johann Nepomuk**
    (Prága, 1781. X. 5. - Prága, 1848. XII. 18.)

13. **Borel, Félix Eduoard Justin Émile**
    (Saint Affrique, 1871. I. 7. - Párizs, 1956. II. 3.)

14. **Brouwer, Luitzen Egbertus Jan**
    (Overschie, 1881. II. 27. - Blaricum, 1966. XII. 22.)

15. **Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics**
    (Bar, 1804. XII. 16. - Szentpétervár, 1889. XII. 12.)

16. **Caccioppoli, Renato**
    (Nápoly, 1904. I. 20. - Nápoly, 1959. V. 8.)

17. **Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp**
    (Szentpétervár, 1845. III. 3. - Halle, 1918. I. 6.)

18. **Carathéodory, Constantin**
    (Berlin, 1873. IX. 13. - München, 1950. II. 2.)

19. **Cauchy, Augustin-Louis**
    (Párizs, 1789. VIII. 21. - Sceaux, 1857. V. 23.)

20. **Cayley, Arthur**
    (Richmond, 1821. XII. 16. - Cambridge, 1895. I. 26.)

21. **Cramer, Gabriel**
    (Genf, 1704. VII. 31. - Bagnols-sur-Cze, 1752. I. 4.)

22. **Csebisev, Pafnutyij Lvovics**
    (Okatovo, 1821. V. 16. - Szentpétervár, 1894. XII. 8.)

23. **De Morgan, Augustus**
    (Madura, 1806. VI. 27. - London, 1871. III. 18.)

24. **Descartes, René**
    (Touraine, 1596. III. 31. - Stockholm, 1650. II. 11.)

25. **Dirichlet, Peter Gustav Lejeune**
    (Hannover, 1805. II. 13. - Göttingen, 1859. V. 5.)

26. **Edelstein, Michael**

27. **Eidelheit, Meier (Maks)**
    (Janów, 1910. VII. 6. - 1943. III.)

28. **Euklidész**
    (i. e. 360 - i. e. 290 körül)

29. **Fatou, Pierre Joseph Louis**
    (Lorient, 1878. II. 28. - Pornichet, 1929. VIII. 10)

30. **Fejér, Lipót**
(Pécs, 1880. II. 9. - Budapest, 1959. X. 15.)
31. **Fischer, Ernst Sigismund**
(Bécs, 1875. VII. 12. - Köln, 1954. XI. 14.)
32. **Fourier, Jean Baptiste Joseph**
(Auxerre, 1768. III. 21. - Párizs, 1830. V. 16.)
33. **Fredholm, Erik Ivar**
(Stockholm, 1866. IV. 7. - Stockholm, 1927. VIII. 17.)
34. **Fréchet, René Maurice**
(Maligny, 1878. IX. 2. - Párizs, 1973. VI. 4.)
35. **Frobenius, Ferdinand Georg**
(Berlin, 1849. X. 26. - Charlottenburg, 1917. VIII. 3.)
36. **Fubini, Guido**
(Velence, 1879. I. 19 - 1943. VI. 6.)
37. **Galjorkin, Borisz Grigorjevics**
(Polotsk, 1871. III. 4. - Moszkva, 1945. VI. 2.)
38. **Gelfand, Izrail Mojszejevics**
(Krasny Okny, 1913. IX. 2. - New Jersey, 2009. X. 5.)
39. **Gershgorin, Semyon Aranovich**
(Pruzhany, 19013. VII. 24. - Szentpétervár, 1933. V. 30.)
40. **Gram, Jørgen Pedersen**
(Nustrup, 1850 . VI. 27. - Koppenhága, 1916. IV. 29.)
41. **Green, George**
(Sneinton, 1793. VII. 14. - Nottingham, 1841. V. 31.)
42. **Grönwall, Thomas Hakon**
(Dylta Bruk, 1877. I. 16. - New York, 1932. V. 9.)
43. **Haar, Alfréd**
(Budapest, 1885. X. 11. - Szeged, 1933. III. 16.)
44. **Hahn, Hans**
(Bécs, 1879. IX. 27. - Bécs, 1934. VII. 24.)
45. **Hamel, Georg Karl Wilhelm**
(Düren, 1877. IX. 12. - Landshut, 1954. X. 4.)
46. **Hamilton, William Rowan**
(Dublin, 1805. VIII. 3-4 (éjfél). - Dublin, 1865. IX. 2.)

47. **Hammerstein, A.**
(Mannheim, 1888. VI. 7. - Kiel, 1941. II. 25.)

48. **Hamming, Richard Wesley**
(Chicago, 1915. II. 11. - Monterey, 1998. I. 7.)

49. **Hausdorff, Felix**
(Boroszló, 1868. XI. 8.- Bonn, 1942. I. 26.)

50. **Heisenberg, Werner Karl**
(Würzburg, 1901. XII. 5. - München, 1976. II. 1.)

51. **Hellinger, Ernst David**
(Striegau, 1883. IX. 30. - Chicago, 1950. III. 28.)

52. **Hermite, Charles**
(Dieuze, 1822. XII. 24. - Párizs, 1901. I. 14.)

53. **Hilbert, David**
(Königsberg, 1862. I. 23. - Göttingen, 1943. II. 14.)

54. **Hölder, Otto Ludwig**
(Stuttgart, 1859. XII. 22. - Lipcse, 1937. VII. 29.)

55. **Jacobi, Carl Gustav Jacobi**
(Potsdam, 1804. XII. 10. - Berlin, 1851. II. 18.)

56. **Jensen, Johan Ludwig William Valdemar**
(Nakskov, 1859. V. 8. - Koppenhága, 1925. III. 5.)

57. **Jordan, Marie Ennemond Camille**
(Lyon, 1838. I. 5. - Párizs, 1922. I. 22.)

58. **Jordan, Ernst Pascual**
(Hannover, 1902. X. 18. - Hamburg, 1980. VII. 31.)

59. **Knaster, Bronisław**
(Warsaw, 1893. V. 22. - Wrocław, 1980. XI. 3.)

60. **Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics**
(Tambov, 1903. IV. 25. - Moszkva, 1987. X. 20.)

61. **Kronecker, Leopold**
(Liegnitz, 1823. XII. 7. - Berlin, 1891. XII. 29.)

62. **Kuratowski, Kazimierz**
(Varsó, 1896. II. 2. - Varsó, 1980. VI. 18.)

63. **Lagrange, Joseph-Louis (Lagrangia, Giuseppe Luigi)**
(Torino, 1736. I. 25. - Párizs, 1813. IV. 10.)

64. **Landau, Edmund Georg Hermann**
(Berlin, 1877. II. 14. - Berlin, 1938. II. 19.)

65. **Laplace, Pierre-Simon de**
(Beaumont-en-Auge, 1749. III. 23. - Párizs, 1827. III. 5.)

66. **Lax, Péter Dávid**
(Budapest, 1926. V. 1. -)

67. **Lebesgue, Henri Léon**
(Beauvais, 1975. VI. 28. - Párizs, 1941. VII. 26.)

68. **Legendre, Adrien-Marie**
(Párizs, 1752. IX. 18. - Párizs, 1833. I. 10.)

69. **L'Hospital, Guillaume François Antoine, Marquis de**
(Párizs, 1661 - Párizs, 1704. II. 2.)

70. **Leibniz, Gottfried Wilhelm**
(Lipcse, 1646. VII. 1. - Hannover, 1716. XI. 14.)

71. **Leray, Jean**
(Chantenay-sur-Loire , 1906. XI. 7. - La Baule, 1998. XI. 10.)

72. **Levi, Beppo**
(Turin, 1875. V. 14. - Rosario, 1961. VIII. 28.)

73. **Lindelöf, Ernst Leonard**
(Helsinki, 1870. III. 7. - Helsinki, 1946. VI. 4.)

74. **Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund**
(Königsberg, 1832. V. 14. - Bonn, 1903. X. 7.)

75. **Love, Eric Russell**
(London, 1912. III. 31. - Melburne, 2001. VIII. 7.)

76. **Luzin, Nyikolaj Nyikolajevics**
(Irkutszk, 1883. XII. 9. - Moszkva, 1950. I. 28.)

77. **Mazur, Stanisław**
(Lvov, 1905. I. 1. - Varsó, 1981. XI. 5.)

78. **Mazurkiewicz, Stefan**
(Varsó, 1888. IX. 25. - Grodzisk, 1945. VI. 19.)

79. **Milgram, Arthur Norton**
(Philadelphia, 1912. VI. 3. - 1961. I. 30.)

80. **Méray, Hugue Charles Robert**
(Chalon-sur-Saône, 1835. XI. 12. - Dijon, 1911. II. 2.)

81. **Minkowski, Hermann**
(Aleksota, 1864. VI. 22. - Göttingen, 1909. I. 12.)

82. **Neumann, János**
(Budapest, 1903. XII. 28. - Washington, 1957. II. 8.)

83. **Neumann, Carl Gottfried**
(Königsberg, 1832. V. 7. - Lipcse, 1925. III. 27.)

84. **Newton, Isaac**
(Woolsthorpe, 1642. XII. 25. - London, 1727. III. 20.)

85. **Nikodým, Otton Marcin**
(Zabłotov, 1887. VIII. 13. - Utica, 1974. V. 4.)

86. **Osgood, William Fogg**
(Boston, 1864. III. 10. - Belmont Massachusetts, 1943. VII. 22.)

87. **Parseval, Marc-Antoine**
(Város, 1755. IV. 27. - 1836. VIII. 16.)

88. **Peano, Giuseppe**
(Cuneo (Piemont), 1858. VIII. 27. - Torino, 1932. IV. 20.)

89. **Perron, Oskar**
(Frankenthal, 1880. V. 7. - München, 1975. II. 22.)

90. **Picard, Charles Émile**
(Párizs, 1856. VII. 24. - Párizs, 1941. XII. 11.)

91. **Pitagorasz**
(Samos, i. e. 569 - i. e. 475 körül)

92. **Planck, Max Karl Ernst Ludwig**
(Kiel, 1858. IV. 23. - Göttingen, 1947. X. 4.)

93. **Poincaré, Jules Henri**
(Nancy, 1854. IV. 29. - Párizs, 1912. VII. 27.)

94. **Pólya, György**
(Budapest, 1887. XII. 20. - Palo Alto (USA), 1985. IX. 7.)

95. **Radon, Johann**
(Tetschen, 1887. XII. 16. - Bécs, 1956. V. 25.)

96. **Reid, William Thomas**
(Grand Saline, 1907. X. 4. - Austin, 1977. X. 14.)

97. **Riesz, Frigyes**
(Győr, 1880. I. 22. - Budapest, 1956. II. 28.)

98. **Riesz, Marcel**
(Győr, 1886. XI. 16. - Lund, 1969. IX. 4.)

99. **Robertson, Howard Percy**
(Hoquiam, 1903. I. 27. - Pasadena 1961. VIII. 26.)

100. **Schauder, Juliusz Paweł**
(Lvov, 1899. IX. 21. - Lvov, 1943. IX.)

101. **Schmidt, Erhard**
(Dorpat (Tartu), 1876. I. 13. - Berlin, 1959. XII. 6.)

102. **Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander**
(Bécs, 1887. VIII. 12. - Bécs, 1961. I. 4.)

103. **Schur, Issai**
(Mahiljov, 1875. I. 10. - Tel-Aviv, 1941. I. 10.)

104. **Seidel, Philipp Ludwig von**
(Zweibrücken, 1821. X. 23. - München, 1896. VIII. 13.)

105. **Sierpiński, Wacław Franciszek**
(Varsó, 1882. III. 14. - Varsó, 1969. X. 21.)

106. **Smith, Henry John Stephen**
(Dublin, 1826. X. 2. - 1883. II. 9.)

107. **Sobczyk, Andrew**
(Duluth (Minnesota), 1915. - 1981. XI. 7.)

108. **Sorgenfrey, Robert Henry**
(1915. - 1995. I. 6.)

109. **Steinhaus, Władysław Hugo Dionizy**
(Jasło, 1887. I. 14. - Wrocław, 1972. II. 25.)

110. **Steiner, Jacob**
(Utzenstorf, 1796. III. 8. - Bern, 1863. IV. 1.)

111. **Stone, Marshall Harvey**
(New York, 1903. IV. 8. - Madras (India), 1989. I. 9.)

112. **Strutt, John William (Lord Rayleigh)**
(Langford Grove, 1842. XI. 12. - Witham, 1919. VI. 30.)

113. **Szegő, Gábor**
(Kunhegyesen, 1895. I. 20. - Palo Alto (USA), 1985. VIII. 7.)

114. **Szoboljev, Szergej Lvovics**
(Szentpétervár, 1908. X. 6. - Moszkva, 1989. I. 3.)

115. **Sztyeklov, Vlagyimir Andrejevics**
(Nyizsnyij Novgorod, 1864. I. 9. - Gaspra (Krím), 1926. V. 30.)

116. **Takagi, Teijli**
(Kazuya, 1875. IV. 21. - Tokio, 1960. II. 28.)

117. **Taylor, Brook**
(Edmonton,1685. VIII. 18. - London, 1731. XII. 29.)

118. **Toeplitz, Otto**
(Breslau, 1881. VIII. 1. - Jeruzsálem, 1940. II. 15.)

119. **Tyihonov, Andrej Nyikolajevics**
(Gzhatska, 1906. X. 30. - Moszkva, 1993. X. 7.)

120. **Tukey, John Wilder**
(New Bedford, 1915. VI. 16. - New Brunswick, 2000. VII. 26.)

121. **Uriszon, Pavel Szamuilovics**
(Ogyessza, 1898. II. 3 - Batz-sur-Mer, 1924. VIII. 17.)

122. **Vandermonde, Alexandre-Théophile**
(Párizs, 1735. II. 28. - Párizs, 1796. I. 1.)

123. **Volterra, Vito**
(Ancona, 1860. V. 3. - Róma, 1940. X. 11.)

124. **Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm**
(Ostenfelde, 1815. X. 31. - Berlin, 1897. II. 19.)

125. **Weissinger, Johannes**
(Naumburg an der Saale, 1913. V. 12. - 1995. XI. 20.)

126. **Weyl, Hermann**
(Elmshorn, 1885. XI. 9. - Zürich, 1955. XII. 8.)

127. **Wielandt, Helmut**
(Niedereggenen, 1910. XII. 19.- Lörrach, 2001. II. 14.)

128. **Young, William Henry**
(London, 1863. X. 20. - Lausanne, 1942. VII. 7.)

129. **Zarantonello, Eduardo Héctor**
(Argentína, 1918-2010)

130. **Zorn, Max August**
(Krefeld, 1906. VI. 6. - Bloomington, 1993. III. 9.)

Irodalomjegyzék

[1] ALT, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Verlag, 2006.

[2] APPELL, J.; VÄTH, M.: *Elemente der Funktionalanalysis*, Vieweg, 2005.

[3] BAIRE, R.: *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **IIIa3** (1899) 1-123.

[4] BAUER, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, 1990.

[5] BRYAN, P. R.; YOUNGSON, M. A.: *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag, London 2001.

[6] COLLATZ, L.: *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, 1968.

[7] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J.: *Fixed point theory*, Springer-Verlag, 2003.

[8] ENFLO, P. H: *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973) 309-317.

[9] GALÁNTAI, A. - JENEI, A.: *Numerikus módszerek*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.

[10] HEUSER, H.: *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[11] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis 1*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[12] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis 2*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[13] HORN, R. A., JOHNSON, CH. R.: *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[14] JÁRAI, A.: *Modern alkalmazott analízis*, Typotex, 2007.

[15] KARVASZ, GY. *Analízis III.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[16] KIRILLOV, A. A. - GVISIANI, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[17] KOLMOGOROV, A. N. - FOMIN, SZ. V.: *A függvényelmélet és a funcionálanalízis elemei*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1981.

[18] KOMORNIK, V. *Valós analízis előadások I., II.*, TypoTeX, Budapest, 2003.

[19] KOVÁCS, S. *Über die sogenannte Regel von de l'Hospital im Mathematikunterricht*, Teaching Mathematics and Computer Science **9** (2) (2011) 193-208.

[20] LACZKOVICH, M.: *Valós függvénytan*, ELTE, Budapest, 1995.

[21] KREYSZIG, E.: *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.

[22] LAX, P. D.: *Functional Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.

[23] LOSONCZI, L.: *Funkcionálanalízis I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[24] NATANSON, I.P.: *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[25] PÁL, J., SCHIPP, F. SIMON P.: *Analízis II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[26] AMIR, DAN: *Characterization of Inner Product Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[27] RIMÁN, J.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I., II.*, EKF Líceum Kiadó, Eger, 2000.

[28] RUDIN, W.: *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[29] SCHWARZ, H. R., KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.

[30] SIMON, P.: *Ismerkedés a numerikus analízissel*, ELTE TTK Továbbképzési csoport, Budapest, 1990.

[31] SIMON, P.: *Fejezetek az analízisből*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.

[32] SIMON, P.: *Mérték-integrál*, ELTE, Budapest, 2015.

[33] TÓTH, J.; SIMON, L. P.: *Differenciálegyenletek*, Typotex, Budapest, 2005.

[34] TRIEBEL, H.: *Höhere Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[35] YOSIDA, K.: *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980.

[36] WEIDMANN, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Vieweg + Teubner, 2003.

[37] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*, Springer, 2000.

[38] ZEIDLER, E.: *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1991.

Tárgymutató

Dr. Kovács Sándor, adjunktus,
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Numerikus Analízis Tanszék,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
alex@numanal.inf.elte.hu,
alex@ludens.elte.hu
http://numanal.inf.elte.hu/~alex