

A tematikus osztályozás matematikai leírása

Segédanyag a Távérzékelte felvételek elemzése
tantárgyhoz

László István – Fekete István – Dezső Balázs – Csornai Gábor

Szemlélet:

- Digitális felvétel – mátrix (egy elem – felszíni folt)
- Képpont – vektor (egy elem – spektrális sáv)

N sor, M oszlop, B spektrális sáv

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v}_{11} & \dots & \vec{v}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_{N1} & \dots & \vec{v}_{NM} \end{pmatrix},$$

- $\vec{v}_{ij} = (v_{ij1}, \dots, v_{ijB})$
- Az intenzitás kvantált ábrázolása: $v_{ijb} \in [1..H]$

Hagyományos térábrázolás:

- Koordinátatengelyek: térbeli koordináták, spektrális sávok
- Elemek értéke: intenzitásértékek

Intenzitástér:

- Koordinátatengelyek: az egyes spektrális sávok
- (Koordinátaértékek: intenzitásértékek)
- Elemek értéke: a felvételen az adott intenzitású pontok száma (pl.)

A fenti V intenzitástérbeli megfelelője:

$$V' \in \mathbb{N}^{\overbrace{H \times \dots \times H}^{B\text{-szer}}}$$

$$\begin{aligned} & \forall (h_1, \dots, h_B) \in [1..H]^B : V'_{(h_1, \dots, h_B)} = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi((v_{ij1} = h_1) \wedge \dots \wedge (v_{ijB} = h_B)) \end{aligned}$$

A tematikus osztályozás bemenőadatai

Minden pixelhez egy célkategóriát (osztályt) rendelünk:

- 1 A célkategóriák halmaza: $\omega_1, \dots, \omega_{K_F}$
- 2 Az egyes osztályokhoz pixeleinek eloszlása:

$$p(\vec{v}|\omega_1), \dots, p(\vec{v}|\omega_{K_F})$$

$p(\vec{v}|\omega_k)$: a \vec{v} intenzitásvektorok sűrűségfüggvénye, amennyiben \vec{v} a k . osztály eleme.

- 3 Az egyes osztályok előre ismert (a priori) előfordulási valószínűsége:

$$p(\omega_1), \dots, p(\omega_{K_F})$$

Default: $1/K_F$

- 4 A téves osztályozások veszteségi értékei: $\lambda(\omega_k, \omega_l)$ (vagy λ_{kl}) az $\omega_l \rightarrow \omega_k$ átosztályozás okozta elemi veszteség.
($k, l \in [1..K_F]$)

Default: $\lambda_{kk} = 0$, és $\lambda_{kl} = 1$, ha $k \neq l$.

Az osztályozás eredménye

Cél az osztálybesorolás, vagyis a következő mátrix meghatározása:

$$C^{(F)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(F)} & \dots & c_{1M}^{(F)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(F)} & \dots & c_{NM}^{(F)} \end{pmatrix} \quad c_{ij}^{(F)} \in [1..K_F],$$

ahol K_F az osztályok száma.

Keresünk egy g relációt, amely megadja a kapcsolatot a felvétel pixelértékei és az osztályok között.

A $g_k : [1..H]^B \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \in [1..K_F]$) ún. diszkriminánsfüggvények halmaza alapján egy \vec{v} vektort abba az ω_k osztályba sorolunk, amelyre $g_k(\vec{v})$ maximális.

$$g = \{(\vec{v}, k) \mid \vec{v} \in [1..H]^B, k \in [1..K_F], g_k(\vec{v}) = \max_{l=1}^{K_F} g_l(\vec{v})\}$$

(Nem függvény!)

A maximum likelihood-osztályozás

A *maximum-likelihood* döntési szabály diszkriminánsfüggvényei:

$$g_k(\vec{v}) = p(\vec{v}|\omega_k)p(\omega_k)$$

Abba az ω_k osztályba sorol egy \vec{v} intenzitásvektort, amelynél $p(\vec{v}|\omega_k)p(\omega_k) \geq p(\vec{v}|\omega_l)p(\omega_l)$, minden $l \in [1..K_F]$ -re.

Ez a döntési szabály minden egyes \vec{v} intenzitásvektorhoz azt az osztályt rendeli, amelyikbe a legnagyobb valószínűséggel tartozik.

Adott \vec{v} vektorra: $p(\vec{v}|\omega_k)p(\omega_k)$ maximális $\iff p(\omega_k|\vec{v})$ maximális.

A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$p(\omega_k|\vec{v})p(\vec{v}) = p(\vec{v} \cap \omega_k) = p(\vec{v}|\omega_k)p(\omega_k),$$

és ezt felhasználva

$$p(\omega_k|\vec{v}) = p(\vec{v} \cap \omega_k)/p(\vec{v}) = p(\vec{v}|\omega_k)p(\omega_k)/p(\vec{v}).$$

A Bayes-osztályozás

Egy osztályozási módszer *Bayes-optimalis*, ha az átlagos veszteséget minimalizálja.

A diszkriminánsfüggvények alakja $g_k(\vec{v}) = -L_{\vec{v}}(k)$, ahol $L_{\vec{v}}(k)$ -val egy adott \vec{v} vektor ω_k osztályba történő sorolásából származó átlagos veszteséget jelöljük:

$$L_{\vec{v}}(k) = \sum_{l=1}^{K_F} \lambda_{kl} p(\omega_l | \vec{v})$$

Behelyettesítéssel belátható: a maximum-likelihood-osztályozás a Bayes-osztályozás speciális esete az elemi veszteségmátrixszal. ($\lambda_{kl} = \chi(k \neq l)$; $k, l \in [1..K_F]$)

V kép (N sor, M oszlop), K_f cluster. A képpontok clusterbesorolása:

$$\mathbf{C}^{(f)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(f)} & \dots & c_{1M}^{(f)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(f)} & \dots & c_{NM}^{(f)} \end{pmatrix} \quad c_{ij}^{(f)} \in [1..K_f]$$

Felügyelet (referenciaadatok) nélküli folyamat!

Clusterezés (2)

Az egyik clusterezési kritérium: a négyzetes hiba összegének („sum of squared error”, SSE) mérése.

A k . cluster átlaga:

$$\vec{\mu}_k^{(f)} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi(\mathbf{c}_{ij}^{(f)} = k) \vec{v}_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi(\mathbf{c}_{ij}^{(f)} = k)}$$

A négyzetes hiba összege:

$$\text{SSE}^{(f)} = \sum_{k=1}^{K_f} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi(\mathbf{c}_{ij}^{(f)} = k) \|\vec{v}_{ij} - \vec{\mu}_k^{(f)}\|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \|\vec{v}_{ij} - \vec{\mu}_{\mathbf{c}_{ij}^{(f)}}^{(f)}\|^2$$

ISODATA: a fenti SSE-t minimalizáló, iteratív clusterezőeljárás.

Alosztályok finomítása: felügyelt folyamat, referenciaadatokkal

Az inputkép méretének megfelelő tematikus raszteres kép:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \dots & r_{NM} \end{pmatrix} \quad r_{ij} \in [0..K_F]$$

Ha egy pontra nincs referenciaadat, $r_{ij} = 0$.

Két részre osztva használjuk:

- tanuló-referenciaadatok ($R^{(\alpha)}$)
- teszt-referenciaadatok ($R^{(\omega)}$)

Ideális esetben diszjunktak:

$$\forall (i, j) \in [1..N] \times [1..M] : r_{ij} \neq 0 \iff$$

$$(r_{ij}^{(\alpha)} = r_{ij} \wedge r_{ij}^{(\omega)} = 0) \vee (r_{ij}^{(\alpha)} = 0 \wedge r_{ij}^{(\omega)} = r_{ij})$$

Az alosztályok finomítása

A kép pixeleinek alosztálybesorását, amely az alosztályok finomításának lépéseiben alakult ki, a clusterbesoroláshoz hasonlóan ábrázolhatjuk:

$$C^{(f)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(f)} & \dots & c_{1M}^{(f)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(f)} & \dots & c_{NM}^{(f)} \end{pmatrix} \quad c_{ij}^{(f)} \in [1..K_f],$$

ahol K_f az alosztályok száma az f . fázisban ($f \in [G + 1..F - 1]$).

Cél: a clusterek és a spektrális alosztályok referenciaadatokkal való összefüggésének vizsgálata.

- Soraiban: clusterek, illetve alosztályok.
- Oszlopaiban: (tanuló) referenciaadatok tematikus kategóriái.
- Egy eleme az alosztály és a referenciaadatok egy kategóriájának metszete:

$$T^{(f)} \in \mathbb{N}^{[1..K_f] \times [1..K_F]} \quad f \in [G..F - 1]$$

$$t_{kl}^{(f)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi(c_{ij}^{(f)} = k \wedge r_{ij}^{(\alpha)} = l)$$

A végső osztálybesorolás

A finomítás eredménye megfelelő, ha már minden alosztályhoz egyértelműen hozzárendelhető egy tematikus kategória.

A képpontok besorolása két lépésben:

- Besorolás egy alosztályba maximum likelihood-döntéssel, az alosztály sűrűségfüggvénye alapján.
- Besorolás az alosztálysorszám által egyértelműen meghatározott tematikus kategóriához.

A végső osztálybesorolás (2)

A teljes osztályozási folyamat F ., utolsó lépése: a tematikus kategóriák hozzárendelése a pixelekhez.

Az $(F - 1)$. lépés az alosztálybesorolás végeredménye.

Megadható egy $\mathbb{A} : [1..K_{F-1}] \rightarrow [1..K_F]$ függvény az alosztályok végső halmaza és az osztályok (tematikus kategóriák) között a képpontok osztálybesorolásához:

$$\forall (i, j) \in [1..N] \times [1..M] : c_{ij}^{(F)} = \mathbb{A}(c_{ij}^{(F-1)}).$$

(Általában nincs ilyen megfeleltetés a $c_{ij}^{(f)}$ és a $c_{ij}^{(f-1)}$ értékek között, ha $f < F$.)

A pixelbesorolást megadó C mátrix jelentése

A pixelek besorolását megadó C mátrix értékei a fázistól függően jelenthetnek

- clustersorszámot,
- alosztálysorszámot vagy
- osztálysorszámot.

clustersorszámok			alosztálysorszámok			osztálysorszámok
1.	...	$G.$	$G + 1.$...	$F - 1.$	$F.$

A lépések:

- Az első G lépés: a clusterezés iterációi
- A következő 2-3 lépés: az osztályok finomítása.
- Utolsó, F . sorszámú lépés: a végső osztálybesorolás.

Az osztályozási eredmény pontosságvizsgálata

A *tévesztési mátrix* megadja az osztályozás eredményeként kapott és a referenciaadatok által meghatározott tematikus osztályok viszonyát.

Szerkezete és számítása megegyezik a kontingenciamátrixéval.

- Jellemzően az utolsó fázisban, a végső tematikus osztályokat tartalmazó $C^{(F)}$ mátrixra számítjuk ki.
- Az összehasonlítás alapját a teszt-referenciaadatok képezik.
- Soraiban: az eredményként kapott tematikus osztályok
- Oszlopaiban: teszt-referenciaadatok tematikus kategóriái.
- Egy eleme az osztály és a referenciaadatok egy kategóriájának metszete:

$$T^{(F)} \in \mathbb{N}^{[1..K_F] \times [1..K_F]}$$

$$t_{kl}^{(F)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \chi(c_{ij}^{(F)} = k \wedge r_{ij}^{(\omega)} = l)$$

Szegmensalapú osztályozás

A szegmensalapú esetben kétszeres leképezést alkalmazunk:

- A képpont melyik szegmenshez tartozik?
- Egy szegmens pontjai melyik clusterhez vagy alosztályhoz tartoznak? (Fázisonként változhat, de egy fázison belül egy szegmens minden pontja ugyanahhoz a clusterhez vagy alosztályhoz tartozik.)

A kép pixeljeinek szegmensbesorolása:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & \dots & z_{NM} \end{pmatrix} \quad z_{ij} \in [1..S],$$

ahol S a szegmensek száma.

Szegmensalapú osztályozás (2)

A szegmenssorszám megfeleltetése a cluster- vagy alosztálysorszámnak az f . fázisban ($f \in [1..F]$):

$$\mathbb{S}^{(f)} : [1..S] \rightarrow [1..K_f], \text{ vagyis } \forall s \in [1..S] : \mathbb{S}^{(f)}(s) \in [1..K_f]$$

Tehát a kép pixeljeire nézve

$$\forall (i, j) \in [1..N] \times [1..M] : c_{ij}^{(f)} = \mathbb{S}^{(f)}(z_{ij}), \text{ ezért } \mathbb{S}^{(f)}(z_{ij}) \in [1..K_f].$$

A szegmentálás tekinthető az osztályozás „nulladik” fázisának:

$$Z = „C^{(0)}” = \begin{pmatrix} c_{11}^{(0)} & \dots & c_{1M}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(0)} & \dots & c_{NM}^{(0)} \end{pmatrix} \quad c_{ij}^{(0)} \in [1..S] = „[1..K_0]”$$

Szegmensalapú osztályozás (3)

Ezzel a jelöléssel minden f fázisra ($f \in [1..F]$):

$$\mathbb{S}^{(f)}(c_{ij}^{(0)}) = c_{ij}^{(f)},$$

de általában nincs olyan \mathbb{C} függvény, amelyik az egymás utáni fázisok alosztály- vagy clustersorszámait feleltetné meg egymásnak, vagyis amelyre minden $f \in [2..F - 1]$ fázisban igaz lenne, hogy

$$\mathbb{C}^{(f)}(c_{ij}^{(f-1)}) = c_{ij}^{(f)}.$$