

# Komputeralgebra rendszerek

## XII. Kalkulus I

Czirbusz Sándor

[czirbusz@gmail.com](mailto:czirbusz@gmail.com)

Komputeralgebra Tanszék  
ELTE Informatika Kar

2009-2010 őszi

# Index

- 1 Határértékszámítás
  - A Maple-ben
  - A Sage-ben
- 2 Szimbolikus differenciálás
  - A Maple-ben
  - A Sage-ben
- 3 Automatikus differenciálás
- 4 Szélsőértékszámítás

# Határérték a Maple-ben

## Limit és limit

**limit**( $f(x)$ ,  $x=a$ , *direction*)

- Egyoldali határérték : *direction* = left|right
- Egyéb opciók : real, complex
- Működik  $a=\text{infinity}$ -re
- A visszaadott érték lehet intervallum is (pl :  $\sin(1/x)$ )
- Többváltozós eset : a „helyet” halmaz-jelöléssel kell megadni

# Határérték a Sage-ben

## limit

- A kifejezés tulajdonsága: **kif.limit(hely[, dir][, taylor][, algorithm])**
- A hely megadása kifejezéssel történik
- Az irány **dir** = plus|above illetve minus|below
- A **taylor** default értéke false, Taylor sorfejtéssel dolgozik a Maximán keresztül
- **algorithm** default a 'maxima'
- Az eredmény lehet „und” = nem definiált, „ind” = nem definiált, de korlátos, „infinity”

# A differenciálás fajtái

## Kifejezés deriválása

**diff**(expr,x,x...,x) vagy **diff**(expr,x\$n)

## Függvény deriválása

- **D[i](func)**
- magasabbrendű derivált jelölése : **(D@ @n)(func)**
- Nem kell a változót írni! (pl D(sin))

## Implicitfüggvény deriválása

Alapformája **implicitdiff(f,y,x)**, de több függvényre és változóra is alkalmazható

A Sage-ben

# A legegyszerűbben

```
diff, differentiate, derivative
```

- Amelyik szó eszünkbe jut 😊
- Szintaxis : **.diff(vars)**
- Az implicit differenciálást nem implementálták 😞

# Automatikus differenciálás I

Procedúrával definiált függvények differenciálása

A módszerek alapja a láncszabály : az  $f(x) = g(h(x))$  deriváltja :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dh} * \frac{dh}{dx}$$

## Automatikus differenciálás II

- Forward automatic differentiation

Jobbról balra haladva értékel ki, a független változó szerint  $A \ v := f(v_1, \dots, v_n)$  hozzárendelés minden előfordulása elé beírja formula deriválással kapott formulát. Az utolsó kifejezést a deriváltjával helyettesíti.

Korlátai

- rekurzióra nem alkalmazható
- nem lehet globális változó tartalmát megváltoztani
- ciklusváltozó csak konstans lehet



# Automatikus differenciálás III

- Reverse automatic differentiation  
Balról jobbra halad, a függő változók szerint

# Szélsőértékek

A Maple–ban implementáltak két, a szélsőértékeket megadó függvényt :

- **minimize|maximize**(expr,opt1,opt2,...)
- **extrema**(expr,constrains, vars,'s') (Lagrange multiplikátorokat használ)

A Maple rendelkezik **Optimize** csomaggal, mely hatékonyabb és többet tartalmazó algoritmusokat kínál. A Sage–ben ugyanezt egy **optimize** függvény végzi.

# Példák

Lásd a munkalapokon