Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

CSÖRGŐ ISTVÁN

ANALÍZIS TANÁROKNAK II.

az Informatika Minor Szak hallgatói számára

nappali és levelező tagozat

Budapest, 2008. november

A jegyzet az ELTE IK 2008. évi jegyzetpályázatának támogatásával készült.

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

Ez a jegyzet az Informatika Minor Szak nappali és levelező tagozata „Analízis tanároknak” című tantárgyának második félévéhez készült oktatási segédanyag. Témái: valós számsorozatok és sorok, vektorok és mátrixok, többváltozós analízis.

A szakaszok számozása minden fejezet elején elölről kezdődik. Ugyancsak elölről kezdődik minden fejezetben a tételek, definíciók, megjegyzések stb. együttes számozása. Az egyes fejezetek végén gyakorló feladatok találhatók, ezek számozása is fejezetenként elölről kezdődik.

A jegyzetben a szokásos matematikai jelöléseket használjuk. Néhány jelölést külön is felsorolunk:

- minden: $\forall$;
- létezik: $\exists$;
- az A és a B halmazok direkt szorzata (Descartes-szorzata): $A \times B$;
- a valós számok halmaza: $\mathbb{R}$;
- a pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$;
- a nem negatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$;
- ideális elemek: $+\infty$, $-\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R} : \ -\infty < x < +\infty)$;
- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- a nem negatív egész számok halmaza: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} := \left\{ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{R} \ \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$;
- a sík pontjai, számpárok: $\mathbb{R}^2 := \{(x,\, y) \ \mid \ x, y \in \mathbb{R}\}$;
- a tér pontjai, számhármasok: $\mathbb{R}^3 := \{(x,\, y,\, z) \ \mid \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- Az intervallumok nyíltságát gömbölyű zárójellel, és nem kifelé fordított szögletes zárójellel jelöljük.
- Részhalmaz jelölésére a $\subset$ és nem a $\subseteq$ jelet használjuk.

A jegyzetben az analízis egyes témaköreibe nyerünk bepillantást. Mivel a tárgy óraszáma viszonylag kicsi, nincs lehetőség a mély tárgyalásra. Az érdeklődők számára ajánljuk a hiányok pótlására az alábbi irodalmat:

[1] Leindler-Schipp: Analízis I. (egyetemi jegyzet)

[2] Pál-Schipp-Simon: Analízis II. (egyetemi jegyzet)

[3] Simon Péter: Fejezetek az analízisből (egyetemi jegyzet)

[4] Szili László: Analízis feladatokban (egyetemi jegyzet)

[5] Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából (egyetemi jegyzet)

Ezúton is köszönöm Dr. Fridli Sándor docensnek a kézirat lelkiismeretes lektorálását és értékes tanácsait.

Budapest, 2008. november 14.

Csörgő István

1. Valós számsorozatok

Számsorozatokkal már középiskolás tanulmányaink során is találkoztunk. Ott főleg a számtani és a mértani sorozattal kapcsolatos feladatokról volt szó, de elhangzott néhány egyéb fogalom is, pl. a sorozat monotonitása, korlátossága.

1.1. Valós számsorozat fogalma

1.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket valós számsorozatoknak nevezzük. Az $a(n) \in \mathbb{R}$ elemet a sorozat n-edik tagjának nevezzük, szokásos jelölése: a_n.

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{N}$ helyett vehető az

$$\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq p\}$$

halmaz is, ahol $p \in \mathbb{Z}$ rögzített. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a sorozat tagjait „p-től kezdve" indexeljük.

Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra az alábbi jelöléseket használjuk:

$$a\,; \quad (a_n)\,; \quad (a_n,\, n \in \mathbb{N})\,; \quad a_n \in H \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A sorozatokat leggyakrabban „képlettel" adjuk meg, pl.:

$$a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Elterjedt az ún. rekurzív megadás is, pl. a Fibonacci-sorozat így adható meg:

$$a_0 := 0\,, \quad a_1 := 1\,, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2).$$

1.2. Példák.

	értelmezési tartomány	n-edik tag (a_n)	a sorozat „eleje”	elnevezés
1.	$\mathbb{N}$	$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	harmonikus sorozat
2.	$\mathbb{N}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$	$\frac{1}{2}$ alapú mértani sorozat
3.	$\mathbb{N}$	$(-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, \dots$	
4.	$\mathbb{N}$	n	$1, 2, 3, 4, 5, \dots$	
5.	$\mathbb{N}$	$(-1)^{n-1} \cdot n$	$1, -2, 3, -4, 5, \dots$	

1.2. Monotonitás, korlátosság

1.3. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy ez a sorozat

- monoton növő (növekvő), ha $\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n \leq a_{n+1}$;
- szigorúan monoton növő (növekvő), ha $\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n < a_{n+1}$;
- monoton fogyó (csökkenő), ha $\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n \geq a_{n+1}$;
- szigorúan monoton fogyó (csökkenő), ha $\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n > a_{n+1}$;
- monoton, ha monoton növő vagy fogyó;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növő vagy fogyó.

1.4. Példák.

Az 1.2. példákban szereplő sorozatok közül az 1. és 2. szigorúan monoton csökkenő, a 4. szigorúan szigorúan monoton növekvő, a 3. és 5. pedig nem monoton.

1.5. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy ez a sorozat

- felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad a_n \leq K.$

  K neve: a sorozat egy felső korlátja;

- alulról korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad a_n \geq K.$

  K neve: a sorozat egy alsó korlátja;

- korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos.

1.6. Megjegyzés. Gyakran alkalmazzuk a korlátosság alábbi átfogalmazását, melynek igazolását feladatként tűzzük ki.

$$(a_n) \text{ korlátos} \iff \exists K \in \mathbb{R}^+\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad |a_n| \leq K.$$

Legyen (a_n) egy felülről korlátos sorozat. Bebizonyítható, hogy a sorozat felső korlátai között van legkisebb. Hasonlóképpen az is igazolható, hogy egy alulról korlátos sorozat alsó korlátai közt van legnagyobb.

1.7. Definíció.

- Legyen (a_n) egy felülről korlátos sorozat. E sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat felső határának (szuprémumának) nevezzük, és $\sup(a_n)$-nel jelöljük. Megállapodunk abban is, hogy ha (a_n) egy felülről nem korlátos sorozat, akkor $\sup(a_n) = +\infty$.

- Legyen (a_n) egy alulról korlátos sorozat. E sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat alsó határának (infimumának) nevezzük, és $\inf(a_n)$-nel jelöljük. Megállapodunk abban is, hogy ha (a_n) egy alulról nem korlátos sorozat, akkor $\inf(a_n) = -\infty$.

1.8. Példák.

Az 1.2. példában szereplő sorozatok közül az 1., 2., 3. korlátos, a 4. és 5. nem korlátos. A 4. alulról korlátos, de felülről nem, az 5. pedig sem alulról, sem felülről nem korlátos.

A felső és az alsó határokat az alábbi táblázat tartalmazza:

	a_n	a sorozat „eleje”	$\sup(a_n)$	$\inf(a_n)$
1.	$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	1	0
2.	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$	$\frac{1}{2}$	0
3.	$(-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, \dots$	1	-1
4.	n	$1, 2, 3, 4, 5, \dots$	$+\infty$	1
5.	$(-1)^{n-1} \cdot n$	$1, -2, 3, -4, 5, \dots$	$+\infty$	$-\infty$

1.3. Sorozat határértéke

Az $\left(\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}\right)$ sorozatnál úgy érezzük, hogy tagjai a 0 bármely környezetébe bekerülnek, ha elég nagy indexet választunk, sőt a tagok egy bizonyos index után a környezetben „maradnak”. Ezért úgy gondoljuk, hogy ez a sorozat a 0-hoz közelít, 0-hoz „tart”. Hasonlót érzünk az $(n^2\,, \ n \in \mathbb{N})$ sorozatnál is, erről pedig úgy gondoljuk, hogy a $(+\infty)$-be tart.

Néhány ilyen egyszerű bevezető példa után megfogalmazhatjuk a definíciót:

1.9. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy ez a sorozat konvergens, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

A sorozatot divergensnek nevezzük, ha nem konvergens. Az N számot (az ε-hoz tartozó) küszöbindexnek nevezzük.

Igazolható, hogy a fenti definícióban szereplő A szám egyértelmű. Ezt a számot a sorozat határértékének (limeszének) nevezzük, és azt mondjuk, hogy a sorozat A-hoz tart (ha n tart a végtelenbe). Szokásos jelölései:

$$\lim a = A; \quad \lim(a_n) = A; \quad \lim a_n = A;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A; \qquad a_n \to A \quad (n \to \infty).$$

1.10. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$ (más szóval: a sorozat $+\infty$-be tart), ha

$$\forall P > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \quad a_n > P.$$

Szokásos jelölései:

$$\lim a = +\infty; \quad \lim(a_n) = +\infty; \quad \lim a_n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty; \qquad a_n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Az N számot (a P-hez tartozó) küszöbindexnek nevezzük.

1.11. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat határértéke $-\infty$ (más szóval: a sorozat $-\infty$-be tart), ha

$$\forall P < 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \quad a_n < P.$$

Szokásos jelölései:

$$\lim a = -\infty; \quad \lim(a_n) = -\infty; \quad \lim a_n = -\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty; \qquad a_n \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

Az N számot (a P-hez tartozó) küszöbindexnek nevezzük.

1.12. Megjegyzések.

1. Mivel a sorozatok speciális $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények, felvetődik a kérdés, hogy a most definiált határérték-fogalom megfelel-e a függvény határértékének a sorozatokra vonatkozó speciális esetének. Könnyen látható, hogy igen. Éppen ezért a függvény határértékéről tanultak nagy része értelemszerűen a sorozatokra is érvényes.

2. Nyilvánvaló, hogy egy divergens sorozatnak vagy nincs határértéke, vagy $+\infty$ a határértéke, vagy $-\infty$ a határértéke.

1.13. Példák.

1. Az 1.2. példákban szereplő sorozatok közül az 1. és a 2. konvergens, és mindkettő határértéke 0. A 3., 4., 5. sorozatok divergensek. Ezek közül a 4.-nek van határértéke, a $+\infty$. A 3. és az 5. sorozatnak nincs határértéke.

2. Legyen $a_n := c \quad (n \in \mathbb{N})$, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor (a_n) konvergens és $\lim a_n = c$. Valóban, legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ „jó”, hiszen $n \geq N$ esetén
$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

3. Legyen $q \in \mathbb{R}$ rögzített, és tekintsük a $(q^n\,,\ n \in \mathbb{N})$ sorozatot (q alapú mértani sorozat). Tegyük fel először, hogy $q > 1$. Ekkor – a binomiális tételt is felhasználva:
$$q^n = (1 + \underbrace{(q-1)}_{+})^n \geq \binom{n}{1} \cdot (q-1) = n \cdot (q-1)$$
A jobb oldal nagyobb egy előre adott $P > 0$ számnál, ha $n > \dfrac{P}{q-1}$.
Ezért P-hez jó küszöb bármely olyan $N \in \mathbb{N}$, amely $\dfrac{P}{q-1}$-nél nagyobb.
Ezzel azt kaptuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
Legyen ezek után $|q| < 1$, de $q \neq 0$. Ekkor $\dfrac{1}{|q|} > 1$, így előző eredményünk szerint
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty.$$
Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot és alkalmazzuk a fenti határérték definícióját $P := \dfrac{1}{\varepsilon}$ választással. Azt kapjuk, hogy
$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\quad \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ebből átrendezéssel $|q^n| < \varepsilon$, azaz $|q^n - 0| < \varepsilon$ adódik. Ezzel azt kaptuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Legyen most $q < -1$. Ekkor $q^2 > 1$ miatt

$$q^{2n} = \left(q^2\right)^n \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

másrészt tetszőleges $P < 0$ esetén

$$q^{2n+1} = q \cdot \left(q^2\right)^n < P\,, \quad \text{ha} \quad \left(q^2\right)^n > \frac{P}{q}.$$

Ez pedig egy indextől kezdve teljesül, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(q^2\right)^n = +\infty$.

Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} q^{2n+1} = -\infty$. A (q^n) sorozat egy részsorozata tehát $+\infty$-be, egy másik részsorozata pedig $-\infty$-be tart. Ezért a (q^n) sorozatnak nincs határértéke. Ugyanez látható be hasonló módszerrel a $q = -1$ esetben.
Átgondolva még a $q = 0$ és a $q = 1$ triviális eseteket, a mértani sorozat határértékéről a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{ha } q > 1 \\ 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ 1 & \text{ha } q = 1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q \le -1. \end{cases}$$

1.4. Monoton sorozatok határértéke

Ha tekintünk néhány egyszerű monoton sorozatot (pl. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, (2^n), (5), stb.), azt tapasztaljuk, hogy mindegyik „tart valahova”. Az észrevétel általánosan is igaz, ezt fejezi ki az alábbi tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

1.14. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy monoton valós számsorozat. Ekkor létezik határértéke, nevezetesen*

- *ha (a_n) monoton növő, akkor*

$$\lim a_n = \sup\,(a_n);$$

- *ha (a_n) monoton fogyó, akkor*

$$\lim a_n = \inf (a_n).$$

Megjegyezzük, hogy tételünk kicsit kevesebbet mondó, de gyakran használt formája:

Monoton és korlátos sorozat konvergens.

1.5. Az „e” szám

Ebben a szakaszban értelmezzük a matematikában alapvető szerepet játszó Euler-féle állandót, az „e” számot. Az értelmezése egy nevezetes sorozat, az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékeként fog történni. Ehhez megmutatjuk, hogy ez a sorozat (szigorúan) monoton növekvő és felülről korlátos. Ennek bizonyításában alapvető szerepet játszik a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

1.15. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}^+$. Ekkor*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x_1 = \ldots = x_n$.

1.16. Megjegyzések.

1. Az egyenlőtlenség bal oldalán álló $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ számot az $x_1, \ldots, x_n$ számok mértani közepének, a jobb oldalon álló $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ számot pedig ugyanezen számok számtani közepének (átlagának) nevezzük.
2. A fenti tétel $n = 2$ speciális esete (bizonyítással együtt) középiskolai tananyag.

1.17. Tétel. *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget az

$$\underbrace{1+\frac{1}{n},\quad 1+\frac{1}{n},\quad \dots,\quad 1+\frac{1}{n}}_{n\,\mathrm{db}},\quad 1$$

számokra:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\,\mathrm{db}}\cdot 1 < \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy (a_n) monoton (sőt: szigorúan monoton) növő.

Ezután alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az

$$\underbrace{1+\frac{1}{n},\quad 1+\frac{1}{n},\quad \dots,\quad 1+\frac{1}{n}}_{n\,\mathrm{db}},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\,\mathrm{db}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} <$$

$$< \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

amiből $a_n < 4 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ adódik. Tehát (a_n) felülről korlátos.

$\square$

1.18. Következmény. Az 1.14. tétel alapján a fenti (a_n) sorozat konvergens.

1.19. Definíció. A

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$$

határértéket Euler-féle állandónak nevezzük, és e-vel jelöljük.

1.20. Megjegyzés. Bebizonyítható, hogy az „e" szám irracionális. Közelítő értéke három tizedesjegy pontossággal 2,718, ami azt jelenti, hogy a számegyenes $\dfrac{1}{1000}$ lépésközű rácsán $\left(\text{a } \dfrac{k}{1000} \quad (k \in \mathbb{Z})\,\text{számok közül}\right)$ a 2.718 van hozzá legközelebb, azaz

$$|e - 2.718| < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}.$$

1.6. Műveletek határértékkel, közrefogás

Ebben a szakaszban arról lesz szó, hogy már meglévő határértékekből hogyan lehet újakat képezni. Ennek két fő módja van. Az egyik, hogy a már ismert határértékű sorozatból algebrai műveletekkel újabb sorozatot állítunk elő. A másik pedig, hogy a vizsgált sorozatot „közrefogjuk" ismert sorozatokkal.

Nézzük először az algebrai műveleteket.

Az 1.12. megjegyzést figyelembe véve a függvények határérték-tételei sorozatokra is érvényesek. Tehát sorozatokra is igaz az, hogy a határéréték képzése az algebrai műveletekkel felcserélhető, feltéve, hogy a szereplő műveletek értelmezettek.

1.21. Tétel. *Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy léteznek a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

határértékek. Ekkor

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$;

feltéve, hogy a jobb oldalon kijelölt műveletek értelmezettek.

1.22. Megjegyzés. Emlékeztetőül a nem értelmezett (ún. tiltott) műveletek (határozatlan kifejezések):

$$(+\infty)+(-\infty), \quad (+\infty)-(+\infty) \quad (-\infty)-(-\infty),$$

$$0\cdot(\pm\infty)$$

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Térjünk rá ezek után a közrefogásra.

1.23. Tétel. *[közrefogási elv]*

Legyenek $a,\ b,\ c:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *valós számsorozatok, és tegyük fel, hogy véges sok n kivételével*

$$a_n \le b_n \le c_n.$$

Ekkor

a) ha $\lim a_n = +\infty$, *akkor* $\lim b_n = +\infty$.

b) ha $\lim c_n = -\infty$, *akkor* $\lim b_n = -\infty$.

c) ha $\lim a_n = \lim c_n = A \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim b_n = A$.

A tételt nem bizonyítjuk. Állításai szemléletesen nyilvánvalók.

1.24. Példa. Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából az $(\sqrt[n]{n})$ sorozatot.

A közrefogási elvet alkalmazzuk. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával

$$0 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-2\ db}} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \quad (n\in\mathbb{N},\ n\ge 2).$$

Az $(\sqrt[n]{n})$ sorozatot tehát közrefogtuk egyszerűbb sorozatokkal:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2).$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \right) = 1$, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

1.7. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét, és keressünk küszöbindexet $\varepsilon = 0,001$-hez:

   a) $a_n = 1 - 10^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N})$;

   b) $a_n = \dfrac{3n-2}{7n+5} \qquad (n \in \mathbb{N})$;

   c) $a_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 + 5n + 3}{4n^3 - 23n^2 + 11n + 8} \qquad (n \in \mathbb{N})$;

   d) $a_n = \dfrac{n^3 - 3n + 8}{n^3 + n^2 + n + 17} \qquad (n \in \mathbb{N})$;

   e) $a_n = \dfrac{n-1}{n^3 + 17n - 30} \qquad (n \in \mathbb{N})$.

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3})$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+3})$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n + 4 \cdot \sqrt{n}} - \sqrt{n - 10 \cdot \sqrt{n}})$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n+3}$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-4}{3n+5}\right)^{4n+2}$

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-2}$

2. Sorok

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy $a_n \in \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait valamilyen értelemben összeadhatjuk-e, és hogy mi az összeadás eredménye.

Az összeadás lényege, hogy a sorozat tagjait az elsőtől az n-edikig összeadjuk, s az így nyert ún. részletösszeg-sorozat határértékét (amennyiben ez létezik és véges) tekintjük az összeadás eredményének.

2.1. Sor fogalma

2.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozathoz tartozó részletösszeg-sorozaton az

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számsorozatot értjük.

2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat összegezhető, ha a hozzá tartozó részletösszeg-sorozat konvergens. A részletösszeg-sorozat határértékét az a_n tagok összegének nevezzük. Az összegre az alábbi két jelölés terjedt el:

$$a_1 + a_2 + \ldots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

További jelölések:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n\,, \quad \sum_{n=1} a_n\,, \quad \sum_{1} a_n\,, \quad \sum a_n\,, \quad \sum a.$$

Ezeknél a hiányzó információkat megállapodások pótolják.

Röviden tehát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Például legyen

$$a_n := \frac{1}{3^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A hozzá tartozó részletösszeg-sorozat n-edik tagja

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n},$$

ami egy mértani sorozat első n tagjának összege.

A középiskolában tanult képlet szerint:

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

(Ez az n-edik részletösszeg ún. zárt alakja.)

A részletösszeg-sorozat konvergens, ugyanis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Ezért a vizsgált $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ sorozat összegezhető, s tagjainak összege $\frac{1}{2}$.

Jelöléseinkkel:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

A továbbiakban - mivel a matematikában ez terjedt el - a következő megfogalmazást fogjuk használni: Formálisan kijelöljük az (a_n) tagok összegét a 2.2. definíciónál használt jelölések valamelyikével, például így:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Az így kapott kifejezést az a_n tagokból képzett sornak (végtelen sornak, végtelen összegnek) nevezzük. Hasonló a helyzet akkor, amikor pl. az 5 és a 3 számok összegét nem úgy írjuk fel, hogy 8, hanem úgy, hogy $5 + 3$.

2.3. Definíció. Az a_n számot a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edik tagjának (n indexű tagjának) nevezzük. Az (a_n) sorozathoz tartozó részletösszeg-sorozatot a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszeg-sorozatának, a részletösszeg-sorozat n-edik tagját a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ sor ötödik tagja $\frac{1}{3^5}$,

részletösszeg-sorozata $\quad S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$,

hetedik részletösszege pedig $\quad S_7 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^7}\right) = \frac{1093}{2187}$.

2.4. Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort konvergensnek nevezzük, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. Ellenkező esetben divergensnek nevezzük. Konvergens sor részletösszeg-sorozatának határértékét a sor összegének nevezzük, s ugyanúgy jelöljük, mint magát a sort.

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ sor konvergens, és összege $\frac{1}{2}$.
Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ sor viszont divergens, mivel részletösszeg-sorozata, az

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

sorozat divergens.

Azonnal látható, hogy „a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens" és „az (a_n) sorozat összegezhető" megfogalmazások egyenértékűek, s az is, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összege megegyezik az (a_n) tagok összegével. Ez a kapcsolat teszi lehetővé, hogy a sort mint egy kifejezést értelmezzük, ami önmagában valóban kissé pongyola lenne.

2.5. Megjegyzés. Az imént mondottak értelemszerűen átvihetők arra az esetre is, amikor a sorozat kezdő indexe nem 1, hanem valamely más egész szám.

Az eddigiek alapján máris megfogalmazhatjuk a konvergencia egy szükséges feltételét:

2.6. Tétel. *Ha a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen a sor összege $A \in \mathbb{R}$, n-edik részletösszege S_n. Ekkor nyilvánvalóan az (S_n) és az (S_{n-1}) sorozatok határértéke egyaránt A. Ezt felhasználva:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 2),$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A - A = 0.$$

□

2.7. Megjegyzések.

1. A tétel azonnali következménye, hogy ha egy sor tagjai nem tartanak 0-hoz, akkor a sor divergens.

   Például a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ sor divergens, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

2. Később látni fogunk példát arra, hogy a tétel feltétele nem elégséges, azaz van olyan sor, melynek tagjai 0-hoz tartanak, mégis divergens.

2.8. Tétel. *[konvergens sorok tagonkénti összeadása]*

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sorok konvergensek, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *sor is konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bizonyítás. Jelölje S_n , T_n , U_n rendre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sorok n-edik részletösszegét. Nyilvánvaló, hogy

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{n} a_n + \sum_{n=1}^{n} b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$n \to \infty$-re térve kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (S_n + T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

2.9. Tétel. *[konvergens sor tagonkénti szorzása konstanssal]*

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens és* $c \in \mathbb{R}$, *akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ *sor is konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bizonyítás. Jelölje S_n , T_n rendre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ sorok n-edik részletösszegét. Ekkor nyilvánvalóan

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_n = c \cdot S_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (c \cdot S_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

2.2. Mértani sor

2.10. Definíció. Legyen $q \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ sort mértani sornak nevezzük.

2.11. Tétel. *A mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $|q| < 1$. *Ez esetben*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Bizonyítás. A mértani sorozat konvergenciájáról tanultak (ld. 1.13. példáknál) szerint $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \iff |q| < 1$. Ezért a 2.6. tétel értelmében a konvergencia szükséges feltétele, hogy $|q| < 1$. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elégséges is.

Tegyük fel tehát, hogy $|q| < 1$. A középiskolában tanultak (mértani sorozat első n tagjának összege) alapján a részletösszegek zárt alakba írhatók.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + \ldots + q^n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből – $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ felhasználásával:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} S_n = q \cdot \frac{-1}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

□

Megjegyezzük, hogy a mértani sort sok esetben célszerű 0-tól kezdve indexelni, és megállapodni abban, hogy a 0 indexű tagja 1, vagyis formálisan $q^0 = 0$ (ez nem teljesen azonos a 0 kitevőjű hatvány értelmezésével, gondoljunk a 0^0 esetre). Ez esetben a konvergencia feltétele változatlan ($|q| < 1$), míg a sor összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

2.3. Pozitív tagú sorok

2.12. Definíció. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sort pozitív tagúnak nevezzük, ha

$$a_n \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a pozitív tagú sor részletösszeg-sorozata monoton növekvő. Így a konvergenciát az dönti el, hogy a részletösszeg-sorozat felülről korlátos vagy sem. Amennyiben a részletösszegek sorozata felülről korlátos, akkor a sor konvergens. Ezt így jelöljük:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Ha pedig a részletösszegek sorozata felülről nem korlátos, akkor a sor divergens, amit – utalva arra, hogy a részletösszegek a $+\infty$-be tartanak – így is jelölhetünk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Nevezetes pozitív tagú sorok az ún. hiperharmonikus sorok.

2.13. Definíció. Legyen $p > 0$ rögzített valós szám. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

sort hiperharmonikus sornak nevezzük.

A hiperharmonikus sor konvergenciájával kapcsolatos az alábbi tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk.

2.14. Tétel. *[a hiperharmonikus sor konvergenciatétele]*
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *hiperharmonikus sor* $p > 1$ *esetben konvergens,* $0 < p \leq 1$ *esetben pedig divergens.*

2.15. Megjegyzés. Tételünk szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor (az ún. harmonikus sor) divergens. Ezzel példát adtunk arra, hogy a sor konvergenciájának a tagok 0-hoz tartása nem elégséges feltétele (v.ö. 2.6. tétel).

Pozitív tagú sorok konvergenciájának vizsgálatához sokszor jól használhatók az ún. összehasonlító kritériumok.

2.16. Tétel. *[összehasonlító kritériumok] Legyen* $0 \le a_n \le b_n \quad (n \in \mathbb{N})$. *Ekkor*

a) Ha $\sum b_n < \infty$, *akkor* $\sum a_n < \infty$ *(majoráns kritérium).*

b) Ha $\sum a_n = \infty$, *akkor* $\sum b_n = \infty$ *(minoráns kritérium).*

Bizonyítás. Jelölje rendre S_n, T_n a $\sum a_n$, $\sum b_n$ pozitív tagú sorok n-edik részletösszegét. A feltételek szerint (S_n) és (T_n) monoton növekedők, továbbá $S_n \le T_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Innen már egyszerűen következik a tétel mindkét állítása, hiszen pl. ha $\sum b_n < \infty$, akkor (T_n) felülről korlátos, ekkor viszont a becslés miatt (S_n) is felülről korlátos, tehát $\sum a_n < \infty$. Ha viszont $\sum a_n = \infty$, akkor (S_n) felülről nem korlátos, s így (szintén a becslés miatt) (T_n) sem korlátos felülről. Ez pedig azt jelenti, hogy $\sum b_n = \infty$. □

2.17. Megjegyzések.

1. Nyilvánvaló, hogy a tétel állítása akkor is érvényben marad, ha a $0 \le a_n \le b_n$ feltétel csak véges sok n index kivételével teljesül.
2. Az összehasonlító kritérium két sor tagjainak változási ütemét méri össze. Az a) rész szemléletes jelentése pl. az, hogy ha a (b_n) sorozat tagjai „elég gyorsan” tartanak 0-hoz, akkor ugyanezt teszik a nála „kisebb” (a_n) sorozat tagjai is. A b) rész jelentése pedig, hogy ha az (a_n) sorozat tagjai lassan, vagy egyáltalán nem tartanak 0-hoz, akkor ugyanezt teszik a nála „nagyobb” (b_n) sorozat tagjai is. Tipikus alkalmazása, hogy egy „új” sort egy már „ismert” soral hasonlítunk össze.

Például vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2+n^2} \right)^2$$

sor. Érzésünk szerint a tagok „nagyságrendje” $\dfrac{1}{n^2}$,

$$0 \le \left(\frac{1+n}{2+n^2} \right)^2 \le \left(\frac{1+n}{n^2} \right)^2 \le \left(\frac{n+n}{n^2} \right)^2 = \frac{4}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

S mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ (hiperharmonikus sort kaptunk $p = 2$-vel), ezért a vizsgált sor konvergens.

2.4. Hányadoskritérium, gyökkritérium

Egy pozitív tagú sornak a mértani sorral való összehasonlításából kapjuk a gyökkritériumot és a hányadoskritériumot.

2.18. Tétel. *[gyökkritérium]*
Legyen $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *és tegyük fel, hogy létezik az*

$$L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0\,,\,+\infty]$$

határérték. Ekkor

a) Ha $L < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor konvergens.*

b) Ha $L > 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

Bizonyítás.

a) Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $L < q < 1$. L értelmezése miatt, $\varepsilon := q - L > 0$ választással

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad \sqrt[n]{a_n} < q.$$

n-edik hatványra emelünk:

$$0 \leq a_n < q^n \quad (n \geq N).$$

Mivel $\sum q^n < \infty$, így az összehasonlító kritérium alapján $\sum a_n < \infty$.

b) Ismét L értelmezése miatt $(\varepsilon := L - 1 > 0)$:

$$\exists N \in \mathbb{N}^+\ \forall n \geq N : \quad \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

Innen következik, hogy $a_n > 1$ $(n \geq N)$, vagyis, hogy (a_n) nem nullsorozat. Ezért $\sum a_n$ valóban divergens.

□

2.19. Megjegyzések.

1. A tétel nem szól az $L = 1$ esetről, ez az ún. határozatlan eset.

   Például a $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n}$ sorok mindegyikénél $L = 1$, de az első konvergens, a második pedig divergens.

2. Az is látható, hogy a gyökkritérium érzéketlen a „finom” sorokra. Konvergenciát csak akkor jelez, ha a tagok nullához tartási üteme legalább mértani sorozat nagyságrendű. Divergenciát pedig csak abban a „durva” esetben tud jelezni, ha a tagok nem is tartanak nullához.

2.20. Tétel. *[hányadoskritérium]*
Tegyük fel, hogy $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ *és hogy létezik az*

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0\,,\,+\infty]$$

határérték. Ekkor

a) Ha $L < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor konvergens;*

b) Ha $L > 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

A hányadoskritériumot nem bizonyítjuk. A hányadoskritériumra is érvényesek a gyökkritérium után tett megjegyzések.

2.5. Feladatok

1. $$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{3^{2i+1}}{2^{4i-3}} = ?$$

2. Írjuk fel közönséges tört alakban a $0,78\ 123\ 123\ldots$ tizedestörtet!

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 3 \cdot 2^{n+3}}{6 \cdot 5^n} = ?$$

4. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\frac{1}{3}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\frac{5^3}{3^5}+\dots$$

5. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot(n^2-n+1)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

6. (a Cantor-halmaz) A [0, 1] zárt intervallumot megharmadoljuk, majd eltávolítjuk belőle a középső harmadát (pontosabban a közepén keletkező nyílt intervallumot). A megmaradó intervallumoknak ugyanilyen módon eltávolítjuk a középső harmadát, és így tovább a „végtelenségig”. Határozzuk meg az eltávolított szakaszok hosszának összegét. (A megmaradó pontok halmazát nevezzük Cantor-halmaznak.)

3. Vektorok, mátrixok

3.1. Vektorok

3.1. Definíció. Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén rendezett valós szám-n-esen értünk egy

$$x : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$$

függvényt. Az $x(i) \in \mathbb{R}$ számot az x szám-n-es i-edik komponensének nevezzük. Az x szám-n-est jelölhetjük úgy is, hogy komponenseit felsoroljuk:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3.2. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ adott, és jelölje $\mathbb{R}^n$ a rendezett valós szám-n-esek halmazát, azaz

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \quad, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

3.3. Megjegyzés. $\mathbb{R}^n$-t n-dimenziós térnek, elemeit pedig n-dimenziós vektoroknak is szokás nevezni. $\mathbb{R}^2$ a sík helyvektoraival, $\mathbb{R}^3$ pedig a tér helyvektoraival azonosítható. Mivel a sík helyvektorai a sík pontjaival, a tér helyvektorai pedig a tér pontjaival azonosíthatók, $\mathbb{R}^n$ elemeit pontoknak is szoktuk nevezni (az n-dimenziós tér pontjai).

A dimenzió fogalmának részletes kifejtését illetően ld. az [5] jegyzetet.

3.4. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ térben értelmezük az alábbiakat:

- összeadás: $x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- valós számmal való szorzás: $\lambda \cdot x := \lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$;
- skaláris szorzás: $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$;
- vektor hossza (normája): $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$;
- két $\mathbb{R}^n$-beli pont távolsága:

  $$d(x, y) := ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

  E definíciókban $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Az összeadás és a számmal való szorzás tulajdonságait foglalja össze az alábbi tétel:

3.5. Tétel.

I.

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad x + y \in \mathbb{R}^n.$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad x + y = y + x$ *(az összeadás kommutatív).*
3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n: \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ *(az összeadás asszociatív).*
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad x + 0 = x.$
   Bebizonyítható az is, hogy 0 *egyértelmű, mégpedig*
   $$0 = (0, 0, \ldots, 0),$$
   a csupa 0 *számból álló n-es. E speciális elem neve: nullelem, vagy nullvektor.*
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \exists\, (-x) \in \mathbb{R}^n: \quad x + (-x) = 0.$
   Bebizonyítható az is, hogy $(-x)$ *egyértelmű, mégpedig*
   $$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n),$$
   az x *komponenseinek ellentetjéből felépített vektor. A* $-x$ *elem neve:* x *ellentettje vagy additív inverze.*

II.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda \cdot x \in \mathbb{R}^n.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$
4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad 1 \cdot x = x.$

3.6. Megjegyzés. A fenti tulajdonságok röviden úgy foglalhatók össze, hogy $\mathbb{R}^n$ az összeadásra és a számmal való szorzásra nézve egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér. A vektorterekről bővebben ld. az [5] jegyzetet.

A skaláris szorzás tulajdonságait foglalja össze az alábbi tétel:

3.7. Tétel.

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad \langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}.$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad \langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle.$
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda \cdot \langle x,\, y\rangle.$

4. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n: \quad \langle x,\, y+z\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, z\rangle.$

5. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad \langle x,\, x\rangle \geq 0,$ *továbbá* $\langle x,\, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(Ekvivalens megfogalmazás: $\langle 0,\, 0\rangle = 0$ *és* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \ \langle x,\, x\rangle > 0.$*)*

3.8. Megjegyzés. Ezek a tulajdonságok úgy foglalhatók össze, hogy $\mathbb{R}^n$ az összeadásra, a számmal való szorzásra és a skaláris szorzásra nézve egy $\mathbb{R}$ feletti euklideszi tér. Az euklideszi terekről bővebben ld. az [5] jegyzetet.

A norma tulajdonságai az alábbiakban foglalhatók össze:

3.9. Tétel.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\| \geq 0,$ *továbbá* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

3. $\forall\, x, y \in V: \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(háromszög-egyenlőtlenség).*

3.10. Megjegyzések.

1. Az összeadás, a számmal való szorzás és a norma tulajdonságai együtt azt fejezik ki, hogy $\mathbb{R}^n$ az összeadásra, a számmal való szorzásra és a normára nézve nézve egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris normált tér.

2. A háromszög-egyenlőtlenség az $n = 1$ esetben így szól:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Bizonyítása történhet pl. úgy, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2,$$

ami a triviálisan igaz $xy \leq |x| \cdot |y|$ egyenlőtlenséggel egyenértékű.

Hasonló elv alapján igazolható a háromszög-egyenlőtlenség az $n \geq 2$ esetben is.

3. A normával kapcsolatban még egy fontos egyenlőtlenségre lesz szükségünk. Ez pedig a következő:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}: \quad |x_i| \leq ||x||.$$

Ennek igazolása rendkívül egyszerű:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = ||x||.$$

Megjegyezzük, hogy – az $n = 3$ [és az $n = 2$] esetre gondolva – a most igazolt egyenlőtlenség tartalma az, hogy a téglatest testátlójának [a derékszögű háromszög átfogójának] hossza legalább akkora, mint bármely oldalélé [befogóé].

A távolság (metrika) tulajdonságait foglalja össze az alábbi tétel:

3.11. Tétel.

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d(x,y) \geq 0, \quad$ *továbbá* $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n: \quad d(x,y) = d(y,x).$

3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n: \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(háromszög-egyenlőtlenség).*

3.12. Megjegyzés. Ezek a tulajdonságok úgy foglalhatók össze, hogy $\mathbb{R}^n$ a megadott távolságfüggvényre nézve egy metrikus tér.

A fenti tételeket nem bizonyítjuk. Többségük egyszerűen (bár helyenként sok számolással) levezethető a valós számok műveleti tulajdonságaiból.

3.2. Mátrixok

3.13. Definíció. Legyen m, $n \in \mathbb{N}$. Az

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$$

függvényeket $m \times n$-es (valós elemű) mátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$ jelöli. Az A mátrix (i,j) helyen felvett $A(i,j)$ helyettesítési értékét az i-edik sor j-edik elemének (a j-edik oszlop i-edik elemének) nevezzük, jelölése: a_{ij}, vagy pedig $(A)_{ij}$.

A mátrixot (n-edrendű) négyzetes mátrixnak nevezzük, ha $m = n$.

A mátrixokat $m \times n$-es táblázatként szokás megadni, innen ered a definícióbeli „sor-oszlop" szóhasználat is:

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \ldots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \ldots & A(2,n) \\ & & \vdots & \\ A(m,1) & A(m,2) & \ldots & A(m,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Megemlítünk néhány nevezetes mátrixot: A nullmátrix az a mátrix, melynek miden eleme 0. Ha nem okoz félreértést, a nullmátrixot a 0 szimbólummal fogjuk jelölni. Sormátrixnak nevezzük az egyetlen sorból álló mátrixot (tehát $\mathbb{R}^{1 \times n}$ elemeit), oszlopmátrrixnak pedig az egyetlen oszlopból álló mátrixot (tehát $\mathbb{R}^{m \times 1}$ elemeit). Szokás ezekre a „sorvektor" ill. az „oszlopvektor" elnevezés is, mivel $\mathbb{R}^{1 \times n}$ azonosítható $\mathbb{R}^n$-nel, $\mathbb{R}^{m \times 1}$ pedig $\mathbb{R}^m$-mel.

Az 1×1-es mátrixok egyidejűleg sor- és oszlopmátrixok, s $\mathbb{R}^1$-gyel ill. magával az $\mathbb{R}$ számhalmazzal azonosíthatók.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha

$$\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}: \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Nevezetes $n \times n$-es mátrix egységmátrix, melyet I-vel fogunk jelölni. Értelmezése:

$$(I)_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{ha} \quad i = j \end{cases} \qquad (i,j = 1,\dots,n).$$

Mátrixokkal többféle művelet végezhető. A legegyszerűbb az összeadás és a számmal való szorzás. Ezeket „elemenként” végezzük:

3.14. Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Az

$$A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad (A+B)_{ij} := (A)_{ij} + B_{ij}$$

mátrixot az A és B mátrixok összegének, a

$$\lambda A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad (\lambda A)_{ij} := \lambda \cdot (A)_{ij}$$

mátrixot pedig az A mátrix λ-szorosának nevezzük.

3.15. Megjegyzés. Az összeadás és a számmal való szorzás tulajdonságai – könnyen bizonyíthatóan – megegyeznek a vektorok összeadásának és számmal való szorzásának tulajdonságaival (ld. 3.5. tétel). Ennek alapján elmondhatjuk, hogy az $m \times n$-es mátrixok egy $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkotnak. Ennek a térnek a nulleleme a nullmátrix, egy mátrix ellentettjét pedig úgy képezzük, hogy minden pozíción vesszük az ellentett mátrixelemet.

A következő művelet, a mátrixok szorzása, már bonyolultabb.

3.16. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Az

$$AB \in \mathbb{R}^{m\times p}, \qquad (AB)_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

mátrixot az A és B mátrixok (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

A szorzás alábbi műveleti tulajdonságai egyszerű számolásokkal igazolhatók:

3.17. Tétel. *1. asszociativitás:*

$$(AB)C = A(BC) \qquad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ C \in \mathbb{R}^{p\times q});$$

2. disztributivitás:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B,\, C \in \mathbb{R}^{n\times p});$$

$$(A+B)C = AC + BC \qquad (A,\, B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ C \in \mathbb{R}^{n\times p});$$

3. Szorzás egységmátrixszal: jelölje I a megfelelő méretű egységmátrixot, ekkor:

$$AI = A \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n}), \qquad IA = A \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n}).$$

4. Szorzat szorzása számmal:

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \qquad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

3.18. Megjegyzés. Hiányoljuk a szorzás kommutativitását. Az alábbi példa mutatja, hogy a szorzás nem kommutatív:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

A példa azt is mutatja, hogy két nem nullmátrix szorzata lehet nullmátrix. Ez, és a kommutativitás hiánya a valós számoktól eltérő, szokatlan jelenség.

A mátrixszorzás speciális eseteként foghatjuk fel a mátrix-vektor szorzás műveletét. Ezt így értelmezzük:

3.19. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Az

$$Ax \in \mathbb{R}^m, \qquad (Ax)_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

vektort az A mátrix és az x vektor (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

3.20. Megjegyzés. A definícióból látható, hogy az Ax vektorhoz úgy is eljuthatunk, hogy összeszorozzuk az A mátrixot és az x-nek megfelelő oszlopmátrixot, s vesszük az így kapott oszlopmátrixnak megfelelő vektort. Ezért röviden úgy mondjuk, hogy a mátrix-vektor szorzás lényegében egy mátrix és egy oszlopmátrix összeszorzását jelenti. Ebből az azonosításból természetes módon adódnak a mátrix-vektor szorzás tulajdonságai.

3.21. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{N}$. Az

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\,\mathrm{db}}$$

szorzatot az A mátrix k-adik hatványának nevezzük. Megállapodunk abban, hogy $A \neq 0$ esetén $A^0 := I$.

Ami a negatív egész kitevős hatványokat illeti – a valós számokra gondolva – a kulcskérdés az, hogyan értelmezzük a -1 kitevőjű hatványt, vagyis a mátrix „reciprokát”. Ezt a mátrix inverzének fogjuk nevezni.

3.22. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Egy $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot az A inverzének nevezzük, ha

$$A \cdot C = C \cdot A = I.$$

Az A inverzét A^{-1} jelöli.

3.23. Megjegyzések.

1. Igazolható, hogy ha A^{-1} létezik, akkor egyértelmű.

2. Igazolható, hogy az $A \cdot C = I$, $C \cdot A = I$ egyenlőségek bármelyike maga után vonja a másikat.

3. Az inverz mátrix létezésének és előállításának vizsgálata kívül esik e jegyzet keretein. Ezzel kapcsolatban ld. [5].

4. Megadjuk a 2×2-es mátrix inverzének előállítását. Legyen

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ekkor A^{-1} létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy

$$ad - bc \neq 0.$$

Ebben az esetben, könnyen ellenőrizhetően:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

3.3. Feladatok

1. Adottak a következő $\mathbb{R}^4$-beli vektorok:

$$x := (-1,\, 3,\, 5,\, 2) \qquad y := (2,\, -3,\, -1,\, 1).$$

Számítsuk ki az alábbiakat:

$$a)\quad x+y \qquad b)\quad x-y \qquad c)\quad 3x \qquad d)\quad 2x-5y$$

$$e)\quad \langle x,\, y\rangle \qquad f)\quad ||x|| \qquad g)\quad d(x,y)$$

2. Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $A+B$, $3A$, $2A-3B$ mátrixokat.

3. Végezzük el a következő mátrix-szorzást:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $A^3 - 2A^2 - 2A$ mátrixot.

5. Számítsuk ki az Ax mátrix-vektor szorzatot, ha

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \text{és} \quad x = (1,\, 1,\, 2,\, -1) \in \mathbb{R}^4 \ .$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixoknak van-e inverze. Ha igen akkor határozzuk meg az inverz mátrixot, majd mátrix-szorzással ellenőrizzük az eredményt.

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Többváltozós függvények

Ebben a fejezetben $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekről lesz szó. Ezek változója n-dimenziós vektor. Ez felfogható úgy is, mintha a függvényünknek n db valós szám változója lenne. Ilyen értelemben beszélünk n-változós függvényről, ami az $n \geq 2$ esetben valóban többváltozós függvényt jelent. Érdemes végiggondolni, hogy a többváltozós függvénytanban látott eredmények az $n = 1$ esetben hogyan kapcsolódnak az egyváltozós függvényekről tanultakhoz.

4.1. Határérték, folytonosság

A határérték esetében a fő kérdés ugyanaz, mint az egyváltozós függvényeknél: ha egy függvény változója valahova közeledik akkor hová közelednek a függvényértékek. Most azonban az a hely, ahova a változóval közelítünk, az $\mathbb{R}^n$ tér valamely eleme. Ennek az elemnek olyannak kell lennie, hogy a függvény értelmezési tartományából tetszőleges pontossággal meg lehessen közelíteni, tőle különböző elemekkel. Itt is értelmeznünk kell tehát az $\mathbb{R}^n$-beli pontok környezeteit és az $\mathbb{R}^n$-beli halmazok torlódási pontjait.

4.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Az a pont r sugarú környezete alatt értjük a

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ ||x - a|| < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

halmazt.

4.2. Megjegyzés. Az a pont r sugarú környezete

- $n = 1$ esetén az $(a - r,\, a + r)$ nyílt intervallum:

$$K_r(a) = (a - r,\, a + r);$$

- $n = 2$ esetén az a középpontú r sugarú nyílt körlap:

$$K_r(a) = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\};$$

- $n = 3$ esetén pedig az a középpontú r sugarú nyílt gömbtest:

$$K_r(a) = \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\}.$$

4.3. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, és $a \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy a a H torlódási pontja, ha

$$\forall\, r > 0 : \quad (K_r(a) \setminus \{a\}) \cap H \neq \emptyset$$

A H halmaz torlódási pontjainak halmazát H'-vel jelöljük, azaz:

$$H' := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a \text{ a } H \text{ torlódási pontja}\}$$

A H halmaz azon pontjait, amelyek nem torlódási pontok (tehát $H \setminus H'$ elemeit), izolált pontoknak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban $a \in \mathbb{R}^n$, tehát $n = 1$-re nem kapjuk vissza a $+\infty$-t és a $-\infty$-t mint torlódási pontokat.

Ezek után a határérték definíciója megegyezik az egyváltozós függvény határérték-definíciójával, az eltérés csupán annyi, hogy $\mathbb{R}^n$-beli környezeteket használunk.

4.4. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D'_f$, $A \in \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy f határértéke az a pontban A (jelben: $\lim\limits_a f = A$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_f : \qquad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Bebizonyítható, hogy rögzített f és a esetén a $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség legfeljebb egy $A \in \mathbb{R}^m$ esetén áll fenn, más szóval, a határérték egyértelmű.

További jelölések:

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad f(x) \to A \ \ (x \to a).$$

4.5. Megjegyzések.

1. A definícióban csak a „végesben vett véges” határérték szerepel. Ez – a környezet fogalmát felhasználva – a következőképpen írható fel egyenlőtlenségekkel. A
$$\lim_a f = A$$
egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f,\ 0 < ||x - a|| < \delta : \quad ||f(x) - A|| < \varepsilon.$$

2. Gyakori eset az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú (ún. kétváltozós valós) függvények vizsgálata. Ez esetben a vektorok komponenseit sokszor nem indexeléssel, hanem külön betűkkel jelöljük, pl. $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$, stb. Így – a norma értelmezését is felhasználva – a határérték így is megfogalmazható:

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0,\, y_0) \in D'_f$, $A \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$\lim_a f = A \qquad \Big(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad \Big)$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, (x,y) \in D_f,\ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta :$$
$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

A határértékkel szoros kapcsolatban van a folytonosság fogalma. Ha az értelmezési tartománynak csak azokra a pontjaira szorítkozunk, amelyek egyúttal torlódási pontjai is az értelmezési tartománynak, akkor a folytonosság értelmezhető a határérték segítségével.

4.6. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D_f \cap D'_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a-ban, ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Az a pontban folytonos függvények halmazát jelölje $C(a)$.

4.7. Megjegyzés. A határérték definícióját felhasználva, a pontbeli folytonosságot így is értelmezhetnénk:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in K_\delta(a) \cap D_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(f(a)).$$

Egyenlőtlenségekkel (a környezet fogalmát felhasználva):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in D_f,\ ||x - a|| < \delta : \quad ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon.$$

Ezek a definíciók $a \in D_f \setminus D'_f$ esetén is érvényesek, és azt az eredményt adják, hogy a függvény az értelmezési tartományának izolált pontjaiban folytonos.

A következőkben néhány, a határértékszámításnál használt tételt, eljárást ismertetünk.

1. Az első tétel arra vonatkozik, hogy lényegében $m = 1$ feltehető.

   4.8. Tétel. *[koordinátánkénti határérték] Legyen*

   $$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in D'_f,\ A = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbb{R}^m,$$

   s tegyük fel hogy $m \geq 2$. Ekkor

   $$\lim_a f = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_a f_i = A_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

A tételt nem bizonyítjuk. A tétel a vektorértékű függvény határértékét m db skalárértékű függvény határértékére vezeti vissza.

4.9. Következmény. Az $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor folytonos a-ban, ha az f_i koordinátafüggvények folytonosak a-ban (koordinátánkénti folytonosság tétele).

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $m = 1$.

2. A következő tétel – melyet szintén nem bizonyítunk – a határérték és az algebrai műveletek kapcsolatát fejezi ki.

4.10. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D'_f$ és $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D'_g$, továbbá $c \in \mathbb{R}$.*

Ekkor

$$\begin{aligned}
\lim_a (f+g) &= \lim_a f + \lim_a g, \\
\lim_a (f \cdot g) &= \lim_a f \cdot \lim_a g, \\
\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim_a f}{\lim_a g}, \\
\lim_a (c \cdot f) &= c \cdot \lim_a f,
\end{aligned}$$

feltéve, hogy az egyenlőségek jobb oldalán szereplő határértékek léteznek (és természetesen végesek), továbbá a hányados esetében $\lim_a g \neq 0$.

4.11. Következmény. Adott pontban folytonos függvények összege, szorzata, hányadosa (feltéve, hogy a nevező az adott pontban nem 0) folytonos az adott pontban.

4.12. Megjegyzés. Bebizonyítható, hogy ha

$$g \in C(a), \quad \text{továbbá} \quad f \in C(g(a)),$$

akkor $f \circ g \in C(a)$, azaz kissé pongyolán fogalmazva: folytonos függvények kompozíciója is folytonos.

3. A következő eljárás azon alapul, hogy ha egy függvénynek egy pontban van határértéke, akkor „bármilyen módon” tartva a ponthoz, ezt a határértéket kell kapnunk. Ha tehát találunk két olyan „tartási módot”, hogy a függvényértékek nem ugyanoda tartanak, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs határértéke. A „tartási mód” azt jelenti, hogy az adott pontba való közeledéskor nem lépünk ki egy előre megadott halmazból. Pl. közeledhetünk az adott pontba egyenesek, vagy egyéb más halmazok mentén.

4. Azt, hogy $\lim\limits_{a} f = A$ sokszor így bizonyítjuk:

   Az $|f(x) - A|$ eltérést felülről becsüljük a változók $||x - a||$ eltérésének valamely 0-hoz tartó függvényével, pl. $||x - a||$ konstansszorosával, azaz bebizonyítjuk, hogy

   $$\exists\, r > 0\ \exists\, L > 0\ \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f,\ x \neq a: \quad |f(x) - A| \leq L \cdot ||x - a||.$$

   Ekkor ugyanis a határérték definíciójában ε-hoz megfelel a

   $$\delta := \min\{r,\ \frac{\varepsilon}{L}\} > 0$$

   választás, mivel ekkor $\forall\, x \in K_\delta(a) \cap D_f$, $x \neq a$ esetén

   $$|f(x) - A| \leq L \cdot ||x - a|| < L \cdot \delta \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

5. Végül, ha a függvény a vizsgált helyen folytonos (pl. folytonos alapfüggvényekből épül fel folytonosságtartó műveletekkel), akkor határértéke nyilvánvalóan a helyettesítési értékkel egyenlő.

4.2. Deriválás

4.13. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $a \in H$. Azt mondjuk, hogy a a H belső pontja, ha

$$\forall\, r > 0: \quad (K_r(a) \subset H.$$

A H halmaz belső pontjainak halmazát a halmaz belsejének nevezzük, és $\operatorname{int} H$-val jelöljük.

Az egyváltozós függvények körében a deriváltat a függvény lineáris függvénnyel való megközelítése kapcsán vezettük be. Ez az eljárás a többváltozós függvények körében is alkalmazható.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{int} D_f$. f-et most

$$l(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

alakú lineáris függvénnyel közelítjük, ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. A közelítés elvei ugyanazok, mint az egyváltozós esetben. Az $l(a) = f(a)$ feltételből kapjuk, hogy

$$l(x) = \overbrace{A \cdot \underbrace{(x-a)}_{\in\mathbb{R}^n}}^{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{f(a)}_{\in\mathbb{R}^m}.$$

Az A mátrixot úgy szeretnénk megválasztani, hogy a közelítés hibája (az $f(x) - l(x)$ különbség) gyorsabban tartson 0-hoz, mint ahogy x az a-hoz, azaz

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - l(x)}{||x-a||} = 0.$$

4.14. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{int} D_f$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható (deriválható) a-ban (jele: $f \in D(a)$), ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

E definíció ekvivalens alakja ($h := x - a$ jelöléssel):

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - A\cdot h}{||h||} = 0.$$

4.15. Megjegyzések.

1. $n = m = 1$ esetén visszakapjuk az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eset definícióját.

2. $n = 1$ esetben megadható a differenciálhatóság és a derivált konstruktív, a különbségi hányadossal való értelmezése. Így ez esetben az A mátrix egyértelműsége nyilvánvaló.

3. $n \geq 2$ esetben nem megy a különbségi hányadossal való értelmezés, mert az $x - a \in \mathbb{R}^n$ vektorral nem lehet osztani. Bebizonyítható (természetesen nem a különbségi hányadossal), hogy az A mátrix ez esetben is egyértelmű.

4.16. Definíció. A fenti definícióban szereplő A mátrixot az f a-beli deriváltjának nevezzük, jele: $f'(a)$. Tehát $f'(a) := A$.

Az egyváltozós esethez hasonlóan, most is célszerű a függvényt egy adott pontban a mondott értelemben legjobban megközelítő lineáris függvény grafikonját „érintősíknak” nevezni. Persze ez csak $n = 2$ esetben bír közvetlen szemlélettel.

4.17. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0,\, y_0) \in \operatorname{int} D_f$, és tegyük fel, hogy $f \in D(a)$. A

$$z = f'(x_0,\, y_0) \cdot ((x,\, y) - (x_0,\, y_0)) + f(x_0,\, y_0)$$

egyenletű síkot az f grafikonja $a = (x_0,\, y_0)$ pontbeli érintősíkjának nevezzük.

Többváltozós függvény esetén is igaz, hogy a differenciálhatóság maga után vonja a folytonosságot.

4.18. Tétel. $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$.

Bizonyítás.

$$f(a+h)-f(a) = \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h}{||h||}}_{\to 0} \cdot \underbrace{||h||}_{\to 0} + \underbrace{f'(a)\cdot h}_{\to 0} \to 0 \quad (h \to 0),$$

Tehát $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, azaz $f \in C(a)$. □

4.19. Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 \cdot y$, tehát most $n = 2,\ m = 1$. Legyen $a := (-1,1)$. Megmutatjuk, hogy $f'(-1,1) = \begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. A definícióban szereplő törtet kell vizsgálni, hogy tart-e 0-hoz. $h := (h_1,h_2)$ jelöléssel

$$\frac{f((-1,1)+(h_1,h_2)) - f(-1,1) - \begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\cdot(h_1,h_2)}{||h||} =$$

$$= \frac{f(-1+h_1, 1+h_2) - f(-1,1) - (-2h_1+h_2)}{||h||} =$$

$$= \frac{(-1+h_1)^2\cdot(1+h_2) - 1 + 2h_1 - h_2}{||h||} = \frac{h_1^2 - 2h_1h_2 + h_1^2h_2}{||h||}.$$

Mivel 0-hoz tartásról van szó, vizsgálhatjuk a tört abszolút értékét.

$$0 \le \left|\frac{h_1^2 - 2h_1h_2 + h_1^2h_2}{||h||}\right| = \frac{|h_1^2 - 2h_1h_2 + h_1^2h_2|}{||h||} \le$$

$$\le \frac{|h_1|^2 + 2|h_1||h_2| + |h_1|^2|h_2|}{||h||} \le \frac{||h||^2 + 2||h||\cdot||h|| + ||h||^2||h||}{||h||} =$$

$$= 3||h|| + ||h||^2 \to 0 \quad (h \to 0).$$

Felhasználtuk a háromszög-egyenlőtlenséget, és azt a tényt, hogy

$$|h_1| \le ||h||, \quad |h_2| \le ||h||.$$

Kidolgozott példánkban előre megadtuk a derivált mátrixot. Kérdés, hogyan lehetne az elemeit a függvényből és az adott pontból meghatározni. Ehhez új fogalomra, a parciális derivált fogalmára lesz szükség.

4.20. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{int} D_f$, és rögzítsünk egy $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexet. Jelölje $r > 0$ azt a sugarat, melyre $K_r(a) \subset D_f$. Vezessük be a következő függvényt:

$$g_j(u) := f(a_1, \ldots, a_{j-1}, u, a_{j+1}, \ldots, a_n) \qquad (u \in K_r(a_j)).$$

A $g_j'(a_j)$ számot – amennyiben létezik – az f függvény a pontbeli j-edik parciális deriváltjának (vagy: a j-edik változó szerinti parciális deriváltjának) nevezzük. Jele: $\partial_j f(a)$.

A derivált mátrix elemeiről szól az alábbi tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

4.21. Tétel. *Legyen $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{int} D_f$, és tegyük fel, hogy $f \in D(a)$. Ekkor bármely $i \in \{1, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén létezik a $\partial_j f_i(a)$ parciális derivált, és*

$$(f'(a))_{ij} = \partial_j f_i(a).$$

4.22. Megjegyzés. A derivált mátrix tehát:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \ldots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \ldots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \ldots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

4.23. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$, és tegyük fel, hogy $f \in D(a)$. A

$$\operatorname{grad} f(a) := \nabla f(a) := (\partial_1 f(a),\, \partial_2 f(a),\, \ldots,\, \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^n$$

vektort az f függvény a-pontbeli gradiensének nevezzük.

4.24. Megjegyzés. A gradiens tehát nem más, mint a függvény derivált-mátrixának megfelelő $\mathbb{R}^n$-beli vektor.

A 4.17. definícióban értelmeztük az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvény grafikonjának érintősíkját. Miután megismertük a deriváltmátrix elemeit, az érintősík egyenlete a parciális deriváltakkal is felírható:

$$z = \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)\ .$$

Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának minden olyan pontjához, melyben létezik a j-edik parciális derivált, hozzárendeljük a parciális deriváltat, egy új függvényhez, a j-edik parciális derivált függvényhez jutunk. Nyilvánvalóan $\partial_j f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ha az f mindegyik parciális derivált függvénye differenciálható a-ban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható a-ban. Ezt így jelöljük: $f \in D^2(a)$.

Képezhetjük továbbá a $\partial_j f$ függvény parciális deriváltjait:

$$\partial_1\partial_j f,\ \ldots,\ \partial_n\partial_j f.$$

Ezeket másodrendű parciális deriváltaknak nevezzük. Bebizonyítható az alábbi tétel.

4.25. Tétel. *[Young tétele]*
Ha $f \in D^2(a)$, akkor

$$\partial_i\partial_j f(a) = \partial_j\partial_i f(a) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

4.26. Megjegyzés. A Young-tétel azt fejezi ki, hogy ha $f \in D^2(a)$, akkor a másodrendű parciális deriváltakból felépített

$$f''(a) := \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_1 f(a) & \ldots & \partial_n\partial_1 f(a) \\ \partial_1\partial_2 f(a) & \partial_2\partial_2 f(a) & \ldots & \partial_n\partial_2 f(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(a) & \partial_2\partial_n f(a) & \ldots & \partial_n\partial_n f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ún. Hesse-féle mátrix (vagy: második derivált mátrix) szimmetrikus.

4.3. Kvadratikus formák

4.27. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. A

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) := \langle Ax,\, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

függvényt (az A mátrix által meghatározott) kvadratikus formának (kvadratikus alaknak) nevezzük. Az A mátrixot a Q kvadratikus forma mátrixának nevezzük.

4.28. Megjegyzés. Az nyilvánvaló, hogy egy szimmetrikus mátrix csak egy kvadratikus formát határoz meg. Ennek megfordítása is igaz: egy kvadratikus formának csak egy szimmetrikus mátrixa van.

A kvadratikus formákat felvett értékeik előjele alapján szokás osztályozni (ún. definitségi osztályokba sorolni). Előző megjegyzésünknek megfelelően ez egyúttal az $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli szimmetrikus mátrixok osztályozását is jelenti.

4.29. Definíció. Legyen $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy kvadratikus forma, melynek mátrixa az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. Azt mondjuk, hogy Q ill. A

- pozitív definit, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \quad Q(x) > 0.$
- negatív definit, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \quad Q(x) < 0.$
- pozitív szemidefinit, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) \geq 0.$
- negatív szemidefinit, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) \leq 0.$
- indefinit, ha $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) > 0,\ Q(y) < 0.$

4.30. Megjegyzések.

1. Definíciónk értelmében a kvadratikus formák (ill. a szimmetrikus mátrixok) halmaza három osztályra bomlik: a pozitív szemidefinit, a negatív szemidefinit és az indefinit formák osztályára. Ez a három osztály majdnem diszjunkt, egyetlen elem van, amelyik két osztályban is benne van, a 0-függvény. Ez pozitív szemidefinit is és negatív szemidefinit is.

2. A pozitív definit formák (mátrixok) halmaza részhalmaza a pozitív szemidefinit formák (mátrixok) halmazának. Hasonlóképpen, a negatív definit formák (mátrixok) halmaza részhalmaza a negatív szemidefinit formák (mátrixok) halmazának.

3. A pozitív és a negatív definit formákat együttesen definit formáknak, a pozitív és a negatív szemidefinit formákat pedig együttesen szemidefinit formáknak nevezzük. Természetesen ugyanezek az elnevezések érvényesek a megfelelő mátrixokra is.

Foglalkozzunk ezek után a kétváltozós kvadratikus formákkal (n=2). Ezek általános alakja:

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \qquad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2),$$

mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

A kétváltozós kvadratikus formákat a következő tétel segítségével osztályozhatjuk:

4.31. Tétel. *A fenti $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus forma*

- $\det A = ac - b^2 > 0$ *esetén definit, mégpedig*
  - *ha $a > 0$, akkor pozitív definit.*
  - *ha $a < 0$, akkor negatív definit.*

  (Az $a = 0$ eset ekkor lehetetlen.)

- $\det A = ac - b^2 < 0$ *esetén indefinit.*

- $\det A = ac - b^2 = 0$ *esetén*
  - *ha $a > 0$, akkor pozitív szemidefinit, de nem pozitív definit.*
  - *ha $a < 0$, akkor negatív szemidefinit, de nem negatív definit.*
  - *ha $a = 0$, akkor*
    - *$c > 0$ esetén pozitív szemidefinit, de nem pozitív definit.*
    - *$c < 0$ esetén negatív szemidefinit, de nem negatív definit.*
    - *$c = 0$ esetén az azonosan 0 függvény.*

A bizonyítás a következő, könnyen belátható elemi átalakításon alapul:

$$Q(x_1,x_2) = ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2 = \begin{cases} \dfrac{(ax_1+bx_2)^2+(ac-b^2)x_2^2}{a} & \text{ha } a \neq 0, \\[2ex] \dfrac{(bx_1+cx_2)^2+(ac-b^2)x_1^2}{c} & \text{ha } c \neq 0, \\[2ex] 2bx_1x_2 & \text{ha } a=c=0. \end{cases}$$

Ennek alapján már könnyen megvizsgálhatjuk az egyes esetekben a helyettesítési értékek előjelét.

4.4. Lokális szélsőérték

A lokális szélsőérték definíciója ugyanaz, mint az egyváltozós esetben, csak $\mathbb{R}$-beli környezet helyett $\mathbb{R}^n$-beli környezetet használunk.

4.32. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad a \in D_f$.
Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban lokális

1. minimuma van, ha $\exists\, r>0\ \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f : \quad f(x) \geq f(a)$;
2. szigorú minimuma van, ha
$$\exists\, r>0\ \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f \setminus \{a\} : \quad f(x) > f(a);$$
3. maximuma van, ha $\exists\, r>0\ \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f : \quad f(x) \leq f(a)$;
4. szigorú maximuma van, ha
$$\exists\, r>0\ \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f \setminus \{a\} : \quad f(x) < f(a).$$

Itt a a lokális szélsőérték helye, $f(a)$ a lokális szélsőérték.

A lokális szélsőértékkel kapcsolatban egy szükséges és egy elégséges feltételt közlünk, bizonyítás nélkül.

4.33. Tétel. *[a lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele]*
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D(a)$, és tegyük fel, hogy f-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Ekkor $f'(a) = 0$.

4.34. Megjegyzések.

1. Az $f'(x) = 0$ egyenlet részletesebben az

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_n f(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

   $n \times n$-es egyenletrendszert jelenti. Ennek gyökeit stacionárius pontoknak nevezzük. Tételünk más szóval azt jelenti, hogy a lokális szélsőértékhelyek vagy a stacionárius pontok közül kerülnek ki, vagy azon pontok közül, ahol a függvény nem differenciálható.

2. A tételben szereplő $f'(a) = 0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges (pl.: $n = 1,\ f(x) = x^3,\ a = 0$).

4.35. Tétel. *[lokális szélsőérték másodrendű elégséges feltétele]*
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D^2(a),\ f'(a) = 0$. Ha az $f''(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív [negatív] definit, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma [maximuma] van.

4.36. Megjegyzések.

1. $n = 1$ esetben a feltétel: $f''(a) > 0$ $[f''(a) < 0]$.

2. A feltétel csak elégséges, de nem szükséges, például legyen

$$n := 2, \quad f(x, y) := x^4 + y^4, \quad a := (0,\, 0).$$

3. Igazolható a másodrendű szükséges feltétel: Ha $f \in D^2(a)$ és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ szemidefinit, mégpedig minimum esetén pozitív szemidefinit, maximum esetén negatív szemidefinit.

4. $n = 2$ esetben (a kétváltozós kvadratikus formák definitségéről tanultak alapján):

   Ha $\det f''(a) < 0$, akkor a-ban nem létezik lokális szélsőérték,
   Ha $\det f''(a) > 0$ és $\partial_1\partial_1 f(a) > 0$, akkor a-ban szigorú lokális minimum van,
   $\det f''(a) > 0$ és $\partial_1\partial_1 f(a) < 0$ akkor a-ban szigorú lokális maximum van.

4.5. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad b) \quad \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{1}{x - y}.$$

$$c) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \qquad d) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}.$$

$$e) \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

2. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket:

$$a) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y} & \text{ha} \quad x + y \neq 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x + y = 0; \end{cases}$$

$$b) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$c) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \quad \text{és a} \quad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

ún. ismételt határértékeket, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Igazoljuk a definíció alapján, hogy az alábbi függvények deriváltja a megadott a pontban a megadott A mátrix.

   a) $f(x, y) = 2xy, \quad a = (1, -1) \quad , A = [\,2 \quad -2\,];$

   b) $f(x, y) = xy^2 - 3x^2, \quad a = (1, 2) \quad , A = [\,-2 \quad 4\,].$

5. Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények parciális deriváltjait.

   a) $f(x, y) = e^{x^2 y} - 2x^2y^3 \sin(x + y)$ *b)* $f(x, y) = e^x \cos y - x \ln y$

   c) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1-x}{1-y}$ *d)* $f(x, y) = \dfrac{1}{xy^2 - x^2y}$

   e) $x^6 - 5x^6y^2 + 7xy^6$ *f)* $\dfrac{x^2 + 3xy - 1}{y^2 - 4xy + x^3}$

6. Számítsuk ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait, és írjuk fel a Hesse-féle mátrixot.

   a) $f(x, y) = x^6 - 5x^6y^2 + 7xy^6$ *b)* $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   c) $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \cos y$ *d)* $f(x, y) = \ln \dfrac{x-y}{x+y}$

7. Vizsgáljuk meg differenciálhatóság szempontjából az alábbi ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú) függvényeket, és ahol differenciálhatók, ott írjuk fel a deriváltmátrixot:

   a) $f(x, y) = \arccos \dfrac{y}{x};$ *b)* $f(x, y) = x \cdot \ln(x + y)$

   c) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{ha} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\[2ex] 0 & \text{ha} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

8. Írjuk fel a megadott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények grafikonjához a megadott pontban húzott érintősík egyenletét. (A pontokat az első két koordinátájukkal adjuk meg.)

$$a)\quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y^2}, \quad P_0 = (3,\ 2);$$

$$b)\quad f(x, y) = x^2 y + 2y^2, \quad P_0 = (2,\ 1).$$

9. Keressük meg azokat a pontokat, ahol az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 5x - 10y$$

függvény gradiense

a) nullvektor;

b) egyirányú a (12, 5) vektorral;

c) hossza 26 egység.

10. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeit és a szélsőértékeket:

a) $f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$;

b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$;

c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$;

d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$;

f) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2)$;

g) $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$.

11. Határozzuk meg annak a téglatestnek a maximális térfogatát, amely éleinek összege 48 cm. Adjuk meg az ehhez tartozó él-méreteket is.

12. Egy mosdófülke térfogata adott: K m^3, alakja téglatest, melynek egyik lapja hiányzik (bejárat). Hogyan méretezzük a fülkét, hogy a legkevesebb területű határoló falra legyen szükség? (A falba az alaplapot és a fedőlapot is bele kell számítani.)

13. A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett szeletébe írjuk be a legnagyobb térfogatú téglatestet. Mekkora ennek a térfogata, és éleinek hossza?

14. Egy szimmetrikus trapéz alakú telek kerülete 400 méter. Milyen méretek esetén lesz a legnagyobb a telek területe?