Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

CSÖRGŐ ISTVÁN

ANALÍZIS TANÁROKNAK I.

az Informatika Minor Szak hallgatói számára

nappali és levelező tagozat

Budapest, 2008. november

A jegyzet az ELTE IK 2008. évi jegyzetpályázatának támogatásával készült.

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

Ez a jegyzet a szerzőnek az Informatika Minor Szakon tartott „Analízis tanároknak” című tantárgy előző tanévben tartott órái alapján készült. Célja, hogy a kurzus (nappali és levelező tagozatos) hallgatói a foglalkozásokon hallottak mellett írásos tananyagra is támaszkodhassanak tanulmányaik során. Természetesen a jegyzet olvasása csupán megerősíti és kiegészíti az órán elhangzottakat, és nem helyettesíti azt.

A jegyzet első kötete az első félév anyagát öleli fel. Témái: függvénytani alapismeretek, határérték és folytonosság, differenciálszámítás, integrálszámítás.

A szakaszok számozása minden fejezet elején elölről kezdődik. Ugyancsak elölről kezdődik minden fejezetben a tételek, definíciók, megjegyzések stb. együttes számozása. Az egyes fejezetek végén gyakorló feladatok találhatók, ezek számozása is fejezetenként elölről kezdődik.

A jegyzetben a szokásos matematikai jelöléseket használjuk. Néhány jelölést külön is felsorolunk:

- minden: $\forall$;
- létezik: $\exists$;
- az A és a B halmazok direkt szorzata (Descartes-szorzata): $A \times B$;
- a valós számok halmaza: $\mathbb{R}$;
- a pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$;
- a nem negatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$;
- ideális elemek: $+\infty$, $-\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}:\ -\infty < x < +\infty)$;
- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- a nem negatív egész számok halmaza: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-x \in \mathbb{R}:\ x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} := \left\{ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{R} \ \middle|\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$;
- a sík pontjai, számpárok: $\mathbb{R}^2 := \{(x,\, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
- a tér pontjai, számhármasok: $\mathbb{R}^3 := \{(x,\, y,\, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Az intervallumok nyíltságát gömbölyű zárójellel, és nem kifelé fordított szögletes zárójellel jelöljük.
- Részhalmaz jelölésére a $\subset$ és nem a $\subseteq$ jelet használjuk.

A jegyzetben az analízis egyes témaköreibe nyerünk bepillantást. Mivel a tárgy óraszáma viszonylag kicsi, nincs lehetőség a mély tárgyalásra. Nem definiálunk mindent precízen, pl. a függvénynek is csupán a középiskolai szintű értelmezését használjuk. Szükségszerűen kimaradnak egyes témakörök, továbbá alig van bizonyítás. Az érdeklődők számára ajánljuk e hiányok pótlására az alábbi irodalmat:

[1] Leindler-Schipp: Analízis I. (egyetemi jegyzet)

[2] Pál-Schipp-Simon: Analízis II. (egyetemi jegyzet)

[3] Simon Péter: Fejezetek az analízisből (egyetemi jegyzet)

[4] Szili László: Analízis feladatokban (egyetemi jegyzet)

[5] Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából (egyetemi jegyzet)

Ezúton is köszönöm Dr. Fridli Sándor docensnek a kézirat lelkiismeretes lektorálását és értékes tanácsait.

Budapest, 2008. november 14.

Csörgő István

1. Függvénytani alapismeretek

1.1. Néhány fogalom

Jegyzetünkben a függvény középiskolás szintű értelmezését fogjuk használni, tehát lényegében alapfogalomnak tekintjük.

Legyenek A és B nem üres halmazok (természetesen $A = B$ is lehetséges). A függvény egy hozzárendelés, amely az A halmaz bizonyos elemeihez (akár mindegyikhez) B-beli elemeket rendel oly módon, hogy egy A-beli elemhez csak egyetlen B-beli elemet rendel. Azt mondjuk ilyenkor, hogy a függvény A-ból B-be képez, más elnevezéssel: a függvény „A nyíl B típusú”. Az „A nyíl B típusú” függvények halmazát $A \to B$ fogja jelölni.

Az A halmaz azon elemeinek összességét, amelyekhez a függvény hozzárendel B-beli elemet, a függvény értelmezési tartományának (angolul: domain) nevezzük. A B halmaz azon elemeinek összességét, amelyek valamely A-beli elemhez vannak rendelve, a függvény értékkészletének (angolul: range) nevezzük.

A függvényt bármilyen betűvel jelölhetjük, leggyakoribb az f, g, h, stb. Ha tehát f egy „A nyíl B típusú” függvény, akkor ezt így jelöljük:

$$f \in A \to B.$$

Legyen $f \in A \to B$. Az f értelmezési tartományát D_f-fel, az értékkészletét pedig R_f-fel fogjuk jelölni (az angol elnevezések kezdőbetűit használjuk). Nyilvánvaló tehát, hogy

$$D_f \subset A, \qquad R_f \subset B.$$

Vegyünk egy $x \in D_f$ elemet. Az x-hez rendelt B-beli elemet az f függvény x helyen felvett (helyettesítési) értékének (röviden: függvényértéknek) nevezzük, és $f(x)$-szel jelöljük. Nyilvánvaló tehát, hogy $f(x) \in B$, sőt az is, hogy $f(x) \in R_f$.

Az elmondottak alapján kijelenthetjük, hogy az f függvény értékkészlete az alábbi halmaz:

$$R_f = \{y \in B \mid \exists\, x \in D_f : \; f(x) = y\} = \{f(x) \in B \mid x \in D_f\}.$$

A D_f elemeinek jelölésére szolgáló szimbólumot a függvény változójának szokás nevezni (pl. x).

Megállapodunk abban is, hogy ha $f \in A \to B$ és $D_f = A$, akkor azt így jelöljük:

$$f : A \to B.$$

1.1. Definíció. Legyen $f \in A \to B$. A

$$\operatorname{graf} f := \{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in D_f\} \subset A \times B$$

halmazt az f függvény grafikonjának nevezzük.

1.2. Megjegyzés. Könnyű meggondolni, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor $\operatorname{graf} f \subset \mathbb{R}^2$, vagyis f grafikonja egy síkbeli ponthalmaz (szemléletünk szerint gyakran egy síkgörbe). Ezt a ponthalmazt – a középiskolában tanult módon – a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk, s azt mondjuk, hogy f grafikonjának egyenlete $y = f(x)$. A függvény fogalmából az is következik, hogy az ilyen függvények grafikonjának bármely, az y-tengellyel párhuzamos egyenessel legfeljebb egy közös pontja van. Továbbá az is, hogy D_f a grafikon merőleges vetülete az x-tengelyre, R_f pedig a grafikon merőleges vetülete az y-tengelyre.

Függvények megadásához meg kell adni:

- a függvény típusát, azaz az A és a B halmazokat;
- a függvény értelmezési tartományát;
- a hozzárendelési „utasítást”, vagyis azt, hogy az értelmezési tartomány egy tetszőleges eleméhez a függvény milyen függvényértéket rendel. Ez leggyakrabban egy képlet megadását jelenti.

Például egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény az alábbi:

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D_f := \mathbb{R}^+, \quad f(x) := x^2.$$

A függvény ily módon való megadásakor sokszor nem adják meg az értelmezési tartományt. Ilyenkor az a megállapodás lép életbe, hogy az értelmezési tartomány az A halmaznak az a legbővebb részhalmaza, amelynek elemeire a hozzárendelést megadó képlet értelmes.

Például ha egy függvényt így adunk meg:

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x},$$

akkor a megállapodás értelmében $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Így kell tehát érteni az olyan feladatokat, hogy: „Határozzuk meg az alábbi függvény értelmezési tartományát: ...”

1.3. Definíció. Legyen $f \in A \to B$, és $H \subset D_f$. A

$$g : H \to B, \quad g(x) := f(x) \quad (x \in H)$$

függvényt az f H-ra való leszűkítésének nevezzük. A leszűkített függvényre használni szoktuk az $f_{|H}$ jelölést is.

A leszűkített függvény tehát ugyanúgy „működik", mint az eredeti, csak „kevesebb" helyen van értelmezve. Ezért grafikonja az eredeti függvény grafikonjának része. Például az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$$

fügvény egy leszűkítése a

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) := x^2$$

függvény, melynek grafikonja (a „fél-parabola") az eredeti függvény grafikonjának egy „darabja".

Jegyzetünk első részében főleg $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel fogunk foglalkozni. Ezeket egyváltozós függvénynek nevezzük. A jegyzet második részében szó lesz az ún. többváltozós függvényekről is.

A középiskolából ismeretes a függvény monotonitásának fogalma. Ezt röviden átismételjük:

1.4. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

1. f monoton növekvő, ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f,\, x_1 < x_2 : \quad f(x_1) \le f(x_2);$$

2. f szigorúan monoton növekvő, ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f,\, x_1 < x_2 : \quad f(x_1) < f(x_2);$$

3. f monoton csökkenő (fogyó), ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f,\, x_1 < x_2 : \quad f(x_1) \ge f(x_2);$$

4. f szigorúan monoton csökkenő (fogyó), ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f,\, x_1 < x_2 : \quad f(x_1) > f(x_2).$$

A függvényt monotonnak nevezzük, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő. Hasonlóképpen, szigorúan monotonnak nevezzük, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő.

1.5. Megjegyzés. A fenti fogalmakat vonatkoztathatjuk az értelmezési tartomány egy nem üres H részhalmazára is. Például azt mondjuk, hogy f szigorúan monoton növekvő a H halmazon, ha az $f_{|H}$ függvény szigorúan monoton növekvő, azaz, ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in H,\, x_1 < x_2 : \quad f(x_1) < f(x_2),$$

stb.

A továbbiakban ismertnek tételezzük fel a középiskolában tanult függvényeket (konstans, elsőfokú polinom, másodfokú polinom, gyök, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus, abszolút érték, egészrész, törtrész, előjel).

Használni fogjuk továbbá az Euler-féle állandót, melyet az „e” betűvel jelölünk (pontos értelmezését a II. kötet 1.5. szakaszában fogjuk megtenni). Az „e” szám irracionális, közelítő értéke: 2,718. Az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezzük, és $\log_e$ helyett az ln szimbólummal jelöljük (logaritmus naturalis).

1.2. Inverz függvény

Ha adott egy $f \in A \to B$ függvény, akkor természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy létezik-e olyan függvény, amelyik a függvényértékhez hozzárendeli azt az A-beli (sőt D_f-beli) elemet, amelyik ezt a függvényértéket szolgáltatja. Ha ilyen függvény létezik, akkor azt az f függvény inverzének (megfordításának) nevezzük, és az f^{-1} szimbólummal jelöljük.

A függvény fogalma alapján nyilvánvaló, hogy az f^{-1} inverz függvény pontosan akkor létezik, ha az f függvény minden függvényértéket csak egyetlen $x \in D_f$ helyen vesz fel. Az ilyen függvényeket kölcsönösen egyértelmű, idegen szóval injektív függvényeknek nevezzük.

1.6. Definíció. Legyen $f \in A \to B$. Azt mondjuk, hogy az f kölcsönösen egyértelmű (injektív), ha

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2 : \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

1.7. Példák.

1. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$ függvény nem injektív, ugyanis pl. $-2 \neq 2$, de $f(-2) = f(2) = 4$.
2. Viszont az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^3$ függvény injektív, mivel különböző számok köbe is különböző.

Megjegyezzük, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény szigorúan monoton, akkor nyilvánvalóan injektív. Azonban más esetben is lehet injektív egy függvény, pl.

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x}\ .$$

Könnyű meggondolni, hogy egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény akkor és csak akkor injektív, ha grafikonjának minden, az x-tengellyel párhuzamos egyenessel legfeljebb egy közös pontja van.

1.8. Definíció. Legyen $f \in A \to B$ egy injektív függvény. Az alábbi előírással értelmezett f^{-1} függvényt az f inverz függvényének, röviden inverzének nevezzük:

$$f^{-1} \in B \to A, \quad D_{f^{-1}} := R_f,$$

$$f^{-1}(y) := \text{„az az egyetlen } x \in D_f \text{, amelyre } f(x) = y\text{.”}$$

Például levezethető, hogy az $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R}_0^+)$ függvény inverze $x \mapsto \sqrt{x}$, továbbá, hogy $a > 0$, $a \neq 1$ esetén az $x \mapsto a^x$ exponenciális függvény inverze az $x \mapsto \log_a x$ logaritmusfüggvény.

A négy trigonometrikus alapfüggvény (sin, cos, tg, ctg) nem injektív, inverzük alatt nevezetes leszűkítésük inverzét értjük. Ezeket soroljuk fel az alábbi definícióban:

1.9. Definíció.

1. Az

$$x \mapsto \sin x \quad (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

függvény inverzét arcus sinus függvénynek nevezzük, jele: arcsin. Tehát:

$$\arcsin : [-1,\, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Az

$$x \mapsto \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

függvény inverzét arcus cosinus függvénynek nevezzük, jele: arccos.Tehát:

$$\arccos : [-1,\, 1] \to [0,\, \pi]\,.$$

3. Az

$$x \mapsto \operatorname{tg} x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

függvény inverzét arcus tangens függvénynek nevezzük, jele: arc tg .Tehát:

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Az

$$x \mapsto \operatorname{ctg} x \quad (0 < x < \pi)$$

függvény inverzét arcus cotangens függvénynek nevezzük, jele: arc ctg .Tehát:

$$\operatorname{arc\,ctg} : \mathbb{R} \to (0,\, \pi)\,.$$

1.3. Műveletek függvényekkel

1.10. Definíció. Legyen $g \in A \to B$ és $f \in C \to D$. Tegyük fel, hogy a

$$D_{f\circ g} := \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \subset D_g \subset A$$

halmaz nem üres.

Ekkor az

$$f \circ g : D_{f\circ g} \to D, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

függvényt az f és a g függvényekből képzett összetett függvénynek vagy kompozíciónak nevezzük. A g függvény neve: belső függvény, az f függvény neve pedig: külső függvény.

Példák összetett függvényre: $x \mapsto \sin(2x + \pi)$, $\quad x \mapsto \cos^2 x$, stb.

Számértékű függvényekkel algebrai műveleteket is végezhetünk:

1.11. Definíció. Legyen $f \in A \to \mathbb{R}$, $\quad g \in A \to \mathbb{R}$. Ekkor

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in D_f \cap D_g);$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in D_f \cap D_g);$$

$$(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in D_f \cap D_g,\ g(x) \neq 0),$$

feltéve, hogy az egyes sorokban megadott értelmezési tartomány nem üres.

1.4. Polinomok

Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények körében speciális osztályt alkotnak a polinomok. Gyakran használják őket bonyolultabb függvények közelítésére.

1.12. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt polinomnak nevezzük, ha vagy $f = 0$, vagy pedig

$$\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \text{ és } \exists\, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0 :$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1.13. Megjegyzések.

1. Bebizonyítható, hogy ha f polinom és $f \neq 0$, akkor a fenti definícióban szereplő
$$n,\ a_0, \dots, a_n$$
számok egyértelműek. Az n számot az f polinom fokának nevezzük és $\deg f$-fel jelöljük. Magát a polinomot ekkor n-edfokúnak nevezzük. Az $a_0, \dots, a_n$ számokat a polinom együtthatóinak nevezzük, az a_n együttható neve: főegyüttható.

2. A 0 polinom fokát nem értelmezzük, együtthatóiról pedig azt mondjuk, hogy: minden együtthatója 0.

3. A középiskolában sokszor szerepeltek a nulladfokú polinomok (ezek a nem 0 konstans függvények), az elsőfokú polinomok (ezek a lineáris függvények), valamint a másodfokú polinomok (ezek a másodfokú függvények).

4. A polinom együtthatóit más számkörből is vehetnénk. Jegyzetünkben csak valós együtthatós polinomokkal foglalkozunk.

1.14. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy polinom, és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik olyan g polinom, hogy*
$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + f(\alpha) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
A tétel azt fejezi ki, hogy az f polinomnak az $x - \alpha$ elsőfokú polinommal vett osztási maradéka $f(\alpha)$.
Bizonyítás. Ha $a_0,\, a_1 \in \mathbb{R}$ és $f(x) = a_0 + a_1 x$ egy legfeljebb elsőfokú polinom (beleértve a 0 polinomot is), akkor az állítás $g(x) = a_1$ választással triviális, mivel $a_1\alpha$ „becsempészésével”
$$f(x) = a_0 + a_1 x = a_1(x - \alpha) + a_0 + a_1\alpha = (x - \alpha) \cdot a_1 + f(\alpha) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ha f legalább másodfokú polinom, akkor vegyük a szokásos előállítását, és alakítsuk át úgy, hogy most is „becsempésszük” az α hatványait:
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2}^{n} a_k x^k = \\ &= a_0 + a_1(x - \alpha + \alpha) + \sum_{k=2}^{n} a_k(x^k - \alpha^k + \alpha^k) = \\ &= a_0 + a_1(x - \alpha) + a_1\alpha + \sum_{k=2}^{n} a_k(x^k - \alpha^k) + \sum_{k=2}^{n} a_k\alpha^k = \\ &= a_1(x - \alpha) + \sum_{k=2}^{n} a_k(x^k - \alpha^k) + f(\alpha). \end{aligned}$$

Mivel – a középiskolából jól ismert azonosság szerint – $(x^k - \alpha^k)$ osztható $(x-\alpha)$-val, ezért minden $k \geq 2$ esetén van olyan g_k polinom, hogy

$$x^k - \alpha^k = (x-\alpha) \cdot g_k(x),$$

továbbá legyen $g_1(x) := 1$.

Ezzel a jelöléssel az előző átalakítás így folytatható:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 \cdot (x-\alpha) \cdot g_1(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k \cdot (x-\alpha) \cdot g_k(x) + f(\alpha) = \\ &= (x-\alpha) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g_k(x) + f(\alpha), \end{aligned}$$

így a tétel állítása $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot g_k(x)$ választással teljesül. □

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás egyben módszert is adott a g polinom meghatározására. Nem ez a leghatékonyabb eljárás, viszont elemi ismereteken alapul. Hatékonyabb módszerek is vannak (polinom-osztás, Horner-elrendezés).

1.15. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy polinom, és $\alpha \in \mathbb{R}$. Az α számot az f polinom gyökének (zérushelyének) nevezzük, ha $f(\alpha) = 0$.

1.16. Megjegyzés. A polinom gyökeinek meghatározása általában nem egyszerű feladat. A középiskolában megismertük az első és a másodfokú polinomok gyökei meghatározásának módszereit.

Legyen f egy nem azonosan 0 polinom. Az 1.14. tétel azonnali következménye, hogy α akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha létezik olyan g polinom, hogy

$$f(x) = (x-\alpha) \cdot g(x),$$

azaz, ha $x - \alpha$ kiemelhető f-ből.

Előfordul, hogy a polinom fenti szorzatalakjában az α szám a g polinomnak is gyöke. Ekkor $x-\alpha$ kiemelhető g-ből, ami azt jelenti, hogy $(x-\alpha)^2$ kiemelhető f-ből. Ezt az eljárást folytatva végül eljutunk egy olyan $m \in \mathbb{N}$ számhoz, hogy

$$f(x) = (x-\alpha)^m \cdot h(x),$$

ahol α már nem gyöke h-nak, azaz $h(\alpha) \neq 0$. Az itt keletkezett m számot az α gyök multiplicitásának nevezzük, és azt mondjuk, hogy α az f polinom m-szeres gyöke. Az $x-\alpha$ polinom neve: gyöktényező.

1.5. Feladatok

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket.

a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$	*b*) $f(x) = x^2 + 6x + 10$
c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$	*d*) $f(x) = \sqrt{x-3}$
e) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3}$	*f*) $f(x) = \sqrt{2x-3}$
g) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$	*h*) $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3})$
i) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$	*j*) $f(x) = \log_2(x+1)$
k) $f(x) = 3 + \log_2(x+1)$	*l*) $f(x) = \log_2(\frac{x}{2} + 1)$

2. Döntsük el, hogy az alábbi függvényeknek van-e inverze, és ahol van, ott határozzuk meg az inverz függvényt (értelmezési tartomány, képlet).

   a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

   b) $f(x) = x^2 + 4x + 3 \qquad D_f = [0, +\infty]$

   c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3 \qquad D_f = [0, 2]$

   d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \qquad D_f = [1, +\infty]$

   e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} \qquad D_f = \mathbb{R}^+$

   f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

   g) $f(x) = \sqrt{3-x}$

3. Képezzük az $f \circ g$ összetett függvényt, amennyiben létezik (értelmezési tartomány, képlet).

   a) $f(x) := \sqrt{3-x}, \qquad g(x) := \sqrt{x^2-16}$

   b) $f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

   c) $f(x) = x^3 - 1, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$

   d) $f(x) = x^3 - 1 \quad D_f = [-1,\, 1], \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$

   e) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \sin x \quad D_g = (0,\, 2\pi)$

   f) $f(x) = \ln x, \qquad g(x) = x^2$

   g) $f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \cos x \quad D_g = [0,\, 2\pi]$

4. Igazoljuk, hogy az α szám az f polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt f-ből. Hányszoros gyöke az α az f-nek?

   a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2, \qquad \alpha = 2$

   b) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18, \qquad \alpha = 3$

   c) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2, \qquad \alpha = -1$

   d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10, \qquad \alpha = 1$

   e) $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 8x, \qquad \alpha = -2$

2. Függvény határértéke, folytonossága

2.1. A határérték fogalma

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. A határérték intuitív módon a következőképpen értelmezhető:

Közelítsük az x változót az a felé úgy, hogy közben teljesüljön, hogy $x \in D_f$ és hogy $x \neq a$ (ez máris mutatja, hogy a nem lehet bármi). Kérdés, hogy közelednek-e valahová az $f(x)$ függvényértékek, s ha igen, akkor hová. Ha van ilyen $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ elem, akkor azt az f függvény a-beli határértékének fogjuk majd nevezni, és – többek közt – a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

módon fogjuk jelölni.

Például szemléletünk alapján hihető, hogy

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

Mivel úgy közelítünk x-szel a 3-hoz, hogy közben $x \neq 3$, ezért a határérték nem változik, ha függvényünk definícióját úgy módosítjuk, hogy a 3-hoz nem 9-et, hanem akármilyen másik számot, pl. 13-at rendelünk. Vagyis a

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{ha} \quad x \neq 3, \\ \\ 13 & \text{ha} \quad x = 13 \end{cases}$$

függvény esetén $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 9$.

Sőt, akkor is változatlan marad a határérték, ha a függvény értelmezési tartományából kivesszük a 3-at.

Ezek után térjünk rá a precízebb tárgyalásra. Először azt vizsgáljuk meg, hogy mi lehet az a. Ehhez szükség lesz a környezet fogalmára:

2.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$. Ekkor

1. Az a pont r sugarú környezete:

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (\, a - r,\, a + r\,);$$

2. A $+\infty$ r sugarú környezete:

$$K_r(+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{r}\} = (\,\frac{1}{r},\, +\infty\,);$$

3. A $-\infty$ r sugarú környezete:

$$K_r(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{r}\} = (\,-\infty,\, -\frac{1}{r}\,).$$

Ahhoz, hogy az x változóval a már jelzett módon meg lehessen közelíteni a-t, az kell, hogy az a „közel legyen” az f értelmezési tartományához, vagyis, hogy az a bármely környezetében legyen D_f-beli elem. Sőt, mivel kikötöttük azt is, hogy x ne legyen egyenlő a-val, azt is fel kell tennünk, hogy az a bármely környezetében legyen a-tól különböző D_f-beli elem. Az ilyen tulajdonságú elemet torlódási pontnak nevezzük.

2.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Azt mondjuk, hogy a a H torlódási pontja, ha

$$\forall\, r > 0 : \quad (K_r(a) \setminus \{a\}) \cap H \neq \emptyset.$$

A H halmaz torlódási pontjainak halmazát H'-vel jelöljük.

A $H \setminus H'$ halmaz elemeinek neve: H izolált pontjai.

A határérték értelmezéséhez tehát természetes módon fel kell tennünk, hogy $a \in D'_f$.

Pl. értelmetlen dolog felvetni azt a kérdést, hogy mi a határértéke négyzetgyökfüggvénynek, ha x közelíti a -1-et.

A határértékről mondott intuitív bevezető alapján kissé precízebben úgy fogalmazhatunk, hogy az f határértéke a a helyen A, ha bármely környezetét is tekintve az A-nak, az $f(x)$ függvényértékek benne vannak ebben a környezetben minden olyan x esetén, amely „elég közel van” a-hoz. A pontos definíció:

2.3. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'_f$, $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Azt mondjuk, hogy f határértéke az a pontban A (jelben: $\lim\limits_a f = A$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_f : \qquad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Bebizonyítható, hogy rögzített f és a esetén a $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség legfeljebb egy $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ esetén áll fenn, más szóval, a határérték egyértelmű.

További jelölések:

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad f(x) \to A \ \ (x \to a).$$

Megjegyezzük, hogy mivel a lehet $-\infty$, véges vagy $+\infty$, illetve A szintúgy lehet $-\infty$, véges vagy $+\infty$, a határérték definíciója – a környezet értelmezését felhasználva – 9-féleképpen fogalmazható meg egyenlőtlenségekkel. Például az $a \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$ esetben a

$$\lim_a f = A$$

egyenlőség egyenértékű az alábbi kijelentéssel:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(végesben vett véges határérték esete).

2.2. Egyoldali határérték

Ha az a hely véges (azaz $a \in \mathbb{R}$), akkor szemléletünk szerint az a-hoz lehet jobbról is és balról is tartani. A „jobbról tartani” azt jelenti, hogy úgy közelítjük a-t, hogy közben $x > a$ is fennáll. A „balról tartani” pedig azt jelenti, hogy x úgy közelíti a-t, hogy közben $x < a$. Az így keletkező határértéket jobb- illetve baloldali határérétéknek nevezzük.

A pontos definíció:

2.4. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$.

a) Tegyük fel, hogy $a \in ((a, +\infty) \cap D_f)'$ (ezt röviden úgy mondjuk, hogy a jobboldali torlódási pontja D_f-nek). Az f a-beli jobboldali határértékén értjük az f függvénynek az $(a, +\infty) \cap D_f$ halmazra való leszűkítésének határértékét. Jelölése:

$$\lim_{x \to a+0} f(x).$$

b) Tegyük fel, hogy $a \in ((-\infty, a) \cap D_f)'$ (az a ún. baloldali torlódási pontja D_f-nek). Az f a-beli baloldali határértékén értjük az f függvénynek a $(-\infty, a) \cap D_f$ halmazra való leszűkítésének határértékét. Jelölése:

$$\lim_{x \to a-0} f(x).$$

Természetesen a jobb- és a baloldali határérték definíciója is megfogalmazható egyenlőtlenségekkel.

2.5. Megjegyzés. Az egyoldali határérték definíciója enyhébb követelményt jelent, mint a határértéké, tehát elképzelhető, hogy egy fügvénynek egy pontban nincs határértéke, de van pl. jobboldali határértéke. Pl. tekintsük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x}$ függvényt. Ennek nincs határértéke az $a = 0$ pontban, de léteznek az egyoldali határértékei:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

2.3. Alapvető határértékek

Ebben a szakaszban – bizonyítás nélkül, és a szemlélet alapján – megadunk néhány fontos határértéket. A precíz bizonyításra itt terjedelmi okokból nincs lehetőség, továbbá a bizonyítás felvetné az egyes függvények pontos értelmezésének kérdését is. Tehát a középiskolából hozott szemléletünkre alapozunk, s ennek segítségével tudunk felírni olyan további egyszerű határértékeket is, melyek az alábbi felsorolásból kimaradnak.

Néhány fontosabb, véges helyen vett határérték:

- Ha f az alábbi függvények valamelyike, akkor tetszőleges $a \in D_f$ helyen vett határértéke az $f(a)$ helyettesítési értékkel egyenlő:

  Polinomok, racionális törtfüggvények (=két polinom hányadosa), gyökfüggvények , abszolútérték-függvény, exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, a négy trigonometrikus alapfüggvény: sin, cos, tg , ctg , valamint ezek inverze: arcsin, arccos, arc tg , arc ctg .

- Ha k páros pozitív egész szám és $a \in \mathbb{R}$, akkor

  $$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^k} = +\infty.$$

- Ha k páratlan pozitív egész szám és $a \in \mathbb{R}$, akkor

  $$\lim_{x \to a-0} \frac{1}{(x-a)^k} = -\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^k} = +\infty.$$

- Ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

- Ha $0 < a < 1$, akkor $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$.

- Ha $x_k := \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor

$$\lim_{x \to x_k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

- Ha $x_k := k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor

$$\lim_{x \to x_k - 0} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_k + 0} \operatorname{ctg} x = +\infty.$$

- Igazolható, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával igazolható, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Néhány fontosabb, a $+\infty$-ben vett határérték:

- Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $x \mapsto c\ x \in \mathbb{R}$ konstansfüggvény határértéke:

$$\lim_{x \to +\infty} c = c.$$

- Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$.
- Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
- Ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- Ha $a > 1$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0$.

2.4. Műveletek határértékkel

A határérték és az algebrai műveletek kapcsolata röviden úgy foglalható össze, hogy a határérétének képzése az algebrai műveletekkel felcserélhető, feltéve, hogy a szereplő műveletek értelmezettek. Kissé pontosabban:

2.6. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, és tegyük fel, hogy léteznek a*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

határértékek. Ekkor

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$*;*
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$*;*

feltéve, hogy a jobb oldalon kijelölt műveletek értelmezettek.

A tételt nem bizonyítjuk. A tétel természetesen egyoldali határértékekre is érvényes.

2.7. Megjegyzés. A $+\infty$, $-\infty$ ideális elemekkel való műveletvégzést a tanórákon ismertetjük.

Nem értelmezett műveletek (ún. tiltott műveletek):

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty) \quad (-\infty) - (-\infty),$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Azokat a kifejezéseket, melyek határértékszámítása ilyen eredményre vezethet, határozatlan kifejezéseknek nevezzük.

E műveletek tiltottságának oka az, hogy bárhogy is értelmeznénk a művelet eredményét, az előző tétel állítása nem maradna érvényben.

Például legyen $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x$ és $a = +\infty$. Ekkor az $f + g$ függvény konstans 1, aminek határértéke a $+\infty$-ben 1. Ezért, ha azt akarjuk, hogy a fenti tétel érvényben maradjon, akkor a $+\infty$ és a $-\infty$ összegét 1-nek kellene értelmeznünk. Viszont ha $f(x) = x+2$, és minden más marad, akkor – hasonló okoskodással – $+\infty$ és a $-\infty$ összege 2 kellene, hogy legyen.

2.5. Folytonosság

A folytonosság szemléletes tartalma az, hogy a függvény grafikonja „folytonos vonal”, más szóval, ha az x változó közeledik egy a ponthoz, akkor a grafikon rajzolásakor „nem kell felemelni a ceruzát”, vagyis az $f(x)$ függvényértékek az $f(a)$ függvényértékhez közelednek.

Ezt a tulajdonságot pontosítja az alábbi definíció:

2.8. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f \cap D'_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a-ban, ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Az a pontban folytonos függvények halmazát jelölje $C(a)$.

2.9. Megjegyzések.

1. A határérték definícióját felhasználva, a pontbeli folytonosságot így is értelmezhetnénk:

   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in K_\delta(a) \cap D_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(f(a)).$$

   Egyenlőtlenségekkel (a környezet fogalmát felhasználva):

   $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in D_f,\ |x - a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

   Ezek a definíciók $a \in D_f \setminus D'_f$ esetén is érvényesek, és azt az eredményt adják, hogy a függvény az értelmezési tartományának izolált pontjaiban folytonos.

2. A folytonosság definíciója valamint a határérték és az algebrai műveletek kapcsolatáról szóló 2.6. tétel alapján igazolható, hogy ha

   $$f,\ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f,\ g \in C(a) \quad \text{és} \quad c \in \mathbb{R},$$

   akkor

   $$f + g,\ f - g,\ f \cdot g,\ f/g,\ c \cdot f \in C(a).$$

   Igazolható továbbá az is, hogy ha

   $$g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g \in C(a) \quad \text{és} \quad f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C(g(a)),$$

   akkor $f \circ g \in C(a)$.

3. Az alapvető határértékekre adott példákból következik, hogy az alábbi függények az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak:

   Polinomok, racionális törtfüggvények, gyökfüggvények , abszolútérték-függvény, exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, a négy trigonometrikus alapfüggvény: sin, cos, tg , ctg , valamint ezek inverze: arcsin, arccos, $\operatorname{arc\,tg}$, $\operatorname{arc\,ctg}$.

2.10. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in D_f$. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban szakadása van, ha $f \notin C(a)$.

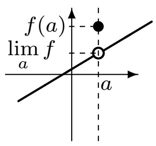
Megjegyezzük, hogy a folytonosságot is és a szakadást is csak az értelmezési tartomány pontjaiban definiáltuk, értelmezési tartományon kívüli pontokban nem.

A szakadásokat a következő módon osztályozhatjuk:

2.11. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ a \in D_f \cap D'_f,\ \ f \notin C(a)$.
Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban

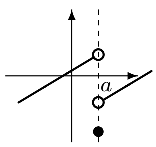
- megszüntethető szakadása van, ha

$$\exists \lim_a f \in \mathbb{R}, \quad \text{de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$



- ugrása van, ha

$$\exists \lim_{a-0} f \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \lim_{a+0} f \in \mathbb{R}, \quad \text{de} \quad \lim_{a-0} f \neq \lim_{a+0} f.$$



Az egyéb esetekben azt mondjuk, hogy f-nek a-ban másodfajú szakadása van.

2.12. Megjegyzés. A megszüntethető szakadást és az ugrást közös néven elsőfajú szakadásnak is szokás nevezni.

A következőkben a halmazon való folytonosságról lesz szó.

2.13. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, azaz ha

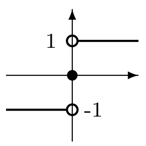
$$\forall\, a \in D_f : \quad f \in C(a).$$

2.14. Példák.

1. Az alapvető határértékeknél felsorolt példákból adódik, hogy az alábbi függvények folytonosak:

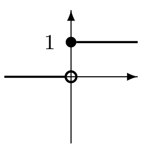
   Polinomok, racionális törtfüggvények, gyökfüggvények , abszolútérték-függvény, exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, a négy trigonometrikus alapfüggvény: sin, cos, tg , ctg , valamint ezek inverze: arcsin, arccos, arc tg , arc ctg .

2. Az alábbi ábrán látható függvény, az ún. előjelfüggvény (szignum-függvény) nem folytonos, mivel van olyan pontja az értelmezési tartományának, amelyben nem folytonos (nevezetesen a 0).



2.15. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq H \subset D_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a H halmazon, ha az f H-ra való leszűkítése (az $f_{|H}$) folytonos függvény.

2.16. Megjegyzés. A H halmazon való folytonosság nem azonos azzal, hogy az eredeti függvény a H halmaz minden pontjában folytonos. Például az alábbi ábrán látható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $H := [0 + \infty]$ halmazon, jóllehet $f \notin C(0)$.



2.6. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket. Ahol a határérték nem létezik számítsuk ki az egyoldali határértékeket.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{4}{x^3-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ *f)* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ *j)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$ *l)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$ *n)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+3x}}{\sin x}$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2+3x-7}{3x^2-x+5}$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+2}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+9x^2}}{x-2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+5x}-x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-5x+1}{1+3x^2-2x^3}$ *f)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5-x^4-3x+4}{x^2-7x^3-3x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+3})$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{(x+2)\cdot(x+7)}-x)$

3. Végezzünk folytonosság vizsgálatot az alábbi függvényeken:

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{ha } \ x \neq 1 \\ \\ 0 & \text{ha } \ x = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-x} & \text{ha } \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \\ \\ 1 & \text{ha } \ x \in \{0;1\} \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} & \text{ha } \ x \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\} \\ \\ 0 & \text{ha } \ x \in \{2;3\} \end{cases}$$

$$d) \quad f(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{ha } \ x \leq 2 \\ \\ x & \text{ha } \ x > 2 \end{cases}$$

$$e) \quad f(x) := \begin{cases} 1-x^2 & \text{ha } \ x \leq 0 \\ \\ (1-x)^2 & \text{ha } \ 0 < x \leq 2 \\ \\ 4-x & \text{ha } \ x > 2 \end{cases}$$

3. Függvények differenciálása

3.1. A derivált fogalma, alap-deriváltak

A derivált értelmezésénél alapvető szerepet játszik a belső pont fogalma.

3.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in H$. Azt mondjuk, hogy a a H belső pontja, ha

$$\exists\, r > 0 : \quad K_r(a) \subset H.$$

A H halmaz belső pontjainak halmazát a halmaz belsejének nevezzük, és $\operatorname{int} H$-val jelöljük. Halmaz belsejének jelölésére használatos még a $\overset{\circ}{H}$ jelölés is.

A H halmazt nyílt halmaznak nevezzük, ha minden pontja belső pont, azaz, ha $\operatorname{int} H = H$.

Ezek után – a szemléletből kiindulva – rátérünk a derivált értelmezésére.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$. Szeretnénk az f függvényt az a pont „körül” az alábbi értelemben megközelíteni $l(x) = mx + b$ lineáris függvénnyel:

Az *első feltétel*, hogy a két függvény az $x = a$ pontban egyezzen meg:

$$f(a) = l(a) = ma + b,$$

amiből b kifejezhető: $b = -ma + f(a)$. Ezzel a keresett lineáris függvény:

$$l(x) = m(x - a) + f(a).$$

Az első feltétel tehát az m paraméter (meredekség) valamennyi értéke mellett teljesül. Sőt, ha f folytonos, akkor minden m esetén a közelítés hibája $x \to a$ esetén 0-hoz tart, hiszen

$$\lim_{x\to a} (f(x) - l(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} l(x) = f(a) - l(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

A *második feltétel* az, hogy a hiba olyan gyorsan tartson 0-hoz, hogy még $x - a$-val osztva is 0-hoz tartson. (Ilyenkor mondjuk, hogy $f(x) - f(a)$ gyorsabban tart 0-hoz, mint $x - a$.)

Tehát olyan $m \in \mathbb{R}$ számot keresünk, amelyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - m(x - a)}{x - a} = 0.$$

Ezzel kapcsolatos az alábbi definíció:

3.2. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható (deriválható) a-ban, ha

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - m(x-a)}{x-a} = 0.$$

Az a-ban differenciálható függvények halmazát jelölje $D(a)$. Megállapodunk abban, hogy az $f \in D(a)$ kijelentésbe beleértendő az is, hogy $a \in \operatorname{int} D_f$.

3.3. Megjegyzés. Mivel

$$\frac{f(x) - f(a) - m(x-a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m,$$

Ezért az alábbi három állítás ekvivalens

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - m(x-a)}{x-a} = 0$$
$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m \right) = 0$$
$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = m.$$

Ebből egyrészt az következik, hogy a 3.2. definícióban szereplő m szám egyértelmű, másrészt, hogy a differenciálhatóságot így is értelmezhettük volna (konstruktív értelmezés): Létezzen a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ véges határérték. A

$$D_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

függvényt különbségi hányadosnak nevezzük.

3.4. Definíció. A 3.2. definícióban szereplő $m \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a-beli differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük. Jele: $f'(a)$ vagy $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$.

A különbségi hányadossal való értelmezés szerint tehát

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

3.5. Megjegyzés. $h = x - a$ helyettesítéssel a differenciálhatóság ill. a derivált értelmezése az alábbi módon fogalmazható át:

$f \in D(a)$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - m \cdot h}{h} = 0.$$

Ez esetben $f'(a) = m$.

Hasonlóképpen, a különbségi hányadossal való definíció (a konstruktív definíció) átfogalmazása:

$f \in D(a)$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ez esetben $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ezzel a differenciálhatóságnak négy ekvivalens értelmezését is megadtuk.

A derivált geometriai jelentése a következő. Az $(a,\ f(a))$ és az $(x,\ f(x))$ pontokon átmenő egyenes (az ún. szelő) meredeksége

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Szemléletünk alapján $x \to a$ esetén a szelők határhelyzete az érintő, tehát a derivált az $(a, f(a))$-beli érintő meredeksége.

Az eddigiekben meggondoltakat is figyelembe véve tehát az érintő az egyetlen olyan egyenes, ami átmegy az $(a, f(a))$ ponton és a függvény grafikonjától való eltérése (a hiba) gyorsabban tart 0-hoz, mint ahogy x az a-hoz.

3.6. Tétel. $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$.

Bizonyítás.

$$f(a+h)-f(a) = \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} \to f'(a)\cdot 0 = 0 \quad (h \to 0),$$

Tehát $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, azaz $f \in C(a)$. □

A következőkben a halmazon való deriválhatóságról lesz szó.

3.7. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és legyen H a D_f egy nyílt részhalmaza. Azt mondjuk, hogy f deriválható a H halmazon (jelben: $f \in D(H)$), ha f deriválható a H halmaz minden pontjában. Ez nyilvánvalóan egyenértékű azzal, hogy az f H-ra való leszűkítése (az $f_{|H}$) függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

3.8. Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt differenciálhatónak nevezzük, ha értelmezési tartományának minden belső pontjában differenciálható. (Más szóval: f differenciálható az értelmezési tartományában fekvő maximális nyílt halmazon, az $\operatorname{int} D_f$-en.)

Ha egy ponthoz hozzárendeljük az e pontbeli deriváltat, egy új függvényhez, a deriváltfüggvényhez jutunk.

3.9. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy

$$D_{f'} := \{x \in D_f \mid f \in D(x)\} \neq \emptyset.$$

Az

$$f' : \mathcal{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f deriváltfüggvényének (röviden: deriváltjának) nevezzük.

A deriváltfüggvény deriválásával jutunk el az ún. magasabbrendű deriváltakhoz.

3.10. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$. Azt mondjuk, hogy f 2-szer differenciálható az a pontban (jele: $f \in D^2(a)$), ha

1. $\exists\, r > 0\ \forall\, x \in K_r(a): \quad f \in D(x);$
2. $f' \in D(a)$.

Ez esetben az $f^{(2)}(a) := f''(a) := (f')'(a)$ számot az f függvény a pontbeli második deriváltjának nevezzük.

3.11. Megjegyzés. Hasonlóan, rekurzióval értelmezhetőek a 3., 4., … deriváltak (s ezzel a 3-szor, 4-szer stb. differenciálhatóság). Jelölésük:

$$f'''(a),\ f''''(a),\ \ldots \quad \text{illetve} \quad f^{(3)}(a),\ f^{(4)}(a),\ \ldots$$

A következőkben néhány alapderiváltat számítunk ki:

3.12. Példák.

1. $f(x) = x^2,\ a = 3$. Ekkor

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3 + 3 = 6,$$

vagy

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6.$$

2. $f(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a + 0 = 2a, \end{aligned}$$

tehát $f'(a) = 2a$, betűcserével: $f'(x) = 2x$.

3. $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2, \end{aligned}$$

tehát $f'(x) = 3x^2$.

4. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor a binomiális tétel alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^{k-1} \right) = n \cdot x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

5. $f(x) = x$. Ekkor

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

6. $f(x) = c$ konstans függvény. Ekkor

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

7. $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

8. $f(x) = \sin x$. Ekkor

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) =$$

$$= (\cos x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + (\sin x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0}(-h) =$$

$$= (\cos x) \cdot 1 + (\sin x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = \cos x.$$

További fontos alap-deriváltakat ismertetünk a tanórákon.

3.2. Deriválási szabályok

A deriválási szabályok arra vonatkoznak, hogy ha egyszerűbb függvényekből bonyolultabbakat építünk fel, akkor hogyan számítjuk ki a kapott függvény deriváltját az eredeti függvények segítségével.

A deriválási szabályokat bizonyítás nélkül közöljük.

3.13. Tétel. *Legyen* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in D(a)$ *és legyen* $c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1. *(összeg deriválási szabálya)* $f + g \in D(a)$ *és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

2. *(konstansszoros deriválási szabálya)* $c \cdot f \in D(a)$ *és*

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

3. *(szorzat deriválási szabálya)* $f \cdot g \in D(a)$ *és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

(Megjegyezzük, hogy ha $g(x) = c$ konstans, akkor visszakapjuk a konstansszoros deriválási szabályát.)

4. (reciprok deriválási szabálya) *ha* $g(a) \neq 0$, *akkor* $\frac{1}{g} \in D(a)$ *és*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

5. (hányados deriválási szabálya) *ha* $g(a) \neq 0$, *akkor* $\frac{f}{g} \in D(a)$ *és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

3.14. Tétel. *(kompozíció deriválási szabálya = „láncszabály")*
Legyen $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in D(a)$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D(g(a))$. *Ekkor* $f \circ g \in D(a)$ *és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

3.15. Tétel. *(inverz függvény deriválása)*
Legyen $I \subset R$ *nyílt intervallum,* $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in D(I)$, f *szigorúan monoton, továbbá tegyük fel, hogy* $f'(x) \neq 0$ $(x \in I)$. *Ekkor* $J = R_f$ *nyílt intervallum, továbbá* $f^{-1} \in D(J)$, *és*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in J).$$

3.16. Példák.

1. $f(x) = \exp x = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $f^{-1} = \ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Teljesülnek tételünk feltételei, ezért

$$\ln'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y} \quad (y \in J = \mathbb{R}^+).$$

Ha már megvan a derivált, az y betűt x-re cserélhetjük:

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

2. $f(x) = \sin x$ $\left(x \in I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right.$. Ekkor

$$f^{-1}(y) = \arcsin y \quad (y \in (-1, 1)).$$

Most is teljesülnek a tétel feltételei, ezért

$$\arcsin' y = (f^{-1})(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin y}_{x})}.$$

Felhasználva, hogy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ miatt $\cos x \geq 0$, így folytathatjuk az átalakítást:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tehát $\arcsin' y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad (y \in (-1, 1))$. Betűcsere után:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,\, 1)).$$

3. Legyen $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Ekkor

$$\operatorname{tg}' x = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

3.3. Alkalmazás I.: érintő

Az első szakaszban a deriváltat a lineáris közelítés alapján vezettük be:

$$f(x) \approx \underbrace{m \cdot (x-a) + f(a)}_{l(x)},$$

ahol a legjobb közelítést az $m := f'(a)$ választás adja (feltéve, hogy f differenciálható a-ban). Ennek alapján célszerű, ha f grafikonja (amely egy síkgörbe) a pont beli érintőjének az

$$E := \{(x,\, f'(a) \cdot (x-a) + f(a)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

halmazt tekinteni. Ez egy $\mathbb{R}^2$-beli egyenes. Az érintő egyenlete tehát:

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a).$$

3.4. Alkalmazás II.: Monotonitás, szélsőérték

A függvények monotonitásának vizsgálata a következő tételen alapul, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

3.17. Tétel. *[Lagrange-középértéktétel] Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$. Ekkor*

$$\exists\, \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

3.18. Megjegyzés. A tétel szemléletesen azt jelenti, hogy van a függvény grafikonján olyan pont, amelyben húzott érintő párhuzamos a grafikon végpontjait, az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenessel. Egy ilyen pont abszcisszáját jelöli ξ.

A Lagrange-középértéktétel segítségével igazolhatjuk a függvények növekedésével és csökkenésével kapcsolatos alaptételünket:

3.19. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és jelölje $\overset{\circ}{I}$ az intervallum belsejét. Legyen továbbá $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C(I)$, $f \in D(\overset{\circ}{I})$. Ekkor:*

1. *Ha $\forall\, x \in \overset{\circ}{I}$: $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növekvő I-n.*
2. *Ha $\forall\, x \in \overset{\circ}{I}$: $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő I-n.*
3. *Ha $\forall\, x \in \overset{\circ}{I}$: $f'(x) = 0$, akkor f kontsans I-n.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Alkalmazzuk a Lagrange-középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2): \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

Átrendezve: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$.

1. $\xi \in \overset{\circ}{I}$ miatt $f'(\xi) > 0$, s mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$.
2. $\xi \in \overset{\circ}{I}$ miatt $f'(\xi) < 0$, s mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) < 0$, azaz $f(x_1) > f(x_2)$.
3. $\xi \in \overset{\circ}{I}$ miatt $f'(\xi) = 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) = 0$, azaz $f(x_1) = f(x_2)$.

□

A tételt leggyakrabban abban az esetben alkalmazzuk, amikor az f függvény értelmezési tartománya véges számú intervallum egyesítése, f folytonos és az értelmezési tartomány belső pontjaiban differenciálható, továbbá az $f'(x) = 0$ egyenletnek véges számú gyöke van.

Ekkor ez a véges számú gyök az értelmezési tartományt véges számú részintervallumra bontja. Igazolható, hogy egy-egy ilyen részintervallum belsejében f'-nek már nincs több zérushelye, vagyis ezeken f' előjele állandó. Ezért f egy-egy ilyen részintervallumon – tételünket erre a részintervallumra alkalmazva – vagy szigorúan monoton nő, vagy szigorúan monoton csökken.

Mindezt az ún. monotonitási táblázatban tudjuk áttekinthetően összefoglalni (ld. a tanórákon).

Térjünk rá a szélsőértékekre.

3.20. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in D_f$, és jelölje $K(a)$ az a valamely környezetét. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban lokális

1. minimuma van, ha
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f : \quad f(x) \geq f(a)$$
2. szigorú minimuma van, ha
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f \setminus \{a\} : \quad f(x) > f(a)$$
3. maximuma van, ha
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f : \quad f(x) \leq f(a)$$
4. szigorú maximuma van, ha
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in K_r(a) \cap D_f \setminus \{a\} : \quad f(x) < f(a)$$

Itt a a lokális szélsőérték helye, $f(a)$ a lokális szélsőérték.

Ha már tudjuk, hogy a függvény mely intervallumokon nő és melyeken csökken, akkor könnyen meg tudjuk határozni a lokális szélsőértékhelyeit.

Megállapíthatjuk ugyanis, hogy azokban a pontokban, ahol f szigorú növekedésből szigorú csökkenésbe megy át, szigorú lokális maximum van. Hasonlóképpen, ahol f szigorú csökkenésből szigorú növekedésbe megy át, szigorú lokális minimum van. Ezt pontosítja a következő, könnyen bebizonyítható tétel:

3.21. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor*

- *ha f szigorúan monoton növekvő az $(a, c]$ intervallumon, továbbá szigorúan monoton csökkenő a $[c, b)$ intervallumon, akkor f-nek c-ben szigorú lokális maximuma van;*
- *ha f szigorúan monoton csökkenő az $(a, c]$ intervallumon, továbbá szigorúan monoton növekvő a $[c, b)$ intervallumon, akkor f-nek c-ben szigorú lokális minimuma van.*

3.22. Megjegyzések.

1. Mivel a növekedést-csökkenést legtöbbször a derivált előjelével vizsgáljuk, a fenti tétel átfogalmazható a deriváltfüggvény előjelváltásai segítségével is.
2. Az eddigiekből következik, hogy ha egy függvény megfelel a fenti tétel feltételeinek, akkor a szélsőérték helyén a derivált értéke 0. Ez általában is igazolható: ha $f \in D(a)$, és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$. Más szóval: a derivált eltűnése a lokális szélsőérték szükséges feltétele.

   Hogy ez a feltétel nem elégséges, mutatja az $x \to x^3$ függvény az $a = 0$ helyen.

3.5. Alkalmazás III.: L'Hospital-szabály

A L'Hospital szabály bizonyos $\frac{0}{0}$ ill. $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek kiszámítását visszavezeti a deriváltak hányadosának határértékére.

3.23. Tétel. *[L'Hospital szabály] Legyen*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad f, g \in D(a, b).$$

Tegyük fel, hogy

$$g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b)),$$

továbbá, hogy

$$\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0, \quad \textit{vagy} \quad \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty,$$

valamint, hogy

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

Ekkor

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

A tételt nem bizonyítjuk

3.24. Megjegyzések.

1. Hasonló tétel érvényes a bal oldali határértékre is.
2. Hasonló tétel érvényes a határértékre is.
3. A L'Hospital szabály határozatlan törtekre vonatkozik. A többi határozatlan kifejezést (ld. 2.7. megjegyzés) vissza kell vezetni a határozatlan hányadosra.

3.6. Feladatok

1. Deriváljuk az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}$ *b*) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2+5}}$ *d*) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$

e) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{arc\,tg} 2x$ *f*) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = 5\cos^2(3x+4)$ *h*) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\,\sin\cos x$

i) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$ *j*) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{5x+2}{\sqrt{-x^2+8}}\right)$

k) $f(x) = \ln^2\operatorname{tg} x + x\ln\operatorname{tg}^4 x$ *l*) $f(x) = x^e + e^x + x^e\cdot e^x$

m) $f(x) = (x^2+2)\sin\sqrt{x+3}$ *n*) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

o) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

p) $f(x) = \lg(x^3e^{x^2}) + \lg\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+5}}$

q) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ *r*) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

2. Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét az alábbi függvényekhez a megadott x_0 abszcisszájú pontban:

   a) $y = 3x^2 - 5x + 2, \qquad x_0 = 3$

   b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \qquad x_0 = 3$

   c) $y = \sqrt{1+x^2}, \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

   d) $y = \ln(\sin x^2), \qquad x_0 = \dfrac{4}{5}$

3. Melyek azok a pontok, ahol az adott görbe érintője párhuzamos az adott egyenessel?

   a) $y = 2 + x - x^2,$ x tengely

   b) $y = 2 + x - x^2,$ az első síknegyed szögfelezője

   c) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x-2}, \qquad y = -\dfrac{1}{2}x + 5$

   d) $y = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x^3}, \qquad y = \dfrac{\sqrt{3}}{16}x + 1$

4. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás és lokális szélsőérték szempontjából:

   a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ *b)* $f(x) = \dfrac{1}{x} - x^2$

   c) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ *d)* $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$

   e) $f(x) = \dfrac{6x}{x+1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

   g) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ *h)* $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$

   i) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ *j)* $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{1+x}$

5. Számoljuk ki az alábbi határértékeket a L'Hospital szabály segítségével:

   a) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

   e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\cos 2x-4\cos x}{x^2-x\sin x}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$

   g) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)\cdot\ln(1-x)$ *h)* $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

6. Az R sugarú körlemezből mekkora körcikket kell kivágni, hogy belőle a maximális térfogatú kúp alakú tölcsért lehessen kialakítani?

7. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(2; 4)$ ponton, és a nemnegatív koordináta-féltengelyekkel együtt a minimális területű háromszöget határolja.

4. Függvények integrálása

4.1. A primitív függvény fogalma, néhány alapintegrál

Sok esetben szükség van arra, hogy olyan függvényt keressünk, amelynek a deriváltja egy előre adott függvény. Az ilyen függvényt az az előre adott függvény primitív függvényének nevezzük. Persze ez a meghatározás még pontosításra szorul, nem mindegy pl. a szereplő függvények értelmezési tartománya.

4.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, továbbá

$$f : H \to \mathbb{R}, \quad F : H \to \mathbb{R}.$$

Az F függvényt az f függvény primitív függvényének nevezzük, ha F differenciálható, és

$$\forall\, x \in H : \quad F'(x) = f(x).$$

4.2. Példa. Legyen $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor az

$$F(x) := \frac{x^3}{3} \ (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és a} \quad G(x) := \frac{x^3}{3} + 5 \ (x \in \mathbb{R})$$

függvények a f-nek primitív függvényei, hiszen – mint az könnyen ellenőrizhető:

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Felvetődik a kérdés, hány primitív függvénye van egy f függvénynek, és ezek hogyan adhatók meg. Az biztos, hogy végtelen sok primitív függvény van, mivel ha F primitív függvény, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén az $F + c$ függvény is primitív függvény, hiszen

$$(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f.$$

Kérdés, hogy így az f összes primitív függvényéhez eljutunk-e. Az alábbi péda mutatja, hogy általában nem.

4.3. Példa. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Ekkor f egy primitív függvénye az

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{lll} \ln(x), & \text{ha} & x > 0 \\ & & \\ \ln(-x), & \text{ha} & x < 0 \end{array} \right\} = \ln|x| \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvény, amint az deriválással könnyen ellenőrizhető. Ugyancsak primitív függvénye az f-nek az alábbi G függvény is:

$$G(x) := \begin{cases} \ln(x) + 3, & \text{ha} \quad x > 0 \\ \\ \ln(-x) + 10, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ez azonban már nem írható fel $\ln|x| + c$ alakban, hiszen jól láthatóan $G - F$ nem konstans.

Ha azonban $D_f = I$ nyílt intervallum, akkor az f összes primitív függvényét megkaphatjuk alkalmas konstans hozzáadásával.

4.4. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és F az f egy primitív függvénye, akkor az f összes primitív függvénye: $F + c \quad (c \in \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy $F + c$ primitív függvénye f-nek.

Legyen $G : I \to \mathbb{R}$ az f egy tetszőleges primitív függvénye, ekkor

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (x \in I),$$

tehát a 3.19. tétel alapján van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$(G - F)(x) = c \quad (x \in I).$$

Azt kaptuk, hogy $G(x) = F(x) + c \ (x \in I)$. □

4.5. Definíció. Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük, jele: $\int f$ vagy $\int f(x)\, dx$.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban az egyes primitív függvényeket is szokták határozatlan integrálnak nevezni, pl. elterjedt az ilyen felírás:

$$\int \cos x \; dx = \sin x.$$

Az is igen elterjedt, hogy a határozatlan integrált nem halmaz-jelöléssel írjuk fel, hanem pl. így:

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c.$$

Itt hallgatólagosan feltételezzük, hogy f és F közös értelmezési tartománya nyílt intervallum.

Érdekes kérdés annak tisztázása, hogy mely függvényeknek van primitív függvénye. Ezzel kapcsolatban bizonyítás nélkül közlünk egy elégséges feltételt:

4.6. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, továbbá $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek létezik primitív függvénye.*

A legfontosabb alapfüggvények primitív függvényeit (az ún. alapintegrálokat) a tanórákon ismertetjük.

4.2. Egyszerű integrálási szabályok

A primitív függvény meghatározása sok esetben úgy történik, hogy bizonyos szabályok segítségével a bonyolult függvények primitív függvényeinek keresését egyszerűbb primitív függvény keresési feladatokra (ún. alapintegrálokra) vezetjük vissza. Ebben a szakaszban ilyen szabályokról lesz szó. A tárgyalás során – az egyszerűség kedvéért – feltesszük, hogy a szereplő függvények nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvények.

4.7. Tétel. *[additivitás]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Bizonyítás.

$$(\int f + \int g)' = (\int f)' + (\int g)' = f + g.$$

$\square$

4.8. Tétel. *[homogenitás]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\int (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int f.$$

Bizonyítás.

$$(\lambda \cdot \int f)' = \lambda \cdot (\int f)' = \lambda \cdot f.$$

$\square$

4.9. Tétel. *[lineáris helyettesítés]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $F : I \to \mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye. Legyen továbbá

$$a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad \text{és} \quad J := \{x \in \mathbb{R} \mid ax + b \in I\}.$$

Ekkor J nyílt intervallum, és

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} \qquad (x \in J).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy J nyílt intervallum. Az egyenlőség pedig a szokásos módon, deriválással igazolható:

$$\frac{d}{dx}\frac{F(ax+b)}{a} = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b) \quad (x\in J).$$

$\square$

4.10. Példa. $\displaystyle\int e^{4x-2}\,dx = \frac{e^{4x-2}}{4}$. Itt $I = J = \mathbb{R},\ a = 4,\ b = -2.$

4.11. Tétel. *[$f^\alpha \cdot f'$ típus]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $\alpha \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy minden $x \in I$ esetén értelmezett az $(f(x))^\alpha$ hatvány. Ekkor

a) $\alpha \neq -1$ esetén:

$$\int (f(x))^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (x\in I);$$

b) $\alpha = -1$ esetén pedig:

$$\int (f(x))^{-1}\cdot f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| \qquad (x\in I).$$

Megjegyezzük, hogy a b) esetben az abszolútérték jele elhagyható (az $f(x)$ megfelelő előjelezése után), ugyanis f előjele állandó I-n.

Bizonyítás. Világos, hogy állításaink mindkét oldala értelmezett. Az egyenlőségek igazolása deriválással:

a) $\alpha \neq -1$ esetén:

$$\left(\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\cdot f^\alpha\cdot f' = f^\alpha\cdot f';$$

b) $\alpha = -1$ esetén pedig:

$$(\ln|f|)' = \frac{1}{f}\cdot f' = \frac{f'}{f}.$$

$\square$

4.12. Példák.

1. $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos x \; dx = \frac{\sin^4 x}{4}$. Itt $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $\alpha = 3$.

2. $\displaystyle\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \; dx = \frac{\sin^{3/2}(x)}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}$. Itt I-nek választható bármely olyan nyílt intervallum, amelyből vett x-ekre $\sin x$ pozitív. Pl. legyen $I := (0, \pi)$. A további szereposztás: $f(x) = \sin x$, $\alpha = 1/2$.

3. $$\int \operatorname{tg} x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \; dx = -\ln|\cos x|.$$
   Itt $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ nyílt intervallum, pl. $I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \cos x$, $\alpha = -1$.

4.13. Tétel. *[parciális integrálás]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Ekkor

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g').$$

Bizonyítás. A szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$(f \cdot g - \int (f \cdot g'))' = (f \cdot g)' - (\int (f \cdot g'))' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g.$$

□

4.3. Helyettesítés

4.14. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt folytonosan differenciálhatónak nevezzük, ha differenciálható, és deriváltfüggvénye folytonos.

4.15. Tétel. *[helyettesítéses integrálás I. alak]*
Legyenek I, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : J \to \mathbb{R}$ folytonos, $g : I \to J$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

$$\int (f \circ g) \cdot g' = (\int f) \circ g.$$

Bizonyítás. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$((\int f)\circ g)' = ((\int f)'\circ g)\cdot g' = (f\circ g)\cdot g'.$$

$\square$

4.16. Megjegyzés. Ha g változóját x-szel jelöljük, akkor a helyettesítés I. alakja így írható fel:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\; dx = F(g(x)) \quad (x\in I),$$

ahol F jelöli az f egy primitív függvényét, azaz - f változóját u-val jelölve:

$$F(u) = \int f(u)\; du \quad (u\in J).$$

Ebből adódik a helyettesítés gyakorlati, ún „formális" kivitelezése:

Az $\int f(g(x))\cdot g'(x)\; dx$ integrálban $g(x)$-et u-val, $g'(x)\; dx$-et pedig a $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ képletből „átszorzással" adódó du-val helyettesítjük. Az így kapott integrált kiszámítjuk, majd u helyébe $g(x)$-et írva, visszatérünk az eredeti változóra.

Amennyiben a g függvény bijekció (igazolható, hogy ekkor – a folytonossága miatt – szigorúan monoton is), a helyettesítés szabálya más alakban is használható:

4.17. Tétel. *[helyettesítéses integrálás II. alak]*

Legyenek I, $J\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f: I\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $g: J\to I$ pedig egy folytonosan differenciálható injektív függvény, melynek értékkészlete az I intervallum. Ekkor

$$\int f = \left(\int (f\circ g)\cdot g'\right)\circ g^{-1}.$$

Bizonyítás. A helyettesítéses integrál I. alakjában cseréljük fel I és J szerepét, majd írjuk fel a formulát (melynek mindkét oldala most egy J-n értelmezett függvény):

$$\int (f\circ g)\cdot g' = (\int f)\circ g.$$

Ezután vegyük mindkét oldal kompozícióját a $g^{-1}: I\to J$ függvénnyel:

$$\left(\int (f\circ g)\cdot g'\right)\circ g^{-1} = (\int f)\circ g\circ g^{-1} = \int f,$$

ami tehát I-n értelmezett függvények egyenlőségét jelenti. A két oldal felcserélésével kapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

4.18. Megjegyzések.

1. Ha f változóját x-szel, g változóját pedig t-vel jelöljük, akkor a helyettesítés II. alakja így írható fel:
$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt\,|_{t=g^{-1}(x)} \quad (x \in I).$$
Ebből adódik a II. alakú helyettesítés gyakorlati, ún „formális" kivitelezése: az $\int f(x)\ dx$ integrálban x-et $g(t)$-vel, dx-et pedig a $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ képletből „átszorzással" adódó $g'(t)\ dt$-vel helyettesítjük. Az így kapott új integrált kiszámítjuk, majd t helyébe $g^{-1}(x)$-et írva, visszatérünk az eredeti változóra.
2. A helyettesítés II. alakjában a g függvény (s persze vele együtt a J intervallum) a megadott feltételek mellett tetszőlegesen választható. Ez nagy szabadságot ad az integrál átalakítására, ami egyrészt jó, másrészt veszélyes, mert nem mindig kapunk egyszerűen kiszámítható integrált. Ezért vannak az egyes feladattípusokhoz ún. „javasolt" helyettesítések.
3. Ha a II. alakról szóló tétel feltételei teljesülnek, akkor a helyettesítés mindkét alakja használható. Általában azt az alakot szoktuk használni, amelyiket könnyebben felismerjük az adott feladatban.

4.4. A Riemann-integrál fogalma

Emlékeztetünk a korlátos zárt intervallum fogalmára:

4.19. Definíció. Legyen $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Az
$$[a,\, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}$$
halmazt korlátos zárt intervallumnak (röviden: zárt intervallumnak) nevezzük.

4.20. Definíció. Legyen $I := [a,\, b] \subset \mathbb{R}$ egy korlátos zárt intervallum és $n \in \mathbb{N}$. Osszuk fel az I intervallumot n darab részintervallumra, azaz adjuk meg az x_i osztópontokat úgy, hogy
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
teljesüljön.

Az I intervallum ezen osztópontok által meghatározott felosztásán értjük a
$$\tau := \{x_0,\, \ldots,\, x_n\} = \{x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$
osztópont-halmazt. Az I felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}(I)$.

4.21. Definíció. Legyen $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$. A

$$||\tau|| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

számot τ felosztás finomságának nevezzük.

4.22. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy minden $\delta > 0$ számhoz létezik olyan $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztás, amely „δ-nál finomabb", azaz amelyre $||\tau|| < \delta$.

4.23. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset D_f$ és $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$.

Vegyünk mindegyik $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumból egy-egy ξ_i elemet, azaz legyen

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \ldots, n.$$

Az

$$R(f, \tau, \{\xi_i\}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

összeget (a megadott τ felosztáshoz és ξ_i pontokhoz tartozó) Riemann-összegnek nevezzük.

A Riemann-összeg geometriai jelentése: az f grafikonja alatti terület közelítése téglalapok területének összegével.

4.24. Definíció. (Az integrál Riemann-féle értelmezése) Azt mondjuk, hogy f integrálható az $I = [a, b]$ intervallumin, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau \in \mathcal{F}(I),\ ||\tau|| < \delta\ \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] : \quad |R(f, \tau, \{\xi_i\}) - A| < \varepsilon.$$

Igazolható, hogy az A szám egyértelmű. Ezt az A számot az f Riemann-integráljának, vagy röviden integráljának nevezzük. Használjuk még a „határozott integrál" elnevezést is.

A Riemann-féle értelmezésben szereplő követelményt röviden így szokás felírni:

$$\exists A \in \mathbb{R} : \quad \lim_{||\tau|| \to 0} R(f, \tau, \{\xi_K\}) = A.$$

A továbbiakban az $I = [a, b]$-n integrálható függvények halmazát $R[a, b]$-vel ill. $R(I)$-vel jelöljük. Egy $f \in R[a, b]$ függvény integráljának jelölésére pedig az alábbi jelöléseket használjuk:

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

4.25. Példa. Legyen $f(x) := c$ $(x \in [a,\, b])$, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített konstans. Ekkor tetszőleges τ felosztás és $\{\xi_i\}$ pontrendszer esetén

$$R(f, \tau, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b - a),$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$f \in R([a,\, b]), \qquad \text{és} \qquad \int_a^b c\, dx = c \cdot (b - a).$$

Igazolható, hogy ha $f(x) \geq 0$, akkor az integrál megadja az f függvény grafikonja és az x-tengely közti síkbeli tartomány, azaz a

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz területét.

Bebizonyítható az alábbi tétel:

4.26. Tétel.

1. *Ha f integrálható $[a,\, b]$-n, akkor korlátos $[a,\, b]$-n.*
2. *Ha egy integrálható függvényt véges számú helyen megváltoztatunk, akkor az így kapott függvény is integrálható $[a,\, b]$-n, s integrálja megegyezik az eredeti függvényével.*
3. *Ha f folytonos $[a,\, b]$-n, akkor integrálható $[a,\, b]$-n.*

4.5. Newton-Leibniz-formula

A Riemann-integrál kiszámítására gyakran használjuk a Newton-Leibniz formulát:

4.27. Tétel. *[Newton-Leibniz formula]*

Legyen $f \in R[a, b]$, és tegyük fel, hogy létezik olyan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}([a, b])$. Ekkor a Lagrange középértéktétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\xi_i \in (x_{i-1},\, x_i)$ közbülső pontok, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1,\, \ldots,\, n).$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = R(f, \tau, \{\xi_i\}). \end{aligned}$$

Jelölje A az f integrálját, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzítve. Ehhez létezik az integrál definíciójában szereplő $\delta > 0$. Vegyünk egy δ-nál finomabb τ felosztást, és vegyük az ehhez tartozó, az iménti levezetésben meghatározott $\{\xi_i\}$ pontokat. Ekkor az integrál definíciója alapján:

$$|R(f, \tau, \{\xi_i\}) - A| < \varepsilon.$$

Ez viszont – mivel esetünkben $R(f, \tau, \{\xi_i\}) = F(b) - F(a)$ – azt jelenti, hogy

$$|F(b) - F(a) - A| < \varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ esetén elmondható, ezért az egyenlőtlenség bal oldala csak 0 lehet, ami azt jelenti, hogy

$$F(b) - F(a) = A.$$

□

4.28. Megjegyzés. A tételt leggyakrabban abban az esetben alkalmazzuk, amikor $[a,\, b] \subset I$, ahol I nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben teljesülnek a Newton-Leibniz formula feltételei. A folytonos függvények integráljának kiszámíthatósága tehát azon múlik, hogy meg tudjuk-e határozni egy primitív függvényüket.

4.6. A Riemann-integrál tulajdonságai

Ebben a szakaszban összefoglaljuk a Riemann-integrál néhány fontos tulajdonságát.

4.29. Tétel.

1. *(additivitás) Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f+g \in R[a,b]$, és*
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. *(homogenitás) Ha $f \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f \in R[a,b]$, és*
$$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f.$$

3. *(intervallum szerinti additivitás) Legyen $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ egy függvény, és $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ az $[a,\, b]$ intervallum egy felosztása. Ekkor*
$$f \in R[a,b] \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} : \quad f \in R[x_{i-1}, x_i],$$
és ez esetben
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

4. *(monotonitás) Legyen $f, g \in R[a,b]$, $f(x) \le g(x)$ $(x \in [a,b])$. Ekkor*
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

A következő két tételben a függvények ill. deriváltjuk folytonosságát is feltesszük, így az integrálhatóságot nem kell igazolni. A bizonyítás pedig egyszerűen adódik a primitív függvényre kimondott hasonló tételből és a Newton-Leibniz formulából.

4.30. Tétel. *[parciális integrálás]*
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Ekkor tetszőleges $[a,\, b] \subset I$ korlátos zárt intervallum esetén
$$\int_a^b (f \cdot g') = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g.$$

4.31. Tétel. *[helyettesítés I. alak]*

Legyenek I, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : J \to I$ folytonosan differenciálható, $f : I \to \mathbb{R}$ pedig folytonos függvény. Ekkor tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset J$ korlátos zárt intervallum esetén

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g) \cdot g' = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f.$$

Itt egyenlőség jobb oldala úgy értendő, hogy

$$g(\alpha) = g(\beta) \text{ esetén } \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f := 0,$$

$$g(\alpha) > g(\beta) \text{ esetén pedig } \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f := -\int_{g(\beta)}^{g(\alpha)} f.$$

4.32. Tétel. *[helyettesítés II. alak]*

Az előző tétel feltételein kívül tegyük még fel, hogy g szigorúan monoton is. Ekkor bármely $[a, b] \subset R_g \subset I$ esetén

$$\int_{a}^{b} f = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} (f \circ g) \cdot g'.$$

Itt egyenlőség jobb oldala – az előző tételhez hasonlóan – úgy értendő, hogy

$$g^{-1}(\alpha) > g^{-1}(\beta) \text{ esetén } \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} (f \circ g) \cdot g' := -\int_{g^{-1}(\beta)}^{g^{-1}(\alpha)} (f \circ g) \cdot g'.$$

4.7. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\int (5x-4)^5 \, dx$ *b)* $\int \sqrt[4]{7x-16} \, dx$ *c)* $\int \frac{1}{-3x+4} \, dx$

d) $\int \sin(6x+4) \, dx$ *e)* $\int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)} \, dx$ *f)* $\int 5^{2-3x} \, dx$

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x+13)^7}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{7x^2}{\sqrt{5-4x^3}}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

3. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (x^2-3x+5)\cdot e^x\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

d) $\displaystyle\int e^{2x}\cdot\cos 5x\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$

4. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x-1}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{36-x^2}}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^{5} (x^2+1)\cdot e^{2x}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\cdot\cos x\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^3 \ln^2 x\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx$

6. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^3 x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{0,6}^{0,8} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^3 x\,dx$

7. Adjuk meg halmazként és rajzoljuk meg vázlatosan az alábbi függvénygörbék alatti tartományokat a megadott intervallumokon. Számítsuk ki e tartományok területét.

   a) $y = \sqrt{x}, \quad [0,\, 1]$ *b*) $y = x^3 - 3, \quad [3,\, 4]$

   c) $y = \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0,\, \pi]$ *d*) $\dfrac{1}{2x+4}, \quad [0,\, 3]$

   e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad [0,\, \frac{1}{3}]$ *f*) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad [0,\, 1]$

8. Készítsünk vázlatot, és adjuk meg halmazként az alábbi görbék által határolt síktartományokat, majd számítsuk ki e tartományok területét.

   a) $y = 4 - x^2$ és $y = 0$ *b*) $y = \dfrac{1}{x}$ és $y = 2,5 - x$

   c) $y = \sin x$ és $y = \dfrac{2}{\pi} \cdot x$ *d*) $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ és $x + y = 1$

   e) $y = x^2 + 2x$ és $y = 4 - x^2$ *f*) $y = x^4$ és $y = 3x^2 - 2$

9. Határozzuk meg annak a tartománynak a területét, amelyet az y tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint ennek az $x_0 = 4$ abszcisszájú pontjához húzott érintője határol.

10. Határozzuk meg az $y = x(1 - x)$ parabola, továbbá az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ abszcisszájú pontjaiban húzott érintői által határolt tartomány területét.