

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
INFORMATIKAI KAR

Szili László


**Funkcionálanalízis – a jelfeldolgozás  
és a szimuláció matematikai alapjai**



Budapest, 2007

Magyarország célba ér



A jegyzet a  
**GVOP-3.2.2.-2004-07-0005/3.0** számú ELTE IKKK   
és a **T 047132** számú OTKA  
pályázatok támogatásával készült

# Tartalomjegyzék

Előszó . . . . .	5
<b>1. Weierstrass approximációs (sűrűségi) tételei . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Előzetes megjegyzések . . . . .	7
1.2. A tételek megfogalmazása . . . . .	8
1.3. Az első approximációs tétel Bernstein-féle bizonyítása . . . . .	8
1.4. Csebisev tétele a legjobban közelítő polinomokról . . . . .	13
<b>2. Térstruktúrák . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1. Metrikus terek . . . . .	15
2.1.1. A metrikus tér fogalma. Példák . . . . .	15
2.1.2. Izometrikus terek . . . . .	17
2.1.3. Környezetek, korlátos halmazok, ekvivalens metrikák . . . . .	18
2.1.4. Konvergens sorozatok metrikus terekben . . . . .	19
2.1.5. Teljes metrikus terek . . . . .	21
2.1.6. Metrikus tér teljessé tétele . . . . .	24
2.1.7. Nyílt, zárt és kompakt halmazok metrikus terekben . . . . .	24
2.1.8. Metrikus tér sűrű részhalmazai. Szeparábilis terek. A Baire-féle kategóriatétel . . . . .	29
2.1.9. Metrikus terek közötti függvények folytonossága . . . . .	33
2.2. Lineáris terek (vektorterek) . . . . .	35
2.3. Normált terek és Banach-terek . . . . .	36
2.4. A $L^p$ és a $l^p$ terek . . . . .	41
2.4.1. Előzetes megjegyzések . . . . .	41
2.4.2. A Lebesgue-integrálra vonatkozó néhány alapvető eredmény . . . . .	43
2.4.3. A $\mathbb{L}^p$ függvényterek . . . . .	45
2.4.4. Kapcsolat a $\mathbb{L}^p$ terek között . . . . .	51
2.4.5. Normakonvergencia. A $\mathbb{L}^p$ terek teljessége . . . . .	52
2.5. Euklideszi terek és Hilbert-terek . . . . .	56
<b>3. A legjobb approximáció problémaköre . . . . .</b>	<b>61</b>
3.1. A probléma felvetése és absztrakt megfogalmazása . . . . .	61
3.2. A legjobban közelítő elem létezése metrikus terekben . . . . .	63
3.3. Approximációs tételek normált terekben . . . . .	64
3.3.1. Altértől vett távolság . . . . .	64
3.3.2. Zárt és konvex halmazoktól vett távolság . . . . .	69

3.3.3.	Approximációs tételek konkrét függvényterekben . . . . .	70
3.4.	Approximációs tételek Hilbert-terekben . . . . .	71
3.4.1.	Projekciós (vetítő) operátorok . . . . .	74
3.4.2.	A projekciós operátor explicit előállítás . . . . .	75
<b>4.</b>	<b>Hilbert-terekben a Fourier-sorok elmélete . . . . .</b>	<b>77</b>
4.1.	A probléma felvetése . . . . .	77
4.2.	Ortogonalitás. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció . . . . .	77
4.3.	Zárt és teljes rendszerek Hilbert-terekben . . . . .	83
4.4.	Végtelen sorok Hilbert-terekben . . . . .	84
4.5.	Fourier-sorok . . . . .	85
4.6.	Szeparábilis Hilbert-terek izomorfiaja . . . . .	93
<b>5.</b>	<b>Lineáris operátorok és funkcionálok . . . . .</b>	<b>97</b>
5.1.	A lineáris operátorok $L(X, Y)$ vektortere . . . . .	97
5.2.	Folytonosság és korlátosság . . . . .	99
5.3.	Operátor normája. A $B(X, Y)$ normált tér . . . . .	102
5.4.	Példák funkcionálokra és operátorokra . . . . .	104
5.5.	A duális tér . . . . .	112
5.5.1.	A duális tér definíciója . . . . .	112
5.5.2.	Konkrét normált terek duális terei . . . . .	113
<b>6.</b>	<b>A Hahn–Banach-tételek . . . . .</b>	<b>123</b>
6.1.	Előzetes megjegyzések . . . . .	123
6.2.	A Hahn–Banach-tétel analitikus alakjai: lineáris funkcionálok kiterjesztése . . . . .	123
6.3.	A Hahn–Banach-tétel geometriai alakjai: konvex halmazok szétválasztása síkokkal . . . . .	127
<b>7.</b>	<b>A Banach–Steinhaus-tételek . . . . .</b>	<b>131</b>
7.1.	Operátorsorozat konvergenciája . . . . .	131
7.2.	Az általános eredmények . . . . .	132
7.3.	Alkalmazások . . . . .	136
<b>8.</b>	<b>Az inverz operátor folytonossága. Nyílt leképezések és zárt gráfok . . . . .</b>	<b>147</b>
8.1.	Előzetes megjegyzések . . . . .	147
8.2.	Az inverz operátor . . . . .	147
8.3.	A nyílt leképezések tétele . . . . .	149
8.4.	A Banach-féle homeomorfia tétel . . . . .	151

8.5. A zárt gráf tétel . . . . .	152
<b>Irodalom</b> . . . . .	<b>157</b>



# Előszó

A jegyzet alapját azoknak az előadásoknak és gyakorlatoknak az anyagát alkotja, amelyeket a 2003. őszi és a 2007. tavaszi félév között tartottam az Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Karán a programtervező matematikus szakos hallgatóknak.

A 8 féléves *Analízis* nevű tantárgy utolsó félévében szerepelt a korábbi ismeretek elmélyítésére és kiegészítésére szánt témakör: a *funkcionálanalízis*.

A jegyzet ennek a félévnek az anyagát tartalmazza, ezért többször is hivatkozunk a korábbi félévekben ismertetett alábbi témakörökre:

- metrikus terek elmélete (alapvető tulajdonságok, metrikus terek közötti függvények folytonossága),
- trigonometrikus Fourier sorok elmélete,
- mérték- és integrálelmélet.

Az ezekkel kapcsolatos fogalmakat és eredményeket (a bizonyítások felidézése nélkül) soroltuk fel.

Az első változat összeállítása során sok segítséget kaptam hallgatóimtól és kollégáimtól.

*Hallgatóim* közül különösen köszönettel tartozom *Bese Antalnak*, *Kiss Balázsnak*, *Márton Ritának* és *Mátyás Gergelynek*, akik az anyag alapos áttanulmányozása során tettek hasznos megjegyzéseket és az ábrákat elkészítették.

*Kollégáim* közül *Simon Péternek* és *Tóth Jánosnak* tartozom köszönettel, akiktől az első változat igen alapos áttanulmányozása után kaptam hasznos és fontos észrevételeket, javaslatokat; amelyeket a jelen változatba beépítettem.

Minden megjegyzést, észrevételt, segítséget köszönettel veszek.

Budapest, 2007. november 11.

Szili László  
ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék  
e-mail: szili@ludens.elte.hu





# 1. Weierstrass approximációs (sűrűségi) tételei

## 1.1. Előzetes megjegyzések

Induljunk ki abból a jól ismert tényből, hogy minden  $\mathbb{R}$ -beli nemelfajuló intervallum tartalmaz racionális számot. Ebből az is következik, hogy minden valós szám tetszés szerinti pontossággal megközelíthető racionális számokkal, azaz

$$\forall a \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists (q_n) \subset \mathbb{Q} : q_n \rightarrow a \ (n \rightarrow +\infty). \quad (1.1)$$

A szemléletünkkel összhangban ezt úgy is mondjuk, hogy a *racionális számok sűrűn vannak  $\mathbb{R}$ -ben*. Mivel  $\mathbb{Q}$  megszámlálható („kezelhető”), ezért az említett eredmény gyakorlati jelentősége nyilvánvaló.

Weierstrass első, illetve második approximációs tétele az (1.1) alatti állításnak a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ , illetve a  $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$  függvényterekre vonatkozó általánosítása.

Emlékeztetünk arra, hogy  $C[a, b]$ -vel jelöljük a kompakt  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények halmazát. A pontonkénti műveletekre nézve ez természetes térstruktúrával van ellátva, és az

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (f \in C[a, b])$$

képlet normát definiál a  $C[a, b]$  lineáris téren. Ezzel a normával  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  teljes normált tér, azaz Banach-tér, és a norma által indukált konvergenciát az  $[a, b]$ -n vett *egyenletes konvergenciának* nevezzük.

Az  $\mathbb{R}$  halmazon értelmezett  $2\pi$  szerint periodikus folytonos függvények  $C_{2\pi}$  lineáris tere is Banach-tér az

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad (f \in C_{2\pi})$$

normára nézve, és a megfelelő konvergencia ebben az esetben az  $\mathbb{R}$ -en vett egyenletes konvergencia.

Weierstrass tételei fontos szerepet játszottak a **funkcionálanalízis** kialakulásában. Az első motivációt adták a *sűrűség*, a *zártság* és a *teljesség* problémájának az általános felvetéséhez.

## 1.2. A tételek megfogalmazása

K. Weierstrass 1885-ben igazolta az analízis legalapvetőbb tételei közé sorolható alábbi eredményeket.

**1. tétel** (Weierstrass első approximációs tétele). *Minden  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényhez létezik algebrai polinomoknak olyan  $(P_n)$  sorozata, amelyek az  $[a, b]$  intervallumon egyenletesen tart az  $f$  függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az algebrai polinomok sűrűn vannak a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  Banach térben.*

A tétel Weierstrass által közölt eredeti bizonyítása óta több más bizonyítást is találtak. A következő pontban az Sz.N. Bernsteintől származó, 1912-ben publikált, valószínűségszámítási háttérű bizonyítást ismertetjük. *Szőkefavi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénytörések* című tankönyve tartalmazza a tétel H. Lebesgue-féle bizonyítását.

Folytonos periodikus függvények trigonometrikus polinomokkal való közelítésére is hasonló állítás érvényes.

**2. tétel** (Weierstrass második approximációs tétele). *Minden  $2\pi$  szerint periodikus folytonos  $f$  függvényhez létezik trigonometrikus polinomoknak olyan  $(T_n)$  sorozata, amelyek az egész számegyenesen egyenletesen tart az  $f$  függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a trigonometrikus polinomok sűrűn vannak a  $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$  Banach térben.*

Ch. J. de la Vallée Poussin 1918-ban mutatott rá arra, hogy a két approximációs tétel szoros kapcsolatban van egymással. Nevezetesen: egyik a másiknak a következménye.

**3. tétel** (de la Vallée Poussin). *Weierstrass két approximációs tétele ekvivalens egymással.*

A 2. és a 3. tételt nem bizonyítjuk. Az érdeklődőknek *I. P. Natanson: Konstruktív függvénytan* című kiváló tankönyvét ajánljuk.

## 1.3. Az első approximációs tétel Bernstein-féle bizonyítása

Kezdjük azzal a speciális esettel, amikor az alapintervallum  $[0, 1]$ , azaz  $[a, b] = [0, 1]$ . A bizonyítást több lépésben végezzük el. Az önmagukban is érdekes és fontos részeket külön tételekben is megfogalmazzuk.

**Definíció.** Legyen  $n$  természetes szám. Az

$$N_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (x \in [0, 1], k = 0, 1, \dots, n)$$

polinomokat  $n$ -edfokú **Bernstein-féle alappolinomoknak** nevezzük.

**4. tétel** (az  $N_{k,n}$  polinomok tulajdonságai).

(a)  $N_{k,n}(x) \geq 0 \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}).$

(b)  $\sum_{k=0}^n N_{k,n}(x) = 1 \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}).$

(c) Minden rögzített  $\delta > 0$  és  $x \in [0, 1]$  szám esetén fennáll a

$$\sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

egyenlőtlenség.

A (c) tulajdonságnak, durván kifejezve, az az értelme, hogy nagy  $n$  értékekre a

$$\sum_{k=0}^n N_{k,n}(x)$$

összegben csak azok a tagok lényegesek, amelyek  $k$  indexére

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta,$$

míg a többi tag az összeg értékét alig befolyásolja.

**Bizonyítás.** (a) A definíció alapján nyilvánvaló.

(b) Alkalmazzuk az

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

binomiális tételt az  $a = x$  és  $b = 1 - x$  szereposztással.

(c) Jelöljük  $\Delta_n(x)$ -szel a  $0, 1, 2, \dots, n$  sorozatba tartozó azoknak a  $k$  számoknak a halmazát, amelyekre  $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ . Ha  $k \in \Delta_n(x)$ , akkor

$$\frac{(k - nx)^2}{n^2\delta^2} \geq 1.$$

Ennélfogva

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{n^2 \delta^2} \sum_{k \in \Delta_n(x)} (k - nx)^2 N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{n^2 \delta^2} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 N_{k,n}(x).$$

Az utolsó összeg kiszámolásához tekintsük a következő átalakítást:

$$T := \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 N_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n (k(k-1) - (2nx-1)k + n^2 x^2) N_{k,n}(x).$$

Mivel  $\sum_{k=0}^n N_{k,n}(x) = 1$ , továbbá

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k N_{k,n}(x) &= nx \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{n-1-l} = nx, \\ \sum_{k=0}^n k(k-1) N_{k,n}(x) &= n(n-1)x^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^l (1-x)^{n-2-l} = n(n-1)x^2, \end{aligned}$$

ezért

$$T = n^2 x^2 - (2nx-1)nx + n(n-1)x^2 = nx(1-x).$$

Az  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  ( $x \in [0, 1]$ ) egyenlőtlenség felhasználásával tehát azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{n^2 \delta^2} T = \frac{x(1-x)}{n \delta^2} \leq \frac{1}{4n \delta^2},$$

és ez a (c) állítás bizonyítását jelenti. ■

**Definíció.** Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges függvény. A

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) N_{k,n}(x) \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbb{N})$$

polinomot az  $f$  függvény  $n$ -edik **Bernstein-féle polinomjának** nevezzük.

Könnyű előre látni, hogy ha  $f$  folytonos, akkor  $n$  nagy értékeire  $(B_n f)(x)$  igen kevésbé különbözik  $f(x)$ -től. Ugyanis már megjegyeztük azt, hogy a

$$\sum_{k=0}^n N_{k,n}(x)$$

összegben azok tagok, amelyekre  $\frac{k}{n}$  távol áll  $x$ -től, majdnem semmi szerepet nem játszanak. Ugyanez áll a  $B_n f$  polinomra nézve is, mivel az  $f(\frac{k}{n})$  tényezők korlátosak. Ennélfogva a  $B_n f$  polinomban csak azok a tagok fontosak, amelyekre  $\frac{k}{n}$  az  $x$ -hez nagyon közel esik. De az ilyen tagokra az  $f(\frac{k}{n})$  tényező alig különbözik  $f(x)$ -től (a folytonosság miatt). Ez azt jelenti, hogy a  $B_n f$  polinom alig változik, ha tagjaiban  $f(\frac{k}{n})$ -et  $f(x)$ -szel helyettesítjük. Más szóval fennáll a következő közelítő egyenlőség:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x) N_{k,n}(x) \approx f(x).$$

Lényegében a fenti gondolatmenet pontosításával igazolta Sz.N. Bernstein 1912-ben a következő fontos eredményt.

**5. tétel** (Bernstein). *Tetszőleges  $f \in C[0, 1]$  függvény esetén a  $(B_n f)$  polinom-sorozat a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletesen konvergál az  $f$  függvényhez.*

**Bizonyítás.** Azt kell megmutatni, hogy ha  $f \in C[0, 1]$ , akkor

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall x \in [0, 1] \text{ és } \forall n \geq n_0 \text{ esetén} \\ |f(x) - (B_n f)(x)| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az  $\varepsilon > 0$  számot, és jelöljük  $M$ -mel  $|f|$  maximumát. Az  $f$  függvény egyenletes folytonossága következtében  $\varepsilon$ -hoz

$$\exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon.$$

Válasszunk ezután a  $[0, 1]$  intervallumon egy tetszőleges  $x$ -et. Mivel  $\sum_{k=0}^n N_{k,n}(x) = 1$ , ezért

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) N_{k,n}(x),$$

és így

$$f(x) - (B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) N_{k,n}(x).$$

Osszuk fel a  $0, 1, \dots, n$  indexeket két részre. Az egyikbe tartozzanak azok a  $k$  számok, amelyekre

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta,$$

ezen halmazát jelöljük  $I_1$ -gyel. Legyen  $I_2$  azon  $k$  indexek halmaza, amelyekre

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$$

teljesül. Ennek megfelelően a fenti összeget is két részre bontjuk; ezeket  $\sum_I$ -gyel és  $\sum_{II}$ -vel jelöljük. Az elsőben  $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$ , és ezért

$$|\sum_I| \leq \varepsilon \sum_{k \in I_1} N_{k,n}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n N_{k,n}(x) \leq \varepsilon.$$

A másik összegben  $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq 2M$ , és ezért az előző tétel (c) része alapján

$$|\sum_{II}| \leq 2M \sum_{k \in I_2} N_{k,n}(x) \leq \frac{M}{2n\delta^2}.$$

A fentieket összegezve azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - (B_n f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Ha  $n$  elegendően nagy ( $n \geq n_0$ ), akkor  $\frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon$  és

$$|f(x) - (B_n f)(x)| \leq 2\varepsilon,$$

amivel a tétel be is van bizonyítva, mert a szóban forgó  $n_0$  szám nem függ az  $x$  megválasztásától. ■

Az első approximációs tétel bizonyításához még azt kell megmutatni, hogy az állítás minden  $[a, b]$  kompakt intervallumra is érvényes. Tegyük fel tehát, hogy  $[a, b] \neq [0, 1]$ . Vegyünk egy tetszőleges  $f \in C[a, b]$  függvényt, és legyen

$$\varphi(y) := f(a + y(b - a)) \quad (y \in [0, 1]).$$

A fentiek szerint ehhez a  $\varphi \in C[0, 1]$  függvényhez minden  $\varepsilon > 0$  esetén létezik olyan  $Q(y) = \sum_{k=0}^n c_k y^k$  polinom, hogy

$$|\varphi(y) - Q(y)| < \varepsilon \quad (y \in [0, 1]).$$

Ha  $x$  az  $[a, b]$  tetszőleges pontja és  $x = a + y(b - a)$ , akkor  $y = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$ , ezért az iménti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$|\varphi(y) - Q(y)| = |f(x) - Q(\frac{x-a}{b-a})| < \varepsilon \quad (x \in [a, b]),$$

és világos, hogy  $Q$  az  $x$  változónak is egy polinomja. Ez a polinom  $f$ -et a kívánt pontossággal megközelíti. Weierstrass első approximációs tételét tehát maradéktalanul igazoltuk.

## 1.4. Csebisev tétele a legjobban közelítő polinomokról

Kompakt intervallumon folytonos függvények egyszerű szerkezetű függvényekkel (például polinomokkal) való megközelítésének természetes mértéke a következő.

**Definíció.** Jelöljük  $\mathcal{P}_n$ -nel ( $n \in \mathbb{N}$ ) a legfeljebb  $n$ -edfokú algebrai polinomok halmazát. Tetszőleges  $f \in C[a, b]$  függvény esetén az

$$E_n(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty$$

számot az  $f$  függvény legfeljebb  $n$ -edfokú polinomokkal való **legjobb megközelítésének** nevezzük.

Nem nehéz látni, hogy a fenti infimum valóban létezik és minden  $f \in C[a, b]$  függvényre

$$E_1(f) \geq E_2(f) \geq \dots \geq 0.$$

Ebből és Weierstrass első approximációs tételéből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(f) = 0 \quad (f \in C[a, b]).$$

Ha egy  $f$  függvényt polinomokkal kívánunk megközelíteni, akkor elég természetes az az igény, hogy a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok közül (tehát  $\mathcal{P}_n$ -ben) azt a polinomot válasszuk, amelyik legközelebb van  $f$ -hez. Az eddigiekből nem következik, és egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy általában létezik-e a  $\mathcal{P}_n$  halmazban olyan  $P^*$  polinom, amelyre  $E_n(f) = \|f - P^*\|_\infty$ , vagy másképpen az  $E_n(f)$  definíciójában az infimum vajon helyettesíthető-e minimummal. **P.L. Csebisev** 1859-ben — közel 30 évvel megelőzve Weierstrass tételét — igazolta ilyen „legjobban közelítő” polinomok létezését.

**6. tétel** (Csebisev tétele). *Tetszőleges  $f \in C[a, b]$  függvényhez és  $n$  természetes számhoz egyértelműen létezik olyan  $P^* \in \mathcal{P}_n$  polinom, amelyre*

$$\|f - P^*\|_\infty = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = E_n(f)$$

*teljesül.  $P^*$ -ot az  $f$ -et **legjobban megközelítő**  $\mathcal{P}_n$ -beli polinomnak nevezzük.*

Ennek a klasszikus tételnek a bizonyítása megtalálható *I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan (Budapest, 1952)* tankönyvének 33–45. oldalain. Itt csupán azt említjük meg, hogy a bizonyítás nem konstruktív jellegű, és az általános esetben remény sincs az  $f$ -et legjobban megközelítő polinomok *explicit* előállítására. Az ún. **Remez-algoritmus** segítségével a szóban forgó polinomok „jó közelítései” azonban explicit módon is megadhatók.

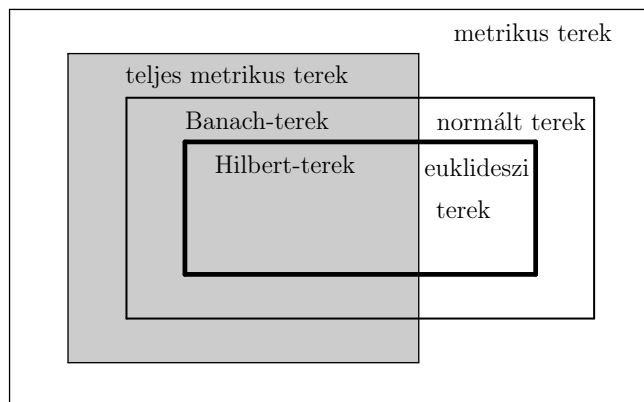
A **trigonometrikus polinomokkal** való közelítésre is hasonló állítás érvényes.





## 2. Térstruktúrák

A következő ábrán szemléltetjük a már megismert térstruktúrákat (bebizonyítható, hogy a jelzett tartalmazások mindegyike valódi tartalmazás abban az értelemben, hogy van olyan metrikus tér, amelyik metrikája nem származtatható normából, stb.):



Ebben a fejezetben összefoglaljuk és kiegészítjük a korábbi ismereteket.

### 2.1. Metrikus terek

#### 2.1.1. A metrikus tér fogalma. Példák

**Definíció.** Az  $(M, \varrho)$  rendezett párt **metrikus térnek** nevezzük, ha  $M$  tetszőleges nemüres halmaz,  $\varrho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  pedig olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- (i) minden  $x, y \in M$  esetén  $\varrho(x, y) \geq 0$ ;
- (ii)  $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$  ( $x, y \in M$ );
- (iii) bármely  $x, y \in M$  elemekre

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad (\text{szimmetriatulajdonság});$$

- (iv) tetszőleges  $x, y, z \in M$  elemekkel fennáll a

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

*háromszög-egyenlőtlenség.* A  $\varrho$  leképezést *távolság-függvénynek* (vagy **metrikának**) mondjuk; a  $\varrho(x, y)$  számot az  $x, y \in M$  elemek *távolságának* nevezzük.

Hangsúlyozni kell, hogy metrikus tér esetében nem kívánunk meg semmiféle egyéb struktúrát (műveletek, rendezés, stb.) a halmazon.

Egyszerűen bebizonyítható az, hogy tetszőleges  $(M, \varrho)$  metrikus térben igazak a *háromszög-egyenlőtlenségek* alábbi változatai is:

$$\varrho(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \varrho(x_k, x_{k+1}) \quad (x_1, \dots, x_n \in M, \quad n \geq 2);$$

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \varrho(x, y) \quad (x, y \in M).$$

Nyilvánvaló, hogy bármely  $A \subset M$  részhalmaz esetén  $\varrho$ -nak az  $A \times A$  halmazra vonatkozó leszűkítése metrika, és  $A$  ezzel a metrikával metrikus tér. Ezt az  $(A, \varrho|_{A \times A})$  metrikus teret az  $(M, \varrho)$  **alterének** nevezzük.

### Példák metrikus terekre.

- $M := \mathbb{R}$  és  $\varrho(x, y) := |x - y|$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Ez  $\mathbb{R}$  „szokásos” metrikája. A továbbiakban  $\mathbb{R}$ -et mindig ezel a metrikával látjuk el.

- **A diszkrét metrikus tér.** Adott  $M$  nemüres halmazon a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

képlet az úgynevezett *diszkrét metrikát* definiálja. Ekkor  $(M, \varrho)$ -t *diszkrét metrikus térnek* hívjuk.

- **Az  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  terek.** Legyen  $n$  pozitív egész szám,  $M := \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  és  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  esetén

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  metrikus tér.

- **A  $l^p$  terek.** Az előző példa „végtelen dimenziós” változataként tekintünk egy  $1 \leq p < +\infty$  mellett a sorozatok

$$l^p := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty \right\},$$

halmazát. A  $p = +\infty$ -re való kiterjesztésként a következőt kapjuk:

$$l^\infty := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty \right\}.$$

Legyen továbbá  $x = (x_n), y = (y_n) \in l^p$  esetén

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor  $(l^p, \varrho_p)$  is metrikus tér.

• **A  $(C[a, b], \varrho_p)$  függvényterek.** Valamely  $[a, b]$  korlátos és zárt intervallum (tehát  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) esetén jelöljük  $C[a, b]$ -vel az  $[a, b]$ -n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha  $1 \leq p \leq +\infty$ , akkor tekintsük az iménti példák „folytonos” változatait:

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \left( \int_a^b |f - g|^p \right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \quad (f, g \in C[a, b]).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy  $|f - g|^p$  bármely  $p \geq 1$  mellett folytonos függvény, ezért Riemann-integrálható. Továbbá Weierstrass tétele szerint az  $|f - g|$  folytonos függvénynek van maximuma, következésképpen a  $\varrho_p$  függvények „jól definiáltak”.)

Megmutatható, hogy  $(C[a, b], \varrho_p)$  is metrikus tér.

### 2.1.2. Izometrikus terek

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(M_1, \varrho_1)$  és az  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek **izometrikusak**, ha létezik közöttük távolságtartó bijekció, vagyis létezik olyan  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  bijektív leképezés, hogy

$$\varrho_1(x, y) = \varrho_2(\varphi(x), \varphi(y))$$

minden  $x, y \in M$  esetén teljesül.

Metrikus terek izometriája azt jelenti, hogy az elemeik metrikus tulajdonságai ugyanazok, csak az elemeik „természete” különbözik. Ez azonban a metrikus terek elmélete szempontjából teljesen mellékes. Ezért az egymással izometrikus tereket azonosaknak tekintjük.

### 2.1.3. Környezetek, korlátos halmazok, ekvivalens metrikák

**Definíció.** Legyen  $(M, \varrho)$  egy metrikus tér,  $a \in M$  és  $r \in \mathbb{R}^+$ . A

$$k_r(a) := k_r^\varrho(a) := \{ x \in M \mid \varrho(x, a) < r \}$$

halmazt az  $a \in M$  pont  $r$ -sugarú **gömb-környezetének** vagy  $r$ -sugarú  $a$  középpontú *nyílt gömbnek* nevezzük. A

$$\overline{k_r(a)} := \overline{k_r^\varrho(a)} := \{ x \in M \mid \varrho(x, a) \leq r \}$$

halmazt pedig  $r$ -sugarú  $a$  középpontú **zárt gömbnek** mondjuk.

**Példák.** Szemléltessük az  $(\mathbb{R}^2, \varrho_i)$  ( $i = 1, 2, +\infty$ ) metrikus terekben az origó 1 sugarú gömb-környezeteit.

**Definíció.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus tér  $A \subset M$  részhalmazát **korlátosnak** nevezzük, ha van olyan  $M$ -beli gömb, amely  $A$ -t tartalmazza, azaz

$$\exists a \in M \text{ és } \exists r > 0 \text{ valós szám, hogy } A \subset k_r^\varrho(a).$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával egyszerűen be lehet bizonyítani azt, hogy az  $(M, \varrho)$  metrikus tér  $A \subset M$  részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a tér minden elemének van olyan környezete, amely tartalmazza az  $A$  halmazt.

**Példák.**

- Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $1 \leq p \leq +\infty$ . A  $H \subset \mathbb{R}^n$  halmaz esetén jelölje  $H_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) a  $H$  halmaz  $k$ -adik koordinátáiból álló  $\mathbb{R}$ -beli halmazt. A  $H$  halmaz pontosan akkor korlátos az  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  metrikus térben, ha mindegyik  $H_k$  korlátos  $\mathbb{R}$ -ben.

- Legyen  $\Phi$  a  $C[0, 1]$  függvényhalmaznak az a részhalmaza, amelyik pontosan az alábbi módon értelmezett  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) függvényeket tartalmazza:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{ha } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ekkor

- a  $\Phi \subset C[0, 1]$  halmaz **nem korlátos** a  $(C[0, 1], \varrho_\infty)$  metrikus térben;
- a  $\Phi \subset C[0, 1]$  halmaz **korlátos** a  $(C[0, 1], \varrho_1)$  metrikus térben.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $M$  halmazon értelmezett  $\varrho_1$  és  $\varrho_2$  metrikák **ekvivalensek**, ha léteznek olyan  $c_1, c_2$  pozitív valós számok, amelyekkel minden  $x, y \in M$  elemre fennáll a

$$c_1\varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq c_2\varrho_1(x, y)$$

egyenlőtlenség.

**Példák.**

- Az  $\mathbb{R}^n$  halmazon ( $n \in \mathbb{N}$ ) bevezetett  $\varrho_p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) metrikák egymással *ekvivalensek*.
- Az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett diszkrét metrika *nem ekvivalens*  $\varrho_\infty$ -nel.
- A  $C[0, 1]$  halmazon értelmezett  $\varrho_\infty$  és  $\varrho_1$  metrikák *nem ekvivalensek*.

#### 2.1.4. Konvergens sorozatok metrikus terekben

**Definíció.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus tér egy  $(a_n)$  sorozatát akkor nevezzük **konvergensnek**, ha létezik olyan  $\alpha \in M$  elem, hogy ennek tetszőleges (sugarú) környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb csak véges sok tagja van, azaz

$$\exists \alpha \in M, \text{ hogy } \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén az } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin k_\varepsilon(\alpha)\} \text{ halmaz véges.}$$

Az ellenkező esetben (vagyis akkor, ha nincs ilyen  $\alpha$ ) azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat **divergens**.

A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy legfeljebb egy olyan  $\alpha \in M$  létezik, amelyre a fenti feltétel teljesül. Ezt a pontot az  $(a_n)$  sorozat **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{g}{=} \alpha, \quad \lim(a_n) \stackrel{g}{=} \alpha, \quad a_n \xrightarrow{g} \alpha \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a metrikára utaló jelet elhagyjuk.

**1. tétel.** Legyen  $(M, \varrho)$  metrikus tér és  $(a_n)$  tetszőleges  $M$ -beli sorozat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1° Az  $(a_n)$  sorozat határértéke az  $\alpha \in M$  elem.

2° Az  $\alpha \in M$  pont tetszőleges (sugarú) környezetéhez van olyan  $n_0 \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy a sorozat minden ennél nagyobb indexű tagja benne van a szóban forgó környezetben, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq n_0 \text{ esetén } a_n \in k_\varepsilon(\alpha).$$

- 3°  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , hogy  $\forall n \geq n_0$  esetén  $\varrho(a_n, \alpha) < \varepsilon$ .  
 4°  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varrho(a_n, \alpha) = 0$ .

Egyszerűen bebizonyítható az, hogy a  $\varrho$  **metrika folytonos** a következő értelemben: Ha az  $M$ -beli  $(a_n)$  és a  $(b_n)$  sorozatok konvergensek,  $(a_n)$ -nek  $\alpha$ ,  $(b_n)$ -nek pedig  $\beta$  a határértéke, akkor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varrho(a_n, b_n) = \varrho(\alpha, \beta).$$

A konvergens valós sorozatok bizonyos tulajdonságai tetszőleges metrikus térben is megmaradnak.

**2. tétel.** Legyen  $(a_n)$  az  $(M, \varrho)$  metrikus tér egy tetszőleges **konvergens** sorozata. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

- 1° Az  $(a_n)$  sorozat **korlátos**, azaz az értékkészlete korlátos  $M$ -beli halmaz.  
 2° Az  $(a_n)$  minden részsorozata is konvergens, és a határértéke megegyezik a kiindulási sorozat határértékével.  
 3° Ha az  $(a_n)$  sorozatnak van két különböző  $M$ -beli elemhez tartó részsorozata, akkor  $(a_n)$  divergens.

Ugyanazon a halmazon többféle módon is meg lehet adni metrikát, és a konvergencia ténye függ attól, hogy azt melyik metrikában tekintjük. Előfordulhat az, hogy egy adott halmazbeli sorozat az egyik metrikában konvergens, a másikban pedig divergens. Sokkal kedvezőbb a helyzet akkor, ha a két metrika **ekvivalens**. Ebben az esetben a konvergencia szempontjából a két metrika között nincs különbség: mind a két metrikában ugyanazok lesznek a konvergens (divergens) sorozatok. Ezt fejezi ki a következő állítás.

**3. tétel.** Legyen  $M$  nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy az  $M$ -en értelmezett  $\varrho_1$  és  $\varrho_2$  metrikák ekvivalensek. Ekkor tetszőleges  $M$ -beli  $(a_n)$  sorozatra

$$\lim (a_n) \stackrel{\varrho_1}{=} \alpha \iff \lim (a_n) \stackrel{\varrho_2}{=} \alpha.$$

$\mathbb{R}$ -ben a **Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel** azt állítja, hogy *minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata*. Ez metrikus térben általában nem igaz. Például az  $(\mathbb{N}, \varrho)$  diszkrét metrikus térben az  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata.

**4. tétel.** Az  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  metrikus terekben ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ) igaz a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

**Példa.**

• A  $(C[0, 1], \varrho_\infty)$  metrikus térben **nem igaz** a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel: van olyan korlátos  $(f_n)$  sorozat, aminek nincs konvergens részsorozata. (Ilyen például az

$$f_n(x) := \sin(2^n \pi x) \quad (x \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

függvénysorozat, ui.  $\varrho_\infty(f_n, f_m) \geq 1$ , ha  $n \neq m$ .)

**2.1.5. Teljes metrikus terek**

Emlékeztetünk a valós analízis egyik legfontosabb tételére, a **Cauchy-féle konvergenckritériumra**: az  $(a_n)$  valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha  $(a_n)$  Cauchy-sorozat, azaz

$$(a_n) \subset \mathbb{R} \text{ konvergens} \quad \iff \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ \forall m, n \geq n_0 \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{cases}$$

Az analízis alapvető fogalmának, a sorozat konvergenciájának a definíciójában szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli” dolog is. Nevezetesen: a sorozat határértéke. Ez alapján a konvergenciát csak akkor tudjuk eldönteni, ha ismerjük a sorozat határértékét. A Cauchy-féle konvergenckritérium azt állítja, hogy a konvergenciára megadható egy olyan *szükséges és elégséges* (tehát a konvergenciával ekvivalens) feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról.

Világos, hogy a Cauchy-sorozat fogalmát megadó tulajdonságot — tehát azt, hogy „a sorozat elég nagy indexű tagjai tetszőlegesen közel vannak egymáshoz” — metrikus térben is lehet értelmezni.

**Definíció.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus térbeli  $(a_n)$  sorozatot akkor nevezzük **Cauchy-sorozatnak**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall m, n \geq n_0 \text{ esetén } \varrho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Metrikus térben a konvergens és a Cauchy-sorozatok kapcsolatáról általában a következőt mondhatjuk.

**5. tétel.**

1° *Tetszőleges  $(M, \varrho)$  metrikus térben minden konvergens sorozat egyúttal Cauchy-sorozat is.*

2° *Az állítás megfordítása általában nem igaz: Van olyan  $(M, \varrho)$  metrikus tér, amelyikben van olyan Cauchy-sorozat, amelyik nem konvergens.*

A valós számok példája is mutatja, hogy bizonyos metrikus terekben a konvergencia ténye ekvivalens lehet a Cauchy-tulajdonsággal. Az ilyen metrikus teret fogjuk **teljes metrikus térnek** nevezni.

**Definíció.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus teret akkor nevezzük **teljes metrikus térnek**, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, vagyis a tér teljes, ha igaz benne a Cauchy-féle konvergenciakritérium, azaz

$$(a_n) \subset M \text{ konvergens} \iff (a_n) \subset M \text{ Cauchy-sorozat.}$$

**Példák.**

- A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján  $\mathbb{R}$  egy **teljes** metrikus tér.
- A racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmazát az  $\mathbb{R}$ -beli metrikával ellátva egy **nem teljes** metrikus teret kapunk. (Például minden  $\sqrt{2}$ -höz tartó racionális sorozat — ilyenek léteznek! — Cauchy-sorozat a  $\mathbb{Q}$  metrikus térben, és itt nem konvergens.)
- A diszkrét metrikus terek **teljesek**. Egyszerűen bebizonyítható ui. az, hogy ezekben a terekben egy sorozat pontosan akkor konvergens, illetve Cauchy-sorozat, ha a tagjai valamilyen indextől kezdve ugyanazt az értéket veszik fel.
- Minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén az  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  **teljes** metrikus tér.
- Minden  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén az  $(l^p, \varrho_p)$  is **teljes** metrikus tér.
- A  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus tér **teljes**.
- A  $(C[a, b], \varrho_p)$  metrikus terek  $(1 \leq p < +\infty)$  **nem teljesek**.

A teljes metrikus terek további vizsgálatához tekintsük ismét a jól megismert  $\mathbb{R}$  metrikus teret. Ott alapvető jelentőségű volt az a tény, hogy  $\mathbb{R}$  rendelkezik a **Cantor-tulajdonsággal**, vagyis azzal, hogy *minden egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumsorozatnak van közös pontja*. Azt is tudjuk már, hogy ez „majdnem ekvivalens” az  $\mathbb{R}$  teljességével. (Pontosabban:  $\mathbb{R}$ -ben az archimédeszi és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességgel.) Tetszőleges metrikus térben — a Cantor-tulajdonság kiegészítésével — a teljességet ekvivalens módon lehet jellemezni bizonyos geometriai tulajdonsággal. Az állítás pontos megfogalmazása előtt emlékeztetünk még arra, hogy az  $(M, \varrho)$  metrikus térbeli

$$\overline{k_r(a)} := \overline{k_r^{\varrho}(a)} := \{ x \in M \mid \varrho(x, a) \leq r \} \quad (a \in M, r > 0)$$

halmazt az  $a$  középpontú  $r$ -sugarú *zárt gömbnek* neveztük.

**6. tétel** (a Cantor-féle közösrész-tétel). *Egy metrikus tér akkor és csak akkor teljes, ha minden olyan zárt gömbökből álló  $k_{r_n}(a_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozatra, amelyre*



$$(i) \overline{k_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subset \overline{k_{r_n}(a_n)},$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0,$$

$a$  gömböknek egyetlen közös pontjuk van, azaz  $a$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k_{r_n}(a_n)}$$

egyelemű halmaz.

**Bizonyítás.**  $\Rightarrow$  Tegyük fel, hogy a metrikus tér teljes, és tekintsük zárt gömböknek egy mondott tulajdonságú sorozatát. Ebből a feltételből következik, hogy a középpontokra fennáll a

$$\varrho(a_n, a_m) \leq r_n \quad (m \geq n)$$

egyenlőtlenség, ahonnan látható, hogy a középpontok  $(a_n)$  sorozata Cauchy-sorozat. A metrikus tér teljes, ezért ez konvergens. Jelölje  $a$  a határértékét. A fenti egyenlőtlenségből

$$\varrho(a_n, a) \leq \varrho(a_n, a_m) + \varrho(a_m, a) \leq r_n + \varrho(a_m, a) \quad (m \geq n)$$

következik, ahonnan  $m \rightarrow +\infty$  határátmenettel

$$\varrho(a_n, a) \leq r_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az  $a$  pont mindegyik gömbnek eleme, tehát a közös részük nem üres. Indirekt módon kapjuk azt, hogy a gömböknek ez az egyetlen közös pontja van.

$\Leftarrow$  Most induljunk ki egy  $(a_n)$  Cauchy-sorozatból, és mutassuk meg, hogy az konvergens. Konstruálni fogunk zárt gömböknek egy egymásba skatulyázott sorozatát.

Az  $(a_n)$  sorozat Cauchy-tulajdonságából következik, hogy

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\text{-hez } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq n_1 \text{ esetén } \varrho(a_n, a_{n_1}) < \frac{1}{2}.$$

Jelölje  $F_1$  az  $a_{n_1}$  középpontú 1-sugarú zárt gömböt:

$$F_1 := \overline{k_1(a_{n_1})}.$$

Ismét a Cauchy-tulajdonságra hivatkozva kapjuk, hogy

$$\varepsilon = \frac{1}{2^2}\text{-hez } \exists n_2 > n_1, \text{ index, hogy } \forall n \geq n_2 \text{ esetén } \varrho(a_n, a_{n_2}) < \frac{1}{2^2}.$$

Legyen

$$F_2 := \overline{k_{\frac{1}{2}}(a_{n_2})}.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$F_2 \subset F_1.$$

Az eljárást folytatva tegyük fel, hogy az  $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$  pontokat ( $n_1 < \dots < n_k$ ) már kiválasztottuk  $(a_n)$ -ből. Vegyünk ezután egy olyan  $a_{n_{k+1}}$  tagot, amelyre

$$n_{k+1} > n_k \text{ és } \varrho(a_n, a_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

teljesül minden  $n \geq n_{k+1}$  index esetén, és legyen

$$F_{k+1} := \overline{k_{\frac{1}{2^k}}(a_{n_{k+1}})}.$$

A konstrukció miatt

$$F_{k+1} \subset F_k.$$

Így kapunk egymásba skatulyázott zárt gömböknek egy olyan  $(F_k)$  sorozatát, amelyben  $F_k$  sugara  $\frac{1}{2^{k-1}}$ . A tétel feltétele szerint ezeknek a gömböknek egy közös pontja van. Jelöljük ezt  $a$ -val. Világos, hogy  $\lim(a_{n_k}) = a$ .

Ez a pont azonban nem csak a részsorozatnak, hanem az egész sorozatnak is határértéke. Ez nyilvánvalóan következik a

$$\varrho(a, a_n) \leq \varrho(a, a_{n_k}) + \varrho(a_{n_k}, a_n)$$

egyenlőtlenségből, figyelembe véve, hogy  $(a_n)$  egy Cauchy-sorozat. Ez viszont azt jelenti, hogy az  $(a_n)$  sorozat valóban konvergens. ■

### 2.1.6. Metrikus tér teljessé tétele

### 2.1.7. Nyílt, zárt és kompakt halmazok metrikus terekben

Ebben a szakaszban metrikus terek legfontosabb halmaztípusairól, a *nyílt*, a *zárt* és a *kompakt* halmazokról, valamint halmaz *belsejéről* és *lezárásáról* lesz szó.

#### • Nyílt halmazok. Halmaz belseje

**Definíció.** Legyen  $(M, \varrho)$  egy metrikus tér és  $A$  az  $M$  egy *nemüres* részhalmaza. Az  $a \in A$  pontot az  $A$  **halmaz belső pontjának** nevezzük, ha  $a$ -nak van olyan gömbkörnyezete, amely benne van  $A$ -ban, azaz van olyan  $r > 0$  szám, hogy  $k_r(a) \subset A$ .

Az  $A$  halmaz belső pontjainak a halmazát  $A$  **belsejének** nevezzük, és az int  $A$  szimbólummal jelöljük.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $G \subset M$  halmaz **nyílt az  $(M, \rho)$  metrikus térben**, ha  $G$  minden pontja belső pont. A nyílt halmazok családját a  $\mathcal{G}_M$  szimbólummal fogjuk jelölni.

**Példák.**

- Az  $\mathbb{R}$ -beli nyílt intervallumok a fenti értelemben nyílt halmazok.
- A félig zárt  $[a, b)$  és  $(a, b]$  intervallumok, ahol  $-\infty < a < b < +\infty$  nem nyíltak; int  $[a, b) = (a, b)$  és int  $(a, b] = (a, b)$ .
- Az  $\mathbb{R}$  metrikus térben a racionális pontok  $\mathbb{Q}$  halmaza nem nyílt; int  $\mathbb{Q} = \emptyset$ .
- A diszkrét metrikus tér minden részhalmaza nyílt.
- Tetszőleges metrikus térben az  $\emptyset$  és a  $M$  halmazok nyíltak.
- Tetszőleges  $(M, \rho)$  metrikus térben a **gömb-környezetek**, vagyis a

$$k_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\} \quad (a \in M, r > 0)$$

halmazok a fenti értelemben nyílt halmazok.

- Ha a  $(C[a, b], \rho_\infty)$  metrikus térben

$$A := \{f \in C[a, b] \mid |f(t)| \leq K < +\infty, \forall t \in [a, b]\},$$

akkor

$$\text{int } A = \{f \in C[a, b] \mid |f(t)| < K < +\infty, \forall t \in [a, b]\}.$$

Íme a nyílt halmazok alaptulajdonságai:

**7. tétel.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér nyílt halmazainak a  $\mathcal{G}_M$  családjá a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1° az  $A \subset M$  halmaz belseje egyenlő  $A$  legbővebb nyílt részhalmazával, azaz

$$\text{int } A = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \in \mathcal{G}_M}} G;$$

2° a  $G \subset M$  halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha  $G = \text{int } G$ ;

3° véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz;

4° *tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése is nyílt halmaz;*

5° *bármely két különböző  $M$ -beli pont szétválasztható nyílt halmazokkal, azaz ha  $a$  és  $b$  az  $M$  halmaz két tetszőleges különböző pontja, akkor vannak olyan diszjunkt  $U$  és  $V$  nyílt  $M$ -beli halmazok, hogy  $a \in U$  és  $b \in V$ .*

• **Zárt halmazok. Halmaz lezárása**

**Definíció.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér  $F \subset M$  részhalmaza **zárt**, ha az  $F$  halmaznak  $M$ -re vonatkozó komplementuma – azaz az  $M \setminus F$  halmaz – nyílt. A zárt halmazok családját az  $\mathcal{F}_M$  szimbólummal fogjuk jelölni.

**Példák.**

- Az  $\mathbb{R}$ -beli zárt intervallumok a fenti értelemben zárt halmazok.
- A félig zárt  $[a, b)$  és  $(a, b]$  intervallumok, ahol  $-\infty < a < b < +\infty$  se nem nyíltak, se nem zártak.
- Az  $\mathbb{R}$  metrikus térben a racionális pontok halmaza nem zárt (és nem is nyílt).
- A diszkrét metrikus tér minden részhalmaza zárt (és nyílt is).
- Tetszőleges metrikus térben az  $\emptyset$  és a  $M$  halmazok zártak is és nyíltak is.
- Metrikus térben minden véges sok pontból álló halmaz zárt.
- Tetszőleges  $(M, \rho)$  metrikus térben a zárt gömbök, vagyis a

$$\overline{k_r(a)} := \{x \in M \mid \rho(x, a) \leq r\} \quad (a \in M, r > 0)$$

halmazok a fenti értelemben zárt halmazok. Speciálisan a  $(C[a, b], \rho_\infty)$  metrikus térben minden  $K > 0$  esetén az

$$A := \{f \in C[a, b] \mid |f(t)| \leq K, t \in [a, b]\}$$

halmaz zárt.

A zárt halmazok alaptulajdonságai:

**8. tétel.** *Az  $(M, \rho)$  metrikus tér zárt halmazainak a családja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1° *véges sok zárt halmaz egyesítése is zárt halmaz;*

2° *tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete is zárt halmaz.*

Zárt halmazok további jellemzéséhez bevezetjük a következő fontos fogalmakat:

**Definíció.**

1° Az  $(M, \rho)$  metrikus tér egy  $a \in M$  pontját az  $A \subset M$  részhalmaz egy **torlódási pontjának** nevezzük, ha az  $a$  pont minden gömb-környezete tartalmaz  $a$ -tól különböző pontot az  $A$  halmazból. Az  $A$  halmaz **torlódási pontjainak a halmazát** az  $A'$  szimbólummal jelöljük.

2° Az  $(M, \rho)$  metrikus tér  $A$  részhalmazának a **lezárásán** az

$$\bar{A} := A \cup A'$$

halmazt értjük.

Hangsúlyozzuk, hogy egy halmaz torlódási pontja nem feltétlenül tartozik hozzá a halmazhoz. Tekintsük például az  $\mathbb{R}$  metrikus térben az  $A := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  halmazt, amelyre  $\bar{A} = [0, 1]$ .

**Példák.**

- $\mathbb{R}$ -ben  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$  és  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

- Tetszőleges  $(M, \rho)$  metrikus tér bármelyik  $k_r(a)$  gömb-környezetének a fenti értelemben való lezárása a neki megfelelő **zárt gömb**. (A zárt gömbökre bevezetett korábbi jelölésünk tehát összhangban van a lezárásra imént bevezetett jelöléssel.)

**9. tétel.** Egy  $(M, \rho)$  metrikus tér tetszőleges  $A \subset M$  részhalmazára a következő állítások teljesülnek:

1°  $a \in \bar{A} \iff \exists (x_n) \subset A$  sorozat, hogy  $\lim(x_n) = a$ ;

2°  $a \notin \bar{A} \iff \exists \varepsilon > 0$ , hogy  $k_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ .

**10. tétel.** Az  $(M, \rho)$  metrikus térbeli  $A \subset M$  halmaz lezárása az  $A$ -t tartalmazó legszűkebb zárt halmaz, azaz

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}_M}} F.$$

**11. tétel.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér tetszőleges  $A, B$  részhalmazai esetén érvényesek a következők:

1°  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ,

2°  $A \subset \bar{A}$ ,

3° ha  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ ,

$$4^\circ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$5^\circ \overline{(\overline{A})} = A,$$

6° az  $A \subset M$  halmaz pontosan akkor zárt, ha  $A = \overline{A}$ ,

7° halmaz lezárásának a komplementere egyenlő a komplementer belsejével:

$$M \setminus \overline{A} = \text{int}(M \setminus A) \quad (A \subset M).$$

**12. tétel** (zárt halmazok jellemzése). Az  $(M, \rho)$  metrikus tér egy  $F \subset M$  részhalmazára a következő állítások ekvivalensek:

1° az  $F$  halmaz zárt az  $(M, \rho)$  metrikus térben,

2° az  $F$  halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, azaz  $F' \subset F$ ;

3° minden  $F$ -beli konvergens sorozat határértéke is benne van  $F$ -ben.

### • Kompakt halmazok

**Definíció.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér  $K$  részhalmazát **kompaktnak** nevezzük, ha minden  $K$ -beli sorozatnak van  $K$ -beli elemhez konvergáló részsorozata.

**Definíció.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér  $A$  részhalmazának **nyílt lefedésén**  $M$  nyílt részhalmazainak olyan  $\{G_\alpha\}$  összességét értjük, amelyre  $A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ .

**13. tétel.** Legyen  $(M, \rho)$  metrikus tér. A következő állítások ekvivalensek:

1° a  $K \subset M$  halmaz kompakt;

2°  $K$  minden nyílt lefedése tartalmaz véges lefedést

(ez a **Borel-féle lefedési tétel**);

3°  $K$  minden végtelen részhalmazának van  $K$ -beli torlódási pontja.

**14. tétel.** Legyen  $K$  az  $(M, \rho)$  metrikus tér egy kompakt részhalmaza. Ekkor

1° a  $K \subset M$  halmaz zárt az  $(M, \rho)$  metrikus térben;

2° a  $K \subset M$  halmaz korlátos az  $(M, \rho)$  metrikus térben.

3° Van olyan metrikus tér, aminek van zárt és korlátos, de nem kompakt részhalmaza. (Például az  $(l^2, \rho_2)$  tér  $K$  egységgömbfelülete egy ilyen halmaz.)

**15. tétel.**  $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ -ben egy halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

### 2.1.8. Metrikus tér sűrű részhalmazai. Szeparábilis terek. A Baire-féle kategóriatétel

Tekintsük a valós számok szokásos metrikus terében a racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmazát. Abból a jól ismert tényből, hogy minden nemelfajuló intervallum tartalmaz racionális számot következik, hogy  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ , vagyis  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . A szemléletre hivatkozva azt is mondtuk, hogy a racionális számok **sűrűn** vannak  $\mathbb{R}$ -ben. Könnyű megmondani, hogy ez azt is jelenti, hogy minden  $a \in \mathbb{R}$  számhoz van olyan racionális számokból álló  $(q_n) \subset \mathbb{Q}$  sorozat, amelyik  $a$ -hoz konvergál. A sűrűségi tulajdonság tehát bizonyos *approximációs tulajdonsággal* hozható kapcsolatba.

További motivációként gondoljunk Weierstrass első approximációs tételére: *minden  $f \in C[a, b]$  függvényhez van olyan polinomsorozat, amelyik egyenletesen (vagyis a  $\varrho_\infty$  metrikában) tart  $f$ -hez.* A szemléletre való hivatkozással itt is mondhatjuk azt, hogy az algebrai polinomok **sűrűn** vannak a  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben. Ezt a tényt a halmaz lezárásának a fogalmával kifejezhetjük úgy is (l. a 9. tételt), hogy az algebrai polinomok  $\mathcal{P}$  halmazának lezárása a  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben az egész  $C[a, b]$  tér, azaz  $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$ .

A fentiek általánosításaként vezessük be a következő fogalmakat.

#### Definíció.

1° Azt mondjuk, hogy az  $(M, \varrho)$  metrikus tér  $A$  részhalmaza **sűrű** az  $M_0 \subset M$  halmazban, ha  $M_0 \subset \overline{A}$ .

2° Az  $A \subset M$  halmaz **mindenütt sűrű** az  $(M, \varrho)$  metrikus térben, ha  $\overline{A} = M$ .

3° Az  $A \subset M$  halmaz **sehol sem sűrű** az  $(M, \varrho)$  metrikus térben, ha egyetlen gömbben sem sűrű.

#### Példák.

- A racionális számok halmaza mindenütt sűrű  $\mathbb{R}$ -ben.
- $\mathbb{R}$ -ben minden véges halmaz sehol sem sűrű.
- Az  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  sehol sem sűrű  $\mathbb{R}$ -ben.
- Az  $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$  metrikus térben minden egyenes sehol sem sűrű halmaz.
- A  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben az  $[a, b]$  intervallumon definiált valós értékű, folytonos „töröttvonal-függvények”  $A$  halmaza egy mindenütt sűrű halmaz. ( $\varphi \in A$  akkor és csak akkor, ha létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$  és  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) úgy, hogy  $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$  és  $\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$  lineáris függvény.)

A 9. tétel felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók az alábbi állítások.

**16. tétel.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus tér tetszőleges  $A$  és  $M_0$  részhalmazaira a következő állítások érvényesek:

1° Az  $A$  halmaz akkor és csak akkor **sűrű** az  $M_0 \subset M$  halmazban, ha  $M_0$  minden  $x$  eleméhez létezik olyan  $A$ -beli  $(x_n)$  sorozat, amelyre  $\lim(x_n) = x$ , azaz  $M_0$  minden pontja „tetszőleges pontossággal” megközelíthető  $A$ -beli pontokkal.

2° Az  $A \subset M$  halmaz pontosan akkor **nem sűrű** az  $M_0 \subset M$  halmazban, ha

$$\exists x \in M_0 \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \text{hogy} \quad k_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset.$$

**17. tétel.** Az  $(M, \varrho)$  metrikus tér tetszőleges  $A$  részhalmaza esetén a következő állítások ekvivalensek:

1° Az  $A$  halmaz sehol sem sűrű.

2° Az  $A$  halmaz lezárása nem tartalmaz gömböt, azaz az  $\overline{A}$  halmaznak nincs belső pontja, ami azt jelenti, hogy  $\text{int } \overline{A} = \emptyset$ .

3° Minden  $x \in M$  pont minden  $k_\varepsilon(x)$  gömb-környezete tartalmaz olyan  $k_{\varepsilon_1}(x_1)$  gömböt, amelyben nincs  $A$ -beli elem.

4°  $M \setminus \overline{A}$  mindenütt sűrű  $M$ -ben.

Különösen fontosak azok a metrikus terek, amelyekben van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz. Az ilyen terekben ui. ki lehet jelölni egy olyan, megszámlálható halmazt — ennek elemeit lehet kezelni — amelynek elemeivel a tér minden eleme „tetszőleges pontossággal” megközelíthető.

**Definíció.** Egy metrikus teret **szeparábilisnek** nevezünk, ha van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza.

**Példák.**

- $\mathbb{R}$  szeparábilis,  $\mathbb{Q}$  egy megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaza.
- Az  $(M, \varrho)$  diszkrét metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha  $M$  megszámlálható.
- Az  $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ) terek szeparábilisek, ezekben a racionális koordinátájú pontok halmaza egy megszámlálható mindenütt sűrű halmaz.
- Az  $(l^p, \varrho_p)$  terek  $1 \leq p < +\infty$  esetén szeparábilisek, az  $(l^\infty, \varrho_\infty)$  tér nem szeparábilis.
- Weierstrass első approximációs tételét felhasználva igazolható, hogy a racionális együtthatós algebrai polinomok halmaza — ami megszámlálható — sűrű a  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben, ezért ez is szeparábilis tér.



**Teljes metrikus terek** sűrűséggel kapcsolatos fontos tulajdonságát állítja a **Baire-lemma**, amelyet különböző formákban fogalmazunk meg.

**18. tétel** (a Baire-lemma). *Legyen  $(M, \rho)$  teljes metrikus tér.*

*1° Megszámlálható sok  $M$ -beli, mindenütt sűrű nyílt halmaz metszete is mindenütt sűrű  $M$ -ben, azaz ha  $(G_n)$  nyílt halmazoknak egy olyan  $M$ -beli sorozata, hogy*

$$\overline{G_n} = M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

*akkor*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = M.$$

*2° Megszámlálható sok  $M$ -beli, sehol sem sűrű zárt halmaz egyesítése nem tartalmaz gömb-környezetet, azaz ha  $(F_n) \subset M$  zárt halmazoknak egy olyan sorozata, amelyre*

$$\text{int } F_n = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}),$$

*akkor*

$$\text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset.$$

*3° Ha  $M$  előállítható megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként, akkor azok közül legalább az egyik tartalmaz nemüres nyílt gömb-környezetet, azaz ha  $(F_n)$  zárt halmazoknak egy olyan sorozata  $M$ -ben, amelyre*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = M,$$

*akkor valamelyik  $F_n$  halmaz belseje nemüres, azaz*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy } \text{int } F_{n_0} \neq \emptyset.$$

**Megjegyzés.** A teljesség feltétele lényeges: tekintsük például  $M = \mathbb{Q}$ -ban (a szokásos metrikával) a  $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$  nyílt halmazokat vagy az  $\{r\}$  zárt halmazokat, ahol  $r$  végigfutja a racionális számokat.

**Bizonyítás.** *1°* Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges  $k_{r_0}(x_0) \subset M$  gömb-környezetben van  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$  halmazbeli pont.

$G_1$  mindenütt sűrű  $M$ -ben, ezért található egy  $x_1 \in G_1 \cap k_{r_0}(x_0)$  pont. Ez utóbbi halmaz nyílt, ezért van olyan  $0 < r_1 < 1$  szám, hogy

$$\overline{k_{r_1}(x_1)} \subset G_1 \cap k_{r_0}(x_0).$$

De  $G_2$  is mindenütt sűrű  $M$ -ben, ezért van egy  $x_2 \in G_2 \cap k_{r_1}(x_1)$  pont is. Minthogy az utóbbi halmaz nyílt, ezért van olyan  $0 < r_2 < 1/2$  szám, hogy

$$\overline{k_{r_2}(x_2)} \subset G_2 \cap k_{r_1}(x_1).$$

Rekurzióval folytatva a konstrukciót, zárt gömböknek olyan monoton fogyó sorozatát kapjuk, hogy

$$\overline{k_{r_n}(x_n)} \subset G_{n+1}$$

minden  $n$ -re, és  $\lim(r_n) = 0$ . A Cantor-féle közösrész-tétel szerint e gömböknek van egy  $x$  közös pontja. A konstrukció miatt  $x \in \cap G_n$  és  $x \in k_{r_0}(x_0)$ .

2<sup>o</sup> Legyen  $G_n := M \setminus F_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Mivel  $F_n$ -ek zártak, ezért mindegyik  $G_n$  nyílt halmaz. Az egyszerűen bizonyítható

$$M \setminus \overline{H} = \text{int}(M \setminus H) \quad (H \subset M) \quad (2.1)$$

összefüggés alapján

$$M \setminus \overline{G_n} = \text{int}(M \setminus G_n) = \text{int} F_n = \emptyset,$$

ezért  $\overline{G_n} = M$ , tehát (l. 1<sup>o</sup>-et)

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} = M.$$

Ezt az egyenlőséget, (2.1)-et, valamint a de Morgan-azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\emptyset = M \setminus \left( \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} \right) = \text{int} \left( M \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \right) = \text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right),$$

és ez a 2<sup>o</sup> állítás bizonyítását jelenti.

Végül a 3<sup>o</sup> állítás 2<sup>o</sup> felhasználásával indirekt módon igazolható. ■

A most igazolt tételt — bevezetve az első és a második kategóriájú halmaz fogalmát — szokás más formában is megfogalmazni.

**Definíció.** Az  $(M, \rho)$  metrikus tér  $A$  részhalmazát **első kategóriájúnak** nevezzük, ha  $A$  előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként. Ha  $A$  nem első kategóriájú, akkor **második kategóriájúnak** mondjuk.

**19. tétel** (a Baire-féle kategóriatétel). *Minden teljes metrikus tér második kategóriájú, azaz nem állítható elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként.*

**Bizonyítás.** Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az  $M$  teljes metrikus tér első kategóriájú, vagyis előállítható

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$$

alakban, ahol a  $H_n$  halmazok mindegyike sehol sem sűrű, azaz

$$\text{int } \overline{H_n} = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor a Baire-lemma 2<sup>o</sup> állítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$\text{int} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \right) = \emptyset = \text{int } M,$$

azaz az  $M$  tér belseje az üres halmaz. Ezzel az ellentmondással az állítást igazoltuk.

■

**Példák.**

- Mivel  $\mathbb{R}$ -ben minden véges halmaz sehol sem sűrű, ezért minden megszámlálható halmaz, így  $\mathbb{Q}$  is **első kategóriájú**, noha  $\mathbb{Q}$  mindenütt sűrű  $\mathbb{R}$ -ben.

- $\mathbb{R}^2$ -ben a racionális koordinátájú pontok halmaza **első kategóriájú**.

- $\mathbb{R}$ -ben az irracionális pontok  $\mathbb{Q}^*$  halmaza **második kategóriájú**. Valóban, a Baire-féle kategóriatételből következik, hogy teljes metrikus térben első kategóriájú halmaz kiegészítő halmaza második kategóriájú;  $\mathbb{Q}$  meg első kategóriájú.

### 2.1.9. Metrikus terek közötti függvények folytonossága

**Definíció.** Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az  $f \in M_1 \rightarrow M_2$  függvény **folytonos az  $a \in \mathcal{D}_f$  pontban** (jelölésben  $f \in C\{a\}$ ), ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f, \varrho_1(x, a) < \delta \text{ esetén } \varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$f$  **folytonos az  $A \subset \mathcal{D}_f$  halmazon**, ha  $f$  folytonos az  $A$  halmaz minden pontjában.

**20. tétel** (az átviteli elv). *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek. Az  $f \in M_1 \rightarrow M_2$  függvény akkor és csak akkor folytonos az  $a \in \mathcal{D}_f$  pontban, ha minden  $\mathcal{D}_f$ -beli,  $a$ -hoz tartó  $(x_n)$  sorozat esetén a függvényértékek  $(f(x_n))$  sorozata az  $M_2$  térben az  $f(a)$  ponthoz konvergál.*

**21. tétel.** *Tegyük fel, hogy az  $M_i$  halmazon megadott  $\varrho_i$  és  $\tilde{\varrho}_i$  ( $i = 1, 2$ ) metrikák ekvivalensek. Ekkor az*

$$f \in (M_1, \varrho_1) \rightarrow (M_2, \varrho_2)$$

*függvény akkor és csak akkor folytonos az  $a \in \mathcal{D}_f$  pontban, ha*

$$f \in (M_1, \tilde{\varrho}_1) \rightarrow (M_2, \tilde{\varrho}_2)$$

*folytonos  $a$ -ban.*

**22. tétel** (az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy  $(M_i, \varrho_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) metrikus terek és a  $g \in M_1 \rightarrow M_2$  függvény folytonos az  $a \in \mathcal{D}_g$  pontban, az  $f \in M_2 \rightarrow M_3$  függvény pedig folytonos a  $g(a) \in \mathcal{D}_f$  pontban. Ekkor az  $f \circ g$  összetett függvény folytonos  $a$ -ban.*

**23. tétel** (a folytonosság jellemzése nyílt halmazokkal). *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek. Az egész  $M_1$  téren értelmezett  $f : M_1 \rightarrow M_2$  függvény akkor és csak akkor folytonos  $M_1$ -en, ha minden  $M_2$ -beli nyílt  $B$  halmaz  $f$  által létesített ősképe  $M_1$ -beli nyílt halmaz.*

**24. tétel.** *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek és  $A \subset M_1$ . Az  $f : A \rightarrow M_2$  függvény pontosan akkor folytonos az  $A$  halmazon, ha*

$$\forall B \subset M_2 \text{ nyílt halmazhoz } \exists G \subset M_1 \text{ nyílt halmaz, hogy } f^{-1}[B] = A \cap G.$$

**25. tétel.** *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek, és tegyük fel, hogy*

- $A \subset M_1$  kompakt halmaz,
- az  $f : A \rightarrow M_2$  függvény folytonos  $A$ -n.

*Ekkor*

**1°**  $\mathcal{R}_f \subset M_2$  kompakt halmaz;

**2°** Ha  $M_2 = \mathbb{R}$ , akkor  $f$ -nek van maximuma és minimuma (**Weiersrass**

**tétele**);

**3°** ha  $f$  injektív, akkor  $f^{-1}$  is folytonos.

**Definíció.** *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az  $f \in M_1 \rightarrow M_2$  függvény **egyenletesen folytonos** az  $A \subset \mathcal{D}_f$  halmazon, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall x, y \in A, \varrho_1(x, y) < \delta \text{ esetén } \varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**26. tétel.** *Legyenek  $(M_1, \varrho_1)$  és  $(M_2, \varrho_2)$  metrikus terek, és tegyük fel, hogy  $f \in M_1 \rightarrow M_2$ .*

1° Ha  $f$  egyenletesen folytonos az  $A \subset \mathcal{D}_f$  halmazon, akkor folytonos is  $A$ -n.

2° Ha  $A \subset \mathcal{D}_f$  kompakt és  $f$  folytonos  $A$ -n, akkor  $f$  egyenletesen is folytonos az  $A$  halmazon. (**Heine-tétel**).

**27. tétel** (a Banach-féle fixpont-tétel). *Tegyük fel, hogy*

- $(M, \varrho)$  teljes metrikus tér;
- az  $f : M \rightarrow M$  leképezés egy **kontrakció**, azaz létezik olyan  $\alpha \in [0, 1)$

szám, hogy

$$\varrho(f(x), f(y)) \leq \alpha \varrho(x, y) \quad (\forall x, y \in M).$$

Ekkor

1° egyértelműen létezik olyan  $x^* \in M$ , hogy  $f(x^*) = x^*$  ( $x^*$ -ot az  $f$  **fixpontjának** nevezzük).

2° az

$$\begin{aligned} x_0 &\in M \\ x_{n+1} &= f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

iterációs sorozat konvergens és  $x^*$  a határértéke.

3° A konvergenciára a

$$\varrho(x^*, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \varrho(x_0, x_1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

hibabecslés érvényes.

## 2.2. Lineáris terek (vektorterek)

A már megismert fontos metrikus terekben nem csak pontok **távolságát**, hanem az elemek között különböző **műveleteket** is lehet értelmezni. Fordítsuk figyelmünket most csak a két legegyszerűbb műveletre: az összeadásra és a számmal való szorzásra. A tekintett fontos példák közös tulajdonságait keresve fogalmazhatunk úgy is, hogy a szóban forgó halmazok nem csak „metrikus”, hanem „lineáris térstruktúrával” is el vannak látva.

Feltételezzük a **lineáris terekkel** kapcsolatos alapvető fogalmak és eredmények ismeretét. A továbbiakban csak a  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$  vagy a  $\mathbb{K} := \mathbb{C}$  számtest feletti lineáris terekről lesz szó, és röviden egy  $X$  lineáris térről fogunk majd beszélni. A tér nullaelemét a  $\theta$  szimbólummal fogjuk jelölni.

Az  $X_1$  és az  $X_2$  lineáris tér **izomorf**, ha elemeik között létezik művelettartó bijekció. Az izomorf lineáris tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekinthetjük.

Az  $X$  lineáris tér tetszőleges  $M$  részhalmaza esetén az  $[M]$  szimbólummal fogjuk jelölni az  $M$  halmaz **lineáris burkát**, vagyis az  $M$ -et tartalmazó legszűkebb (lineáris) alteret. Ez az altér, amelyet a  $M$  által generált altérnek is szokás nevezni, meg-egyezik az  $M$  elemeiből képzett összes (véges) lineáris kombinációk halmazával, azaz

$$[M] = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N} \}.$$

Egy  $X$ -beli tetszőleges  $M$  halmazt **lineárisan függetlennek** nevezünk akkor, ha bármelyik véges sok  $M$ -beli vektor lineárisan független.

Az  $X$  lineáris tér **véges dimenziós**, ha van olyan  $n$  természetes szám és van olyan  $n$  elemet tartalmazó lineárisan független  $M$  részhalmaza, amelyre  $[M] = X$ . Ekkor azt mondjuk, hogy  $X$  egy  $n$ -dimenziós lineáris tér (jelölésben  $\dim X = n$ ). Az  $M$ -beli vektorrendszert ilyenkor az  $X$  tér egy **bázisának** hívjuk, és azt is mondjuk, hogy az  $M$  halmaz vektorai kifeszítik az  $X$  teret. Az  $X$  lineáris tér **végtelen dimenziós**, ha nem véges dimenziójú.

A lineáris algebraiban megismertük a *véges dimenziós* terek tulajdonságait. Ezek közül megemlítjük azt, hogy bármelyik két  $n$ -dimenziós lineáris tér izomorf egymással. Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy lényegében  $\mathbb{R}^n$  az egyetlen  $n$ -dimenziós lineáris tér. Az analízis szempontjából alapvető fontosságúak a *végtelen dimenziós* lineáris terek. Érdeemes meggondolni, hogy a  $C[a, b]$  és az  $l^p$  terek mindegyike ilyen.

Véges dimenziós terekben láttuk a *bázis* fogalmának a jelentőségét. Végtelen dimenziós esetben is bevezethetjük ezt a fogalmat.

**Definíció.** Az  $X$  lineáris tér egy  $H \subset X$  részhalmazát **Hamel-bázisának** nevezzük, ha lineárisan független vektorokból áll, és a halmaz lineáris burka az egész  $X$  tér, azaz  $[H] = X$ .

**1. tétel.** Minden lineáris térben van Hamel-bázis, és bármely két ilyen bázis ugyanolyan számosságú. Ezt a közös számosságot a tér **algebrai dimenziójának** nevezzük.

**2. tétel.** Az  $X$  lineáris tér lineárisan független  $H$  részhalmaza a térnek akkor és csak akkor Hamel-bázisa, ha minden  $x$  vektor egyértelműen előállítható **véges sok**  $H$ -beli vektor lineáris kombinációjával.

### 2.3. Normált terek és Banach-terek

Az előző pontban már volt arról szó, hogy a megismert metrikus tereink nem csak „metrikus”, hanem „lineáris térstruktúrával” is el vannak látva. Megtehetnénk a

következőt: tekintünk egy lineáris teret, és feltételezzük, hogy azon a téren az elemek között valamilyen távolságfogalmat is értelmeztünk. Általános szempontból ezután vizsgálhatnánk az így adódó — mondjuk — „lineáris metrikus térnek” elnevezhető struktúra tulajdonságait. Egy lineáris téren nem célszerű akármilyen metrikát bevezetni, hanem csak olyat, amelyre teljesülnek a műveletek és a metrika kapcsolatára vonatkozó bizonyos természetes elvárások. Itt csak azt emeljük ki, hogy *egy* ilyen fontos elvárás az, hogy a műveletek legyenek **folytonosak** az adott metrikára nézve.

E követelés megfogalmazása lényegesen egyszerűbb, ha a lineáris téren nem közvetlenül a metrikát, hanem az ún. **normát** értelmezzük. A *norma* az  $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok hosszának (abszolút értékének) absztrakciója. Így módon jutunk el a **lineáris normált tér** (a továbbiakban röviden **normált tér**) fogalmához.

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  rendezett párt **normált térnek** nevezzük, ha

1°  $X$  egy lineáris tér a  $\mathbb{K}$  számtest felett;

2° a  $\|\cdot\|$  pedig egy olyan  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelyik tetszőleges  $x, y, z \in X$  elemre és  $\lambda \in \mathbb{K}$  számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|x\| = 0 \iff x = \theta$  ( $\theta$  az  $X$  lineáris tér nulleleme),
- (iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Az utolsó tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük. Az  $\|\cdot\|$  leképezést **normának**, az  $\|x\|$  számot pedig az  $x$  elem *normájának* mondjuk.

Ha  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , akkor **valós**, ha  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , akkor pedig **komplex** normált térről beszélünk. Ha a norma a szöveggörnyezetből nyilvánvaló, akkor egyszerűen  $X$ -et írunk  $(X, \|\cdot\|)$  helyett.  $X$  elemeit *vektoroknak* is nevezzük.

### Példák normált terekre.

- $X = \mathbb{R}$ ,  $\|x\| := |x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Ez  $\mathbb{R}$  szokásos normája. A továbbiakban  $\mathbb{R}$ -et mindig ezzel a normával látjuk el.

- **Az  $\mathbb{R}^n$  terek.** Egy pozitív egész  $n$  szám esetén tekintsük a szokásos műveletekkel ellátott  $X := \mathbb{R}^n$  lineáris teret. Legyen  $1 \leq p \leq +\infty$  és  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  esetén

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  normált tér. Ezt az  $\mathbb{R}_p^n$  szimbólummal is jelölni fogjuk.

• **Mátrixnormák.** Az  $m \times n$ -es valós mátrixok  $\mathbb{R}^{m \times n}$  lineáris terében az alábbi kifejezések mindegyike normát értelmez:

$$\|A\| := \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{euklideszi norma}),$$

$$\|A\| := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{oszlopösszegnorma}),$$

$$\|A\| := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{sorösszegnorma}),$$

ahol  $A := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

•  **$l^p$  terek.** Tekintsük  $1 \leq p < +\infty$  esetén a **valós** sorozatok

$$l^p := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty \right\},$$

$p = +\infty$  esetén pedig a

$$l^\infty := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty \right\}$$

(szokásos műveletekkel ellátott) lineáris terét. Ha  $x = (x_n) \in l^p$ , akkor legyen

$$\|x\|_p := \|x\|_{l^p} := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor  $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$  normált tér.

•  **$C[a, b]$  függvényterek.** A  $C[a, b]$  halmaza a függvények közötti szokásos műveletekkel ellátva nyilván egy valós lineáris teret kapunk; ezen a

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left( \int_a^b |f|^p \right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \quad (f \in C[a, b])$$

függvény norma, tehát  $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$  valós normált tér.

•  **$L^p$  terek.** Ezekről a függvényterekről a 2.4. pontban lesz szó.



**1. tétel.** Ha  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér, akkor a

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

függvény metrika az  $X$  halmazon, azaz  $(X, \varrho)$  metrikus tér. Következésképpen minden normált tér egyúttal metrikus tér is. Ezt a  $\varrho$  metrikát a  $\|\cdot\|$  norma által **indukált metrikának** nevezzük.

Minden  $X$  lineáris téren értelmezett norma tehát egy metrikát indukál az  $X$  halmazon. Felvetődik az a kérdés, hogy egy lineáris téren értelmezett tetszőleges metrika vajon származtatható-e alkalmas normából? A válasz az, hogy nem.

**Példa.** Jelölje  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  a valós sorozatok szokásos műveletekkel ellátott lineáris terét, és legyen

$$\varrho(x, y) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad (x = (x_n), y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Ekkor  $\varrho$  olyan metrika  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ -en, amelyik nem származtatható normából, vagyis nincs olyan norma ezen a téren, amelyik a  $\varrho$  metrikát indukálja.

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált térbeli  $(x_n)$  sorozatot akkor nevezzük **konvergensnek**, ha  $(x_n)$  a norma által indukált metrikában konvergens. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists \alpha \in X \quad : \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - \alpha\| = 0.$$

Konvergencia esetén a fenti  $\alpha$  elem egyértelműen meg van határozva, ezt a sorozat **határértékének** nevezzük (azt is mondjuk, hogy  $(x_n)$  sorozat a  $\|\cdot\|$  **normában tart**  $\alpha$ -hoz). Ezt tényt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{\|\cdot\|}{=} \alpha, \quad \lim(a_n) \stackrel{\|\cdot\|}{=} \alpha, \quad a_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \alpha \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a normára utaló jelet elhagyjuk.

A következő tétel azt állítja, hogy a norma által indukált metrika valóban teljesíti a bevezetésben jelzett elvárást: a műveletek folytonosak a metrikára nézve. Ezen kívül a metrika invariáns a „párhuzamos eltolással” szemben és arányosan változik a vektorok nyújtásának hatására.

**2. tétel.** Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  egy normált tér, és jelölje  $\varrho$  a norma által indukált metrikát. Ekkor

- 1°  $\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y) \quad (x, y \in X);$   
 2°  $\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \varrho(x, y) \quad (x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K});$   
 3° ha  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \xi, y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \eta$  és  $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ , akkor

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda \xi, \quad x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \xi + \eta.$$

**3. tétel.** Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér. A norma, mint  $X \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvény folytonos.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $X$  lineáris téren adott  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_2$  norma **ekvivalens** (jelben  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ), ha léteznek olyan  $c_1, c_2$  pozitív valós számok, hogy

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

minden  $x \in X$ -re.

Ekvivalens normák ekvivalens metrikákat indukálnak. Egyszerűen igazolható, hogy normát vele ekvivalens normára cserélve a halmazok nyílt, zárt, kompakt, korlátos volta, a sorozatok konvergenciája vagy Cauchy-tulajdonsága nem változik.

**Példa.** A  $C[a, b]$  lineáris téren a  $\|\cdot\|_\infty$  és az  $\|\cdot\|_1$  normák **nem** ekvivalensek, sőt tetszőleges  $1 \leq p < \infty$  esetén a  $\|\cdot\|_p$  norma nem ekvivalens a  $\|\cdot\|_\infty$  normával.

**4. tétel.** Véges dimenziós  $X$  lineáris téren értelmezett bármely két norma ekvivalens egymással.

**5. tétel.** Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  véges dimenziós normált tér. Ekkor

- 1°  $X$  teljes;  
 2° egy  $X$ -beli halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt;  
 3°  $X$  szeparábilis;  
 4° minden  $X$ -beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

A metrikus terekhez hasonlóan a normált terekben is fontos szerepe van a **teljességnek**.

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált teret **Banach-térnek** nevezzük, ha a tér a norma által indukált metrikára nézve teljes metrikus tér.

**Példák.**

- $\mathbb{R}$  Banach-tér, a  $\mathbb{Q}$  normált tér nem Banach-tér.

- Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.
- Minden  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén az  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  normált tér Banach-tér.
- A  $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$  normált tér egyetlen  $1 \leq p < +\infty$  esetén sem Banach-tér.
- A  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  normált tér Banach-tér.
- Tetszőleges  $(X, \Omega, \mu)$  mértéktér és  $1 \leq p \leq +\infty$  kitevő esetén az

$$(L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$$

normált tér Banach-tér.

Lineáris terekben a **mindenütt sűrű** halmazok helyett inkább *zárt rendszerekről* szokás beszélni.

**Definíció.** Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér. A  $Z \subset X$  részhalmazt **zárt rendszernek** nevezzük  $X$ -ben, ha  $Z$  lineáris burka (vagyis a  $[Z]$  halmaz) mindenütt sűrű a norma által indukált metrikus térben, azaz

$$\overline{[Z]} = X.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy minden  $X$ -beli elem tetszőleges pontossággal megközelíthető  $Z$ -beli vektorok alkalmas lineáris kombinációjával, azaz

$\forall x \in X$  vektorhoz és  $\forall \varepsilon > 0$  számhoz  
 $\exists n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists z_1, \dots, z_n \in Z$  és  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , hogy

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k \right\| < \varepsilon.$$

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált teret akkor nevezzük **szeparábilisnek**, ha  $X$  a norma által indukált metrikával szeparábilis metrikus tér, vagyis  $X$ -nek van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza. Ez azzal ekvivalens, hogy  $X$ -ben van megszámlálhatóan végtelen zárt rendszer.

## 2.4. A $L^p$ és a $l^p$ terek

### 2.4.1. Előzetes megjegyzések

- A  $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$  **függvényterek**

Emlékeztetünk arra, hogy a  $C[a, b]$  függvénytéren minden  $1 \leq p \leq +\infty$  számra értelmeztük a  $\|\cdot\|_p$  szimbólummal jelölt normát. Ha  $p = +\infty$ , akkor a függvényértékek maximumával, ha  $1 \leq p < +\infty$ , akkor pedig az

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \quad (f \in C[a, b]) \quad (2.2)$$

képlettel (ezért neveztük ezeket *integrálnormáknak*). Itt az integrált a Riemann-féle értelemben tekintettük. Az így értelmezett  $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$  normált terek közötti legfontosabb különbség az, hogy ez a tér a maximumnormában ( $p = +\infty$ ) **teljes**, az integrálnormákban ( $1 \leq p < +\infty$ ) azonban **nem teljes**. (A teljesség jelentőségét már elég sokszor hangsúlyoztuk!)

A fenti képletben a Riemann-integrál helyett Lebesgue-integrált is vehetnénk. Ez az ártatlannak tűnő módosítás azonban számos kérdést vet fel, amelyek megfogalmazása előtt címszavakban emlékeztetünk a Lebesgue-integrál elméletével kapcsolatos ismeretekre.

### • A Lebesgue-integrál mértékterekben

Tetszőleges  $(X, \Omega, \mu)$  mértéktérből ( $X$  tehát egy nemüres halmaz,  $\Omega$  az  $X$  halmaz részhalmazaiából álló  $\sigma$ -algebra és  $\mu : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mérték) kiindulva felépíthető a Lebesgue-integrál elmélete. Arról van szó, hogy az  $X$ -en értelmezett  $\overline{\mathbb{R}}$ -beli értékeket felvevő  $f$  függvények „többségéhez” hozzá lehet rendelni egy  $\overline{\mathbb{R}}$ -beli számot, amit az  $\int_X f d\mu$  szimbólummal jelölünk, és az  $f$  függvény  $\mu$  mérték szerinti integráljának nevezünk. Ez az integrálfogalom rendelkezik a Riemann-integrálnál megismert tulajdonságokkal, sőt sok szempontból annál lényegesen kedvezőbb is.

A tekintett függvények körét az ún. **mérhető függvényekre** korlátoztuk, ezek halmazát az  $\mathcal{M}(X, \Omega)$  szimbólummal jelöltük:

$$f \in \mathcal{M}(X, \Omega) \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}\text{-re } \{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \Omega.$$

(Ez a megszorítás igen keveset követel az  $f$ -tól; az analízisben (!) előforduló valós függvények szinte mindegyike rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.)

Az elmélet felépítése során minden nemnegatív  $f$  mérhető függvényhez hozzárendeltünk egy  $[0, +\infty]$ -beli számot. Így értelmeztük tetszőleges  $f \in \mathcal{M}(X, \Omega)$  függvény pozitív, illetve negatív részének ( $f^+$ -nak, illetve  $f^-$ -nak) az integrálját:  $I^+ := \int_X f^+ d\mu$ -t, illetve  $I^- := \int_X f^- d\mu$ -t. Ezután azoknak a mérhető függvényeknek az integrálját definiáltuk, amelyekre  $I^+$  és  $I^-$  közül legalább az egyik véges. Egy mérhető függvény integrálja tehát lehet véges, de lehet  $\pm\infty$  is. A továbbiakban figyelmünket azokra a függvényekre fordítottuk, amelyeknek az így értelmezett integrálja **véges**. Az ilyen mérhető függvényeket neveztük (az  $X$  halmazon a  $\mu$  mérték szerint) **Lebesgue-integrálhatóknak**, és ezek halmazát így jelöltük:

$$L(X, \Omega, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \Omega) \mid \int_X f d\mu \in \mathbb{R}\}.$$

$L(X, \Omega, \mu)$  helyett a továbbiakban gyakran csak  $L$ -et fogunk írni.  $L^+$ -szal a nem-negatív  $L$ -beli elemek halmazát jelöljük.

### • A probléma felvetése

Struktúrával szeretnénk ellátni a Lebesgue-integrálható függvények halmazát.

$L$  nyilván egy  $\mathbb{R}$  feletti **lineáris tér** (vagy *vektortér*), ha a műveleteket a valós értékű függvények körében megszokott módon (pontonként) értelmezzük.

A **norma** bevezetésének a problémája már jóval érdekesebb (mert nehezebb). A (2.2) képletből kiindulva fogjuk definiálni minden  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén a

$$(L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$$

normált teret. (Ki fog majd derülni, hogy különböző  $p$ -kre a  $C[a, b]$  függvénytértől eltérően itt már maguk a halmazok is különbözők lesznek.) Ezeknek a függvénytereknek az egyik legfontosabb tulajdonsága az, hogy **teljesek**, vagyis **Banach-terek** (l. a Riesz–Fischer-tételt). Ez az eredmény egyike volt a legelsőeknek azok közül az általános érdeklődést felkeltő, fontos tételek közül, amelyek a Lebesgue-féle integrálon alapulnak, s amelyek így az új integrálfogalom teljesítő képességét demonstrálják.

#### 2.4.2. A Lebesgue-integrálra vonatkozó néhány alapvető eredmény

**1. tétel.** Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  mértéktér és  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  egy  $\Omega$ -mérhető függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- 1° az  $f$  függvény Lebesgue-integrálható, azaz  $f \in L$ ;
- 2°  $f^+, f^- \in L$ ;
- 3°  $\exists g, h \in L; g, h \geq 0 : f = g - h$ ;
- 4°  $\exists G \in L : |f| \leq G$  ( $f$ -nek van integrálható majoránsa);
- 5°  $|f| \in L$ .

Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  tetszőleges mértéktér. Tegyük fel, hogy  $T$  az  $X$  elemeire vonatkozó „logikai kifejezés” (tulajdonság, kijelentés), azaz  $\forall x \in X$ -re  $T(x)$  vagy igaz, vagy hamis. Azt mondjuk, hogy a  $T$  tulajdonság az  $X$ -en  **$\mu$ -majdnem mindenütt** (röviden:  **$\mu$ -m.m. az  $X$ -en**) teljesül, ha

$\exists A \in \Omega, \mu(A) = 0$  halmaz, hogy  $\forall x \in X \setminus A$  elemre a  $T(x)$  tulajdonság igaz.

A Lebesgue-integrál „érzéketlen” a  $\mu$ -nullamértékű halmazokra.

**2. tétel.** 1° Bármely nemnegatív Lebesgue-integrálható  $f$  függvény esetén

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-m.m. } X\text{-en.}$$

2° Ha az  $f$  és  $g$  mérhető függvények  $\mu$ -m.m. egyenlők az  $X$  halmazon, valamint  $f$  Lebesgue-integrálható, akkor  $g$  is Lebesgue-integrálható a Lebesgue-integráljuk is egyenlő.

3° Minden  $L$ -beli  $f$  függvényre igaz, hogy  $|f| < +\infty$   $\mu$ -m.m.

**3. tétel** (Beppo Levi tétele). Tegyük fel, hogy

(a)  $f_n \in L$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),

(b) az  $(f_n)$  függvénysorozat monoton növekedő, és  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,

(c) az integrálok  $\int_X f_n d\mu$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozata korlátos.

Ekkor az  $f$  függvény Lebesgue-integrálható és

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_n(f_n) d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

**4. tétel** (Fatou tétele).

1° Bármely  $f_n \in L^+$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) függvénysorozatra

$$\int_X \left( \liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \left( \int_X f_n d\mu \right).$$

2° Ha  $\exists F \in L : f_n \leq F$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$   $\mu$ -m.m. az  $X$ -en), akkor

$$\limsup_n \left( \int_X f_n d\mu \right) \leq \int_X (\limsup_n f_n) d\mu.$$

**5. tétel** (Lebesgue-tétele). Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  tetszőleges mértéktér, és tegyük fel, hogy

(a)  $f_n \in L$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),

(b) a függvénysorozatnak van integrálható majoránsa, azaz  $\exists g \in L : |f_n| \leq g$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $\mu$ -m.m.  $X$ -en,

(c) az  $(f_n)$  függvénysorozat az  $X$ -en  $\mu$ -m.m. konvergál az  $f$  függvényhez.

Ekkor  $f \in L(X, \Omega, \mu)$  és

$$\int_X f d\mu = \int_X \left( \lim_n f_n \right) d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

### 2.4.3. A $L^p$ függvényterek

Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  egy mértéktér. Vezessük be minden  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mérhető függvényre a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{ha } 0 < p < +\infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf \{ c \geq 0 \mid |f| \leq c \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en} \}, \\ &= \inf \{ \sup_{X \setminus E} |f| \mid E \in \Omega \text{ és } \mu(E) = 0 \} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(megállapodva abban, hogy  $\inf \emptyset := +\infty$ ).

Mivel minden  $f$  mérhető függvény esetén az  $|f|^p$  függvény is mérhető (ui. bármely  $\alpha \geq 0$  számra az  $\{|f|^p \geq \alpha\}$  és  $\{|f| \geq \alpha^{1/p}\}$  nívóhalmazok egyenlők), ezért a definíciók korrektek. Tetszőleges  $f$  mérhető függvény esetén  $\|f\|_p$  nemnegatív szám vagy  $+\infty$ .

Az  $\|f\|_\infty$  számot szokás az  $|f|$  függvény *lényeges felső korlátjának* is nevezni. Ennek megfelelően használatos rá a  $\sup \text{ess } f := \|f\|_\infty$  jelölés is a francia „*supremum essentiel*” kifejezés alapján.

A fenti kifejezések néhány tulajdonsága ( $1 \leq p \leq +\infty$ ):

- $\|f\|_p < +\infty \iff f \in L^p \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en};$
- $\|f\|_p = \|g\|_p \iff f = g \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en};$
- $\|f\|_\infty < +\infty \iff \exists c \geq 0 : |f| \leq c \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en};$
- $|f| \leq \|f\|_\infty \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en};$
- ha  $\exists q \in (0, +\infty)$ , hogy  $\int_X |f|^q d\mu < +\infty$ , akkor

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty;$$

- ha a  $\mu$  mérték véges és  $\|f\|_\infty < +\infty$ , akkor

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Mivel a Lebesgue-integrál „érzéketlen” a  $\mu$ -nullamértékű halmazokra, ezért a  $\mu$ -m.m. egyenlő függvények között nem célszerű különbséget tenni. Azonosítsuk az ilyen függvényeket! Pontosabban arról van szó, hogy a Lebesgue-integrálható függvények

$$L := L(X, \Omega, \mu) \quad (2.4)$$

halmazán értelmezzük a következő relációt:

$$f, g \in L : f \sim g : \iff f = g \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en.}$$

Könnyen belátható, hogy  $\sim$  ekvivalenciareláció, ami  $L$ -nek egy osztályfelbontását indukálja. Az így kapott ekvivalenciaosztályok halmazát az

$$\mathbb{L} := \mathbb{L}(X, \Omega, \mu) \quad (2.5)$$

szimbólummal fogjuk jelölni.

Az  $L$  halmaz elemei valós értékű függvények, ezek között az algebrai műveleteket a szokásos módon (pontonként) értelmezzük. A bevezetett ekvivalenciareláció kompatibilis ezekkel az algebrai műveletekkel: ha  $f_1 = g_1$  és  $f_2 = g_2$   $\mu$ -m.m., akkor

$$\begin{aligned} f_1 \pm f_2 &= g_1 \pm g_2 \quad \mu\text{-m.m.}, \\ f_1 f_2 &= g_1 g_2 \quad \mu\text{-m.m.}; \end{aligned}$$

és hasonló érvényes a (2.3) alatt értelmezett kifejezésekre is.

*A (2.4) és (2.5) alatt bevezetett jelöléseket csak ebben a pontban fogjuk használni. A jegyzet többi részében — a szokásoknak megfelelően — nem teszünk jelölésbeli különbséget  $L$  és  $\mathbb{L}$  között, azaz  $L$  minden  $f$  eleme egyúttal az összes olyan  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mérhető függvényt is jelöli, amelyik  $\mu$ -m.m. egyenlő  $f$ -fel. Ha  $f \in \mathbb{L}$ -et írunk, akkor  $f$  egy ekvivalenciaosztályt jelöl. A fentiek alapján azonban megállapodhatunk abban, hogy ekkor  $f$  nem ekvivalenciaosztályt, hanem egyetlen függvényt, a szóban forgó ekvivalenciaosztály egy tetszőleges elemét jelöli.*

Az  $\mathbb{L}$  halmaz természetes vektortérstruktúrával van ellátva. Az ekvivalenciaosztályok összegét, illetve számszorosát reprezentánsok (ezek valós értékű függvények!) összegével, illetve számszorosával a szokásos módon (pontonként) értelmezzük. Megmutatható, hogy ez független a reprezentánsok megválasztásától.  $\mathbb{L}$  tehát  $\mathbb{R}$  feletti **lineáris tér** (vagy vektortér).

**Definíció.** Tetszőleges  $0 < p \leq +\infty$  esetén  $\mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu)$ -vel vagy röviden  $\mathbb{L}^p$ -vel jelöljük azoknak az  $\mathbb{L}$ -beli elemeknek a halmazát, amelyekre  $\|f\|_p$  véges:

$$\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu) := \{f \in \mathbb{L} \mid \|f\|_p < +\infty\}.$$



Gyakran fogjuk használni a következő fogalmat:

**Definíció.** Az  $1 \leq p \leq +\infty$  szám **konjugált kitevőjén** az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőségnek eleget tevő  $q \in [1 + \infty]$  számot értjük ( $\frac{1}{+\infty}$ -n 0-t értve); és ilyenkor azt is mondjuk, hogy  $p$  és  $q$  *konjugált kitevők*.

Ebben a pontban a fő célunk annak igazolása, hogy minden  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén  $\mathbb{L}^p$  lineáris tér és a (2.3) kifejezések normák. A bizonyításban alapvető fontosságúak lesznek a következő egyenlőtlenségek.

**6. tétel.** Legyenek  $1 \leq p, q \leq +\infty$  konjugált kitevők:  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .

1° (**Young-egyenlőtlenség**) Ha  $a, b \geq 0$  és  $a, q$  kitevők végesek, akkor

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2° (**Hölder-egyenlőtlenség**<sup>1</sup>) Ha  $f \in \mathbb{L}^p$  és  $g \in \mathbb{L}^q$ , akkor  $fg \in \mathbb{L}^1$  és

$$\int_X |fg| d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(A  $p = q = 2$  esetben ez a **Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**.)

3° (**Minkowski-egyenlőtlenség**) Ha  $f, g \in \mathbb{L}^p$  akkor  $f + g \in \mathbb{L}^p$  és

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.6)$$

**Bizonyítás.** 1° A Young-egyenlőtlenség. Átrendezés után  $0 \leq \frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q}$  adódik. Rögzített  $b > 0$  esetén (ha  $b = 0$ , akkor az állítás nyilvánvaló) tekintsük a

$$\varphi(x) := \frac{x^p}{p} - xb + \frac{b^q}{q} \quad (x \geq 0)$$

függvényt. A  $\varphi$  függvény abszolút szélsőrték-helyeit keressük. Ehhez  $\varphi$ -t deriválva kapjuk, hogy

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - b = 0 \quad \iff \quad x = b^{\frac{1}{p-1}} \quad (p \neq 1),$$

<sup>1</sup>Otto Hölder eredetileg a számsorokra vonatkozó egyenlőtlenséget bizonyította be; integrálokra az egyenlőtlenséget először Riesz Frigyes igazolta.

$\varphi''(x) > 0$ , ha  $x > 0$ , következésképpen  $\varphi$  szigorúan csökkenő a  $(0, b^{1/(p-1)})$  és szigorúan növekvő a  $(b^{1/(p-1)}, +\infty)$  intervallumon, a  $b^{1/(p-1)}$  pontban tehát abszolút minimuma van. Ennek értéke

$$\begin{aligned}\varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{1+\frac{1}{p-1}} + \frac{b^q}{q} && \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}\right) \\ &= \frac{1}{p} b^q - b^q + \frac{b^q}{q} = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - b^q \\ &= 0\end{aligned}$$

ezért  $\varphi(x) \geq 0$  minden  $x \geq 0$ , tehát  $x = a$  esetén is, azaz

$$\varphi(a) = \frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q} \geq 0,$$

és ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2° *A Hölder-egyenlőtlenség igazolása.* A  $p = 1, q = +\infty$  esetben (és ezzel együtt a  $p = +\infty, q = 1$  esetben is a bizonyítás egyszerű:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty \quad \mu\text{-m.m.},$$

tehát

$$\|fg\|_1 = \int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X |f| \, d\mu\right) \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

tekintsük most az  $1 < p < +\infty$  esetet (ekkor egyben  $1 < q < +\infty$ ). Ha  $\|f\|_p$  és  $\|g\|_q$  közül csak egyik is 0-val egyenlő, akkor  $fg = 0$   $\mu$ -m.m., s így az integrálja is 0, az állítás tehát triviálisan teljesül. Feltehetjük, hogy  $\|f\|_p$  és  $\|g\|_q$  mindegyike 0-tól különböző. Legyen

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad (\|f\|_p \neq 0), \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \quad (\|g\|_q \neq 0).$$

Írjuk fel a Young-egyenlőtlenséget ezekre az  $a, b$  számokra:

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X).$$

Az integrál monotonitását felhasználva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \cdot \int_X |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \int_X |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|g\|_q^q} \cdot \int_X |g|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2.7)$$

ugyanis  $\int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$ , valamint  $\int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q$ . A (2.7) egyenletötletlenséget  $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$ -val beszorozva  $\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  adódik, és ez éppen a bizonyítandó egyenlőtletlenség.

3<sup>o</sup> A *Minkowski-egyenlőtletlenség igazolása*. A  $p = 1$  és  $p = +\infty$  esetek nyilvánvalók, ekkor ugyanis arról van szó, hogy két integrálható függvény összege is integrálható és

$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu,$$

illetve hogy két lényegében korlátos mérhető függvény összege is ilyen, és  $|f + g| \leq |f| + |g|$  miatt

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

is teljesül.

Marad tehát az  $1 < p < +\infty$  eset. Először azt mutatjuk meg, hogy  $f, g \in \mathbb{L}^p$  esetén  $f + g \in \mathbb{L}^p$ .  $f$  és  $g$  mérhetőek lévén  $f + g$ , következésképpen  $|f + g|^p$  is mérhető. Ez a függvény azonban integrálható is, mert van integrálható majoránsa. Ez következik az

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

egyenlőtletlenségből, amit a  $h(x) := x^p$  ( $x \geq 0$ ) függvény konvexitását felhasználva lehet bebizonyítani. (A  $h$  függvény konvex, mert  $h''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ , ha  $x > 0$ , ui. a feltétel szerint  $p > 1$ . A konvexitás definíciója szerint

$$h(\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b) \leq \alpha h(a) + (1 - \alpha) \cdot h(b).$$

Alkalmazzuk ezt az  $\alpha := 1/2$ , az  $a := |f|$  és a  $b := |g|$  szereposztással.) Így  $f + g \in \mathbb{L}^p$  valóban teljesül.

Legyen  $p$  konjugált kitevője  $q$ , azaz  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Mivel  $(p-1)q = p$ , ezért ebből következik, hogy  $|f + g|^{p-1} \in \mathbb{L}^q$  és

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q = \left( \int_X |f + g|^p \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtletlenséget az  $\mathbb{L}^p$ -be tartozó  $|f|, |g|$  és az  $\mathbb{L}^q$ -ba tartozó

$|f + g|^{p-1}$  függvényekre:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1} \cdot |f| d\mu + \int_X |f + g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \\ &\leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p + \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p \leq \\ &\leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \cdot (\|f\|_p + \|g\|_p) = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Ha  $\|f + g\|_p > 0$ , akkor az utolsó tényezővel át lehet osztani, és mivel  $p, q$  konjugált kitevők, ezért

$$p - \frac{p}{q} = p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \frac{1}{p} = 1,$$

kapjuk a kívánt (2.6) egyenlőtlenséget. Az  $\|f + g\| = 0$  esetben (2.6) nyilvánvalóan szintén teljesül.

Ezzel a Minkowski-egyenlőtlenséget minden  $p \in [1, +\infty]$  kitevő esetére bebizonyítottuk. ■

**7. tétel.** Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  tetszőleges mértéktér és  $1 \leq p \leq +\infty$ . Ekkor  $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu)$  a szokásos műveletekkel lineáris tér  $\mathbb{R}$  felett. Az

$$\|f\|_p := \|f\|_{\mathbb{L}^p} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{ha } 1 \leq p < +\infty, \quad (f \in \mathbb{L}^p)$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathbb{L}^\infty} := \inf \{ c \geq 0 \mid |f| \leq c \text{ } \mu\text{-m.m. az } X\text{-en} \},$$

függvény norma a  $\mathbb{L}^p$  lineáris téren, vagyis  $(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p)$  normált tér.

**Példák  $\mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu)$  terekre.**

- Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $(X, \Omega, \mu)$  az  $\mathbb{R}^n$ -beli Lebesgue-féle mértéktér, vagyis  $X \subset \mathbb{R}^n$  egy nyílt halmaz,  $\Omega$  az  $X$  Lebesgue-mérhető halmazainak a  $\sigma$ -algebrája és  $\mu : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  a Lebesgue-mérték.  $\mathbb{L}^p$  elemei tehát  $n$  változós valós értékű függvények, az integrál pedig a többszörös integrál általánosítása.

- Legyen  $(X, \Omega, \mu) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ , ahol  $\mu$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  hatványhalmazon értelmezett *elemszám-mérték* (vagyis  $\mu(\{n\}) = 1$  minden  $n \in \mathbb{N}$  számra). Ekkor bármely  $1 \leq p < +\infty$  esetén  $\mathbb{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  elemei olyan  $x = (x_n)$  valós sorozatok, amelyekre

$$\|x\|_{\mathbb{L}^p} = \left( \int_{\mathbb{N}} |x|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

tehát ez a speciális eset a korábban már bevezetett  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  térnek felel meg.

Ha  $p = +\infty$ , akkor  $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  elemei a korlátos valós sorozatok:

$$\mathbb{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_k |x_k| < +\infty \right\}.$$

Mivel  $\|x\|_{\mathbb{L}^\infty} = \sup_k |x_k|$ , ezért a  $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  tér is a korábban már bevezetett  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  térrel egyezik meg. Ezekben az esetekben az  $A \subset \Omega = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  halmaz nyilván akkor és csak akkor nullamértékű, ha  $A = \emptyset$ . Ezért a  $\mathbb{L}^p$ -t (azaz a  $l^p$ -t) alkotó ekvivalenciosztályok egyeleműek.

• **A  $\mathbb{L}_w^p(I)$  függvényterek.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  *nyílt* (nem feltétlenül korlátos) intervallum,  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  pedig a szokásos Lebesgue-mértékre vonatkozólag mérhető, m.m. nemnegatív függvény. Tegyük fel, hogy  $w$  integrálható  $I$  minden *kompakt* részintervallumán, és jelöljük  $\mathcal{P}$ -vel azon korlátos intervallumok félgűrűjét, amelyek a lezárása is  $I$ -ben van. A  $\mu(J) := \int_J w(t) dt$  képlet véges mértéket definiál  $\mathcal{P}$ -n. Tekintsük a hozzátartozó integrálméletet, és  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén jelöljük  $\mathbb{L}_w^p(I)$ -vel a megfelelő  $\mathbb{L}^p$  tereket. A  $w = 1$  esetben visszkapjuk a szokásos  $\mathbb{L}^p(I)$  tereket.

**Megjegyzés.** A 7. tételben lényeges a  $p \geq 1$  feltétel, ui. a  $0 < p < 1$  eseteknek megfelelő  $\mathbb{L}^p$  terekben a (2.3) kifejezésre nem teljesül a normára megkövetelt háromszög-egyenlőtlenség. Legyen ui.  $(X, \Omega, \mu)$  a  $(0, 1)$  intervallumra vonatkozó szokásos Lebesgue-féle mértéktér, és tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor minden  $0 < p < 1$  esetén

$$\|f + g\|_p = 1, \quad \|f\|_p = \|g\|_p = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \Rightarrow \|f\|_p + \|g\|_p < 1,$$

ezért a háromszög-egyenlőtlenség ezekre a függvényekre nem teljesül.

#### 2.4.4. Kapcsolat a $\mathbb{L}^p$ terek között

Érdemes megjegyezni, hogy **véges**  $\mu$  mérték esetén a  $\mathbb{L}^p$  terek  $\mathbb{L}^1$ -től kezdve „egymásba vannak skatulyázva”.

**8. tétel.** *Tegyük fel, hogy  $(X, \Omega, \mu)$  véges mértéktér (vagyis  $\mu(X) < +\infty$ ). Ekkor minden  $1 \leq p < q \leq +\infty$  esetén  $\mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p$ .*

**Bizonyítás.** A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazzuk a

$$\tilde{p} := \frac{q}{p} \quad \text{és} \quad \tilde{q} := \frac{q}{q-p}$$

konjugált kitevőkkel a következő módon ( $\mathbf{1}$  jelöli az  $X$ -en mindenütt 1-et felvevő konstans függvényt):

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \left\| |f|^p \cdot \mathbf{1} \right\|_1 \leq \| |f|^p \|_{\tilde{p}} \cdot \|\mathbf{1}\|_{\tilde{q}} = \left( \int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left( \int_X \mathbf{1}^{\tilde{q}} d\mu \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} = \\ &= \|f\|_q^p \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Mivel  $\mu$  véges mérték (azaz  $\mu(X) < +\infty$ ) és  $f \in \mathbb{L}^q$  (vagyis  $\|f\|_q < +\infty$ ), ezért a fenti egyenlőtlenségből

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_q < +\infty$$

adódik, ahol  $c := (\mu(X))^{1/p-1/q} < +\infty$ . Ez azt jelenti, hogy minden  $f \in \mathbb{L}^q$  esetén  $f \in \mathbb{L}^p$  is teljesül. Az  $\mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p$  tartalmazás tehát valóban igaz. ■

**Megjegyzések.**  $1^\circ$  Egyszerűen megmutatható, hogy (például) a  $\mathbb{L}^p(0,1)$  terek szigorúan egymásba vannak skatulyázva. Valóban, ha  $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha}$  ( $x \in (0,1)$ ), akkor

$$f_\alpha \in \mathbb{L}^p(0,1) \quad \iff \quad \alpha < \frac{1}{p},$$

ezért

$$f_\alpha \in \mathbb{L}^p \setminus \mathbb{L}^q, \quad \text{ha } p < \frac{1}{\alpha} < q,$$

tehát tetszőleges  $p < q$  esetén  $\mathbb{L}^p \setminus \mathbb{L}^q \neq \emptyset$ .

$2^\circ$  Az előbbi tételben lényeges a mérték végességére tett feltétel.

#### 2.4.5. Normakonvergencia. A $\mathbb{L}^p$ terek teljessége

Az  $\mathbb{L}^p$  tereken definiált normával függvénysorozat **normakonvergenciáját** lehet (természetes módon) értelmezni.

**Definíció.** Legyen  $1 \leq p \leq +\infty$ . Azt mondjuk, hogy az  $(f_n) \subset \mathbb{L}^p$  függvénysorozat az  $\mathbb{L}^p$  tér **normájában konvergens**, ha

$$\exists f \in \mathbb{L}^p : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Nyilván  $\mathbb{L}^p$ -beli sorozatok Cauchy-tulajdonsága is értelmezhető:

**Definíció.** Legyen  $1 \leq p \leq +\infty$ . Az  $(f_n) \subset \mathbb{L}^p$  függvénysorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N\text{-re } \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Az  $\mathbb{L}^p$  terek egyik legfontosabb tulajdonsága az, hogy  $\mathbb{R}$ -hez hasonlóan itt is igaz a *Cauchy-féle konvergenciakritérium*, azaz függvénysorozat (norma)konvergenciája ekvivalens a függvénysorozat Cauchy-tulajdonságával.

**9. tétel** (Riesz–Fischer-tétel<sup>2</sup>). *Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  egy tetszőleges mértéktér. Ekkor minden  $1 \leq p \leq +\infty$  kitevő mellett a  $(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p)$  normált tér teljes, azaz Banach-tér. Ez azt jelenti, hogy minden  $\mathbb{L}^p$ -beli  $(f_n)$  Cauchy-sorozat az  $\mathbb{L}^p$  tér normájában konvergens, vagyis létezik olyan  $f \in \mathbb{L}^p$  függvény, hogy*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

**Bizonyítás.** Az állítás bizonyításának Riesz Frigyes-féle *alapgondolata* a következő:

*Az  $\mathbb{L}^p$  tér tetszőleges  $(f_n)$  Cauchy-sorozatából kiválasztható olyan  $(f_{n_k})$  részsorozat, amelyik az  $X$ -en  $\mu$ -m.m. (pontonként) konvergál egy  $f \in \mathbb{L}^p$  függvényhez.*

Ezt felhasználva már viszonylag egyszerűen meg lehet mutatni, hogy az egész  $(f_n)$  sorozat ehhez az  $f$  függvényhez tart az  $\mathbb{L}^p$  tér normájában.

**1.** Legyen először  $1 \leq p < +\infty$ , és vegyünk egy tetszőleges  $(f_n)$  Cauchy-sorozatot az  $\mathbb{L}^p$  térből, azaz tegyük fel, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N\text{-re } \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Ekkor kiválasztható egy  $n_1 < n_2 < \dots$  indexsorozat úgy, hogy

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

[Valóban, (2.8) miatt van olyan  $n_1$  index, hogy  $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$  minden  $m, n \geq n_1$ -re; vegyük ezután  $n_2 > n_1$ -et úgy, hogy  $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$  teljesüljön minden  $m, n \geq n_2$  esetén, s.í.t.]

<sup>2</sup>Riesz Frigyes és a német E. Fischer egymástól függetlenül találták 1907-ben; mindketten a párizsi akadémia *Comptes Rendus*-jében közölték, Riesz két hónappal előbb, mint Fischer.

(a) Megmutatjuk, hogy az így kiválasztott  $(f_{n_k})$  részsorozat az  $X$ -en  $\mu$ -m.m. konvergál egy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvényhez. Legyen

$$g_K := \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{és} \quad g := \lim_{K \rightarrow +\infty} g_K = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|. \quad (2.9)$$

(Mivel a  $(g_K)$  függvénysorozat monoton növekedő, ezért  $g$  valóban „jól definiált”  $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  típusú függvény.) Világos, hogy minden  $K$  természetes számra  $g_K \in \mathbb{L}^p$  (vagyis  $g_K^p \in \mathbb{L}^1$ ) és a normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|g_K\|_p = \left( \int_X g_K^p d\mu \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^K \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \leq 1,$$

továbbá  $g_K^p \nearrow g^p$  ( $K \rightarrow +\infty$ ) pontonként az  $X$  halmazon. A Beppo Levi-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{K \rightarrow +\infty} (g_K^p) d\mu = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_X g_K^p d\mu \leq 1,$$

és ez azt jelenti, hogy  $g^p$  Lebesgue-integrálható ( $g^p \in \mathbb{L}^1$ , illetve  $g \in \mathbb{L}^p$ ), következésképpen  $g^p$ , tehát  $g$  is véges értéket vesz fel  $\mu$ -m.m. az  $X$ -en. Ezt viszont úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

függvénysor az  $X$ -en  $\mu$ -m.m. abszolút konvergens. Az abszolút konvergencia maga után vonja a konvergenciát is. Legyen

$$f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

(Ez a függvény  $X$ -en  $\mu$ -m.m. egyértelműen van definiálva.)  $f$  tehát az

$$s_K := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_K} \quad (K \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat  $\mu$ -m.m. határfüggvénye. Igazoltuk tehát azt, hogy a kiválasztott  $(f_{n_k})$  részsorozat  $\mu$ -m.m. konvergens.



(b) Most megmutatjuk, hogy az  $(f_{n_K})$  sorozat az  $\mathbb{L}^p$  tér normájában is tart az  $f$  függvényhez. Valóban, a fentiek szerint

$$|f - s_K| = |f - f_{n_K}| \leq \sum_{k=K}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq g \quad (K \in \mathbb{N}).$$

Ebből és  $g \in \mathbb{L}^p$ -ből következik, hogy  $f - f_{n_K} \in \mathbb{L}^p$ , és ezért  $f \in \mathbb{L}^p$  is teljesül. Az  $(|f - f_{n_K}|^p, K \in \mathbb{N})$  függvénysorozatra a Lebesgue-féle konvergenciatételt alkalmazva

$$\|f - f_{n_K}\|_p \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow +\infty) \quad (2.10)$$

adódik.

(c) Végül az

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_K}\|_p + \|f_{n_K} - f_n\|_p$$

egyenlőtlenségből következik, hogy az egész  $(f_n)$  sorozat is  $f$ -hez tart az  $\mathbb{L}^p$ -normában. Valóban, az utolsó összeg első tagja (2.10) miatt, a második tagja pedig  $(f_n)$  Cauchy-tulajdonsága miatt tart 0-hoz, ha  $n, n_K \rightarrow +\infty$ .

A Riesz–Fischer-tételt az  $1 \leq p < +\infty$  esetben tehát bebizonyítottuk.

2. Ha  $p = +\infty$ , akkor a fenti bizonyításban csak a

$$\lim_K \|f - f_{n_K}\|_p = 0$$

reláció igazolása igényel némi módosítást, ti. ekkor a Lebesgue-tétel nem alkalmazható. Azonban

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty < \frac{1}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

amiből egyszerűen kapjuk a

$$\|f_{n_{k+m}} - f_{n_k}\|_\infty < \frac{1}{2^{k-1}} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

becslést. Innen viszont  $|f - f_{n_k}| < \frac{1}{2^{k-1}}$   $\mu$ -m.m.  $(k \in \mathbb{N})$  adódik, azaz

$$\|f - f_{n_k}\|_\infty < \frac{1}{2^{k-1}} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

következésképpen  $\lim_k \|f - f_{n_k}\|_\infty = 0$ . ■

**Megjegyzés.** A  $p = +\infty$  **határesetben** az  $\mathbb{L}^\infty$  tér teljességét a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  tér teljességének bizonyításánál követett módon **is** beláthatjuk: Legyen  $(f_n)$  egy  $\mathbb{L}^\infty$ -beli Cauchy-sorozat. Adott  $k$  természetes számhoz tehát létezik olyan  $N_k$  index, hogy

$$\|f_m - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall m, n \geq N_k\text{-ra.}$$

A  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$  norma definíciója alapján létezik olyan  $E_{mn} \subset X$   $\mu$ -nullamértékű halmaz, hogy

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad (x \in X \setminus E_{mn}, \quad m, n \geq N_k).$$

Legyen

$$E_k := \bigcup_{m,n=N_k}^{+\infty} E_{mn}.$$

Ekkor  $\mu(E_k) = 0$  és

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in X \setminus E_k\text{-ra és } \forall m, n \geq N_k\text{-ra.} \quad (2.11)$$

Világos, hogy az  $E := \bigcup_k E_k \subset X$  halmaz is  $\mu$ -nullamértékű. A fentiek alapján tehát minden  $x \in X \setminus E$  pontban  $(f_n(x))$  egy  $\mathbb{R}$ -beli Cauchy-sorozat; jelöljük  $f(x)$ -szel a határértékét. A (2.11) egyenlőtlenségben az  $m \rightarrow +\infty$  határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in X \setminus E\text{-re és } \forall n \geq N_k\text{-ra,}$$

amiből következik, hogy  $f \in \mathbb{L}^\infty$  és  $\|f - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \frac{1}{k}$  minden  $n \geq N_k$  indexre, és ez azt jelenti, hogy  $\|f - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow +\infty$ . Az  $(\mathbb{L}^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty})$  normált tér tehát valóban teljes.

## 2.5. Euklideszi terek és Hilbert-terek

**Motiváció:**  $\mathbb{R}^3$ -ban a **skaláris szorzat**. Skaláris szorzattal fejezhető ki vektorok szöge, merőlegessége, vetülete, távolsága, és maga a norma, a vektor abszolút értéke is. Ezért azok a lineáris terek, amelyekben  $\mathbb{R}^3$  példájára a skaláris szorzat van értelmezve, várhatóan sokkal több hasonlóságot mutatnak a közönséges háromdimenziós vektortérrel, mint azok, amelyekben nincs skaláris szorzat.

**Definíció.** Az  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  rendezett párt **euklideszi térnek** nevezzük, ha

1<sup>o</sup>  $X$  lineáris tér a  $\mathbb{K}$  számtest felett;

2<sup>o</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pedig olyan  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  függvény, amelyik tetszőleges  $x, y, z \in X$  elemre és  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

- (i)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- (ii)  $\langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, z \rangle = \lambda_1 \langle x, z \rangle + \lambda_2 \langle y, z \rangle$ ;
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta$ .

A  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  leképezést **skaláris szorzatnak** nevezzük.

Ha  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , akkor **valós**, ha  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , akkor pedig **komplex** euklideszi térről beszélünk. Ha a skaláris szorzat a szöveggörnyezetből nyilvánvaló, akkor egyszerűen  $X$ -et írunk  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  helyett.  $X$  elemeit *vektoroknak* is nevezzük.

Minden euklideszi térnek van természetes normája:

**1. tétel.** Az  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi térben az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in X)$$

*függvény norma az  $X$  lineáris térben, tehát minden euklideszi tér egyúttal normált (tehát metrikus) tér is. Ezt a normát a skaláris szorzat által **indukált normának** nevezzük.*

Minden  $X$  euklideszi térben igaz a **Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség**:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X)$$

és a **paralelogramma-azonosság**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (x, y \in X).$$

**2. tétel** (Neumann János tétele). Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált térben a norma akkor és csak akkor származtatható skaláris szorzatból (azaz  $X$  euklideszi tér), ha minden  $x, y \in X$  esetén igaz az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

*ún. paralelogramma-egyenlőség.*

**3. tétel.** Az

- (a)  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
- (b)  $l^p$ ,
- (c)  $C[0, 1]$ ,
- (d)  $L[0, 1]$

*tereken értelmezett  $\|\cdot\|_p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) norma akkor és csak akkor elégíti ki a paralelogramma-egyenlőséget, ha  $p = 2$ .*

**Definíció.** Az  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklideszi teret **Hilbert-térnek** nevezzük, ha a skaláris szorzat által indukált normával nyert normált tér teljes.

### Példák Hilbert-terekre

• **Az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi tér.** A szokásos műveletekkel ellátott  $\mathbb{R}^n$  lineáris téren az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$$

függvény skaláris szorzat. Az indukált

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

normával  $\mathbb{R}^n$  teljes, tehát  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy véges dimenziós Hilbert-tér.

• **A  $l^2$ -tér.** Az

$$l^2 := \left\{ (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

halmaz a sorozatok közötti szokásos műveletekkel egy  $\mathbb{R}$  feletti lineáris tér, ezen az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \quad (x = (x_n), y = (y_n) \in l^2)$$

függvény skaláris szorzat. Az indukált norma ebben az esetben

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_{l^2} \quad (x \in l^2).$$

$l^2$  ezzel a normával teljes, ezért  $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér.

• **A  $L^2$ -terek.** Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  egy mértéktér. Tekintsük az

$$L^2(X, \Omega, \mu) := \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \int_X |f|^2 < +\infty \right\}$$

függvényteret, és legyen

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu} \quad (f \in L^2(X, \Omega, \mu)), \quad (2.12)$$

ahol nem teszünk különbséget két függvény között, ha azok  $\mu$ -m.m. egyenlők. Emlékeztetünk a *Riesz–Fischer-tételre*, amely szerint  $L^2(X, \Omega, \mu)$  ezzel a normával Banach-tér.

Egyszerűen igazolható, hogy az

$$\langle f, g \rangle := \int_X fg \, d\mu \quad (f, g \in L^2(X, \Omega, \mu))$$

egyenlőséggel értelmezett függvény kielégíti a skaláris szorzat követelményeit, emellett ebből a skaláris szorzatból származtatott

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f \in L^2(X, \Omega, \mu))$$

norma megegyezik a tér (2.12) alatti normájával, ezért  $(L^2(X, \Omega, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  **Hilbert-tér**.

• **Az  $L^2(I)$ -tér.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy nemdegenerált  $\mathbb{R}$ -beli (korlátos vagy nem korlátos) intervallum, és tekintsük ezen a Lebesgue-féle mértékteret.  $L^2(I)$ -vel fogjuk jelölni az előző példa speciális eseteként adódó Hilbert-teret.

**Megjegyzés.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy nemdegenerált *korlátos* intervallum. Jelölje  $C(\bar{I})$  az  $\bar{I}$  kompakt intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények „szokásos” lineáris terét. Azt már tudjuk, hogy  $C(\bar{I})$  euklideszi tér az

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x)g(x) \, dx \quad (f, g \in C(\bar{I}))$$

skaláris szorzatra nézve, sőt azt is láttuk, hogy ez a tér *nem teljes*, tehát *nem Hilbert-tér*.

Megmutatható, hogy a  $C(\bar{I})$  halmazhoz „alkalmas” függvényeket hozzávéve ez a tér teljessé tehető, vagyis alkalmas Hilbert-tér sűrű alterének tekinthető. Bebizonyítható, hogy **a  $C(\bar{I})$  teljessé tételével kapott Hilbert-tér éppen az  $L^2(I)$  Hilbert-tér lesz.**

• **Az  $L_w^2(I)$  Hilbert-terek.** Tegyük fel, hogy  $I$  egy  $\mathbb{R}$ -beli nyílt intervallum és  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  pedig a szokásos Lebesgue-mértékre vonatkozólag mérhető, m.m. nemnegatív függvény. Tegyük fel, hogy  $w$  integrálható  $I$  minden *kompakt* részintervallumán, és jelöljük  $\mathcal{I}$ -vel azon korlátos intervallumok félgűrűjét, amelyek lezárása is  $I$ -ben van. A  $\mu(J) := \int_J w(t) \, dt$  képlet véges mértéket definiál  $\mathcal{I}$ -n. Tekintsük a hozzá tartozó integrálméletet, és jelöljük  $L_w^2(I)$ -vel a megfelelő  $L^2$  teret. A  $w \equiv 1$  esetben visszkapjuk az  $L^2(I)$  teret.

Nem nehéz igazolni azt, hogy  $L_w^2(I)$  az

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(t)g(t)w(t) \, dt \quad (f, g \in L_w^2(I))$$

skaláris szorzattal szintén Hilbert-tér. A fenti tulajdonságú  $w$  függvényt *súlyfüggvénynek* szokás nevezni.

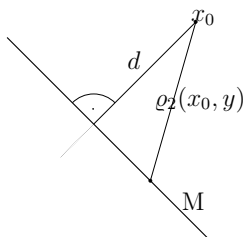
Egy Hilbert-térben alapvető fogalom az ortogonalitás. A  $H$ -beli  $x$  és  $y$  **vektorok egymásra ortogonálisak** (merőlegesek) — jelölésben  $x \perp y$  —, ha  $\langle x, y \rangle = 0$ , azaz a két vektor skaláris szorzata nulla. Azt mondjuk, hogy az  $x \in H$  *vektor ortogonális az  $M \subset H$  halmazra* — jelölésben  $x \perp M$  —, ha  $x$  ortogonális az  $M$  minden elemére. Végül a  $H$  Hilbert-tér  $M_1$  és  $M_2$  *részalmazát egymásra ortogonálisnak* nevezzük — jelölésben  $M_1 \perp M_2$  —, ha  $M_1$  bármely eleme ortogonális  $M_2$  minden elemére. Nyilvánvaló, hogy a  $\theta$  nullvektor ortogonális  $H$  minden elemére és egyúttal  $H$  minden részalmazára.

### 3. A legjobb approximáció problémaköre

Ebben a fejezetben az approximációelmélet néhány alapfeladatával foglalkozunk.

#### 3.1. A probléma felvetése és absztrakt megfogalmazása

Az elemi geometriában láttuk, hogy milyen fontos szerepet játszik pont és egyenes távolságának a fogalma. Az  $x_0$  pontnak és az  $M$  egyenesnek a távolságán a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz  $d$  hosszát értettük, és ezt a definíciót ekvivalens módon átfoglalmaztuk:



Vegyünk  $x_0$ -nak és az egyenes tetszőleges  $y$  pontjának a  $\varrho_2(x_0, y)$ -nal jelölt távolságát. Ekkor  $d$  ezek közül a lehető legkisebb:

$$d = \min \{ \varrho_2(x_0, y) \mid y \in M \} = \varrho_2(x_0, y_0).$$

Ugyanígy értelmeztük pont és sík távolságát. Nyilvánvaló, hogy ez a fogalom tetszőleges metrikus térben is bevezethető. Motivációként gondoljunk még Csebisev klasszikus tételére. A  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben hasonló módon értelmezhetjük egy  $f \in C[a, b]$  függvénynek  $\mathcal{P}_n$ -től, vagyis a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok halmazától vett távolságát. Csebisev tétele azt állítja, hogy  $\mathcal{P}_n$ -ben pontosan egy  $f$ -hez legközelebbi polinom található. Már ez az egyetlen példa is elég indok arra, hogy a szóban forgó fogalmat érdemes (első közelítésben metrikus térre) általánosítani.

**Definíció.** Az  $(X, \varrho)$  metrikus térben az  $x_0$  pont és a nemüres  $M \subset X$  halmaz **távolságát** így értelmezzük:

$$d(x_0, M) := \inf \{ \varrho(x_0, y) \mid y \in M \}.$$

Ezt a számot az  $x_0$  **pont  $M$ -beli elemekkel való legjobb közelítésének** is nevezzük.

Lássuk először a definíció néhány egyszerű következményét. Tetszőleges  $x_0 \in X$  pont és nemüres  $M \subset X$  halmaz esetén a következő állítások érvényesek.

- A szóban forgó infimum létezik és  $d(x_0, M) \geq 0$ .
- Van olyan  $M$ -beli  $(y_n)$  sorozat, amelyre  $\varrho(x_0, y_n) \rightarrow d(x_0, M)$  ( $n \rightarrow +\infty$ ). Valóban, az infimum definíciója alapján minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén létezik olyan  $y_n \in M$ ,

hogy

$$d(x_0, M) \leq \varrho(x_0, y_n) \leq d(x_0, M) + \frac{1}{n}.$$

Az  $(y_n) \subset M$  sorozatot az  $x_0$  pont egy **minimalizáló sorozatának** nevezzük.

- A  $d(x_0, M) = 0$  speciális esetre az alábbi ekvivalenciák érvényesek:

$$\begin{aligned} d(x_0, M) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists y \in M : \varrho(x_0, y) < \varepsilon; \\ &\iff x_0 \in \overline{M}; \\ &\iff \exists (y_n) \subset M : \varrho(x_0, y_n) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

A  $d(x_0, M) = 0$  egyenlőség tehát azt jelenti, hogy az  $x_0$  pont tetszőleges pontossággal megközelíthető (approximálható)  $M$ -beli elemekkel.

- A  $\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\} \subset M$  számhalmaznak általában nincs legkisebb eleme. Ha van, akkor a halmaznak van minimuma, és ez az infimummal egyenlő. Ekkor tehát létezik olyan  $y_0 \in M$ , amelyre a

$$d(x_0, M) = \varrho(x_0, y_0) (= \min\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\})$$

egyenlőség teljesül. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a  $d(x_0, M)$  *távolság  $y_0$ -lal realizálódik*. A változatosság kedvéért  $y_0$ -ra is több elnevezést használunk. Azt fogjuk mondani, hogy  $y_0$

- egy, az  $x_0$  ponthoz legközelebbi  $M$ -beli elem,
- minimális távolságra van  $x_0$ -tól,
- az  $x_0$  pont egy minimalizáló eleme,
- egy, az  $x_0$  pontot legjobban megközelítő  $M$ -beli elem.

A következő kérdéseket vetjük fel.

**1. A létezés problémája.** Adott  $x_0 \in X$  és  $M \subset X$  esetén vajon létezik-e  $x_0$ -at legjobban megközelítő  $M$ -beli  $y_0$  elem? Milyen feltételek mellett igaz az, hogy minden  $x_0 \in X$ -hez van ilyen  $y_0$ ?

**2. Az egyértelműség problémája.** Ha  $x_0$ -hoz létezik legjobban közelítő elem, akkor az milyen feltételek mellett lesz egyértelmű?

**3. A jellemzés problémája.** Létezés és egyértelműség esetén hogyan lehet jellemezni a legjobban közelítő elemet.

**4. Az előállítás problémája.** Ha az első két (három) kérdésre pozitív a válasz, akkor hogyan lehet a legjobban közelítő elemet explicit módon (pontosan) vagy numerikusan előállítani.

**5.** Meg lehet-e határozni  $d(x_0, M)$ -et? Ha nem, akkor milyen „jó” felső becslést lehet erre megadni?



Az **approximációelmélet** a fenti problémákra ad teljes vagy részleges választ akkor, amikor különböző függvényosztályokban, különböző normált terekben levő függvényeket közelítünk  $M$ -beli elemekkel, ahol  $M$  bizonyos „jól” kezelhető függvényekből (pl. algebrai vagy trigonometrikus polinomok, spline-függvények) álló halmaz.

A részletek ismertetése előtt lássunk néhány egyszerű példát.

- A közönséges háromdimenziós térben (vagyis az  $(\mathbb{R}^3, \varrho_2)$  metrikus térben) tetszőleges  $x_0$  pont és  $M$  egyenes esetén pontosan egy  $x_0$ -t legjobban megközelítő  $y_0 \in M$  pont létezik, és ezt a merőlegességgel lehet jellemezni.

- Ha az  $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$  metrikus térben  $M := k_1(0)$  az origó középpontú 1-sugarú *nyílt* körlap,  $x_0$  pedig a  $(2, 0)$  koordinátájú pont, akkor  $M$ -ben nyilván nincs  $x_0$ -hoz legközelebbi pont. Ha a zárt körlapot vesszük, akkor egyetlen  $x_0$ -hoz legközelebbi pont van.

- Ha az  $(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty)$  metrikus térben  $M := k_1(0)$  (azaz  $M$  az origó középpontú, a tengelyekkel párhuzamos 2 egység oldalú *zárt* négyzet),  $x_0$  pedig a  $(2, 0)$  koordinátájú pont, akkor  $M$ -ben végtelen sok  $x_0$ -hoz legközelebbi pont van. (Melyek ezek?)

- Csebisev tétele azt állítja, hogy az  $(C[a, b], \varrho_\infty)$  metrikus térben minden  $f \in C[a, b]$  függvény esetén  $\mathcal{P}_n$ -ben pontosan egy  $f$ -hez legközelebbi polinom található.

A továbbiakban a felvetett problémák közül az csak első kettővel foglalkozunk. Az iménti példák azt mutatják, hogy *pozitív válaszhoz egyrészt az  $X$  térre, másrészt pedig az  $M$  halmazra is kell kiegészítő feltételeket tenni.*

## 3.2. A legjobban közelítő elem létezése metrikus terekben

A legáltalánosabb térstruktúráinkban, vagyis metrikus terekben kompakt részhalmazok esetén már biztosítható a legjobban közelítő elemnek a létezése.

**1. tétel.** *Az  $(X, \varrho)$  metrikus tér tetszőleges  $M \subset X$  **kompakt** részhalmaza esetén minden  $x_0 \in X$  ponthoz van legközelebbi  $M$ -beli  $y_0$  pont, azaz*

$$\forall x_0 \in X\text{-hez} \quad \exists y_0 \in M : \quad \varrho(x_0, y_0) = d(x_0, M).$$

**Bizonyítás.** Legyen  $d := d(x_0, M) = \inf\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\}$ , és vegyünk egy  $(z_n)$  minimalizáló sorozatot, azaz tegyük fel, hogy

$$(z_n) \subset M : \quad \varrho(x_0, z_n) \rightarrow d, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Mivel  $M$  kompakt, ezért  $(z_n)$ -nek van olyan konvergens  $(z_{n_k})$  részsorozata, amelyeknek az  $y_0$  határértéke  $M$ -ben van. Megmutatjuk, hogy  $y_0$  az  $x_0$  ponthoz legközelebbi  $M$ -beli elem, azaz  $\varrho(x_0, y_0) = d$ . Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\varrho(x_0, y_0) \leq \varrho(x_0, z_n) + \varrho(z_n, z_0).$$

A bal oldal itt  $n$ -től független, a jobb oldal pedig  $n_k \rightarrow +\infty$  esetén  $d$ -hez tart, ezért  $\varrho(x_0, y_0) \leq d$ . Másrészt  $y_0 \in M$ , ezért a  $\varrho(x_0, y_0) \geq d$  egyenlőtlenség is igaz, következésképpen  $\varrho(x_0, y_0) = d$ . ■

**Megjegyzés.** A bizonyításban szereplő  $(z_n)$  sorozat bármely  $\emptyset \neq M \subset X$  halmaz esetén *korlátos*. Valóban, van olyan  $n \in \mathbb{N}$ , amellyel pl.  $\varrho(x_0, z_n) \leq d + 1$  ( $n \geq N$ ) teljesül. Ezért az

$$r := \max \{d + 1, \varrho(x_0, z_1), \varrho(x_0, z_2), \dots, \varrho(x_0, z_{N-1})\}$$

jelöléssel  $\varrho(x_0, z_n) \leq r$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), azaz  $(z_n) \subset \overline{k_r(x_0)}$ . Így a bizonyításban az  $M$  kompaktsága helyett csak az  $M$  halmaz ún. *kvázikompaktságát* használtuk ki; tehát azt, hogy bármely korlátos  $(z_n) \subset M$  sorozatnak van  $M$ -ben konvergens részsorozata. Például  $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ -ben ( $n \in \mathbb{N}$ ) minden nemüres zárt  $M$  halmaz kvázikompakts.

### 3.3. Approximációs tételek normált terekben

Most *valós*  $(X, \|\cdot\|)$  normált terekben tanulmányozzuk a legjobban közelítő elem *létezésének* és *egyértelműségének* a problémáját. Az  $x_0 \in X$  pontnak és a nemüres  $M \subset X$  halmaznak a távolsága ebben az esetben

$$d(x_0, M) = \inf \{\|x_0 - y\| \mid y \in M\}.$$

Az  $M$  halmazra vonatkozóan két esetet fogunk vizsgálni:

- $M$  véges dimenziós altér  $X$ -ben,
- $M \subset X$  konvex és zárt halmaz.

#### 3.3.1. Altértől vett távolság

##### A létezés problémája

Tegyük fel, hogy  $M$  az  $X$  normált (tehát speciálisan metrikus) tér egy altere. Ez általában nem kompakt, ezért az előző tételünk közvetlenül nem alkalmazható. Emlékezzünk viszont arra, hogy egy *véges dimenziós térnek* egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt, és ilyen halmazokat könnyen ki tudunk

jelölni. Ezeket az észrevételeket felhasználva megmutatjuk, hogy normált tér tetszőleges *véges dimenziós* alterében mindig van minimalizáló vektor.

**2. tétel** (a legjobban közelítő elem létezése). *Legyen  $M$  az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér véges dimenziós altere. Ekkor bármely  $x_0 \in X$  elemhez van hozzá legközelebbi  $M$ -beli  $y_0$  vektor, azaz*

$$\forall x_0 \in X\text{-hez } \exists y_0 \in M : \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

**Bizonyítás.** Vegyük az alter egy  $\xi \in M$  rögzített pontját, és jelöljük  $M^*$ -gal azon  $y \in M$  vektorok halmazát, melyekre az  $\|y - x_0\| \leq \|x_0 - \xi\|$  egyenlőtlenség teljesül:

$$M^* := \{y \in M \mid \|y - x_0\| \leq \|x_0 - \xi\|\} \subset M.$$

Ekkor  $M^*$  a véges dimenziós  $M$  alter egy korlátos és zárt, következésképpen kompakt részhalma. Az 1. tételből tehát következik az állítás. ■

### Az egyértelműség problémája

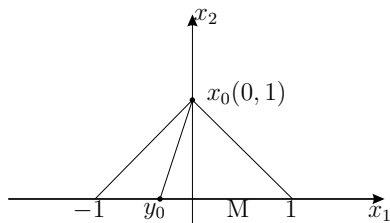
Ez a létezés problémájánál már nehezebb. Érdemes megint egyszerű példákból kiindulni. Tekintsük a különböző normákkal ellátott  $\mathbb{R}^2$  síkot. Egyszerű észrevenni, hogy a norma megválasztásától függ a legközelebbi elem egyértelműsége.

- Tekintsük az *euklideszi normával* ellátott síkot, azaz legyen  $X := \mathbb{R}^2$  és  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ . Vegyünk egy  $M \subset \mathbb{R}^2$  alteret, vagyis egy origón átmenő egyenest és egy  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  pontot. Az elemi geometriából tudjuk, hogy ekkor bármelyik  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  pont esetén az  $M$  egyenesen *egyetlen* olyan  $y_0 \in M$  pont van, amelyik legközelebb van az  $x_0$ -hoz.

- Vegyük most a *maximum-normával* ellátott síkot ( $X := \mathbb{R}^2, \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ ), és tekintsük az  $x_0 := (0, 1)$  pontot, valamint az  $y = 0$  egyenletű egyenest, vagyis az

$$M := \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

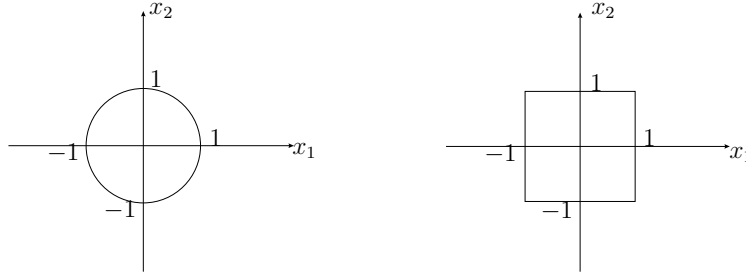
alteret. Világos, hogy ekkor  $M$ -ben *végtelen sok*  $x_0$ -hoz legközelebbi  $y_0 \in M$  pont van.



Ha  $y_0 := (y, 0)$  és  $|y| \leq 1$ , akkor  $\|x_0 - y_0\|_\infty = 1$ , tehát minden ilyen  $y_0$  pontra igaz, hogy

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, M) = 1.$$

Ez a két egyszerű példa azt mutatja, hogy az egyértelműséghez a normára további feltételt kell tennünk. A kérdés persze az, hogy a normának milyen tulajdonságán múlik az egyértelműség. A válasz kereséséhez nézzük meg a fenti két esetben az *egységgömböket!*



Az első szembevető különbség az, hogy a második esetben az egységgömb-felület *tartalmaz szakaszt*, az első esetben pedig nem. Kiderült (és ezt hamarosan meg is fogjuk mutatni), hogy az egyértelműség az egységgömb-felületnek ezen geometriai tulajdonságán múlik. A részletek pontosítása előtt ennek a szemléletes fogalomnak a „geometriától mentes” értelmezését kell megadnunk tetszőleges normált térre. Ezek után elég „természetes” a következő

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált teret **szigorúan konvexnek** nevezzük akkor, ha az  $X$ -beli origó középpontú egységgömb-felület nem tartalmaz szakaszt, azaz ha

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \implies x = y.$$

Érdekes az a (nem nyilvánvaló) tény, hogy ezt a geometriai tulajdonságot tisztán algebrai úton is lehet jellemezni. Induljunk ki a normált terekben alapvető szerepet játszó

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{3.1}$$

háromszög-egyenlőtlenségből, és vessük fel azt a kérdést, hogy vajon mikor áll itt fenn az egyenlőség. Az világos, hogy tetszőleges normált térben az *egyirányú* vektorokra ( $x$  és  $y$  ilyenek, ha  $y = \lambda x$  valamely  $\lambda \geq 0$  számra) (3.1)-ben egyenlőség van. A fenti két példában könnyű ellenőrizni, hogy az euklideszi norma esetén (3.1)-ben *csak az egyirányú* vektorokra van egyenlőség, a maximum-normára ez azonban nem igaz (tekintsük például az egységgömb-felület valamelyik szakaszát). Ez azt jelenti, hogy tetszőleges normált térben a normától függ, hogy milyen vektorokra áll fenn az egyenlőség a háromszög-egyenlőtlenségben. *Szigorúan normált térnek* fogjuk nevezni a teret akkor, ha a háromszög-egyenlőtlenségben csak az egyirányú

vektorok esetén áll fenn az egyenlőség. Meg fogjuk mutatni, hogy a normának ez az algebrai tulajdonsága *ekvivalens* a fentebb bevezetett geometriai tulajdonsággal.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér **szigorúan normált**, ha minden  $x, y \in X$  esetén

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \geq 0 : y = \lambda x.$$

**3. tétel.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha szigorúan normált.

**Bizonyítás.**  $\Leftarrow$  Tegyük fel először azt, hogy a tér szigorúan normált, és mutassuk meg, hogy ekkor szigorúan konvex is. Vegyünk olyan  $x, y \in X$  vektorokat, amelyekre fennáll az

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1$$

egyenlőség. Ebből az következik, hogy

$$\left\| \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right\| = \left\| \frac{x}{2} \right\| + \left\| \frac{y}{2} \right\|.$$

Mivel az  $X$  tér szigorúan normált, ezért  $\frac{y}{2} = \lambda \frac{x}{2}$ , azaz  $y = \lambda x$  valamilyen  $\lambda > 0$  számra.  $x$  és  $y$  normája azonban 1, ezért  $\lambda = 1$ , azaz  $x = y$ . Ez azt jelenti, hogy a tér szigorúan konvex.

$\Rightarrow$  Most tegyük fel, hogy az  $X$  szigorúan konvex tér, és lássuk be, hogy szigorúan normált is. Ehhez elég bebizonyítani azt, hogy ha a nemnulla vektorokra fennáll az  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  egyenlőség, akkor  $\exists \lambda > 0 : y = \lambda x$ . Tegyük fel tehát, hogy  $x, y \in X \setminus \{\theta\}$  és

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|. \quad (3.2)$$

Abban az esetben, ha  $x$  és  $y$  normája megegyezik, már készen is vagyunk, ti. a szigorú konvexitásból (a norma homogenitásának a felhasználásával) rögtön következik az  $x = y$  egyenlőség.

Az (3.2)-ben azonban nyugodtan feltehetjük, hogy  $\|x\| = \|y\|$ , mert

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies \forall \mu > 0\text{-ra} : \|x + \mu y\| = \|x\| + \|\mu y\|. \quad (3.3)$$

Ennek az állításnak a bizonyítása  $0 < \mu \leq 1$  esetén az

$$\begin{aligned} \|x\| + \|y\| &= \|x + y\| = \|x + \mu y + (1 - \mu)y\| \leq \|x + \mu y\| + (1 - \mu)\|y\| \leq \\ &\leq \|x\| + \|\mu y\| + (1 - \mu)\|y\| = \|x\| + \mu\|y\| + (1 - \mu)\|y\| = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség- (de valójában egyenlőség-) láncból következnek. Az  $x$  és  $y$  szerepét felcserélve ebből a minden  $0 < \nu \leq 1$ -re igaz  $\|\nu x + y\| = \|\nu x\| + \|y\|$  egyenlőséget kapjuk, és ebből  $\nu$ -vel való osztás után adódik (3.3) a  $\mu \geq 1$  esetre is. ■

A nevezetes normált tereinkre ebből a szempontból a következők érvényesek.

### Példák.

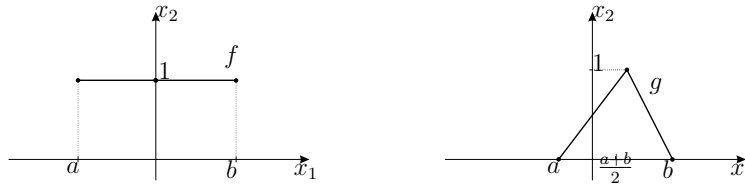
- Az  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  terek  $1 < p < +\infty$  esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha  $p = 1$  és  $p = +\infty$ , akkor nem azok.

- Az  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  terek  $1 < p < +\infty$  esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha  $p = 1$  és  $p = +\infty$ , akkor nem azok.

- A  $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p})$  ( $I \subset \mathbb{R}$  nemelfajuló intervallum) terek  $1 < p < +\infty$  esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha  $p = 1$  és  $p = +\infty$ , akkor nem azok.

(A pozitív állítások a megfelelő Minkowski-egyenlőtlenségekből vezethetők le. A negatív esetekben pedig viszonylag egyszerű ellenpéldákat lehet megadni.)

- A  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  normált tér *nem* szigorúan konvex/normált. Tekintsük ui. a következő függvényeket:



Világos, hogy  $\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ , de nincs olyan  $\lambda > 0$  szám, hogy  $f = \lambda g$ , ezért a tér nem szigorúan konvex.

- Minden  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér szigorúan normált/konvex. Ez az alábbi (egyszerűen bebizonyítható) állításokból következik: ha  $x, y \in H$  és

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= \|x\| \cdot \|y\| && \iff && x = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ \|x + y\| &= \|x\| + \|y\| && \iff && \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy szigorúan konvex/normált terekben tetszőleges pontot és bármelyik véges dimenziós alteret véve pontosan egy olyan altérbeli pont van, amelyik legközelebb van a kiválasztott ponthoz.

**4. tétel** (a legjobban közelítő elem egyértelműsége). *Legyen  $M$  egy véges dimenziós altér az  $(X, \|\cdot\|)$  szigorúan konvex/normált térben. Ekkor minden  $x_0 \in X$  ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra levő  $y_0$  pont  $M$ -ben, azaz*

$$\forall x_0 \in X\text{-hez} \quad \exists! y_0 \in M : \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

**Bizonyítás.** Az  $y_0$  pont létezése az 2. tételből következik.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az  $y_0$  és  $y'_0$   $M$ -beli elem mindegyike minimalizáló vektor, azaz

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y'_0\| = d(x_0, M) =: d. \quad (3.4)$$

Először azt mutatjuk meg, hogy ekkor az  $y_0, y'_0$  pontokat összekötő szakasz felezőpontja, vagyis az az  $\frac{y_0 + y'_0}{2}$  pont is egy legjobban közelítő elem. A háromszögegyenlőtlenség alapján egyrészt

$$\left\| x_0 - \frac{y_0 + y'_0}{2} \right\| = \frac{\|(x_0 - y_0) + (x_0 - y'_0)\|}{2} \leq \frac{\|x_0 - y_0\| + \|x_0 - y'_0\|}{2} = d.$$

Másrészt az  $M$  egy altér, ezért a felezőpont is hozzá tartozik  $M$ -hez, azaz  $\frac{y_0 + y'_0}{2} \in M$ . Ekkor viszont  $d$  értelmezése miatt  $\left\| x_0 - \frac{y_0 + y'_0}{2} \right\| \geq d$ , tehát

$$\left\| x_0 - \frac{y_0 + y'_0}{2} \right\| = d. \quad (3.5)$$

Ha  $d = 0$ , akkor nyilván  $x_0 = y_0 = y'_0$ . Ha  $d > 0$ , akkor (3.4) és (3.5) alapján kapjuk, hogy

$$\left\| \frac{x_0 - y_0}{d} \right\| = \left\| \frac{x_0 - y'_0}{d} \right\| = \left\| \frac{x_0 - \frac{y_0 + y'_0}{2}}{d} \right\| = 1.$$

Mivel az  $X$  tér szigorúan konvex, ezért ebből az következik, hogy  $y_0 = y'_0$ , és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

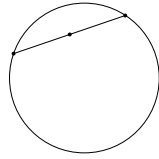
### 3.3.2. Zárt és konvex halmazoktól vett távolság

Most nézzük a legjobb approximáció problémáját abban az esetben, ha  $M$  nem altere az  $X$  normált térnek. Nem túl nehéz meggondolni, hogy a minimalizáló elem létezéséhez és egyértelműségéhez  $M$ -nek legalább *zárt*nak és *konvex*nek kell lenni. Az is várható, hogy az egyértelműséghez a normára is kell tenni valamilyen feltételt. Ezt nem egyszerű megtalálni. A végeredmény:

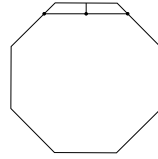
**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér **egyenletesen konvex**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 : \|x\| = \|y\| = 1 \text{ és } \left\| \frac{x + y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

Az egyenletes konvexitás az egységömb-felület egy geometriai tulajdonságát fejezi ki: ha azon olyan pontokat veszünk, amelyeket összekötő szakasz felezőpontja közel van a felülethez, akkor a két pont közel van egymáshoz:



egyenletesen konvex



nem egyenletesen konvex

**Megjegyzés.** Az egyenletes konvexitásnak egyfajta algebrai interpretációja is adható. Emlékeztetünk arra, hogy euklideszi terek fontos tulajdonsága a paralelogramma-azonosság:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ez normált terekben általában nem igaz. Az egyenletes konvexitást felfoghatjuk úgy is, mint ennek az azonosságnak egy gyengített változatát.

**5. tétel** (az egyenletes konvexitás és a szigorú konvexitás kapcsolata). *Ha az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér egyenletesen konvex, akkor szigorúan konvex is.*

*Ha az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér szigorúan konvex és véges dimenziós, akkor egyenletesen konvex is.*

- Véges dimenzióban a két fogalom ekvivalens.
- A tétel első felében levő állítás megfordítása nem igaz!
- A korábbi szigorúan konvex példák mindegyike egyenletesen konvex is.

**Az alaptétel:** Szőkefalvi-Nagy Béla, 1942.

**6. tétel.** *Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  egyenletesen konvex Banach tér és  $M \subset X$  tetszőleges nemüres konvex zárt halmaz. Ekkor minden  $x_0 \in X$  ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra lévő  $M$ -beli  $y_0$  pont.*

### 3.3.3. Approximációs tételek konkrét függvényterekben

Alkalmazzuk most a legjobban közelítő elem létezésére és egyértelműségére vonatkozó általános eredményeket (1. a 2. és a 4. tételeket) konkrét függvényterekre. Tekintsük először a folytonos függvények  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  normált terét. A 2. tétel közvetlen következménye az alábbi

**7. tétel.** *Legyen  $f \in C[a, b]$  folytonos függvény. Ekkor minden  $n$  természetes számhoz létezik  $f$ -et egyenletesen legjobban megközelítő legfeljebb  $n$ -edfokú  $p_n$  algebrai*



polinom, az

$$\forall f \in C[a, b]\text{-hez és } \forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists p_n \in \mathcal{P}_n : \\ \|f - p_n\|_\infty = \inf\{\|f - p\|_\infty \mid p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Az egyértelműségre vonatkozó általános tétel nem alkalmazható, mert a maximum-normával ellátott  $C[a, b]$  tér nem szigorúan normált. Az egyértelműség azonban igaz. Ez Csebisev tételéből következik.

Nézzük most a  $(L^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p})$  tereket. Ezek  $1 < p < +\infty$  esetén szigorúan normáltak, ezért a 2. és a 4. tételekből kapjuk a következő állítást.

**8. tétel.** *Legyen  $1 \leq p \leq +\infty$ . Ekkor bármely  $f \in L^p(a, b)$  függvényhez és minden  $n$  természetes számhoz létezik  $f$ -et az  $L^p$ -normában legjobban megközelítő legfeljebb  $n$ -edfokú  $p_n$  polinom, azaz*

$$\forall f \in L^p(a, b)\text{-hez és } \forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists p_n \in \mathcal{P}_n : \\ \|f - p_n\|_{L^p} = \inf\{\|f - p\|_{L^p} \mid p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Ha  $1 < p < +\infty$ , akkor  $p_n$  egyértelműen meghatározott.

Könnyű látni, hogy  $p = 1$  esetén az egyértelműség nem igaz. Tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

függvényt és a konstans polinomokat.

### 3.4. Approximációs tételek Hilbert-terekben

A vizsgált általános térstruktúráink közül a Hilbert-terek vannak legközelebb a háromdimenziós térhez, illetve  $\mathbb{R}^n$ -hez. Idézzük fel  $\mathbb{R}^3$ -ban a legjobb approximáció problémájának elemi geometriából ismert megoldását. Tekintsünk egy  $x_0$  pontot és egy origón átmenő  $M$  síkot (alteret). Ekkor  $M$ -ben egyetlen  $x_0$ -hoz legközelebbi  $y_0$  pont van. Ez a pont az  $x_0$ -ból a síkra állított merőleges egyenesnek és a síknak a metszéspontja. Ez azt is jelenti, hogy  $y_0$  az az egyetlen  $M$ -beli elem, amelyikre az  $x_0 - y_0$  vektor merőleges a síkra, azaz merőleges az  $M$  altér minden vektorára. Megmutatjuk, hogy hasonló állítás Hilbert-terekben is érvényes.

Legyen  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  valós Hilbert-tér, és jelölje  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  a skaláris szorzat által indukált normát. Mivel minden Hilbert-tér szigorúan normált, ezért az előző pont tételeiből a legjobb approximáció létezésére és egyértelműségére vonatkozó

állításokat megkapjuk abban az esetben, ha az altér *véges dimenziós*. Ezt a feltételt a gyengébb *zárt altér* feltétellel fogjuk helyettesíteni. Világos, hogy minden véges dimenziós altér egyúttal zárt altér is; a zártság pedig szükséges a legjobban közelítő elem létezéséhez. Megjegyezzük még azt is, hogy egy Hilbert-tér altere nem feltétlenül zárt halmaz.

**9. tétel.** *Legyen  $M$  a  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér egy **zárt altere** és  $x_0$  a  $H$  tér egy tetszőleges pontja. Ekkor pontosan egy olyan  $M$ -beli  $y_0$  pont létezik, amelyik minimális távolságra van  $x_0$ -tól, azaz*

$$\forall x_0 \in H\text{-hoz } \exists! y_0 \in M : \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

Az  $x_0 - y_0$  vektor merőleges az  $M$  altérre, azaz

$$\langle x_0 - y_0, y \rangle = 0 \quad (\forall y \in M). \quad (3.6)$$

**Bizonyítás.** *Létezés.* Legyen  $d := d(x_0, M) = \inf\{\|x_0 - y\| \mid y \in M\}$ , és vegyünk egy tetszőleges  $M$ -beli minimalizáló sorozatot, azaz legyen  $(y_n) \subset M$  egy olyan sorozat, amelyre

$$d_n := \|x_0 - y_n\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (3.7)$$

Megmutatjuk, hogy  $(y_n)$  Cauchy-sorozat. Írjuk fel az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

paralelogramma-azonosságot az  $x, y$  helyett az  $x_0 - y_n$  és  $x_0 - y_m$  vektorokra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \| (x_0 - y_n) + (x_0 - y_m) \|^2 + \| (x_0 - y_n) - (x_0 - y_m) \|^2 = \\ & = \| 2x_0 - (y_n + y_m) \|^2 + \| y_n - y_m \|^2 = 2(\|x_0 - y_n\|^2 + \|x_0 - y_m\|^2) = 2(d_n^2 + d_m^2), \end{aligned}$$

azaz

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2) - 4 \left\| x_0 - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2. \quad (3.8)$$

Mint ahogy az  $y_n, y_m$  vektorokkal együtt ezek számtani közepe is az  $M$  altérben van és  $d$  értelmezése alapján

$$\left\| x_0 - \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \geq d,$$

ezért (3.8)-ból következik, hogy minden  $n, m \in \mathbb{N}$  esetén

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldala  $d_n \rightarrow d$  miatt 0-hoz tart, ha  $n, m \rightarrow +\infty$ , de akkor a bal oldala is 0-hoz tart, ami azt jelenti, hogy  $(y_n)$  valóban Cauchy-sorozat, ezért a  $H$  tér teljessége miatt a sorozat konvergens. Legyen  $y_0$  ennek a sorozatnak a határértéke. Mivel  $M$  zárt altér, ezért  $y_0 \in M$ . A norma folytonossága miatt

$$d_n = \|x_0 - y_n\| \rightarrow \|x_0 - y_0\| \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (3.9)$$

másrészt  $d_n \rightarrow d$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), így  $\|x_0 - y_0\| = d$ . Ezzel igazoltuk, hogy a  $d(x_0, M)$  távolság az  $y_0 \in M$  ponttal realizálódik, azaz  $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, M)$ . Megmutattuk tehát azt, hogy *tetszőleges minimalizáló sorozat konvergens, és a határértéke egy minimalizáló vektor.*

*Egyértelműség.* Most megmutatjuk a minimalizáló vektor egyértelműségét. Tegyük fel, hogy  $y_0, y'_0 \in M$  olyan tetszőleges vektorok, amelyekre

$$d(x_0, M) = \|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y'_0\|$$

teljesül, és definiáljuk a következő  $(y_n)$  sorozatot:

$$y_n := y_0, \text{ ha } n = 2, 4, \dots \quad \text{és} \quad y_n := y'_0 \text{ ha } n = 1, 3, \dots$$

Ekkor  $(y_n)$  nyilván egy minimalizáló sorozat, ami a fentiek alapján szükségképpen konvergens. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha  $y_0 = y'_0$ .

*Az ortogonalitás igazolása.* Az (3.6) reláció bizonyításához legyen  $v_0 := x_0 - y_0$ . Tetszőleges  $y \in M$  vektorral tekintsük a

$$p(t) := \|x_0 - (y_0 + ty)\|^2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ez a

$$p(t) = \|v_0 - ty\|^2 = \|v_0\|^2 - 2\langle v_0, y \rangle t + \|y\|^2 t^2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

alakban is írható, azaz  $p$  valós együtthatós másodfokú polinom, ha  $y \neq \theta$ . Mivel minden  $t \in \mathbb{R}$  mellett  $y_0 + ty \in M$ , ezért a  $d = d(x_0, M)$  távolság értelmezése miatt  $\|x_0 - (y_0 + ty)\| \geq d$ , következésképpen  $p(t) \geq d^2$  minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén, míg  $p(0) = \|x_0 - y_0\|^2 = d^2$ . Ebből következik, hogy  $t = 0$  mellett a  $p$  polinomnak minimuma van, ezért  $p'(0) = -2\langle v_0, y \rangle = 0$ , vagyis minden  $y \in M$  esetén  $\langle v_0, y \rangle = 0$ , és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

**Megjegyzés.** Megmutatható, hogy tetszőleges  $M \subset H$  altér és  $x_0 \in H$  esetén  $y_0 \in M$  pontosan akkor minimalizáló pont, ha  $\langle x_0 - y_0, y \rangle = 0$  ( $y \in M$ ).

### 3.4.1. Projekciós (vetítő) operátorok

**10. tétel** (a Riesz-féle felbontási tétel). *Legyen  $M$  a  $H$  Hilbert-tér egy zárt altere. Ekkor minden  $x \in H$  vektor egyértelműen állítható elő az*

$$x = x_1 + x_2$$

*alakban, ahol  $x_1 \in M$  és  $x_2 \perp M$ . Ezt az  $x_1$  vektort az  $x$ -nek az  $M$  altérre való **ortogonális vetületének** (vagy projekciójának) nevezzük.*

**Bizonyítás.** Az előző tétel szerint minden  $x \in H$  vektorhoz létezik egyetlen olyan  $x_1 \in M$  vektor, amelyre  $d(x, M) = \|x - x_1\|$ . Legyen  $x_2 := x - x_1$ . Ekkor  $x = x_1 + x_2$  és (3.6) alapján  $x_2 \perp M$ .

A felbontás egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy az  $x = x_1 + x_2$  és  $x = y_1 + y_2$  az  $x$  elem két kívánt tulajdonságú felbontása, azaz legyen  $x_1, y_1 \in M$  és  $x_2, y_2 \perp M$ . Ekkor  $x_1 - y_1 \in M$  és  $y_2 - x_2 \perp M$ . Minthogy  $z := x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ , ezért  $z \in M$  és  $z \perp M$ , következésképpen  $\langle z, z \rangle = 0$ , azaz  $z = \theta$ . Innen  $x_1 = y_1$  és  $x_2 = y_2$  következik. Ezzel a felbontás egyértelműségét igazoltuk. ■

Az  $x \in H$  vektor ortogonális felbontásában szereplő  $x_1, x_2$  vektorokra fennáll az

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \tag{3.10}$$

egyenlőség, ami a **Pitagorasz-tétel** Hilbert-térbeli változataként interpretálható. Valóban,

$$\|x\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + 2\langle x_1, x_2 \rangle + \|x_2\|^2,$$

ezért az  $x_1, x_2$  vektorok ortogonalitását figyelembe véve adódik a (3.10) egyenlőség.

A Riesz-féle felbontási tételből kiindulva bevezetjük a *projekciós operátor* fogalmát.

**Definíció.** Legyen  $M$  a  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert-tér zárt altere és

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, \quad x_2 \perp M$$

az  $x \in H$  vektor ortogonális felbontása. A

$$P_M : H \rightarrow M, \quad P_M(x) := x_1$$

utasítással értelmezett leképezést az  $M$  zárt altérre való **ortogonális projekciós** (vagy **vetítő**) operátornak nevezzük.

**3.4.2. A projekciós operátor explicit előállítása**

Gyakran szükség van valamely  $x \in H$  vektor legjobb  $M$ -beli közelítésének explicit, numerikus szempontból is használható előállítására. Ha  $M \subset H$  véges dimenziós ( $\dim M = n$ ) altér, akkor ilyen előállítás igen egyszerűen magadható. Ebben az esetben  $M$  zárt altér, ezért  $x$ -nek az  $M$  altérre vett  $y := P_M(x)$  vetülete lesz az  $x$ -et legjobban közelítő  $M$ -beli elem.  $P_M(x)$  explicit alakjának előállításához tekintsünk  $M$ -ben egy  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ortonormált bázist, azaz tegyük fel, hogy

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

(Később majd megmutatjuk, hogy az  $M$  tetszőleges lineárisan független  $f_1, f_2, \dots, f_n$  bázisából az ún. *Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással* hogyan kapható meg egy ilyen ortonormált bázis.)

Vegyünk egy tetszőleges  $H$ -beli  $x$  elemet. A  $P_M(x)$  ortogonális vetületet írjuk fel az  $e_k$  vektorok lineáris kombinációjaként:

$$P_M(x) = x_1 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k.$$

Ezt az egyenlőséget skalárisan megszorozva  $e_j$ -vel ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) kapjuk, hogy:

$$\langle P_M(x), e_j \rangle = \langle x_1, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j,$$

azaz a különböző indexű  $\langle e_k, e_j \rangle$  tagok mind nullák, az azonos indexűek pedig eggyel egyenlők. Ez azt jelenti, hogy

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^n \langle x_1, e_k \rangle \cdot e_k.$$

Mivel  $x_2 := x - x_1 \perp M$ , ezért minden  $j = 1, 2, \dots, n$  esetén  $\langle x - x_1, e_j \rangle = 0$ , következésképpen

$$\langle x_1, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

azaz

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

A fentieket összefoglalva adódik a

**11. tétel.** *Ha  $M$  a  $H$  Hilbert tér egy véges dimenziós altere és  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ennek altérnek egy ortonormált bázisa, akkor a projekciós operátor a következő explicit alakban adható meg:*

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \quad (x \in H).$$

## 4. Hilbert-terekben a Fourier-sorok elmélete

### 4.1. A probléma felvetése

Most ismét bizonyos **elemi geometriai** ismeretekre utalunk. Láttuk a (közönséges) sík, illetve tér vektorai között értelmezett **skaláris szorzat** jelentőségét: segítségével vektoroknak nemcsak a merőlegessége, hanem a hosszúsága, szöge is értelmezhető. Egyik alapvető eredmény az volt, hogy minden vektor egyértelműen írható fel a merőleges egységvektorok lineáris kombinációjával, ahol az együtthatók éppen az adott vektornak a megfelelő egységvektorokra eső merőleges vetületei.

A **lineáris algebrában** ezt az eredményt tetszőleges **véges dimenziós** euklideszi térre általánosítottuk. Ott meg azt láttuk, hogy minden véges dimenziós  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  valós euklideszi térben (legyen  $\dim E = n$ ) van  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ortonormált bázis, és minden  $x \in E$  vektor az

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

alakban írható fel.

Ebben a fejezetben ezt az eredményt általánosítjuk **végtelen dimenziós** terekre. Számos fogalom és eredmény euklideszi terekben is értelmezhető. Az egyszerűség végett a továbbiakban mi csak teljes euklideszi tereket, azaz Hilbert-tereket, ezen belül is csak **valós Hilbert-tereket** fogunk tekinteni.

A **fejezet fő célja** annak igazolása, hogy minden (végtelen dimenziós) **szeparábilis** Hilbert-térben van  $(e_n, n \in \mathbb{N})$  ortonormált **bázis** és minden  $x \in H$  esetén

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Egy ilyen  $(e_n)$  rendszer tehát a „derékszögű koordináta-rendszer” szerepét játssza a végtelen dimenziós terekben. Meg fogjuk mutatni azt is, hogy minden szeparábilis Hilbert-tér izometrikusan izomorf az  $l^2$  Hilbert-térrel, azaz lényegében egyetlen szeparábilis Hilbert-tér létezik.

### 4.2. Ortogonalitás. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

Ebben a fejezetben csak **valós Hilbert-terekről** lesz szó. Jelölésükre a  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — vagy röviden a  $H$  — szimbólumot fogjunk használni. Feltesszük tehát, hogy  $H$

egy  $\mathbb{R}$  feletti lineáris tér,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  skaláris szorzat  $H$ -n és a tér teljes a skaláris szorzat által indukált

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in H)$$

normával.  $H$  nullelemét a  $\theta$  szimbólummal jelöljük.

A  $H$  Hilbert-tér egy tetszőleges  $M$  részhalmaza esetén is az  $[M]$  szimbólummal jelöljük az  $M$  halmaz **lineáris burkát**, vagyis az  $M$  halmazt tartalmazó legszűkebb lineáris alteret. Ez az altér, amelyet a  $M$  által generált altérnek is szokás nevezni, megegyezik az  $M$  elemeiből képzett összes (véges) lineáris kombinációk halmazával, azaz

$$[M] = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, f_i \in M, i = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}\}.$$

A  $H$  Hilbert-térbeli  $M$  **halmaz lezárásának** nevezzük – és az  $\overline{M}$  szimbólummal jelöljük – az  $M$ -et tartalmazó legszűkebb zárt halmazt.  $\overline{M}$  pontosan azokat a  $H$ -beli elemeket tartalmazza, amelyek tetszőleges (sugarú) környezetében van  $M$ -beli elem.

A metrikus terekhez hasonlóan a  $H$  Hilbert-teret is akkor nevezzük **szeperábilisnek**, ha létezik benne egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz, vagyis van olyan megszámlálható  $M \subset H$  halmaz, amelyre  $\overline{M} = H$  teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden  $x \in H$  elemhez és minden  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $M$ -beli  $y$  elem, hogy  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Könnyű meggondolni, hogy normált – speciálisan Hilbert – terekben a szeperabilitás azzal ekvivalens, hogy a  $H$  térnek van olyan megszámlálható  $M$  részhalmaza, amelynek a lineáris burka mindenütt sűrű  $H$ -ban, azaz  $[M] = H$ .

**1. tétel.** Az alábbi Hilbert-terek mindegyike szeperábilis:

- az  $l^2$ -tér,
- tetszőleges  $I \subset \mathbb{R}$  nemdegenerált intervallum esetén az  $L^2(I)$ -tér,
- tetszőleges  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum és  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény esetén az  $L_w^2(I)$ -tér.

Egy Hilbert-térben alapvető fogalom az ortogonalitás. A  $H$ -beli  $x$  és  $y$  **vektorok egymásra ortogonálisak** (merőlegesek) – jelölésben  $x \perp y$  –, ha  $\langle x, y \rangle = 0$ , azaz a két vektor skaláris szorzata nulla. Azt mondjuk, hogy az  $x \in H$  **vektor ortogonális az  $M \subset H$  halmazra** – jelölésben  $x \perp M$  –, ha  $x$  ortogonális az  $M$  minden elemére. Végül a  $H$  Hilbert-tér  $M_1$  és  $M_2$  részhalmazát **egymásra ortogonálisnak** nevezzük – jelölésben  $M_1 \perp M_2$  –, ha  $M_1$  bármely eleme ortogonális  $M_2$  minden elemére. Nyilvánvaló, hogy a  $\theta$  nullvektor ortogonális  $H$  minden elemére és egyúttal  $H$  minden részhalmazára.



**Definíció.** Tetszőleges  $M \subset H$  részhalmaz mellett jelölje  $M^\perp$  az  $M$  halmazra ortogonális  $H$ -beli vektorok halmazát, vagyis

$$M^\perp := \{x \in H \mid x \perp M\}.$$

Ezt az  $M^\perp$  halmazt az  $M$  halmaz **ortogonális komplementumának** nevezzük.

**2. tétel.** A  $H$  Hilbert-tér bármely  $M$  részhalmaza esetén

- $M^\perp$  zárt altér  $H$ -ban, emellett
- $M^\perp = \overline{M}^\perp$ .

**Bizonyítás.** Legyenek  $x_1, x_2 \in M^\perp$  tetszőleges vektorok, azaz  $x_1 \perp M$ ,  $x_2 \perp M$ , legyenek továbbá  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges számok. Ekkor minden  $y \in M$  mellett

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle = 0,$$

ami azt jelenti, hogy  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  ortogonális  $M$ -re, vagyis  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M^\perp$ , amivel igazoltuk, hogy  $M^\perp$  altér  $H$ -nak.

Legyen most  $(x_n)$   $M^\perp$ -beli konvergens sorozat, tehát van olyan  $x \in H$ , hogy  $x_n \rightarrow x$ . Ha  $y \in M$  egy tetszőleges vektor, akkor minden  $n$  indexre  $\langle x_n, y \rangle = 0$ , de mivel a skaláris szorzat folytonossága miatt  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ , azért  $\langle x, y \rangle = 0$ , tehát  $x$  ortogonális  $M$ -re, azaz  $x \in M^\perp$ . Igazoltuk tehát, hogy minden  $M^\perp$ -beli konvergens vektorsorozat határértéke is  $M^\perp$ -beli vektor, ami egyenértékű azzal, hogy az  $M^\perp$  altér zárt.

Legyen  $x \in M^\perp$  egy tetszőleges vektor, vagyis  $x \perp M$ . Nyilvánvaló, hogy  $x \perp [M]$ , de akkor a skaláris szorzat folytonossága miatt  $x \perp \overline{[M]}$ , azaz  $x \in \overline{[M]}^\perp$ , amivel igazoltuk, hogy  $M^\perp \subset \overline{[M]}^\perp$ . Megfordítva, ha  $x \in \overline{[M]}^\perp$ , azaz  $x \perp \overline{[M]}$ , akkor nyilvánvaló, hogy  $x \perp M$ , azaz  $x \in M^\perp$ , tehát  $\overline{[M]}^\perp \subset M^\perp$ . Ezekből már következik, hogy  $M^\perp = \overline{[M]}^\perp$ . ■

A továbbiakban egy  $H$  Hilbert-tér bizonyos **véges** vagy **megszámlálhatóan végtelen** részhalmazaira fogunk különböző elnevezéseket bevezetni. Ennek megfelelően a részhalmaz elemeit az  $\mathcal{N} := \{0, 1, 2, \dots, m\}$  vagy az  $\mathcal{N} := \mathbb{N}$  halmaz elemeivel indexeljük:

$$F := \{f_n \mid n \in \mathcal{N}\}.$$

Az  $F$  halmazt — némi, de elfogadható következetlenséggel — az  $(f_n)$  szimbólummal is jelöljük, és — vektorsorozat helyett — az  $(f_n) \subset H$  **vektorrendszeréről** beszélünk.

**Definíció.** A  $H$  Hilbert-tér  $(e_n)$  vektorrendszerét **ortonormált rendszernek** nevezzük, ha minden  $n$ -re  $\|e_n\| = 1$  és bármely  $n \neq m$  indexre  $e_n \perp e_m$ , azaz a

vektorrendszer tagjai páronként ortogonálisak egymásra. Másként kifejezve:  $(e_n)$  ortonormált rendszer, ha bármelyik  $n, m$  indexre fennáll az

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$

egyenlőség. ( $\delta_{n,m}$  az ún. *Kronecker-féle szimbólum*.)

Az  $(e_n) \subset H$  vektorrendszert *ortogonális rendszernek* nevezzük akkor, ha nem tartalmazza a  $H$  tér  $\theta$  elemét és bármely két tagja ortogonális egymásra. Világos, hogy ebben az esetben

$$\frac{e_n}{\|e_n\|} \quad (n \in \mathcal{N})$$

ortonormált rendszer. Egyszerűen bebizonyítható az is, hogy *minden  $(e_n)$  ortogonális rendszer lineárisan független is*, azaz bármelyik véges részrendszere lineárisan független.

Kiindulva valamely véges vagy megszámlálhatóan végtelen lineárisan független  $(f_n) \subset H$  vektorrendszerből az ún. **Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással** ortonormált rendszert konstruálhatunk.

**3. tétel** (a Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció). *Tegyük fel, hogy  $(f_n)$  a  $H$  Hilbert-tér egy lineárisan független vektorrendszere, azaz a rendszer bármely véges sok tagja lineárisan független. Ekkor megadható olyan  $(e_n)$  ortonormált rendszer, hogy minden  $n$  indexre az  $e_n$  vektor előáll az  $f_1, f_2, \dots, f_n$  vektorok olyan lineáris kombinációjaként, amelyben  $f_n$  együtthatója nem nulla.*

**Bizonyítás.** Az  $(f_n)$  vektorrendszer függetlenségéből következik, hogy a rendszer egyetlen tagja sem  $\theta$ . Vezessük be az

$$e_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

jelölést. Nyilvánvaló, hogy  $\|e_1\| = 1$ . Tegyük fel, hogy valamely  $n$  index mellett az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorokat már előállítottuk a kívánt módon, vagyis  $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{i,k}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ), továbbá minden  $k = 1, 2, \dots, n$  esetén az  $e_k$  vektor előáll az  $f_1, f_2, \dots, f_k$  vektorok olyan lineáris kombinációjaként, amelyben az  $f_k$  vektor együtthatója nem 0.

Próbáljuk most a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  számokat úgy megválasztani, hogy a

$$g_{n+1} := f_{n+1} - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \dots - \lambda_n e_n$$

egyenlőséggel értelmezett vektor ortogonális legyen az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorok mindegyikére, vagyis hogy minden  $k = 1, 2, \dots, n$  mellett fennálljon a  $\langle g_{n+1}, e_k \rangle = 0$  egyenlőség. Könnyen látható, hogy ez teljesül a  $\lambda_k = \langle f_{n+1}, e_k \rangle$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) mellett. Az  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorokra tett indukciós feltevésből következik, hogy a  $g_{n+1}$  vektor előáll az  $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$  vektorok nem csupa 0 együtthatós lineáris kombinációjaként (ui. az  $f_{n+1}$  vektor együtthatója 1), ezért a szóban forgó vektorok lineáris függetlensége miatt  $g_{n+1} \neq \mathbf{0}$ . Ezek után legyen

$$e_{n+1} := \frac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}.$$

Ekkor  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$  olyan  $(n+1)$ -tagú ortonormált rendszer, amelynek minden tagja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, vagyis minden  $k = 1, 2, \dots, n, n+1$  mellett az  $e_k$  vektor előáll az  $f_1, \dots, f_k$  vektorok olyan lineáris kombinációjaként, ahol  $f_k$  együtthatója nem nulla.

A fentiekből teljes indukcióval már következik a kívánt tulajdonságú  $(e_n)$  ortonormált rendszer létezése. ■

A konstrukcióból látható, hogy az  $(e_n)$  ortonormált rendszer tagjai előállnak

$$\begin{aligned} e_1 &= \lambda_{11}f_1, \\ e_2 &= \lambda_{21}f_1 + \lambda_{22}f_2, \quad \dots, \\ &\vdots \\ e_n &= \lambda_{n1}f_1 + \lambda_{n2}f_2 + \dots + \lambda_{nn}f_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

alakban, ahol  $\lambda_{ik} \in \mathbb{R}$ , és minden  $n$ -re  $\lambda_{nn} \neq 0$ . Ebből nyilvánvalóan következik az alábbi állítás: *Ha  $(f_n)$  lineárisan független vektorrendszer, akkor a fenti ortogonalizációs eljárással nyert  $(e_n)$  ortonormált rendszer lineáris burka azonos az  $(f_n)$  vektorrendszer lineáris burkával.*

### Példák ortonormált rendszerekre

- Az  $l^2$  térben az

$$e_n := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vektorsorozat egy ortonormált rendszer.

- Tetszőleges  $2\pi$  hosszúságú  $I$  intervallumon az

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2n-1} := \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2n} := \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad n = 1, 2, \dots$$

**trigonometrikus rendszer** ortonormált rendszer az  $L^2(I)$  Hilbert-térben.

• A  $\sqrt{2/\pi} \sin(nt)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) függvények ortonormált sorozatot alkotnak az  $L^2(0, \pi)$  Hilbert-térben.

• Az  $1/\sqrt{\pi}$  és a  $\sqrt{2/\pi} \cos(nt)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) függvények ortonormált sorozatot alkotnak az  $L^2(0, \pi)$  Hilbert-térben.

• **Ortogonalis polinomok.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum és  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  egy tetszőleges súlyfüggvény. Tekintsük az  $\langle f, g \rangle := \int_I f(t)g(t)w(t) dt$  skaláris szorzattal ellátott  $L_w^2(I)$  Hilbert-teret. Ha az  $I \ni t \mapsto t^n w(t)$  függvények minden  $n = 0, 1, 2, \dots$  esetén integrálhatók (ez a helyzet például akkor, ha  $I$  korlátos és  $w$  (Lebesgue-)integrálható  $I$ -n), akkor az algebrai polinomok mind  $L_w^2(I)$ -hez tartoznak. Az algebra alaptételéből következik, hogy az

$$e_0(t) := 1, \quad e_1(t) := t, \quad e_2(t) := t^2, \quad \dots \quad (t \in I)$$

hatványfüggvények lineárisan függetlenek az  $L_w^2(I)$  térben. Ezekre alkalmazva a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációt olyan  $(p_n)$  ortonormált polinomsorozatot kapunk az  $L_w^2(I)$  Hilbert-térben, hogy  $\deg p_n = n$  minden  $n$ -re. Azt mondjuk, hogy  $(p_n)$  az  $I$  intervallumon a  $w$  súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozat.

Különösen fontosak az ún. **klasszikus ortogonalis polinomok**. Ezek a következők:

- a **Legendre-polinomok**, amelyekre  $I = (-1, 1)$  és  $w(t) = 1$  ( $t \in I$ );
- a **Csebisev-polinomok**, amelyekre

$$I := (-1, 1) \quad \text{és} \quad w(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \in I);$$

- a **Jacobi-polinomok**, amelyekre

$$I := (-1, 1) \quad \text{és} \quad w(t) := (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \quad (t \in I),$$

ahol  $\alpha, \beta > -1$  rögzített paraméterek;

- az **Hermite-polinomok**, amelyekre

$$I = (-\infty, +\infty) \quad \text{és} \quad w(t) := e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R});$$

- a **Laguerre-polinomok**, amelyekre

$$I = (0, +\infty) \quad \text{és} \quad w(t) := t^\alpha e^{-t} \quad (t \in (0, +\infty)),$$

ahol  $\alpha > -1$  rögzített paraméter.

### 4.3. Zárt és teljes rendszerek Hilbert-terekben

A Fourier-sorok elméletében szükségünk lesz az alábbi két fontos fogalomra.

**Definíció.** A  $H$  Hilbert-térben egy  $F = (f_n) \subset H$  vektorrendszert **zárt rendszernek** mondunk, ha az  $F$  halmaz lineáris burka mindenütt sűrű a  $H$ -ban, vagyis ha

$$\overline{[F]} = H.$$

Ez azt jelenti, hogy  $H$  minden eleme tetszőleges pontossággal megközelíthető  $F$ -beli elemek alkalmas (véges) lineáris kombinációjával, azaz

$\forall x \in H$  és  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , és  $f_1, \dots, f_m \in F$ , hogy

$$\left\| x - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right\| < \varepsilon.$$

**Definíció.** A  $H$  Hilbert-térben egy  $(e_n)$  ortonormált rendszert akkor nevezünk **teljesnek**, ha ortogonálisan nem bővíthető, azaz ha nincs a térnek olyan  $f \neq \theta$  eleme, amelyik ortogonális az  $(e_n)$  rendszer mindegyik vektorára. Másként fogalmazva:  $(e_n)$  teljes rendszer, ha

$$f \in H \text{ és } \langle f, e_n \rangle = 0 \quad (n \in \mathcal{N}) \implies f = \theta.$$

(Természetesen a teljesség fenti definícióban megadott fogalma semmilyen kapcsolatban nincs a metrikus — tehát speciálisan Hilbert — terek teljességének a fogalmával.)

**4. tétel.** A  $H$  Hilbert-térben az  $(e_n)$  ortonormált rendszer pontosan akkor zárt, ha teljes.

**Bizonyítás.** Induljunk ki abból, hogy az  $E := \{e_n \mid n \in \mathcal{N}\}$  ortonormált rendszer zárt, azaz

$$\overline{[E]} = H,$$

és mutassuk meg, hogy a rendszer teljes is. Vegyünk egy olyan  $f \in H$  elemet, amelyre  $\langle f, e_n \rangle = 0$  teljesül minden  $n$  indexre. A skaláris szorzat linearitását és folytonosságát felhasználva ebből következik, hogy

$$f \in \overline{[E]} = H.$$

Speciálisan  $f \perp f$ , következésképpen  $f = \theta$ , és ez azt jelenti, hogy az  $(e_n)$  rendszer teljes.

A fordított irányú állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy  $(e_n)$  teljes, de nem zárt. Ekkor a  $H_1 := \overline{[E]}$  halmaz a  $H$  Hilbert-térnek egy valódi zárt altere, ezért a Riesz-féle felbontási tétel alapján a  $H$  térnek van olyan *nemnulla  $f$  vektora*, amelyik ortogonális  $H_1$ -re, amiből következik, hogy  $f$  ortogonális az  $(e_n)$  rendszer minden vektorára. Ez az  $(e_n)$  teljessége miatt csak úgy lehetséges, ha  $f = \theta$ . A kapott ellentmondás azt bizonyítja, hogy a rendszer teljességéből következik a rendszer zártsága. ■

### Példák teljes (zárt) ortonormált rendszerekre

**5. tétel.** *Az előző pontban a konkrét Hilbert-terekben definiált ortonormált rendszerek mindegyike teljes (zárt) rendszer.*

## 4.4. Végtelen sorok Hilbert-terekben

A valós esetből kiindulva értelmezhetjük Hilbert-terekben a *végtelen sor* fogalmát: Legyen  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow H$  egy tetszőleges sorozat a  $H$  Hilbert-térben. Az ebből képzett

$$s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az  $(x_n)$  által generált **(végtelen) sornak** nevezzük és jelölésére a

$$\sum x_n$$

szimbólumot használjuk.  $s_n$ -et a  $\sum x_n$  sor  $n$ -edik **részletösszegének** (vagy  *$n$ -edik szeletének*) hívjuk.

A  $\sum x_n$  végtelen sort akkor nevezzük **konvergensnek**, ha a részletösszegeinek  $(s_n)$  sorozata konvergens a  $H$  Hilbert-térben, vagyis ha létezik olyan  $x \in H$  vektor, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = x, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n - x\| = 0$$

teljesül. Ezt az  $x \in H$  vektort a  $\sum x_n$  sor **összegének** nevezzük, emellett annak kifejezésére, hogy a  $\sum x_n$  sor összege azonos  $x$ -szel, az

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

jelölést használjuk. Hilbert-tér esetén ez az egyenlőség tehát azt jelenti, hogy a  $\sum x_n$  sor részletösszegeinek sorozata a tér normájában tart az  $x$  elemhez, tehát

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = 0.$$

A  $H$  Hilbert-térbeli  $\sum x_n$  végtelen sort **abszolút konvergensenek** mondjuk, ha az  $(x_n)$  sorozat normáiból képzett  $\sum \|x_n\|$  pozitív tagú *valós sor* konvergens. A valós esethez hasonlóan tetszőleges Hilbert-tér esetén is könnyű bebizonyítani azt, hogy ha a  $\sum x_n$  sor *abszolút konvergens, akkor egyúttal konvergens is; emellett ha  $x$  jelöli a sor összegét, akkor fennáll az*

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

*egyenlőtlenség.*

A következő tétel azt állítja, hogy Hilbert-térbeli konvergens végtelen sorokat szabad tagonként skalárisan szorozni.

**6. tétel.** *Ha a  $H$  Hilbert-térbeli  $\sum x_n$  végtelen sor konvergens és  $x := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  a sor összege, akkor minden  $y \in H$  esetén igaz az*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x_n, y \rangle$$

*egyenlőség.*

**Bizonyítás.** Legyen  $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$  a szóban forgó konvergens sor  $n$ -edik szelete. A sorösszeg értelmezése szerint ekkor  $s_n \rightarrow x$  a  $H$  normájában, de akkor a skaláris szorzat folytonossága miatt bármely  $y \in H$  esetén  $\langle s_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  is teljesül. Másrészt

$$\langle s_n, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

is fennáll, amiből a tétel már egyszerűen következik. ■

## 4.5. Fourier-sorok

A továbbiakban csak végtelen dimenziós Hilbert-tereket tekintünk.

**Definíció.** Legyen  $H$  Hilbert-tér, és rögzítsünk ebben egy  $(e_n)$  ortonormált rendszert. A tetszőleges  $c_n$  valós együtthatókkal képzett  $H$ -beli

$$\sum c_n e_n$$

végtelen sort az  $(e_n)$  rendszer szerint **haladó általános ortogonális sornak** nevezzük.

Például az  $L^2(0, 2\pi)$  Hilbert-térben az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

trigonometrikus rendszer egy ortonormált rendszer, az e szerint haladó általános ortogonális sor tehát a korábban már tanulmányozott

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (4.2)$$

$$(x \in \mathbb{R}, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

### trigonometrikus sor.

A fő kérdésünk ezek konvergenciájának a vizsgálata volt. Láttuk, hogy a konvergenciát többféle értelemben is tekinthetjük: **pontonként**, **egyenletesen** vagy a négyzetintegrálra (a mostani szóhasználatunkkal ezt úgy is mondhatjuk, hogy az  $L^2(0, 2\pi)$  Hilbert-tér **normájára**) vonatkozóan. Akkor elég természetes módon jutottunk el ahhoz a megállapításhoz, hogy az általános trigonometrikus sorok helyett (első közelítésben) azokat a trigonometrikus sorokat érdemes tekinteni, amelyeknél az együtthatókat speciális módon választjuk meg. Pontosabban szólva azt mutattuk meg, hogy ha a (4.2) trigonometrikus sor *egyenletesen* konvergens, akkor az együtthatói és a sor összegfüggvénye között szoros kapcsolat van; az együtthatók ui. kifejezhetők az összegfüggvény segítségével. Az így adódó együtthatókkal képzett trigonometrikus sort neveztük **trigonometrikus Fourier-sornak**:

$$\frac{a_0}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R}, a_n, b_n \in \mathbb{R}), \quad (4.3)$$

ahol

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

$$b_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

az ún. **trigonometrikus Fourier-együtthatók**.

Az ott megismert gondolatokat (természetesen a megfelelő módosításokkal) az általános keretek között is alkalmazhatjuk. A következő tételben azt mutatjuk



meg, hogy igen egyszerű és természetes lépéseken keresztül hogyan juthatunk el ahhoz az első fontos megállapításhoz, hogy Hilbert-térben is az általános ortogonális sorok helyett (első közelítésben) miért érdemes speciális együtthatókkal képzett (ezek az együtthatók lesznek a *Fourier-együtthatók*) ortogonális sorokat tekinteni. A trigonometrikus esethez hasonlóan megmarad az a „dallam”, hogy ha egy általános ortogonális sor konvergens a  $H$  Hilbert-térbeli normára vonatkozóan, akkor a sor együtthatói kifejezhetők a sor összegével.

Hilbert-térbeli általános ortogonális sorok konvergenciájára az alábbi állítások érvényesek.

**7. tétel.** *Legyen  $\sum c_n e_n$  egy  $H$  Hilbert-térbeli, az  $(e_n)$  ortonormált rendszer szerint haladó általános ortogonális sor. Ez pontosan akkor konvergens, ha az együtthatói négyzetösszegéből képzett számsor konvergens, vagyis ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

*E követelmény teljesülése mellett legyen*

$$x := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$$

*az ortogonális sor összege. Ekkor a sor együtthatói az  $x$  vektor segítségével előállíthatók a*

$$c_n = \langle x, e_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N})$$

*alakban. Emellett az  $x \in H$  vektorra fennáll az alábbi **Parseval-egyenlőség**:*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2. \quad (4.5)$$

**Bizonyítás.** Jelölje  $s_n$  a  $\sum c_n e_n$ ,  $S_n$  pedig a  $\sum |c_n|^2$  sor  $n$ -edik szeletét, vagyis  $s_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$  és  $S_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Legyen  $n > m$ . Mivel  $(e_n)$  ortonormált rendszer, ezért

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k e_k, \sum_{l=m+1}^n c_l e_l \right\rangle = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 = S_n - S_m,$$

és ez azt jelenti, hogy az  $(s_n)$  vektorsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat a  $H$  Hilbert-térben, ha  $(S_n)$  Cauchy-sorozat az  $\mathbb{R}$ -ben.  $H$  és  $\mathbb{R}$  teljessége miatt ezekből a tétel első állítása már következik.

Tegyük most fel, hogy a  $\sum c_n e_n$  sor konvergens és  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$  a sor összege. A  $\sum c_n e_n$  sort szabad tagonként skalárisan szorozni, ezért

$$\langle x, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \langle e_k, e_n \rangle = c_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és ez a tétel második állítását bizonyítja.

A *Parseval-egyenlőség* igazolásához először azt jegyezzük meg, hogy az  $(e_n)$  ortonormáltasága miatt minden  $n$  indexre fennáll az

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

egyenlőség. Mivel  $s_n \rightarrow x$  a  $H$  tér normájában, ezért a norma folytonossága miatt  $\|s_n\| \rightarrow \|x\|$ , így a fenti egyenlőségből az  $n \rightarrow +\infty$  határátmenettel már következik a Parseval-egyenlőség. ■

Az iménti tétel motiválja az alábbi fontos fogalom bevezetését.

**Definíció.** Ha  $(e_n)$  ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben és  $x \in H$  egy tetszőleges vektor, akkor az

$$\langle x, e_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.6}$$

számokat az  $x$  vektornak az  $(e_n)$  ortonormált rendszerre vonatkozó **Fourier-együtthatóinak** nevezzük. Ezen együtthatókkal képzett

$$\sum \langle x, e_n \rangle e_n \tag{4.7}$$

ortogonális sort az  $x$  vektor  $(e_n)$  rendszer szerinti **Fourier-sorának** mondjuk.

Érdeemes meggondolni, hogy az  $L^2(0, 2\pi)$  Hilbert-térben egy  $f$  függvénynek az  $(e_n)$  trigonometrikus rendszer (l. (4.1)-et) szerinti Fourier-sora, vagyis a

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in (0, 2\pi))$$

sor, ahol tehát

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

éppen az  $f$  függvénynek a korábban értelmezett **trigonometrikus Fourier-sora**.

Feladatunk ezek után annak vizsgálata, hogy egy Hilbert-térben valamely ortonormált rendszer szerinti Fourier-sor a tér normájában konvergensi-e. Most ehhez fűzünk néhány előzetes megjegyzést.

A konkrét Hilbert-terek közül a legfontosabbak és a legérdekesebbek a különböző függvényterek. Az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térben ui. a konvergencia kérdése lineáris algebrai eszközök felhasználásával viszonylag egyszerűen „rendezhető”. Ezekből az eredményekből az  $n \rightarrow +\infty$  határátmenettel szintén viszonylag egyszerűen kaphatjuk meg az  $l^2$  Hilbert-térre vonatkozó állításokat.

A **függvényterek** esete azért érdekesebb, mert ezekben — az alkalmazások szempontjából is fontos — további kérdések vehetők fel elég természetes módon. Tekintsük például az  $L^2(0, 2\pi)$  Hilbert-teret és ebben a trigonometrikus rendszert. Világos, hogy a Fourier-sor konvergenciáját többféle értelemben is vizsgálhatjuk:

- **Pontonkénti** értelemben. Ekkor azt kérdezzük meg, hogy a sor egy rögzített pontban konvergensi-e, és ha igen, akkor mit lehet mondani az összegéről.
- **Egyenletes** értelemben. Itt meg azt kérdezzük, hogy milyen  $f$  függvény esetén lesz a Fourier-sor egyenletesen konvergens, és ekkor milyen kapcsolat van  $f$  és az összegfüggvény között.
- Az  $L^2(0, 2\pi)$  Hilbert-tér természetes **normájában** (ebben a konkrét esetben ezt a konvergenciát **négyzetintegrálra** vonatkozó konvergenciának neveztük) is vizsgálhatjuk a Fourier-sor konvergenciáját.

A trigonometrikus eset korábbi, részletesebb tanulmányozása során láttuk, hogy a **normakonvergencia** szempontjából a trigonometrikus Fourier-sorok „barátságosan” viselkednek abban az értelemben, hogy viszonylag egyszerű megfontolásokkal adódnak fontos, általános jellegű eredmények.

**Célunk** éppen annak megmutatása, hogy az ott elmondott gondolatok messze-messzeően általánosíthatók tetszőleges Hilbert-terekre. Ezekből az egyszerűen adódó általános tételekből aztán az alkalmazások szempontjából is fontos eredményeket lehet kapni.

A továbbiakban tehát az  $x \in H$  vektor Fourier-sorának a konvergenciáját fogjuk megvizsgálni. A következő — természetes módon felvethető — kérdésekre keressük a válaszokat:

- 1° Milyen  $x \in H$  vektor esetén lesz a szóban forgó Fourier-sor konvergens?
- 2° Ha egy  $x \in H$  vektor esetén a Fourier-sor konvergens, akkor az összege vajon megegyezik-e az  $x$  vektorral, azaz a Fourier-sor előállítja-e az  $x$  vektort.

Bevezetjük a következő elnevezést.

**Definíció.** A  $H$  Hilbert-térbeli  $x$  vektort az  $(e_n)$  **ortonormált rendszer szerint Fourier-sorba fejthetőnek** nevezzük, ha az  $x$  vektor  $(e_n)$  rendszer szerinti Fourier-sorának összege azonos  $x$ -szel.

Az előző tételből azonnal adódik a következő állítás.

**8. tétel.** *Egy  $\sum c_n e_n$  konvergens ortogonális sor azonos az összegének a Fourier-sorával, amiből természetesen következik, hogy az összegvektor Fourier-sora konvergens.*

Ebből persze még nem következik az, hogy minden  $x \in H$  vektornak az  $(e_n)$  ortonormált rendszer szerinti Fourier-sora konvergens. Ez az állítás egyébként igaz, és ezt a továbbiakban igazolni fogjuk. A bizonyításhoz felhasználjuk azt az önmagában is fontos és érdekes tényt, hogy a **Fourier-sorok részletösszegei egy nevezetes minimum-tulajdonsággal rendelkeznek.**

Pontosan a következőről van szó: Legyen  $(e_n)$  adott ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben, és vegyük a  $H$  tér egy tetszőleges elemét. Tekintsük a következő *minimumfeladatot*: keressük meg az  $e_1, \dots, e_n$  vektorok lineáris kombinációi, azaz a

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$$

alakú vektorok közül ( $c_k$ -k valós számok) azt, amelyik  $x$ -et a  $H$  térbeli távolság értelmében a legjobban megközelíti. Azt kérdezzük tehát, hogy adott  $n$  esetén az

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|$$

kifejezésnek egyáltalán van-e minimuma, ha a  $c_k \in \mathbb{R}$  együtthatók változnak; és ha van, akkor ezt a minimumot milyen együtthatók esetén veszi fel a kifejezés. Az alábbi tétel azt állítja, hogy ennek a minimumfeladatnak a megoldását éppen az  $x$  vektor Fourier-együtthatói adják.

**9. tétel.** *Legyen  $(e_n)$  egy tetszőleges ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben. Ekkor minden  $x \in H$  vektorra és minden  $n$  természetes számra*

$$\min \left\{ \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\| \mid c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|,$$

azaz minden  $x \in H$  és minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén az  $x \in H$  vektor Fourier-sorának  $n$ -edik részletösszege az a  $H_n := \{e_1, \dots, e_n\}$  altérbeli vektor, amelyik a  $H$  tér normájában legközelebb van az  $x$  vektorhoz.

**Bizonyítás.** Rögzítsük a  $c_k$  együtthatókat. A skaláris szorzat tulajdonságait és az  $(e_n)$  rendszer ortonormáltságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n c_k e_k, x - \sum_{l=1}^n c_l e_l \right\rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - 2 \sum_{k=1}^n c_k \langle x, e_k \rangle + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle - c_k|^2. \end{aligned}$$

Ebből az azonosságból világos, hogy a szóban forgó kifejezésnek van minimuma, és azt akkor veszi fel, ha az utolsó négyzetösszeg minden tagja 0-val egyenlő, azaz ha

$$c_k = \langle x, e_k \rangle \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

A minimumot szolgáltatató  $c_k$  együtthatók tehát  $n$ -től nem függenek. Ezekkel az értékekkel a fenti kifejezés a következő alakot veszi fel:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2. \quad (4.8)$$

Ez az ún. **Bessel-féle azonosság**. ■

**10. tétel** (a Bessel-féle egyenlőtlenség). *Legyen  $(e_n)$  egy ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben. Ekkor tetszőleges  $x \in H$  vektornak az  $(e_n)$  rendszerre vonatkozó  $\langle x, e_n \rangle$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Fourier-együtthatóira fennáll az alábbi, ún. **Bessel-féle egyenlőtlenség***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in H), \quad (4.9)$$

ezért a Fourier-együtthatók 0-hoz tartanak, azaz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0 \quad \text{minden } x \in H \text{ esetén.}$$

**Bizonyítás.** Mivel a (4.8) alatti Bessel-féle azonosság bal oldala nemnegatív, ezért az egyenlőség jobb oldala is nemnegatív, amiből következik, hogy minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Itt az  $n \rightarrow +\infty$  határátmenetet elvégezve kapjuk a Bessel-féle egyenlőtlenséget.

A  $\sum |\langle x, e_k \rangle|^2$  valós sor konvergens, ezért a generáló sorozata nullsorozat, és ebből következik, hogy a Fourier-együtthatók 0-hoz tartanak. ■

Az 1<sup>o</sup> kérdésünkre a válasz a

**11. tétel.** *Legyen  $(e_n)$  ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben. Ekkor minden  $x \in H$  vektornak az  $(e_n)$  rendszer szerinti Fourier-sora **konvergens**.*

**Bizonyítás.** A (4.9) alatti Bessel-féle egyenlőtlenségből következik, hogy az  $x$  vektor Fourier-együtthatói abszolútértékének négyzetösszege konvergens, ezért a 7. tétel szerint az  $x$  vektor  $\sum \langle x, e_k \rangle e_k$  Fourier-sora valóban konvergens. ■

Hangsúlyozzuk, hogy az iménti tétel csak a Fourier-sor konvergenciáját állítja, és nem mond semmit a sor összegéről. A következő tétel azt fejezi ki, hogy milyen kapcsolat van egy  $x \in H$  vektor Fourier-sorának összege és az  $x$  vektor között.

**12. tétel.** *Legyen  $(e_n)$  egy tetszőleges ortonormált rendszer a  $H$  Hilbert-térben. Jelölje  $H_1$  az  $(e_n)$  rendszer lineáris burkának a lezárását (azaz azt a legszűkebb  $H$ -beli alteret, amely tartalmazza a rendszer minden tagját):*

$$H_1 := \overline{[(e_n)]}.$$

*Ekkor bármelyik  $H$ -beli  $x$  vektor  $(e_n)$  ortonormált rendszer szerinti Fourier-sorának összege azonos  $x$ -nek a  $H_1$  altérre való ortogonális vetületével.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az  $x \in H$  vektor  $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$  Fourier-sorát. Az előző tétel szerint ez a sor konvergens. Jelölje  $u$  a sor összegét, vagyis legyen

$$u := \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

A sorösszeg értelmezése alapján

$$s_n = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \rightarrow u \quad \text{a } H \text{ tér normájában, ha } n \rightarrow +\infty.$$

Mivel minden minden  $n$ -re  $s_n \in [\{e_1, \dots, e_n\}]$ , ezért nyilvánvaló, hogy  $u \in \overline{[(e_n)]} = H_1$ . Másrészt a 7. tétel szerint a sor együtthatói kifejezhetők a sor összege segítségével, éspedig

$$\langle x, e_n \rangle = \langle u, e_n \rangle \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy a  $v := x - u$  vektorra

$$\langle v, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle u, e_n \rangle = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ami azt jelenti, hogy a  $v$  vektor ortogonális az  $(e_n)$  sorozat minden tagjára, de akkor  $v \perp H_1$ , azaz  $v \in H_1^\perp$ . Mivel  $x = u + v$ , ahol  $u \in H_1$  és  $v \in H_1^\perp$ , ezért a Riesz-féle ortogonális felbontási tételből következik, hogy  $u$  azonos az  $x$  vektor  $H_1$ -re való ortogonális vetületével. ■

A 4. és a 12. tételből nyilvánvalóan következik, hogy az alábbi fontos

**13. tétel.** *A  $H$  Hilbert-térben pontosan akkor lesz minden  $x \in H$  vektor Fourier-sorba fejthető az  $(e_n)$  ortonormált rendszer szerint (azaz  $x$ -nek az  $(e_n)$  rendszer szerinti Fourier-sorának az összege azonos  $x$ -szel), ha az  $(e_n)$  rendszer zárt, illetve teljes.*

Felmerül ezek után az a kérdés, hogy melyek azok a Hilbert-terek, amelyekben létezik zárt, vagyis teljes ortonormált rendszer. Lineáris algebrából tudjuk, hogy minden véges dimenziós térben van teljes ortonormált rendszer, ezért elég csak a végtelen dimenziós esetet tekintenünk. Legyen az  $(e_n)$  sorozat egy zárt rendszer  $H$ -ban. Az értelmezés szerint ekkor az  $[(e_n)]$  halmaz sűrű a  $H$ -ban. Könnyen be lehet látni azt, hogy az  $(e_n)$  tagjaiból képzett racionális együtthatós lineáris kombinációk halmaza is sűrű  $H$ -ban. Mivel ez a halmaz megszámlálható, ezért  $H$ -nak van megszámlálható sűrű részhalmaza, vagyis  $H$  szükségképpen egy **szeparábilis** Hilbert-tér. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, ezért fenáll a következő fontos

**14. tétel.** *Egy  $H$  Hilbert-térben pontosan akkor létezik zárt (teljes) ortonormált rendszer, ha  $H$  szeparábilis.*

**Bizonyítás.** Az előzőek szerint elég azt igazolni, hogy minden szeparábilis Hilbert-térben van zárt (teljes) ortonormált rendszer. Tegyük fel tehát, hogy  $H$  szeparábilis, vagyis van benne egy olyan  $M \subset H$  megszámlálható halmaz, amelyre  $\overline{M} = H$ . Az  $M$  halmaz alkalmas megritkításával könnyen nyerhető egy olyan  $(x_n)$  lineárisan független  $M$ -beli sorozat, amelyre  $[(x_n)] = [M]$ . Alkalmazzuk erre a vektorsorozatra a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást, akkor az így kapott  $(e_n)$  ortonormált sorozatra nyilván  $[(e_n)] = [M]$  teljesül. Mivel  $M$ -mel együtt  $[M]$  is sűrű  $H$ -ban, ezért  $\overline{[(e_n)]} = H$ , ami azt jelenti, hogy az  $(e_n)$  rendszer zárt a  $H$  térben. ■

## 4.6. Szeparábilis Hilbert-terek izomorfája

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-terek között sem algebrai szempontból sem metrikus tulajdonságait tekintve nincs különbség.

**15. tétel** (Riesz–Fischer-tétel). Minden végtelen dimenziós szeparábilis  $H$  Hilbert-tér izometrikusan izomorf az  $l^2$  Hilbert-térrel. Ez azt jelenti, hogy  $H$  és  $l^2$  között létezik egy olyan

$$\varphi : H \rightarrow l^2$$

bijektív lineáris leképezés, ami normatartó is, azaz

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_{l^2} \quad (x \in H).$$

**Bizonyítás.** Mivel  $H$  szeparábilis Hilbert-tér, ezért ebben létezik egy  $(e_n)$  teljes ortonormált rendszer. Jelölje  $\varphi$  azt a leképezést, amelyik minden  $x \in H$  elemhez hozzárendeli az  $x$  vektor  $(e_n)$  szerinti Fourier-együtthatóinak a sorozatát:

$$\varphi(x) := (\langle x, e_n \rangle, n \in \mathbb{N}) \quad (x \in H).$$

A 7. tételből következik, hogy  $\varphi$  minden  $H$ -beli elemhez  $l^2$ -beli sorozatot rendel, ezért  $\varphi$  valóban egy  $H \rightarrow l^2$  típusú függvény.

A  $\varphi$  leképezés lineáris. Valóban, a skaláris szorzat tulajdonságai alapján minden  $x, y \in H$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$\begin{aligned} \langle x + y, e_n \rangle &= \langle x, e_n \rangle + \langle y, e_n \rangle, \\ \langle \lambda x, e_n \rangle &= \lambda \langle x, e_n \rangle, \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (\langle x + y, e_n \rangle) = (\langle x, e_n \rangle) + (\langle y, e_n \rangle) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(\lambda x) &= (\langle \lambda x, e_n \rangle) = \lambda (\langle x, e_n \rangle) = \lambda \varphi(x), \end{aligned}$$

és ez azt jelenti, hogy  $\varphi$  lineáris leképezés.

A  $\varphi$  leképezés injektivitása. Tegyük fel, hogy az  $x_1, x_2 \in H$  elemekre  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  teljesül. Mivel  $\varphi$  lineáris, ezért ebből

$$\varphi(x_1 - x_2) = (\langle x_1 - x_2, e_n \rangle) = (\langle x_1, e_n \rangle - \langle x_2, e_n \rangle) = (0, 0, 0, \dots) = \mathbf{0} \in l^2$$

következik. Ez azt jelenti, hogy az  $x := x_1 - x_2$   $H$ -beli elem az  $(e_n)$  rendszer mindegyik vektorára ortogonális, és ez az  $(e_n)$  teljessége miatt csak úgy lehetséges, ha  $x = \theta$  ( $\in H$ ), azaz  $x_1 = x_2$ . A  $\varphi$  leképezés tehát injektív.

Most azt igazoljuk, hogy  $\varphi$  szürjektív. Ennek bizonyításához induljunk ki egy  $l^2$ -térbeli  $(c_n)$  sorozatból, és mutassuk meg azt, hogy van olyan  $x \in H$ , amelyre

$$\varphi(x) = (\langle x, e_n \rangle) = (c_n),$$



vagyis  $\langle x, e_n \rangle = c_n$  teljesül minden  $n$  indexre. Ehhez tekintsük a  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e_k$  sor

$$s_n := \sum_{k=0}^n c_k e_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegeit. Megmutatjuk, hogy ez Cauchy-sorozat. Valóban, felhasználva, hogy  $(e_n)$  ortonormált rendszer azt kapjuk, hogy minden  $m > n$  indexre

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2.$$

Mint hogy  $(c_n) \in l^2$ , ezért  $(s_n)$  valóban Cauchy-sorozat, s így a  $H$  tér teljessége alapján konvergens. Jelöljük  $x$ -szel a szóban forgó sorozat határértékét, azaz

$$s_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow +\infty) \text{ a } H \text{ tér normájában.}$$

Ekkor a skaláris szorzat folytonossága alapján

$$\langle x, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle s_n, e_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Mint hogy minden  $n \geq k$  esetén  $\langle s_n, e_k \rangle = c_k$ , ezért  $c_k$  az  $x$  elem Fourier-együtthatója, azaz  $\langle x, e_k \rangle = c_k$  minden  $k \in \mathbb{N}$  indexre. Ezzel megmutattuk, hogy a most konstruált  $x \in H$  elemre  $\varphi(x) = (c_n)$ . A  $\varphi$  leképezés tehát szürjektív.

A Parseval-egyenlőségből (1. a 7. tételt) következik, hogy

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|\varphi(x)\|_{l^2}^2 \quad (x \in H),$$

és ez azt jelenti, hogy a  $\varphi : H \rightarrow l^2$  lineáris bijekció normatartó. ■

Bármely euklideszi térben (tehát Hilbert-térben is) a skaláris szorzat kifejezhető a normával. Egyszerűen igazolható, hogy valós euklideszi tér esetén fennáll az

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \quad (x, y \in H)$$

azonosság. Ezekből nyilvánvaló, hogy minden izometria egyben a *skaláris szorzatot is megtartja*, azaz

$$\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \quad (x, y \in H).$$



## 5. Lineáris operátorok és funkcionálok

Legyenek  $X$  és  $Y$  *valós* (vagyis  $\mathbb{R}$  feletti) lineáris terek (más szóval vektorterek). A nullelemeket  $\theta_X$ , ill.  $\theta_Y$  jelöli. A lineáris terek elemeit vektoroknak is fogjuk nevezni. Feltesszük még azt is, hogy az  $X$ , ill. az  $Y$  lineáris tereken norma is van értelmezve, ezeket a  $\|\cdot\|_X$ , ill. a  $\|\cdot\|_Y$  szimbólumokkal jelöljük. Több definícióban és állításban  $X$ -nek csak a vektortérstruktúrájára lesz szükségünk. Ezekben az esetekben az  $X$  **lineáris térről** beszélünk. Ha azt mondjuk, hogy  $X$  **normált tér**, akkor pedig az  $(X, \|\cdot\|_X)$  térstruktúrára gondolunk.

Ebben a fejezetben normált terek közötti leképezések közül a legegyszerűbbekkel, a **lineáris leképezésekkel** foglalkozunk.

### 5.1. A lineáris operátorok $L(X, Y)$ vektortere

**Definíció.** Legyenek  $X$  és  $Y$  lineáris terek. Az  $A : X \rightarrow Y$  függvényt **lineáris operátornak** (vagy **lineáris leképezésnek**) nevezzük, ha minden  $x, y \in X$  elempárra és minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  számra

- (i)  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ ,
- (ii)  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ .

A valós értékű lineáris leképezéseket **lineáris funkcionáloknak** hívjuk.

A definíció (i), ill. (ii) feltétele azt jelenti, hogy az  $A$  operátor az  $X$ -beli összegeket  $Y$ -beli összegekbe, ill.  $X$ -beli elemek számszorosát a megfelelő  $Y$ -beli elemek számszorosába viszi át. Az  $A$  leképezésnek ezt a két tulajdonságát kifejezve azt szoktuk mondani, hogy a leképezés **művelettartó**, vagy — az algebraiban szokásos szóhasználattal élve — az  $A$  függvény **homomorfizmus**. Az  $A$  leképezés  $x$  helyen felvett értékének jelölésére a szokásos  $A(x)$  mellett az  $Ax$  szimbólumot is használni fogjuk.

Lineáris leképezésekkel kapcsolatban két kitüntetett alteret szokás bevezetni. A

$$\begin{aligned}\text{Ker } A &:= \{x \in X \mid Ax = \theta_Y\} \subset X, \\ \text{Im } A &:= \{Ax \mid x \in X\} = \mathcal{R}_A \subset Y\end{aligned}$$

halmazokat az  $A$  operátor **magterének**, illetve **képterének** nevezzük.

Érdemes megjegyezni az alábbi — egyszerűen bizonyítható — állításokat. Legyenek  $X$  és  $Y$  lineáris terek és  $A : X \rightarrow Y$  egy tetszőleges lineáris operátor. Ekkor

- $A\theta_X = \theta_Y$ ;

- $\text{Ker } A$  altér  $X$ -ben,  $\text{Im } A$  altér  $Y$ -ban;
- $A$  pontosan akkor *injektív*, ha  $\text{Ker } A = \{\theta_X\}$ ;
- $A$  akkor és csak akkor *szürjektív*, ha  $\text{Im } A = Y$ .

Mint ahogy az  $A : X \rightarrow Y$  függvény értékei vektorok, ezért értelmezve van ezek összege és számmal való szorzata. Ezt felhasználva értelmezhetjük az  $A, B : X \rightarrow Y$  lineáris operátorok  $A + B$  összegét és az  $A$  operátor  $\lambda$  számszorosát:

$$\begin{aligned}(A + B)(x) &:= Ax + Bx & (x \in X), \\ (\lambda A)(x) &:= \lambda Ax & (x \in X, \lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Egyszerűen igazolható az alábbi fontos állítás.

**1. tétel.** *Legyenek  $X$  és  $Y$  tetszőleges lineáris terek. Az összes  $X \rightarrow Y$  lineáris operátort tartalmazó halmaz  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret alkot az imént definiált műveletekre nézve. Ezt a vektorteret az*

$$L(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ lineáris operátor}\}$$

*szimbólummal jelöljük.*

Emlékeztetünk arra, hogy az  $X_1$  és az  $X_2$  valós lineáris tereket akkor neveztük **izomorfaknak** (jelölésben  $X_1 \cong X_2$ ), ha elemeik között létezik művelettartó bijekció, vagyis ha

$$\begin{aligned}\exists T : X_1 &\rightarrow X_2 \text{ bijekció, hogy} \\ T(\lambda x + \mu y) &= \lambda T(x) + \mu T(y) & (x, y \in X_1, \lambda, \mu \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Az izomorf lineáris tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekintjük, ezért az ilyenek között nem teszünk különbséget.

### Példák lineáris leképezésekre

- $X = Y = \mathbb{R}$  esetén pontosan az  $A(x) = cx$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) alakú függvények a lineáris leképezések, ahol  $c$  tetszőleges valós szám. (Ezek képei az origón átmenő egyenesek.) Egyszerűen látható, hogy

$$L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

- Legyenek  $n$  és  $m$  rögzített természetes számok,  $X := \mathbb{R}^n$  és  $Y := \mathbb{R}^m$ . Korábban már láttuk, hogy rögzített  $X$ -, illetve  $Y$ -beli bázisok esetén az  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  lineáris tér azonosítható az  $(m \times n)$ -es valós mátrixok lineáris terével, azaz

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \times n}.$$

A **lineáris algebrában** megismertük a *véges dimenziós lineáris terek* közötti lineáris leképezések (ezen keresztül a mátrixok) legfontosabb tulajdonságait. Az analízisben fontos szerepet játszó lineáris terek *végtelen dimenziósak*. A **funkcionál-analízis** feladata az ilyen terek közötti (lineáris) leképezések vizsgálata.

## 5.2. Folytonosság és korlátosság

Emlékeztetünk arra, hogy korábban már értelmeztük normált terek közötti leképezések folytonosságát. Ha  $X$  és  $Y$  normált terek, akkor azt mondtuk, hogy az  $f : X \rightarrow Y$  függvény **folytonos az  $a \in X$  pontban**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \|x - a\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

A valós-valós függvényekhez hasonlóan itt is érvényes az **átviteli elv**: az  $f : X \rightarrow Y$  függvény akkor és csak akkor folytonos az  $a \in X$  pontban, ha minden  $x_n \rightarrow a$  sorozatra  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Az  $f : X \rightarrow Y$  függvényt **folytonosnak** nevezzük, ha minden  $a \in X$  pontban folytonos.

Érdekes és fontos tény, hogy *lineáris operátorok* esetén az egyetlen pontbeli folytonosságból már következik az egész téren való folytonosság.

**2. tétel.** *Tegyük fel, hogy az  $A : X \rightarrow Y$  lineáris leképezés folytonos egy  $a \in X$  pontban. Ekkor  $A$  folytonos az összes  $x \in X$  pontban.*

**Bizonyítás.** Rögzítsük az  $x \in X$  pontot, és vegyünk egy olyan  $(x_n) \subset X$  sorozatot, amelyre  $x_n \rightarrow x$  az  $X$  térben. Megmutatjuk, hogy ekkor  $Ax_n \rightarrow Ax$  az  $Y$  térben, ami az átviteli elv alapján azt jelenti, hogy  $A$  folytonos  $x$ -ben. Tekintsük a következő átalakítást:

$$\begin{aligned} Ax_n &= A(a + (x_n - x) + (x - a)) = A(a + (x_n - x)) + A(x - a) = \\ &= A(a + (x_n - x)) + A(x) - A(a) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Mivel  $x_n \rightarrow x$ , ezért  $\lim(a + (x_n - x)) = a$ . Az  $A$  operátor  $a$ -beli folytonossága miatt az  $(Ax_n)$  sorozat tehát valóban  $A(a) + A(x) - A(a) = A(x)$ -hez tart. ■

Lineáris operátor folytonossága ekvivalens módon jellemezhető a korlátosságnak elnevezett tulajdonsággal.

**Definíció.** Az  $A : X \rightarrow Y$  lineáris operátort akkor mondjuk **korlátosnak**, ha létezik olyan  $C \geq 0$  szám, hogy

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (x \in X). \quad (5.1)$$

Figyeljük meg, hogy az  $X = Y = \mathbb{R}$  esetben a korlátosságnak a fenti fogalma *különbözik* a valós-valós függvények körében korábban értelmezett korlátosság fogalmától. A továbbiakban ezt a fogalmat mindig a fenti értelemben értjük.

**3. tétel.** *Az  $A : X \rightarrow Y$  lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos  $X$ -en, ha korlátos.*

**Bizonyítás.**  $\boxed{\Leftarrow}$  A folytonosság definíciója alapján (5.1)-ből következik, hogy  $A$  folytonos a  $\theta_X$  pontban, ezért a 2. tétel miatt minden  $x \in X$  pontban is folytonos.

$\boxed{\Rightarrow}$  A fordított irányú állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy  $A$  nem korlátos. Ekkor (5.1) alapján

$$\forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists x_n \in X : \|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|_X.$$

Világos, hogy  $x_n \neq \theta_X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), ui. ha  $x_n = \theta_X$  lenne, akkor

$$\|Ax_n\|_Y = \|\theta_Y\|_Y = 0 \not> n\|x_n\|_X = 0.$$

Tekintsük az

$$y_n := \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|_X} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor  $\|y_n\|_X = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , tehát  $y_n \rightarrow \theta_X$  az  $X$  térben. Az  $A$  operátor folytonos a  $\theta_X$  pontban, ezért  $Ay_n \rightarrow \theta_Y$  az  $Y$  térben. Ekkor azonban a normák sorozata 0-hoz tart, azaz  $\|Ay_n\|_Y \rightarrow 0$ . Másrészt az indirekt feltétel miatt a normák sorozatára

$$\|Ay_n\|_Y = \left\| A \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{1}{n} \cdot \frac{\|Ax_n\|_Y}{\|x_n\|_X} > 1$$

adódik minden  $n$  természetes számra, és ez azt jelenti, hogy az  $\|Ay_n\|_Y$  normák sorozata nem tart nullához. Ez az ellentmondás az állításunkat bizonyítja. ■

Véges dimenziós terek közötti lineáris leképezések folytonosak. Sőt ennél több is igaz.

**4. tétel.** *Tegyük fel, hogy  $X$  véges dimenziós,  $Y$  pedig tetszőleges normált tér. Ekkor minden  $A : X \rightarrow Y$  lineáris operátor folytonos.*

**Bizonyítás.** Véges dimenziós tereken bármely két norma ekvivalens, ezért feltehető, hogy  $X = \mathbb{R}^n$  és  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_1$ . Jelölje  $e_1, e_2, \dots, e_n$  az  $\mathbb{R}^n$  tér kanonikus bázisát.

Ekkor minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  ( $x_k \in \mathbb{R}$ ) és  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ . Mivel  $A$

lineáris, ezért  $Ax = A\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k A e_k$ , következésképpen

$$\|Ax\|_Y \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|A e_k\|_Y \leq C \|x\|_1, \quad \text{ahol} \quad C := \max\{\|A e_1\|_Y, \dots, \|A e_n\|_Y\}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $A$  korlátos, tehát folytonos lineáris operátor. ■

Érdekes és meglepő, hogy *végtelen dimenziós* terek között az ilyen egyszerű (vagyis lineáris) leképezések között is vannak már olyanok, amelyek nem folytonosak.

**Példa:** a differenciáloperátor nem folytonos lineáris operátor.

• Legyen  $(X, \|\cdot\|_X) := (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y) := (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ . Jelölje  $D$  a **differenciáloperátort**:

$$D : X \rightarrow Y, \quad Df := f'.$$

Ekkor  $D$  lineáris, de nem korlátos, tehát nem folytonos operátor. Valóban, a linearitás nyilvánvaló. Annak igazolására, hogy  $D$  nem korlátos, tekintsük az

$$f_n(t) := t^n \quad (t \in [0, 1], n \in \mathbb{N})$$

függvényeket. Mivel minden  $n$ -re

$$\|Df_n\|_\infty = \|f'_n\|_\infty = \|nt^{n-1}\|_\infty = n = n\|f_n\|_\infty > \frac{n}{2}\|f_n\|_\infty,$$

ezért  $D$  valóban nem korlátos, tehát nem is folytonos operátor.

**Megjegyzések.** 1° Az operátorok közül az analízis szempontjából az egyik legfontosabb a differenciáloperátor. A differenciáloperátort különféle terekben lehet vizsgálni, és amint az láttuk, az általában nem folytonos. Ez a tény indokoltá teszi az analízisben a nem folytonos operátorok tanulmányozását is. A továbbiakban ezekkel mi nem foglalkozunk.

2° Bizonyos esetekben a norma alkalmas megválasztásával tehetünk egy nem korlátos operátort korlátossá. Az előző példánál maradva, ha az  $X$ -beli normát az

$$\|f\|_X := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in C^1[0, 1])$$

képlettel értelmezzük, akkor az így kapott differenciáloperátor már korlátos/folytonos lineáris operátor lesz. Valóban:

$$\|Df\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_X$$

minden  $f \in (C^1[0, 1], \|\cdot\|_X)$  esetén.

### 5.3. Operátor normája. A $B(X, Y)$ normált tér

A továbbiakban csak a folytonos/korlátos lineáris operátorokkal foglalkozunk. Adott  $X, Y$  normált terek esetén ezek halmazát így fogjuk jelölni:

$$B(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ lineáris és folytonos/korlátos}\}.$$

A folytonos/korlátos lineáris operátorok között is értelmezve van az összeadás és a számmal való szorzás művelete. Egyszerűen belátható, hogy  $B(X, Y)$  ezekkel a műveletekkel egy  $\mathbb{R}$  feletti vektortér, az  $L(X, Y)$  tér egy altere. A 4. tételből az is következik, hogy  $B(X, Y) = L(X, Y)$ , ha  $X$  véges dimenziós normált tér.

További struktúrával, nevezetesen *normával* fogjuk ellátni a  $B(X, Y)$  lineáris teret. Ehhez felhasználjuk a korlátosság fogalmának (l. (5.1)) alábbi ekvivalens átfogalmazásait. Legyen  $A : X \rightarrow Y$  egy lineáris operátor. Ekkor

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (\forall x \in X); \\ \Downarrow \\ \exists C > 0 : \|Ax\|_Y \leq C \quad (\forall x \in X, \quad \|x\|_X \leq 1); \\ \Downarrow \\ \exists C > 0 : \|Ax\|_Y \leq C \quad (\forall x \in S_1 := S_{1,X} := \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}) \\ (S_{1,X}\text{-et az } X \text{ egységömbfelületének nevezzük}); \\ \Downarrow \\ \forall M \subset X \text{ korlátos halmazra } A(M) \subset Y \text{ korlátos halmaz.} \end{aligned}$$

**Definíció.** Tetszőleges  $A \in B(X, Y)$  esetén az

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \|A\|_{XY} := \sup \{\|Ax\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup \{\|Ax\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \end{aligned}$$

számot az  $A$  **operátor normájának** nevezzük.

Hamarosan megmutatjuk, hogy ez a leképezés valóban norma a  $B(X, Y)$  lineáris téren. Először a fent definiált szám néhány egyszerűen bizonyítható és a továbbiakban gyakran használt tulajdonságát fogalmazzuk meg.

**5. tétel.** *Tetszőleges  $A \in B(X, Y)$  operátor esetén*

- $\|A\|$  véges, nemnegatív valós szám;
- $\|Ax\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x\|_X \quad (\forall x \in X)$ ;



•  $\|A\| = \min \{C \geq 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X\}$   
 (az  $\|A\|$  tehát a legkisebb olyan  $C \geq 0$  szám, amelyre az  $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$  egyenlőtlenség minden  $x \in X$  elemre fennáll.)

Az utolsó állítást leggyakrabban a következő formában fogjuk alkalmazni: ha egy  $C \geq 0$  számra fennáll az

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (\forall x \in X)$$

egyenlőtlenség, akkor  $\|A\| \leq C$ .

Operátor normájának a következő *szemléletes jelentés* tulajdonítható: az operátor korlátosságával ekvivalens

$$\|Ax\|_Y \leq C \quad (x \in X, \|x\|_X = 1)$$

egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az  $X$ -beli  $S_1$  egységgömbfelület  $A(S_1)$  képe benne van az  $Y$  tér egy origó középpontú gömbjében. A legkisebb sugarú ilyen tulajdonságú gömbnek a sugara éppen  $\|A\|$ .

A következő tételben a  $B(X, Y)$  tér alapvető tulajdonságait soroljuk fel.

**6. tétel.** *Legyenek  $X$  és  $Y$  normált terek. Ekkor*

- $B(X, Y)$  lineáris altér az  $L(X, Y)$  vektortérben;
- ha  $X$  véges dimenziós, akkor  $B(X, Y) = L(X, Y)$ .
- az  $A \mapsto \|A\|$  leképezés norma a  $B(X, Y)$  lineáris téren;
- ha az  $Y$  normált tér teljes (vagyis Banach-tér), akkor ezzel az  $A \mapsto \|A\|$  normával  $B(X, Y)$  Banach-tér.

**Bizonyítás.** Az első állítás nyilvánvaló, a második pedig a 4. tétel következménye.

A harmadik állítás bizonyítása: A norma meghatározó tulajdonságait ellenőrizzük. Legyen  $A, B \in B(X, Y)$ .

(i) Nyilvánvaló, hogy  $\|A\| \geq 0$ . Tegyük most fel, hogy  $\|A\| = 0$ . Ez azt jelenti, hogy minden  $x \in X$ ,  $\|x\|_X \leq 1$  vektorra  $\|Ax\|_Y = 0$ , következésképpen  $Ax = \theta_Y$ , ha  $\|x\|_X \leq 1$ . A norma homogenitását felhasználva ebből az adódik, hogy minden  $x \in X$  esetén  $Ax = \theta_Y$ . Az  $A$  operátor tehát valóban a  $B(X, Y)$  tér nulleleme.

(ii) Hasonlóan igazolható, hogy  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$  minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  számra.

(iii) A háromszög-egyenlőtlenség igazolásához az  $Y$ -beli norma, valamint az operátornorma tulajdonságait használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|(A + B)(x)\|_Y &= \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|x\|_X + \|B\| \cdot \|x\|_X = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|_X \quad (x \in X), \end{aligned}$$

amiből a 5. tétel alapján adódik, hogy  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

A *negyedik* állítás bizonyítása. Tegyük fel, hogy  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  teljes, és igazoljuk, hogy akkor a  $(B(X, Y), \|\cdot\|)$  tér is teljes. Legyen  $(A_n) \subset B(X, Y)$  egy Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor  $(A_n)$  konvergens, azaz van olyan  $A \in B(X, Y)$  operátor, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A - A_n\| = 0. \quad (5.2)$$

Mivel  $(A_n)$  Cauchy-sorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0\text{-ra } \|A_n - A_m\| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Így tetszőleges rögzített  $x \in X$  esetén fennállnak az

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\|_Y \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X \quad (n, m \geq n_0)$$

egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy  $(A_n x) \subset Y$  Cauchy-sorozat. Mivel  $Y$  teljes, ezért  $(A_n x)$  konvergens  $Y$ -ban. Jelöljük  $Ax$ -szel a határértékét. Így tehát értelmeztünk egy  $A : X \rightarrow Y$  operátort. A következőket kell igazolnunk:

- (i)  $A$  lineáris,
- (ii)  $A$  folytonos/korlátos,
- (iii)  $\|A - A_n\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ).

Lássuk a bizonyításokat:

- (i) Ez nyilvánvaló, mivel a limesz lineáris.
- (ii) Vegyünk egy tetszőleges  $x \in X$  vektort. A norma folytonossága,  $Ax$  definíciója és (5.3) alapján kapjuk, hogy

$$\|Ax - A_n x\|_Y = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m x - A_n x\|_Y \leq \varepsilon \cdot \|x\|_X \quad (n > n_0). \quad (5.4)$$

Ez azt jelenti, hogy a  $V := A - A_n$  korlátos/folytonos lineáris operátor. A feltételünk szerint  $A_n$  is ilyen, ezért az összegük, vagyis a  $V + A_n = A$  operátor is korlátos/folytonos lineáris operátor.

- (iii) Az (5.4) egyenlőtlenségből az is következik, hogy

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon \quad (n > n_0),$$

és ez azt jelenti, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A - A_n\| = 0$ . ■

## 5.4. Példák funkcionálokra és operátorokra

**1. példa.** Legyen

$$(X, \|\cdot\|_X) := (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \quad \text{és} \quad (Y, \|\cdot\|_Y) := (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Adott  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$  pontrendszer és  $c_1, c_2, \dots, c_n$  valós számok esetén tekintsük az

$$\Phi : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi f := \sum_{k=1}^n c_k f(t_k)$$

funkcionált. Ekkor  $\Phi$  folytonos lineáris **funkcionál** és a normája

$$\|\Phi\| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

**Bizonyítás.** A linearitás nyilvánvaló, mert minden  $f, g \in C[a, b]$  és  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  esetén

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + \mu g) &= \sum_{k=1}^n c_k (\lambda f + \mu g)(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k (\lambda f(t_k) + \mu g(t_k)) = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) + \mu \sum_{k=1}^n c_k g(t_k) = \\ &= \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g). \end{aligned}$$

A funkcionál korlátossága (tehát folytonossága) a

$$|\Phi f| = \left| \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |c_k| \right) \cdot \|f\|_\infty \quad (f \in C[a, b])$$

egyenlőtlenségből következik, amiből az is adódik, hogy

$$\|\Phi\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

A fordított irányú egyenlőtlenséget úgy igazoljuk, hogy megadunk olyan  $f_o \in C[a, b]$  függvényt, amelyre  $\|f_o\|_\infty \leq 1$  és

$$|\Phi f_o| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Ekkor

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\Phi f| \geq |\Phi f_o| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

$\Phi$  definíciójából kiindulva most könnyű ilyen  $f_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt konstruálni: a  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) pontban a függvényérték legyen  $f_o(t_k) := \text{sign } c_k$ ;

legyen  $f_o$  lineáris a  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) intervallumon és állandó az  $[a, t_1]$ ,  $[t_n, b]$  intervallumon.

Világos, hogy ekkor  $\|f_o\|_\infty \leq 1$  és

$$\Phi f_o = \sum_{k=1}^n c_k f_o(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k \operatorname{sign} c_k = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

**2. példa.** Legyen

$$(X, \|\cdot\|_X) := (C[a, b], \|\cdot\|_\infty), \quad (Y, \|\cdot\|_Y) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

és  $g \in C[a, b]$  egy rögzített függvény. Ekkor

$$\Phi : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi f := \int_a^b f g$$

olyan folytonos lineáris **funkcionál**, amelynek a normája

$$\|\Phi\| = \int_a^b |g|.$$

**Bizonyítás.** Mivel folytonos függvények szorzata folytonos, és minden  $[a, b]$ -n folytonos függvény Riemann-integrálható, ezért  $\Phi$  „jól definiált” leképezés.  $\Phi$  linearitása az integrál linearitásából következik. A

$$|\Phi f| = \left| \int_a^b f g \right| \leq \left( \int_a^b |g| \right) \cdot \|f\|_\infty \quad (f \in C[a, b])$$

egyenlőtlenség alapján  $\Phi$  korlátos, tehát folytonos és

$$\|\Phi\| \leq \int_a^b |g|.$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyítása most nehezebb, mint az előző példánál. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists f_o \in C[a, b] : \|f_o\|_\infty \leq 1 \text{ és } |\Phi f_o| = \left| \int_a^b f_o \cdot g \right| > \left( \int_a^b |g| \right) - \varepsilon. \quad (5.5)$$

Ezt felhasználva kapjuk a minden  $\varepsilon > 0$  számra fennálló

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\Phi f| \geq |\Phi f_o| \geq \left( \int_a^b |g| \right) - \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ebből pedig már következik, hogy

$$\|\Phi\| \geq \int_a^b |g|.$$

Az (5.5) feltételeket kielégítő  $f_o$  függvényt a következő módon konstruáljuk meg: Rögzítsük az  $\varepsilon > 0$  számot, és osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot az  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  osztópontokkal úgy, hogy a  $g$  függvény megváltozása mindegyik  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) intervallumon kisebb legyen az  $\varepsilon$  számnál. Ilyen felosztás létezése  $g$  egyenletes folytonosságából következik. Az így kapott intervallumokat most két csoportba soroljuk: az első csoportba tartoznak azok a  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r$  intervallumok, amelyeken a  $g$  függvény nem vált előjelet. A fennmaradó  $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_s$  intervallumokat pedig a második csoportba soroljuk. Mivel  $g$  előjelet vált a  $\Delta''_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) intervallumon és a függvényértékek megváltozása ezen  $\varepsilon$ -nál kisebb, ezért

$$|g(t)| \leq \varepsilon \quad (t \in \Delta''_k, k = 1, 2, \dots, s).$$

Az  $f_o \in C[a, b]$  függvényt így értelmezzük: az első csoportba tartozó intervallumokon legyen

$$f_o(t) := \text{sign } g(t) \quad (t \in \Delta'_j, j = 1, 2, \dots, r),$$

a fennmaradó intervallumokon pedig lineáris. Ha  $a$  (vagy  $b$ ) a második csoporthoz tartozó intervallum végpontja, akkor legyen  $f_o(a) := 0$  ( $f_o(b) := 0$ ).

A  $-1 \leq f_o(t) \leq 1$  ( $a \leq t \leq b$ ) egyenlőtlenség felhasználásával a

$$\Phi(f_o) = \int_a^b f_o \cdot g$$

integrálra a kívánt alsó becslés most már könnyen igazolható:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_o \cdot g \right| &= \left| \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} f_o \cdot g + \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} f_o \cdot g \right| \geq \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} |g| - \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |g| = \\ &= \int_a^b |g| - 2 \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |g| > \int_a^b |g(t)| dt - 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Ezzel az (5.5) állítást, következésképpen a 2. példa állítását is bebizonyítottuk. ■

**3. példa.** Legyen

$$(X, \|\cdot\|_X) := (C[a, b], \|\cdot\|_\infty), \quad (Y, \|\cdot\|_Y) := (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$$

és  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy rögzített folytonos függvény. Ekkor

$$A : C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad (Af)(x) := \int_a^b f(t)K(x, t) dt \quad (x \in [a, b])$$

olyan folytonos lineáris **operátor**, amelynek a normája

$$\|A\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt =: M.$$

**Bizonyítás.** A tett feltételekből következik, hogy  $A$  „jól definiált”. Az  $A$  operátor linearitása nyilvánvaló, és az

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b f(t)K(x, t) dt \right| \leq \\ &\leq \left( \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt \right) \cdot \|f\|_\infty = M \cdot \|f\|_\infty \quad (f \in C[a, b]) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből következik  $A$  folytonossága, valamint az, hogy  $\|A\| \leq M$ . Most igazoljuk a fordított irányú egyenlőtlenséget. Mivel az

$$[a, b] \ni x \mapsto \int_a^b |K(x, t)| dt$$

függvény folytonos, ezért van olyan  $x_0 \in [a, b]$  pont, amelyre

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt = \int_a^b |K(x_0, t)| dt.$$

Tekintsük a  $C[a, b]$  téren a  $g(t) := K(x_0, t)$  ( $t \in [a, b]$ ) folytonos függvénnyel képzett

$$\Phi f := \int_a^b f(t)K(x_0, t) dt \quad (f \in C[a, b])$$

folytonos lineáris funkcionált. Az előző példában láttuk, hogy minden  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $f_o \in C[a, b]$  függvény, hogy  $\|f_o\|_\infty \leq 1$  és

$$|\Phi f_o| \geq \|\Phi\| - \varepsilon = \int_a^b |K(x_0, t)| dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Af\|_\infty \mid f \in C[a, b], \|f\|_\infty \leq 1\} \geq \\ &\geq \|Af_o\|_\infty \geq (Af_o)(x_0) = \int_a^b K(x_0, t)f_o(t) dt = |\Phi f_o| \geq M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel  $\varepsilon > 0$  tetszőleges, ezért az  $\|A\| \geq M$  egyenlőtlenség valóban teljesül. ■

#### 4. példa. Véges dimenziós terek közötti lineáris operátorok.

Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  most véges dimenziós normált terek. Tegyük fel, hogy  $\dim X = n$  és  $e_1, \dots, e_n$  az  $X$  lineáris tér egy bázisa;  $\dim Y = m$  és  $f_1, \dots, f_m$  az  $Y$  tér egy bázisa.

Vegyünk egy  $A : X \rightarrow Y$  lineáris operátort. Ha  $x$  az  $X$  tér egy vektora, akkor

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

így az  $A$  operátor linearitása miatt

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A e_j.$$

Az  $A$  leképezés tehát mindenütt adott, ha ismertek  $A$ -nak az  $e_1, \dots, e_n$  bázisvektorokon felvett értékei. Tekintsük most az  $A e_j$  vektornak az  $Y$ -beli  $f_1, \dots, f_m$  bázisvektorokkal felírt alakját:

$$A e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Az  $a_{ij}$  együtthatókat egy  $(m \times n)$ -es  $\mathbf{A}$  mátrixba rendezzük úgy, hogy  $\mathbf{A}$   $j$ -edik oszlopába az  $Ae_j$  vektor  $f_1, \dots, f_m$  bázisra vonatkozó koordinátáit, vagyis az  $a_{1j}, \dots, a_{mj}$  számokat írjuk. Így az  $A \in L(X, Y)$  operátorhoz hozzárendeltünk egy  $(m \times n)$ -es  $\mathbf{A}$  mátrixot, amit az  $A$  leképezés rögzített  $e_1, \dots, e_n$  és  $f_1, \dots, f_m$  bázisokra vonatkozó **mátrixreprezentációjának** nevezzük.

Megadtunk tehát egy

$$T : L(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}, \quad TA := \mathbf{A}$$

leképezést. Egyszerűen igazolható, hogy  $T$  lineáris bijekció (izomorfia)  $L(X, Y)$  és  $\mathbb{R}^{m \times n}$  között, és ezt úgy is mondjuk, hogy a két tér izomorf egymással (jelölésben:  $L(X, Y) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$ ). Izomorf tereket azonosíthatunk egymással, és ebben az értelemben azonosíthatjuk az  $A \in L(X, Y)$  lineáris operátort a fentiek alapján megadott  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrixszal.

Azt is tudjuk már azonban, hogy minden véges dimenziós normált téren értelmezett lineáris leképezés folytonos is, ezért

$$L(X, Y) = B(X, Y) \cong \mathbb{R}^{m \times n}.$$

A  $B(X, Y)$  téren értelmezett

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \quad (A \in B(X, Y))$$

operátornorma a fenti izomorfia alapján normát indukál a mátrixok lineáris terén. Ennek értéke az  $X$ , illetve  $Y$ -beli normák konkrét megválasztásától függ.

Lássunk most néhány „szokásos” **mátrixnormát**. Az egyszerűség érdekében csak az

$$(X, \|\cdot\|_X) := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) =: \mathbb{R}_p^n, \quad (Y, \|\cdot\|_Y) := (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) =: \mathbb{R}_p^m$$

normált tereket tekintjük, ahol  $1 \leq p \leq +\infty$ , és mindkét térben a kanonikus bázisokat rögzítjük. A  $B(\mathbb{R}_p^n, \mathbb{R}_p^m)$  téren értelmezett operátornorma a mátrixok  $\mathbb{R}^{m \times n}$  lineáris terén az

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup\{\|\mathbf{A} \cdot x\|_p \mid x \in \mathbb{R}_p^n, \|x\|_p \leq 1\} \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

normát indukálja, és ez a mátrix elemeivel is kifejezhető. Igazolhatók például az alábbi összefüggések:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n})$$



(ez a mátrix **sorösszegnormája**);

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

(ez az **oszlopösszegnorma**);

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\Lambda_1} \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}),$$

ahol  $\Lambda_1$  az  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértéke ( $\mathbf{A}^T$  az  $\mathbf{A}$  mátrix transzponáltja). Ezt a mátrixnormát **spektrálnormának** nevezik.

### 5. példa. Hilbert-terek projekciós operátorai.

Legyen  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  valós Hilbert-tér és jelölje  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  ( $x \in H$ ) a skaláris szorzat által indukált normát. Tetszőleges  $\{\theta\} \neq M \subset H$  zárt altér esetén tekintsük a  $P_M$  projekciós operátort:

$$P_M : H \rightarrow M, \quad P_M(x) := x_1 \quad (x \in H),$$

ahol  $x = x_1 + x_2$  az  $x \in H$  vektor ortogonális felbontása, azaz  $x_1 \in M$  és  $x_2 \perp M$ . Ekkor  $P_M$  egy 1-normájú folytonos lineáris operátor.

**Bizonyítás.** A Riesz-féle felbontási tétel szerint az  $x \in H$  ortogonális felbontása egyértelmű, ezért  $P_M$  „jól definiált”.

$P_M$  *lineáris operátor*. Valóban, legyen  $x, y \in H$  és  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tekintsük  $x$  és  $y$  ortogonális felbontását:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, & x_1 &\in M \text{ és } x_2 \perp M, \\ y &= y_1 + y_2, & y_1 &\in M \text{ és } y_2 \perp M. \end{aligned}$$

Ekkor  $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$ . Mivel  $\lambda x_1 + \mu y_1 \in M$  ( $M$  altér) és  $\lambda x_2 + \mu y_2 \perp M$  (ui.  $\langle \lambda x_2 + \mu y_2, m \rangle = \lambda \langle x_2, m \rangle + \mu \langle y_2, m \rangle = 0$  minden  $m \in M$  esetén, mert  $x_2 \perp m$  és  $y_2 \perp m$ ), ezért

$$P_M(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda P_M(x) + \mu P_M(y),$$

és ez azt jelenti, hogy a  $P_M$  operátor lineáris.

*Folytonosság.* Az  $x = x_1 + x_2$  ( $x_1 \in M$ ,  $x_2 \perp M$ ) ortogonális felbontásra érvényes  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$  Pitagorasz-tétel alapján

$$\|P_M(x)\| = \|x_1\| \leq \|x\| \quad (x \in H),$$

ezért  $P_M$  korlátos, következésképpen folytonos lineáris operátor. Ebből az egyenlőtlenségből még az is következik, hogy  $\|P_M\| \leq 1$ . A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához vegyünk egy  $x_0 \in M$ ,  $\|x_0\| = 1$  vektort. (Az  $M \neq \{\theta\}$  feltétel miatt van ilyen  $x_0$ .) Ekkor  $P_M(x_0) = x_0$  és

$$\|P_M\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_M(x)\| \geq \|P_M(x_0)\| = \|x_0\| = 1,$$

tehát  $\|P_M\| = 1$  valóban fennáll. ■

## 5.5. A duális tér

Ebben a pontban normált téren értelmezett *valós értékű folytonos lineáris* leképezéseket, más szóval **folytonos lineáris funkcionálokat** fogunk vizsgálni. Ezek összességét a normált tér **duális terének** nevezzük. Az előző pontban láttunk néhány konkrét példát ilyen leképezésekre. Az általános eredmények alkalmazásához sok esetben fontos tudni azt, hogy egy adott normált téren hogyan lehet megadni, illetve jellemezni az *összes* folytonos lineáris funkcionált. Megjegyezzük, hogy a **funkcionálanalízis** elnevezés onnan ered, hogy a matematikának ez az ága a különféle speciális normált terek duálisainak a jellemzéséből nőtte ki magát. Az ilyen irányú kutatások az 1900-as évek elején kezdődtek, és ebben úttörő szerepe volt — többek között — **Riesz Frigyesnek**.

### 5.5.1. A duális tér definíciója

Az előző pontban tetszőleges  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  valós normált terek esetén az  $X \rightarrow Y$  típusú folytonos lineáris leképezések  $B(X, Y)$ -nal jelölt halmazát vizsgáltuk. Műveleteket és (operátor)normát értelmeztünk ezen a halmazon. Azt is láttuk, hogy ha az  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  tér teljes, akkor az így kapott  $(B(X, Y), \|\cdot\|_{XY})$  normált tér is teljes, azaz Banach-tér. Most csak a *valós értékű* folytonos lineáris leképezéseket, vagyis a *folytonos lineáris funkcionálokat* fogjuk tekinteni. Ebben az esetben tehát  $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Mivel  $\mathbb{R}$  teljes, ezért  $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}})$  Banach-tér.

**Definíció.** Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  tetszőleges normált tér. Az  $X$ -en értelmezett valós értékű folytonos lineáris leképezések halmazát  $B(X, \mathbb{R})$  helyett  $X^*$ -gal jelöljük:

$$X^* := B(X, \mathbb{R}).$$

A  $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}})$  Banach-teret az  $(X, \|\cdot\|_X)$  normált tér **duális terének** nevezzük, és jelölésére az  $(X^*, \|\cdot\|_*)$  szimbólumot használjuk:

$$(X^*, \|\cdot\|_*) := (B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}}).$$

A továbbiakban  $(X^*, \|\cdot\|_*)$  helyett gyakran  $X^*$ -ot írunk, és az  $X^*$  *duális térről* beszélünk.  $X^*$  elemeit általában görög nagybetűkkel ( $\Phi, \Psi$ , stb.) jelöljük. A  $\Phi \in X^*$  szimbólumon azt értjük, hogy  $\Phi$  eleme az  $X^*$  duális térnek. Érdekes összefoglalni, hogy mi mindent fejez ki ez a rövid jelsorozat:

$\Phi \in X^*$  jelentése:

- adott egy  $(X, \|\cdot\|_X)$  normált tér;
- a  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés lineáris, azaz

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y) \quad (x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R});$$

- $\Phi$  korlátos, azaz

$$\exists C > 0 : |\Phi(x)| \leq C\|x\|_X \quad (\forall x \in X);$$

- a  $\|\Phi\|_* = \sup\{|\Phi(x)| \mid x \in X \text{ és } \|x\|_X \leq 1\}$  képlettel értelmezve van a  $\Phi$  funkcionál normája.

### 5.5.2. Konkrét normált terek duális terei

A duális terek leírásánál hasznos, ha bizonyos normált tereket azonosítunk egymással. Ezzel kapcsolatos a következő

**Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált terek **izometrikusan izomorfak** (jelölésben  $X \cong Y$ ), ha van olyan  $T : X \rightarrow Y$  lineáris bijekció, hogy az

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

egyenlőség minden  $x \in X$ -re fennáll.

Az izometrikusan izomorf tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekinthetjük, ezért ezek között nem teszünk különbséget, azonosítjuk őket.

**Megjegyzés.** Vannak olyan esetek is, amikor ezt az azonosítást nem célszerű megtenni.

Ebben a szakaszban végig  $p$  és  $q$  **konjugált kitevőpárokat** jelöl, azaz

$$1 \leq p, q \leq +\infty, \text{ és } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \left(\frac{1}{+\infty} := 0\right).$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy  $q$  a  $p$  szám *konjugált kitevője*.

• Az  $\mathbb{R}_p^n$  terek duális terei

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $1 \leq p \leq +\infty$ . Jelölje  $\mathbb{R}_p^n$  az  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  normált (Banach-) teret, és  $e_1, \dots, e_n$  az  $\mathbb{R}^n$  tér kanonikus bázisát. Ekkor az  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vektorra

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

**7. tétel.** Tetszőleges  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén

$$(\mathbb{R}_p^n)^* \cong \mathbb{R}_q^n,$$

vagyis az  $\mathbb{R}_p^n$  tér duális tere azonosítható  $\mathbb{R}_q^n$ -val, ahol  $q$  a  $p$  konjugált kitevője.

**Bizonyítás.** (a) Először azt jegyezzük meg, hogy az  $\mathbb{R}^n$  lineáris téren „természetes módon” meg lehet adni lineáris funkcionálokat. Nevezetesen, nyilvánvaló, hogy ha  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  egy tetszőleges vektor, akkor a

$$\Phi_a(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (5.6)$$

leképezés lineáris funkcionál, amit az  $a \in \mathbb{R}^n$  vektor által generált funkcionálnak nevezünk. Az is világos, hogy különböző vektorok különböző funkcionálokat generálnak.

Most megmutatjuk, hogy minden  $a \in \mathbb{R}^n$  vektor esetén  $\Phi_a$  olyan folytonos lineáris funkcionál az  $\mathbb{R}_p^n$  téren, amelynek a normája  $\|a\|_q$ :

$$\|\Phi_a\|_* = \|a\|_q.$$

Ha  $a$  az  $\mathbb{R}^n$  tér nulleleme, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\Phi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \leq \|a\|_q \cdot \|x\|_p \quad (x \in \mathbb{R}_p^n),$$

ezért  $\Phi_a$  korlátos, következésképpen folytonos lineáris funkcionál. Ebből az egyenlőtlenségből az is következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* \leq \|a\|_q.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához elég megadni olyan nemnulla  $x^o \in \mathbb{R}_p^n$  vektort, amelyre a

$$|\Phi_a(x^o)| = \|a\|_q \|x^o\|_p \quad (5.7)$$

egyenlőség teljesül. Ebből ui. már következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{|\Phi_a(x)|}{\|x\|_p} \geq \frac{|\Phi_a(x^o)|}{\|x^o\|_p} = \|a\|_q.$$

Ha  $p = 1$ , akkor jelöljön  $j$  egy olyan indexet, amelyre  $|a_j| = \|a\|_\infty$  és legyen

$$x_k^o := \begin{cases} \text{sign } a_j, & \text{ha } k = j, \\ 0, & \text{ha } k \neq j \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ekkor a nemnulla  $x^o := (x_1^o, \dots, x_n^o)$  vektorra az (5.7) egyenlőség teljesül, ui.

$$|\Phi_a(x^o)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k^o \right| = |a_j| = \|a\|_\infty = \|a\|_\infty \cdot \|x^o\|_1.$$

A  $p = 1$  esetben tehát igazoltuk, hogy  $\|\Phi_a\|_* = \|a\|_\infty$ .

Tegyük most fel, hogy  $1 < p \leq +\infty$ , tehát a  $q$  konjugált kitevő  $1 \leq q < +\infty$ . Ebben az esetben az  $x^o := (x_1, \dots, x_n)$  vektort az

$$x_k^o := |a_k|^{q-1} \text{sign } a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

képlettel értelmezzük. Egyszerű átalakítások után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\Phi_a(x^o)| &= \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k^o \right| = \sum_{k=1}^n |a_k|^q = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ miatt}\right) = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\right)^{1/p} = \\ &\quad (\text{felhasználva, hogy } q = p(q-1) \text{ és } |a_k|^q = |a_k|^{p(q-1)} = |x_k^o|^p) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k^o|^p\right)^{1/p} = \\ &= \|a\|_q \cdot \|x^o\|_p. \end{aligned}$$

Az (5.7) egyenlőség tehát valóban fennáll, következésképpen  $\|\Phi_a\|_* = \|a\|_p$  az  $1 < p \leq +\infty$  esetben is.

**(b)** Tegyük most fel, hogy  $\Phi$  tetszőleges folytonos lineáris funkcionál az  $\mathbb{R}_p^n$  téren, azaz  $\Phi \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ . Mivel  $\Phi$  lineáris, ezért

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n x_k \Phi(e_k) \quad (x \in \mathbb{R}_p^n).$$

Tekintsük az  $a := (\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$  vektor által indukált  $\Phi_a$  funkcionált. Nyilvánvaló, hogy

$$\Phi(x) = \Phi_a(x) \quad (x \in \mathbb{R}_p^n),$$

és azt is beláttuk már, hogy  $\|\Phi\|_* = \|a\|_q = \|\Phi_a\|_*$ . Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbb{R}_p^n$  téren *minden* folytonos lineáris funkcionál valamilyen alkalmas (egyértelműen meghatározott) vektor által generált funkcionállal egyezik meg.

(c) A fentiekből következik, hogy minden  $1 \leq p, q \leq +\infty$  konjugált kitevőpár esetén a

$$T : \mathbb{R}_q^n \rightarrow (\mathbb{R}_p^n)^*, \quad Ta := \Phi_a,$$

leképezés egy izometrikus izomorfia az  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  és az  $\mathbb{R}_q^n$  terek között. ■

### • A $l^p$ terek duális terei

Tekintsük most a  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) sorozattereket. Az  $x = (x_n) \in l^p$  sorozat normáját  $1 \leq p < +\infty$  esetén az

$$\|x\|_p := \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

ha  $p = +\infty$ , akkor pedig az

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

képlettel értelmeztük, és azt is láttuk már, hogy e terek mindegyike Banach-tér.

A duális terek leírásához felhasználjuk az alábbi, önmagában is fontos állítást.

**8. tétel.** *Ha  $1 \leq p < +\infty$ , akkor az*

$$e^n := \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}, 1, 0, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

**kanonikus egységvektorok** kifeszítik az  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  teret, azaz minden  $x = (x_n) \in l^p$  elem előállítható az

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^n$$

alakban. Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy a  $\sum x_n e^n$  sor részletösszegeinek a sorozata az  $l^p$  tér normájában tart az  $x$  elemhez, tehát

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e^k \right\|_p = 0.$$

Valóban, tetszőlegesen adott  $x = (x_n) \in l^p$  esetén az

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e^k \right\|_p^p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

reláció teljesül, mert a  $\sum_n |x_n|^p$  sor konvergens.

A véges dimenziós esetben megszokott szóhasználattal élve azt mondjuk, hogy  $1 \leq p < +\infty$  esetén az  $e^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) vektorrendszer a  $l^p$  tér **egy bázisa** (vagy **kanonikus bázisa**).

**Megjegyzés.** A 8. tétel  $p = +\infty$  esetén nem igaz: az  $e^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) kanonikus egységvektorok nem feszítik ki a  $l^\infty$  teret. Tekintsük pl. az azonosan 1 sorozatot.

**9. tétel.** *Bármely  $1 \leq p < +\infty$  esetén*

$$(l^p)^* \cong l^q,$$

vagyis az  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  tér duális tere azonosítható az  $(l^q, \|\cdot\|_q)$  térrel, ahol  $q$  a  $p$  konjugált kitevője.

**Bizonyítás.** (a) Először azt mutatjuk meg, hogy ha  $a = (a_n) \in l^q$  egy tetszőleges sorozat, akkor

$$\Phi_a(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \quad (x = (x_n) \in l^p)$$

olyan folytonos lineáris funkcionál az  $l^p$  téren, amelynek a normája  $\|a\|_q$ , azaz

$$\|\Phi_a\|_* = \|a\|_q.$$

Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy a definíció korrekt, és

$$|\Phi_a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right| \leq \|a\|_q \cdot \|x\|_p \quad (x \in l^p). \quad (5.8)$$

$\Phi_a$  linearitása a végtelen sorok összegére és számszorosára vonatkozó állításból következik. (5.8) alapján  $\Phi_a$  korlátos, tehát folytonos lineáris funkcionál és

$$\|\Phi_a\|_* \leq \|a\|_q$$

minden  $a \in l^q$  esetén. A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához felhasználhatjuk a 7. tétel bizonyításában megmutatott gondolatokat.

(b) Most azt igazoljuk, hogy tetszőlegesen rögzített  $\Phi \in (l^p)^*$  funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan  $a \in l^q$  sorozat, amelyre  $\Phi_a = \Phi$  és  $\|\Phi\|_* = \|a\|_q$ .

Ha van ilyen  $a \in l^q$  sorozat, akkor szükségképpen

$$\Phi(e^n) = \Phi_a(e^n) = a_n$$

minden  $n$ -re, ahonnan

$$a_n = \Phi(e^n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.9)$$

Ez azt jelenti, hogy legfeljebb egy kívánt tulajdonságú  $a \in l^q$  sorozat létezik.

Megmutatjuk, hogy az (5.9) képlettel definiált  $a = (a_n)$  sorozat valóban kielégíti a megkívánt feltételeket, azaz

- (i)  $a \in l^q$  és
- (ii)  $\Phi = \Phi_a$ .

Az állítás nyilvánvaló, ha  $a_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Feltehető tehát, hogy valamilyen  $\mathbb{N} \ni N_0$ -ra  $a_{N_0} \neq 0$ . Ekkor (i)-t először  $p = 1$  esetére igazoljuk:

$$|a_n| = |\Phi(e^n)| \leq \|\Phi\|_* \cdot \|e^n\|_p = \|\Phi\|_*$$

minden  $n$ -re, úgyhogy  $a \in l^\infty$ .

Ha  $p > 1$  és így  $q < +\infty$ , akkor tekintsük minden egyes rögzített  $N = 1, 2, \dots$  számra az

$$x_k^N := \begin{cases} |a_k|^{q-1} \text{sign } a_k, & \text{ha } k \leq N \\ 0, & \text{ha } k > N \end{cases}$$

képlettel definiált  $x^N := (x_k^N, k \in \mathbb{N})$  sorozatot. Világos, hogy  $x^N \in l^p$  minden  $N$ -re (hiszen csak legfeljebb véges sok nemnulla tagja van a sorozatnak). Mivel

$$|x_k^N|^p = |a_k|^q \quad (k \leq N)$$

(ui.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  miatt  $p(q-1) = q$ ), ezért

$$\begin{aligned} \Phi(x^N) &= \Phi\left(\sum_{k=1}^N x_k^N e^k\right) = \sum_{k=1}^N x_k^N \Phi(e^k) = \sum_{k=1}^N |a_k|^q = \\ &= \sum_{k=1}^N |x_k^N|^p = \|x^N\|_p^p, \end{aligned}$$

ahol  $\|x^N\|_p^p > 0$  ( $N \geq N_0$ ).  $\Phi$  korlátos, ezért

$$|\Phi(x^N)| \leq \|\Phi\|_* \cdot \|x^N\|_p,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\|x^N\|_p^p \leq \|\Phi\|_* \cdot \|x^N\|_p,$$

és így

$$\|x^N\|_p^{p-1} = \left(\sum_{k=1}^N |x_k^N|^p\right)^{(p-1)/p} = \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^q\right)^{1/q} \leq \|\Phi\|_* \quad (N_0 \leq N \in \mathbb{N}).$$



Innen  $N \rightarrow +\infty$  esetén következik, hogy

$$\left( \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} = \|a\|_q < +\infty,$$

tehát  $a \in l^q$  valóban fennáll a  $q < +\infty$  ( $p > 1$ ) esetben is.

Hátra van még a  $\Phi = \Phi_a$  egyenlőség igazolása. Mivel a folytonos és lineáris  $\Phi$  és  $\Phi_a$  funkcionálok definíció szerint megegyeznek minden  $e^n$  pontban, ezért a 8. tétel alapján (csak itt használjuk fel, hogy  $p \neq +\infty$ ) megegyeznek az egész  $l^p$  téren is. ■

**Megjegyzés.** A 9. tétel  $p = +\infty$  esetén nem igaz, vagyis a korlátos sorozatok  $l^\infty$  terének a duálisa nem az  $l^1$  tér. Az igaz, hogy minden  $a \in l^1$  sorozatra  $\Phi_a$  korlátos lineáris funkcionál az  $l^\infty$  téren és  $\|\Phi_a\| = \|a\|_1$ , azonban  $(l^\infty)^*$  ezeken kívül más elemeket is tartalmaz. Az  $(l^\infty)^*$  tér elemeinek általános alakja  $\mathbb{N}$  végesen additív mértékeivel adható meg.

A sorozatoknak azonban megadhatók olyan terei, amelyek duálisa az  $l^1$  térrel azonosítható. Ezek a  $c_0$  és a  $c$  **sorozatterek**. Jelölje  $c$  a valós konvergens,  $c_0$  pedig a zérussorozatok halmazát. Könnyen igazolható, hogy minden  $1 < p \leq +\infty$  paraméterre

$$l^1 \subset l^p \subset c_0 \subset c \subset l^\infty,$$

továbbá a felsorolásban előforduló halmazok mindegyike lineáris altere a rákövetkezőnek.

Bebizonyítható az is, hogy a  $(c, \|\cdot\|_\infty)$  és a  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  terek az  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  Banach-tér zárt alterei, következésképpen maguk is Banach-terek. A 9. tételhez hasonlóan igazolható, hogy

$$c^* \cong l^1 \quad \text{és} \quad c_0^* \cong l^1.$$

#### • A $L^p$ terek duális terei

Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  egy  $\sigma$ -véges mértéktér, és tekintsük a

$$L^p := L^p((X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p}) \quad (1 \leq p \leq +\infty)$$

függvénytereket.

Az előző példák figyelembevételével „természetes módon” meg lehet adni folytonos lineáris funkcionálokat a  $L^p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) téren: a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával ui. egyszerűen bizonyítható, hogy ha  $g \in L^q$  egy tetszőleges függvény és  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , akkor a

$$\Phi_g : L^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_g(f) := \int_X fg \, d\mu$$

leképezés folytonos lineáris funkcionál a  $L^p$  téren és  $\|\Phi\|_* = \|g\|_{L^q}$ .

Jóval nehezebb annak az eldöntése, hogy így minden folytonos lineáris funkcionált elő lehet-e állítani. A következő fontos tétel azt állítja, hogy az  $1 \leq p < +\infty$  esetben a fenti  $\Phi_g$  leképezéseken kívül *nincsenek más* folytonos lineáris funkcionálok a  $L^p$  téren.

**10. tétel** (a Riesz-féle reprezentációs tétel). *Legyen  $1 \leq p < +\infty$ . Ekkor minden  $\Phi \in (L^p)^*$  funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan  $g \in L^q$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) függvény, hogy*

$$\Phi(f) = \Phi_g(f) = \int_X fg \, d\mu \quad (f \in L^p)$$

és  $\|\Phi\|_* = \|g\|_{L^q}$ .

Fennáll tehát a

**11. tétel.** *Legyen  $(X, \Omega, \mu)$  egy  $\sigma$ -véges mértéktér és  $1 \leq p < +\infty$ . Ekkor a*

$$L^p := (L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$$

*függvénytér duális tere azonosítható a  $L^q$  függvénytérrel, ahol  $q$  a  $p$  konjugált kitevője, azaz*

$$(L^p)^* \cong L^q.$$

• **A**  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  tér duális tere

• **Hilbert-tér duális tere**

Legyen  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy valós Hilbert-tér, és jelölje  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  ( $x \in H$ ) a skaláris szorzat által indukált normát.

A  $H$ -n értelmezett folytonos lineáris funkcionálok leírásához abból az egyszerű észrevételből fogunk majd kiindulni, hogy természetes módon meg lehet adni ilyen leképezéseket: minden  $a \in H$  vektor esetén

$$\Phi_a(x) := \langle x, a \rangle \quad (x \in H)$$

folytonos lineáris funkcionál a  $H$  Hilbert téren. Kevésbé nyilvánvaló, hogy *minden* folytonos lineáris funkcionál alkalmas  $a \in H$  vektorral ilyen alakban adható meg. Ezeket az eredményeket röviden a következő formában fogalmazzuk meg:

**12. tétel.** *Ha  $H$  tetszőleges valós Hilbert tér, akkor*

$$H^* \cong H,$$

*azaz  $H$  duális tere azonosítható magával a  $H$  Hilbert térrel.*

**Bizonyítás.** Azt kell megmutatni, hogy  $H$  és  $H^*$  izometrikusan izomorfak, azaz van olyan  $T : H \rightarrow H^*$  lineáris bijekció, amelyre  $\|Tx\|_* = \|x\|$  is teljesül minden  $x \in H$  vektorra.

(a) Tetszőlegesen rögzített  $a \in H$  vektor esetén tekintsük a

$$\Phi_a(x) := \langle x, a \rangle \quad (x \in H)$$

leképezést. A skaláris szorzat tulajdonságai alapján ez nyilván lineáris. A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség miatt

$$|\Phi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \quad (x \in H),$$

ezért  $\Phi_a$  korlátos, tehát folytonos. Az operátornorma definíciója alapján ebből az is következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* \leq \|a\|. \quad (5.10)$$

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához tegyük fel, hogy  $a \neq \theta$  és legyen  $x_0 := \frac{a}{\|a\|}$ . Ekkor

$$\Phi_a(x_0) = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, a \right\rangle = \frac{\langle a, a \rangle}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Mivel  $\|x_0\| = 1$ , ezért

$$\|\Phi_a\|_* = \sup\{|\Phi_a(x)| \mid x \in H, \|x\| \leq 1\} \geq |\Phi_a(x_0)| = \|a\|.$$

Ezt egybevetve (5.10)-zel a bizonyítandó  $\|\Phi_a\|_* = \|a\|$  egyenlőséget kapjuk. Nyilvánvaló, hogy az állítás  $a = \theta$  esetén is fennáll.

(b) Most megmutatjuk, hogy minden  $H$ -n értelmezett folytonos lineáris funkcionál  $\Phi_a$  alakú, ahol  $a \in H$ . Ez a

**Riesz–Fréchet-féle reprezentációs tétel.** *Legyen  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos lineáris funkcionál a  $H$  Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik olyan  $a \in H$  vektor, amelyre  $\Phi(x) = \Phi_a(x)$  ( $x \in H$ ) teljesül, emellett a  $\|\Phi\|_* = \|a\|$  egyenlőség is érvényes.*

**A Riesz–Fréchet-féle reprezentációs tétel bizonyítása.** A kívánt tulajdonságú  $a \in H$  vektort a  $\Phi$  leképezés magterére ortogonális vektorként lehet megkapni.

Legyen tehát  $\Phi \in H^*$ . Mivel  $\Phi \equiv 0$  esetén  $a = \theta$  megfelelő választás, ezért feltehető, hogy  $\Phi \not\equiv 0$ . Jelölje  $H_0$  a  $\Phi$  magterét:

$$H_0 := \text{Ker } \Phi = \{x \in H \mid \Phi(x) = 0\}.$$

Mint hogy  $\Phi$  folytonos és lineáris, ezért  $H_0$  zárt altér és  $\Phi \neq 0$  miatt ez valódi altér is. A Riesz-féle felbontási tétel szerint létezik olyan nemnulla vektor, amelyik merőleges a  $H_0$  altérre. Jelöljön  $e$  egy ilyen *egységvektort*. Megmutatjuk, hogy

$$a := \Phi(e) e$$

megfelelő választás, azaz  $\Phi = \Phi_a$ . Valóban, tetszőleges  $x \in H$ -ra legyen  $\lambda := \Phi(x)/\Phi(e)$  és  $z := x - \lambda e$ . (Világos, hogy  $\Phi(e) \neq 0$ , különben  $e \in H_0$  és így  $e \perp H_0$  miatt  $0 = \langle e, e \rangle = \|e\|^2$  lenne, ami  $\|e\| = 1$  miatt nem igaz.) Ekkor  $\Phi(z) = 0$ , tehát  $z \in H_0$ , és így  $z \perp e$ . Következésképpen

$$\Phi(x) = \Phi(\lambda e + z) = \lambda \Phi(e)$$

és

$$\langle x, a \rangle = \Phi(e) \langle x, e \rangle = \lambda \Phi(e) \langle e, e \rangle + \Phi(e) \langle z, e \rangle = \lambda \Phi(e).$$

A  $\Phi \equiv \Phi_a$  egyenlőség tehát valóban érvényes. Ezért  $\|\Phi\|_* = \|a\|$ .

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az  $a_1, a_2 \in H$  elemekre  $\Phi_{a_1} = \Phi_{a_2} = \Phi$  teljesül. Ekkor

$$\Phi_{a_1}(x) - \Phi_{a_2}(x) = \langle x, a_1 - a_2 \rangle = 0 \quad (\forall x \in H).$$

Itt az  $x := a_1 - a_2$  vektort véve  $\|a_1 - a_2\|^2 = 0$ , azaz  $a_1 = a_2$  adódik. A Riesz-Fréchet-féle reprezentációs tételt tehát bebizonyítottuk.

(c) A fentiekből már következik, hogy a

$$T : H \rightarrow H^*, \quad T(a) := \Phi_a$$

leképezés lineáris bijekció és  $\|a\| = \|\Phi_a\|$  miatt izometria is, tehát  $H$  és  $H^*$  valóban izometrikusan izomorfak. ■

## 6. A Hahn–Banach-tételek

### 6.1. Előzetes megjegyzések

A funkcionálanalízis alapvető célja (pl.) normált terek közötti leképezések vizsgálata. Ezek közül a legegyszerűbbeknek, nevezetesen a **lineáris leképezéseknek** a leírása sem egyszerű feladat.

Ebben a fejezetben a valós értékű lineáris leképezéseket, vagyis a lineáris funkcionálokat fogjuk általános szempontból vizsgálni. Az előző fejezetben számos példát láttunk *konkrét* normált tereken értelmezett funkcionálokra, sőt több esetben jellemeztük is a lineáris funkcionálok halmazát, azaz az adott tér duális terét. A duális tér számos tulajdonsága szoros kapcsolatban van az eredeti tér tulajdonságával, másrészt több szempontból kezelhetőbb az eredeti térnél. Ezért fontos feladat ezek vizsgálata.

Az előző fejezetben láttuk, hogy ha  $X$  **véges dimenziós** lineáris tér, akkor ezen minden lineáris funkcionál

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$$

alakú, ahol  $x_k$ -k az  $x$  vektor valamely rögzített bázisra vonatkozó koordinátái és  $\alpha_k$ -k a funkcionált meghatározó tetszőleges állandók. **Végtelen dimenziós terek** esetén a helyzet lényegesen bonyolultabb. Már az sem nyilvánvaló, hogy egy ilyen Banach-téren egyáltalán léteznek-e nemnulla lineáris funkcionálok. Mivel véges dimenziós téren igen egyszerűen meg lehet adni lineáris funkcionálokat, ezért egy természetes kiindulópont annak vizsgálata, hogy egy ilyen leképezést vajon ki lehet-e terjeszteni az egész térre. A **Hahn–Banach-tétel** éppen azt állítja, hogy ez a kiterjesztés lehetséges. A fentiek alapján a Hahn–Banach-tételt a **funkcionálanalízis egyik alapvető tételének** mondjuk.

A következő pontokban ismertetjük az általános tételket, és csupán megemlítjük azt, hogy ezeknek az eredményeknek igen sok fontos alkalmazása van többek között a parciális differenciálegyenletek elméletében, az irányításelméletben, a játékelméletben, sőt a fizikában is.

### 6.2. A Hahn–Banach-tétel analitikus alakjai: lineáris funkcionálok kiterjesztése

**1. tétel** (a Hahn–Banach-tétel analitikus alakja vektortér esetén). *Legyen  $X$  valós vektortér és tegyük fel, hogy  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  olyan leképezés, amelyre a következők*

teljesülnek:

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) & (\forall x, y \in X) & \quad (p \text{ szubadditív}); \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x) & (\forall x \in X, \lambda > 0) & \quad (p \text{ pozitív homogén}). \end{aligned}$$

Másrészt legyen  $X_0 \subset X$  altér és  $\Phi_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan lineáris funkcionál, amelyet az  $X_0$  altéren  $p$  majorál, azaz

$$\Phi_0(x) \leq p(x) \quad (\forall x \in X_0).$$

Ekkor van olyan, az egész  $X$  téren értelmezett  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris funkcionál, hogy

- $\Phi$  kiterjesztése  $\Phi_0$ -nak, azaz  $\Phi(x) = \Phi_0(x)$  ( $\forall x \in X_0$ ) és
- $\Phi(x) \leq p(x)$  ( $\forall x \in X$ ).

A tétel bizonyításához a **Zorn-lemmát** fogjuk alkalmazni. Ennek megfogalmazása előtt felidézzük a *rendezett halmazok elméletének* néhány fogalmát.

Jelöljön  $(\mathcal{F}, \leq)$  *parciálisan rendezett* halmazt, azaz legyen  $\mathcal{F}$  nemüres halmaz és  $\leq \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció.

A  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  egy *teljesen rendezett* részhalmaz, ha  $\mathcal{G}$  bármely két eleme összehasonlítható, azaz az  $a \leq b$  és  $b \leq a$  relációk közül legalább az egyik teljesül.

A  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  részhalmaznak  $c \in \mathcal{F}$  egy *felső korlátja*, ha bármely  $\mathcal{G}$ -beli  $g$  elem esetén  $g \leq c$ .

Azt mondjuk, hogy  $m \in \mathcal{F}$  az  $\mathcal{F}$  halmaznak *egy maximális eleme*, ha abból, hogy  $m \leq a$  valamely  $\mathcal{F}$ -beli  $a$  elemre, az következik, hogy  $a = m$ . Másképpen fogalmazva: nincs  $m$ -nél nagyobb  $\mathcal{F}$ -beli elem.

**Zorn-lemma.** *Legyen  $(\mathcal{F}, \leq)$  egy parciálisan rendezett halmaz. Ha  $\mathcal{F}$  minden teljesen rendezett részhalmazának van  $\mathcal{F}$ -beli felső korlátja, akkor  $\mathcal{F}$ -nek van maximális eleme.*

**Megjegyzés.** A Zorn-lemma jól használható segédeszköz matematikai objektumok létezésének a bizonyításánál.

**A Hahn–Banach-tétel bizonyítása.** Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{F} := \left\{ \Psi \in X \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_\Psi \subset X \text{ altér, } \Psi \text{ lineáris,} \\ X_0 \subset \mathcal{D}_\Psi, \Psi \text{ kiterjesztése } \Phi_0\text{-nak és } \Psi(x) \leq p(x) \forall x \in \mathcal{D}_\Psi \end{array} \right. \right\}.$$

$\mathcal{F}$  nem üres halmaz, mert  $\Phi_0 \in \mathcal{F}$ . Értelmezzük  $\mathcal{F}$ -en a következő relációt:

$$\Psi_1 \leq \Psi_2 \quad :\iff \quad \mathcal{D}_{\Psi_1} \subset \mathcal{D}_{\Psi_2} \text{ és } \Psi_2 \text{ kiterjesztése } \Psi_1\text{-nek.}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy  $(\mathcal{F}, \leq)$  *parciálisan rendezett halmaz*. Az is igaz, hogy  $\mathcal{F}$  minden *teljesen rendezett*  $\mathcal{G}$  *részalmazának van  $\mathcal{F}$ -beli felső korlátja*. Vegyünk ugyanis egy ilyen  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  részalmazt, és definiáljuk a  $\Psi^*$  leképezést a következő módon:

$$\mathcal{D}_{\Psi^*} := \bigcup_{\Psi \in \mathcal{G}} \mathcal{D}_{\Psi}, \quad \Psi^*(x) := \Psi_i(x), \quad \text{ha } x \in \mathcal{D}_{\Psi_i} \text{ és } \Psi_i \in \mathcal{G}.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy  $\Psi^*$  egy jól definiált  $X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $\Psi^*$  felső korlátja  $\mathcal{G}$ -nek.

A Zorn-lemma feltételei tehát teljesülnek, következésképpen  $\mathcal{F}$ -nek van maximális eleme. Jelöljük egy maximális elemet  $\Phi$ -vel.

A tétel bizonyításához elég azt igazolni, hogy a  $\Phi$  maximális elem értelmezési tartománya az egész  $X$  tér, azaz  $\mathcal{D}_{\Phi} = X$ . Ezt indirekt módon látjuk be. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy  $\mathcal{D}_{\Phi} \neq X$ , azaz az  $X$  térnek van olyan  $x_0$  eleme, ami nem tartozik hozzá a  $\mathcal{D}_{\Psi}$  halmazhoz.

Definiálni fogunk egy olyan  $\Phi_1 \in \mathcal{F}$  leképezést, melyre  $\Phi < \Phi_1$ , és ez ellentmond annak, hogy  $\Phi$  maximális elem.

A szóban forgó  $\Phi_1$  értelmezéséhez vegyünk egy  $x_0 \in X \setminus \mathcal{D}_{\Phi} \neq \emptyset$  vektort. Legyen

$$\mathcal{D}_{\Phi_1} := \{x + tx_0 \mid x \in \mathcal{D}_{\Phi}, t \in \mathbb{R}\} \subset X$$

és

$$\Phi_1(x + tx_0) := \Phi(x) + t\alpha \quad (x \in \mathcal{D}_{\Phi} \text{ és } t \in \mathbb{R}),$$

ahol  $\alpha$  tetszőlegesen rögzített valós szám.

Világos, hogy  $\mathcal{D}_{\Phi_1} \subset X$  egy altér és  $\Phi_1$  lineáris kiterjesztése  $\Phi$ -nek. Most megmutatjuk, hogy az  $\alpha$  szám megválasztható úgy, hogy  $\Phi_1 \in \mathcal{F}$  is igaz legyen, azaz teljesüljön a

$$\Phi_1(x + tx_0) = \Phi(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad (\forall x \in \mathcal{D}_{\Phi} \text{ és } \forall t \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség is.  $\Phi$  linearitása és  $p$  pozitív homogenitása miatt ezt az egyenlőtlenséget elég a  $t = \pm 1$  értékekre tekinteni. Ez azt jelenti, hogy az  $\alpha$ -t oly módon kell megválasztani, hogy minden  $x, y \in \mathcal{D}_{\Psi}$  esetén fennálljanak a

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \alpha &\leq p(x + x_0) \\ \Phi(y) - \alpha &\leq p(y - x_0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

egyenlőtlenségek.

Mivel  $\Phi$  lineáris és  $p$  szubadditív, ezért minden  $x, y \in \mathcal{D}_{\Phi}$  esetén

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

amiből átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\Phi(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \Phi(x).$$

Ez az egyenlőtlenség tehát minden  $x, y \in \mathcal{D}_\Phi$  esetén teljesül. Ezért a bal oldal szupréruma nem lehet nagyobb a jobb oldal infimumánál, azaz

$$A := \sup_{y \in \mathcal{D}_\Phi} (\Phi(y) - p(y - x_0)) \leq \inf_{x \in \mathcal{D}_\Phi} (p(x + x_0) - \Phi(x)) =: B.$$

Ekkor bármelyik  $\alpha \in [A, B]$  jó választás, ugyanis ezekre az  $\alpha$  értékekre fennáll a

$$\Phi(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - \Phi(x) \quad (x, y \in \mathcal{D}_\Phi)$$

egyenlőtlenség, amiből átrendezéssel (6.1) adódik. ■

**2. tétel** (a Hahn–Banach-tétel analitikus alakja normált tér esetén).

Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  normált tér,  $X_0 \subset X$  tetszőleges altér és  $\Phi_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos lineáris funkcionál a

$$\|\Phi_0\|_* = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X \leq 1}} |\Phi_0(x)|$$

képlettel értelmezett normával.

Ekkor van olyan folytonos lineáris  $\Phi$  funkcionál az  $X$  téren (vagyis  $\exists \Phi \in X^*$ ), amelyik az  $X_0$  altéren megegyezik  $\Phi_0$ -lal és  $\|\Phi\|_* = \|\Phi_0\|_*$ . **Azaz:** egy normált tér tetszőleges alterén értelmezett folytonos lineáris funkcionál kiterjeszhető az egész  $X$  térre a folytonosság, a linearitás és a norma megtartásával.

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk az előző tételt a

$$p(x) := \|\Phi_0\|_* \cdot \|x\| \quad (x \in X)$$

szubadditív és pozitív homogén függvénnyel. ■

**1. következmény.** Ha  $(X, \|\cdot\|_X)$  normált tér és  $x_0 \in X$ , akkor az  $X^*$  duális térben létezik olyan folytonos lineáris  $\Phi$  funkcionál, amelyre

$$\Phi(x_0) = \|x_0\|^2 \quad \text{és} \quad \|\Phi\|_* = \|x_0\|$$

teljesül.

**Bizonyítás.** Jelöljük a  $x_0$  által meghatározott alteret  $X_0$ -lal:

$$X_0 := \{t \cdot x_0 \mid t \in \mathbb{R}\} \subset X,$$



és értelmezzük a

$$\Phi_0(t \cdot x_0) := t \cdot \|x_0\|^2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

leképezést. Ekkor  $\Phi_0$  olyan folytonos lineáris funkcionál az  $X_0$  altéren, amelynek a normája  $\|x_0\|$ . Az előző tétel szerint ez a norma megtartásával kiterjeszthető az egész  $X$  térre. ■

**2. következmény.** Legyen  $X_0$  az  $X$  normált tér egy tetszőleges **zárt** altére és  $e \in X \setminus X_0$ . Ekkor van olyan folytonos lineáris  $\Phi$  funkcionál az  $X$  téren, amelyre

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ 1, & x = e. \end{cases}$$

**3. következmény.** Az  $(X, \|\cdot\|_X)$  normált tér tetszőleges  $x$  elemének a normájára az

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{\Phi \in X^* \\ \|\Phi\|_* \leq 1}} |\Phi(x)|$$

képlet érvényes.

### 6.3. A Hahn–Banach-tétel geometriai alakjai: konvex halmazok szétválasztása síkokkal

Először vektortér **síkjait** értelmezzük. Ehhez a közönséges tér síkjaiból indulunk ki. Az  $\mathbb{R}^3$  tér adott  $x_0$  pontján átmenő  $n$  normálvektorú síkon az

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - x_0, n \rangle = 0\}$$

halmazt értjük.

Az  $\langle x - x_0, n \rangle = 0$  egyenlőséget írjuk át az  $\langle x, n \rangle = \langle x_0, n \rangle$  alakra. Az  $\langle x, n \rangle$  pedig felfogható úgy is, mint a  $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \langle x, n \rangle$  lineáris funkcionálnak az  $x$  helyen vett helyettesítési értéke. Az  $S$  sík tehát a  $\Phi$  függvény  $\alpha = \langle x_0, n \rangle$  paraméterhez tartozó *szintfelülete*:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x) = \alpha\}.$$

Az itt használt fogalmakat tetszőleges vektortérben is értelmezhetjük, ezért tetszőleges vektortérben a síkokat lineáris funkcionálok szintfelületeként definiálhatjuk.

**Definíció.** Az  $X$  vektortér **hipersíkjainak** nevezzük az

$$S_{\Phi, \alpha} := \{x \in X \mid \Phi(x) = \alpha\}$$

alakú részhalmazokat, ahol  $\Phi$  egy nem azonosan nulla lineáris funkcionál és  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ekkor azt is mondjuk, hogy  $S_{\Phi, \alpha}$  az  $X$  tér  $[\Phi = \alpha]$  egyenletű hipersíkja.

Az  $S_{\Phi, \alpha}$  hipersík az  $X$  teret két részre, úgynevezett **félterekre** osztja:

$$\{x \in X \mid \Phi(x) \geq \alpha\}, \quad \{x \in X \mid \Phi(x) \leq \alpha\},$$

amelyek közös része az  $S_{\Phi, \alpha}$  sík.

**3. tétel.** *Az  $X$  normált tér  $[\Phi = \alpha]$  egyenletű hipersíkja akkor és csak akkor **zárt** halmaz, ha  $\Phi$  **folytonos** lineáris funkcionál.*

**Definíció.** Legyenek  $A$  és  $B$  az  $X$  normált tér részhalmazai. Azt mondjuk, hogy az  $S_{\Phi, \alpha}$  hipersík

(a) **tágabb értelemben szétválasztja**  $A$ -t és  $B$ -t, ha

$$\Phi(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad \Phi(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B\text{-re};$$

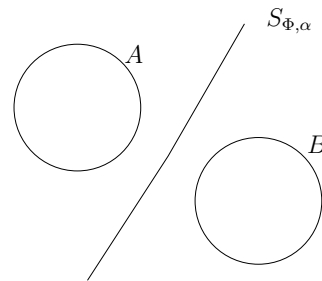
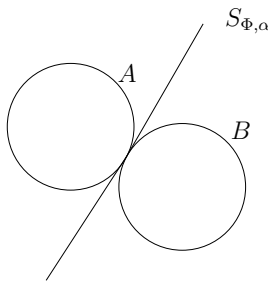
(b) **szigorúbb értelemben szétválasztja**  $A$ -t és  $B$ -t, ha

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \Phi(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad \Phi(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B\text{-re.}$$

Szemléletesen:

tágabb értelemben vett szétválasztás

szigorúbb értelemben vett szétválasztás



**Definíció.** Az  $X$  lineáris tér egy  $A$  részhalmaza **konvex**, ha

$$\forall x, y \in A \quad \text{és} \quad \forall t \in [0, 1] : \quad tx + (1 - t)y \in A.$$

**4. tétel** (a Hahn–Banach-tétel első geometriai alakja.). *Legyen  $A$  és  $B$  két diszjunkt nemüres konvex halmaz az  $X$  normált térben. Ha  $A$  nyílt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik tágabb értelemben szétválasztja  $A$ -t és  $B$ -t.*

**5. tétel** (a Hahn–Banach-tétel második geometriai alakja.). *Legyen  $A$  és  $B$  két diszjunkt nemüres konvex halmaz az  $X$  normált térben. Ha  $A$  zárt és  $B$  kompakt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik szigorúbb értelemben szétválasztja  $A$ -t és  $B$ -t.*



## 7. A Banach–Steinhaus-tételek

### 7.1. Operátorsorozat konvergenciája

Tetszőleges  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált terek esetén értelmeztük a folytonos (korlátos) lineáris leképezések  $B(X, Y)$  lineáris terét, és ezt elláttuk az

$$\|A\| := \|A\|_{XY} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Ax\|_Y \quad (A \in B(X, Y))$$

(operátor)normával. Ez a norma az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat alábbi konvergenciáját indukálja.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat **normában** (vagy *erősen*) tart az  $A \in B(X, Y)$  operátorhoz, ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Szintén természetes a következő konvergencia-típus bevezetése.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat az  $M \subset X$  halmazon **pontonként** tart az  $A \in B(X, Y)$  operátorhoz, ha minden  $x \in M$  vektorra az  $(A_n x) \subset Y$  sorozat  $Ax$ -hez konvergál az  $Y$  térben, azaz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x - Ax\|_Y = 0 \quad (x \in M).$$

Mivel

$$\|A_n x - Ax\|_Y = \|(A_n - A)x\|_Y \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|_X \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

ezért a normakonvergenciából következik a pontonkénti konvergencia az egész  $X$  halmazon.

Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz, vagyis a pontonkénti konvergenciából általában nem következik a normakonvergencia. Legyen ui.  $H$  Hilbert-tér és vegyünk benne egy  $(e_n) \subset H$  ortonormált rendszert. Minden  $n \in \mathbb{N}$  számra tekintsük az

$$L_n x := \langle x, e_n \rangle \quad (x \in H)$$

funkcionálokat. A Bessel-egyenlőtlenségből következik, hogy minden  $x \in H$  vektorra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = 0,$$

és ez azt jelenti, hogy az  $(L_n)$  funkcionálsorozat *pontonként tart* az azonosan nulla funkcionálhoz. Viszont  $(L_n)$  nem konvergál normában ehhez a funkcionálhoz, hiszen  $\|L_n\| = \|e_n\| = 1$ .

A **Banach–Steinhaus-tétel** operátorsorozat pontonkénti konvergenciájára ad meg szükséges és elégséges feltételt. Ezt az eredményt is a **funkcionálanalízis alapvető tételei** közé szokás sorolni.

## 7.2. Az általános eredmények

### • Az egyenletes korlátosság tétele

**1. tétel** (az egyenletes korlátosság tétele). *Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach-tér,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  pedig normált tér. Tegyük fel, hogy az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat pontonként korlátos az  $X$  téren, tehát minden  $x \in X$  elemre az  $(A_n x)$  vektorsorozat korlátos az  $Y$  térben, azaz*

$$\forall x \in X \text{ elemhez } \exists (x\text{-től függő}) C_x > 0 : \|A_n x\|_Y \leq C_x \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (7.1)$$

*Ekkor az operátornormák  $(\|A_n\|)$  sorozata egyenletesen korlátos, azaz*

$$\exists C > 0 : \|A_n\| \leq C \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (7.2)$$

**Bizonyítás.** A Baire-féle kategóriatétel felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\exists C > 0 : \|A_n z\|_Y \leq C \quad (\forall z \in X, \|z\|_X \leq 1 \text{ és } \forall n \in \mathbb{N}). \quad (7.3)$$

Az operátornorma definíciója alapján ebből már következik a (7.2) egyenlőtlenség.

Tekintsük az

$$X_m := \{x \in X \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_Y \leq m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

halmazokat.  $X_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) **zárt** halmaz. Valóban, legyen  $x_k \in X_m$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) konvergens sorozat. Azt kell igazolni, hogy az  $x := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$  határérték is  $X_m$ -hez tartozik.

Az  $x_k \in X_m$  feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$\|A_n x_k\|_Y \leq m \quad (\forall n, k \in \mathbb{N}).$$

Ebből az  $A_n$  operátorok és a norma folytonossága alapján

$$\|A_n x\|_Y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A_n x_k\|_Y \leq m \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

adódik, és ez azt jelenti, hogy  $x \in X_m$ .

A pontonkénti korlátosságra tett (7.1) feltételünkből következik, hogy

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m = X.$$

Az  $X$  teljes és az  $X_m$  halmazok zártak, ezért a Baire-féle kategóriatétel alapján int  $X_{m_0} \neq \emptyset$  valamilyen  $m_0$ -ra, így az  $X_m$  (zárt) halmazok közül legalább az egyik tartalmaz (zárt) gömböt, azaz

$$\begin{aligned} & \exists m_0 \in \mathbb{N}, \exists x_0 \in X \text{ és } \exists r > 0 \\ & \overline{k_r(x_0)} = \{x \in X \mid \|x - x_0\|_X \leq r\} \subset X_{m_0}. \end{aligned}$$

Ennek a halmaznak az  $x$  elemeit az  $x = x_0 + rz$  ( $\|z\|_X \leq 1$ ) alakban lehet felírni. Az  $X_{m_0}$  definíciója alapján tehát fennáll az

$$\|A_n(x_0 + rz)\|_Y \leq m_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ és } \forall \|z\|_X \leq 1) \quad (7.4)$$

egyenlőtlenség.

Legyen  $z \in X$ ,  $\|z\|_X \leq 1$  egy tetszőleges vektor és  $n \in \mathbb{N}$  egy tetszőleges index.  $A_n$  linearitása miatt

$$rA_n(z) = rA_n(z) + A_n(x_0) - A_n(x_0) = A_n(x_0 + rz) - A_n(x_0),$$

ezért (7.4) alapján kapjuk, hogy

$$\|rA_n(z)\|_Y \leq \|A_n(x_0 + rz)\|_Y + \|A_n(x_0)\|_Y \leq m_0 + C_{x_0},$$

ahol  $C_{x_0}$  a (7.1) feltételből az  $x_0$  ponthoz tartozó állandó. Következésképpen

$$\|A_n(z)\|_Y \leq \frac{1}{r}(m_0 + C_{x_0}) \quad (\forall z \in X, \|z\|_X \leq 1 \text{ és } \forall n \in \mathbb{N})$$

és ez azt jelenti, hogy a (7.3) egyenlőség a  $C := \frac{1}{r}(m_0 + C_{x_0})$  állandóval teljesül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Az egyenletes korlátosság tételének egy átfogalmazása a

**2. tétel** (divergencia-tétel). *Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach-tér,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  pedig normált tér. Tegyük fel, hogy az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat normáinak az  $(\|A_n\|)$  sorozata nem korlátos, azaz*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty.$$

*Ekkor van olyan  $x_0 \in X$  elem, hogy az  $Y$  térbeli  $(A_n x_0)$  sorozat nem korlátos, azaz*

$$\sup_n \|A_n x_0\|_Y = +\infty,$$

*következésképpen az  $(A_n x_0) \subset Y$  sorozat nem konvergens.*

• **Operátorsorozat pontonkénti konvergenciája**

**3. tétel.** Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach-tér és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált tér. Tegyük fel, hogy az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  operátorsorozat minden  $x \in X$  pontban konvergens, vagyis minden  $x \in X$  vektorra az  $Y$ -beli  $(A_n x)$  vektorsorozat konvergens. Jelölje

$$A(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x \quad (x \in X)$$

a limesz-operátort. Ekkor  $A$  is folytonos lineáris operátor, azaz  $A \in B(X, Y)$  és

$$\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|.$$

**Bizonyítás.** A linearitás a határérték és a műveletek felcserélhetőségéből következik. A folytonosságra vonatkozó állítást a korlátosság bizonyításával igazoljuk. A norma folytonossága alapján

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x\|_Y \quad (x \in X).$$

Mindegyik  $A_n$  korlátos, ezért

$$\|A_n x\|_Y \leq \|A_n\| \cdot \|x\|_X \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}).$$

Itt mindkét oldal limesz inferiorját véve és felhasználva azt, hogy konvergens sorozatok határértéke a limesz inferiorjával egyenlő, azt kapjuk, hogy

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x\|_Y = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x\|_Y \leq \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| \right) \cdot \|x\|_X \quad (x \in X). \quad (7.5)$$

Mivel

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\| \leq \sup_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|,$$

és az egyenletes korlátosságra vonatkozó tétel alapján a jobb oldal véges, ezért (7.5) miatt az  $A$  limesz-operátor valóban korlátos, továbbá fennáll az

$$\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|$$

egyenlőtlenség is. ■

**4. tétel** (a Banach–Steinhaus-tétel I.). Legyen  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach-tér és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált tér, továbbá  $(A_n) \subset B(X, Y)$  és  $A \in B(X, Y)$ . Ekkor a következő két állítás egymással ekvivalens:



**1°** Az  $(A_n)$  operátorsorozat az  $X$ -en pontonként tart az  $A$  operátorhoz, azaz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x = Ax \quad (x \in X).$$

**2°** (a) Van olyan  $Z \subset X$  zárt rendszer, hogy  $(A_n)$  a  $Z$ -n pontonként tart  $A$ -hoz, azaz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n z = Az \quad (z \in Z) \quad \text{és}$$

(b) az operátornormák  $(\|A_n\|)$  sorozata egyenletesen korlátos, azaz

$$\exists C > 0 : \quad \|A_n\| \leq C \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

**Bizonyítás.**  $\boxed{1^\circ \Rightarrow 2^\circ}$  Az (a) feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha az  $(A_n x) \subset Y$  sorozat minden  $x \in X$  pontban konvergens, akkor az  $(\|A_n x\|_Y, n \in \mathbb{N})$  számsorozat az  $X$  tér minden  $x$  pontjában korlátos, ezért az egyenletes korlátosság tétele miatt (b) is teljesül.

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 1^\circ}$  Most megmutatjuk, hogy az (a) és a (b) feltételekből következik az  $(A_n x, n \in \mathbb{N})$  sorozatok konvergenciája minden  $x \in X$  pontban, azaz

$$\forall x \in X \text{ esetén } \|A_n x - Ax\|_Y \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow +\infty. \quad (7.6)$$

Először azt jegyezzük meg, hogy az  $A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) operátorok linearitása és az (a) feltétel miatt az  $(A_n z)$  sorozat minden  $z \in [Z]$  pontban konvergens.

A  $Z \subset X$  egy zárt rendszer, ami azt jelenti, hogy  $\overline{[Z]} = X$ , azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists y \in [Z] : \quad \|x - y\|_X < \varepsilon. \quad (7.7)$$

Az előző megjegyzés értelmében

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n y - Ay\|_Y = 0 \quad (y \in [Z]). \quad (7.8)$$

Így

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\|_Y &\leq \|Ax - Ay\|_Y + \|Ay - A_n y\|_Y + \|A_n y - A_n x\|_Y \leq \\ &\leq (\|A\| + \|A_n\|) \|x - y\|_X + \|Ay - A_n y\|_Y, \end{aligned}$$

és ez a kifejezés (7.7) és (7.8) miatt elég kicsi, ha  $n$  elég nagy, ami a (7.6) állítás bizonyítását jelenti. ■

Hasonló módon igazolható a

**5. tétel** (a Banach–Steinhaus-tétel II.). *Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek. Ekkor a folytonos lineáris operátoroknak az  $(A_n) \subset B(X, Y)$  sorozata akkor és csak akkor konvergál minden  $x \in X$  pontban, ha*

(a) *van olyan  $Z \subset X$  zárt rendszer, amelynek  $z \in Z$  pontjaiban az  $(A_n z)$  sorozat konvergens, és*

(b) *az operátornormák  $(\|A_n\|)$  sorozata egyenletesen korlátos, azaz*

$$\exists C > 0 : \quad \|A_n\| \leq C \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

### 7.3. Alkalmazások

#### • Fourier-sor divergenciája

Az egyenletes korlátosság tételének alkalmazásaként megmutatjuk, hogy van olyan folytonos függvény, amelyeknek a trigonometrikus Fourier-sora egy előre megadott pontban divergens.

Emlékeztetünk arra, hogy egy  $f \in C_{2\pi}$  függvény **trigonometrikus Fourier-sorának** az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú függvényt nevezünk, ahol az együtthatókat az

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

képletekkel definiáltuk. A sor

$$(S_n f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

részletösszegei az együtthatók képletének és a koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós tételnek a felhasználásával a következő alakban írhatók fel:

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt, \quad (7.9)$$

ahol

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \begin{cases} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & \text{ha } \sin(t/2) \neq 0 \\ n + \frac{1}{2}, & \text{ha } \sin(t/2) = 0 \end{cases}$$

a **Dirichlet-féle magfüggvény**.

Így minden  $n$  természetes számra tekinthetjük az

$$\mathbf{S}_n : (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \quad \mathbf{S}_n f := S_n f$$

operátorokat. Az  $(\mathbf{S}_n)$  operátorsorozat pontonkénti konvergenciája tehát az  $(S_n f)$  függvénysorozat egyenletes konvergenciáját jelenti.  $\mathbf{S}_n$  lineáris, mert az integrál lineáris;  $\mathbf{S}_n$  korlátos is, mert (7.9) alapján

$$\|\mathbf{S}_n f\|_\infty \leq \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \right) \cdot \|f\|_\infty \quad (f \in C_{2\pi}).$$

Az 5.4. pont 3. példájából következik, hogy a korlátos lineáris  $\mathbf{S}_n$  operátor normája

$$\|\mathbf{S}_n\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bebizonyítható, hogy az  $(\|\mathbf{S}_n\|)$  sorozat nagyságrendje  $\log n$ , azaz léteznek olyan  $c_1, c_2$  pozitív számok, hogy

$$c_1 \log n \leq \|\mathbf{S}_n\| \leq c_2 \log n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az operátorok normáiból képzett  $(\|\mathbf{S}_n\|)$  sorozat nem korlátos:

$$\|\mathbf{S}_n\| \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Az egyenletes korlátosság tételéből tehát azonnal adódik az alábbi

**6. tétel.** *Van olyan  $2\pi$  szerint periodikus folytonos  $f$  függvény, amelyik trigonometrikus Fourier-sorának  $(S_n f)$  részletösszegei nem konvergálnak egyenletesen az  $\mathbb{R}$ -en, sőt  $\sup_n \|S_n f\|_\infty = +\infty$ .*

Teljesen hasonlóan olyan folytonos függvénynek a létezése is bebizonyítható, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora egy megadott pontban divergens.

**7. tétel.** *Tetszőleges  $x_0 \in \mathbb{R}$  ponthoz van olyan  $f \in C_{2\pi}$  függvény, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora  $x_0$ -ban divergens, sőt  $\sup_n |S_n f(x_0)| = +\infty$ .*

Tekintsük ui. a

$$\Phi_n : (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad \Phi_n f := (S_n f)(x_0)$$

funkcionált, és vegyük figyelembe, hogy

$$\|\Phi_n\| = \|\mathbf{S}_n\| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyezzük még azt, hogy 1876-ban du Bois Reymondnak sikerült példát adnia olyan konkrét folytonos függvényre, amelynek a Fourier-sora egy pontban divergál, tehát nem állítja elő a függvényt. Utána többeknek is sikerült ilyen példákat megszerkeszteni. 1909-ben Fejér Lipót adott egy igen egyszerű példát (l. *Szókefavi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok* című tankönyvének 334. oldalát).

### • Fejér szummációs tétele

A Banach–Steinhaus-tétel alkalmazásaként most bebizonyítjuk Fejér Lipótnak az alábbi, 1904-ben publikált alapvető eredményét.

**8. tétel** (Fejér szummációs tétele). *Minden  $2\pi$  szerint periodikus folytonos  $f$  függvényre teljesül, hogy trigonometrikus Fourier-sorának  $S_n f$  részletösszegeiből képzett számtani közepek*

$$(\sigma_n f)(x) := \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

sorozata az egész számegyenesen egyenletesen konvergál az  $f$  függvényhez.

**Bizonyítás. 1. lépés.** Először azt mutatjuk meg, hogy  $\sigma_n f$ -eket az  $S_n f$ -ekhez hasonlóan zárt alakban lehet felírni.

A részletösszegekre vonatkozó (7.9) képletből azt kapjuk, hogy

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) F_n(t) dt,$$

ahol

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

a **Fejér-féle magfüggvény**.

Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2 \sin(k + \frac{1}{2})t \cdot \sin \frac{t}{2} &= - \sum_{k=0}^n [\cos(k+1)t - \cos kt] = \\ &= 1 - \cos(n+1)t = 2 \sin^2 \frac{n+1}{2}t, \end{aligned}$$

ezért  $F_n$ -re az

$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \quad (t \in (0, 2\pi)),$$

$\sigma_n f$ -re pedig a

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} f(x+t) \left( \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \quad (7.10)$$

zárt előállításunkat kapjuk.

A Dirichlet-féle magfüggvénnyel összehasonlítva, a Fejér-féle magoknak a legszembevetőbb tulajdonsága az, hogy nem változtatják meg az előjelüket, hanem

$$F_n(t) \geq 0 \quad (t \in (0, 2\pi)). \quad (7.11)$$

E tulajdonsága miatt a Fejér-féle magfüggvény sokkal kezelhetőbb a Dirichlet-félénél, s végeredményben ezen a tulajdonságon múlik, hogy a részletösszegek számtani közepeivel való összegzés a Fourier-sorok esetében sokkal hatékonyabb, mint a közösleges összegzés magukkal a részletösszegekkel.

A Fejér-féle magfüggvény további, fontos tulajdonsága:

$$\int_0^{2\pi} F_n(t) dt = \pi \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (7.12)$$

Ez azonnal következik a  $D_j(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos jt$  Dirichlet-magok tagonkénti integrálásával adódó

$$\int_0^{2\pi} D_j(t) dt = \pi \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

összefüggésből.

**2. lépés.** Tekintsük minden  $n$ -re a

$$\sigma_n : (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \quad \sigma_n f := \sigma_n f$$

operátorokat.  $\sigma_n$  lineáris, mert az integrál lineáris.  $\sigma_n$  korlátos is, mert (7.10), (7.11) és (7.12) alapján

$$\begin{aligned} \|\sigma_n f\|_\infty &= \|\sigma_n f\|_\infty \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_\infty \cdot \int_0^{2\pi} |F_n(t)| dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \|f\|_\infty \cdot \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = \|f\|_\infty \quad (f \in C_{2\pi}). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy a  $(\sigma_n)$  operátorsorozat az egész  $C_{2\pi}$  téren pontonként tart az identitásoperátorhoz, azaz

$$\forall f \in C_{2\pi}\text{-re} \quad \sigma_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \quad (7.13)$$

Ez azt jelenti, hogy minden  $f \in C_{2\pi}$  esetén a  $(\sigma_n f)$  függvénytársorozat az  $\mathbb{R}$ -en egyenletesen tart  $f$ -hez.

Az állítás bizonyításához a Banach–Steinhaus-tételt használjuk fel. Azt kell megmutatni, hogy

(a) a  $C_{2\pi}$  térben van olyan  $Z$  zárt rendszer, hogy a  $(\sigma_n)$  sorozat a  $Z$ -n pontonként tart az identitásoperátorhoz,

(b) az operátornormák  $(\|\sigma_n\|)$  sorozata egyenletesen korlátos.

Az utóbbi állítás bizonyítása egyszerű, mert az 5.4. pont 3. példája, (7.11) és (7.12) alapján

$$\|\sigma_n\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |F_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Az (a) állítást a

$$Z := \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

függvényrendszerre látjuk be. Weierstrass második approximációs tétele szerint ez valóban egy zárt rendszer a  $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$  Banach-térben.

Rögzítsünk egy  $m = 0, 1, 2, \dots$  számot, és legyen

$$f_m(x) := \cos mx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel minden trigonometrikus polinom Fourier-sora megegyezik magával a polinommal, ezért

$$S_n f_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m \\ f_m, & \text{ha } n \geq m. \end{cases}$$

Következésképpen

$$\sigma_n f_m = \frac{S_0 f_m + \dots + S_{m-1} f_m + S_m f_m + \dots + S_n f_m}{n+1} = \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) f_m,$$

amiből következik, hogy a  $(\sigma_n f_m, n \in \mathbb{N})$  függvénysorozat  $\mathbb{R}$ -en egyenletesen tart  $f_m$ -hez.

Az állítás hasonlóan igazolható a  $Z$  szinuszfüggvényeire is.

Ezzel (7.13)-at, tehát a tétel állítását bebizonyítottuk. ■

### • Általános kvadratúra formulák

Most megmutatjuk, hogy a Banach–Steinhaus-tétel speciális esetként tartalmazza a numerikus matematikában fontos szerepet játszó kvadratúra eljárásokat is.

Integrálok közelítő kiszámítására ún. *kvadrátúra formulákat* szokás használni. Az

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \quad (f \in C[a, b]) \quad (7.14)$$

alakú integrálokat fogjuk tekinteni, ahol az egyszerűség végett feltesszük, hogy  $[a, b]$  kompakt intervallum és  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy adott integrálható függvény (az ún. *súlyfüggvény*). Rögzítsük az  $[a, b]$  intervallumon az  $n$  számú

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

**alap-** vagy **csomópontot**. Egy tetszőleges  $f \in C[a, b]$  függvény (7.14) típusú integrálját ezeken a helyeken vett függvényértékek lineáris kombinációjával közelítjük:

$$Q(f) := \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (f \in C[a, b]), \quad (7.15)$$

ahol  $A_k$ -k ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rögzített számok. A (7.15) alatti  $Q$  funkcionált **kvadrátúra formulának** nevezzük, az  $A_k$  számokat pedig a kvadrátúra formula **együtthatóinak** hívjuk.

Nyilvánvaló, hogy

$$Q : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

egy folytonos lineáris funkcionál, és az 5.4. pontban azt is láttuk, hogy a normája

$$\|Q\| = \sum_{k=1}^n |A_k|.$$

Egyetlen (7.15) alatti formulától természetesen nem lehet elvárni azt, hogy jól közelítse a (7.14) integrált. Ilyen formulák sorozatát fogjuk tekinteni. Ez viszont a következő kérdés feltevéséhez vezet: Adva van tehát két háromszög alakú mátrix, amelyek egyike a csomópontok mátrixa, míg a másik az együtthatók mátrixa:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,1}, & & & & & & A_{1,1} \\ x_{1,2}, & x_{2,2}, & & & & & A_{1,2}, & A_{2,2} \\ x_{1,3}, & x_{2,3}, & x_{3,3} & & & & A_{1,3}, & A_{2,3}, & A_{3,3} \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ x_{1,n}, & x_{2,n}, & x_{3,n}, & \dots, & x_{n,n} & & A_{1,n}, & A_{2,n}, & A_{3,n}, & \dots, & A_{n,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \end{array} \quad (7.16)$$

ahol feltesszük, hogy a csomópontok az  $[a, b]$  intervallumban vannak. Ekkor minden  $f \in C[a, b]$  függvényhez definiáljuk a

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (f \in C[a, b]) \quad (7.17)$$

kvadratura-sorozatot vagy (általános) **kvadratura eljárást**. Kérdés: *milyen feltételek mellett áll fenn az, hogy*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)w(x) dx \quad (\forall f \in C[a, b]). \quad (7.18)$$

Azokban az esetekben, amikor (7.18) teljesül, azt mondjuk, hogy az (7.16) mátrixokhoz tartozó (7.17) kvadratura eljárás **konvergens**.

Az általános kvadratura eljárás konvergenciájára a következő **alaptétel** érvényes:

**9. tétel** (Pólya–Szegő-tétel). *Legyen  $[a, b]$  egy tetszőleges kompakt intervallum,  $w$  egy súlyfüggvény  $[a, b]$ -n, és tegyük fel, hogy adott az alappontoknak egy*

$$a \leq x_{1,n} < x_{2,n} < x_{3,n} < \cdots < x_{n,n} \leq b \quad (n \in \mathbb{N})$$

*és az együtthatóknak egy*

$$A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n,n} \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

*rendszerre. Tekintsük a*

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (f \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$$

*kvadratura eljárást.*

*Ekkor a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n f = \int_a^b f(x)w(x) dx \quad (f \in C[a, b])$$

*egyenlőségeknek, vagyis a kvadratura eljárás konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy*

(a) *az eljárás minden polinomra konvergens legyen és*

(b)  $\exists M > 0: \sum_{k=0}^n |A_{k,n}| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$



**Bizonyítás.** A kvadratúra eljárást a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  Banach-téren értelmezett funkcionálsorozatnak tekintjük:

$$Q_n : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_n(f) := \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az 5.4. pontban megmutattuk, hogy  $Q_n$  folytonos lineáris funkcionál és a normája

$$\|Q_n\| = \sum_{k=1}^n |A_{k,n}| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Weierstrass első approximációs tételéből következik, hogy az algebrai polinomok zárt rendszert alkotnak a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  Banach-térben, ezért az állítás a Banach–Steinhaus-tétel közvetlen következménye. ■

Különösen fontosak azok az eljárások, amelyekben valamennyi  $A_{k,n}$  együttható nemnegatív.

**10. tétel** (Sztyeklov-tétel). *Ha a*

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (f \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$$

*kvadratúra eljárásban minden  $A_{k,n}$  együttható **nemnegatív**, azaz*

$$A_{k,n} \geq 0 \quad (\forall k, n \in \mathbb{N}),$$

*akkor az eljárás pontosan akkor konvergens minden folytonos függvényre, ha minden polinomra konvergens.*

**Bizonyítás.** Azt kell megmutatni, hogy ebben az esetben az előző tétel (b) feltétele automatikusan teljesül. Ez azonban nyilvánvaló, mert a  $p(x) \equiv 1$  polinomra a konvergencia azt jelenti, hogy

$$\int_a^b w(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n A_{k,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |A_{k,n}|,$$

következésképpen a  $\sum_{k=1}^n |A_{k,n}|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat valóban egyenletesen korlátos. ■

#### • Interpolációs kvadratúra eljárások

Az előzőekben szükséges és elégséges feltételeket adtunk meg kvadratúra eljárások konvergenciájára, de nem volt szó arról a fontos a kérdésről, hogy milyen csomópont- és együtthatórendszer elégíti ki ezeket a feltételeket.

Az együtthatók megválasztásának egy igen természetes módja a következő: Rögzítsünk egy tetszőleges  $x_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ) pontrendszert és minden  $n$ -re vegyük az  $f$  függvénynek az  $x_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) pontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomját**:

$$(L_n f)(x) := \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}(x) \quad (x \in [a, b]),$$

ahol tehát

$$l_{k,n}(x) := \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \quad \omega_n(x) := \prod_{k=1}^n (x - x_{k,n}).$$

Ha  $f$  „jó” függvény, akkor az  $L_n f$  polinom az  $[a, b]$  intervallumon „jól” közelíti  $f$ -et, ezért várható, hogy a

$$\begin{aligned} Q_n(f) &:= \int_a^b (L_n f)(x) w(x) dx = \sum_{k=1}^n \left( \int_a^b l_{k,n}(x) w(x) dx \right) f(x_{k,n}) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

kvadratúra sorozat konvergencia szempontjából „jól” viselkedik.

**Interpolációs kvadratúra eljárásnak** nevezzük azokat a kvadratúra eljárásokat, amelyekben az együtthatókat az

$$A_{k,n} := \int_a^b l_{k,n}(x) w(x) dx \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

képletekkel értelmezzük, ahol minden  $n$ -re  $l_{k,n}$ -ek ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) az  $x_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) csomópontokhoz tartozó *Lagrange-féle interpolációs alappolinomok*. Egy ilyen eljárásnál a csomópontok tetszőlegesek, az együtthatók pedig egyértelműen meg vannak határozva.

Az algebra alaptételéből azonnal adódik, hogy minden  $n$ -nél alacsonyabb fokú polinom egyenlő az  $x_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) pontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjával. Ezt felhasználva egyszerűen bizonyítható a

**11. tétel.** *A  $Q_n(f)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C[a, b]$ ) kvadratúra eljárás akkor és csak akkor interpolációs kvadratúra eljárás, ha tetszőleges  $n$  esetén a*

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx \quad (7.19)$$

*egyenlőség minden  $n$ -nél alacsonyabb fokú  $f$  polinomra fennáll.*

Az interpolációs kvadratúra eljárás nyilván konvergál minden polinomra. Valóban, ha  $f$  egy tetszőleges  $m$ -edfokú polinom, akkor (7.19) minden  $n > m$  esetén teljesül. Ezt az észrevételt, valamint az alaptételt felhasználva azonnal adódik a

**12. tétel.** (a) *Tetszőleges interpolációs kvadratúra eljárás minden polinomra konvergens.*

(b) *Egy interpolációs kvadratúra eljárás pontosan akkor konvergens, ha*

$$\exists M > 0 : \sum_{k=1}^n |A_{k,n}| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(c) *Nemnegatív együtthatójú interpolációs kvadratúra eljárások minden folytonos függvényre konvergensek.*

Konvergencia szempontjából tehát a nemnegatív együtthatójú interpolációs kvadratúra eljárások a legkedvezőbbek. Az  $x_{k,n}$  csomópontok alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az interpolációs kvadratúra formulákban minden  $A_{k,n}$  együttható nemnegatív legyen. Ez a helyzet akkor, ha az alappontok a  $w$  **súlyfüggvényre ortogonális polinomok gyökei**.

Az eddigieknél általánosabban legyen most  $(a, b)$  egy tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos)  $\mathbb{R}$ -beli intervallum. Feltesszük, hogy a  $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvényre a következők teljesülnek:

- $0 \leq w(x)$  ( $x \in (a, b)$ );
- $w$  Lebesgue-integrálható  $(a, b)$ -n és  $0 < \int_a^b w(x) dx < +\infty$ ;
- minden  $n \in \mathbb{N}$  számra a

$$\mu_n := \int_a^b x^n w(x) dx$$

integrálok (az ún. *momentumok*) abszolút konvergensek.

Tekintsük az

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx$$

skaláris szorzattal ellátott  $L_w^2(a, b)$  Hilbert-teret. Ekkor minden algebrai polinom benne van az  $L_w^2(a, b)$  térben. A lineárisan független  $h_n(x) := x^n$  ( $x \in (a, b)$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ) hatványfüggvényekre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva egy, a fenti skaláris szorzatra nézve ortonormált  $(p_n)$  polinomrendszert kapunk. Bebizonyítható, hogy az  $n$ -edfokú  $p_n$  polinomnak  $n$  egyszeres gyöke van az  $(a, b)$  intervallumban.

Jelölje  $y_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) a  $p_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) polinom  $n$  különböző gyökét. Ezen a csomópontrendszeren vett interpolációs kvadratúra eljárás minden

$$A_{k,n} = \int_a^b l_{k,n}(x)w(x) dx$$

együtthatója *nemnegatív*. Ez az állítás a minden  $k, n \in \mathbb{N}$  számra fennálló

$$\int_a^b l_{k,n}(x)w(x) dx = \int_a^b [l_{k,n}(x)]^2 w(x) dx$$

egyenlőségekből következik. Ezek igazolásához a viszonylag egyszerűen bizonyítható alábbi azonosságokat használhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n l_{k,n}(x) &= 1 && (x \in (a, b); k, n \in \mathbb{N}); \\ \int_a^b l_{k,n}(x)l_{j,n}(x)w(x) dx &\neq 0, && \text{ha } k, j = 1, 2, \dots, n \text{ és } k \neq j; n \in \mathbb{N}; \\ \int_a^b l_{k,n}(x)[l_{k,n}(x) - 1]w(x) dx &= 0, && \text{ha } k = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A fentieket összefoglalva kapjuk az alábbi alapvető állítást.

**13. tétel** (Stieltjes tétele). *Legyen  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  egy tetszőleges intervallum és  $w$  egy tetszőleges súlyfüggvény  $(a, b)$ -n. Jelölje  $(p_n)$  a  $w$  súlyfüggvényre ortonormált polinomrendszert és  $y_{k,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) a  $p_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gyökeit. Ekkor az*

$$A_{k,n} := \int_a^b l_{k,n}(x)w(x) dx \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

*együtthatókkal képzett*

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^n A_{k,n} f(y_{k,n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

*interpolációs kvadratúra eljárás konvergens, azaz a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)w(x) dx$$

*egyenlőség minden  $f \in C(a, b)$  függvényre teljesül.*

## 8. Az inverz operátor folytonossága. Nyílt leképezések és zárt gráfok

### 8.1. Előzetes megjegyzések

Ebben a fejezetben a funkcionálanalízis három további alapvető jelentőségű tételét ismertetjük. A **Banach-féle homeomorfia tétel** folytonos lineáris operátor inverzének a folytonosságára ad elégséges feltételt. A **zárt gráf tétel** operátor folytonosságát a sok esetben egyszerűbben ellenőrizhető feltételre, nevezetesen az operátor grafikonjának a zártságára vezeti vissza. Mindkét tétel bizonyításának alapja az önmagában is érdekes és fontos **nyílt leképezések tétele**.

Az egész problémakör **motivációjaként** emlékeztetünk arra, hogy eddig az  $X$  és  $Y$  normált terek közötti  $A : X \rightarrow Y$  **lineáris** és **folytonos** leképezések általános tulajdonságait elemeztük. Az  $X \rightarrow Y$  típusú lineáris leképezések azonban nem feltétlenül folytonosak. Láttuk azt, hogy az analízisben fontos szerepet játszó differenciáloperátor például olyan **lineáris** leképezés, amely **nem folytonos**.

Fontos tehát az, hogy minél több módszer álljon rendelkezésünkre operátor folytonosságának a vizsgálatához. Tudjuk azt, hogy lineáris operátor folytonossága ekvivalens a korlátossággal; és ezt a tulajdonságot minden *eddig példánkban* viszonylag egyszerűen meg tudtuk mutatni. A korlátosságot azonban sok esetben jóval nehezebb ellenőrizni. Ez a helyzet például az **inverz operátor** folytonosságának a problémájánál.

### 8.2. Az inverz operátor

Emlékeztetünk arra, hogy valamely függvénynek akkor van inverze, ha a függvény által létesített leképezés **injektív**, azaz ha az értelmezési tartomány bármely két egymástól különböző elemét egymástól különböző elemekbe viszi át. Ebben az esetben természetes módon értelmezhető a leképezés **inverze**. Korábban ezeket a fogalmakat *metrikus terek közötti* leképezések esetében is tekintettük; és megvizsgáltuk azt a fontos kérdést, hogy egy ilyen leképezés *folytonosságát* vajon megtartja-e az inverz leképezés is. Az alapvető eredmény a következő: *Ha egy **kompakt** metrikus téren értelmezett folytonos függvény injektív, akkor az inverz leképezés is folytonos.*

Nézzük meg ezt a problémát most *normált terek* közötti leképezésekre. Legyenek  $X$  és  $Y$  normált terek. Az  $A : X \rightarrow Y$  operátort *invertálhatónak* nevezzük, ha tetszőleges  $y \in \mathcal{R}_A$  elemre az  $A(x) = y$  egyenletnek pontosan egy megoldása

van. Ebben az esetben minden  $y \in \mathcal{R}_A$  elemhez hozzárendelhetjük a megfelelő  $A(x) = y$  egyenlet egyetlen  $x \in \mathcal{D}_A$  megoldását. Az ezzel a hozzárendeléssel kapott (az  $\mathcal{R}_A$  halmazon értelmezett) operátort az  $A$  operátor *inverzének* nevezzük, és az  $A^{-1}$  szimbólummal jelöljük:

$$A^{-1} : \mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{D}_A.$$

Lineáris operátorok esetén az inverz folytonosságának a vizsgálatához más eszközökre van szükség.

Idézzük fel a metrikus terek közötti folytonos leképezések jellemzésére már megismert alábbi fontos eredményt: *Ha  $M_1$  és  $M_2$  metrikus tér, akkor az  $f : M_1 \rightarrow M_2$  függvény akkor és csak akkor folytonos az  $M_1$  halmazon, ha minden  $M_2$ -beli nyílt halmaz ősképe  $M_1$ -beli nyílt halmaz.* Ezt normált terek közötti leképezésekre alkalmazva adódik az

**1. tétel.** *Legyen  $X$  és  $Y$  normált tér. Tegyük fel, hogy az  $f : X \rightarrow Y$  egy invertálható szürjektív leképezés. Ekkor az  $f^{-1}$  függvény akkor és csak akkor folytonos, ha  $f$  minden  $X$ -beli nyílt halmazt  $Y$ -beli nyílt halmazba visz át.*

Ez a motivációja a következő fogalomnak:

**Definíció.** Az  $X$  és az  $Y$  normált terek közötti  $f : X \rightarrow Y$  függvényt **nyílt leképezésnek** nevezzük, ha minden  $X$ -beli nyílt halmaz  $f$  által létesített képe  $Y$ -beli nyílt halmaz, azaz

$$\forall G \subset X \text{ nyílt halmaz esetén } f(G) \subset Y \text{ is nyílt halmaz.}$$

Az inverz operátor folytonosságával kapcsolatos alapvető kérdést tehát így fogalmazhatjuk meg: *Ha a normált terek közötti  $f : X \rightarrow Y$  szürjektív leképezés invertálható, akkor  $f$ -re milyen további feltételeket kell tenni ahhoz, hogy  $f$  nyílt leképezés is legyen.* A következő példa azt mutatja, hogy már a lineáris leképezésekre is kell további feltétel, ti. *van olyan injektív, folytonos és lineáris leképezés, amelyeknek az inverze nem folytonos.*

• **Példa** *olyan injektív, folytonos és lineáris leképezésre, amelyeknek az inverze nem folytonos.*

Legyen  $X := l^2$  és tekintsük az

$$A : X \ni x \mapsto Ax := \left( \frac{x_n}{n} \right) \quad (x = (x_n) \in l^2)$$

operátort. Világos, hogy  $A$  lineáris, továbbá

$$\|Ax\|_{l^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{l^2}^2 \quad (x \in l^2),$$

ezért  $Ax \in l^2$  és  $A$  korlátos, tehát folytonos leképezés is. Ha  $y = (y_n) \in \mathcal{R}_A$ , akkor az  $Ax = y$  egyenletnek egyetlen megoldása van:  $x = (ny_n)$ , tehát  $A$  invertálható, és az inverz operátor:

$$A^{-1} : \mathcal{R}_A \rightarrow l^2, \quad A^{-1}(y) = (ny_n).$$

Innen következik, hogy az  $A^{-1}$  operátor az  $e_n := (\delta_{nk}, k \in \mathbb{N})$  egységvektorokat az  $ne_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) vektorokba viszi át; és ez azt jelenti, hogy  $A^{-1}$  *nem korlátos*.

### 8.3. A nyílt leképezések tétele

A továbbiakban feltesszük, hogy  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  **Banach-terek**. Ebben a pontban  $k_X(x, \delta)$ -val, ill.  $k_Y(y, \delta)$ -val jelöljük az  $X$ , ill. az  $Y$  tér  $x$ , ill.  $y$  pontjának a  $\delta$ -sugarú (nyílt) környezetét.

Először a következő állítást bizonyítjuk be.

**Segéd-tétel.** *Legyenek  $X$  és  $Y$  Banach-terek. Ha a folytonos lineáris  $A : X \rightarrow Y$  operátor szürjektív (vagyis  $\mathcal{R}_A = Y$ ), akkor az origó középpontú  $X$ -beli 1-sugarú gömb képe tartalmaz  $Y$ -beli gömböt, azaz*

$$\exists r > 0 : A(k_X(0, 1)) \supset k_Y(0, r). \quad (8.1)$$

**A segéd-tétel bizonyítása.** *Először azt igazoljuk, hogy*

$$\exists r > 0 : \overline{A(k_X(0, 1))} \supset k_Y(0, 2r). \quad (8.2)$$

Legyen

$$Y_n := \overline{A(k_X(0, n))} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel  $A$  szürjektív, ezért

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(k_X(0, n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(k_X(0, n))} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

A Baire-lemma alapján az  $Y_n$  zárt halmazok valamelyike tartalmaz gömböt, mondjuk

$$k_Y(y, s) \subset Y_n.$$

Ekkor

$$k_Y(-y, s) \subset -Y_n = Y_n$$

is teljesül.

Legyen  $x \in k_Y(0, s)$ . Ekkor  $x \pm y \in k_Y(\pm y, s) \subset Y_n$ . Felhasználva  $Y_n$  konvexitását ebből

$$x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2} \in Y_n$$

adódik, ami azt jelenti, hogy

$$k_Y(0, s) \subset Y_n = \overline{A(k_X(0, n))}.$$

Ebből  $A$  homogenitása miatt (8.2) az  $r := \frac{s}{2^n}$ -nel adódik.

A (8.1) bizonyításához rögzítsünk most egy tetszőleges  $y \in k_Y(0, r)$  pontot. Olyan  $x \in k_X(0, 1)$  elemet kell találnunk, amelyre  $Ax = y$  teljesül. Jegyezzük meg ehhez azt, hogy  $A$  homogenitása miatt a (8.2)-ből a következő általánosabb relációk is adódnak:

$$k_Y(0, 2r \cdot \frac{1}{2^n}) \subset \overline{A(k_X(0, \frac{1}{2^n}))} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezeket felhasználva rekurzióval olyan  $X$ -beli  $x_1, x_2, \dots$  sorozatot konstruálhatunk, amelyre

$$\|x_n\|_X \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{és} \quad \|y - A(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\|_Y < \frac{r}{2^n}$$

teljesül minden  $n$ -re. Ekkor a  $\sum x_n$  sor konvergál valamely  $x \in k_X(0, 1)$  elemhez és  $A$  folytonossága miatt

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} Ax_n = y,$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

**2. tétel** (a nyílt leképezések tétele). *Legyenek  $X$  és  $Y$  **Banach-terek**. Ha a folytonos lineáris  $A : X \rightarrow Y$  operátor szűrjektív, akkor  $A$  egy nyílt leképezés is, vagyis  $A$  minden  $X$ -beli nyílt halmazt  $Y$ -beli nyílt halmazba visz át.*

**Bizonyítás.** Legyen  $G \subset X$  tetszőleges nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy az  $A(G) \subset Y$  halmaz is nyílt, azaz

$$\forall y_0 \in A(G)\text{-hez} \quad \exists s > 0 : \quad k_Y(y_0, s) \subset A(G). \quad (8.3)$$

Valóban, legyen  $y_0 \in A(G)$  egy tetszőleges pont. Ekkor van olyan  $x_0 \in G$ , hogy  $Ax_0 = y_0$ . Mivel  $G$  nyílt, ezért az  $x_0$  pontnak van olyan  $\varepsilon$ -sugarú  $k_X(x_0, \varepsilon)$  környezete, amelyik benne van a  $G$  halmazban. Ezt az egyszerűen igazolható

$$k_X(x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon k_X(0, 1)^1$$

<sup>1</sup> $x \in X$  és  $H \subset X$  esetén  $x + H := \{x + h \mid h \in H\}$ .



egyenlőség alapján így is írhatjuk:

$$x_0 + \varepsilon k_X(0, 1) \subset G.$$

Ebből  $A$  linearitását felhasználva adódik, hogy

$$A(x_0 + \varepsilon k_X(0, 1)) = Ax_0 + \varepsilon A(k_X(0, 1)) = y_0 + \varepsilon A(k_X(0, 1)) \subset A(G).$$

A segédétel alapján létezik olyan  $r > 0$ , hogy  $k_Y(0, r) \subset A(k_X(0, 1))$ , ezért

$$y_0 + \varepsilon k_Y(0, r) \subset y_0 + \varepsilon A(k_X(0, 1)) \subset A(G).$$

Mivel  $\varepsilon k_Y(0, r) = k_Y(0, \varepsilon r)$  és  $y_0 + k_Y(0, \varepsilon r) = k_Y(y_0, \varepsilon r)$ , ezért (8.3) az  $s := \varepsilon r$  számmal teljesebbül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

## 8.4. A Banach-féle homeomorfia tétel

**3. tétel** (a Banach-féle homeomorfia tétel). *Legyenek  $X$  és  $Y$  **Banach-terek**. Ha  $A : X \rightarrow Y$  folytonos lineáris bijekció, akkor  $A^{-1}$  folytonos lineáris operátor, azaz  $A^{-1} \in B(Y, X)$*

**Bizonyítás.** Tekintsük az  $A^{-1} : Y \rightarrow X$  inverz operátort. Egyszerűen igazolható, hogy tetszőleges  $G \subset X$  halmaz  $A^{-1}$  által létesített ősképe éppen az  $A(G) \subset Y$  halmaz, azaz

$$(A^{-1})^{-1}[G] = A(G).$$

Az előző tétel alapján  $A$  nyílt leképezés, ezért minden  $X$ -beli  $G$  nyílt halmaz  $A(G)$  képe  $Y$ -beli nyílt halmaz. Azt kaptuk tehát, hogy minden  $X$ -beli  $G$  nyílt halmaz  $A^{-1}$  által létesített ősképe  $Y$ -beli nyílt halmaz. A folytonosság nyílt halmazokkal való jellemzéséből tehát következik, hogy  $A^{-1}$  valóban folytonos leképezés. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

**4. tétel** (ekvivalens normák). *Legyenek  $(X, \|\cdot\|_1)$  és  $(X, \|\cdot\|_2)$  Banach-terek, és tegyük fel, hogy van olyan  $c > 0$  állandó, hogy*

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|_1 \quad (\forall x \in X). \quad (8.4)$$

*Ekkor a két norma ekvivalens, azaz létezik olyan  $C > 0$  állandó is, hogy*

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad (\forall x \in X).$$

**Bizonyítás.** Tekintsük az

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), \quad I(x) := x$$

identikus leképezést.  $I$  nyilván lineáris bijekció és a (8.4) feltétel miatt

$$\|I(x)\|_2 \leq c\|x\|_1 \quad (x \in X),$$

ezért  $I$  korlátos, következésképpen folytonos is. A Banach-féle homeomorfia tételből következik, hogy ekkor  $I^{-1}$  is folytonos, tehát korlátos, ami azt jelenti, hogy van olyan  $C > 0$  állandó, hogy

$$\|I^{-1}(x)\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad (x \in X).$$

Ebből a nyilvánvaló  $I^{-1}(x) = x$  egyenlőség alapján már következik a tétel állítása.

■

## 8.5. A zárt gráf tétele

Emlékeztetünk arra, hogy az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény **grafikonján** a

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

halmazzt értjük. Fontos észrevétel, hogy  $f$  folytonossága a síkbeli  $\Gamma(f)$  halmaz bizonyos topológiai tulajdonságával hozható kapcsolatba. Egyszerűen bebizonyítható az, hogy ha az  $f$  függvény folytonos az egész  $\mathbb{R}$  halmazon, akkor a  $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$  zárt halmaz, azaz ha

$$(x_n, y_n) \in \Gamma(f) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{és} \quad x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y, \quad \text{akkor} \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$

Az állítás megfordítása nem igaz (l. pl. az  $f(x) := x^{-1}$ , ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  és  $f(0) := 1$ , vagy pedig a Riemann-függvényt).

Normált terek közötti függvényekre is természetes módon értelmezhető a grafikon fogalma, és a fenti állítás általánosítása is igaz. A **zárt gráf tétel** azt állítja, hogy Banach-terek közötti lineáris leképezések esetén a szóban forgó állítás megfordítható, azaz Banach-terek közötti lineáris operátorok folytonossága ekvivalens módon jellemezhető az operátor grafikonjának a zárttságával. Így tehát a folytonosság eldöntéséhez egy újabb lehetőséget nyerünk. Az alkalmazásokban vannak olyan konkrét esetek, amikor a folytonosságot éppen a grafikon zárttságával lehet a legegyszerűbben ellenőrizni.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mintájára először normált terek Descartes-szorzatát értelmezzük. Legyenek tehát  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  tetszőleges normált terek. Egyszerűen bebizonyítható, hogy  $X \times Y$  lineáris tér ( $\mathbb{R}$  felett) és az

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

függvény norma ezen a lineáris téren. Az  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  normált teret az  $X$  és  $Y$  normált terek **Descartes-szorzatának** nevezzük. A teljesség definíciójából az is azonnal adódik, hogy  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  pontosan akkor Banach-tér, ha  $X$  és  $Y$  is Banach-tér.

A továbbiakban csak az  $X$  és  $Y$  terek közötti **lineáris** leképezéseket tekintjük.

**Definíció.** Az  $X$  és az  $Y$  normált terek közötti  $A : X \rightarrow Y$  lineáris leképezés **grafikonján** vagy **gráfján** a

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

halmazt értjük.

Az  $X \times Y$  normált térben beszélhetünk topológiai fogalmakról, pl. halmazok zártságáról. Emlékeztetünk arra, hogy valamely normált tér egy részhalmaza akkor és csak akkor **zárt halmaz**, ha minden torlódási pontját tartalmazza. A zárt halmazokat konvergens sorozatokkal is jellemeztük. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni azt, hogy az  $(x_n, y_n) \in X \times Y$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat pontosan akkor konvergál az  $(x, y) \in X \times Y$  ponthoz, ha

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \quad \text{és} \quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$$

**Definíció.** Az  $A : X \rightarrow Y$  leképezést **zárt gráfú operátornak** nevezzük, ha a  $\Gamma(A)$  gráfja az  $X \times Y$  normált térnek zárt részhalmaza, azaz ha

$$\forall x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x, \quad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \quad \text{esetén} \quad y = Ax.$$

Folytonos lineáris leképezés gráfja nyilván zárt halmaz:

**5. tétel.** Ha  $X$  és  $Y$  normált terek és  $A \in B(X, Y)$ , akkor  $\Gamma(A)$  az  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  normált tér zárt részhalmaza.

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy

$$(x_n, Ax_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} (x, y).$$

Ekkor  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$  és  $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$ . Mivel  $A$  folytonos, ezért  $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Ax$ , következésképpen  $Ax = y$ . ■

A most vizsgált probléma is rávilágít a **véges** és a **végtelen dimenziós** terek közötti lényeges különbségekre. A fent elmondottaknak abban az esetben, ha csak véges dimenziós terek közötti lineáris leképezéseket vizsgálunk, nincs különösebb jelentősége, ti. ekkor minden ilyen leképezés már automatikusan folytonos is; de azért azt is mondhatjuk, hogy ekkor a folytonosság az operátor zártságával is jellemezhető. Lényegesen megváltozik a helyzet azonban akkor, ha az  $X$  és  $Y$  normált terek végtelen dimenziósak. A következő példa azt mutatja, hogy ekkor még a lineáris leképezések folytonossága sem jellemezhető a gráfjuk zártságával.

**Példa** *nem folytonos lineáris zárt gráfú leképezésre.*

Tekintsük ui. az

$$X := (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty), \quad Y := (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$$

normált tereket és a

$$D : X \rightarrow Y, \quad Df := f'$$

differenciáloperátort. Ez nyilván lineáris, és azt is láttuk már, hogy  $D$  nem folytonos (korlátos). (Emlékeztetőül: vegyük az  $f_n(t) := t^n$  ( $t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ ) függvénysorozatot.)

Megmutatjuk, hogy  $D$  egy zárt gráfú operátor. Valóban, legyen  $(f_n, Df_n) \subset X \times Y$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) olyan sorozat, amelyik konvergens az  $X \times Y$  normált térben, azaz

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} f \quad \text{és} \quad Df_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} g.$$

Ez azt jelenti, hogy a folytonosan differenciálható  $(f_n)$  függvénysorozat egyenletesen konvergál az  $f$  függvényhez, és a deriváltak  $(Df_n) = (f'_n)$  sorozata pedig egyenletesen konvergál egy  $g \in C[0, 1]$  függvényhez. A függvénysorozatok tagonkénti deriválására vonatkozó tételből következik, hogy ekkor  $f$  szükségképpen folytonosan deriválható, és  $f' = g$ , azaz a  $g = Df$  egyenlőség fennáll, ami azt jelenti, hogy  $D$  valóban egy zárt gráfú operátor.

Az alábbi tétel azt állítja, hogy Banach-terek közötti zárt gráfú lineáris operátorok már szükségképpen folytonosak is, vagyis a folytonosság az operátor grafikonjának a zártságával jellemezhető. (Az előző példában megadott  $D$  operátor értelmezési tartománya nem teljes, tehát nem Banach-tér; l. pl. Weierstrass első approximációs tételét.)

**6. tétel** (a zárt gráf tétel). *Legyenek  $X$  és  $Y$  Banach-terek és tegyük fel, hogy  $A : X \rightarrow Y$  egy lineáris zárt gráfú operátor, azaz az  $A$  lineáris leképezés  $\Gamma(A) =$*

$\{(x, Ax) \mid x \in X\}$  grafikonja az  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  Banach-tér egy zárt részhalmaza. Ekkor  $A$  folytonos is, azaz  $A \in B(X, Y)$ .

**Bizonyítás.** Mivel  $X$  és  $Y$  Banach-terek, ezért egy korábbi megjegyzésünk alapján az  $(X \times Y, \|\cdot\|)$  Descartes-szorzatuk is Banach-tér. Nyilvánvaló, hogy  $\Gamma(A)$  az  $X \times Y$  tér egy lineáris altere. A tétel feltétele szerint ez tehát egy zárt altér, következésképpen  $\Gamma(A)$  maga is Banach-tér.

Tekintsük a

$$\Lambda : X \rightarrow \Gamma(A), \quad \Lambda x := (x, Ax)$$

operátort. Ez a leképezés egy lineáris bijekció az  $X$  és a  $\Gamma(A)$  Banach-terek között. Az inverze, vagyis a

$$\Lambda^{-1} : \Gamma(A) \rightarrow X, \quad \Lambda^{-1}(x, Ax) = x$$

operátor korlátos (folytonos). Valóban

$$\|\Lambda^{-1}(x, Ax)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\| \quad ((x, Ax) \in \Gamma(A)).$$

A Banach-féle homeomorfia tétel alapján ennek a folytonos lineáris bijekciónak az inverze, vagyis a  $(\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda$  operátor is folytonos (korlátos), azaz van olyan  $C > 1$  állandó, hogy

$$\|\Lambda x\| = \|(x, Ax)\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (x \in X)$$

teljesül, amiből

$$\|Ax\|_Y \leq (C - 1)\|x\|_X \quad (x \in X)$$

következik. Ez viszont azt jelenti, hogy  $A$  valóban egy korlátos (folytonos) leképezés. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■



# Irodalom

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley & Sons, New York (1988).
- [3] Járai Antal, *Modern alkalmazott analízis*, TypoT<sub>E</sub>X, Budapest, 2007.
- [4] L. V. Kantorovics–G. P. Akilov, *Funkcionálanalízis*, Nauka, Moszkva, 1977. (oroszul)
- [5] Karvasz Gyula, *Analízis III. és IV.*, ELTE jegyzet, 1978. és 1979.
- [6] A. N. Kolmogorov–Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [7] Komornik Vilmos, *Valós analízis előadások I., II.*, TypoT<sub>E</sub>X, Budapest, 2003.
- [8] Máté László, *Funkcionálanalízis műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
- [9] I. P. Natanson, *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, 1952.
- [10] Petz Dénes, *Lineáris analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.
- [11] Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla, *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [12] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [13] Schipp Ferenc, *Analízis IV. (Funkcionálanalízis)*, Egyetemi jegyzet, 2004. (<http://numanal.inf.elte.hu/~schipp/>)
- [14] Simon Péter, *Analízis V.*, Egyetemi jegyzet, Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
- [15] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
- [16] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer–Verlag (1965).