EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter - Weisz Ferenc

Válogatott fejezetek az analízisből – a szimuláció matematikai alapjai

Budapest, 2007

A jegyzet a

2007. évi ELTE IK Jegyzettámogatási pályázat

és a

GVOP-3.2.2.-2004-07-0005/3.0 számú ELTE IKKK pályázat

támogatásával készült

Tartalom

0. Előszó

Ez a jegyzet egy válogatást tartalmaz az analízis azon fejezeteiből, amelyek az alkalmazott matematikus szak, ill. a programtervező matematikus (informatikus) szak speciálelőadásainak egy részét képezik. Az itt tárgyalt eredmények kiindulópontja a Borel-mértékek differenciálhatósága. Ennek alapján aztán a valós függvénytan néhány alapvető fontosságú tétele kerül sorra, mint pl. monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatósága, az abszolút folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata, integráltételek, stb. A Hardy-Littlewood-féle maximálfüggvények korlátossági tulajdonságai kapcsán szóba kerül operátor-sorozatok konvergencia-tulajdonságainak és a sorozat maximáloperátorának a kapcsolata. Ez is indokolja, hogy röviden tárgyaljuk operátorok interpolációs tulajdonságait, ill. integrálható függvények tereinek duálisait. Az idevágó bizonyítási technikák közül röviden érintjük az ún. Calderon-Zygmund-féle felbontást. A számos megjegyzésben szó van olyan területekről is, mint pl. a Fourier-sorokkal kapcsolatos néhány konvergenciatétel vagy a martingálok.

A tárgyalás során a szokásos bevezető analízis előadások anyagának az ismeretén túl feltételezzük, hogy az Olvasó elsajátította már a mérték- és integrálelmélet alapjait. Ez utóbbival kapcsolatban mind tartalmilag, terminológiailag, mind pedig a jelölések vonatkozásában támaszkodunk a Simon Péter által írt *Analízis V.* című egyetemi jegyzet (ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996) első három fejezetére.

A témakör iránt érdeklődőknek néhány további, az alábbiakban felsorolt művet ajánlunk:

- H. Bauer, *Measure and integration theory*, (translated from the German by Robert B. Burckel), de Gruyter Studies in Mathematics, 26, Walter de Gruyter, Berlin, 2001.
- J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie,* Springer-Lehrbuch, 2007.
- E. Hewitt-K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- Járai Antal, *Mérték és integrál*, felsőoktatási tankönyv, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- Laczkovich Miklós, *Valós függvénytan*, egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1995.
- E.M. Stein - R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert spaces,* Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, 2005.
- Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- A. C. Zaanen, *Continuity, Integration and Fourier Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.

1. Borel-mértékek

1.1. Bevezetés. Az elemi analízisben tanultak szerint, ha $I \subset \mathbf{R}$ egy (nem elfajuló) intervallum, $f : I \to \mathbf{R}$ pedig egy folytonos függvény, akkor bármely $a \in I$ esetén a klasszikus Riemann-integrál révén az $F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in I)$ utasítással értelmezett integrálfüggvény differenciálható és $F' = f$. Az is jól ismert, hogy itt az f folytonossága lényeges, mert pl. az $I := \mathbf{R}$, $a := 0$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

választással f nem folytonos (0-ban) és

$$F(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \\ x & (x \geq 0) \end{cases},$$

azaz az F integrálfüggvény nem differenciálható 0-ban. Világos ugyanakkor, hogy minden $0 \neq x \in \mathbf{R}$ mellett $F \in D\{x\}$ és $F'(x) = f(x)$.

Legyen most $I := [a, b]$ egy kompakt intervallum, $0 \leq f : [a, b] \to \mathbf{R}$ pedig Lebesgue-integrálható. Értelmezzük a fentiekkel analóg módon F-et:

$$F(x) := \int_a^x f \, d\lambda := \int_{[a,x]} f \, d\lambda \quad (x \in [a, b]),$$

ahol λ jelöli az $\mathbf{R}$ számegyenesen a Lebesgue-mértéket. Ekkor bármely $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \frac{\mu_f([x, y])}{\lambda([x, y])},$$

hacsak μ_f az f, mint súlyfüggvény által meghatározott mértéket jelenti: $\mu_f(A) := \int_A f \, d\lambda$ $(A \subset [a, b], A$ Borel-mérhető).

Általában, ha (X, Ω, μ) egy mértéktér, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ pedig egy olyan (Ω-)mérhető függvény, amelynek létezik a μ mérték szerinti integrálja, akkor valamely $A \in \Omega$ halmaz esetén $\int_A f d\mu$ jelöli az f függvény A-n vett integrálját (azaz az $f\chi_A$ függvény integrálját). Az $A := X$ esetben egyszerűen $\int f d\mu$-t írunk. Esetenként használni fogjuk az $\int_A f(x)d\mu(x)$ vagy $\int f(x)d\mu(x)$ (vagy, ha nem okoz félreértést az $\int_A f(x)dx$, ill, $\int f(x)dx$) jelölést is. Az $L^p(X)$ (esetleg $L^p(\mu)$ vagy időnként egyszerűen csak L^p, $\ 1 \leq p \leq +\infty$) szimbólum a „szokásos” L^p-teret fogja jelenteni a μ mértékre vonatkozóan.

1.2. Borel-mértékek regularitása. A továbbiakban $0 < N \in \mathbf{N}$ mindig egy rögzített természetes számot jelent, $\mathcal{B}$-vel az $\mathbf{R}^N$-beli Borel-mérhető halmazok szigma-algebráját fogjuk jelölni. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{C})$, ahol

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) : A \,\text{nyílt}\},$$
$$\mathcal{K} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) : A \,\text{kompakt}\},$$
$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) : A \,\text{zárt}\}$$

és $\sigma(\mathcal{X})$ jelenti az $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ halmazrendszert lefedő $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ σ-algebrák metszetét.

Ha $x \in \mathbf{R}^N$, $r > 0$, akkor

$$K_r(x) := \{y \in \mathbf{R}^N : \|x - y\|_2 < r\}$$

az x vektor r sugarú (euklideszi) környezete.

Tekintsünk egy $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ mértéket, amelyről feltesszük, hogy bármely kompakt $K \in \mathcal{B}$ esetén $\mu(K) < +\infty$. Legyen $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) \to [0, +\infty]$ a következő leképezés:

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}, A \subset G\} \quad (A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)).$$

Nem nehéz belátni, hogy μ^* külső mérték. Az is eléggé nyilvánvaló, hogy bármely $A \in \mathcal{T}$ halmazra $\mu^*(A) = \mu(A)$. Legyen Ω a μ^*-mérhető $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ halmazok halmazrendszere, azaz $A \in \Omega$ akkor és csak akkor igaz, ha

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad (B \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)).$$

Legyen továbbá $\tilde{\mu} : \Omega \to [0, +\infty]$ a μ^* leszűkítése Ω-ra. Ekkor a Caratheodory-tétel miatt Ω σ-algebra, $\tilde{\mu}$ pedig (teljes) mérték.

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T} \subset \Omega$. Ehhez elég belátni azt, hogy

$$(*) \qquad \mu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \quad (A, B \in \mathcal{T}, \mu(A) < +\infty).$$

Valóban, feltételezve, hogy $(*)$ igaz, legyen $B \in \mathcal{T}$ és bizonyítsuk be, hogy

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B) \quad (T \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)).$$

Nyilván feltehető, hogy $\mu^*(T) < +\infty$. Ekkor viszont bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \in \mathcal{T}$, hogy $T \subset G$ és $\mu(G) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Ezért (a $(*)$ feltételt a G halmazra alkalmazva)

$$\mu^*(T) + \varepsilon \geq \mu(G \cap B) + \mu^*(G \setminus B) = \mu^*(G \cap B) + \mu^*(G \setminus B) \geq$$
$$\mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B).$$

(Felhasználtuk, hogy $T \cap B \subset G \cap B$ és $T \setminus B \subset G \setminus B$, ill. azt, hogy μ^* monoton.) Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B)$-nek is teljesülnie kell, azaz B valóban μ^*-mérhető.

Most lássuk be azt, hogy $(*)$ igaz. Vegyünk ehhez kompakt $K_n \subset \mathbf{R}^N$, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokat úgy, hogy a $(*)$-beli B halmazra $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Ekkor (mivel μ mérték) bármely $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) < +\infty$ mellett

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B) + \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} (A \setminus K_n)\right).$$

De $\mu(A\backslash K_n) \leq \mu(A) < +\infty$ és $A\backslash K_{n+1} \subset A\backslash K_n \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért a μ mérték folytonossága alapján $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(A \setminus K_n)\right) = \lim\left(\mu(A \setminus K_n)\right)$, azaz

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \lim\left(\mu(A \setminus K_n)\right) =$$

$$\mu(A \cap B) + \lim\left(\mu^*(A \setminus K_n)\right) \geq \mu(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

(hiszen $A \setminus K_n \in \mathcal{T}$, tehát $\mu(A \setminus K_n) = \mu^*(A \setminus K_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $A \setminus B \subset A \setminus K_n$ miatt $\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A \setminus K_n) \quad (n \in \mathbf{N})$.)

A most belátott $\mathcal{T} \subset \Omega$ reláció miatt $\mathcal{B} \subset \Omega$ is teljesül. Ha $A \in \mathcal{B}$ kompakt halmaz, akkor van olyan $B \in \mathcal{T}$, amelyre $A \subset B$ és $\overline{B}$ kompakt. Így $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B) = \mu^*(B) = \mu(B) \leq \mu(\overline{B}) < +\infty$. Innen rögtön adódik, hogy $\tilde{\mu}, \mu$ mindegyike σ-véges, ui. alkalmas $K_n \subset \mathbf{R}^N \quad (n \in \mathbf{N})$ kompakt halmazokkal $\mathbf{R}^N = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.

Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathcal{B}$-beli A halmazra $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$. Az előbbi σ-végesség, ill. a mértékek kiterjesztésének az egyértelműségére vonatkozó tétel miatt ehhez elég azt belátni, hogy tetszőleges balról zárt és jobbról nyílt $I \subset \mathbf{R}^N$ intervallumra $\tilde{\mu}(I) = \mu(I)$. Ez viszont következik abból, hogy ha $(I_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{T}$ nyílt intervallumoknak egy olyan sorozata, amelyre $I_{n+1} \subset I_n \quad (n \in \mathbf{N})$ és $I = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, akkor $\tilde{\mu}(I) = \lim(\tilde{\mu}(I_n)) = \lim(\mu(I_n)) = \mu(I)$.

A fentiek alapján már nem nehéz igazolni a μ mérték alábbi *regularitási* tulajdonságát:

1.1. Tétel.

$$(**) \qquad \mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}, A \subset G\} = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}, C \subset A\} \quad (A \in \mathcal{B}).$$

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{B}$, akkor

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}, A \subset G\}.$$

Így a $(**)$-beli infimummal megfogalmazott *külső regularitás* nyilvánvaló.

A $(**)$-beli szuprémummal kifejezett *belső regularitás* bizonyításához tegyük fel először, hogy az $A \in \mathcal{B}$ halmaz korlátos és $G = K_r(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N, r > 0)$ olyan nyílt gömb, amelyre $\overline{A} \subset G$. Ekkor $\mu(A) \leq \mu(G) < +\infty$ és a $G \setminus A$ halmazra alkalmazva a már belátott külső regularitást azt kapjuk, hogy

$$\mu(G) - \mu(A) = \mu(G \setminus A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{T}, G \setminus A \subset B\} =$$

$$\inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{T}, G \setminus A \subset B \subset G\} =$$

$$\inf\{\mu(G \setminus C) : C \in \mathcal{C}, C \subset A\} = \inf\{\mu(G) - \mu(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset A\} =$$

$$\mu(G) - \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset A\}.$$

Az itt szereplő zárt C, $C \subset A$ halmazok ugyanazok, mint a $C \subset A$ feltételnek eleget tevő kompakt halmazok, hiszen A korlátos. Ezért a belső regularitást korlátos A halmazokra beláttuk.

Innen nem korlátos $A \in \mathcal{B}$ esetén már standard módszerrel adódik a belső regularitás. Ui. nyilván

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap K_{n+1}(0)) =: \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

ahol $A_n \in \mathcal{B}$, A_n korlátos, $A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$. Utóbbi miatt

$$\mu(A) = \lim (\mu(A_n)) = \sup (\mu(A_n)).$$

Ha $\mu(A) = +\infty$, akkor bármely $0 < q \in \mathbf{R}$ esetén alkalmas $\mathbf{N} \ni n$-nel $\mu(A_n) > q$. Viszont tudjuk már, hogy van olyan $C \in \mathcal{K}$, amellyel $C \subset A_n$ és $\mu(C) > q$. Itt $C \subset A$, ezért

$$\sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}, C \subset A\} = +\infty.$$

A $\mu(A) < +\infty$ esetben tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\mu(A) - \varepsilon < \mu(A_n) \leq \mu(A)$, ill. van olyan $C \in \mathcal{K}$, $C \subset A_n$, amellyel

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(C) (\leq \mu(A_n) \leq \mu(A)).$$

Tehát $\sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}, C \subset A\} = \mu(A)$. ■

A $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ mértéket *Borel-mértéknek* nevezzük, ha tetszőleges kompakt $K \in \mathcal{B}$ halmazra $\mu(K) < +\infty$. Tehát minden Borel-mérték a fenti értelemben *reguláris* is.

Világos, hogy az előbbiek értelemszerű módosításával analóg módon kapjuk a $\tilde{\mu}$ mérték regularitását is:

$$\tilde{\mu}(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{T}, A \subset G\} = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}, C \subset A\} \quad (A \in \Omega).$$

Legyen valamely $Z \subset \mathbf{R}^N$ halmazra

$$\mu_*(Z) := \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}, C \subset Z\}$$

(a Z halmaz *belső mértéke*). Nyilván $\mu_*(Z) \leq \mu^*(Z)$, hiszen $C \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{T}$, $C \subset Z \subset G$ esetén $\mu(C) \leq \mu(G)$, azaz (pl.) $\mu_*(Z) \leq \mu(G)$, így egyúttal $\mu_*(Z) \leq \mu^*(Z)$ is teljesül.

Tehát $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \tilde{\mu}(A) \quad (A \in \Omega)$. Nem nehéz belátni, hogy ez utóbbinak (némi megszorítással) a megfordítása is igaz:

1.2. Tétel. *Ha* $A \subset \mathbf{R}^N$ *és* $\mu^*(A) = \mu_*(A) < +\infty$, *akkor* $A \in \Omega$.

Bizonyítás. Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, akkor megadhatók olyan $B_n \in \mathcal{K}$, $A_n \in \mathcal{T}$ halmazok, amelyekre $B_n \subset A \subset A_n$ és (az $\alpha := \mu^*(A) = \mu_*(A)$ jelölést használva)

$$\alpha - \frac{1}{n} < \mu(B_n) \leq \alpha \leq \mu(A_n) < \alpha + \frac{1}{n}$$

igaz. Mivel $\tilde{B}_n := \bigcup_{k=1}^n B_k \in \mathcal{K}$, $\tilde{A}_n := \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}$ és nyilván

$$\tilde{B}_n \subset A \ , \ A \subset \tilde{A}_n \ , \ \mu(B_n) \leq \mu(\tilde{B}_n) \leq \alpha \ , \ \mu(A_n) \geq \mu(\tilde{A}_n) \geq \alpha,$$

ezért (B_n-et $\tilde{B}_n$-re, A_n-et $\tilde{A}_n$-re cserélve) az is feltehető a fentiekben, hogy $B_n \subset B_{n+1}$, $A_{n+1} \subset A_n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$. Legyen $U := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, $V := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Ekkor $U, V \in \Omega$, $U \subset A \subset V$ és

$$\mu(U) = \tilde{\mu}(U) = \lim\left(\mu(B_n)\right) = \alpha = \lim\left(\mu(A_n)\right) = \mu(V) = \tilde{\mu}(V).$$

Tehát $\tilde{\mu}(V \setminus U) = \mu(V) - \mu(U) = 0$. Mivel a $\tilde{\mu}$ mérték teljes, ezért bármely $Z \subset V \setminus U$ halmazra $Z \in \Omega$ teljesül. Így

$$A = (A \setminus U) \cup U \in \Omega,$$

ui. $A \setminus U \subset V \setminus U$. ■

Legyen Ω^* az $\mathbf{R}^N$-beli Lebesgue-mérhető halmazok szigma-algebrája, λ pedig az $\mathbf{R}^N$-beli Lebesgue-mérték: $\lambda : \Omega^* \to [0, +\infty]$. Világos, hogy a λ mérték $\mathcal{B}$-re való $\lambda_{|\mathcal{B}}$ leszűkítése is egy Borel-mérték, így $\lambda_{|\mathcal{B}}$ reguláris. Nem nehéz továbbá belátni, hogy ha a fentiekben μ helyébe a most mondott $\lambda_{|\mathcal{B}}$ leszűkítést írjuk, akkor μ^* a Lebesgue-féle kvázimérték által meghatározott külső mértékkel (röviden a λ^* Lebesgue-féle külső mértékkel) esik egybe:

$$\mu^*(A) = \lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=0}^\infty \lambda(A_n) : A_n \in \mathcal{I}_N \ (n \in \mathbf{N}), A \subset \bigcup_{n=0}^\infty A_n\right\}$$

($\inf \emptyset := +\infty$), ahol $\mathcal{I}_N \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ az ún. *elemi halmazok* gyűrűje, azaz $\mathcal{I}_N$ minden eleme véges sok, páronként diszjunkt, balról zárt és jobbról nyílt $\mathbf{R}^N$-beli intervallum egyesítése. Következésképpen ekkor $\Omega = \Omega^*$ és $\tilde{\mu} = \lambda$, tehát λ is reguláris. Ezért pl. valamely $A \subset \mathbf{R}^N$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű Lebesgue-mérhető halmaz, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $T \in \mathcal{T}$, amellyel $A \subset T$ és $\lambda(T) < \varepsilon$.

1.3. Reguláris konvergencia. Az $E_n \in \mathcal{B} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazsorozatról akkor mondjuk, hogy *regulárisan tart x-hez* (valamely $x \in \mathbf{R}^N$ esetén), ha van pozitív számoknak egy olyan $r_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozata, amelyre $\lim(r_n) = 0$, $E_n \subset K_{r_n}(x) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\inf\left\{\dfrac{\lambda(E_n)}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} : n \in \mathbf{N}\right\} > 0$.

Mindezt a következőképpen fogjuk jelölni: $(E_n) \to x$.

Nem nehéz meggondolni, hogy a reguláris konvergencia definíciójában a $K_{r_n}(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ gömbsorozat helyettesíthető olyan $K_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbf{N}, x_n \in \mathbf{R}^N)$ gömbsorozattal, amelyre $x \in K_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\lim(r_n) = 0$, $E_n \subset K_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$, $\inf\left\{\dfrac{\lambda(E_n)}{\lambda\left(K_{r_n}(x_n)\right)} : n \in \mathbf{N}\right\} > 0$.

Világos, hogy a λ mérték monotonitása miatt a fenti definícióban $\lambda(E_n) \leq \lambda\left(K_{r_n}(x)\right)$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz $\sup\left\{\dfrac{\lambda(E_n)}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} : n \in \mathbf{N}\right\} \leq 1$. Tehát $(E_n) \to x$ akkor és csak akkor igaz, ha van olyan, a fenti definícióban jelzett (r_n) és (E_n) sorozat, hogy alkalmas $c > 0$ konstanssal $c\lambda\left(K_{r_n}(x)\right) \le \lambda(E_n) \le \lambda\left(K_{r_n}(x)\right) \quad (n \in \mathbf{N})$.

Például az $N := 1$ esetben legyen $x \in \mathbf{R}$, E_n nem elfajuló korlátos intervallum, $x \in E_n$ $(n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy $\lim(|E_n|) = 0$ (ahol $|E_n| := \lambda(E_n) \quad (n \in \mathbf{N})$). Ekkor $(E_n) \to x$. Ui. az

$$r_n := 2\sup\{|x-y| : y \in E_n\} \quad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel $E_n \subset K_{r_n}(x) = (x - r_n, x + r_n)$, $0 < r_n \le 2|E_n| \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz $\lim(r_n) = 0$. Továbbá $|K_{r_n}(x)| = 4r_n \le 8|E_n| \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért

$$\frac{|E_n|}{|K_{r_n}(x)|} \ge \frac{|E_n|}{8|E_n|} \ge \frac{1}{8}.$$

Második példaként tekintsük az $N := 2$ esetet, ill. az $E_n := I_n \times J_n \quad (n \in \mathbf{N})$ téglalapokat, ahol $I_n, J_n \subset \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ nem elfajuló (korlátos) intervallumok. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbf{R}^2$ és $x \in E_n \quad (n \in \mathbf{N})$. Ekkor $(E_n) \to x$ pontosan akkor igaz, ha

$$\lim(|I_n||J_n|) = 0 \text{ és } 0 < \inf\left\{\tfrac{|I_n|}{|J_n|} : n \in \mathbf{N}\right\} \le \sup\left\{\tfrac{|I_n|}{|J_n|} : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ha ui. $(E_n) \to x$, akkor egyrészt alkalmas $0 < r_n \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(r_n) = 0$ sorozattal $|I_n||J_n| = |E_n| \le |K_{r_n}(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Másrészt legyen $a_n := \min\{|I_n|, |J_n|\}$, $b_n := \max\{|I_n|, |J_n|\}$ $(\le 2r_n)$, $s_n := \frac{a_n}{b_n}$ (≤ 1) és $s := \inf\{\frac{\lambda(E_n)}{\lambda(K_{r_n}(x))} : n \in \mathbf{N}\}$ (> 0). Ekkor

$$s = \frac{a_n b_n}{\pi r_n^2} = \frac{s_n}{\pi}\left(\frac{b_n}{r_n}\right)^2 \le \frac{4}{\pi} s_n,$$

tehát $s_n \ge \frac{\pi}{4} s \quad (n \in \mathbf{N})$.

Fordítva, ha a fenti ekvivalencia jobb oldala igaz, akkor az

$$r_n := \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel $\lim(r_n) = 0$ (hiszen $\lim(|I_n|) = \lim(|J_n|) = 0$), $E_n \subset K_{r_n}(x)$ és

$$\frac{\lambda(E_n)}{\lambda(K_{r_n}(x))} = \frac{a_n b_n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \cdot \pi(a_n^2 + b_n^2)} =$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \pi} \cdot \frac{1}{\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}} \ge \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $x \in \mathbf{R}^N$ és bármely $0 < r_n \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(r_n) = 0$ esetén $(K_{r_n}(x)) \to x$.

Végül, negatív példaként legyen

$$N := 2, E_n := \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \times \left(-\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető módon az (E_n) sorozat nem tart regulárisan 0-hoz.

2. Differenciálhatóság

Legyen μ Borel-mérték. Azt fogjuk mondani, hogy μ *differenciálható az* $x \in \mathbf{R}^N$ *pontban,* ha bármely (E_n), $(E_n) \to x$ sorozat esetén a $\left(\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)}\right)$ számsorozatnak van véges határértéke.

Világos, hogy a fenti $\lim \left(\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)}\right)$ határérték nem függ az (E_n) sorozattól, ezért van értelme az alábbi definíciónak: $\mu'(x) := \lim \left(\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)}\right)$.

A későbbiek érdekében előrebocsátunk egy (önmagában is érdekes) segédtételt.

2.1. Lemma (Vitali). *Legyen $\mathcal{J} \neq \emptyset$ egy tetszőleges (index)halmaz, $U_j := K_{r_j}(x_j)$ (alkalmas $x_j \in \mathbf{R}^N, 0 < r_j \in \mathbf{R} \quad (j \in \mathcal{J})$ választással) és tekintsük az $U := \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$ halmazt. Ekkor tetszőleges $c \in \mathbf{R}, c < \lambda(U)$ számhoz van olyan véges $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ halmaz, amellyel az alábbiak igazak: $U_j \cap U_k = \emptyset \quad (j, k \in \mathcal{J}_0, j \neq k)$ és*

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_0} \lambda(U_j) > c3^{-N}.$$

Bizonyítás. A λ mérték regularitási tulajdonsága miatt bármely $c < \lambda(U)$ számhoz van olyan $K \subset U$ kompakt halmaz, hogy $\lambda(U) \geq \lambda(K) > c$. Mivel az $\{U_j : j \in \mathcal{J}\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése K-nak, ezért létezik olyan véges $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ halmaz, amellyel $K \subset \bigcup_{j \in \mathcal{J}_1} U_j$. Legyen $j_1 \in \mathcal{J}_1$ olyan index, amelyre

$$r_{j_1} = \max\{r_j : j \in \mathcal{J}_1\}.$$

Ha

$$\mathcal{J}_2 := \{j \in \mathcal{J}_1 : U_j \cap U_{j_1} = \emptyset\}$$

és $j \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_2$ (azaz $U_j \cap U_{j_1} \neq \emptyset$), akkor egyszerű geometriai megfontolás alapján nyilván igaz, hogy $U_j \subset K_{3r_{j_1}}(x_{j_1}) =: \tilde{U}_{j_1}$. Ezért $K \subset \tilde{U}_{j_1} \bigcup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_2} U_j\right)$. Ha itt $\mathcal{J}_2 \neq \emptyset$, akkor legyen $j_2 \in \mathcal{J}_2$ olyan, hogy

$$r_{j_2} = \max\{r_j : j \in \mathcal{J}_2\}$$

és

$$\mathcal{J}_3 := \{j \in \mathcal{J}_2 : U_j \cap U_{j_2} = \emptyset\}.$$

Mivel $K \subset \tilde{U}_{j_1} \bigcup \tilde{U}_{j_2} \bigcup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_3} U_j \right)$ (ahol értelemszerűen $\tilde{U}_{j_2} := K_{3r_{j_2}}(x_{j_2})$), ezért a fenti eljárást folytatva véges sok lépés után kapunk egy $n \in \mathbf{N}$ természetes számot úgy, hogy alkalmas $j_1, ..., j_n \in \mathcal{J}$ indexekkel $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{U}_{j_i}$. Innen

$$c < \lambda(K) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda(\tilde{U}_{j_i}) = 3^N \sum_{i=1}^{n} \lambda(U_{j_i}),$$

azaz a $\mathcal{J}_0 := \{j_1, ..., j_n\}$ választás eleget tesz a 2.1. Lemma kívánalmainak. ■

2.1. Megjegyzések.

i) Felhasználtuk, hogy bármely $A \in \mathcal{B}, 0 < r \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^N$ esetén

$$A_r := \{ra : a \in A\} \in \mathcal{B}\ ,\ A + x := \{x + a : a \in A\} \in \mathcal{B}$$

és $\lambda(A_r) = r^N \lambda(A)$, $\lambda(A + x) = \lambda(A)$. Tehát $\lambda(\tilde{U}_j) = 3^N \lambda(U_j) \quad (j \in \mathcal{J})$.

ii) Ha $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad (0 < x \in \mathbf{R})$ az ún. *gamma-függvény*, akkor

$$\lambda(K_r(x)) = r^N \cdot \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1 + N/2)} \qquad (x \in \mathbf{R}^N, r > 0).$$

iii) Az $N = 1$ esetben a Vitali-lemma alábbi „finomítása” is igaz: *tetszőleges $c < \lambda(U)$ mellett a lemmabeli $\mathcal{J}_0$ úgy is megválasztható, hogy $\sum_{j \in \mathcal{J}_0} \lambda(U_j) > c/2$.*

Ui. a 2.1. Lemma előbbi bizonyításában nyilván feltehető, hogy $\mathcal{J}_1 = \{1, 2, ..., N\}$ (alkalmas $N \in \mathbf{N}$ számmal) és minden $i \in \mathcal{J}_1$ esetén U_i nem részhalmaza az $\bigcup_{i \ne j \in \mathcal{J}_1} U_j$ halmaznak. Az is feltehető továbbá, hogy ha $U_j = (a_j, b_j) \quad (j \in \mathcal{J}_1)$, akkor $a_1 < a_2 < ...$ Innen könnyen adódik viszont, hogy a szóbanforgó j indexekre $b_{j+1} > b_j$ és $a_{j+1} > b_{j-1}$ is igaz. Ebből meg egyszerűen levezethető, hogy a páros $j \in \mathcal{J}_1$ indexű U_j halmazok páronként diszjunktak és ugyanez igaz a páratlan indexű U_j-kre is. Ezért

$$c < \lambda \left(\bigcup_j U_j \right) \le \lambda \left(\bigcup_{j, 2|j} U_j \right) + \lambda \left(\bigcup_{j, 2|(j+1)} U_j \right) =$$

$$\sum_{j, 2|j} \lambda(U_j) + \sum_{j, 2|(j+1)} \lambda(U_j) =: \Delta_1 + \Delta_2,$$

ahol $\max\{\Delta_1, \Delta_2\} > c/2$. Így $\mathcal{J}_0$-nak választható a $\mathcal{J}_1$-beli páros indexek vagy a páratlan indexek halmaza.

iv) Ha a Vitali-lemmában a $\mathcal{J}$ halmaz véges, akkor a bizonyítást K helyett U-val elmondva azt kapjuk, hogy $\sum_{j\in\mathcal{J}_0}\lambda(U_j)\geq\lambda(U)/3^N$.

v) Az előbbihez hasonlóan, ha iii)-ban $\mathcal{J}$ véges, akkor ott $\sum_{j\in\mathcal{J}_0}\lambda(U_j)\geq\lambda(U)/2$ adódik.

vi) Az v) megjegyzésben szereplő $1/2$ szorzó optimális is, ui., ha valamilyen $\alpha>0$ mellett v)-ben $\sum_{j\in\mathcal{J}_0}\lambda(U_j)\geq\alpha\lambda(U)$ írható, akkor az $U:=(-1,1), U_1:=(-1,0)$, $U_2:=(-\delta,1)\quad(0<\delta<1)$ esetben $U=U_1\cup U_2$. Mivel $U_1\cap U_2\neq\emptyset$, ezért $\mathcal{J}_0$ 1-elemű. Továbbá $\lambda(U_2)>\lambda(U_1)$, ezért $\lambda(U_2)=1+\delta\geq\alpha\lambda(U)=2\alpha$, azaz $\alpha\leq(1+\delta)/2$ minden $0<\delta<1$ esetén fenn kell, hogy álljon. Következésképpen $\alpha\leq 1/2$.

2.1. Tétel. *Legyen $\mu:\mathcal{B}\to[0,+\infty]$ tetszőleges Borel-mérték és $\emptyset\neq A\in\mathcal{B}$, $\mu(A)=0$. Ekkor van olyan $B\subset A$, $\lambda(B)=0$, hogy μ minden $x\in A\setminus B$ pontban differenciálható és $\mu'(x)=0$.*

Bizonyítás. Ha $x\in\mathbf{R}^N$ és $(E_n)\to x$, akkor alkalmas $0<r_n\in\mathbf{R}\quad(n\in\mathbf{N})$, $\lim(r_n)=0$ sorozattal és $0<p\in\mathbf{R}$ számmal

$$E_n\subset K_{r_n}(x)\ ,\ \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(K_{r_n}(x))}\geq p\quad(n\in\mathbf{N}).$$

Ezért

$$0\leq\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)}\leq\frac{\mu(K_{r_n}(x))}{\lambda(K_{r_n}(x))}\cdot\frac{\lambda(K_{r_n}(x))}{\lambda(E_n)}\leq\frac{1}{p}\cdot\frac{\mu(K_{r_n}(x))}{\lambda(K_{r_n}(x))}.$$

Megmutatjuk, hogy alkalmas, a tételben jelzett B halmazzal $\dfrac{\mu(K_{r_n}(x))}{\lambda(K_{r_n}(x))}\to 0\quad(n\to\infty)$ minden $x\in A\setminus B$ esetén. Legyen ehhez

$$\Phi_x(r):=\frac{\mu(K_r(x))}{\lambda(K_r(x))}\quad(0<r<+\infty, x\in\mathbf{R}^N)$$

és

$$\varphi(x):=\limsup_{r\to 0}\Phi_x(r)\ \left(=\lim_{\rho\to 0}\left(\sup_{0<r<\rho}\Phi_x(r)\right)\right).$$

Ekkor $\varphi:\mathbf{R}^N\to[0,+\infty]$. Ha valamilyen $\mathbf{R}^N\ni x$-re $\varphi(x)=0$, akkor $\lim_{r\to 0}\Phi_x(r)=0$, azaz (bármely $\mathbf{R}\ni r_n>0\quad(n\in\mathbf{N})$, $\lim(r_n)=0$ sorozatra) $\lim_{n\to\infty}\Phi_x(r_n)=0$. Elegendő tehát azt belátni, hogy

$$\lambda\left(\{\varphi>0\}\cap A\right)=0,$$

ekkor ui. $B:=\{\varphi>0\}\cap A$ megfelelő. Mivel $B=\cup_{0<q\in\mathbf{Q}}\{\varphi>q\}\cap A$, ezért azt fogjuk megmutatni, hogy minden $0<q\in\mathbf{R}$ számra $\lambda(A_q)=0$, ahol $A_q:=\{\varphi>q\}\cap A$. Ui. $\mu(A)=0$, azaz μ regularitása miatt bármely $\varepsilon>0$ mellett van olyan $G\subset\mathbf{R}^N$, amelyre a következők igazak: G nyílt, $A\subset G$, $\mu(G)<\varepsilon$. Ha $x\in A_q$, akkor $x\in A$ és $\varphi(x)>q$, azaz valamilyen $r_x>0$ számmal

$$\Phi_x(r_x)=\frac{\mu(K_{r_x}(x))}{\lambda(K_{r_x}(x))}>q$$

és $K_{r_x}(x) \subset G$. Legyen $U := \bigcup_{x \in A_q} K_{r_x}(x)$, ekkor $A_q \subset U \subset G$. A Vitali-lemma miatt minden $c < \lambda(U)$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$ és $x_1, ..., x_n \in A_q$, hogy $K_{r_{x_j}}(x_j) \cap K_{r_{x_l}}(x_l) = \emptyset$ $(j \neq l = 1, ..., n)$ és

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(K_{r_{x_j}}(x_j)) > c3^{-N}.$$

Tehát azt mondhatjuk, hogy

$$c < 3^N \sum_{j=1}^{n} \lambda\left(K_{r_{x_j}}(x_j)\right) < \frac{3^N}{q} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(K_{r_{x_j}}(x_j)\right) =$$

$$\frac{3^N}{q} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_{r_{x_j}}(x_j)\right) \leq \frac{3^N}{q} \mu(G) < \frac{3^N}{q} \varepsilon,$$

amiből $\lambda(U) \leq 3^N q^{-1} \varepsilon$ következik. Így $\lambda^*(A_q) = 0$ (ahol λ^* jelöli a Lebesgue-féle külső mértéket), ezért A_q Lebesgue-mérhető és $\lambda(A_q) = 0$. ■

2.1. Következmény. *Bármely, a λ-ra nézve szinguláris $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ Borel-mértékre igaz, hogy $\mu'(x) = 0 \quad (\lambda$-m.m. $x \in \mathbf{R}^N)$.*

Valóban, a szingularitási feltétel miatt van olyan $A \in \mathcal{B}$, hogy $\mu(A) = \lambda(\mathbf{R}^N \setminus A) = 0$. Az előző tétel alapján egy alkalmas $B \subset A$ halmazzal $\lambda(B) = 0$, $\mu'(x) = 0 \quad (x \in A \setminus B)$. De $\lambda\left(B \cup (\mathbf{R}^N \setminus A)\right) = 0$, ill. $\mu'(x) = 0 \quad \left(x \in \mathbf{R}^N \setminus \left(B \cup (\mathbf{R}^N \setminus A)\right)\right)$.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbf{R}^N \to [0, +\infty)$ függvény λ-szerint lokálisan integrálható (azaz bármely kompakt $K \subset \mathbf{R}^N$ halmazra $\int_K f d\lambda < +\infty$) és létezik az $\int f d\lambda$ integrál. Legyen $\lambda_f(A) := \int_A f\, d\lambda \quad (A \in \mathcal{B})$. Ekkor $\lambda_f'(x) = f(x) \quad (\lambda$-m.m. $x \in \mathbf{R}^N)$.*

Bizonyítás. Valamely $0 < r \in \mathbf{R}$ esetén legyen $A_r := \{f \geq r\}$, $B_r := \{f < r\}$. Ekkor $A_r \cap B_r = \emptyset$ és $\mathbf{R}^N = A_r \cup B_r$. Vezessük be a

$$\mu_r(H) := \int_{H \cap A_r} (f - r)\, d\lambda \quad (H \in \mathcal{B})$$

előírással definiált μ_r (nyilván) Borel-mértéket. Ha $H \in \mathcal{B}$ és $\lambda(H) < +\infty$, akkor

$$\lambda_f(H) = \int_H (f - r)\, d\lambda + r\lambda(H) = \int_{H \cap A_r} (f - r)\, d\lambda + \int_{H \cap B_r} (f - r)\, d\lambda + r\lambda(H).$$

Mivel $\int_{H \cap B_r} (f - r)\, d\lambda \leq 0$, ezért

$$\lambda_f(H) \leq \mu_r(H) + r\lambda(H).$$

Továbbá
$$\mu_r(B_r) = \int_{B_r \cap A_r} (f - r)\, d\lambda = 0,$$
ezért az előző tétel szerint $\mu_r'(x) = 0 \quad (x \in B_r \setminus M_r)$, ahol $M_r \subset B_r$, $\lambda(M_r) = 0$ egy alkalmas halmaz. Legyen $M := \bigcup_{0<r\in\mathbf{Q}} M_r$, ekkor $\lambda(M) = 0$.

Ha $x \in \mathbf{R}^N \setminus M$, $f(x) < r \in \mathbf{Q}$, akkor $x \in B_r \setminus M_r$, azaz $\mu_r'(x) = 0$. Továbbá $(E_n) \to x$ esetén $\lambda_f(E_n) \le \mu_r(E_n) + r\lambda(E_n)$, így
$$\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)} \le \frac{\mu_r(E_n)}{\lambda(E_n)} + r.$$
Itt $\lim \left(\frac{\mu_r(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) = \mu_r'(x) = 0$, amiből $\limsup \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) \le r$ következik. Mindezt egybevetve az előbbiekkel
$$\limsup \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) \le f(x)$$
adódik. Ha $f(x) = 0$, akkor $\limsup \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) = 0$, azaz $\lim \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) = 0$. Más szóval tehát $\lambda_f'(x) = 0 = f(x)$.

Legyen most $0 < r \in \mathbf{R}$, $\tilde{\mu}_r(H) := \int_{H\cap B_r} (r - f)\, d\lambda \quad (H \in \mathcal{B})$. Ekkor $\tilde{\mu}_r$ is Borel-mérték és $H \in \mathcal{B}$, $\lambda(H) < +\infty$ esetén
$$\lambda_f(H) = \int_H (f - r)\, d\lambda + r\lambda(H) =$$
$$\int_{H\cap A_r} (f - r)\, d\lambda + \int_{H\cap B_r} (f - r)\, d\lambda + r\lambda(H) \ge r\lambda(H) - \tilde{\mu}_r(H).$$
(Figyelembe vettük, hogy $\int_{H\cap A_r} (f - r)\, d\lambda \ge 0$.) Mivel $\tilde{\mu}_r(A_r) = \int_{A_r\cap B_r} (r - f)\, d\lambda = 0$, ezért megadható olyan $\tilde{M}_r \subset A_r$, $\lambda(\tilde{M}_r) = 0$ halmaz, amellyel $\tilde{\mu}_r'(x) = 0 \quad (x \in A_r \setminus \tilde{M}_r)$. Legyen $\tilde{M} := \bigcup_{0<r\in\mathbf{Q}} \tilde{M}_r$, ekkor $\lambda(\tilde{M}) = 0$. Ha $x \in \mathbf{R}^N \setminus \tilde{M}$, $f(x) > 0$, $0 < r \in \mathbf{Q}$, $r \le f(x)$, akkor $x \in A_r \setminus \tilde{M}_r$, azaz $\tilde{\mu}_r'(x) = 0$, ill. $(E_n) \to x$ esetén $\lambda_f(E_n) \ge r\lambda(E_n) - \tilde{\mu}_r(E_n)$. Innen
$$\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)} \ge r - \frac{\tilde{\mu}_r(E_n)}{\lambda(E_n)}$$
következik, ahol
$$\lim \left(\frac{\tilde{\mu}_r(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) = \tilde{\mu}_r'(x) = 0.$$
Ezért $\liminf \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) \ge r$, azaz
$$\liminf \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)}\right) \ge f(x).$$

Ha tehát $x \in \mathbf{R}^N \setminus (M \cup \tilde{M})$, $f(x) > 0$, akkor a fentiek szerint

$$\liminf \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)} \right) = \limsup \left(\frac{\lambda_f(E_n)}{\lambda(E_n)} \right) = f(x),$$

más szóval $\lambda'_f(x) = f(x)$. ■

2.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy a $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ Borel-mérték abszolút folytonos λ-ra nézve, azaz alkalmas f függvénnyel $\mu = \lambda_f$. Ekkor $\mu'(x) = f(x)$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$).*

Indoklásként elegendő felidéznünk a Radon-Nikodym-tételt. Az itt megjelenő f függvényt a μ mérték *Radon-Nikodym-deriváltjának* is nevezik.

2.3. Következmény. *Bármely $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ Borel-mérték λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ helyen deriválható.*

Valóban, a Lebesgue-felbontás alapján $\mu = \mu_1 + \mu_2$ írható, ahol μ_1 szinguláris, μ_2 pedig abszolút folytonos λ-ra nézve. Ha $(E_n) \to x$, akkor a 2.1., 2.2. Következmények alapján λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ esetén

$$\frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)} = \frac{\mu_1(E_n)}{\lambda(E_n)} + \frac{\mu_2(E_n)}{\lambda(E_n)} \to \mu'_1(x) + \mu'_2(x) = \mu'_2(x) \quad (n \to \infty).$$

2.4. Következmény. *Ha a $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ Borel-mértékre $\mu'(x) = 0 \quad \lambda$-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ esetén igaz, akkor μ szinguláris a λ mértékre vonatkozóan.*

Ui. ismét az előbbi $\mu = \mu_1 + \mu_2$ Lebesgue-felbontást alkalmazva (μ_1 szinguláris, μ_2 abszolút folytonos λ-ra) azt mondhatjuk (ld. 2.1. Következmény), hogy $\mu'_1(x) = 0$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$), ill. (ld. 2.2. Következmény) $\mu'_2(x) = f(x)$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$), ahol $\mu_2 = \lambda_f$. Mivel $0 = \mu'(x) = \mu'_1(x) + \mu'_2(x)$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$), ezért $\mu'_2(x) = f(x) = 0$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$). Innen $\mu_2 = 0$, azaz $\mu = \mu_1$ következik.

Ha figyelembe vesszük a szinguláris mértékek deriválhatóságáról szóló korábbi állításunkat (ld. 2.1. Következmény), akkor azt kapjuk, hogy tetszőleges $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}}$ Borel-mérték esetén μ akkor és csak akkor szinguláris λ-ra nézve, ha $\mu'(x) = 0$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$).

2.5. Következmény (Lebesgue). *Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monoton növő függvény. Ekkor f λ-m.m. $x \in \mathbf{R}$ pontban differenciálható.*

Ui. f meghatároz egy μ Lebesgue-Stieltjes-mértéket a $\mathcal{B}$ Borel-halmazok rendszerén. Tudjuk a fentiekből (ld. 2.3. Következmény), hogy μ λ-m.m. differenciálható. Ezért, továbbá az f monotonitása miatt van olyan $A \subset \mathbf{R}$, $\lambda(A) = 0$ halmaz, hogy $f \in C\{x\}$

és μ differenciálható x-ben $\quad (x \in \mathbf{R} \setminus A)$. Ugyanakkor bármely ilyen $x \in \mathbf{R}$, $x < x_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $\lim(x_n) = x$ esetén $([x, x_n)) \to x$ és $([x, x_n]) \to x$, ill.

$$\frac{\mu([x, x_n))}{\lambda([x, x_n))} = \frac{f(x_n - 0) - f(x - 0)}{x_n - x} = \frac{f(x_n - 0) - f(x)}{x_n - x} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \leq$$

$$\frac{f(x_n + 0) - f(x)}{x_n - x} = \frac{\mu([x, x_n])}{\lambda([x, x_n])} \to \mu'(x) \quad (n \to \infty).$$

Mivel $\dfrac{\mu([x, x_n))}{\lambda([x, x_n))} \to \mu'(x) \quad (n \to \infty)$ is igaz, ezért mindez azt jelenti, hogy létezik a $\lim_{y \to x+0} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \mu'(x)$ jobb oldali határérték. Ugyanígy kapjuk, hogy létezik a $\lim_{y \to x-0} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \mu'(x)$ bal oldali határérték is, ami az állításunk igazolását jelenti.

2.6. Következmény (Lebesgue). *Legyen $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum, $0 \leq f$, $f \in L^1[a, b]$ Lebesgue-integrálható függvény, $F(x) := \int_a^x f d\lambda \quad (x \in [a, b])$. Ekkor λ-m.m. $x \in [a, b]$ helyen az F függvény differenciálható és $F'(x) = f(x)$.*

Valóban, ha ($N = 1$ és) $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ jelenti az F által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mértéket, akkor minden $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$\lambda_f([x, y)) = \int_{[x,y)} f d\lambda = \int_x^y f d\lambda = F(y) - F(x).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy F folytonos.) Ezért (ld. a mértékek kiterjesztésének az egyértelműségét) $\lambda_f = \mu$. Viszont tudjuk már (ld. 2.2. Tétel), hogy $\lambda'_f(x) = f(x) \quad$ (λ-m.m. $x \in [a, b]$), azaz $\mu'(x) = f(x) \quad$ (λ-m.m. $x \in [a, b]$). Ugyanakkor az előbbi 2.5. Következmény bizonyítása szerint $\mu'(x) = F'(x) \quad$ (λ-m.m. $x \in [a, b]$), tehát $F'(x) = f(x)$ (λ-m.m. $x \in [a, b]$) is igaz.

2.2. Megjegyzések.

i) Az előjeles mértékek, ill. az integrálható függvények pozitív és negatív részük különbségeként való előállítására gondolva mondhatjuk, hogy a fenti állítások igazak maradnak tetszőleges előjeles Borel-mértékekre és lokálisan Lebesgue-integrálható $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}$, ill. $f \in L^1[a, b]$ függvényekre is.

ii) Például legyen $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}$ lokálisan Lebesgue-integrálható, ekkor λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ mellett

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda(K_{r_n}(x_n))} \cdot \int_{K_{r_n}(x_n)} f d\lambda = f(x),$$

ahol $0 < r_n \in \mathbf{R}, x_n \in \mathbf{R}^N, x \in K_{r_n}(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(r_n) = 0$. Innen rögtön következik az is, hogy λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ esetén

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(K_r(x))} \cdot \int_{K_r(x)} f d\lambda = f(x).$$

Ugyanez marad érvényben akkor is, ha itt $K_{r_n}(x_n)$ helyett $I_n = I_{1n} \times ... \times I_{Nn}$, $x \in I_n \quad (n \in \mathbf{N})$ „kockákat” írunk, ahol tehát $I_{in} \subset \mathbf{R}$ intervallum $(i = 1, ..., N)$ és $|I_{1n}| = ... = |I_{Nn}| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Mindezekhez annyit elég megjegyezni, hogy $(K_{r_n}(x_n)) \to x$, ill. $(I_n) \to x$ és tekintsük az $\mathcal{B} \ni A \mapsto \int_A f d\lambda$ előjeles Borel-mértéket.

iii) Ha $1 \le p \le +\infty, f \in L^p\left(\mathbf{R}^N\right)$, akkor f lokálisan integrálható. Ui. tetszőleges $K \subset \mathbf{R}^N$ kompakt halmazra

$$\left|\int_K f\, d\lambda\right| \le \|f\|_\infty \cdot \lambda(K) < +\infty \quad (p = +\infty),$$

ill. (ld. Hölder-egyenlőtlenség)

$$\left|\int_K f\, d\lambda\right| \le \int_K |f| d\lambda \le \|f\|_p \cdot \|\chi_K\|_q = \|f\|_p \, (\lambda(K))^{1/q} < +\infty$$

$(1 < p, q < +\infty$ és $1/p + 1/q = 1)$. Végül $\left|\int_K f\, d\lambda\right| \le \int |f| d\lambda \le \|f\|_1 < +\infty$ $(p = 1)$.

iv) Legyen $E \subset \mathbf{R}, \lambda(E) = 0$, ekkor van olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos, monoton növő függvény, amely az E halmaz egyetlen pontjában sem differenciálható. Valóban, a feltétel miatt alkalmas $I_n \subset \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ nyílt intervallumokkal $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < +\infty$ és bármely $x \in E$ pontra az $\{n \in \mathbf{N} : x \in I_n\}$ halmaz végtelen. Ha $n \in \mathbf{N}$, $a_n := \inf I_n$, $b_n := \sup I_n$, akkor tekintsük a következő f_n függvényt:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \le a_n) \\ |I_n| & (x \ge b_n). \\ x - a_n & (a_n < x < b_n) \end{cases}$$

Világos, hogy f_n folytonos, monoton növő, $\|f_n\|_\infty \le |I_n| \quad (n \in \mathbf{N})$. Ezért $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ szintén folytonos és monoton növő. Ha $a \in E$ és

$$\{n \in \mathbf{N} : a \in I_n\} = \{n_k \in \mathbf{N} : k \in \mathbf{N}\},$$

ahol $n_0 < n_1 < ...$, akkor minden $a \ne x \in \bigcap_{j=0}^{k} I_{n_j} \quad (k \in \mathbf{N})$ helyen

$$\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} = \begin{cases} 1 & (n = n_0, ..., n_k) \\ \ge 0 & (\text{különben}). \end{cases}$$

Tehát bármely $r > 0, k \in \mathbf{N}$ és $a \ne x \in \left(\bigcap_{j=0}^{k} I_{n_j}\right) \bigcap K_r(a)$ esetén

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} \ge k + 1,$$

azaz $\limsup_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$.

v) Legyen $f \in L^1[a,b], F(x) := \int_a^x f d\lambda \quad (x \in [a,b])$ és $x \in (a,b)$ olyan, hogy $F \in D\{x\}$, $F'(x) = f(x)$. Ekkor $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x) \quad (h \to 0)$, azaz $h^{-1} \int_x^{x+h} f d\lambda \to f(x) \quad (h \to 0)$. Innen persze az is következik, hogy

$$\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t)-f(x))\,dt \to 0 \quad (h \to 0).$$

Sőt, igaz az alábbi állítás (Lebesgue): *λ-m.m. $x \in [a,b]$ helyen*

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt \to 0 \quad (h \to 0). \tag{2.1}$$

A most mondottak igazolásához tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén tekintsük a $\varphi(t) := |f(t)-\alpha| \quad (t \in [a,b])$ leképezést. Világos, hogy $\varphi \in L^1[a,b]$. Ezért az előbbi ii) megjegyzés szerint

$$\lim_{h\to 0} \int_0^h \frac{|f(x+t)-\alpha|}{h} dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi\, d\lambda = |f(x)-\alpha| \tag{2.2}$$

λ-m.m. $x \in [a,b]$ mellett igaz. Van tehát olyan $E_\alpha \subset (a,b)$, $\lambda(E_\alpha) = 0$ halmaz, hogy (2.2) minden $x \in (a,b) \setminus E_\alpha$ helyen fennáll. Ha $E := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Q}} E_\alpha$, akkor $\lambda(E) = 0$. Legyen most már $x \in (a,b) \setminus E$, $\varepsilon > 0$ és $\alpha \in \mathbf{Q}$ olyan, hogy $|f(x)-\alpha| < \varepsilon/2$. Ekkor $0 < h < b-x$ esetén ($h < 0$ mellett analóg az okoskodás)

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt \le \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-\alpha|dt + \frac{1}{h}\int_0^h |f(x)-\alpha|dt <$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-\alpha|dt + \frac{\varepsilon}{2} \to |f(x)-\alpha| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (h \to 0),$$

azaz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $0 \ne h$, $|h| < \delta$ esetén

$$0 \le \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt < \varepsilon.$$

vi) Az v) megjegyzésben szereplő $x \in [a,b]$ az f *Lebesgue-pontja,* ha (2.1) teljesül. Tehát az $[a,b]$ intervallum λ-m.m. pontja az f Lebesgue-pontja.

vii) A fentiekben $[a,b]$ kicserélhető egy I nem elfajuló intervallummal, ill. F helyett írhatunk egy $F(x) := \int_c^x f d\lambda \quad (x \in I)$ függvényt (valamilyen rögzített $I \ni c$-vel), sőt, lehet $\inf I = -\infty$ esetén $c = -\infty$ is.

viii) Az v) megjegyzésben említett Lebesgue-tétel, ill. a vi)-beli Lebesgue-pont fogalma analóg módon átvihető $\mathbf{R}^N$-re is. Így (Lebesgue): *bármely* $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}$ *lokálisan integrálható függvényre* λ*-m.m.* $x \in \mathbf{R}^N$ *helyen igaz, hogy*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(K_r(x))} \int_{K_r(x)} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

A Lebesgue-pontokra vonatkozó 2.2. vi) megjegyzés alkalmazásaként vizsgáljuk integrálható függvények (trigonometrikus) Fourier-sorának az ún. (C,1)-közepeit. Nevezetesen, legyen $f \in L^1[-\pi, \pi]$ (az is feltehető, hogy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és f 2π-szerint periodikus) és jelöljük $\sigma_n f$-fel az f *n-edik Fejér-* (vagy más szóval *(C,1)- közepét:*

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \quad (x \in \mathbf{R}, 0 < n \in \mathbf{N}),$$

ahol a 2π-szerint periodikus K_n *Fejér-féle magfüggvény* a következő:

$$K_n(t) := \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & (t = 0) \\ \dfrac{\sin^2 \dfrac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \dfrac{t}{2}} & (0 < t < 2\pi) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A $K_n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ függvényekről a következőket lehet tudni:

$$0 \le K_n \le \frac{n+1}{2} \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n = \pi \quad , \quad K_n(t) \le \frac{\pi^2}{2(n+1)t^2} \quad (0 < t \le \pi),$$

K_n páros és bármely $0 < \delta < \pi$ esetén $\lim_{n \to \infty} \int_\delta^\pi K_n = 0$.

Mindezek után az alábbi tétel igaz:

2.3. Tétel (Lebesgue). *Tetszőleges* $f \in L^1[-\pi, \pi]$ *függvény esetén az* f *bármely* x *Lebesgue-pontjában* $\lim_{n \to \infty} \sigma_n f(x) = f(x)$.

Bizonyítás. Bontsuk fel a $\sigma_n f(x)$-et $\quad (x \in [-\pi, \pi))$ meghatározó integrált az alábbiak szerint: $\pi \sigma_n f(x) = \int_{-\pi}^0 ... + \int_0^\pi ...$, azaz

$$\pi \sigma_n f(x) = \int_0^\pi f(x+t) K_n(t) dt + \int_0^\pi f(x-t) K_n(t) dt =$$

$$\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) K_n(t) dt + \pi f(x).$$

Tehát
$$\pi|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq \int_0^\pi |\varphi(x,t)|K_n(t)dt,$$
ahol
$$\varphi(x,t) := f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad (0 \leq t \leq \pi).$$
Innen bármely $0 < \alpha < \pi$ és minden olyan $n \in \mathbf{N}$ esetén, amelyre $1/n < \alpha$ azt kapjuk, hogy
$$\pi|\sigma_n f(x) - f(x)| \leq$$
$$\int_0^{1/n} |\varphi(x,t)|K_n(t)dt + \int_{1/n}^{\alpha} |\varphi(x,t)|K_n(t)dt + \int_{\alpha}^{\pi} |\varphi(x,t)|K_n(t)dt =:$$
$$A_n + B_n + C_n.$$

Vizsgáljuk először A_n-et: $A_n \leq \frac{n+1}{2}\int_0^{1/n} |\varphi(x,t)|dt$, ahol (lévén x Lebesgue-pont)
$$\frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(x,u)|du \leq$$
$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(x+u) - f(x)|du + \frac{1}{t}\int_0^t |f(x-u) - f(x)|du \to 0 \quad (t \to 0).$$
Ezért bármely $0 < \varepsilon$-hoz megadható olyan $0 < \alpha < \pi$, hogy tetszőleges $t \in \mathbf{R}$, $|t| \leq \alpha$ esetén $|t^{-1}\int_0^t |\varphi(x,u)|du| < \varepsilon$, azaz, ha $n \in \mathbf{N}$ és $n > 1/\alpha$, akkor $n\int_0^{1/n} |\varphi(x,t)|dt < \varepsilon$. Így az előbi n-ekre
$$A_n \leq \frac{n+1}{2n} n \int_0^{1/n} |\varphi(x,t)|dt < \varepsilon.$$

A B_n kifejezés vizsgálatához vegyük észre, hogy a K_n-ről mondottak miatt
$$B_n \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)} \int_{1/n}^{\alpha} |\varphi(x,t)|t^{-2}dt.$$
Legyen
$$\Phi(t) := \int_0^t |\varphi(x,u)|du \ , \ \Psi(t) := \frac{1}{t^2} \quad (1/n \leq t \leq \alpha).$$
Ekkor
$$B_n \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)} \int_{1/n}^{\alpha} \Phi'(t)\Psi(t)dt =$$
$$\frac{\pi^2}{2(n+1)} \cdot \left(\Phi(\alpha)\Psi(\alpha) - \Phi(1/n)\Psi(1/n) + 2\int_{1/n}^{\alpha} \Phi(t)\frac{1}{t^3}\,dt \right) =$$

$$\frac{\pi^2}{2(n+1)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha |\varphi(x,u)|du - n^2\int_0^{1/n}|\varphi(x,u)|du + 2\int_{1/n}^\alpha \Phi(t)\frac{1}{t^3}dt\right) \le$$

$$\frac{\pi^2}{2(n+1)\alpha^2}\int_0^\alpha |\varphi(x,u)|du + \frac{\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^\alpha \Phi(t)\frac{1}{t^3}dt.$$

(A fentiekben felhasználtuk a később tárgyalásra kerülő *parciális integrálás* szabályát (ld. 3.7. Tétel).) Az A_n vizsgálatakor mondott α-val és n-nel

$$\frac{\pi^2}{2(n+1)\alpha^2}\int_0^\alpha |\varphi(x,u)|du < \frac{\pi^2\varepsilon}{2(n+1)\alpha} < \frac{\pi^2 n\varepsilon}{2(n+1)} < \frac{\pi^2\varepsilon}{2},$$

illetve

$$\frac{\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^\alpha \Phi(t)\frac{1}{t^3}dt \le \frac{\pi^2}{n+1}\int_{1/n}^\alpha t\varepsilon\frac{1}{t^3}dt = \frac{\pi^2\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^\alpha \frac{dt}{t^2} < \pi^2\varepsilon.$$

Ha tehát $n > 1/\alpha$, akkor $B_n < \frac{3\pi^2\varepsilon}{2} =: \beta\varepsilon$.

Végül, bármely $\alpha \le t \le \pi$ és elég nagy $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$K_n(t) \le \frac{\pi^2}{2(n+1)t^2} \le \frac{\pi^2}{2\alpha^2(n+1)} < \varepsilon.$$

Ekkor

$$C_n \le \varepsilon\int_\alpha^\pi |\varphi(x,t)|dt \le \varepsilon\int_0^\pi |\varphi(x,t)|dt =: \gamma\varepsilon.$$

Azt mutattuk meg, hogy elég nagy $n \in \mathbf{N}$ indexekre $A_n + B_n + C_n < (1+\beta+\gamma)\,\varepsilon$, ami az állításunk bizonyítását jelenti. ■

3. Abszolút folytonosság

Láttuk, hogy ha $f \in L^1[a,b]$ és $F(x) := \int_a^x f d\lambda$ $(x \in [a,b])$, akkor λ-m.m. $x \in [a,b]$ helyen $F'(x) = f(x)$. Tehát $F' \in L^1[a,b]$ és

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' d\lambda \qquad (x \in [a,b]).$$

Jogos a kérdés, hogy igaz marad-e mindez akkor is, ha csupán a következőket tudjuk az F függvényről: λ-m.m. $[a,b]$-beli pontban differenciálható és $F' \in L^1[a,b]$. Egy triviális példa azt mutatja, hogy a válasz *nem.* Legyen ui. $[a,b] := [-1,1]$, F pedig az előjel-függvény leszűkítése $[-1,1]$-re. Ekkor $F'(x) = 0 \quad (0 \ne x \in [-1,1])$, azaz $\int_{-1}^x F' d\lambda = 0 \ne F(x) - F(-1) = 2 \quad (0 < x \le 1)$.

Az sem „segít”, ha F-ről még a folytonosságot is feltesszük. Megmutatjuk ti., hogy igaz a

3.1. Tétel. *Van olyan szigorúan monoton növő $F \in C[0,1]$ függvény, amelyre λ-m.m. $x \in [0,1]$ helyen $F'(x) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $F_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ egy olyan folytonos töröttvonal, amelynek a töréspontjai a $k2^{-n}$-ek $\quad (k = 0, ..., 2^n)$ és $F_0(x) := x \quad (0 \leq x \leq 1)$, egy rögzített $0 < t < 1$ segítségével pedig $F_1(0) := F_0(0)$, $F_1(1) := F_0(1)$, $F_1(1/2) := \dfrac{1+t}{2}$. Továbbá legyen $F_{n+1}(j2^{-n}) := F_n(j2^{-n}) \quad (j = 0, ..., 2^n)$ és ha $k = 0, ..., 2^n - 1$, akkor

$$F_{n+1}\left(\frac{k2^{-n} + (k+1)2^{-n}}{2}\right) := \frac{1-t}{2} F_n(k2^{-n}) + \frac{1+t}{2} F_n\left((k+1)2^{-n}\right).$$

Ekkor nyilván igaz, hogy F_n minden n esetén monoton növő, ill.

$$0 \leq F_n(x) \leq F_{n+1}(x) \leq 1 \quad (x \in [0,1]).$$

Továbbá, ha $F(x) := \lim (F_n(x)) \quad (x \in [0,1])$, akkor F is monoton növő. Megmutatjuk, hogy F folytonos, szigorúan monoton növő és $F'(x) = 0 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in [0,1])$. Ui., ha $x \in [0,1]$, akkor alkalmas $I_n(x)$ diadikus intervallumokkal $x \in I_n(x)$, $I_{n+1}(x) \subset I_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ és $|I_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Jelöljük az $I_n(x)$ intervallum bal, ill. jobb oldali végpontját α_n-nel, ill. β_n-nel, azaz $\alpha_n = \dfrac{k(x)}{2^n}$, $\beta_n = \dfrac{k(x)+1}{2^n} \quad (n \in \mathbf{N})$ alkalmas $k(x) = 0, ..., 2^n - 1$ mellett. Ekkor (pl.)

$$F_{n+1}(\beta_{n+1}) - F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = F_{n+1}\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) - F_{n+1}(\alpha_n) =$$

$$\frac{1-t}{2} F_n(\alpha_n) + \frac{1+t}{2} F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n) = \frac{1+t}{2}\left(F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)\right),$$

ill., ha $\beta_{n+1} = \beta_n$, akkor

$$F_{n+1}(\beta_n) - F_{n+1}\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) =$$

$$F_n(\beta_n) - \frac{1-t}{2} F_n(\alpha_n) - \frac{1+t}{2} F_n(\beta_n) = \frac{1-t}{2}\left(F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)\right).$$

Tehát

$$F_{n+1}(\beta_{n+1}) - F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}\left(F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)\right).$$

De $F_{n+1}(\beta_{n+1}) = F(\beta_{n+1})$, $F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = F(\alpha_{n+1})$, $F_n(\beta_n) = F(\beta_n)$, $F_n(\alpha_n) = F(\alpha_n)$, ezért egyúttal

$$F(\beta_{n+1}) - F(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}\left(F(\beta_n) - F(\alpha_n)\right).$$

Következésképpen alkalmas $\sigma_k = \pm 1 \quad (k \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \sigma_k t}{2}. \tag{3.1}$$

Itt $\alpha_n \le x \le \beta_n$, azaz $F(\alpha_n) \le F(x) \le F(\beta_n) \quad (n \in \mathbf{N})$, ill.

$$0 \le F(\beta_n) - F(\alpha_n) \le \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

amiből $F(x-0) = F(x+0)$, így F x-beli folytonossága is következik. Mivel (3.1) miatt $F(\beta_n) - F(\alpha_n) > 0$, ezért az F függvénynek az $[\alpha_n, \beta_n]$ intervallumra való megszorítása nem lehet állandó függvény $\quad (n \in \mathbf{N})$, ami F szigorú monotonitását jelenti. Még mindig (3.1)-re hivatkozva azt is mondhatjuk, hogy

$$\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{2^{-n}} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \sigma_k t).$$

Mutassuk meg, hogy ha $F'(x)$ létezik, akkor

$$\lim \left(\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right) = F'(x).$$

Valóban,

$$\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \frac{F(\beta_n) - F(x)}{\beta_n - x} \cdot \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} - \frac{F(\alpha_n) - F(x)}{x - \alpha_n} \cdot \frac{x - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n},$$

azaz

$$\left|\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - F'(x)\right| =$$

$$\left|\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left(\frac{F(\beta_n) - F(x)}{\beta_n - x} - F'(x)\right) + \left(\frac{F(x) - F(\alpha_n)}{x - \alpha_n} - F'(x)\right) \cdot \frac{x - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}\right| \le$$

$$\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left|\frac{F(\beta_n) - F(x)}{\beta_n - x} - F'(x)\right| + \left|\frac{F(x) - F(\alpha_n)}{x - \alpha_n} - F'(x)\right| \cdot \frac{x - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Az $F'(x)$ derivált létezése miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy $\left|\frac{F(\beta_n) - F(x)}{\beta_n - x} - F'(x)\right| < \varepsilon$, ill. $\left|\frac{F(x) - F(\alpha_n)}{x - \alpha_n} - F'(x)\right| < \varepsilon$, azaz

$$\left|\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - F'(x)\right| \le \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \varepsilon + \frac{x - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

hacsak az $n \in \mathbf{N}$ indexre $n > M$ teljesül.

Azt kaptuk tehát, hogy a most vizsgált x helyen

$$F'(x) = \lim\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\sigma_k t)\right) =: \lim(p_n).$$

Innen már nem nehéz meggondolni, hogy $F'(x) = 0$, különben ui.

$$1 = \frac{F'(x)}{F'(x)} = \frac{\lim(p_{n+1})}{\lim(p_n)} = \lim\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = \lim(1+\sigma_{n+1}t)$$

is fennállna. Ez utóbbi egyenlőségek viszont nem állhatnak fenn, mivel $1+\sigma_{n+1}t = 1 \pm t$ $(n \in \mathbf{N})$ és $0 < t < 1$. ■

Tegyük most fel, hogy $f \in L^\infty[a,b]$, $F(x) := \int_a^x f d\lambda \quad (x \in [a,b])$ és legyenek az $(a_k, b_k) \subset [a,b] \quad (k \in \mathcal{N})$ intervallumok páronként diszjunktak (ahol $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ adott indexhalmaz). Ekkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k\in\mathcal{N}} \left|\int_{a_k}^{b_k} f d\lambda\right| \leq \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{a_k}^{b_k} |f| d\lambda \leq \|f\|_\infty \cdot \sum_{k\in\mathcal{N}} (b_k - a_k).$$

Innen nyilván következik az, hogy bárhogyan is adunk meg egy $\varepsilon > 0$ számot, akkor egy alkalmas $\delta > 0$ is megadható, amellyel az alábbiak teljesülnek: $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta$ esetén $\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

Lássuk be, hogy *ez utóbbi következtetés igaz marad akkor is, ha* $f \in L^1[a,b]$. Valóban, legyen $n \in \mathbf{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & (|f(x)| \leq n) \\ n & (f(x) > n). \\ -n & (f(x) < -n) \end{cases}$$

Ekkor $f_n \in L^\infty[a,b], \|f_n\|_\infty \leq n$ és $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty; x \in [a,b])$. Mivel $|f_n| \leq |f|$ $(n \in \mathbf{N})$ nyilván igaz, ezért a Lebesgue-féle konvergencia-tétel alapján $\int_a^b f_n d\lambda \to \int_a^b f d\lambda$ $(n \to \infty)$. Sőt, $|f - f_n| \leq 2|f| \quad (n \in \mathbf{N})$ és $f - f_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt $\int_a^b |f - f_n| d\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ is igaz. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel $\int_a^b |f - f_n| d\lambda < \varepsilon$. Ha $\delta > 0$ (egyelőre) tetszőleges és a páronként diszjunkt $(a_k, b_k) \subset [a,b] \quad (k \in \mathcal{N})$ intervallumokra $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta$ teljesül, akkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{a_k}^{b_k} |f - f_n| d\lambda + \sum_{k\in\mathcal{N}} \int_{a_k}^{b_k} |f_n| d\lambda \leq$$

$$\int_a^b |f - f_n| d\lambda + n \sum_{k\in\mathcal{N}} (b_k - a_k) < \varepsilon + n\delta < 2\varepsilon,$$

ha $n\delta < \varepsilon$.

A fentiek motiválják az alábbi értelmezést: egy $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényt *abszolút* (vagy *teljesen*) *folytonosnak* nevezünk, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy minden $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$, $(a_k, b_k) \subset [a,b] \quad (k \in \mathcal{N})$, $(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \quad (k \neq j \in \mathcal{N})$, $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta$ esetén $\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

Tehát egy $f \in L^1[a,b]$ függvény integrálfüggvénye abszolút folytonos.

Világos, hogy ha valamilyen $0 \leq q \in \mathbf{R}$ számmal $|F(x)-F(y)| \leq q|x-y| \quad (x, y \in [a,b])$ (azaz F *Lipschitz-feltételnek* tesz eleget), akkor F abszolút folytonos. Az is nyilvánvaló továbbá, hogy minden abszolút folytonos függvény egyúttal egyenletesen is folytonos. Belátjuk, hogy ha az előbbi F abszolút folytonos, akkor F *korlátos változású,* tehát alkalmas $C \geq 0$ konstanssal $\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq C$ az $[a,b]$ intervallum minden $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \quad (n \in \mathbf{N})$ felosztására.

Valóban, az abszolút folytonosság definíciójában szereplő ε-t 1-nek választva van olyan $\delta > 0$, amely ebben az értelemben eleget tesz az abszolút folytonosság definíciójának: $\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| < 1$ minden, az említett definícióban szereplő $(a_k, b_k) \quad (k \in \mathcal{N})$ intervallumrendszerre. Legyen most már $a = y_0 < y_1 < ... < y_s = b \quad (s \in \mathbf{N})$ egy olyan felosztás, amelyre $y_{k+1} - y_k < \delta \quad (k = 0, ..., s-1)$ és legyen $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ $(n \in \mathbf{N})$ egy tetszőleges felosztás. A most mondott két felosztás egyesítése legyen a következő: $a = z_0 < z_1 < ... < z_r = b \quad (r \in \mathbf{N})$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq \sum_{j=0}^{r-1} |F(z_{j+1}) - F(z_j)| = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{0\leq j<r}^{*} |F(z_{j+1}) - F(z_j)| < \sum_{l=0}^{s-1} 1 = s,$$

ahol $\sum\limits_{0\leq j<r}^{*} ...$ olyan j-kre való összegzést jelöl, amikor $[z_j, z_{j+1}] \subset [y_l, y_{l+1}]$. Az utolsó becslésben felhasználtuk, hogy bármely $l = 0, ..., s-1$ mellett

$$\sum_{0\leq j<r}^{*} (z_{j+1} - z_j) = y_{l+1} - y_l < \delta.$$

Fogalmazzuk át (formailag) az abszolút folytonosság definícióját (elsőre talán kissé meglepőnek tűnően) az alábbi módon: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy minden $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$, $(a_k, b_k) \subset [a,b] \quad (k \in \mathcal{N})$, $(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \quad (k \neq j \in \mathcal{N})$, $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta$ esetén $\left|\sum_{k\in\mathcal{N}} (F(b_k) - F(a_k))\right| < \varepsilon$.

Azt, hogy ez az átfogalmazás valóban ekvivalens az eredeti értelmezésünkkel, a következőképpen láthatjuk be. Először is jegyezzük meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenség alapján a definícióból ez utóbbi megfogalmazás nyilván következik. Fordítva, ha az átfogalmazás teljesül egy F függvényre, akkor (az abszolút folytonosság definíciójában megadott szereplőkkel) legyen $\mathcal{N}_0 := \{k \in \mathcal{N} : F(b_k) - F(a_k) \geq 0\}$, $\mathcal{N}_1 := \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_0$. Ekkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| = \left|\sum_{k\in\mathcal{N}_0} (F(b_k) - F(a_k))\right| + \sum_{k\in\mathcal{N}_1} |F(b_k) - F(a_k)| =$$

$$\left|\sum_{k\in\mathcal{N}_0}(F(b_k)-F(a_k))\right|+\left|\sum_{k\in\mathcal{N}_1}(F(b_k)-F(a_k))\right|<2\varepsilon,$$

ui. $\sum_{k\in\mathcal{N}_i}(b_k-a_k)<\delta \quad (i=0,1)$.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ monoton növő függvény, legyen μ az általa meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mérték. Ekkor az alábbi ekvivalencia igaz: F akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha μ abszolút folytonos λ-ra nézve.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy F abszolút folytonos és legyenek $\varepsilon>0$, $\delta>0$ az ennek a definíciójában szereplő paraméterek. Ha $E\subset(a,b)$, $\lambda(E)<\delta$, akkor egy nyílt $G\subset(a,b)$ halmazzal $E\subset G$, $\lambda(G)<\delta$. Alkalmas $\mathcal{N}\subset\mathbf{N}$ indexhalmazzal és páronként diszjunkt $(a_k,b_k) \quad (k\in\mathcal{N})$ intervallumokkal $G=\bigcup_{k\in\mathcal{N}}(a_k,b_k)$. Mivel $\lambda(G)=\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k-a_k)<\delta$, ezért

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}(F(b_k)-F(a_k))=\sum_{k\in\mathcal{N}}(\mu(a_k,b_k))<\varepsilon,$$

azaz $\mu(G)<\varepsilon$. Innen rögtön következik az is, hogy $\mu(E)<\varepsilon$. Mivel μ véges mérték, ezért ez azt is jelenti, hogy μ abszolút folytonos λ-ra nézve.

Fordítva, ha most μ abszolút folytonos λ-ra vonatkozóan, akkor bármely $\varepsilon>0$ mellett van olyan $\delta>0$, hogy minden olyan $E\subset[a,b]$ esetén, amelyre $\lambda(E)<\delta$, egyúttal $\mu(E)<\varepsilon$. Legyen $\emptyset\neq\mathcal{N}\subset\mathbf{N}$, $[a_k,b_k]\subset[a,b] \quad (k\in\mathcal{N})$ páronként diszjunkt intervallumok olyan rendszere, amelyre $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k-a_k)<\delta$. Ha $E:=\bigcup_{k\in\mathcal{N}}[a_k,b_k]$, akkor $\lambda(E)=\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k-a_k)<\delta$. Ezért $\mu(E)<\varepsilon$. De

$$\mu(E)=\sum_{k\in\mathcal{N}}\mu\left([a_k,b_k]\right)=\sum_{k\in\mathcal{N}}(F(b_k+0)-F(a_k-0))<\varepsilon.$$

Mivel bármely $k\in\mathcal{N}$ esetén $F(b_k)\le F(b_k+0)$, $F(a_k-0)\le F(a_k)$, így

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}(F(b_k)-F(a_k))\le\sum_{k\in\mathcal{N}}(F(b_k+0)-F(a_k-0))<\varepsilon$$

is igaz. Tehát F egyenletesen folytonos, speciálisan folytonos is. Következésképpen az előbbiekben a nyílt $(a_k,b_k) \quad (k\in\mathcal{N})$ intervallumok diszjunktivitását is elég feltenni, és venni az $E:=\bigcup_{k\in\mathcal{N}}(a_k,b_k)$ halmazt. Amint az előbb, azt kapjuk, hogy

$$\mu(E)=\sum_{k\in\mathcal{N}}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon,$$

azaz, hogy F abszolút folytonos. ■

3.3. Tétel (Jordan). *Bármely $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos változású függvény előállítható $F = F_1 - F_2$ alakban, ahol az $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvények monoton növők.*

Bizonyítás. Legyen $a \leq x \leq b$ és

$$T(x) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = x \ \ (n \in \mathbf{N}) \right\}.$$

A feltétel miatt $T : [a, b] \to \mathbf{R}$. Ha $a \leq x < y \leq b, n \in \mathbf{N}$ és $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x$, akkor $x_0 < x_1 < ... < x_n < y$ egy felosztása $[a, y]$-nak, ezért

$$\sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + |F(y) - F(x)| \leq T(y),$$

azaz ($x_0, ..., x_n$ szerint szuprémumot véve) $T(x)+|F(y)-F(x)| \leq T(y)$. Innen $T(x) \leq T(y)$, más szóval T monoton növekedése következik. Továbbá $T(y) \geq T(x) + F(y) - F(x)$, azaz $T(y) - F(y) \geq T(x) - F(x)$ is igaz, ami meg azt jelenti, hogy a $T - F$ függvény is monoton növekedő. Ezért $F = T - (T - F)$ a kívánt felbontás. ■

3.1. Megjegyzések.

i) Az előbbi Jordan-tétel és a 2.5. Következmény szerint tehát egy $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos változású függvény λ-m.m. differenciálható.

ii) Legyen a tételbeli F esetén $\bigwedge_a^b F := T(b)$ az F *teljes változása.* Az F tehát korlátos változású, ha $\bigwedge_a^b F < +\infty$.

3.4. Tétel. *Legyen $f \in L^1[a, b], F(x) := \int_a^x f d\lambda \ \ (a \leq x \leq b)$. Ekkor $\bigwedge_a^b F = \int_a^b |f| d\lambda$ (azaz F korlátos változású).*

Bizonyítás. Vegyük az $[a, b]$ intervallum valamely $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ $(n \in \mathbf{N})$ felosztását. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f d\lambda \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f| d\lambda = \int_a^b |f| d\lambda,$$

ezért $\bigwedge_a^b F \leq \int_a^b |f| d\lambda$.

Az előbbi $x_0, ..., x_n$ felosztáshoz tekintsük a

$$\psi_n := \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \chi_{[x_k, x_{k+1}]}$$

lépcsősfüggvényt, ahol $\sigma_k \in \mathbf{R}$, $|\sigma_k| \leq 1 \quad (k = 0, ..., n-1)$. Ekkor

$$\left| \int_a^b \psi_n f d\lambda \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f d\lambda \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left(F(x_{k+1}) - F(x_k) \right) \right| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq \bigwedge\nolimits_a^b F.$$

Tekintsünk ezek után egy olyan $\Phi_n \in L^1[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$ lépcsősfüggvény-sorozatot, amelyre $\lim(\Phi_n(x)) = f(x) \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in [a, b])$ és legyen

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} n\Phi_n(x) & (|n\Phi_n(x)| \leq 1) \\ \\ 1 & (n\Phi_n(x) > 1) \\ \\ -1 & (n\Phi_n(x) < -1) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}, a \leq x \leq b).$$

Nyilvánvaló, hogy φ_n lépcsősfüggvény és $|\varphi_n| \leq 1 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ha $x \in [a, b]$ és $f(x) = \lim(\Phi_n(x)) > 0$, akkor $\lim(n\Phi_n(x)) = +\infty$, azaz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy minden $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ esetén $n\Phi_n(x) > 1$, tehát $\varphi_n(x) = 1$. Ezért $\lim(\varphi_n(x)) = 1$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\lim(\varphi_n(x)) = -1$, ha $f(x) = \lim(\Phi_n(x)) < 0$. A most mondott x helyeken tehát $\lim(\varphi_n(x) f(x)) = |f(x)|$, ami nyilván igaz akkor is, ha $f(x) = 0$. Ezért azt kaptuk, hogy λ-m.m. $x \in [a, b]$ pontban $\lim(\varphi_n(x) f(x)) = |f(x)|$. De $|\varphi_n f| \leq |f| \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért a Lebesgue-féle konvergencia tétel miatt $\lim \left(\int_a^b \varphi_n f \, d\lambda \right) = \int_a^b |f| \, d\lambda$. Így a bizonyítás elejét figyelembe véve az adódik, hogy $\int_a^b |f| \, d\lambda \leq \bigwedge_a^b F$, ami a tételünk igazolását jelenti. ■

3.2. Megjegyzés.

i) Ha $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ és $F(x) := \int_{-\infty}^x f \, d\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$, akkor a fentiekhez hasonlóan látható be, hogy

$$\bigwedge\nolimits_{-\infty}^{+\infty} F := \lim_{A \to +\infty} \bigwedge\nolimits_{-A}^{A} F = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \, d\lambda.$$

3.5. Tétel (Jordan). *Bármely $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ abszolút folytonos függvény előállítható $F = F_1 - F_2$ alakban, ahol $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ monoton növő abszolút folytonos függvények.*

Bizonyítás. Tekintsük újfent a

$$T(x) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = x \; (n \in \mathbf{N}) \right\}$$

$(a \le x \le b)$ leképezést. Mutassuk meg, hogy T abszolút folytonos. Legyen ehhez valamely $\varepsilon > 0$ szám esetén $\delta > 0$ olyan, hogy $\sum_{k\in\mathcal{N}} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ bármely $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazt és páronként diszjunkt $(a_k, b_k) \subset [a, b] \quad (k \in \mathcal{N})$, $\sum_{k\in\mathcal{N}}(b_k - a_k) < \delta$ intervallumokat is véve. Ha itt $k \in \mathcal{N}$ és $a_k = x_{0k} < ... < x_{n_k k} = b_k \quad (n_k \in \mathbf{N})$ egy felosztása az $[a_k, b_k]$ intervallumnak, akkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} \sum_{i=0}^{n_k-1} (x_{i+1k} - x_{ik}) = \sum_{k\in\mathcal{N}} (b_j - a_k) < \delta,$$

ezért

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} \sum_{i=0}^{n_k-1} |F(x_{i+1k}) - F(x_{ik})| < \varepsilon.$$

Vegyünk ebben a becslésben rögzített k mellett szuprémumot az $x_{0k}, ..., x_{n_k k}$ osztópontok szerint, akkor $\sum_{k\in\mathcal{N}} T[a_k, b_k] \le \varepsilon$ adódik, ahol

$$T[a_k, b_k] := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n_k-1} |F(x_{i+1k}) - F(x_{ik})| : a_k = x_{0k} < ... < x_{n_k k} = b_k \ \ (n_k \in \mathbf{N}) \right\}.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy $T[a_k, b_k] = T(b_k) - T(a_k)$, azaz $\sum_{k\in\mathcal{N}} (T(b_k) - T(a_k)) \le \varepsilon$, ami a T függvény abszolút folytonosságát jelenti. Az is könnyen belátható, hogy két abszolút folytonos függvény különbsége is abszolút folytonos, így $T - F$ is az. Az $F = T - (T - F)$ felbontás tehát megfelel a tételben mondottaknak. ■

3.6. Tétel. *Legyen adott egy $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény. Ekkor F akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha létezik olyan $f \in L^1[a, b]$ függvény és $c \in \mathbf{R}$ konstans, hogy $F(x) = \int_a^x f d\lambda + c \quad (a \le x \le b)$.*

Bizonyítás. Az eddigiek után már csak a szükségességet kell igazolnunk. Ehhez (ld. 3.5. Tétel) feltehető, hogy F monoton növő. Legyen μ az F által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mérték, akkor (ld. 3.2. Tétel) μ abszolút folytonos λ-ra nézve. A Radon-Nikodym-tételt alkalmazva tehát van olyan $f : [a, b] \to [0, +\infty]$ Lebesgue-mérhető függvény, amellyel $\mu = \lambda_f$. Mivel $\int_a^b f d\lambda = F(b) - F(a) = \mu([a, b]) < +\infty$, ezért $f \in L^1[a, b]$. Ha $x \in [a, b]$, akkor $\mu([a, x]) = \int_{[a,x]} f d\lambda = \int_a^x f d\lambda$, ill. $\mu([a, x]) = F(x) - F(a)$, amiből $F(x) = \int_a^x f d\lambda + F(a)$. ■

3.3. Megjegyzések.

i) Azt is mondhatjuk tehát, hogy a fenti F akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha az $[a, b]$-n λ-m.m. differenciálható, $F' \in L^1[a, b]$ és $\int_a^x F' d\lambda = F(x) - F(a)$ $(a \le x \le b)$.

ii) Legyen továbbra is $-\infty < a < b < +\infty$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f \in D$ és

$$q := \sup\{|f'(t)| : t \in [a, b]\} < +\infty.$$

Ekkor bármely $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmaz és páronként diszjunkt $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ $(k \in \mathcal{N})$ intervallumrendszer esetén

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} |f(b_k) - f(a_k)| \leq q \sum_{k \in \mathcal{N}} |b_k - a_k|,$$

amiből az f abszolút folytonossága triviálisan következik. Tehát egy-egy alkalmas $g \in L^1[a, b]$ függvénnyel és $c \in \mathbf{R}$ számmal $f(x) = \int_a^x g d\lambda + c \quad (a \leq x \leq b)$, amiből $f'(x) = g(x)$ λ-m.m. $x \in [a, b]$ mellett adódik. Más szóval tehát $f' \in L^1[a, b]$ és $f(x) = \int_a^x f' d\lambda + c = f(x) - f(a) + c \quad (a \leq x \leq b)$, így $c = f(a)$.

iii) Nem nehéz példát konstruálni annak az igazolására, hogy az előbbi megjegyzésben kapott $f' \in L^1[a, b]$ következmény nem minden differenciálható függvényre igaz. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & (0 < x \leq 1). \end{cases}$$

Világos, hogy $f \in D$, $f'(0) = 0$ és $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} \quad (0 < x \leq 1)$. Ha

$$g(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 2x \sin \dfrac{1}{x^2} & (0 < x \leq 1) \end{cases} , \quad h(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ -\dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} & (0 < x \leq 1), \end{cases}$$

akkor $f' = g + h$, $g \in C[0, 1]$. Megmutatjuk, hogy $h \notin L^1[0, 1]$ (amiből $f' \notin L^1[0, 1]$ már következik). Ui. az

$$a_n := (\pi/3 + 2n\pi)^{-1/2} \ , \ b_n := (\pi/6 + 2n\pi)^{-1/2} \quad (0 < n \in \mathbf{N})$$

jelölésekkel minden $0 < n, k \in \mathbf{N}, n \neq k$ esetén

$$[a_n, b_n] \cap [a_k, b_k] = \emptyset \ , \ b_n - a_n \geq \frac{\alpha}{n\sqrt{n}} \ , \ |h(x)| \geq \beta\sqrt{n} \quad (x \in [a_n, b_n])$$

alkalmas $\alpha, \beta > 0$ abszolút konstansokkal. Ezért

$$\int_0^1 |h| d\lambda \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |h| d\lambda \geq \alpha\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = +\infty.$$

iv) Világos, hogy az előző megjegyzésbeli f függvényre f' nem korlátos. Belátható ugyanakkor az a nem triviális tény, hogy *$f \in C[a, b]$, $f \in D([a, b] \setminus A)$ (ahol $A \subset [a, b]$ legfeljebb megszámlálható), $f' \in L^1[a, b]$ esetén $f(x) = \int_a^x f' d\lambda + f(a)$ $(a \leq x \leq b)$ (azaz, hogy f abszolút folytonos).*

v) A iv) megjegyzés nem igaz, ha az ott szereplő A halmaz számossága nagyobb, mint megszámlálható (ld. 3.1. Tétel). Ugyanakkor, *ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, f monoton növő, akkor $f' \in L^1[a, b]$ és $\int_x^y f' d\lambda \leq f(y) - f(x)$ $(x, y \in [a, b], x < y)$.*

Ui. legyen $\tilde{f}(t) := f(y) \quad (t > y)$ és $\tilde{f}(t) := f(t) \ \ (a \le t \le y)$, ill.

$$f_n(t) := n\left(\tilde{f}\left(t + \frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(t)\right) \quad (0 < n \in \mathbf{N}, a \le t \le b).$$

Ekkor $f_n \ge 0$, f_n Lebesgue-mérhető $\ (n \in \mathbf{N})$ és ha valamely $t \in [x, y)$ esetén $f \in D\{t\}$, akkor $f'(t) = \lim (f_n(t))$. Ezért f' is Lebesgue-mérhető, így a Fatou-lemma alapján

$$\int_x^y f' d\lambda = \int_x^y \lim(f_n) d\lambda = \int_x^y \liminf(f_n) d\lambda \le \liminf\left(\int_x^y f_n d\lambda\right) =$$

$$\liminf\left(n\int_y^{y+1/n} \tilde{f} d\lambda - n\int_x^{x+1/n} \tilde{f} d\lambda\right) \le$$

$$\liminf\left(n\int_y^{y+1/n} f(y) d\lambda - n\int_x^{x+1/n} f(x) d\lambda\right) = f(y) - f(x).$$

vi) Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ és f monoton növő, akkor nyilván minden olyan $x \in [a, b]$ helyen, ahol $f \in D\{x\}$, egyúttal $f'(x) \ge 0$ (azaz (ld. 2.5. Következmény) λ-m.m. $x \in [a, b]$ esetén). Tehát az előbbi v) megjegyzés szerint $0 \le f' \in L^1[a, b]$, így a $g(x) := \int_a^x f'\, d\lambda \quad (x \in [a, b])$ függvény is monoton növő. Legyen $h := f - g$, akkor bármely $x, y \in [a, b]$, $x < y$ mellett

$$h(x) = f(x) - g(x) \le f(y) - g(y) = h(y),$$

ui. (ismét csak az előbbi v) megjegyzés miatt)

$$g(y) - g(x) = \int_x^y f'\, d\lambda \le f(y) - f(x).$$

Ezért $f = g + h$, ahol g is, h is monoton növő és (a 3.6. Tétel alapján) g abszolút folytonos, $g'(x) = f'(x)$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in [a, b])$. Ha itt f folytonos is, akkor nyilván h is folytonos (egy ún. *szinguláris függvény.*)

3.7. Tétel (parciális integrálás). *Tegyük fel, hogy az $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvények abszolút folytonosak. Ekkor $\int_a^b f' g d\lambda + \int_a^b f g' d\lambda = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.*

Bizonyítás. Mutassuk meg először, hogy az fg szorzatfüggvény is abszolút folytonos. Valóban, ha $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ és $(a_k, b_k) \subset [a, b] \quad (k \in \mathcal{N})$ páronként diszjunkt intervallumok, akkor

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} |(fg)(b_k) - (fg)(a_k)| = \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(b_k) + f(a_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| \le$$

$$\|g\|_\infty \sum_{k\in\mathcal{N}} |f(b_k)-f(a_k)| + \|f\|_\infty \sum_{k\in\mathcal{N}} |g(b_k)-g(a_k)|,$$

amiből az fg függvény abszolút folytonossága már nyilvánvaló. Ezért (ld. 3.3. i) megjegyzés) fg λ-m.m. differenciálható, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ (λ-m.m. $x \in [a,b]$), $f'g, fg'$ integrálhatók és

$$(fg)(b) - (fg)(a) = \int_a^b (fg)'\,d\lambda = \int_a^b f'g d\lambda + \int_a^b g'f d\lambda. \blacksquare$$

3.8. Tétel (integrálás helyettesítéssel) *Legyen adott a kompakt $[\alpha,\beta]$ intervallumon értelmezett, monoton növő és abszolút folytonos g függvény. Ha $a := g(\alpha) < b := g(\beta)$ és $f \in L^1[a,b]$, akkor $f\circ g\cdot g' \in L^1[\alpha,\beta]$ és $\int_a^b f\,d\lambda = \int_\alpha^\beta f\circ g\cdot g'\,d\lambda$.*

Bizonyítás. Ha valamilyen $I \subset [a,b]$ intervallummal $f = \chi_I$, akkor direkt számolással ellenőrizhető az állítás. Innen rögtön következik a tétel $f \in L_0^+[a,b]$ (nem-negatív lépcsős függvény) esetén, azaz, amikor $f = \sum_{k=0}^n c_k\chi_{I_k}$ alkalmas $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal, $c_k \geq 0$ együtthatókkal és $I_k \subset [a,b]$ intervallumokkal ($k = 0,...,n$).

Legyen $0 \leq f \in L^\infty[a,b]$ és $(f_n) : \mathbf{N} \to L_0^+[a,b]$ olyan sorozat, amely tart f-hez λ-m.m. $x \in [a,b]$ helyen. Nyilván feltehető, hogy $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (n \in \mathbf{N})$ (ui. - ha valamilyen n-re ez nem teljesül - cseréljük ki f_n-et $\min\{f_n, \|f\|_\infty\}$-re). Így az eddig mondottak, ill. a („kis") Lebesgue-tétel alapján

$$\int_a^b f\,d\lambda = \lim\left(\int_a^b f_n\,d\lambda\right) = \lim\left(\int_\alpha^\beta f_n\circ g\cdot g'\,d\lambda\right).$$

Mivel $|f_n\circ g\cdot g'| \leq \|f\|_\infty g' \quad (n\in\mathbf{N}) \quad \lambda$-m.m. igaz és $g' \in L^1[a,b]$, ezért az $(f_n\circ g\cdot g')$ sorozatnak az $\|f\|_\infty g'$ függvény egy integrálható majoránsa. Következésképpen ismét a Lebesgue-tételre hivatkozva elegendő azt megmutatnunk, hogy az $(f_n(g(t))g'(t))$ sorozat λ-m.m. $t \in [\alpha,\beta]$ helyen konvergál $f(g(t))g'(t)$-hez.

Legyenek $A \subset [a,b]$, $B \subset [\alpha,\beta]$ olyan nulla (Lebesgue-) mértékű halmazok, amelyekre $f(x) = \lim(f_n(x)) \quad (x \in [a,b]\setminus A)$ és $g \in D\{t\} \quad (t \in [\alpha,\beta]\setminus B)$ igaz. Ha $t \in [\alpha,\beta]\setminus B$ és $g'(t) = 0$ vagy $g(t) \notin A$, akkor nyilván $\lim(f_n(g(t))g'(t)) = f(g(t))g'(t)$. Ha tehát valamely $t \in [\alpha,\beta]\setminus B$ helyen a helyettesítési értékek $(f_n(g(t))g'(t))$ sorozata nem konvergál $f(g(t))g'(t)$-hez, akkor $g'(t) > 0$ és $g(t) \in A$. Legyen

$$C := \{t \in [\alpha,\beta]\setminus B : g'(t) > 0 \text{ és } g(t) \in A\}.$$

Azt kell belátnunk, hogy C (Lebesgue-szerint) nulla-mértékű.

Mivel $\lambda(A) = 0$, ezért van olyan $I_n \subset [a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ intervallumsorozat, amelyre $\sum_{n=0}^\infty |I_n| < +\infty$ és bármely $x \in A$ pont végtelen sok I_n-be esik. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és

$$\psi_n := \sum_{k=0}^n \chi_{I_k}.$$

Ekkor a $(\psi_n) : \mathbf{N} \to L_0^+[a,b]$ sorozat monoton növő és tetszőleges $x \in A$ esetén $\lim(\psi_n(x)) = +\infty$. Ha $t \in C$, akkor nyilván $\lim((\psi_n(g(t))g'(t))) = +\infty$ is igaz. De a Beppo Levi-tétel alapján

$$\int_\alpha^\beta \lim(\psi_n \circ g \cdot g')\, d\lambda = \lim\left(\int_\alpha^\beta \psi_n \circ g \cdot g'\, d\lambda\right) = \lim\left(\int_a^b \psi_n\, d\lambda\right) = \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < +\infty,$$

ezért $\lim(\psi_n(g(t))g'(t)) < +\infty \quad (\lambda\text{-m.m. } t \in [\alpha,\beta])$. Következésképpen $\lambda(C) = 0$.

Legyen most $0 \le f \in L^1[a,b]$ és tekintsük a következő (f_n) függvénysorozatot:

$$f_n(x) := \begin{cases} n & (f(x) > n) \\ f(x) & (0 \le f(x) \le n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy (f_n) monoton nőve tart f-hez és $0 \le f_n \in L^\infty[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$. Ezért a fentiek, ill. a Beppo Levi-tétel alapján

$$\int_a^b f\, d\lambda = \lim\left(\int_a^b f_n\, d\lambda\right) = \lim\left(\int_\alpha^\beta f_n \circ g \cdot g'\, d\lambda\right).$$

Ugyanúgy, mint az előbb kapjuk, hogy $\lim(f_n(g(t))g'(t)) = f(g(t))g'(t) \quad (\lambda\text{-m.m. } t \in [\alpha,\beta])$. Az $(f_n \circ g \cdot g')$ sorozat monoton növő, tehát ismét alkalmazva a Beppo Levi-tételt azt mondhatjuk, hogy $\lim \int_\alpha^\beta f_n \circ g \cdot g'\, d\lambda = \int_\alpha^\beta f \circ g \cdot g'\, d\lambda$. Tehát $\int_a^b f\, d\lambda = \int_\alpha^\beta f \circ g \cdot g'\, d\lambda$.

A 3.8. Tétel állítása a fentiekből tetszőleges $f \in L^1[a,b]$ esetén az $f = f^+ - f^-$ felbontás alapján adódik. ■

3.4. Megjegyzés.

i) Belátható, hogy $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ esetén teljesül az alábbi állítás: *valamely $f \in L^1(-\infty,+\infty)$ függvény segítségével akkor és csak akkor igaz az $F(x) = \int_{-\infty}^x f d\lambda \quad (x \in \mathbf{R})$ egyenlőség, ha bármely $0 < A \in \mathbf{R}$ mellett F leszűkítése $[-A,A]$-ra abszolút folytonos, $\bigwedge_{-\infty}^{+\infty} F < +\infty$ és $\lim_{-\infty} F = 0$.*

3.9. Tétel (Fubini). *Legyenek a $\mu_n : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}} \quad (n \in \mathbf{N})$ Borel-mértékek olyanok, hogy $\mu := \sum_{n=0}^\infty \mu_n$ is Borel-mérték $\mathcal{B}$-n. Ekkor $\mu'(x) = \sum_{n=0}^\infty \mu_n'(x)$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$).*

Bizonyítás. 1^o Lássuk be először, hogy

$$\sum_{n=0}^\infty \mu_n'(x) \le \mu'(x) \qquad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N).$$

A 2.3. Következmény alapján ui. van olyan $M \subset \mathbf{R}^N$, $\lambda(M) = 0$ halmaz, hogy bármely $x \in \mathbf{R}^N \setminus M$ esetén $0 \le \mu'(x) < +\infty$ és $0 \le \mu_n'(x) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$. Legyen

$$\nu_m := \sum_{i=0}^m \mu_i \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $\nu_m : \mathcal{B} \to \overline{\mathbf{R}}$ Borel-mérték és $\nu_m'(x) = \sum_{i=0}^{m} \mu_i'(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus M)$. Tegyük fel, hogy $(H_n) \to x$, ekkor $\nu_m(H_n) \le \mu(H_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt

$$\frac{\nu_m(H_n)}{\lambda(H_n)} \le \frac{\mu(H_n)}{\lambda(H_n)} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\nu_m'(x) \le \mu'(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus M)$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i'(x) = \lim(\nu_m'(x)) \le \mu'(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus M).$$

2^o Most megmutatjuk, hogy tetszőleges $0 < s \in \mathbf{N}$ mellett van olyan $B_s \subset K_s(0)$, $\lambda(B_s) = 0$, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i'(x) = \mu'(x) \qquad (x \in K_s(0) \setminus B_s).$$

Valóban, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i\left(K_s(0)\right) = \mu\left(K_s(0)\right) \le \mu\left(\overline{K_s(0)}\right) < +\infty$, mivel $\overline{K_s(0)}$ kompakt. Ezért $\lim\left(\mu(K_s(0)) - \nu_n(K_s(0))\right) = 0$. Ha tehát

$$\sigma_n(A) := \mu\left(A \cap K_s(0)\right) - \nu_n\left(A \cap K_s(0)\right) \qquad (A \in \mathcal{B}, n \in \mathbf{N}),$$

akkor egyrészt $\sigma_n \quad (n \in \mathbf{N})$ Borel-mérték, másrészt $\lim(\sigma_n(K_s(0)) = 0$. Így minden $k \in \mathbf{N}$ számhoz van olyan $n_k \in \mathbf{N}$ index, amellyel $\sigma_{n_k}\left(K_s(0)\right) < 2^{-k}$. Nyilván az is feltehető, hogy itt (n_k) egy indexsorozat, azaz $n_{k+1} > n_k \quad (k \in \mathbf{N})$. A $\sigma := \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{n_k}$ mértékre

$$\sigma\left(K_s(0)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{n_k}\left(K_s(0)\right) \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty,$$

amiből adódóan σ Borel-mérték. Így 1^o alapján $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{n_k}'(x) \le \sigma'(x) \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N)$. Van tehát olyan $B \subset \mathbf{R}^N$ halmaz, hogy $\lambda(B) = 0$ és az előbbi egyenlőtlenség minden $x \in \mathbf{R}^N \setminus B$ helyen teljesül. Legyen $B_s := B \bigcap K_s(0)$, ekkor $\lambda(B_s) = 0$. Ha $x \in K_s(0) \setminus B_s$ és $(E_n) \to x$, akkor legfeljebb véges sok $n \in \mathbf{N}$ kivételével $E_n \subset K_s(0)$, azaz

$$\frac{\sigma_{n_k}(E_n)}{\lambda(E_n)} = \frac{\mu(E_n)}{\lambda(E_n)} - \frac{\nu_{n_k}(E_n)}{\lambda(E_n)} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy $\sigma_{n_k}'(x) = \mu'(x) - \nu_{n_k}'(x) \quad (x \in K_s(0) \setminus B_s, k \in \mathbf{N})$. Minden ilyen x esetén tehát $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{n_k}'(x)$ véges, amiből $\sigma_{n_k}'(x) \to 0 \quad (k \to \infty)$ következik. Ezért a $\left(\nu_{n_k}'(x)\right)$ sorozat monoton nőve konvergál $\mu'(x)$-hez. Mivel a $(\nu_n'(x))$ sorozat is nyilván monoton növő, ezért $\nu_n'(x) \to \mu'(x) \quad (n \to \infty)$. Összefoglalva tehát azt írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k'(x) = \mu'(x) \qquad (x \in K_s(0) \setminus B_s).$$

3^o Nyilván $\mathbf{R}^N = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s(0)$, ezért egyúttal minden $x \in \mathbf{R}^N \setminus (\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s)$ pontban $\sum_{k=0}^{\infty} \mu'_k(x) = \mu'(x)$. Világos, hogy $\lambda(\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s) = 0$, ami a 3.9. Tétel bizonyítását jelenti. ■

3.1. Következmény (Fubini). *Ha $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum, $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$, f_n monoton növő $(n \in \mathbf{N})$ és létezik az $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény, akkor $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ $(\lambda$-m.m. $x \in [a, b])$.*

Ha ui. μ_n az f_n $(n \in \mathbf{N})$ által, μ pedig az f által meghatározott Lebesgue-Stieltjes-mérték, akkor könnyen láthatóan $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n$ és λ-m.m. $x \in [a, b]$ helyen

$$\mu'(x) = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

3.5. Megjegyzések.

i) Legyen c a kompakt $[a, b]$ intervallum egy pontja, $0 \leq u, v \in \mathbf{R}$ és $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ a következő függvény:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & (a \leq x < c) \\ u & (x = c) \\ u + v & (x > c) \end{cases} \qquad (x \in [a, b]).$$

Világos, hogy h monoton növő, $h(c) - h(c-0) = u$ (ha $c > a$), $h(c+0) - h(c) = v$ (ha $c < b$) és $h'(x) = 0$ $(c \neq x \in [a, b])$.

ii) Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ és adottak a $c_n \in [a, b]$, $0 \leq u_n, v_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathcal{N})$ számok, $c_n \neq c_m$ $(n \neq m \in \mathcal{N})$, $\sum_{n \in \mathcal{N}} (u_n + v_n) < +\infty$. Legyen $n \in \mathcal{N}$ és h_n az i)-ben szereplő h függvény, ha $c := c_n$, $u := u_n$, $v := v_n$. Ekkor $\sum_{n \in \mathcal{N}} \|h_n\|_\infty = \sum_{n \in \mathcal{N}} (u_n + v_n) < +\infty$, azaz $\sum_{n \in \mathcal{N}} h_n$ egyenletesen konvergens, ha $\mathcal{N}$ megszámlálható. Ezért a $h := \sum_{n \in \mathcal{N}} h_n$ függvény minden olyan $x \in [a, b]$ helyen folytonos, ahol valamennyi h_n $(n \in \mathcal{N})$ is folytonos: $h \in C\{x\}$ $(c_n \neq x \in [a, b]$ $(n \in \mathcal{N}))$. Nyilvánvaló, hogy h is monoton növő. Ezért a 3.1. Következmény miatt $h'(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} h'_n(x) = 0$ $(\lambda$-m.m. $x \in [a, b])$.

iii) Az előbbi ii) megjegyzésben szereplő h függvényre egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$h(x) = \sum_{\mathcal{N} \ni n, c_n \leq x} u_n + \sum_{\mathcal{N} \ni n, c_n < x} v_n \qquad (x \in [a, b])$$

és $h(c_n + 0) - h(c_n) = v_n$ (ha $c_n < b$) és $h(c_n) - h(c_n - 0) = u_n$ (ha $c_n > a$) $(n \in \mathcal{N})$ (h egy ún. *tiszta ugrófüggvény*).

iv) Tekintsünk most egy monoton növő, nem folytonos $H : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvényt, legyenek a szakadási helyei c_n-ek $(n \in \mathcal{N})$, ill. $u_n := H(c_n) - H(c_n - 0)$ (ha

$c_n > a$) és $v_n := H(c_n + 0) - H(c_n)$ (ha $c_n < b$) $\quad (n \in \mathcal{N})$. Ha h jelenti az előbbi ii) megjegyzésben szereplő tiszta ugrófüggvényt, akkor $H - h$ folytonos és szintén monoton növő. Tehát $H = (H - h) + h$ olyan felbontása H-nak, ahol $H - h$ folytonos, h tiszta ugrófüggvény és mindkettő monoton növő.

v) Ha az előbbi megjegyzést „egyesítjük" a 3.3. vi) megjegyzéssel, akkor a következőt kapjuk: *bármely $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monoton növő függvény előállítható $f = f_1 + f_2 + f_3$ alakban, ahol minden itt szereplő függvény monoton növő, f_1 abszolút folytonos, f_2 szinguláris, f_3 pedig vagy az azonosan nulla függvény (ha f folytonos) vagy tiszta ugrófüggvény (ha f nem folytonos).*

vi) A 3.3. (Jordan-) Tétel alapján az v) megjegyzésben kapott eredmény részben igaz lesz minden $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos változású függvényre is.

3.10. Tétel (Lebesgue-féle sűrűségi tétel). *Legyen $\emptyset \neq E \subset \mathbf{R}$, $x \in E$ és valamely $I \subset \mathbf{R}$ nem elfajuló korlátos intervallum esetén $x \in I$, $\Delta_I^E(x) := \dfrac{\lambda^*(E \cap I)}{|I|}$ (ahol λ^* a Lebesgue-féle külső mérték $\mathbf{R}$-en). Ekkor λ-m.m. $x \in E$ mellett $\lim_{|I| \to 0} \Delta_I^E(x) = 1$.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy E korlátos, pl. valamilyen $-\infty < a < b < +\infty$ esetén $E \subset (a, b)$. Legyen

$$f(x) := \lambda^*(E \cap [a, x]) \qquad (x \in [a, b]).$$

Ekkor f nyilván nem-negatív. Monoton növő is, ui. $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén $E \cap [a, x] \subset E \cap [a, y]$ és λ^* monoton. Mutassuk meg, hogy $f'(x) = 1 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in E)$. Valóban, minden $n \in \mathbf{N}$ indexhez van olyan $I_{nk} \subset (a, b) \quad (k \in \mathbf{N})$ nyílt intervallumokból álló sorozat, hogy $E \subset E_n := \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{nk}$ és $\delta_n := \sum_{k=0}^{\infty} |I_{nk}| < \lambda^*(E) + 2^{-n}$. Tehát $\sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n - \lambda^*(E)) < +\infty$. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és

$$f_n(x) := \lambda^*(E_n \cap [a, x]) \qquad (x \in [a, b]),$$

ill. $F_n := f_n - f$. Ekkor (f-hez hasonlóan) f_n is monoton növő és minden $x, y \in [a, b]$, $x < y$, $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$F_n(y) - F_n(x) = f_n(y) - f_n(x) - (f(y) - f(x)) =$$

$$\lambda^*(E_n \cap [x, y]) - \lambda^*(E \cap [x, y]) \geq 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ui. $E \subset E_n$ miatt $E \cap [x, y] \subset E_n \cap [x, y]$. (Felhasználtuk a λ^* külső mérték alábbi tulajdonságát is: ha $A \subset [\alpha, \beta]$, $B \subset [\gamma, \delta]$ és $\beta \leq \gamma$, akkor $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$). Tehát F_n is monoton növő, továbbá

$$F_n(a) = 0\ ,\ F_n(b) = \lambda^*(E_n) - \lambda^*(E) \leq \delta_n - \lambda^*(E) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért $0 \leq F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} F_n(b) < +\infty \quad (x \in [a, b])$, azaz a fenti 3.1. Következmény alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(f_n'(x) - f'(x)\big) = F'(x) < +\infty \qquad (\lambda\text{–m.m. } x \in [a, b]).$$

Minden ilyen x-re ezért $F_n'(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$, $f_n'(x) \to f'(x) \quad (n \to \infty)$. Ha itt még $x \in E$ is igaz, akkor bármely $\mathbf{N} \ni n$-re $x \in E_n$, azaz $f_n'(x) = 1$ (ui. x belső pontja E_n-nek, így $\dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = 1$, hacsak $0 \neq |h|$ „elég kicsi"). Tehát $f'(x) = 1 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in E)$.

Legyen $f \in D\{x\}$, $\mathbf{R} \ni h, l \geq 0, h + l > 0$ és $I := (x - h, x + l] \subset [a, b]$. Ekkor

$$\Delta_I^E(x) = \frac{\lambda^*\left(E \cap ([a, x + l] \setminus [a, x - h]\right)}{h + l} = \frac{f(x + l) - f(x - h)}{h + l} \to f'(x) \quad (h + l \to 0),$$

amiből a tétel állítása már nyilván következik. ■

3.6. Megjegyzések.

i) Tegyük fel, hogy $E \subset \mathbf{R}$ olyan Lebesgue-mérhető halmaz, hogy egy alkalmas $\delta > 0$ számmal $\lambda(E \cap I) \geq \delta|I|$ teljesül minden $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lambda(\mathbf{R} \setminus E) = 0$. Valóban, ha I egy (valódi) intervallum, akkor $|I| = \lambda(E \cap I) + \lambda((\mathbf{R} \setminus E) \cap I)$ alapján

$$(*) \qquad 1 = \frac{\lambda(E \cap I)}{|I|} + \frac{\lambda((\mathbf{R} \setminus E) \cap I)}{|I|}.$$

Ha $x \in (\mathbf{R} \setminus E) \cap I$ és

$$(**) \qquad \frac{\lambda((\mathbf{R} \setminus E) \cap I)}{|I|} \to 1 \qquad (|I| \to 0),$$

akkor $(*)$ miatt

$$\frac{\lambda(E \cap I)}{|I|} \to 0 \qquad (|I| \to 0).$$

Ez utóbbi viszont nem teljesülhet, mert a feltétel szerint $\dfrac{\lambda(E \cap I)}{|I|} \geq \delta$. Következésképpen $(**)$ nem állhat fenn az $\mathbf{R} \setminus E$ halmaz egyetlen x pontjában sem. Ugyanakkor a 3.10. Tételt az $\mathbf{R} \setminus E$ halmazra alkalmazva azt mondhatjuk, hogy $(**)$ λ-m.m. $x \in \mathbf{R} \setminus E$ esetén igaz. Ez csak úgy lehetséges, ha $\lambda(\mathbf{R} \setminus E) = 0$.

ii) Az Olvasóra bízzuk az előbbi megjegyzésben szereplő állítás bizonyítását mintegy elemi úton (azaz a 3.10. Tétel nélkül).

iii) Legyen most $\emptyset \neq E \subset \mathbf{R}$ tetszőleges halmaz és valamely $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\delta(x) := \inf\{|x - z| : z \in E\}$$

(x és E távolsága). Világos, hogy bármely $y \in \mathbf{R}$ mellett $\delta(x + y) \leq |y| \quad (x \in E)$, hiszen $\delta(x + y) \leq |x - (x + y)| = |y|$. Ezért némileg meglepő a következő állítás:

$$\frac{\delta(x + y)}{|y|} \to 0 \quad (y \to 0) \qquad (\lambda\text{–m.m. } x \in E).$$

A bizonyítás során ismét lényeges szerepet kap a 3.10. Tétel. Ui. azt fogjuk megmutatni, hogy a most mondott konvergencia minden olyan $x \in E$ esetén igaz, amelyre a 3.10. Tétel állítása is igaz, azaz λ-m.m. $E \ni x$-re.

Legyen tehát $x \in E$ ilyen, $0 \neq y \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ és

$$I(x,y,\varepsilon) := (x+y-\varepsilon|y|, x+y+\varepsilon|y|);$$

$$J(x,y,\varepsilon) := (x-|y|-\varepsilon|y|, x+|y|+\varepsilon|y|).$$

Ekkor nyilván $x \in J(x,y,\varepsilon)$ és $I(x,y,\varepsilon) \subset J(x,y,\varepsilon)$. Lássuk be, hogy alkalmas $r > 0$ számmal minden $y \in \mathbf{R}$, $0 < |y| < r$ esetén

$$(***) \qquad E \cap I(x,y,\varepsilon) \neq \emptyset.$$

Különben ui. egy alkalmas $0 < y_n \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(y_n) = 0$ sorozattal $E \cap I(x,y_n,\varepsilon) = \emptyset \quad (n \in \mathbf{N})$ és

$$\Delta_n := \frac{\lambda^*(E \cap J(x,y_n,\varepsilon))}{|J(x,y_n,\varepsilon)|} = \frac{\lambda^*(E \cap (J(x,y_n,\varepsilon) \setminus I(x,y_n,\varepsilon))}{|J(x,y_n,\varepsilon)|} \leq$$

$$\frac{\lambda^*(J(x,y_n,\varepsilon) \setminus I(x,y_n,\varepsilon))}{|J(x,y_n,\varepsilon)|} =$$

$$\frac{|J(x,y_n,\varepsilon)| - |I(x,y_n,\varepsilon)|}{|J(x,y_n,\varepsilon)|} = \frac{2(1+\varepsilon)|y_n| - 2\varepsilon|y_n|}{2(1+\varepsilon)|y_n|} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\Delta_n \to 1 \quad (n \to \infty)$ nem teljesülhet. Ugyanakkor $|J(x,y_n,\varepsilon)| \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt $\Delta_n \to 1 \quad (n \to \infty)$.

Tehát $(***)$ alapján tetszőleges $y \in \mathbf{R}$, $0 < |y| < r$ számhoz van olyan $z \in E$, amelyre $z \in I(x,y,\varepsilon)$, azaz $|x+y-z| < \varepsilon|y|$. Ezért

$$\frac{\delta(x+y)}{|y|} \leq \frac{|x+y-z|}{|y|} < \varepsilon.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

4. Maximálfüggvények

Tekintsük az $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ lokálisan integrálható függvényt, és jelöljük $\mathcal{G}$-vel a következő halmazt:

$$\mathcal{G} := \{K_r(z) : z \in \mathbf{R}^N, r > 0\}.$$

Valamely $x \in \mathbf{R}^N$ esetén legyen $\mathcal{G}_x := \{S \in \mathcal{G} : x \in S\}$ és

$$f^*(x) := \sup \left\{ \frac{1}{\lambda(S)} \int_S |f| d\lambda : S \in \mathcal{G}_x \right\}.$$

Az $f^* : \mathbf{R}^N \to [0, +\infty]$ függvényt f *Hardy-Littlewood-féle maximálfüggvényének* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy ha $q > 0$ és

$$A_q := \{f^* > q\} := \{x \in \mathbf{R}^N : f^*(x) > q\},$$

akkor A_q nyílt halmaz. Valóban, $f^*(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N)$ értelmezése szerint, ha $f^*(x) > q$, akkor $x \in A_q$ és van olyan $S \in \mathcal{G}_x$, amellyel $\frac{1}{\lambda(S)} \int_S |f| d\lambda > q$. De ekkor bármely $y \in S$ helyen

$$f^*(y) \geq \frac{1}{\lambda(S)} \int_S |f| d\lambda > q$$

is igaz, ezért $y \in A_q$. Tehát a most mondott S környezetre $S \subset A_q$, ami az A_q halmaz nyíltságát jelenti. Ez azt is biztosítja egyúttal, hogy f^* mérhető függvény.

Nem nehéz megmutatni, hogy alkalmas f (akár L^1-beli) függvényre $f^* \notin L^1$ is lehet. Ha ui. $N := 1$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \notin (0, 1/2)) \\ \\ \dfrac{1}{x \ln^2 x} & (x \in (0, 1/2)), \end{cases} \tag{4.1}$$

akkor egyszerű ellenőrzéssel kapjuk, hogy $f \in L^1$. Ugyanakkor $0 < |x| < 1/2$ esetén

$$f^*(x) \geq \frac{1}{|(x - 2|x|, x + 2|x|)|} \int_{x-2|x|}^{x+2|x|} |f| d\lambda \geq \frac{1}{4|x|} \int_0^{|x|} f d\lambda = \frac{1}{4|x| \ln(1/|x|)},$$

amiből $f^* \notin L^1$ már rögtön következik.

Sőt, azt sem nehéz belátni, hogy ha az $f \in L^1$ függvény nem az L^1-beli nulla-függvény, akkor $f^* \notin L^1$. A feltétel szerint ui. létezik olyan $r > 0$, amellyel $q := \int_{K_r(0)} |f| d\lambda > 0$. Legyen $m := \lambda(K_1(0))$ és $\mathbf{R}^N \ni x \notin K_r(0)$. Ekkor $K_r(0) \subset K_{2\|x\|_2}(x)$, azaz

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\lambda\left(K_{2\|x\|_2}(x)\right)} \int_{K_{2\|x\|_2}(x)} |f| d\lambda \geq \frac{q}{m\|x\|_2^N},$$

amiből

$$\int f^* d\lambda \geq \int_{\mathbf{R}^N \setminus K_r(0)} f^* d\lambda \geq$$

$$\frac{q}{m2^N} \int_{\mathbf{R}^N \setminus K_r(0)} \frac{1}{\|x\|_2^N} dx = \frac{q}{m2^N} \sum_{j=2}^{\infty} \int_{K_{jr}(0) \setminus K_{(j-1)r}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^N} dx \geq$$

$$\frac{q}{m2^N}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^N r^N}\left((jr)^N-((j-1)r)^N\right)m=$$

$$q2^{-N}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j^N-(j-1)^N}{j^N}\geq\frac{2qN}{2^{2N}}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}=+\infty.$$

4.1. Lemma. *Bármely* $g:\mathbf{R}^N\to\overline{\mathbf{R}}$ *Lebesgue-mérhető függvény és* $0<p<+\infty$ *szám esetén*

$$\|g\|_p=\left(p\int_0^{+\infty}y^{p-1}\varphi_g(y)dy\right)^{1/p},$$

ahol $\varphi_g(y):=\lambda\left(\{|g|>y\}\right)\quad(y\geq 0)$.

Bizonyítás. A szukcesszív integrálásról szóló Fubini-tételt alkalmazva

$$\int|g|^p d\lambda=\int\left(p\int_0^{|g(x)|}y^{p-1}dy\right)dx=\int\left(p\int_0^{+\infty}y^{p-1}\chi_{\{|g|>y\}}(x)dy\right)dx=$$

$$p\int_0^{+\infty}y^{p-1}\left(\int\chi_{\{|g|>y\}}(x)dx\right)dy=p\int_0^{+\infty}y^{p-1}\varphi_g(y)dy.\ \blacksquare$$

4.1. Megjegyzések.

i) Mint korábban (és továbbra) is, a $\{|g|>y\}:=\{t\in\mathbf{R}^N:|g(t)|>y\}$ egyszerűsítő jelöléssel éltünk.

ii) Az előbbi lemmában szereplő φ_g függvényt g *eloszlásfüggvényének* nevezzük.

iii) Mivel $0\leq y\leq z$ esetén $\{|g|>z\}\subset\{|g|>y\}$, ezért a mértékek monotonitása miatt $\varphi_g(z)\leq\varphi_g(y)$, azaz a φ_g eloszlásfüggvény monoton fogyó.

iv) Mutassuk meg, hogy bármely $y\geq 0$ pontban $\varphi_g(y)=\varphi_g(y+0)$, tehát, hogy φ_g minden $0\leq y$-ban jobbról folytonos. Valóban, φ_g monoton fogyása miatt

$$\varphi_g(y)\geq\sup\{\varphi_g(z):z>y\}=\varphi_g(y+0),$$

ezért elég azt belátni, hogy $\lim(\varphi_g(y+1/n))=\varphi_g(y)$. Legyen ehhez

$$E_n:=\{|g|>y+1/n\}\qquad(0<n\in\mathbf{N}),$$

ekkor $E_n\subset E_{n+1}\quad(0<n\in\mathbf{N})$ és $\{|g|>y\}=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$. A mértékek (alulról) félig folytonossága alapján ezért

$$\varphi_g(y)=\lambda(\{|g|>y\})=\lim(\lambda(E_n))=\lim(\varphi_g(y+1/n)).$$

v) Tekintsük a $g := \chi_{[0,1)} + 2\chi_{[1,2]}$ függvényt. Világos, hogy

$$\varphi_g(y) = \begin{cases} 2 & (0 \le y < 1) \\ 1 & (1 \le y < 2) \\ 0 & (2 \le y), \end{cases}$$

így φ_g balról nem folytonos (pl. 1-ben).

vi) Az f^* maximálfüggvény definíciójában szereplő bármely $S \in \mathcal{G}_x \quad (x \in \mathbf{R}^N)$ környezet esetén $\int_S |f|\, d\lambda < +\infty$, mivel $\int_S |f|\, d\lambda \le \int_{\overline{S}} |f|\, d\lambda < +\infty$, hiszen $\overline{S}$ kompakt, f pedig lokálisan integrálható.

vii) A 2.2. ii) megjegyzés szerint tetszőleges $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ lokálisan Lebesgue-integrálható f függvényre

$$|f(x)| = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(K_r(x))} \int_{K_r(x)} |f|\, d\lambda$$

igaz λ-m.m. $\mathbf{R}^N \ni x$-re. Mivel $(\lambda(K_r(x))^{-1} \int_{K_r(x)} |f|\, d\lambda \le f^*(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N,$ $r > 0)$ nyilvánvaló, ezért $|f(x)| \le f^*(x) \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N)$.

viii) A $p = 1$ speciális esetben tehát $\|g\|_1 = \int_0^{+\infty} \varphi_g d\lambda$.

4.1. Tétel (Hardy-Littlewood). *Legyen $1 < p \le +\infty$. Ekkor megadhatók olyan $C_p > 0$ (csak p-től függő), $C > 0$ konstansok, hogy tetszőleges lokálisan integrálható $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ függvényre*

i) *minden $q > 0$ esetén* $\lambda(A_q) \le \dfrac{C}{q} \|f\|_1$;

ii) $\|f^*\|_p \le C_p \|f\|_p$.

Bizonyítás. i) Nyilván feltehető, hogy $\|f\|_1 < +\infty$, azaz $f \in L^1$. Legyen $\mathbf{R} \ni q > 0$, $x \in A_q$. Ekkor az A_q halmaz definíciója miatt van olyan $S_x \in \mathcal{G}_x$, amelyre $\frac{1}{\lambda(S_x)} \int_{S_x} |f| d\lambda > q$. Nyilván $S_x \subset A_q$, azaz $A_q = \bigcup_{x \in A_q} S_x$. A 2.1. Vitali-lemmát alkalmazva viszont tetszőleges $c < \lambda(A_q)$ számhoz létezik olyan $K \subset A_q$ véges halmaz, amellyel $S_x \cap S_z = \emptyset \quad (x \ne z \in K)$ és

$$\sum_{x \in K} \lambda(S_x) \ge \frac{c}{3^N}.$$

De bármely $x \in K$ esetén $\lambda(S_x) < q^{-1} \int_{S_x} |f| d\lambda$, amiből

$$c \le 3^N \sum_{x \in K} \lambda(S_x) < \frac{3^N}{q} \sum_{x \in K} \int_{S_x} |f| d\lambda = \frac{3^N}{q} \int_{\bigcup_{x \in K} S_x} |f| d\lambda \le \frac{3^N}{q} \|f\|_1.$$

Tehát a $\lambda(A_q) \le 3^N q^{-1}\|f\|_1$ becslésnek is fenn kell állni.

ii) Az előbbiekhez hasonlóan feltehető, hogy $\|f\|_p < +\infty$, azaz $f \in L^p$. Ha $p = +\infty$, azaz $f \in L^\infty$, akkor bármely $S \in \mathcal{G}$ környezetre

$$\frac{1}{\lambda(S)} \int_S |f| d\lambda \le \|f\|_\infty,$$

azaz minden $\mathbf{R}^N \ni x$-re $f^*(x) \le \|f\|_\infty$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f^* \in L^\infty$ és $\|f^*\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

Legyen most $1 < p < +\infty$ és $f \in L^p$. A 4.1. Lemma szerint

$$\|f^*\|_p^p = p \int_0^{+\infty} y^{p-1} \varphi_{f^*}(y) dy.$$

Ha $y > 0$ és

$$f_y(x) := \begin{cases} f(x) & (|f(x)| > y/2) \\ \\ 0 & (|f(x)| \le y/2) \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}^N),$$

akkor $|f(x)| \le |f_y(x)| + y/2 \quad (x \in \mathbf{R}^N)$. Ezért $f^* \le f_y^* + y/2$, így

$$\{f^* > y\} \subset \{f_y^* > y/2\},$$

más szóval $\varphi_{f^*}(y) \le \varphi_{f_y^*}(y/2)$. Viszont i) szerint $\varphi_{f_y^*}(y/2) \le \dfrac{2C}{y}\|f_y\|_1$, ahol

$$\|f_y\|_1 = \int_{\{|f|>y/2\}} |f| d\lambda = \int |f| \chi_{\{|f|>y/2\}} d\lambda.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\varphi_{f_y^*}(y) \le \varphi_{f_y^*}(y/2) \le \frac{2C}{y} \int |f| \chi_{\{|f|>y/2\}} d\lambda.$$

Innen végül oda jutunk, hogy (alkalmazva a szukcesszív integrálásról szóló Fubini-tételt)

$$\|f^*\|_p^p \le 2Cp \int_0^{+\infty} y^{p-1} \frac{1}{y} \int |f(x)| \chi_{\{|f|>y/2\}}(x) dx\, dy =$$

$$2Cp \int |f(x)| \int_0^{+\infty} y^{p-2} \chi_{\{|f|>y/2\}}(x) dy\, dx =$$

$$2Cp \int |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} y^{p-2} dy\, dx = 2^p C \frac{p}{p-1} \int |f||f|^{p-1} d\lambda = 2^p C \frac{p}{p-1} \|f\|_p^p,$$

ami a tételünk bizonyításának a végét jelenti. ■

4.2. Megjegyzések.

i) A fenti bizonyítás alapján tehát a 4.1. Tételben az is írható, hogy $C = 3^N$, ill. $C_p^p = 3^N 2^p \dfrac{p}{p-1}$ $(1 < p < +\infty)$ és $C_\infty = 1$.

ii) A most belátott tétel i) részének a bizonyításában $S_x \subset A_q \quad (x \in A_q)$, azaz $\bigcup_{x \in K} S_x \subset A_q$. Ezért az említett i) rész az alábbi élesebb formában is teljesül:

$$\lambda(A_q) \leq \frac{3^N}{q} \int_{A_q} |f| d\lambda \quad (q > 0).$$

Sőt, a tétel ii) részének az igazolását is tekintve $\varphi_{f^*}(y) \leq \varphi_{f_y^*}(y/2) \quad (y \geq 0)$ szerint az is igaz, hogy $\lambda(A_q) = \varphi_{f^*}(q) \leq \varphi_{f_q^*}(q/2) \leq \dfrac{3^N 2}{q} \|f_q\|_1$, azaz

$$\lambda(A_q) \leq \frac{2 \cdot 3^N}{q} \int_{\{|f| > q/2\}} |f| d\lambda.$$

iii) Külön érdemes kiemelni, hogy $1 < p \leq +\infty$, $f \in L^p$ esetén $f^* \in L^p$.

iv) A 4.1. Tétel ii) részének a bizonyításában szereplő bármely $f_y \quad (y > 0)$ függvény L^1-beli. Valóban, $\|f_y\|_1 = \int |f| \chi_{\{|f| > y/2\}} \, d\lambda$ és a Hölder-egyenlőtlenség szerint az $1/p + 1/q = 1$ egyenlőségnek eleget tevő $1 < q < +\infty$ kitevővel

$$\|f_y\|_1 \leq \|f\|_p \|\chi_{\{|f| > y/2\}}\|_q = \|f\|_p \left(\lambda(\{|f| > y/2\})\right)^{1/q}.$$

Az itt szereplő $\lambda(\{|f| > y/2\}) = \lambda(\{|f|^p > y^p/2^p\})$ mérték véges, ui.

$$\lambda(\{|f|^p > y^p/2^p\}) \leq \frac{2^p}{y^p} \int_{\{|f| > y/2\}} |f|^p \, d\lambda \leq \frac{2^p}{y^p} \|f\|_p^p < +\infty.$$

Tehát $\|f_y\|_1 \leq \dfrac{2^p}{y^p} \|f\|_p^{1 + p/q} = \dfrac{2^p}{y^p} \|f\|_p^p < +\infty$.

v) A 4.1. Tétel i) része alapján azt mondjuk, hogy az $f \mapsto f^*$ *Hardy-Littlewood-féle maximáloperátor gyengén (1,1)-típusú*, a tétel ii) része alapján pedig azt, hogy az említett operátor (p, p)-*típusú* $(1 < p \leq \infty)$.

vi) A 4.1. Tételből bármely $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^p$ esetén $f^*(x) < +\infty$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$) következik. Ez ui. $p > 1$ mellett $f^* \in L^p$ miatt nyilvánvaló. Ha $f \in L^1$, akkor $\{f^* = +\infty\} \subset \{f^* > q\} \quad (q \geq 0)$, így

$$\lambda(\{f^* = +\infty\}) \leq \lambda(A_q) \leq \frac{C}{q} \|f\|_1 \to 0 \quad (q \to +\infty).$$

Tehát $\lambda(\{f^* = +\infty\}) = 0$.

vii) Alkalmazásként mutassuk meg (amit korábban más úton már beláttunk), hogy minden $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ lokálisan integrálható függvény esetén λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ helyen

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda\left(K_r(x)\right)} \int_{K_r(x)} |f(x) - f(t)|dt = 0$$

(azaz x Lebesgue-pontja f-nek).

Ui. mindez nyilvánvaló, ha f folytonos (ráadásul ekkor minden $\mathbf{R}^N \ni x$-re). Mivel a bizonyítandó egyenlőség adott x esetén csak az x egy környezetében felvett függvényértékektől függ, ezért feltehető, hogy $f \in L^1$. Legyen

$$\Omega f(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda\left(K_r(x)\right)} \int_{K_r(x)} |f(x) - f(t)|dt \quad (x \in \mathbf{R}^N).$$

Világos, hogy $\Omega f(x) \leq f^*(x) + |f(x)| \quad (x \in \mathbf{R}^N)$. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott szám, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, amelyre $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Így bármely $\mathbf{R} \ni y > 0$ mellett

$$\{\Omega f > y\} \subset \{(f - \varphi)^* > y/2\} \cup \{|f - \varphi| > y/2\},$$

hiszen

$$\Omega f(x) \leq \Omega\varphi(x) + \Omega(f - \varphi)(x) = \Omega(f - \varphi)(x) \leq (f - \varphi)^*(x) + |f(x) - \varphi(x)|.$$

Összegezve tehát az eddig mondottakat azt írhatjuk, hogy

$$\lambda\left(\{\Omega f > y\}\right) \leq C\frac{\|f - \varphi\|_1}{y} + 2\frac{\|f - \varphi\|_1}{y} = \frac{2 + C}{y}\varepsilon.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért bármely $y > 0$ mellett $\lambda\left(\{\Omega f > y\}\right) = 0$, azaz $\Omega f(x) = 0$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$).

viii) Az előző megjegyzésben felhasználtuk, hogy tetszőleges $f \in L^1$ függvény és $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan φ folytonos függvény, amelyre $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Az L^1 függvényosztály definíciója miatt mindezt elegendő L^1-beli lépcsős függvényekre belátni. Ez utóbbihoz viszont azt kell meggondolni, hogy az $f = \chi_A$ speciális esetben igaz az állítás, ahol $A \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue-mérhető és $\lambda(A) < +\infty$. Valóban, a λ mérték regularitása miatt alkalmas $K \subset A \subset G$, K kompakt, G nyílt halmazokkal $\lambda(G \setminus K) < \varepsilon$. Legyen

$$\varphi(x) := \frac{\rho(x, \mathbf{R}^N \setminus G)}{\rho(x, \mathbf{R}^N \setminus G) + \rho(x, K)} \qquad (x \in \mathbf{R}^N),$$

ahol egy $\emptyset \neq Y \subset \mathbf{R}^N$ halmaz esetén $\rho(x, Y) := \inf\{\|x - y\|_2 : y \in Y\}$. Jól ismert, hogy az $\mathbf{R}^N \ni x \mapsto \rho(x, Y)$ függvény folytonos, így a fenti φ is az. Továbbá

$\varphi(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus G)$, $\varphi(x) = 1 \quad (x \in K)$ és $\varphi(x) \in [0,1] \quad (x \in G \setminus K)$. Világos, hogy

$$\|\chi_A - \varphi\|_1 = \int_{A\setminus K} (1-\varphi)\, d\lambda + \int_{G\setminus A} \varphi\, d\lambda \leq \lambda(G \setminus K) < \varepsilon.$$

4.2. Tétel. *Létezik olyan $C > 0$ konstans, hogy bármely lokálisan integrálható $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ függvény és tetszőleges $B \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue-mérhető halmaz esetén*

$$\int_B f^* d\lambda \leq 2\lambda(B) + C \int |f| \log^+ \circ |f| d\lambda.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{R} \ni y > 0, D_y := \{|f| > y\}$, $\tilde{D}_y := \mathbf{R}^N \setminus D_y$. Ekkor $f = f\chi_{D_y} + f\chi_{\tilde{D}_y}$, azaz

$$f^* \leq \left(f\chi_{D_y}\right)^* + \left(f\chi_{\tilde{D}_y}\right)^* \leq \left(f\chi_{D_y}\right)^* + y.$$

Innen azt kapjuk, hogy $\{f^* > 2y\} \subset \{\left(f\chi_{D_y}\right)^* > y\}$, ezért a gyenge (1,1)-tulajdonságot alkalmazva

$$\varphi_{f^*}(2y) = \lambda\left(\{f^* > 2y\}\right) \leq \lambda\left(\left\{\left(f\chi_{D_y}\right)^* > y\right\}\right) \leq \frac{C}{y}\|f\chi_{D_y}\|_1 = \frac{C}{y}\int_{D_y} |f| d\lambda.$$

Tehát

$$\int_B f^* d\lambda = \int f^*\chi_B d\lambda = \int_0^{+\infty} \varphi_{f^*\chi_B} d\lambda,$$

ahol

$$\varphi_{f^*\chi_B}(t) = \lambda\left(\{f^*\chi_B > t\}\right) = \lambda\left(B \cap \{f^* > t\}\right).$$

Ez utóbbit felhasználva (ismét alkalmazva a szukcesszív integrálásra vonatkozó Fubini-tételt)

$$\int_B f^* d\lambda = 2\int_0^{+\infty} \varphi_{f^*\chi_B}(2t) dt =$$

$$2\int_0^1 \varphi_{f^*\chi_B}(2t)dt + 2\int_1^{+\infty} \varphi_{f^*\chi_B}(2t)dt \leq 2\lambda(B) + 2\int_1^{+\infty} \varphi_{f^*}(2t)dt \leq$$

$$2\lambda(B) + 2C\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\int_{D_t} |f| d\lambda dt = 2\lambda(B) + 2C\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\int |f|\chi_{D_t} d\lambda dt =$$

$$2\lambda(B) + 2C\int |f(x)| \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\chi_{D_t}(x) dt dx = 2\lambda(B) + 2C\int |f(x)| \int_1^{1\vee|f(x)|} \frac{1}{t} dt dx =$$

$$2\lambda(B) + 2C \int |f(x)| \log^+(|f(x)|) dx. \blacksquare$$

4.3. Megjegyzések.

i) Emlékeztetünk az $\alpha \vee \beta := \max\{\alpha, \beta\} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$,

$$\log^+ x := \begin{cases} \ln x & (x \geq 1) \\ \\ 0 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

jelölésekre.

ii) A (4.1)-beli példa mutatja, hogy a 4.2. Tételben a $C \int |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda$ tag nem hagyható el.

iii) Hasonlóan, az $f := \chi_{[0,1]}$ függvényt figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a 4.2. Tételben a $2\lambda(B)$ tag sem nélkülözhető. Ekkor ui.

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \\ \dfrac{1}{x} & (x > 1) \\ \\ \dfrac{1}{1-x} & (x < 0) \end{cases}$$

és $|f| \circ \log^+ |f| = 0$.

iv) Ha tehát $\int |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda < +\infty$, akkor minden véges mértékű Lebesgue-mérhető $B \subset \mathbf{R}^N$ halmazon f^* integrálható Lebesgue-szerint: $\int_B f^* \, d\lambda < +\infty$.

v) Legyen $L \log^+ L$ az összes olyan lokálisan integrálható $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ függvény által alkotott halmaz, amelyre $\int |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda < +\infty$. Ekkor tetszőleges $1 < p < +\infty$ esetén $L^p \subset L \log^+ L$, ui.

$$\int |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda = \int_{\{|f| \geq 1\}} |f| \ln \circ |f| \, d\lambda \leq$$

$$\frac{1}{p-1} \int_{\{|f| \geq 1\}} |f| |f|^{p-1} \, d\lambda = \frac{1}{p-1} \|f\|_p^p < +\infty,$$

ha $f \in L^p$. Így a iv) megjegyzés igaz bármely $f \in L^p \quad (1 < p < +\infty)$ függvényre.

vi) Az előbbi megjegyzés utolsó észrevétele egyébként is könnyen megkapható. Ha ui. $B \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue-mérhető, $\lambda(B) < +\infty$ és $f \in L^p \quad (1 < p < +\infty)$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint a 4.1. Tétel alapján

$$\int_B f^* \, d\lambda = \int f^* \chi_B \, d\lambda \leq \|f^*\|_p \|\chi_B\|_q \leq C_p (\lambda(B))^{1/q} \|f\|_p < +\infty$$

(ahol $1 < q < +\infty$ és $1/p + 1/q = 1$).

vii) Ha $f \in L\log^+ L$, akkor $|f(x)| \leq f^*(x) \quad$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$) alapján a iv) megjegyzésből rögtön következik, hogy tetszőleges Lebesgue-mérhető és véges Lebesgue-mértékű $B \subset \mathbf{R}^N$ halmazra $\int_B |f|\,d\lambda < +\infty$. Ugyanez közvetlenül is igazolható. Ui.

$$\int_B |f|\,d\lambda = \int_{B\cap\{|f|<e\}} |f|\,d\lambda + \int_{B\cap\{|f|\geq e\}} |f|\,d\lambda \leq$$

$$e\lambda(B) + \int_{B\cap\{|f|\geq e\}} |f| \ln\circ|f|\,d\lambda \leq e\lambda(B) + \int |f| \log^+\circ|f|\,d\lambda < +\infty.$$

(Ugyanakkor $L\log^+ L \setminus L^1 \neq \emptyset$, $L^1 \setminus L\log^+ L \neq \emptyset$, amiről az Olvasó könnyen meggyőződhet egy-egy példa segítségével.)

A fentiekben is vizsgált $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ lokálisan integrálható függvény esetén legyen

$$f^o(x) := \sup\left\{\frac{1}{\lambda\left(K_r(x)\right)} \int_{K_r(x)} |f| d\lambda : r > 0\right\} \quad (x \in \mathbf{R}^N).$$

Mivel $x \in K_r(x) \in \mathcal{G}_x$ minden $r > 0$ mellett fennáll, ezért $f^o \leq f^*$. Továbbá, ha $x \in S := K_r(z) \in \mathcal{G}_x \quad (r > 0, z \in \mathbf{R}^N)$, akkor $S \subset K_{2r}(x)$, azaz

$$\frac{1}{\lambda(S)} \int_S |f| d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(S)} \int_{K_{2r}(x)} |f| d\lambda = \frac{\lambda\left(K_{2r}(x)\right)}{\lambda(S)} \frac{1}{\lambda(K_{2r}(x))} \int_{K_{2r}(x)} |f| d\lambda \leq$$

$$\frac{\lambda\left(K_{2r}(z)\right)}{\lambda(S)} f^o(x) \leq 2^N f^o(x).$$

Tehát $2^{-N} f^* \leq f^o \leq f^*$, ezért

$$\|f^o\|_p \leq \|f^*\|_p \leq C_p \|f\|_p \qquad (1 < p \leq +\infty, f \in L^p),$$

ill. $\{f^o > q\} \subset \{f^* > q\}$, azaz

$$\lambda\left(\{f^o > q\}\right) \leq \lambda(A_q) \leq C q^{-1} \|f\|_1 \qquad (q > 0, f \in L^1).$$

Mindezek azt jelentik, hogy az $f \mapsto f^o$ maximáloperátor is gyengén (1,1)- és (p,p)-típusú $(1 < p \leq +\infty)$.

A most mondottak igazak maradnak akkor is, ha f^o helyett az alábbi maximálfüggvényt írjuk:

$$f^\diamond(x) := \sup\left\{\frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f| d\lambda : x \in I \in \mathcal{A}\right\} \quad (x \in \mathbf{R}^N),$$

ahol alkalmas $\alpha > 0, \beta > 0$ paraméterekkel $\mathcal{A}$ azon $I = I_1 \times ... \times I_N$ N-dimenziós „téglák" halmaza, ahol $I_1, ..., I_N \subset \mathbf{R}$ intervallumok és $\alpha \leq |I_j||I_k|^{-1} \leq \beta \quad (j, k = 1, ..., N)$.

Legyenek adottak az $U, U_n : L^1 \to \{f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}} : f$ (Lebesgue-)mérhető$\} \quad (n \in \mathbf{N})$ lineáris operátorok, továbbá legyen

$$U^*f(x) := \sup\{|U_nf(x)| : n \in \mathbf{N}\} \quad (f \in L^1, x \in \mathbf{R}^N).$$

Az így definiált U^* leképezést az (U_n) operátorsorozat *maximáloperátorának* nevezzük.

4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy van olyan $L \subset L^1$ halmaz, amely ($\|.\|_1$ normában) mindenütt sűrű L^1-ben és bármely $f \in L$ esetén $U_nf(x) \to Uf(x) \quad (n \to \infty)$ λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$ helyen igaz. Ha U, U^* gyengén (1,1)-típusúak, akkor az előbbi konvergencia minden $f \in L^1$ függvényre fennáll.*

Bizonyítás. Legyen $f \in L^1$,

$$\rho(x) := \limsup_n |U_nf(x) - Uf(x)| \qquad (x \in \mathbf{R}^N),$$

$\varepsilon > 0$ és válasszuk az $F \in L$ függvényt úgy, hogy $\|f - F\|_1 < \varepsilon$. Ekkor

$$\rho(x) \leq \limsup_n |U_n(f - F)(x)| + \limsup_n |U_nF(x) - UF(x)| + |U(F - f)(x)| \quad (x \in \mathbf{R}^N),$$

ahol egy $B \subset \mathbf{R}^N, \lambda(B) = 0$ halmazzal

$$\limsup_n |U_nF(x) - UF(x)| = \lim_n |U_nF(x) - UF(x)| = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus B).$$

Ezért $\rho(x) \leq U^*(f - F)(x) + |U(F - f)(x)| \quad (x \in \mathbf{R}^N \setminus B)$, azaz

$$\{\rho > 2y\} \subset \{U^*(f - F) > y\} \cup \{|U(F - f)| > y\} \cup B \quad (y > 0).$$

Tehát

$$\lambda(\{\rho > 2y\}) \leq \lambda(\{U^*(f - F) > y\}) + \lambda(\{|U(F - f)| > y\}) =: \Delta_1 + \Delta_2$$

következik. Az U, U^* operátorok gyenge (1,1)-típusa miatt van olyan $C > 0$ konstans, amellyel

$$\lambda(\{\rho > 2y\}) \leq \frac{C}{y}\|f - F\|_1 < \frac{C}{y}\varepsilon.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $\lambda(\{\rho > 2y\}) = 0 \quad (y > 0)$. Innen világos, hogy $\rho(x) = 0 \quad$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$). Ha x ilyen, akkor $0 = \limsup_n |U_nf(x) - Uf(x)|$, azaz a $\lim_n |U_nf(x) - Uf(x)|$ határérték létezik és nulla. Következésképpen $Uf(x) = \lim_n Uf_n(x)$ (λ-m.m. $x \in \mathbf{R}^N$). ■

Legyen pl. $f \in L^1, r_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(r_n) = 0$ és

$$U_n f(x) := \frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} \int_{K_{r_n}(x)} f d\lambda \quad (n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}^N).$$

Ha $L := \{f \in L^1 : f \text{ folytonos}\}$ és $Uf := f \quad (f \in L^1)$, akkor teljesülnek az 4.3. Tétel feltételei. Ui. egyrészt $U_n \quad (n \in \mathbf{N})$ lineáris és $\lim_n U_n f(x) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^N)$ triviális, ha f folytonos függvény. Másrészt bármely $f \in L^1$ függvényre

$$\|U_n f\|_1 \le \int \left(\frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} \int_{K_{r_n}(x)} |f(t)| dt \right) dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} \int |f(t)| \chi_{K_{r_n}(x)}(t)\, dt \right) dx,$$

azaz a szukcesszív integrálásra vonatkozó Fubini-tétel szerint

$$\|U_n f\|_1 \le \int |f(t)| \left(\int \frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} \chi_{K_{r_n}(x)}(t)\, dx \right) dt =$$

$$\int |f(t)| \left(\frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(t)\right)} \int \chi_{K_{r_n}(t)}(x)\, dx \right) dt = \int |f(t)| dt = \|f\|_1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Az $U^* f \le f^o$ becslés alapján azt kapjuk, hogy U^* gyengén (1,1)-típusú. A 4.3. Tétel miatt ezért minden $L^1 \ni f$-re (ld. vii))

$$\lim_n \frac{1}{\lambda\left(K_{r_n}(x)\right)} \int_{K_{r_n}(x)} f d\lambda = f(x) \qquad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N).$$

4.4. Tétel. *Bármely $0 < p < 1$ mellett megadható olyan $C_p > 0$, csak p-től függő állandó, hogy bármely lokálisan integrálható $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ függvény és tetszőleges $B \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue-mérhető halmaz esetén* $\left(\int_B (f^*)^p\, d\lambda\right)^{1/p} \le (\lambda(B) + C_p)^{1/p} \|f\|_1$.

Bizonyítás. Nyilván elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $f \in L^1$, azaz $\|f\|_1 < +\infty$. Először tegyük fel, hogy $\|f\|_1 = 1$. Ekkor az $\int_B (f^*)^p\, d\lambda$ integrálról a következőt mondhatjuk:

$$\int_B (f^*)^p\, d\lambda = \int (f^* \chi_B)^p\, d\lambda = p \int_0^{+\infty} y^{p-1} \varphi_{\chi_B f^*}(y) dy =$$

$$p \int_0^1 y^{p-1} \varphi_{\chi_B f^*}(y) dy + p \int_1^{+\infty} y^{p-1} \varphi_{\chi_B f^*}(y) dy,$$

ahol

$$\varphi_{\chi_B f^*}(y) = \lambda\left(\{\chi_B f^* > y\}\right) = \lambda\left(\{f^* > y\} \cap B\right) \le \begin{cases} \lambda(B) \\ \lambda\left(\{f^* > y\}\right). \end{cases}$$

Tehát a gyenge (1,1)-tulajdonságot is felhasználva alkalmas $C > 0$ konstanssal

$$\int_B (f^*)^p \, d\lambda \le p\lambda(B) \int_0^1 y^{p-1} dy + p \int_1^{+\infty} y^{p-1} \varphi_{f^*}(y) dy \le$$

$$\lambda(B) + Cp \int_1^{+\infty} y^{p-2} dy = \lambda(B) + C \frac{p}{1-p}.$$

Most azt tegyük fel, hogy $0 \ne \|f\|_1$ és legyen $g := \dfrac{f}{\|f\|_1}$. Ekkor $\|g\|_1 = 1$, így

$$\int_B (f^*)^p \, d\lambda = \int_B \left((\|f\|_1 g)^* \right)^p d\lambda = \|f\|_1^p \int_B (g^*)^p \, d\lambda \le \left(\lambda(B) + \frac{Cp}{1-p} \right) \|f\|_1^p,$$

azaz a $C_p := \dfrac{Cp}{1-p}$ konstans eleget tesz a tétel kívánalmainak.

Ha $\|f\|_1 = 0$, akkor $f(x) = 0 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N)$ és ezért $f^*(x) = 0 \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in \mathbf{R}^N)$ is igaz, azaz $\int_B (f^*)^p \, d\lambda = 0$. ■

4.4. Megjegyzések.

i) A 4.2. i) megjegyzést figyelembe véve $C_p := 3^N \dfrac{p}{1-p}$ megfelelő.

ii) Tekintsük a 4. pont bevezetőjében már említett (4.1) függvényt. Ekkor bármely $0 < \delta < 1/e$ esetén

$$\int_\delta^{1/e} f^*(x) dx \ge \frac{1}{4} \ln \ln \frac{1}{\delta},$$

azaz $\int_\delta^{1/e} f^*(x) dx \to +\infty \quad (\delta \to 0)$. Ez azt jelenti, hogy a 4.4. Tétel állítása $p = 1$-re nem igaz.

iii) Legyen $1 \le p < +\infty$. A 4.3. Tételben szereplő U^* operátor *gyengén (p,p)-típusú,* ha van olyan $C_p > 0$ konstans, hogy

$$\lambda\left(\{U^* f > y\}\right) \le \left(\frac{C_p}{y} \|f\|_p \right)^p \quad (y > 0, f \in L^p).$$

Mivel

$$\lambda\left(\{U^* f > y\}\right) \le \int_{\{U^* f > y\}} \left(\frac{U^* f}{y} \right)^p d\lambda \le \frac{1}{y^p} \|U^* f\|_p^p \quad (y > 0, f \in L^p),$$

ezért, ha U^* (p,p)-típusú (azaz alkalmas $B_p > 0$ konstanssal $\|U^* f\|_p \le B_p \|f\|_p$ $(f \in L^p)$), akkor U^* gyengén (p,p)-típusú is.

iv) Világos, hogy a 4.3. Tétel (a bizonyításának az értelemszerű módosításával együtt) igaz marad, ha a tételben L^1 helyett L^p-t, $\|.\|_1$ helyett $\|.\|_p$-t $(1 \le p < +\infty)$, U^* gyenge $(1,1)$-típusa helyett gyenge (p,p)-típust írunk.

v) Az előbb mondottak általánosításaként legyen

$$L^o := \{f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} : f \text{ Lebesgue-mérhető } \}$$

és $1 \le p, q \le +\infty$. A $T : L^p \to L^o$ operátor *(p,q)-típusú,* ha alkalmas $C := C_{p,q} \ge 0$ konstanssal $\|Tf\|_q \le C\|f\|_p \quad (f \in L^p)$. Továbbá, ha $q < +\infty$, akkor T *gyengén (p,q)-típusú,* ha egy $D := D_{p,q} \ge 0$ állandóval

$$\lambda(\{|Tf| > y\}) \le \left(\frac{D}{y}\|f\|_p\right)^q \qquad (f \in L^p).$$

A iii)-ban mondottakkal analóg módon kapjuk, hogy ha a T operátor (p,q)-típusú ($q < +\infty$), akkor T gyengén (p,q)-típusú is.

vi) Nyilvánvaló, hogy az operátorok viselkedésével kapcsolatban eddig mondottak érvényben maradnak akkor is, ha a kiindulásul szolgáló $(\mathbf{R}^N, \Omega, \lambda)$ Lebesgue-féle mértéktér helyett ennek valamely leszűkítését vesszük (azaz $\mathbf{R}^N$ helyett egy $A \in \Omega$ halmazból indulunk ki). Pl. legyen $N := 1$ és $-\infty < a < b < +\infty$, ill. tekintsük az $A := [a,b]$ intervallum feletti Lebesgue-féle mértékstruktúrát. Ekkor $L^p[a,b] \subset L\log^+ L[a,b] \subset L^1[a,b] \quad (1 < p \le +\infty)$. Ui. $1 < p < +\infty$ esetén ez ugyanúgy igazolható, mint a 4.3. v) megjegyzésben. Ha $f \in L^\infty[a,b]$, akkor

$$\int_a^b |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda \le (b-a)\|f\|_\infty \log^+(\|f\|_\infty) < +\infty,$$

azaz $L^\infty[a,b] \subset L\log^+ L[a,b]$ triviális. Ha $f \in L\log^+ L[a,b]$, akkor

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \, d\lambda = \int_{\{|f| \le e\}} |f| \, d\lambda + \int_{\{|f| > e\}} |f| \, d\lambda \le$$

$$e(b-a) + \int_a^b |f| \log^+ \circ |f| \, d\lambda < +\infty,$$

tehát $f \in L^1[a,b]$.

vii) Legyen $f \in L^1[a,b]$ és $\mathcal{I} := \{I \subset [a,b] : I \, \text{intervallum}\}$, ill.

$$Mf(x) := \sup\left\{\frac{1}{|I|}\int_I |f| \, d\lambda : x \in I \in \mathcal{I}\right\} \qquad (x \in [a,b]).$$

Ha $F(x) := f(x) \quad (x \in [a,b])$, $F(x) := 0 \quad (x \in \mathbf{R} \setminus [a,b])$, akkor $F \in L^1$, $\|F\|_p = \|f\|_p \quad (1 \le p \le +\infty)$ és nyilván $Mf(x) \le F^\diamond(x) \quad (x \in [a,b])$, ill. $|f| \le Mf$. Ezért a maximálfüggvényekre vonatkozó fenti tételeink alapján az M (*Hardy-Littlewood*-féle) *maximáloperátor* is gyengén (1,1)-típusú, minden $1 < p \le +\infty$ esetén (p,p)-típusú,

$$\left(\int_a^b (Mf)^q \, d\lambda\right)^{1/q} \le (b - a + C_q)^{1/q}\|f\|_1 \qquad (0 < q < 1)$$

és $\int_a^b Mf\,d\lambda \leq 2(b-a) + C\int_a^b |f| \log^+ \circ |f|\,d\lambda$. Az utóbbi egyenlőtlenség szerint tehát $f \in L\log^+ L[a,b]$ esetén $Mf \in L^1[a,b]$. Érdekes tulajdonsága az M operátornak, hogy $Mf \in L^1[a,b]$ ekvivalens azzal, hogy $f \in L\log^+ L[a,b]$. Igaz ui. az ún. *Stein-tétel*: *ha* $f \in L^1[a,b]$ *és* $Mf \in L^1[a,b]$, *akkor* $f \in L\log^+ L[a,b]$.

Ui.

$$\int_a^b |f| \log^+ \circ |f|\,d\lambda = \int_{\{|f|\geq 1\}} |f(x)| \left(\int_1^{|f(x)|} \frac{1}{y}\,dy \right) dx =$$

$$\int_{\{|f|\geq 1\}} |f(x)| \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} \chi_{(1,|f(x)|)}(y)\,dy \right) dx =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} \left(\int_{\{|f|\geq 1\}} |f(x)| \chi_{(1,|f(x)|)}(y)\,dx \right) dy =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y} \left(\int_{\{|f|>y\}} |f(x)|\,dx \right) dy.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $y \geq \dfrac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|\,dx$ esetén

$$(*) \qquad \int_{\{|f|>y\}} |f(t)|\,dt \leq 2y\lambda\left(\{Mf > y\}\right).$$

Ehhez legyen valamely $x \in [a,b]$ mellett $(I_n(x))$ az az $[a,b]$-beli intervallum-sorozat, amelyre $I_0(x) := [a,b]$, ill. $n \in \mathbf{N}$ esetén $I_{n+1}(x)$ az a fele $I_n(x)$-nek, amelyre $x \in I_{n+1}(x)$. (Ha két ilyen van, akkor az egyik.) Ekkor $|I_n(x)| \to 0$ $(n \to +\infty)$, azaz $\frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} |f(t)|\,dt \to |f(x)| \quad (n \to +\infty, \quad \lambda\text{-m.m. } x \in [a,b])$. Ha $x \in \{|f| > y\}$ ilyen, akkor egyértelműen van olyan $0 < n \in \mathbf{N}$, amellyel az $I := I(x) := I_n(x)$ intervallumra $y < \dfrac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\,dt$ és $\dfrac{1}{|I_k(x)|} \int_{I_k(x)} |f(t)|\,dt \leq y$ $(k = 0, ..., n-1)$. Tehát

$$y < \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\,dt = \frac{2}{|I_{n-1}(x)|} \int_I |f(t)|\,dt \leq \frac{2}{|I_{n-1}(x)|} \int_{I_{n-1}} |f(t)|\,dt \leq 2y.$$

Világos, hogy ha $z \in I(x) \cap \{|f| > y\}$ és $\frac{1}{|I_n(z)|} \int_{I_n(z)} |f(t)|\,dt \to |f(z)|$ $(n \to +\infty)$, akkor $I(z) = I(x)$, ill. legfeljebb megszámlálható sok ilyen $[a_j, b_j] := I_j := I(x)$ páronként diszjunkt intervallummal $\quad (j \in \mathcal{N}$ egy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal) $(a_j, b_j) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \quad (j, l \in \mathcal{N},\ j \neq l)$ és egy $B \subset \{|f| > y\}$, $\lambda(B) = 0$ halmazzal

$$\{|f| > y\} \subset B \cup \left(\cup_{j\in\mathcal{N}} I_j\right).$$

Továbbá $Q := \cup_{j\in\mathcal{N}} I_j \subset \{Mf > y\}$ és

$$\int_Q |f(t)|\,dt = \sum_{j\in\mathcal{N}} \int_{I_j} |f(t)|\,dt \le 2y \sum_{j\in\mathcal{N}} |I_j| = 2y\lambda(Q) \le 2y\lambda\left(\{Mf > y\}\right).$$

Így

$$\int_{\{|f|>y\}} |f(t)|\,dt \le \int_Q |f(t)|\,dt \le 2y\lambda\left(\{Mf > y\}\right).$$

Tehát a fentiek szerint a $q := \dfrac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx$ jelöléssel

$$\int_a^b |f| \log^+ \circ |f|\, d\lambda \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\left(\int_{\{|f|>y\}} |f(x)|\,dx\right) dy =$$

$$\int_1^q \frac{1}{y}\left(\int_{\{|f|>y\}} |f(x)|\,dx\right) dy + \int_q^{+\infty} \frac{1}{y}\left(\int_{\{|f|>y\}} |f(x)|\,dx\right) dy \le$$

$$\int_1^q \frac{1}{y}\left(\int_{\{|f|>y\}} |f(x)|\,dx\right) dy + 2\int_1^{+\infty} \lambda\left(\{Mf > y\}\right) dy \le$$

$$\|f\|_1 \int_1^q \frac{1}{y}\,dy + 2\int_1^{+\infty} \lambda\left(\{Mf > y\}\right) dy \le q\|f\|_1 + 2\|Mf\|_1 < +\infty.$$

A periodikus esetekben gyakran hasznos az M operátor alábbi módosítása. Legyen ehhez a fenti $f \in L^1[a,b]$ függvény esetén

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (a \le x \le b) \\ f(x+b-a) & (2a-b \le x < a) \\ f(x-b+a) & (b < x \le 2b-a) \end{cases}.$$

Világos, hogy $F \in L^1[2a-b, 2b-a]$, $\|F\|_p = 3^{1/p}\|f\|_p \quad (1 \le p < +\infty)$, $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$. Legyen

$$\mathcal{M}f(x) := MF(x) \qquad (a \le x \le b),$$

ekkor az $\mathcal{M}$ *periodikus maximáloperátorra* is igazak az előbb M-ről mondottak.

viii) Az előbbi megjegyzést szem előtt tartva legyen $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy (Lebesgue-szerint) integrálható függvény és tegyük fel, hogy valamilyen (a $[0, +\infty)$ intervallumon) monoton fogyó, páros, szintén L^1-beli $\eta \ge 0$ függvény majorálja $|\Phi|$-t:

$|\Phi| \leq \eta$. Ekkor bármely ($\mathbf{R}$-re 2π-szerint periodikusan kiterjeszthető) $f \in L^1[-\pi,\pi]$ függvényre és λ-m.m. $[-\pi,\pi] \ni x$-re:

$$\sup_n \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) n\Phi(nt)\, dt \right| \leq 4\|\eta\|_1 \mathcal{M}f(x).$$

Ui.

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) n\Phi(nt)\, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| n\eta(nt)\, dt =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} n \int_{\{\pi 2^{-k-1} < |t| \leq \pi 2^{-k}\}} |f(x-t)|\eta(nt)\, dt \leq$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} n\eta(n\pi 2^{-k-1}) \int_{\{|t| \leq \pi 2^{-k}\}} |f(x-t)|\, dt =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Minden itt szereplő k-ra, x-re és n-re

$$\int_{|t| \leq \pi 2^{-k}} |f(x-t)|\, dt = \frac{2\pi}{2^k} \frac{2^k}{2\pi} \int_{|t| \leq \pi 2^{-k}} |f(x-t)|\, dt \leq \frac{2\pi}{2^k} \mathcal{M}f(x),$$

ezért

$$A_k \leq 2\pi 2^{-k} n\eta(n\pi 2^{-k-1}) \mathcal{M}f(x).$$

Összegezve k-szerint

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \leq 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\pi}{2^k} \eta(n\pi 2^{-k-1}) \right) \mathcal{M}f(x).$$

Mivel $t\eta(t) \leq 2\int_{t/2}^{t} \eta(s)\, ds \ \ (t \geq 0)$, ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \leq 8 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{n\pi 2^{-k-1}}^{n\pi 2^{-k}} \eta(s)\, ds \leq 8 \int_{0}^{+\infty} \eta(s)\, ds = 4\|\eta\|_1,$$

amiből az állításunk már nyilvánvaló.

ix) Az $f \mapsto \sup_n \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) n\Phi(nt)\, dt \right|$ maximáloperátor tehát nyilván gyengén (1,1)-típusú és minden $1 < p \leq +\infty$ esetén (p,p)-típusú, mivel $\mathcal{M}$ ilyen. Könnyű megmutatni, hogy tetszőleges P trigonometrikus polinomra λ-m.m. $x \in [-\pi,\pi]$ esetén

$$(**) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) n\Phi(nt)\, dt \to \left(\int \Phi\, d\lambda \right) P(x) \quad (n \to +\infty).$$

Elég ui. mindezt a $P(x) := e^{\imath jx} \quad (j \in \mathbf{Z}, x \in [-\pi, \pi])$ függvényre igazolni, hiszen az $f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)n\Phi(nt)\,dt \quad (x \in [-\pi, \pi])$ leképezés lineáris. Ekkor viszont

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)n\Phi(nt)\,dt = e^{\imath jx} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-n\pi, n\pi)}(t) e^{-\imath jt/n} \Phi(t)\,dt =:$$

$$e^{\imath jx} \int \Phi_n \, d\lambda.$$

Nyilván $|\Phi_n| \leq |\Phi|$ és $\Phi_n(t) \to \Phi(t) \quad (n \to +\infty, \ \ \lambda\text{-m.m. } t \in [-\pi, \pi])$, ezért a Lebesgue-féle konvergencia-tétel miatt $(**)$ már következik.

A trigonometrikus polinomok halmaza azonban ($\|.\|_1$-ban) mindenütt sűrű $L^1[-\pi, \pi]$-ben, tehát a 4.3. Tétel alapján *bármely* $f \in L^1[-\pi, \pi]$ *függvényre is igaz, hogy*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)n\Phi(nt)\,dt \to \left(\int \Phi \, d\lambda \right) f(x) \quad (n \to +\infty)$$

λ-m.m. $x \in [-\pi, \pi]$ esetén.

Pl. a 2.3. Tétel előtt a Fejér-féle $K_n \quad (0 < n \in \mathbf{N})$ magfüggvényekre megfogalmazott egyenlőtlenségek alapján könnyű belátni, hogy egy alkalmas $C > 0$ konstanssal

$$K_n(t) \leq Cn\Phi(nt) \quad (t \in [-\pi, \pi],\ 0 < n \in \mathbf{N}),$$

ahol a Φ páros függvényre

$$\Phi(t) = \chi_{[0,1)}(t) + t^{-2}\chi_{[1,+\infty)}(t) \quad (t \geq 0).$$

Az $f \mapsto \sup |\sigma_n f|$ maximáloperátor tehát a fentiek szerint gyengén (1,1)-típusú és minden $1 < p \leq +\infty$ esetén (p,p)-típusú, ill. bármely $f \in L^1[-\pi, \pi]$ függvényre $\sigma_n f(x) \to f(x) \quad (n \to +\infty, \ \ \lambda\text{-m.m. } x \in [-\pi, \pi])$. (Ez a 2.3. Tétel részbeni megismétlése, ti. most nincs szó a konvergencia-pontokról.)

x) Legyen $f \in L^o, 1 \leq p < +\infty$ és értelmezzük az f függvény $\|f\|_{pw}$ *gyenge p-normáját* a következőképpen:

$$\|f\|_{pw} := \sup\{y(\lambda(\{|f| > y\}))^{1/p} : y \geq 0\}.$$

Ekkor $\|.\|_{pw}$ *kvázi-norma,* azaz bármely $f, h \in L^o$ függvényre

$$\|f\|_{pw} = 0 \iff f = 0\,(\in L^o) \ ; \ \|\alpha f\|_{pw} = |\alpha| \|f\|_{pw} \ \ (\alpha \in \mathbf{R});$$

$$\|f + h\|_{pw} \leq 2(\|f\|_{pw} + \|h\|_{pw}).$$

Csak az utolsó (kvázi) *háromszögegyenlőtlenség* igényel különösebb magyarázatot: $|f+h| \le |f| + |h|$ miatt

$$\{|f+h| > y\} \subset \{|f| > y/2\} \cup \{|h| > y/2\} \qquad (y \ge 0),$$

azaz

$$(\lambda(\{|f+h| > y\}))^{1/p} \le (\lambda(\{|f| > y/2\}) + \lambda(\{|h| > y\}))^{1/p} \le$$

$$(\lambda(\{|f| > y/2\}))^{1/p} + (\lambda(\{|h| > y\}))^{1/p}.$$

Így

$$\|f+h\|_{pw} = \sup\{y(\lambda(\{|f+h| > y\}))^{1/p} : y \ge 0\} \le$$

$$2\sup\left\{\frac{y}{2}(\lambda(\{|f| > y/2\}))^{1/p} : y \ge 0\right\} +$$

$$2\sup\left\{\frac{y}{2}(\lambda(\{|h| > y/2\}))^{1/p} : y \ge 0\right\} = 2(\|f\|_{pw} + \|h\|_{pw}).$$

Az v) megjegyzésben szereplő T operátor pontosan akkor gyengén (p,q)-típusú $(1 \le q < +\infty)$, ha $\|Tf\|_{qw} \le D\|f\|_p \quad (f \in L^p)$. Ha

$$L^p_w := \{f \in L^o : \|f\|_{pw} < +\infty\},$$

akkor $L^p \subset L^p_w$, ui. $f \in L^p$ esetén

$$y\,(\lambda(\{|f| > y\}))^{1/p} = y\,(\lambda(\{|f|^p > y^p\}))^{1/p} \le$$

$$y\left(\int \frac{|f|^p}{y^p}\,d\lambda\right)^{1/p} = \|f\|_p \quad (y > 0),$$

azaz $\|f\|_{pw} \le \|f\|_p < +\infty$.

xi) A XX. századi matematika egyik legnagyobb hatású eredménye a *Carleson-Hunt-tétel* (L. Carleson (1966), R. Hunt (1967)), amely egy akkor mintegy 50 éves nyitott problémára, az ún. *Luzin-sejtésre* adott pozitív választ. Ennek a megfogalmazásához tekintsünk egy $f \in L^1[0, 2\pi]$ függvényt és legyenek a_k, b_k-k $\quad (k \in \mathbf{N})$ az f *trigonometrikus Fourier-együtthatói*:

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\ ,$$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\ ,\ b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad (0 < k \in \mathbf{N}).$$

Legyen továbbá $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ az *n-edik trigonometrikus Fourier-részletösszeg-operátor,* azaz

$$S_n f(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ha $Sf := \sup_n |S_n f|$, akkor bármely $1 < p < +\infty$ mellett az S maximál-operátor (p, p)-típusú. Mivel a trigonometrikus polinomok $\mathcal{T}$ halmaza ($\|.\|_q$-normában) sűrű $L^q[0, 2\pi]$-ben $(1 \le q < +\infty)$ és $\lim_{n\to\infty} S_n t(x) = t(x) \quad (t \in \mathcal{T}, x \in [0, 2\pi])$ nyilván igaz, ezért tetszőleges $f \in L^p[0, 2\pi] \quad (1 < p \le +\infty)$ függvényre is fennáll a $\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x) \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in [0, 2\pi])$ pontonkénti konvergencia. Ennek mintegy ellenpontjaként jóval a Carleson-tétel előtt ismert volt már a híres *Kolmogorov-tétel,* miszerint van olyan $f \in L^1[0, 2\pi]$ függvény, hogy λ-m.m. $x \in [0, 2\pi]$ esetén az $(S_n f(x))$ sorozat divergens (A. N. Kolmogorov, (1923)), sőt, hogy az $(S_n f(x))$ sorozat minden $x \in [0, 2\pi]$ esetén divergens (A. N. Kolmogorov, (1926)).

xii) A Carleson-Hunt-tételnél jóval előbb ismert volt, hogy az $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátor-sorozat *egyenletesen gyengén (1,1)-típusú* és (2,2)-típusú, azaz van olyan $C > 0$ abszolút konstans, amellyel

$$\lambda(\{|S_n f| > y\}) \le \frac{C}{y} \|f\|_1 \qquad (f \in L^1[0, 2\pi], n \in \mathbf{N})$$

és

$$\|S_n f\|_2 \le C \|f\|_2 \qquad (f \in L^2[0, 2\pi], n \in \mathbf{N}).$$

Innen az ún. *Marcinkiewicz-féle interpolációs tétel* (ld. 5. pont) alapján az adódik, hogy az $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat *egyenletesen (p, p)-típusú* $\quad (1 < p \le 2)$, azaz minden $1 < p \le 2$ esetén egy alkalmas $C_p > 0$ (csak p-től függő) konstanssal

$$\|S_n f\|_p \le C_p \|f\|_p \qquad (f \in L^p[0, 2\pi], n \in \mathbf{N}).$$

Felhasználva az L^q-terek $\quad (1 \le q < +\infty)$ ún. *duálisára* vonatkozó klasszikus tételt (ld. 7. pont) - nevezetesen, hogy minden $L^q[0, 2\pi] \ni h$-ra

$$\|h\|_q = \sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} hg \, d\lambda \right| : g \in L^s[0, 2\pi], \|g\|_s \le 1 \right\}$$

(ahol $1 \le s \le +\infty$ és $1/p + 1/s = 1$) -, azt kapjuk, hogy $f \in L^r[0, 2\pi]$ $(2 < r < +\infty)$ esetén

$$\|S_n f\|_r = \sup \left\{ \left| \int_0^{2\pi} (S_n f) g \, d\lambda \right| : g \in L^p[0, 2\pi], \|g\|_p \le 1 \right\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

(ahol $1 < p < 2$ és $1/p + 1/r = 1$). Mivel

$$\int_0^{2\pi}(S_nf)g\,d\lambda=\int_0^{2\pi}(S_ng)f\,d\lambda,$$

ezért a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\left|\int_0^{2\pi}(S_nf)g\,d\lambda\right|=\left|\int_0^{2\pi}(S_ng)f\,d\lambda\right|\le\|f\|_r\|S_ng\|_p\le$$

$$C_p\|f\|_r\|g\|_p\le C_p\|f\|_r,$$

ha $g\in L^p[0,2\pi]$ és $\|g\|_p\le 1$. Tehát $\|S_nf\|_r\le C_p\|f\|_r\quad(f\in L^r[0,2\pi],n\in\mathbf{N})$, azaz az $S_n\quad(n\in\mathbf{N})$ sorozat egyenletesen (r,r)-típusú is.

xiii) Az előbbi megjegyzésben vázolt *dualitási módszerrel* azt kaptuk tehát, hogy az $S_n\quad(n\in\mathbf{N})$ sorozat egyenletesen (p,p)-típusú, ha $1<p<+\infty$:

$$\|S_nf\|_p\le C_p\|f\|_p\qquad(f\in L^p[0,2\pi],n\in\mathbf{N}).$$

xiv) Világos, hogy ha t egy trigonometrikus polinom, akkor $S_nt=t\quad(\mathbf{N}\ni n\ge m)$ egy alkalmas $m\in\mathbf{N}$ mellett. Legyen $f\in L^p[0,2\pi]\quad(1<p<+\infty)$, $\varepsilon>0$ és t olyan trigonometrikus polinom, amelyre $\|f-t\|_p<\varepsilon$. Ekkor elég nagy $\mathbf{N}\ni n$-re

$$\|S_nf-f\|_p\le\|S_nf-t\|_p+\|t-f\|_p=\|S_n(f-t)\|_p+\|f-t\|_p\le$$

$$(C_p+1)\|f-t\|_p<(C_p+1)\varepsilon,$$

tehát $\lim(\|S_nf-f\|_p)=0$. Ez más szóval azt jelenti, hogy bármely $f\in L^p[0,2\pi]$ függvény

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\qquad(x\in[0,2\pi])$$

Fourier-sora $\|.\|_p$-ban f-hez konvergál, ha $1<p<+\infty$. Röviden: az $1,\cos(kx),\sin(kx)\quad(0<k\in\mathbf{N},\ x\in[0,2\pi])$ *trigonometrikus rendszer* bázis az $(L^p[0,2\pi],\|.\|_p)$ normált térben (*Schauder-bázis*).

xv) Megmutatható, hogy $p\in\{1,+\infty\}$ esetén a trigonometrikus rendszer nem Schauder-bázis $(L^p[0,2\pi],\|.\|_p)$-ben. (Sőt, $(L^\infty[0,2\pi],\|.\|_\infty)$-ben nem is létezik Schauder-bázis.) A xiv) megjegyzésben röviden említett módszer egy sokkal általánosabb, a funkcionálanalízisből jól ismert bizonyítási eljárás, ill. tétel (az ún. *Banach-Steinhaus-tétel*) speciális esete.

xvi) Legyen (X,Ω,μ) egy valószínűségi mértéktér (*Kolmogorov-mező*), $\mathcal{A}_n\subset\Omega$ $(n\in\mathbf{N})$ olyan σ-algebra-sorozat, amelyre $\mathcal{A}_n\subset\mathcal{A}_{n+1}\ (n\in\mathbf{N})$ és $\Omega=\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n$ teljesül. Jelöljük E_n-nel $(n\in\mathbf{N})$ az $\mathcal{A}_n$ σ-algebrára vonatkozó feltételes várható érték operátort. Az $f_n\in L^1(X)\quad(n\in\mathbf{N})$ sorozat egy *martingál*, ha $f_n\quad(n\in\mathbf{N})$

mérhető $\mathcal{A}_n$-re nézve (azaz bármely $B \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazra $f_n^{-1}[B] \in \mathcal{A}_n$) és $E_n f_{n+1} = f_n \quad (n \in \mathbf{N})$. Világos, hogy tetszőleges $f \in L^1(X)$ esetén $f_n := E_n f$ $(n \in \mathbf{N})$ martingál.

Ha pl. $X := [0,1)$, Ω az X halmaz Lebesgue-mérhető részhalmazainak a σ-algebrája, $\mu(A) := \lambda(A) \quad (A \in \Omega)$, akkor legyen $\mathcal{A}_n \quad (n \in \mathbf{N})$ az

$$I_{nk} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \qquad (k = 0, ..., 2^n - 1)$$

intervallumok által generált legszűkebb (*diadikus*) σ-algebra. Könnyen belátható, hogy bármely $f \in L^1[0,1)$ esetén

$$E_n f(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} f \, d\lambda \qquad (x \in [0,1)),$$

ahol $I_n(x) := I_{nk}$ és $x \in I_{nk} \quad (k = 0, ..., 2^n - 1)$. Ezért tetszőleges $f \in L^1[0,1)$ függvényre az

$$f_n(x) := \frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} f \, d\lambda \qquad (x \in [0,1), n \in \mathbf{N})$$

előírással értelmezett (f_n) sorozat egy (*diadikus*) martingál. Ekkor (ld. vii))

$$M_d f := \sup_n |f_n| \le Mf,$$

azaz bármely $1 \le p \le +\infty$ és $y > 0$ esetén $\|M_d f\|_p \le \|Mf\|_p$, ill. $\{M_d f > y\} \subset \{Mf > y\}$ miatt $\lambda(\{M_d f > y\}) \le \lambda(\{Mf > y\})$. A vii) megjegyzés alapján tehát az $f \mapsto M_d f$ leképezés gyengén (1,1)-típusú és minden $1 < p \le +\infty$ mellett (p,p)-típusú.

Mindez speciális esete egy általános martingál maximál-tételnek. Legyen ui. most $f_n \in L^1(X) \quad (n \in \mathbf{N})$ egy tetszőleges martingál,

$$\mathbf{M}f := \sup_n |f_n| \ , \ \ \|f\|_p := \sup_n \|f_n\|_p \quad (1 \le p \le +\infty).$$

Ekkor alkalmas $C > 0$ és (csak p-től függő) $C_p > 0$ konstansokkal igaz a *Doob-egyenlőtlenség:*

$$\mu\left(\{\mathbf{M}f > y\}\right) \le \frac{C}{y} \|f\|_1 \qquad (y > 0),$$

ill.

$$\|\mathbf{M}f\|_p \le C_p \|f\|_p \qquad (1 < p \le +\infty).$$

Belátható, hogy ha $1 < p < +\infty$ és $\|f\|_p < +\infty$, akkor μ-m.m. $x \in X$ esetén is és $\|.\|_p$-normában is az $(f_n(x))$ sorozat konvergens, az $F(x) := \lim(f_n(x)) \quad (\mu$-m.m.

$x \in X$) határértékre pedig $F \in L^p(X)$, $f_n = E_n F \quad (n \in \mathbf{N})$ igaz. (Ha $p = 1$, akkor az előbbiekből a μ-m.m. értelemben vett konvergencia megmarad.)

xvii) Tekintsük az előző megjegyzésbeli $L^1[0,1)$ Lebesgue-teret, ill. az ott definiált $(\mathcal{A}_n)$ diadikus σ-algebra-sorozatot, ill. (f_n) diadikus martingált. Legyen $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a következő, 1-szerint periodikus függvény:

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2) \\ \\ -1 & (1/2 \le x < 1). \end{cases}$$

Definiáljuk ezek után az $r_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Rademacher-függvényeket* az alábbiak szerint:

$$r_n(x) := r(2^n x) \qquad (x \in [0,1)).$$

Értelmezzük a Rademacher-függvények *szorzatrendszerét,* az ún. *Walsh-rendszert* a következőképpen: ha $\mathbf{N} \ni n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k \quad (n_k \in \{0,1\}, k \in \mathbf{N})$ (az n szám *diadikus kifejtése*), akkor

$$w_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}.$$

A Walsh-rendszer *ortonormált,* azaz

$$\int_0^1 w_n w_k \, d\lambda = \begin{cases} 0 & (n \ne k) \\ \\ 1 & (n = k) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ha $f \in L^1[0,1)$, akkor

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f w_n \, d\lambda \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az f függvény n-edik *Walsh-Fourier-együtthatója,*

$$W_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) w_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

pedig az n-edik *Walsh-Fourier-részletösszege.* Belátható, hogy

$$W_{2^n} f(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} f \, d\lambda \qquad (x \in [0,1), n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $(W_{2^n} f)$ sorozat nem más, mint az előző megjegyzésben értelmezett (f_n) diadikus martingál.

Ha

$$Wf := \sup_n |W_n f| \qquad (f \in L^1[0,1)),$$

akkor a W maximáloperátorra igaz a Carleson-tétel megfelelője: minden $1 < p < +\infty$ esetén (p, p)-típusú, ill. $\lim(W_n f(x)) = f(x)$ (λ-m.m. $x \in [0, 1), f \in L^p[0, 1)$ $(1 < p \leq +\infty)$) (P. Billard (1966-67), ha $p = 2$, ill. P. Sjölin (1969), ha $p > 1$). Igaz a Kolmogorov-féle divergencia-tétel megfelelője is, nevezetesen: van olyan $f \in L^1[0, 1)$ függvény, amelyre $(W_n f(x))$ λ-m.m. $x \in [0, 1)$ helyen divergál (E. M. Stein (1961)), ill. minden $x \in [0, 1)$ helyen divergál (Schipp Ferenc (1969)).

A xi) - xv) megjegyzések Walsh-analogonjai is érvényben maradnak, ha azokban $L^p[0, 2\pi]$ helyett $L^p[0, 1)$-et $(1 \leq p \leq +\infty)$, a trigonometrikus rendszer helyett a (w_n) Walsh-rendszert, ill. a trigonometrikus polinomok halmaza helyett a *Walsh-polinomok* halmazát írjuk, azaz a

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k w_k : n \in \mathbf{N}, \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R} \right\}$$

halmazt.

5. Interpoláció

Tegyük fel, hogy (X, Ω, μ) és (Y, Θ, ν) egy-egy mértéktér. Jelöljük $\mathcal{F}_\Omega$-val az Ω-mérhető $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények, $\mathcal{F}_\Theta$-val a Θ-mérhető $f : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények halmazát. Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathcal{F}_\Omega$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Azt mondjuk, hogy a $T : D \to \mathcal{F}_\Theta$ operátor (p, p)*-típusú* (vagy *erősen* (p, p)*-típusú)*, ha létezik olyan $C \geq 0$ konstans, amellyel $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ $(f \in D)$ (ld. 4. 4. v) Megjegyzés). Legyen ekkor

$$\|T\|_{(p,p)} := \inf\{C \geq 0 : \|Tf\|_p \leq C\|f\|_p \quad (f \in D)\}.$$

Továbbá legyen most $\varphi_{Tf}(t) := \nu\left(\{|Tf| > t\}\right)$ $(f \in D, t > 0)$. A $p < +\infty$ esetben azt mondjuk, hogy T *gyengén* (p, p)*-típusú,* ha létezik olyan $B \geq 0$ konstans, hogy $\varphi_{Tf}(t) \leq B^p t^{-p} \|f\|_p^p$ $(f \in D, t > 0)$. Ez utóbbi becslésben írható B konstansok halmazának az infimumát jelöljük $\|T\|_{(p)}$-vel, azaz

$$\|T\|_{(p)} := \inf\{B \geq 0 : \varphi_{Tf}(t) \leq B^p t^{-p} \|f\|_p^p \;\; (f \in D, t > 0)\}.$$

Azt mondjuk, hogy az előbbi T *gyengén* (∞, ∞)*-típusú*, ha (∞, ∞)-típusú; ekkor $\|T\|_{(\infty)} := \|T\|_{(\infty,\infty)}$.

A következő jelöléseket fogjuk még használni: valamely Θ-mérhető $f : Y \to \mathbf{R}$ függvény és $\mathbf{R} \ni t \geq 0$ esetén

$$f_t(y) := \begin{cases} f(y) & (|f(y)| \leq t) \\ & \\ 0 & (|f(y)| > t) \end{cases} ; \quad f^t(y) := \begin{cases} f(y) & (|f(y)| > t) \\ & \\ 0 & (|f(y)| \leq t) \end{cases} \qquad (y \in Y).$$

5.1. Tétel (Marcinkiewicz). *Legyen* $1 < r < +\infty, \emptyset \neq D \subset \mathcal{F}_\Omega$, $T : D \to \mathcal{F}_\Theta$ *és tegyük fel, hogy* μ σ*-véges, valamint*

i) $f_t, f^t \in D, f + g \in D \quad (f, g \in D, t \geq 0)$;

ii) T *szublineáris, azaz* $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad (f, g \in D)$;

iii) T *gyengén* (r, r)*-típusú és gyengén* $(1, 1)$*-típusú.*

Ekkor bármely $1 < p < r$ *mellett a* T *operátor* (p, p)*-típusú és*

$$\|T\|_{(p,p)}^p \leq p \left(\frac{2\|T\|_{(1)}}{p-1} + \frac{(2\|T\|_{(r)})^r}{r-p} \right).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $f \in D, t > 0$ esetén $f = f_t + f^t$, azaz $|Tf| \leq |Tf_t| + |Tf^t|$. Tehát $\varphi_{Tf}(t) \leq \varphi_{Tf^t}(t/2) + \varphi_{Tf_t}(t/2)$. Ezért a tétel iii) feltételét f^t-re, ill. f_t-re alkalmazva

$$\varphi_{Tf}(t) \leq \frac{2\|T\|_{(1)}}{t} \int |f^t| d\mu + \frac{(2\|T\|_{(r)})^r}{t^r} \int |f_t|^r d\mu =$$

$$\frac{2\|T\|_{(1)}}{t} \int_{X^t} |f| d\mu + \frac{(2\|T\|_{(r)})^r}{t^r} \int_{X_t} |f|^r d\mu,$$

ahol $X^t := \{|f| > t\}$, $X_t := \{|f| \leq t\}$. Tehát (ld. 4.1. Lemma)

$$\|Tf\|_p^p = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \varphi_{Tf}(t) dt \leq$$

$$2p\|T\|_{(1)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \frac{1}{t} \int_{X^t} |f| d\mu dt + p \left(2\|T\|_{(r)}\right)^r \int_0^{+\infty} t^{p-1} \frac{1}{t^r} \int_{X_t} |f|^r d\mu dt =$$

$$2p\|T\|_{(1)} \int_0^{+\infty} t^{p-2} \int |f(x)| \chi_{X^t}(x) d\mu(x) dt +$$

$$p \left(2\|T\|_{(r)}\right)^r \int_0^{+\infty} t^{p-r-1} \int |f(x)|^r \chi_{X_t}(x) d\mu(x) dt.$$

Innen a szukcesszív integrálás elve alapján

$$\|Tf\|_p^p \leq 2p\|T\|_{(1)} \int |f(x)| \int_0^{+\infty} t^{p-2} \chi_{X^t}(x) dt d\mu(x) +$$

$$p \left(2\|T\|_{(r)}\right)^r \int |f(x)|^r \int_0^{+\infty} t^{p-r-1} \chi_{X_t}(x) dt d\mu(x) =$$

$$2p\|T\|_{(1)} \int |f(x)| \int_0^{|f(x)|} t^{p-2} dt d\mu(x) + p \left(2\|T\|_{(r)}\right)^r \int |f(x)|^r \int_{|f(x)|}^{+\infty} t^{p-r-1} dt d\mu(x) =$$

$$2p\|T\|_{(1)}\int|f(x)|\frac{|f(x)|^{p-1}}{p-1}d\mu(x)+p\left(2\|T\|_{(r)}\right)^r\int|f(x)|^r\frac{|f(x)|^{p-r}}{r-p}d\mu(x),$$

ami már a tételünk bizonyítását jelenti. ■

5.1. Megjegyzések.

i) A fenti tétel bizonyításában a μ mérték σ-végességét a szukcesszív integrálással kapcsolatos Fubini-tétel alkalmazásakor használtuk ki.

ii) Kihasználtuk továbbá a

$$(0,+\infty)\times X\ni(t,x)\mapsto t^{p-2}|f(x)|\chi_{X^t},$$

$$(0,+\infty)\times X\ni(t,x)\mapsto t^{p-r-1}|f(x)|^r\chi_{X_t}$$

leképezések (könnyen ellenőrizhető) mérhetőségét (a $(0,+\infty)$ feletti Lebesgue-mérték és a μ mérték által meghatározott szorzatmértékre nézve).

iii) A valamilyen $1\le q\le+\infty$ mellett fennálló $\|T\|_{(q,q)}<+\infty$ erős tulajdonságból a $\|T\|_{(q)}<+\infty$ gyenge tulajdonság triviális módon következik.

5.2. Tétel (Marcinkiewicz). *Legyen* $1\le r<+\infty,\emptyset\ne D\subset\mathcal{F}_\Omega$, $T:D\to\mathcal{F}_\Theta$ *és tegyük fel, hogy* μ σ*-véges, valamint*

i) $f_t,f^t\in D, f+g\in D\ \ (f,g\in D,t\ge 0)$;

ii) T *szublineáris, azaz* $|T(f+g)|\le|Tf|+|Tg|\ \ (f,g\in D)$;

iii) T *gyengén* (r,r)*-típusú és* (∞,∞)*-típusú.*

Ekkor bármely $r<p<+\infty$ *mellett a* T *operátor* (p,p)*-típusú és*

$$\|T\|_{(p,p)}^p\le\frac{p2^p\|T\|_{(r)}^r\|T\|_{(\infty,\infty)}^{p-r}}{p-r}.$$

Bizonyítás. Legyen $f\in D,t>0$ és (ami nyilván feltehető) $q:=\|T\|_{(\infty,\infty)}>0$. Ekkor $f=f_{t/(2q)}+f^{t/(2q)}$, ill. $\|Tf_{t/(2q)}\|_\infty\le q\|f_{t/(2q)}\|_\infty\le t/2$, azaz $\varphi_{Tf_{t/(2q)}}(t/2)=0$. Mivel

$$\varphi_{Tf}(t)\le\varphi_{Tf_{t/(2q)}}(t/2)+\varphi_{Tf^{t/(2q)}}(t/2)=\varphi_{Tf^{t/(2q)}}(t/2),$$

ezért

$$(*)\qquad \varphi_{Tf}(t)\le\frac{\|T\|_{(r)}^r2^r}{t^r}\int_{X^{t/(2q)}}|f|^rd\mu$$

és így

$$\|Tf\|_p^p=p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\varphi_{Tf}(t)dt\le p\|T\|_{(r)}^r2^r\int_0^{+\infty}t^{p-r-1}\int|f(x)|^r\chi_{X^{t/(2q)}}(x)d\mu(x)dt=$$

$$p\|T\|_{(r)}^r 2^r \int |f(x)|^r \int_0^{2q|f(x)|} t^{p-r-1}dtd\mu(x).$$

Innen a tétel valamennyi állítása már nyilván következik. ■

5.2. Megjegyzések.

i) Nevezzük a T operátort (p,q)-*típusúnak* $(1 \le p,q \le +\infty)$, ha alkalmas $C \ge 0$ konstanssal $\|Tf\|_q \le C\|f\|_p \quad (f \in D)$; hasonlóan, a T *gyengén* (p,q)-*típusú*, ha van olyan $B \ge 0$ konstans, amellyel $\varphi_{Tf}(t) \le \left(Bt^{-1}\|f\|_p\right)^q \quad (f \in D, t > 0, q < +\infty)$, ill. *gyengén* (p,∞)-*típusú*, ha (p,∞)-típusú (ld. 4. 4. v) Megjegyzés).

ii) Megmutatható, hogy ha $D \subset L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ és az 5.2. Tétel iii) feltétele úgy módosul, hogy a T operátor gyengén (p_i,q_i)-típusú $(1 \le p_i, q_i \le +\infty,\ p_i \le q_i\ (i=0,1), q_0 \ne q_1)$, akkor bármely $0 < t < 1$ esetén T (p,q)-típusú, ahol

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \ \ , \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

iii) A ii) megjegyzésben szereplő módosított iii) feltételt geometriailag a következőképpen szemléltethetjük: legyen $\mathcal{H}$ az $\mathbf{R}^2$ síkon a $(0,0)$, $(1,0)$ és az $(1,1)$ pontok, mint csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszög-lemez és jelöljük a_i-vel az $a_i := (1/p_i, 1/q_i) \quad (i=0,1)$ (nyilván $\mathcal{H}$-beli) pontokat. Ekkor a ii) megjegyzésbeli p,q-val az $(1/p,1/q)$ pont az a_0, a_1 pontok által meghatározott (nyílt) szakaszon van és ennek a szakasznak minden pontja ilyen.

iv) Ha a ii) megjegyzésben D altér is, a T operátor pedig lineáris és (erősen) (p_i,q_i)-típusú $(1 \le p_i, q_i \le +\infty) \quad (i=0,1)$, akkor az említett megjegyzésben elhagyható a $p_i \le q_i \quad (i=0,1)$ feltétel (*Riesz-Thorin-tétel*). Igaz marad az előbbi geometriai szemléltetés is azzal, hogy most $a_i \in [0,1] \times [0,1] \quad (i=0,1)$. Az is belátható továbbá, hogy a ii)-beli paraméterekkel $\|Tf\|_q \le M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_p \quad (f \in D)$, ahol az M_i konstansok eleget tesznek a $\|Tf\|_{q_i} \le M_i\|f\|_{p_i} \quad (f \in D, i=0,1)$ egyenlőtlenségeknek.

v) A Riesz-Thorin-tétel alkalmazásaként mutassuk meg, hogy igaz a *Hausdorff-Young-egyenlőtlenség*: *legyen* $1 \le p \le 2$, $2 \le q \le +\infty$ *és* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Ekkor bármely* $f \in L^p[0,2\pi]$ *függvény* $\hat{f}(n) \quad (n \in \mathbf{Z})$ *trigonometrikus Fourier-együtthatóira* $\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^q\right)^{1/q} \le \|f\|_p$.

Valóban, az $\hat{f} := (\hat{f}(n), n \in \mathbf{Z})$ jelöléssel élve $\|\hat{f}\|_{\ell_2} = \|f\|_2$, ha $f \in L^2[0,2\pi]$. Ugyanakkor világos, hogy $\|\hat{f}\|_{\ell_\infty} \le \|f\|_1 \quad (f \in L^1[0,2\pi])$. Ezért a iv) megjegyzésben írhatjuk azt, hogy $(p_0,q_0) := (2,2)$, ill. $(p_1,q_1) := (1,+\infty)$. Ekkor az v)-ben kapott p,q „kitevőkre" könnyen ellenőrizhető, hogy $p^{-1}+q^{-1} = 1$, továbbá $M_0 = M_1 = 1$.

vi) Legyen $1 \le p < q < +\infty$, ekkor az

$$L^p(\mu) + L^q(\mu) := \{g + h : g \in L^p(\mu), h \in L^q(\mu)\}$$

(nyilván) vektortér Banach-tér lesz a következő normával:

$$\|f\| := \inf\{\|g\|_p + \|h\|_q : g \in L^p(\mu), h \in L^q(\mu), f = g + h\}$$

$(f \in L^p(\mu) + L^q(\mu))$. Hasonlóan, az $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ vektortér Banach-tér az

$$\|f\| := \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\} \qquad (f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu))$$

normával. Emlékeztetünk arra, hogy

- véges μ mérték esetén $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$, azaz ekkor $L^p(\mu) + L^q(\mu) = L^p(\mu)$ és $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) = L^q(\mu)$;
- bármely μ mérték mellett $L^r(\mu) \subset L^p(\mu) + L^q(\mu) \quad (p \le r \le q)$.

vii) Az 5.2. Tétel bizonyításában szereplő $(*)$ egyenlőtlenséget $r = 1$ esetén alkalmazva azt kapjuk, hogy ha az említett tételbeli T operátor gyengén (1,1)-típusú és (∞,∞)-típusú, akkor az $\alpha := 2\|T\|_{(1)}$, $\beta := 2\|T\|_{(\infty,\infty)}$ jelölésekkel

$$(**) \qquad \nu(\{|Tf| > t\}) \le \frac{\alpha}{t} \int_{\{|f|>t/\beta\}} |f|\, d\mu \qquad (t > 0).$$

Nem nehéz belátni, hogy ez a következtetés fordítva is igaz: *ha valamilyen* $\alpha, \beta > 0$ *együtthatókkal* $(**)$ *fennáll, akkor* T *gyengén (1,1)-típusú és* (∞,∞)*-típusú.*

Legyen ui. $f \in L^1(\mu)$, akkor

$$\nu(\{|Tf| > t\}) \le \frac{\alpha}{t} \int |f|\, d\mu = \frac{\alpha}{t} \|f\|_1 \qquad (t > 0),$$

azaz T gyengén (1,1)-típusú. Ha pedig $f \in L^\infty(\mu)$ és $t \ge \beta \|f\|_\infty$, akkor nyilván $\mu(\{|f| > t/\beta\}) = 0$, azaz

$$\frac{\alpha}{t} \int_{\{|f|>t/\beta\}} |f|\, d\mu = 0.$$

Következésképpen $\nu(\{|Tf| > t\}) = 0$, így $Tf \in L^\infty(\nu)$ és $\|Tf\|_\infty \le \beta \|f\|_\infty$.

viii) Tegyük fel, hogy az előbbi megjegyzésben szereplő T operátor gyengén (1,1)-típusú és (∞,∞)-típusú. Ekkor *bármely* $B \in \Theta$ *halmaz és* $f \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ *függvény esetén*

$$\int_B |Tf|\, d\nu \le (\beta + 1)\nu(B) + \alpha \int |f| \log^+ \circ |f|\, d\mu$$

(ahol α, β-t illetően ld. az előbbi megjegyzést).

Írjuk fel ui. ekkor a bal oldalon álló integrált a következő alakban:

$$\int_B |Tf|\, d\nu = \int_{B \cap \{|Tf| \le 1\}} |Tf|\, d\nu + \int_{B \cap \{|Tf| > 1\}} |Tf|\, d\nu \le \nu(B) + \int_C |Tf|\, d\nu,$$

ahol $C := B\cap\{|Tf| > 1\}$. A $(**)$ egyenlőtlenséget is felhasználva azt mondhatjuk, hogy

$$\int_C |Tf|\,d\nu = \int |Tf|\chi_C\,d\nu = \int\left(\int_0^{|Tf(x)|\chi_C(x)} 1\,dt\right)d\nu(x) =$$

$$\int\left(\int_0^{+\infty}\chi_{[0,|Tf(x)|\chi_C(x))}(t)\,dt\right)d\nu(x) =$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int\chi_{[0,|Tf(x)|\chi_C(x))}(t)\,d\nu(x)\right)dt =$$

$$\int_0^{+\infty}\nu(\{|Tf|\chi_C > t\})\,dt = \int_0^{+\infty}\nu\left(\{|Tf| > t\}\cap C\right)\,dt =$$

$$\int_0^{\beta}\nu\left(\{|Tf| > t\}\cap C\right)\,dt + \int_\beta^{+\infty}\nu\left(\{|Tf| > t\}\cap C\right)\,dt \le$$

$$\beta\nu(B) + \int_\beta^{+\infty}\nu(\{|Tf| > t\})\,dt \le$$

$$\beta\nu(B) + \alpha\int_\beta^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\int_{\{|f|>t/\beta\}}|f|\,d\mu\right)dt,$$

ahol az utóbbi integrálra helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\int_\beta^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\int_{\{|f|>t/\beta\}}|f|\,d\mu\right)dt = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\int|f(x)|\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,d\mu(x)\right)dt =$$

$$\int|f(x)|\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dt\right)d\mu(x) = \int|f(x)|\left(\int_1^{|f(x)|}\frac{1}{t}\,dt\right)d\mu(x) =$$

$$\int|f(x)|\log^+(|f(x)|)\,d\mu(x).$$

Innen a bizonyítandó állítás már nyilván következik.

ix) Ha pl. (valamilyen $N\in\mathbf{N}$ mellett) $Tf := f^*\quad(f\in L^1(\lambda))$, akkor a 4.1. Tétel szerint $\|T\|_{(1)}\le 3^N,\ \|T\|_{(\infty,\infty)}\le 1$, azaz a fentiek alapján

$$\int_B f^*\,d\lambda \le 3\lambda(B) + 2\cdot 3^N\int|f|\log^+\circ|f|\,d\lambda\quad((f\in L^1(\lambda)).$$

Ez a lényegét tekintve nem más, mint a 4.2. Tétel.

6. Calderon-Zygmund-felbontás

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < y \in \mathbf{R}$ és az $f \in L^1[a,b]$ függvényről tegyük fel, hogy $(b-a)^{-1}\int |f|d\lambda \le y$. Ha $J_0 := \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $J_1 := [\frac{a+b}{2}, b]$, akkor

$$\frac{1}{b-a}\int |f|d\lambda = \frac{1}{2|J_0|}\int_{J_0} |f|d\lambda + \frac{1}{2|J_1|}\int_{J_1} |f|d\lambda =: \frac{A+B}{2} \le y,$$

azaz $\min\{A,B\} \le y$. Tegyük fel, hogy $C \in \{A,B\}$ és $C = |J_2|^{-1}\int_{J_2}|f|d\lambda$, ahol $J_2 \in \{J_0, J_1\}$ a megfelelő intervallum. Világos, hogy $C > y$ esetén

$$y < \frac{1}{|J_2|}\int_{J_2} |f|d\lambda \le \frac{2}{b-a}\int |f|d\lambda \le 2y.$$

Jelöljük ekkor I-vel a J_2 intervallum belsejét. Ha $C \le y$, akkor J_2-t felezzük meg, ill. ismételjük meg a fentieket $[a,b]$ helyett J_2-vel és i.t. Legyen $\mathcal{I}$ az így definiált eljárásban kapott I nyílt intervallumok halmaza. Ha tehát $\mathcal{I} \ne \emptyset$ és $I \in \mathcal{I}$, akkor

$$y < \frac{1}{|I|}\int_I |f|d\lambda \le 2y.$$

Továbbá bármely $I, I^* \in \mathcal{I}$, $I \ne I^*$ esetén $I \cap I^* = \emptyset$.

Az $F := [a,b] \setminus \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$ halmaz λ-m.m. $x \in F$ pontjára igaz a következő: van olyan (J_n) intervallumsorozat, hogy $J_{n+1} \subset J_n$, $x \in J_n \quad (n \in \mathbf{N})$, $|J_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$ és $|J_n|^{-1}\int_{J_n}|f|d\lambda \le y \quad (n \in \mathbf{N})$. Innen az integrálfüggvények differenciálhatósága (ld. 2. pont) alapján az következik, hogy $|f(x)| \le y \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in F)$.

Tegyük fel, hogy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in L^1$, $y > 0$ és $q \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $\|f\|_1 \le qy$. Legyen $J_k := [kq, (k+1)q] \quad (k \in \mathbf{Z})$ és minden $k \in \mathbf{Z}$ mellett hajtsuk végre az előzőekben mondott eljárást $[a,b]$ helyett J_k-val, az ottani f helyett véve az f leszűkítését J_k-ra. Jelöljük ennek megfelelően $\mathcal{I}_k$-val a fenti $\mathcal{I}$-t és legyen most $\mathcal{I} := \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{I}_k$. Ekkor $\mathcal{I} = \emptyset$ vagy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal $\mathcal{I} = \{I_j : j \in \mathcal{N}\}$, ahol minden I_j nyílt intervallum, $I_j \cap I_l = \emptyset$ $(k \ne l \in \mathcal{N})$ és

$$y < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f|d\lambda \le 2y \quad (j \in \mathcal{N}).$$

Igaz továbbá, hogy az $\Omega := \bigcup_{j\in\mathcal{N}} I_j$ halmaz nyílt,

$$\lambda(\Omega) = \sum_{j\in\mathcal{N}} |I_j| < \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{1}{y}\int_{I_j} |f|d\lambda = \frac{1}{y}\int_\Omega |f|d\lambda \le \frac{\|f\|_1}{y},$$

ill., ha $F := \mathbf{R} \setminus \Omega$, akkor $|f(x)| \le y \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in F)$.

A fentiek alapján (esetleg értelemszerű módosítással) kapjuk tehát a következőt: legyen $\Delta \subset \mathbf{R}$ egy (nem elfajuló) intervallum, $f : \Delta \to \mathbf{R}$, f Lebesgue-integrálható, $y > 0$ és $|\Delta| < +\infty$ esetén $|\Delta|^{-1} \int |f| d\lambda \leq y$. Ekkor $|f(x)| \leq y \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in \Delta)$ vagy alkalmas $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal és páronként diszjunkt $I_k \subset \Delta \quad (k \in \mathcal{N})$ nyílt intervallumokkal

$$y < \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f| d\lambda \leq 2y \quad (j \in \mathcal{N}),$$

az $\Omega := \bigcup_{j \in \mathcal{N}} I_j$ halmazra $\lambda(\Omega) \leq y^{-1} \|f\|_1$ és $|f(x)| \leq y \quad (\lambda\text{-m.m. } x \in F := \Delta \setminus \Omega)$. Legyen itt $k \in \mathcal{N}$ és

$$f_k := \left(f - \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f d\lambda \right) \chi_{I_k} \ , \ \ h := \sum_{k \in \mathcal{N}} f_k \ , \ \ g := f - h.$$

Ekkor a következőket mondhatjuk:

i) supp $f_k \subset I_k$, $\int_{I_k} f d\lambda = 0$, $\int_{I_k} |f_k| d\lambda \leq 4y|I_k| \ \ (k \in \mathcal{N})$;

ii) supp $h \subset \Omega$, $\int h d\lambda = \sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{I_k} f_k d\lambda = 0$, $\|h\|_1 \leq \sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{I_k} |f_k| d\lambda \leq 2 \sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{I_k} |f| d\lambda = 2 \int_\Omega |f| d\lambda \leq 2\|f\|_1$;

iii) ha $k \in \mathcal{N}$ és $x \in I_k$, akkor $|g(x)| = \left| |I_k|^{-1} \int_{I_k} f d\lambda \right| \leq 2y$, ill. $|g(x)| = |f(x)| \leq y$ (λ-m.m. $x \in F$), azaz $\|g\|_\infty \leq 2y$;

iv) $\|g\|_1 = \int_F |g| d\lambda + \int_\Omega |g| d\lambda = \int_F |f| d\lambda + \sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{I_k} \left(|I_k|^{-1} \left| \int_{I_k} f d\lambda \right| \right) d\lambda = \int_F |f| d\lambda + \sum_{k \in \mathcal{N}} \left| \int_{I_k} f d\lambda \right| \leq \int_F |f| d\lambda + \int_\Omega |f| d\lambda = \|f\|_1$, ill. $\|g\|_p^p = \int |g|^p d\lambda = \int |g|^{p-1} |g| d\lambda \leq (2y)^{p-1} \|g\|_1 \leq (2y)^{p-1} \|f\|_1 \quad (1 < p < +\infty)$.

Az i) - iv)-nek eleget tevő *Calderon-Zygmund-felbontás* egy alkalmazásaként legyen $1 < p \leq +\infty$, $T : L^1 + L^p \to \mathcal{F} := \{f : \Delta \to \mathbf{R} : f \text{ Lebesgue-mérhető } \}$, T szublineáris és (p,p)-típusú. Ha $y > 0$ (és $|\Delta| < +\infty$ esetén $\int_\Delta |f| d\lambda \leq y|\Delta|$), akkor az előbbiek szerint $f = g + h = g + \sum_{k \in \mathcal{N}} f_k$, azaz $|Tf| \leq |Tg| + |Th|$. Ezért $p < +\infty$ esetén

$$\lambda\left(\{|Tf| > y\}\right) \leq \lambda\left(\{|Tg| > y/2\}\right) + \lambda\left(\{|Th| > y/2\}\right),$$

ahol megfelelő $C_p > 0$ konstanssal

$$\lambda\left(\{|Tg| > y/2\}\right) \leq \int \left(\frac{|Tg|}{y/2} \right)^p d\lambda = \left(\frac{2}{y} \right)^p \|Tg\|_p^p \leq \left(\frac{2}{y} \right)^p C_p \|g\|_p \leq$$

$$\left(\frac{2}{y} \right)^p C_p (2y)^{p-1} \|f\|_1 = C_p 2^{2p-1} \frac{\|f\|_1}{y}.$$

Így

$$\lambda\left(\{|Tf| > y\}\right) \leq C_p 2^{2p-1} \frac{\|f\|_1}{y} + \lambda\left(\{|Th| > y/2\}\right).$$

Ha $p=+\infty$, akkor meg egy $C_\infty>0$ alkalmas konstanssal

$$|Tf|\le C_\infty\|g\|_\infty+|Th|\le 2C_\infty y+|Th|,$$

ezért $\lambda(\{|Tf|>4C_\infty y\})\le\lambda(\{|Th|>2C_\infty y\})$.

Legyen $\mathbf{R}\ni\alpha>0$ (egyelőre) tetszőleges, ekkor

$$\lambda\left(\{|Th|>\alpha y\}\right)\le\lambda(\Omega)+\lambda\left(\{x\in\Delta\setminus\Omega:|Th(x)|>\alpha y\}\right)\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\int_{\Delta\setminus\Omega}|Th|d\lambda\le$$

$$\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\sum_{k\in\mathcal{N}}\int_{\Delta\setminus\Omega}|Tf_k|d\lambda\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{1}{\alpha y}\sum_{k\in\mathcal{N}}\int_{\Delta\setminus I_k}|Tf_k|d\lambda.$$

Tegyük fel, hogy van olyan $C>0$ konstans, amellyel bármely

$$G\in L^1,\int Gd\lambda=0,\ \operatorname{supp}G\subset I\subset\Delta, I\text{ intervallum}$$

esetén

$$\int_{\Delta\setminus I}|TG|d\lambda\le C\|G\|_1.$$

(Ekkor azt mondjuk, hogy a T operátor *kvázi-lokális*.) Így tehát

$$\lambda\left(\{|Th|>\alpha y\}\right)\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{C}{\alpha y}\sum_{k\in\mathcal{N}}\|f_k\|_1=\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{C}{\alpha y}\|h\|_1\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{2C}{\alpha y}\|f\|_1.$$

Összefoglalva a fentieket azt kapjuk, hogy $p<+\infty$ mellett (az $\alpha:=1/2$ választással)

$$\lambda\left(\{|Tf|>y\}\right)\le C_p2^{2p-1}\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{4C}{y}\|f\|_1=(C_p2^{2p-1}+4C+1)\frac{\|f\|_1}{y},$$

ill. $p=+\infty$-re (az $\alpha:=2C_\infty$ választással)

$$\lambda\left(\{|Tf|>4C_\infty y\}\right)\le\frac{\|f\|_1}{y}+\frac{C}{C_\infty y}\|f\|_1=\frac{C_\infty+C}{C_\infty}\frac{\|f\|_1}{y},$$

azaz

$$\lambda\left(\{|Tf|>y\}\right)\le 4(C_\infty+C)\frac{\|f\|_1}{y}.$$

Mindkét esetben az adódott, hogy T gyengén $(1,1)$-típusú.

6.1. Megjegyzések.

i) Legyen I intervallum, $I\subset\Delta, |I|<+\infty$, $r\ge 1$ és

$$I^{(r)}:=\{x\in\Delta:|x-c|<r|I|\},$$

ahol c az I középpontja. Nyilván igaz, hogy $|I^{(r)}| \leq 2r|I|$ és $I \subset I^{(r)}$. Tegyük fel, hogy a T fenti kvázi-lokalitási definíciójában csak a következőt tudjuk: van olyan $r \geq 1$ szám és olyan $C > 0$ konstans, hogy minden $G \in L^1$, $\int G d\lambda = 0$, $I \subset \Delta$, supp $G \subset I$, I intervallum esetén

$$\int_{\Delta \setminus I^{(r)}} |TG| d\lambda \leq C \|G\|_1.$$

Ekkor T gyengén $(1,1)$-típusú.
Ui. a fenti Calderon-Zygmund-felbontásból kiindulva legyen $\Omega^{(r)} := \bigcup_{k \in \mathcal{N}} I^{(r)}$, ekkor $\lambda\left(\Omega^{(r)}\right) \leq 2r\lambda(\Omega) \leq \frac{2r}{y}\|f\|_1$, ill. bármely $\mathbf{R} \ni y > 0$ mellett

$$(\{|Th| > y\}) \leq \lambda\left(\Omega^{(r)}\right) + \lambda\left(\{x \in \Delta \setminus \Omega^{(r)} : |Th(x)| > y\}\right) \leq$$

$$\frac{2r}{y}\|f\|_1 + \frac{1}{y}\int_{\Delta \setminus \Omega^{(r)}} |Th| d\lambda \leq \frac{2r}{y}\|f\|_1 + \frac{1}{y}\sum_{k \in \mathcal{N}} \int_{\Delta \setminus I_k^{(r)}} |Tf_k| d\lambda \leq$$

$$\frac{2r}{y}\|f\|_1 + \frac{1}{y} C \sum_{k \in \mathcal{N}} \|f_k\|_1 \leq \frac{2r}{y}\|f\|_1 + \frac{2C}{y}\|f\|_1.$$

ii) Tegyük fel, hogy

$$Tf(x) = \int f(t) F(x,t) d\lambda(t) \qquad (x \in \Delta),$$

ahol $F \in L^1$ adott *magfüggvény*. Ha $\int f d\lambda = 0$, akkor bármely $c : \Delta \to \mathbf{R}$ függvényre

$$Tf(x) = \int f(t) \left(F(x,t) - c(x)\right) d\lambda(t) \qquad (x \in \Delta),$$

ill., ha még supp $f \subset I$ is igaz valamilyen $I \subset \Delta$ intervallummal, akkor (ld. i)) minden $\mathbf{R} \ni r \geq 1$ esetén

$$\int_{\Delta \setminus I^{(r)}} |Tf| d\lambda \leq \int_{\Delta \setminus I^{(r)}} \int_I |f(t)||F(x,t) - c(x)| d\lambda(t) d\lambda(x) =$$

$$\int_I |f(t)| \left(\int_{\Delta \setminus I^{(r)}} |F(x,t) - c(x)| d\lambda(x)\right) d\lambda(t).$$

Ha mondjuk van olyan $c_r \geq 0$ konstans, hogy alkalmas $\gamma : \Delta \to \mathbf{R}$ függvénnyel bármely $t \in I$ mellett

$$\int_{\Delta \setminus I^{(r)}} |F(x,t) - \gamma(x)| dx \leq c_r,$$

akkor a fentiekben a c függvény helyébe γ-t írva a következőt kapjuk:

$$\int_{\Delta\setminus I^{(r)}} |Tf|d\lambda \le c_r \int_I |f|d\lambda \le c_r\|f\|_1.$$

Az alkalmazásokban gyakran fordul elő az, hogy egy megfelelő $t_0 \in I$ választással (pl. az I középpontjával) a $\gamma(x) := F(x,t_0) \quad (x \in \Delta)$ függvény megfelelő.

7. Duális terek

Legyen adott egy, a továbbiakban rögzített (X,Ω,μ) mértéktér, $1 \le p,q \le +\infty$ pedig legyenek *konjugált kitevők*, azaz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Ha $g \in L^q(\mu)$ és $\Phi(f) := \Phi_g(f) := \int fgd\mu \quad (f \in L^p(\mu))$, akkor

i) $\Phi(f) \in \mathbf{R}$ és
$$|\Phi(f)| \le \|g\|_q\|f\|_p \qquad (f \in L^p(\mu)),$$
aminek az indoklásaként elegendő felidéznünk a Hölder-egyenlőtlenséget;

ii) tehát $\Phi : L^p(\mu) \to \mathbf{R}$ korlátos lineáris funkcionál ($\Phi \in (L^p(\mu))^*$) és $\|\Phi\| \le \|g\|_q$.

7.1. Megjegyzések.

i) Emlékeztetünk a $\|\Phi\| \quad ((\Phi \in (L^p(\mu))^*)$ norma értelmezésére:

$$\|\Phi\| := \min\{C \ge 0 : |\Phi(f)| \le C\|f\|_p \quad (f \in L^p(\mu))\}.$$

ii) Ismert, hogy $\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : f \in L^p(\mu), \|f\|_p \le 1\} \quad (\Phi \in (L^p(\mu))^*)$.

7.1. Tétel. *Ha* $p > 1$, *akkor* $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Bizonyítás. Legyen $f := \operatorname{sign} g|g|^{q-1}$, ekkor f (Ω-) mérhető, ill. $p < +\infty$ esetén

$$\int |f|^p d\mu \le \int |g|^{p(q-1)}d\mu = \int |g|^q d\mu < +\infty,$$

azaz $f \in L^p$ és

$$\Phi(f) = \int |g|^q d\mu = \|g\|_q^q \le \|\Phi\|\cdot \|f\|_p \le \|\Phi\|\cdot \|g\|_q^{q/p} = \|\Phi\|\cdot \|g\|_q^{q-1}.$$

Tehát $\|\Phi\| \ge \|g\|_q$, ezért a fenti ii) észrevételt is figyelembe véve $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Ha $p = +\infty$, akkor $q = 1$, így $f = \operatorname{sign} g$, amiből f mérhetősége és $\|f\|_\infty \le 1$ következik. Továbbá

$$\Phi(f) = \int |g| d\mu = \|g\|_1 \le \|\Phi\| \cdot \|f\|_\infty \le \|\Phi\|,$$

ezért ismét figyelembe véve ii)-t kapjuk a $\|\Phi\| = \|g\|_1$ egyenlőséget. ■

7.2. Tétel. *Ha $p = 1$ és μ σ-véges, akkor* $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$.

Bizonyítás. Ha $\|g\|_\infty = 0$, akkor a dolog eléggé nyilvánvaló. Feltehetjük tehát, hogy $\|g\|_\infty > 0$. Legyen ekkor $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám, $E \subset \Omega$ pedig olyan halmaz, hogy $\mu(E) > 0$ és $|g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon \quad (x \in E)$. Mivel μ σ-véges, ezért egy alkalmas $\tilde{E} \subset E$, $\tilde{E} \in \Omega$ halmazzal $0 < \mu(\tilde{E}) < +\infty$. Legyen $f := \chi_{\tilde{E}} \operatorname{sign} g$, ekkor $f \in L^1$ és $\|f\|_1 \le \mu(\tilde{E})$, ill.

$$\Phi(f) = \int_{\tilde{E}} |g| d\mu \ge (\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(\tilde{E}),$$

azaz

$$(\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(\tilde{E}) \le \|\Phi\| \cdot \|f\|_1 \le \|\Phi\| \mu(\tilde{E}).$$

Innen $\|\Phi\| \ge \|g\|_\infty - \varepsilon$ rögtön következik. Viszont itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges számot jelölt, ezért $\|\Phi\| \ge \|g\|_\infty$ és újfent csak a fent említett ii) észrevétel szerint $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$. ■

7.2. Megjegyzések.

i) A 7.1. Tétel szerint tehát bármely $1 \le q < +\infty$ és $g \in L^q(\mu)$ esetén

$$\|g\|_q = \sup \left\{ \left| \int f g \, d\mu \right| : f \in L^p(\mu), \|f\|_p \le 1 \right\}$$

(ahol $1/p + 1/q = 1$).

ii) Ha μ σ-véges, akkor a 7.2. Tétel miatt az előbbi megjegyzés $q = +\infty$ mellett is igaz: ha $g \in L^\infty(\mu)$, akkor

$$\|g\|_\infty = \sup \left\{ \left| \int f g \, d\mu \right| : f \in L^1(\mu), \|f\|_1 \le 1 \right\}.$$

iii) Vezessük be a *lokális nullamértékűség* fogalmát az alábbiak szerint: valamely (X, Ω, μ) mértéktér esetén egy $A \in \Omega$ halmazt *lokálisan nullamértékűnek* nevezünk, ha minden $B \in \Omega$, $\mu(B) < +\infty$ halmazra $\mu(A \cap B) = 0$. Eléggé nyilvánvaló, hogy minden $A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz lokálisan nullamértékű, ill., ha μ σ-véges, akkor a lokális nullamértékűség ekvivalens a nullamértékűséggel. Tekintsük ezután az összes olyan $f : X \to \mathbf{R}$ $(\Omega-)$ mérhető függvény által alkotott $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ halmazt, amelyre $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ lokálisan nullamértékű valamilyen $\alpha \ge 0$ esetén. Legyen $\mathbf{R}_f$ az ilyen $\alpha \ge 0$ számok halmaza és

$$\|f\|_* := \inf\{\alpha : \alpha \in \mathbf{R}_f\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ azzal ekvivalens, hogy valamely korlátos, $(\Omega-)$ mérhető $F : X \to \mathbf{R}$ függvénnyel a $\{x \in X : f(x) \neq F(x)\}$ halmaz lokálisan nullamértékű. Legyen X_f az ilyen F függvények halmaza és

$$\|F\|_u := \sup\{|F(x)| : x \in X\} \qquad (F \in X_f).$$

Ekkor $\|f\|_* = \inf\{\|F\|_u : F \in X_f\} \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(\mu))$. Világos, hogy az

$$f \sim g \iff \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \text{ lokálisan nullamértékű } \quad (f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu))$$

reláció egy ekvivalencia, amely osztályokba sorolja az $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ halmaz elemeit. Ezen osztályok halmazát is az $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ szimbólummal jelölve, a szokásos függvényműveletekkel $(\mathcal{L}^\infty(\mu), \|.\|_*)$ Banach-tér. Ekkor (a bizonyítás értelemszerű „kiigazításával”) könnyen adódik a 7.2. Tétel alábbi módosítása:

ha (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér és $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, akkor $\Phi_g \in \left(L^1(\mu)\right)^*$ és $\|\Phi_g\| = \|g\|_*$. Mivel az előbbiek szerint σ-véges μ mérték esetén $\mathcal{L}^\infty(\mu) = L^\infty(\mu)$ és $\|g\|_* = \|g\|_\infty \quad (g \in \mathcal{L}^\infty(\mu))$, ezért valóban a 7.2. Tétel egy kiterjesztését kaptuk.

7.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy (X, Ω, μ) σ-véges mértéktér, $1 \le p < +\infty$ és $\Phi \in (L^p(\mu))^*$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $g \in L^q(\mu) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ függvény, amellyel $\Phi(f) = \int fgd\mu \quad (f \in L^p(\mu))$ és $\|\Phi\| = \|g\|_q$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy μ véges, azaz, hogy $\mu(X) < +\infty$. Legyen ekkor

$$\nu(E) := \Phi(\chi_E) \quad (E \in \Omega).$$

Nyilván $\nu : \Omega \to \mathbf{R}$, továbbá $\nu(\emptyset) = \Phi(\chi_\emptyset) = 0$, hiszen $\chi_\emptyset(x) = 0 \ (x \in X)$, azaz $\chi_\emptyset$ az $L^p(\mu)$ tér null-eleme. A ν leképezés σ-additív is, ui. bárhogyan választunk páronként diszjunkt $E_i \in \Omega \quad (i \in \mathbf{N})$ halmazokat, akkor

$$\nu\left(\bigcup_{i=0}^\infty E_i\right) = \Phi\left(\chi_{\cup_{i=0}^\infty E_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^\infty \chi_{E_i}\right).$$

Ugyanakkor

$$\left\|\sum_{i=0}^\infty \chi_{E_i} - \sum_{i=0}^n \chi_{E_i}\right\|_p = \left\|\sum_{i=n+1}^\infty \chi_{E_i}\right\|_p = \left\|\chi_{\cup_{i=n+1}^\infty E_i}\right\|_p =$$

$$\left(\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^\infty E_i\right)\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=n+1}^\infty \mu(E_i)\right)^{1/p} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

mivel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) \le \mu(X) < +\infty.$$

Kihasználva a Φ folytonosságát azt mondhatjuk, hogy

$$\nu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \chi_{E_i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(\chi_{E_i}) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(E_i).$$

Az eddigiek szerint tehát ν előjeles mérték, amely abszolút folytonos μ-re nézve, mivel $E \in \Omega$, $\mu(E) = 0$ esetén $\chi_E(x) = 0 \quad$ (μ-m.m. $x \in X$), azaz χ_E az $L^p(\mu)$ tér nulleleme, ezért $\Phi(\chi_E) = \nu(E) = 0$. Innen a Radon-Nikodym-tételt alkalmazva kapunk olyan $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$, mérhető függvényt, amellyel $\nu(E) = \int g\chi_E d\mu \quad (E \in \Omega)$. Mivel $\nu(X) = \int g d\mu = \Phi(\chi_X)$ egy szám, ezért $g \in L^1(\mu)$. Így bármely $E \in \Omega$ halmazra

$$\Phi(\chi_E) = \int g\chi_E d\mu.$$

Legyen $f : X \to \mathbf{R}$ lépcsős függvény: $f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$, ahol $\sum_i ...$ véges összeget jelöl és az $E_i \in \Omega$ halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$\Phi(f) = \sum_i \alpha_i \Phi(\chi_{E_i}) = \sum_i \alpha_i \int \chi_{E_i} g d\mu = \int \sum_i \alpha_i \chi_{E_i} g d\mu = \int f g d\mu.$$

Most belátjuk, hogy tetszőleges $f : X \to \mathbf{R}$ korlátos, mérhető függvényre $\Phi(f) = \int f g d\mu$. Bontsuk fel ehhez f-et a „szokásos" módon pozitív és negatív része különbségére: $f = f^+ - f^-$ és legyen $0 \le f_{n0}$, ill. $0 \le f_{n1} \quad (n \in \mathbf{N})$ lépcsős függvényeknek egy-egy monoton növő olyan sorozata, hogy $f^+ = \lim(f_{n0})$ és $f^- = \lim(f_{n1})$. Ekkor $f_n := f_{n0} - f_{n1}$ $(n \in \mathbf{N})$ is lépcsős függvényekből álló sorozat és $f = \lim(f_n)$, $|f_n| \le f_{n0} + f_{n1} \le f^+ + f^- = |f| \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel a μ mérték véges, ezért $f \in L^p(\mu)$, így $f_n \in L^p(\mu) \quad (n \in \mathbf{N})$ is igaz, továbbá $\lim(|f_n(x) - f(x)|^p) = 0 \quad$ (μ-m.m. $x \in X$) és $|f_n - f|^p \le 2^p |f|^p \in L^1 \quad (n \in \mathbf{N})$. Ezért a Lebesgue-féle konvergencia tétel alapján $\lim(\int |f_n - f|^p d\mu) = 0$. Más szóval tehát $\lim(\|f_n - f\|_p) = 0$, amiből a Φ funkcionál folytonossága miatt

$$\Phi(f) = \lim(\Phi(f_n)) = \lim\left(\int f_n g d\mu\right).$$

Itt $\lim(f_n(x)g(x)) = f(x)g(x) \quad$ (μ-m.m. $x \in X$) és az f korlátossága miatt $|f_n g| \le |f||g| \in L^1(\mu) \quad (n \in \mathbf{N})$. Ismét a Lebesgue-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\Phi(f) = \lim(\int f_n g d\mu) = \int f g d\mu.$$

A fenti g függvényről megmutatjuk, hogy $g \in L^q(\mu)$. Legyen ehhez

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & (|g(x)| \le n) \\ \\ 0 & (|g(x)| > n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in X).$$

A g_n függvény minden $\mathbf{N} \ni n$-re nyilván korlátos és mérhető, $\lim(g_n(x)) = g(x)$ (μ-m.m. $x \in X$). Ha $p > 1$, azaz, ha $q < +\infty$, akkor legyen $t_n := \operatorname{sign} g|g_n|^{q-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor (az előzőeket is figyelembe véve)

i) $\|t_n\|_p = \left(\int |g_n|^{p(q-1)} d\mu\right)^{1/p} = \|g_n\|_q^{q/p} \quad (n \in \mathbf{N})$;

ii) $\Phi(t_n) = \int t_n g d\mu = \|g_n\|_q^q \le \|\Phi\| \|t_n\|_p = \|\Phi\| \|g_n\|_q^{q/p} \quad (n \in \mathbf{N})$;

iii) mivel a $(|g_n|)$ sorozat monoton nőve tart $|g|$-hez, ezért a Beppo Levi-tétel miatt az $\left(\int |g_n|^q d\mu\right)$ integrál-sorozat is monoton nőve tart $\int |g|^q d\mu$-hez. Nyilván feltehető, hogy $\int |g|^q d\mu > 0$, különben g az L^q tér null-eleme lenne. Tehát van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ esetén $\int |g_n|^q d\mu = \|g_n\|_q^q > 0$, azaz ii) miatt

$$\|\Phi\| \ge \|g_n\|_q^{q-q/p} = \|g_n\|_q.$$

Innen rögtön adódik a

$$\lim(\|g_n\|_q) = \|g\|_q \le \|\Phi\|$$

egyenlőtlenség, amiből $g \in L^q(\mu)$ is persze következik.

Ha $q = +\infty$, azaz $p = 1$, akkor legyen $A_c := \{|g| \ge c\} \in \Omega \quad (\mathbf{R} \ni c > 0)$ és $f_c := \operatorname{sign} g\chi_{A_c}$. Világos, hogy $\|f_c\|_1 \le \mu(A_c)$ és a fentiek alapján

$$\Phi(f_c) = \int f_c g d\mu = \int_{A_c} |g| d\mu \ge c\mu(A_c),$$

azaz

$$c\mu(A_c) \le \|\Phi\| \|f_c\|_1 \le \|\Phi\| \mu(A_c).$$

Ha itt c olyan, hogy $\mu(A_c) = 0$, akkor $|g(x)| \le c$ (μ-m.m. $x \in X$). Ezért $g \in L^\infty$. Ha viszont c olyan, hogy $\mu(A_c) > 0$, akkor $c \le \|\Phi\|$. Így $c > \|\Phi\|$ esetén $\mu(A_c) = 0$, ami elegendő ahhoz, hogy $g \in L^\infty(\mu)$ legyen.

A μ végessége mellett bizonyítsuk be végül, hogy a $\Phi(f) = \int fg d\mu$ egyenlőség minden $f \in L^p(\mu)$ függvényre igaz. Válasszunk ehhez a szóban forgó $f \in L^p(\mu)$ esetén egy olyan, lépcsős függvényekből álló (l_n) sorozatot, amelyre $|l_n| \le |f|$ $(n \in \mathbf{N})$ és $\lim(\|l_n - f\|_p) = 0$ teljesül. Az eddig belátottakat felhasználva ekkor azt mondhatjuk, hogy

$$\Phi(f) = \lim(\Phi(l_n)) = \lim\left(\int l_n g d\mu\right),$$

ahol a Hölder-egyenlőtlenség miatt $|l_n g| \le |fg| \in L^1(\mu)$ $(n \in \mathbf{N})$, ill. $\lim(l_n g) = fg$-ből és a Lebesgue-tételből $\lim(\int l_n g d\mu) = \int fg d\mu$ következik.

Vizsgáljuk most az általános esetet, azaz, amikor a μ mértékről csak a σ-végességet tételezzük fel. Ekkor $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, ahol $\mu(X_n) < +\infty$, $X_n \cap X_m = \emptyset \quad (n \neq m \in \mathbf{N})$. Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $\Omega_n := \{A \subset X_n : A \in \Omega\}$, $\mu_n(A) := \mu(A) \quad (A \in \Omega_n)$. Nyilván (X_n, Ω_n, μ_n) mértéktér, a μ_n mérték pedig véges; legyen $L_n^r := L^r(\mu_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ az (X_n, Ω_n, μ_n) mértéktérre vonatkozó L^r-tér $\quad (1 \leq r \leq \infty)$. Ha $n \in \mathbf{N}$ és $g \in L_n^p$, akkor a

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \in X_n) \\ \\ 0 & (x \in X \setminus X_n) \end{cases}$$

függvény $L^p(\mu)$-beli. Legyen $\Phi_n(g) := \Phi(\tilde{g})$, ekkor $\Phi_n \in (L_n^p)^*$. Mivel μ_n véges, ezért az eddigiek alapján van olyan $h_n \in L_n^q$, amellyel

$$\Phi_n(f) = \int f h_n d\mu_n = \int \tilde{f} \tilde{h}_n d\mu \quad (f \in L_n^p).$$

Jelöljük G-vel a (nyilván Ω-mérhető) $G := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_n$ függvényt.

1^o eset: $q < +\infty$ (azaz $p > 1$). Ekkor

$$|G|^q = \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{h}_n|^q = \lim \left(\sum_{k=0}^{n} |\tilde{h}_k|^q \right) =: \lim(G_n^q).$$

Legyen $F_n := \operatorname{sign} G G_n^{q-1} \quad (n \in \mathbf{N})$. Erre az F_n függvényre a következőt mondhatjuk: $\|F_n\|_p = \|G_n\|_q^{q/p} < +\infty$ és

$$\Phi(F_n) = \sum_{k=0}^{n} \Phi \left(|\tilde{h}_k|^{q-1} \operatorname{sign} G \right) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k \left(|h_k|^{q-1} \operatorname{sign} h_k \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \int |h_k|^q d\mu_k = \sum_{k=0}^{n} \int |\tilde{h}_k|^q d\mu = \int G_n^q d\mu.$$

Tehát

$$\int G_n^q d\mu = \|G_n\|_q^q \leq \|\Phi\| \|f_n\|_p = \|\Phi\| \|G_n\|_q^{q/p},$$

így $\|G_n\|_q \leq \|\Phi\|$. Mivel $\|G\|_q = \lim(\|G_n\|_q)$, ezért $\|G\|_q \leq \|\Phi\|$, azaz $G \in L^q(\mu)$.

2^o eset: $q = +\infty$ (azaz $p = 1$). Mivel

$$|\Phi_n(g)| = |\Phi(\tilde{g})| \leq \|\Phi\| \|\tilde{g}\|_1 = \|\Phi\| \|g\|_1 \quad (n \in \mathbf{N}, g \in L_n^1),$$

ezért $\|\Phi_n\| \leq \|\Phi\|$. Ugyanakkor $\|\Phi_n\| = \|h_n\|_\infty$, amiből

$$\|G\|_\infty = \sup_n \|\tilde{h}_n\|_\infty = \sup_n \|h_n\|_\infty \leq \|\Phi\|,$$

más szóval $G \in L^\infty(\mu)$.

Végül, legyen $f \in L^p(\mu), n \in \mathbf{N}$ és $f_n(x) := f(x) \quad (x \in X_n)$. Ekkor $f = \sum_{n=0}^\infty \tilde{f}_n$ és $\|f\|_p^p = \sum_{n=0}^\infty \|\tilde{f}_n\|_p^p$, amiből $\|f - \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k\|_p^p = \sum_{k=n+1}^\infty \|\tilde{f}_k\|_p^p \to 0 \quad (n \to \infty)$. Következésképpen

$$\Phi(f) = \sum_{n=0}^\infty \Phi(\tilde{f}_n) = \sum_{n=0}^\infty \Phi_n(f_n) = \sum_{n=0}^\infty \int \tilde{f}_n \tilde{h}_n d\mu = \int \sum_{n=0}^\infty \tilde{f}_n \tilde{h}_n d\mu = \int fG d\mu.$$

(Újra alkalmaztuk a Lebesgue-féle konvergencia-tételt, amit a $\sum_{n=0}^\infty \tilde{f}_n \tilde{h}_n = fG$, ill. a $\sum_{n=0}^\infty |\tilde{f}_n \tilde{h}_n| = |fG| \in L^1(\mu)$ egyenlőség tesz lehetővé.)

Az egyértelműség bizonyításához legyenek $g_1, g_2 \in L^q(\mu)$ olyan függvények, amelyekre $\int f g_1 \, d\mu = \int f g_2 \, d\mu \quad (f \in L^p(\mu))$. Ez azt jelenti, hogy a $g := g_1 - g_2 (\in L^q(\mu))$ jelöléssel $\Phi_g f = \int f g \, d\mu = 0 \quad (f \in L^p(\mu))$. Tehát Φ_g az $(L^p(\mu))^*$ tér null-eleme, azaz $0 = \|\Phi_g\| = \|g\|_q$, következésképpen g az $L^q(\mu)$ tér null-eleme. Így $g_1(x) = g_2(x) \quad (\mu\text{-m.m. } x \in X)$. ■

7.3. Megjegyzések.

i) Az $X := \mathbf{N}, \Omega := \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu(\{n\}) := 1 \quad (n \in \mathbf{N})$ választással $L^p(\mu) = \ell_p$ és $\int f g \, d\mu = \sum_{n=0}^\infty f_n g_n \quad (f = (f_n) \in \ell_p,\ g = (g_n) \in \ell_q, \quad (1 \le p \le +\infty,\ 1/p + 1/q = 1)$.

ii) Az előbbi megjegyzés és a 7.3. Tétel szerint tehát *tetszőleges* $1 \le p < +\infty$ *és* $\Phi \in (\ell_p)^*$ *esetén egyértelműen létezik olyan* $(g_n) \in \ell_q \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *sorozat, amelylyel* $\Phi((f_n)) = \sum_{n=0}^\infty f_n g_n \quad ((f_n) \in \ell_p)$ *és* $\|\Phi\| = \|(g_n)\|_{\ell_q} = \left(\sum_{n=0}^\infty |g_n|^q\right)^{1/q}$ $(p > 1)$, *ill.* $\|\Phi\| = \|(g_n)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |g_n| \quad (p = 1)$.

iii) A ii) megjegyzés $p = +\infty$ esetén nem igaz. Legyen pl. $\Phi \in (\ell_\infty)^*$ a limesz-funkcionál, azaz, amelyre a konvergens $f = (f_n) \in \ell_\infty$ sorozatok esetén $\Phi(f) = \lim f$. Könnyű meggondolni, hogy ekkor nincs olyan $(g_n) \in \ell_1$ sorozat, amellyel $\Phi(f) = \sum_{n=0}^\infty f_n g_n$ teljesülne minden ilyen f-re. Különben az $f^{(N)} := (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...) \quad (N \in \mathbf{N})$ konvergens sorozatokat tekintve (ahol tehát $f_k^{(N)} := 1 \quad (k = 0, 1, ..., N)$ és $f_j^{(N)} := 0 \quad (j = N+1, N+2, ...)$) a

$$\Phi(f^{(N)}) = \lim f^{(N)} = 0 = \sum_{n=0}^N g_n = 0 \qquad (N \in \mathbf{N})$$

egyenlőségek adódnának. Innen viszont teljes indukcióval rögtön következne, hogy $g_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz pl. az $f_n := 1 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra

$$\Phi f = \lim f = 1 = \sum_{n=0}^\infty 0 \cdot 1 = 0$$

is fennállna, ami persze nem igaz.

iv) Legyen adott az (X, Ω, μ) σ-véges mértéktér és jelöljük $\mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$-vel az összes olyan $\tau : \Omega \to \mathbf{R}$ korlátos, additív leképezés által alkotott halmazt, amelyre $\tau(A) = 0$ minden $A \in \Omega, \mu(A) = 0$ halmazra. Világos, hogy $[\tau] \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu) \quad (\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu))$, ahol $[\tau]$ a τ *totális variációja*: $[\tau](A) := \sup\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} - \inf\{\tau(B) : \Omega \ni B \subset A\} \quad (A \in \Omega)$. Definiáljuk a $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ leképezés normáját az alábbiak szerint: $\|\tau\| := [\tau](X)$. Ezzel a normával $\mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ - a *végesen additív előjeles mértékek* halmaza - normált tér. Ha $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$, akkor az Ω-mérhető $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ függvények halmazán értelmezhető az $\int f\, d\tau$ integrál. Belátható, hogy $\Phi \in (L^\infty(\mu))^*$ *akkor és csak akkor igaz, ha egy alkalmas* $\tau \in \mathcal{M}(X, \Omega, \mu)$ *végesen additív előjeles mértékkel* $\Phi(f) = \Phi_\tau(f) := \int f\, d\tau \quad (f \in L^\infty(\mu))$ *és ekkor* $\|\Phi\| = \|\tau\|$. Pl. bármely $g \in L^1(\mu)$ függvényre a $\tau(A) := \int_A g\, d\mu \quad (A \in \Omega)$ leképezés egy végesen additív előjeles mérték, $\int f\, d\tau = \int fg\, d\mu = \Phi_g(f) \quad (f \in L^1(\mu))$ és $\|\Phi_g\| = \|\tau\| = \|g\|_1$ (ld. 7.2. Tétel). Ezért $\Phi_g \in (L^\infty(\mu))^*$, de általában (ld. iii) megjegyzés) $(L^\infty(\mu))^* \neq \{\Phi_g : g \in L^1(\mu)\}$.

v) A 7.1., 7.2., 7.3. Tételek alapján σ-véges (X, Ω, μ) mértéktér és $1 \leq p < +\infty$ esetén az $L^q(\mu) \ni g \mapsto \Phi_g \in (L^p(\mu))^*$ (ahol $1/p + 1/q = 1$) megfeleltetés izometria.

vi) Hasonlóan, ha (X, Ω, μ) σ-véges, akkor $\mathcal{M}(X, \Omega, \mu) \ni \tau \mapsto \Phi_\tau \in (L^\infty(\mu))^*$ szintén izometria.

vii) A iv), vi) megjegyzések igazak maradnak tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér esetén, ha $L^\infty(\mu)$-t $\mathcal{L}^\infty(\mu)$-re cseréljük (ld. 7.2. iii) Megjegyzés).

viii) Megmutatható, hogy a 7.3. Tétel a $p > 1$ esetben igaz akkor is, ha μ nem σ-véges (*Riesz*-tétel). A $p = 1$ esetre ez nem vonatkozik, de a σ-végesség feltétele enyhíthető. Ennek a megfogalmazásához nevezzük az (X, Ω, μ) mértékteret *felbonthatónak,* ha alkalmas, páronként diszjunkt halmazokból álló $\mathcal{F} \subset \Omega$ halmazrendszerrel az alábbiak teljesülnek:

1^o $\mu(A) < +\infty \quad (A \in \mathcal{F})$;

2^o ha $B \subset X$ és $B \cap A \in \Omega \quad (A \in \mathcal{F})$, akkor $B \in \Omega$;

3^o $\mu(C) = \sup\left\{\sum_{F \in \mathcal{D}} \mu(C \cap F) : \mathcal{D} \subset \mathcal{F}, \mathcal{D} \text{ véges}\right\} \quad (C \in \Omega, \mu(C) < +\infty)$.

Nyilvánvaló, hogy ha (X, Ω, μ) σ-véges, akkor felbontható is. A 7.3. Tétel fent említett átfogalmazása a következőképpen szól: *tegyük fel, hogy az* (X, Ω, μ) *mértéktér felbontható. Ekkor minden* $\Phi \in \left(L^1(\mu)\right)^*$ *esetén egyértelműen létezik olyan* $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ *függvény, amellyel* $\Phi(f) = \int fg d\mu \quad \left(f \in L^1(\mu)\right)$ *és* $\|\Phi\| = \|g\|_*$.