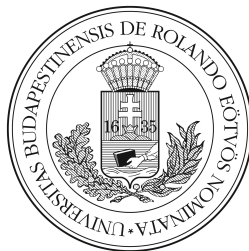


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI INTÉZET

DR. KERKOVITS KRISZTIÁN ANDRÁS

Képzetes vetületek

Jegyzet a **Vetülettan** előadáshoz (*tavaszi félév*)



Budapest, 2022.

Lektorálta: DR. GYÖRFFY JÁNOS

A jegyzet az ELTE IK 2022. évi tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán elnyert forrás felhasználásával készült.

A jegyzet szedése a \LaTeX 2_ε programban készült.

Ez a jegyzet non-profit oktatási és kutatási célokra szabadon felhasználható és terjeszthető az eredeti szerző és esetleges módosítás esetén azok egyértelmű megjelölése mellett. Minden más célú, különösen az anyagi haszonszerzéssel járó felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével lehetséges.

Tartalomjegyzék

Előszó	5
I. A képzetes vetületek elmélete	6
I.1. A fokhálózat képe	6
I.2. Képzetes vetületek hét nézőpontja	7
I.3. Vetületi torzulások	11
I.4. Képzetes vetületek alkalmazása	12
II. Korai képzetes hengervetületek	14
II.1. Képzetes hengervetületek torzulásai.	14
II.2. Globuláris vetületek	15
II.3. Kiterjesztett globuláris vetületek.	18
II.4. MERCATOR–SANSON-vetület	19
III. Általános torzulású képzetes hengervetületek	22
III.1. Loximutális vetület	22
III.2. Keverékvetületek.	23
III.3. A poliédervetület.	28
IV. A módosított földrajzi szélesség	30
IV.1. ECKERT területtartó vetületei	30
IV.2. MOLLWEIDE vetülete	35
V. A fokhálózat-átszámolás	38
V.1. A módszer elve	38
V.2. KAVRAJSZKIJ VII. vetülete	39
V.3. A WAGNER-transzformáció	41
V.4. Összetett vetületek.	45
VI. Modern képzetes hengervetületek	48
VI.1. BARANYI vetületei.	48
VI.2. Táblázattal megadott vetületek.	52

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek	56
VII.1. A képzetes kúp- és síkvetületek leírása	56
VII.2. Igazi képzetes kúpvetületek	57
VII.3. Igazi képzetes síkvetületek.	61
VIII. Polikónikus vetületek	64
VIII.1. Polikónikus vetületek tulajdonságai	64
VIII.2. Amerikai polikónikus vetület.	65
VIII.3. Ortogonális polikónikus vetület	66
VIII.4. Területtartó polikónikus vetület	70
IX. Pseudopolikónikus vetületek	71
IX.1. LAGRANGE vetülete	71
IX.2. Köríves fokhálózatú vetületek	74
IX.3. További képzetes kúpvetületek.	79
IX.4. Poliazimutális vetületek.	79
X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek	82
X.1. AITOFF és HAMMER vetületei.	82
X.2. WINKEL III. vetülete	84
X.3. WAGNER módosított síkvetületei	86
X.4. Retroazimutális vetületek.	88
X.5. RAISZ vetületei	88
X.6. Csillag alakú vetületek	90
XI. Különleges vetületek	91
XI.1. Szögtartó vetületek.	91
XI.2. Poliéder rendszerű vetületek	95
XI.3. Vetületanalízis	97
XII. Vetületválasztás	101
XII.1. Hagyományos szempontok.	101
XII.2. A lokális torzultság	103
XII.3. A globális torzultság	104
XII.4. Végző	107
Függelékek	109
A. Angol–magyar szószedet	109
B. Módosított polikónikus vetület.	111
C. Egyenes fokhálózatú képzetes vetületek	114
D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez	119

Előszó

Jelen jegyzet a távoktatás igényeinek kielégítésére született vetülettani témájú sorozat harmadik, befejező kötete. A fejezetek a mesterszakos Vetülettan előadás tavaszi félévének ismereteit taglalják. Bár törekedtem az egyes részekben összetartozó témákat tárgyalni, az időkeret egyenletes kitöltése érdekében előfordul, hogy egy-egy lazábban kapcsolódó anyag közös előadásba került. Kívánom, hogy a hagyományos oktatás visszatérése után is haszonnal forgassák mind a téma iránt érdeklődők, mind az előadás hallgatói.

A szövegben található kék linkek kattinthatók, ezek könnyítik a navigációt a jegyzeten belül. A jegyzetben többfelé találkozhatunk színes képletekkel. Ez a könnyebb megértést hivatott segíteni a bonyolult átalakítások során. Ha egy egyenlőségjel két oldalán azonos színű kifejezéseket látunk, akkor azok értéke megegyezik. Gyakran a törtek vagy egyenletek egyszerűsítése előtt vagy bővítését követően jelennek meg mindkét oldalon az azonos színű kifejezések az átalakítás kiemelésére. Ezért nem javasolt a jegyzet fekete-fehér nyomtatása.

Az alapismeretek fölelvenítése céljából az olvasónak ajánlatos az őszi féléves jegyzetet (Valódi vetületek) előzetesen átfutni. Ez a jegyzet többször hivatkozik az abban bemutatott vetületekre.

Ebben a jegyzetben elsősorban a képzetes vetületekről olvashatunk. Az egyes vetületek rendszeres leírását követően a vetületek felismeréséről és a legkisebb torzulású vetületek közelítő számításairól találunk leírást.

A tananyag leírásában a térképész hallgatók számára érthető nyelvezetre törekedtem, ezért ahol csak lehet, kerülöm a szabatos matematikai fogalmazást. Néhány téma (például a szögtartó képzetes vetületek) megértése azonban mély matematikai ismereteket igényel, amelyek érthető módon nem részei a térképész mesterképzésnek. Ilyen esetekben arra törekedtem, hogy a lehetőségekhez mérten próbáljak rávilágítani a felmerülő matematikai problémák komplexitására, hogy az előállt, és gyakorlatban alkalmazható vetületek ne légből kapott módon jelenjenek meg; ugyanakkor a szöveg hangvétele inkább ismeretterjesztő, mint tudományos hangvételű.

Első előadás

A képzetes vetületek elmélete

I.1. A fokhálózat képe

Előző féléből emlékezhetünk, hogy a valódi vetületek a következő tulajdonságok mindegyikét teljesítik:

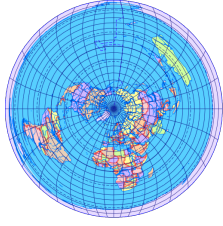
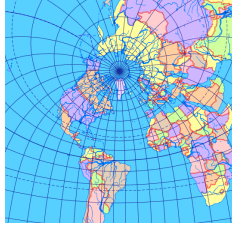
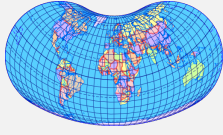



- A meridiánok képei párhuzamos vagy egy pontba összetartó egyenesek.
- A parallelkörök képei koncentrikus körök, körívek vagy párhuzamos egyenesek.
- A fokhálózat képe mindenütt merőleges.
- A meridiánok képei a parallelkörök képeit egyenközűen osztják föl.

Ha a fönti listából legalább egy feltétel nem teljesül, *képzetes vetületet* kapunk. A képzetes vetületeket a *fokhálózat képe szerint* négy csoportra osztjuk:

- Ha a parallelkörök képei teljes körök, vetületünk *képzetes síkvetület*.
- A *képzetes kúpvetületekben* a parallelkörök körívekre képeződnek le.
- A parallelkörök képei párhuzamos egyenesek, akkor *képzetes hengervetületről* beszélünk.
- Az egyik fönti csoportba sem tartozó vetületek neve *egyéb képzetes vetület*.

A valódi vetületekkel ellentétben a képzetes sík- és kúpvetületeknél nem mindig követeljük meg a parallelkörök képeinek koncentrikusságát. Mindössze a vetületekkel szembeni általános elvárásunknak kell megfelelniük, miszerint kölcsönösen egyértelmű leképezések. Ebből csak annyi következik, hogy a parallelkörök képei nem metszhetik egymást. Éppen ezért, ha képzetes vetületünk mégis koncentrikus parallelkörökkel rendelkezik, kiemeljük, és *igazi képzetes sík-* vagy *kúpvetületnek* nevezzük (I.1. ábra). A nem koncentrikus képzetes síkvetület neve *poliazimutális*, a nem koncentrikus képzetes kúpvetületé *polikónikus* vagy *pszeudopolikónikus* (utóbbi két csoport megkülönböztetését a VIII.1. fejezetben tárgyaljuk).

Mivel a képzetes vetületek között a fokhálózat képének merőlegessége nem elvárás, azokat a képzetes vetületeket, ahol a merőleges fokhálózat

	Koncentrikus	Nem koncentrikus
Sík	 Igazi képzetes síkvet.	 Poliázimutális vet.
Kúp	 Igazi képzetes kúpvet.	 (Pseudo)polikónikus vet.
Henger	 Képzetes hengervet.	—
Egyéb	 Egyéb képzetes vet.	

I.1. ábra. Képzetes vetületek osztályozása a fokhálózat képe alapján

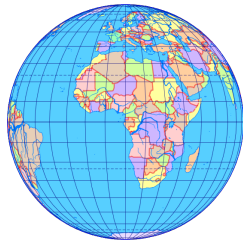
mégis megtalálható, *ortogonális* jelzővel különböztetjük meg. Az ortogonalitás a $\sigma \vartheta = 0$ kijelentésnek felel meg, így a vetületi egyenletek alapján könnyen ellenőrizhető. Példaként az I.1. ábrán látható poliazimutális vetület egyúttal éppen ortogonális is. A képzetes vetületek között nem minden vetületcsaládban létezik ortogonális leképezés.

Nagyon fontos a többértelműségek elkerülése érdekében megjegyezni, hogy osztályozásunk szigorúan a *normális* elhelyezésű vetületre vonatkozik. Nézzük meg az I.2. ábrát! Bár az a) és c) jelű vetületek képzetes vetületnek látszanak, valójában a b) és d) jelű valódi vetületek elforgatott esetei.

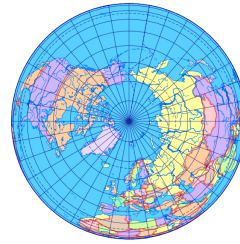
I.2. Képzetes vetületek hét nézőpontja

Ezzel el is értünk a fokhálózat-elforgatás kérdéséhez. Az I.3. ábrán MOLLWEIDE vetületét látjuk különböző elhelyezésekben. A segédpólus λ_0 hosszúsága egységes, mert ez a fokhálózat képét nem befolyásolja. A valódi

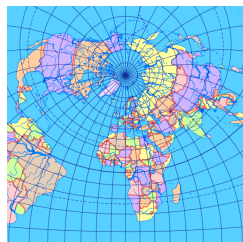
I. A képzetes vetületek elmélete



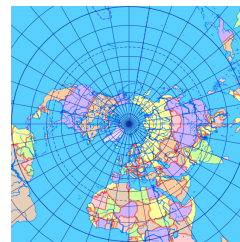
a) Ez képzetes hengervetület?



b) Inkább transzverzális ortografikus!



c) Ez poliazimutális vetület?



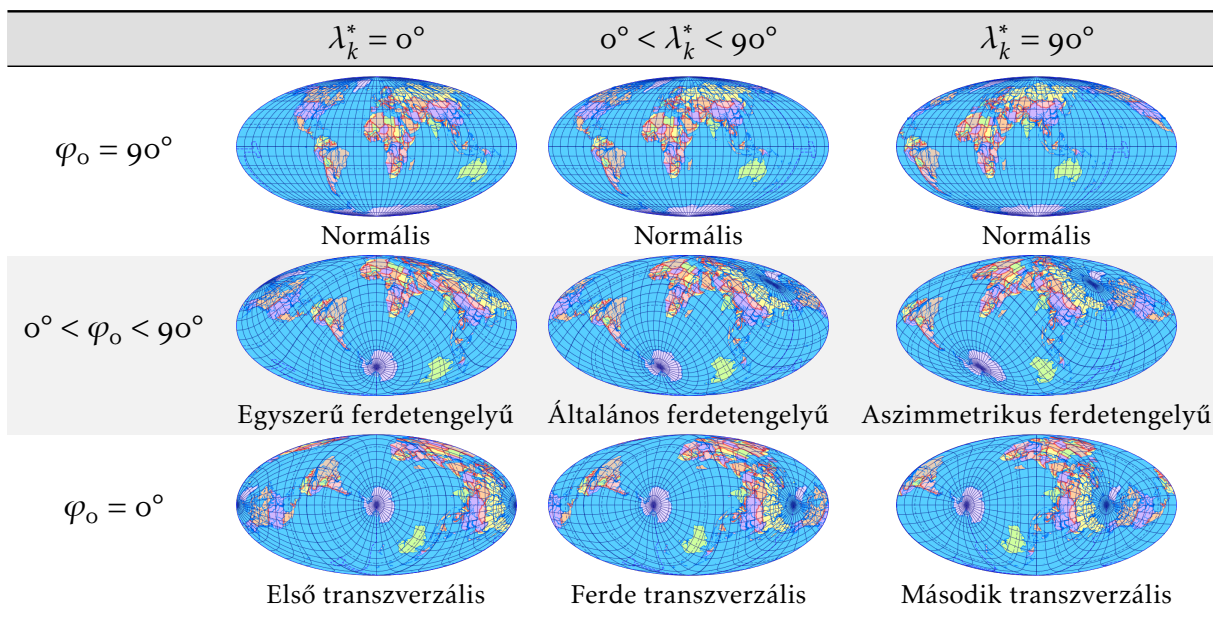
d) Inkább ferde sztereografikus!

I.2. ábra. Képzetes vagy valódi vetület?

vetületeknél mindig feltételeztük, hogy a kezdő-segédmeridián áthalad valamelyik póluson. Ezzel az egyszerűsítéssel azért élhettünk, mert a valódi vetületek forgásszimmetrikusak, a kezdő-segédmeridián megváltoztatása a fokhálózat képét csak elforgatja vagy eltolja. Ezzel ellentétben a képzetes vetületek merőben másképp reagálnak a fokhálózat-elforgatásra. WRAY kanadai geodéta 1974-ben publikálta ezzel kapcsolatos fölismeréseit.*

A vetület *normális* elhelyezésében semmilyen különleges jelenséget nem tapasztalunk. Bár a középmeridiánt megváltoztattuk, a vetület fokhálózata nem változott meg. Azt várnánk, hogy ugyanezt tapasztaljuk akkor is, ha a segédpólust az Egyenlítőre forgatjuk. Azonban fokhálózat jelentős változást

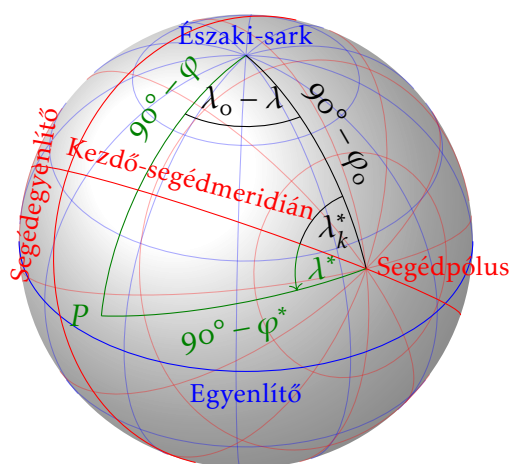
* Az elforgatott fokhálózatú képzetes vetületek kedvezőbb torzulású területeit a valódi vetületekhez hasonlóan tetszőleges területekre forgathatjuk. Mégis a gyakorlatban szinte sohasem találkozunk ilyen vetülettel. Ennek egyik oka, hogy a képzetes vetületek meglehetősen szokatlan képet adnak elforgatva. Ugyanakkor sajnos az is jelentős szempont, hogy a vetülettani szakirodalom sokszor ma is tévesen tárgyalja a vetületek elhelyezését. Fokhálózat-elforgatás helyett gyakran a gömbhöz illesztett kúp vagy henger elhelyezésével definiálják ezeket, holott ez a definíció már a nemperspektív valódi vetületek körében is értelmezhetetlen. Hogyan is forgassuk el a hengert MERCATOR-vetületben, ha a származtatás során nem is használtunk semmilyen hengert? Éppen ezért ezzel a felfogással a képzetes vetületek elforgatását nem is lehet intuitív módon magyarázni. Íme még egy ok, hogy miért nem a hengerre vetítéssel, hanem a parallelkörök képe alapján definiáltuk a hengervetületeket.



I.3. ábra. A MOLLWEIDE-vetület különböző elforgatásokban

szenvet a kezdő-segédmeridián különböző elhelyezésétől. Ezért a $\varphi_0 = 0^\circ$ esetben három elhelyezést különböztetünk meg. Az *első transzverzális*-ban az egyik pólus képe a függőleges szimmetriatengelyen helyezkedik el; a *második transzverzális*-ban a két pólus szimmetriatengelytől egyenlő távolságra található. A *ferde transzverzális* elhelyezésben a vetületnek nincs függőleges szimmetriatengelye.

Ezt szabatosan úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a vetületekben a λ^* segédhosszúságból kivonunk egy λ_k^* kezdő-segédhosszúságot, és így a *kezdő-segédmeridiánunk* a földrajzi póluson áthaladó segédmeridiánnal a gömbön ezt a λ_k^* szöget zárja be (I.4. ábra).^{*} Az első esetben $\lambda_k^* = 0^\circ$, a második esetben $\lambda_k^* = \pm 90^\circ$, míg általános esetben ezektől eltérő.



I.4. ábra. Kezdő-segédmeridián plagális vetületben

Hasonlót látunk akkor is, ha a segédpólust sem az Egyenlítőre, sem a pólusba, hanem valahova máshova helyezzük. Ekkor, ha az egyik pólus a függőleges szimmetriatengelyen található, akkor vetületünk elhelyezése *egyszerű ferdetengelyű* ($\lambda_k^* = 0^\circ$), ha $\lambda_k^* = \pm 90^\circ$, akkor *aszimmetrikus ferdetengelyű* (néhány vetület képe ebben az elhelyezésben középpontosan szimmetrikus). Ha egyik speciális eset sem teljesül, akkor *általános ferdetengelyű* vagy egyszerűen a görög ferde jelentésű *plágiosz* szó alapján *plagális* elhelyezésről beszélünk.

Az I.2. ábrára visszatérve érdekes problémát találunk. Ha például az a) jelű vetületről elfelejtjük, hogy egy transzverzális ortografikus vetület,

^{*} Itt valójában arról van szó, hogy bármilyen alakzat tetszőleges térbeli elforgatását három szög tudja leírni. Itt most a fokhálózat térbeli elforgatását a segédpólus φ_0 és λ_0 koordinátái és a λ_k^* kezdő-segédhosszúság adja meg.

könnyen azt hihetnénk, hogy egy normális elhelyezésű képzetes hengerve-tülettel állunk szemben. Az a) jelű leképezést önálló vetületnek tekintve, annak első transzverzális elhelyezése éppen a b) jelű fokhálózatot adná vissza. Most akkor a) tekinthető normális és b) első transzverzális elhelyezé-sű képzetes hengervevetületnek? Semmiképp, hiszen ezek inkább egy valódi síkvetület elhelyezései. WRAY két ökölszabályt mondott az ilyen esetekre:

- Egy vetület elhelyezései közül mindig azt tekintjük normálisnak, ame-lyikben a vetületi egyenletek egyszerűbb alakra hozhatók. A b) jelű leképezés a $\rho = R \sin \beta$ egyenlettel definiálható, míg az a) jelű ennél hosszabb kifejezéseket igényel.
- Egy vetület lehetséges elhelyezései közül mindig azt tekintjük normá-lisnak, amelyikben a fokhálózat képe nagyobb szimmetriát mutat. Az a) jelű fokhálózat csak a függőleges és a vízszintes tengelyre szimmet-rikus, míg a b) jelű vetület teljes forgásszimmetriával rendelkezik.

Természetesen ezek az ökölszabályok nem mindig adnak egyértelmű eredményt. Például LITROW vetületének (IX.1. fejezet) normális, első és második transzverzális elhelyezései közül egyiknek sem egyszerűbbek a képletei, és egyik sem mutat nagyobb szimmetriát. Ilyen esetben kény-telenek vagyunk a vetület elsőként leírt alakját normális elhelyezésűnek tekinteni.

1.3. Vetületi torzulások

A képzetes vetületek torzulási viszonyait alapvetően meghatározza, hogy fokhálózatuk ortogonális-e. Mivel a szögtartó vetületekben a szögtartás-ból következik egyúttal az ortogonalitás is, ezért szögtartó leképezéseket csak az ortogonális vetületek között találunk. Tehát a $\text{ctg } \vartheta = 0$ és $h = k$ egyenleteknek egyidejűleg kell teljesülniük, hogy szögtartó vetületekről beszélhessünk. Éppen ezért sokáig a képzetes vetületek között csak kevés szögtartó vetületet találtak. Az egyéb képzetes vetületek között azonban a szögtartás feltételét ügyesen átalakítva már változatos kinézetű szögtartó leképezésekhez jutunk (XI.1. fejezet). Ennek ellenére bátran állíthatjuk, hogy a szögtartó képzetes vetületek a gyakorlatban szinte sosem jönnek elő.

Ortogonalis vetületek esetén $\sin \vartheta = 1$, így a területtorzulás képlete to-vábbra is $\tau = hk$.^{*} A többi képzetes vetületben ugyanakkor a fokhálózati vonalak nem vetületi főirányok, így az a és b maximális és minimális hossz-torzulás nem egyezik meg a fokhálózat menti torzulásokkal. Ilyenkor a $\tau = ab = hk \sin \vartheta$ képlettel kell számolnunk. Ez sem sokkal bonyolultabb

^{*} Az egyszerre ortogonális és területtartó vetületeket *EULER-féle vetületeknek* nevezzük.

a valódi vetületekhez képest, ezért területtartó képzetes vetületeket nem nehéz találni.

A képzetes vetületek hossztorzulásai Tissot torzulási elméletének általános képleteivel számíthatók. Az általános torzulású valódi vetületek között a meridiánban hossztartó leképezések mutattak egyensúlyt a szög- és területtorzulásaikban, a képzetes vetületekben azt tapasztaljuk, hogy a középmeridiánban hossztartó vetületekben tudjuk jól egyensúlyozni a kétféle torzulást.

1.4. Képzetes vetületek alkalmazása

A legrégebbi ismert képzetes vetület PTOLEMAIOSZ II. vetülete, amely egy igazi képzetes kúpvetület. Azért alkotta, hogy valódi kúpvetületéhez képest kisebb torzulást érjen el. Azóta rengeteg ilyen vetület keletkezett. Jó részük kedvezőbb a valódi vetületeknél, de csak akkor, ha bölcsen alkalmazzuk őket.

A 3500 km-nél kisebb kiterjedésű területeknek könnyen találunk olyan valódi vetületet, amelyben a torzulások szabad szemmel nem észlelhetők. Ilyenkor nincs értelme a bonyolultabb képzetes vetületekkel vesződni, hacsak nem célunk a mérnöki precizitás. Mivel a nagyobb területeket bemutató kis méretarányú térképekben a gömb és a forgási ellipszoid közötti ~ 20 km-es eltérés jellemzően a térkép rajzi pontossága alatt marad, a képzetes vetületeket gömb alapfelületre fogjuk levezetni. Csak régi topográfiai térképeken számítsunk ellipszoid alapfelületű képzetes vetület fölbukkanására!

Itt jegyezzük meg, hogy a térinformatikai szoftverek döntő többsége abban az esetben, ha egy képzetes vetületnek nincs ellipszoidi változata, egyszerűen az ellipszoidi koordinátákat behelyettesíti a gömbi képletekbe; pontosan úgy, ahogy a Web Mercator esetén tapasztaltuk. A QGIS ilyen szempontból is igen gyakran pontatlanul kezeli a képzetes vetületeket.

Ha így járunk el, a speciális torzulások (pl. szög- vagy területtartás) elvesznek, nagyobb méretarányban már érzékelhető hibával. Világtérképen persze ez nem okoz problémát. Az ArcGIS eldugott, nehezen érthető menüpontokban rávehető néhány vetülethez a megfelelő (pl. területtartó vetülethez a területtartó) gömbvetület alkalmazására, ez korrekt megoldásnak számít. Gömbvetülettel már nagyobb méretarányban is bátran alkalmazhatjuk a képzetes vetületet, bár ennek gyakorlati haszna megkérdőjelezhető, hiszen képzetes vetületeket inkább csak igen kis méretarányban alkalmazzuk.

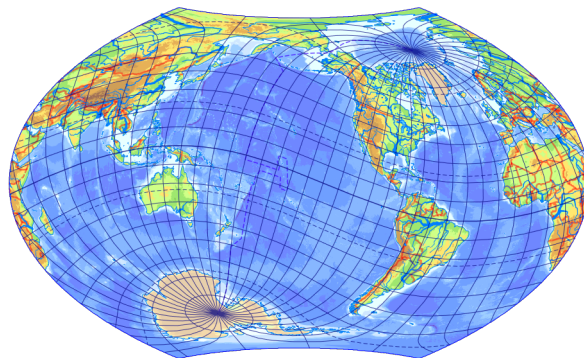
A valódi vetületek torzulásai félgömbnél nagyobb területre rendszerint elfogadhatatlan mértékűek. Ilyenkor (hacsak a tematika nem követeli meg például a meridiánkonvergencia eltüntetését, vagy ragaszkodunk a térkép

téglalap alakú kontúrjához) válasszunk képzetes vetületet! Félgömbre (annak kör alakja miatt) a valódi síkvetületek a legalkalmasabbak, kontinensek és óceánok bemutatására a valódi és a képzetes vetületek között egyaránt találunk megfelelőt. Kisebb területekre a tapasztalatok szerint számos képzetes vetület bár jóval kedvezőbb a hagyományos leképezéseknél, áttörő mértékű javulást nem tudunk velük elérni. Vigyázzunk, mert a képzetes vetületek helyes megválasztása nagy szakértelmet igényel. Nem nehéz abba a hibába esni, hogy az általunk választott képzetes vetület a területre ajánlott valódi vetületnél kedvezőtlenebb torzulású.

Egy térképvetület megválasztásánál ne csak a tematikát, hanem a célközönséget is vegyük figyelembe, és ez különösen igaz a képzetes vetületekre! Egy jobb absztrakciós készségekkel rendelkező olvasónak nem jelent nehézséget egy bonyolultabb fókálózatú vetület olvasása, de iskolai atlaszba nem célszerű plagális elhelyezésű képzetes vetületet nyomtatni. Fiatalabb olvasóközönségnek szánt térképen, vagy akár csak pusztán esztétikai szempontokból érdemes megfontolni az ortogonális vetületek alkalmazását, amely derékszögeivel a gömbi fókálózatra emlékeztet. Vegyük figyelembe, hogy az ortogonális vetületek legfőbb előnye a fókálózat elforgatásával elvész!

A pólusvonal értelmezése a tapasztalatok szerint csak szakképzett olvasóknak problémamentes. Kerüljük a pólusvonal használatát oktatási célú világtérképeken, de még sajtótérképek esetén is gondoljuk át, hogy nem lehet-e világtérképünknek póluspontos vetületet választani! A kedvezőbb torzulású pólusvonalas vetületek földrajzi atlaszban vagy szaktérképeken fogadhatók el, és olyan térképeken is bátran alkalmazzuk, ahol a pólusvonal a térképkereten kívül esik.

Soha ne használjunk pólusvonalas vetületet normálistól eltérő elhelyezésben úgy, hogy a pólusvonal a térképkereten belül megjelenik! Ha a pólusvonal még ráadásul ívelt is, akkor végképp ne! Ennek okát az olvasó könnyen megértheti az I.5. ábra alapján:



I.5. ábra. Legtöbb területen kedvező torzulású, mégsem feltétlenül jó vetületválasztás

Második előadás

Korai képzetes hengervetületek

II.1. Képzetes hengervetületek torzulásai

*Képzetes hengervetület*nek nevezzük azokat a vetületeket, amelyekben a paralelkörök képei párhuzamos egyenesek. E mellett gyakran elvárjuk, hogy a vetület legyen szimmetrikus az Egyenlítőre. Ez már mutatja, hogy ezt a vetületcsaládot Egyenlítőre szimmetrikus nagy területek (pl. teljes földfelszín, Csendes-óceán) ábrázolására alkalmazzuk. A képzetes hengervetületek a Föld gömböveit vízszintes sávokra képezik le, így szélességtől függő tematika (pl. éghajlat, növénytakaró) ábrázolására kiválóan alkalmasak. A képzetes hengervetületeket jellegzetes meridiánképeik alapján szinuszisíves, ellipszisíves, köríves, egyenes meridiánképű és egyéb képzetes hengervetületek családjára szoktuk osztani.

A függőleges koordináta nem függ a hosszúságtól, $y(\varphi)$ alakú, vagy másképp fogalmazva $\partial y / \partial \lambda = 0$. A szimmetria miatt y páratlan, szigorúan monoton növekvő függvény. A vízszintes koordináta mindkét paramétertől függ, $x(\varphi; \lambda)$ alakú, φ -ben páros, λ -ban páratlan, szigorúan monoton növekvő függvény.

Az általános képletekhez képest k és $\text{ctg } \vartheta$ egyszerűsíthető a $\partial y / \partial \lambda = 0$ helyettesítéssel.

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$
$$\text{ctg } \vartheta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

Ortogonalis vetületekben $\text{ctg } \vartheta = 0$, azaz $\partial x / \partial \varphi = 0$ lenne. Ez azonban azt jelentené, hogy a meridiánok képei függőleges egyenesek, így a valódi hengervetületek családjába jutnánk. Végül kijelenthetjük, hogy *a képzetes hengervetületek között nincs ortogonalis, tehát szögtartó sem.*

II. Korai képzetes hengervetületek

Az előző féléből idézzük föl a következő képletet, majd ebbe is helyettesítsünk $\partial y / \partial \lambda = 0$ -t!

$$\tau = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R^2 \cos \varphi} = \frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{dy}{d\varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

Tudjuk, hogy $\tau = hk \sin \vartheta$. Ebbe k és τ korábban kapott képleteit helyettesítve az egyelőre ismeretlen h kifejezhető:

$$\frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{dy}{d\varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = h \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \sin \vartheta$$
$$h = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta}$$

Létezik-e területtartó képzetes hengervetület? Vizsgáljuk meg a $\tau = 1$ egyenletet!

$$\frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{dy}{d\varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = R^2 \frac{\cos \varphi}{\frac{dy}{d\varphi}}$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán kizárólag φ függvényei állnak, világos, hogy a bal oldali derivált is független λ -tól. Ha x deriváltja λ szerint konstans, akkor x mindenképp λ lineáris függvénye. Ezt aprópénzre váltva kijelentjük: *létezik területtartó képzetes hengervetület, de az ilyen vetületek paralelköreit a meridiánok képei mindig egyenközűen osztják.*

II.2. Globuláris vetületek

A nagy földrajzi felfedezésekkel a világ kitárult, és hamarosan megjelentek az első világtaszok is. Azonnal megjelent az igény a világtérképek bemutatására. Ebben az időben a térképkészítők a mai negatív trendekkel ellentétben még tudták, hogy MERCATOR vetülete kizárólag navigációs térképeknek alkalmas, így más vetületeket kerestek. Az első képzetes vetületek a Földet két féltékére osztva, egymás mellé helyezett térképeken ábrázolták. A félgömb távolról nézve kör alakú, így kézenfekvő a térkép körkontúrban történő megjelenítése. A félgömböt körkontúrban ábrázoló képzetes vetületeket *globuláris vetületeknek* hívjuk.

Az első globuláris vetületek eredete vita tárgyát képezi, egyes források szerint az arab tudósok az európaiakat megelőzve már 1000 körül is rendelkeztek globuláris vetülettel. Az újkor hajnalán az atlaszkészítők újabb

II. Korai képzetes hengervetületek

és újabb fokhálózatokkal próbálták javítani a torzulásokat, számtalan változatuk létezik. Némelyik globuláris vetület parallelkörei már körívek, így a modern beosztás szerint ezeket inkább a pszeudopolikónikus vetületek közé soroljuk (IX.2. fejezet). A globuláris vetületeket mára kiszorították a félgömbre kedvezőbb torzulású transzverzális valódi síkvetületek.

A két leginkább elterjedt globuláris vetület APĪANUS nevét viseli. A körkontúr mellett közös tulajdonságuk a vízszintes egyenesként megjelenő parallelkörök, valamint a hossztartó Egyenlítő és középmeridián. Az első vetület, amely valószínűleg az Amerikát fölfedező VESPUCCI alkotása a XVI. század legelején, kör alakú meridiánokat alkalmaz. A második vetület pontos eredete vitatott, de gyaníthatóan nem APĪANUS műve. Ez fél ellipszis alakú meridiánokra tér át.

APĪANUS I. vetületében tehát a meridiánok képei körívek. A körök középpontjai a szimmetria miatt az x tengelyen helyezkednek el. A $(d; 0)$ középpontú kör egyenlete (II.1. ábra):

$$(x - d)^2 + y^2 = \rho^2$$

Mivel az Egyenlítő hossztartó, ezért a vízszintes tengelyen (azaz $y = 0$ helyettesítés esetén) $x = R\widehat{\lambda}$ -t kell kapnom:

$$\begin{aligned} (R\widehat{\lambda} - d)^2 &= \rho^2 \\ d &= R\widehat{\lambda} - \rho \end{aligned}$$

A középmeridián hossztartása miatt az Északi-sark képe az Egyenlítő képétől $R\pi/2$ távolságra van. Minden körív áthalad a pólusponton, ezért a körívek egyenletének teljesülniük kell az $x = 0$ és $y = R\pi/2$ helyettesítésre:

$$\begin{aligned} (-d)^2 + \left(R\frac{\pi}{2}\right)^2 &= \rho^2 \\ (\rho - R\widehat{\lambda})^2 + \left(R\frac{\pi}{2}\right)^2 - \rho^2 &= 0 \\ R^2\widehat{\lambda}^2 - 2R\widehat{\lambda}\rho + R^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 &= 0 \\ \rho &= R\frac{\widehat{\lambda}^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2\widehat{\lambda}} \end{aligned}$$

A középmeridián hossztartásából:

$$y = R\widehat{\varphi}$$

II. Korai képzetes hengervetületek

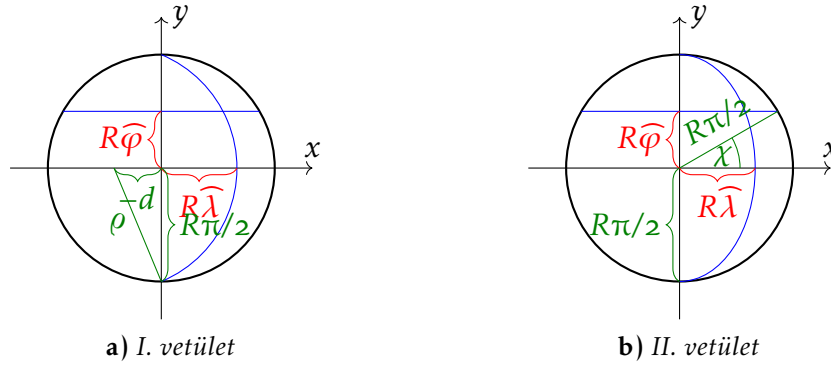
Ezt és a $d = R\widehat{\lambda} - \rho$ egyenletet a kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$(x - R\widehat{\lambda} + \rho)^2 + (R\widehat{\varphi})^2 = \rho^2$$

$$x - R\widehat{\lambda} + \rho = \pm \sqrt{\rho^2 - R^2\widehat{\varphi}^2}$$

$$x = R\widehat{\lambda} - \rho \pm \sqrt{\rho^2 - R^2\widehat{\varphi}^2}$$

A vetület szimmetriája úgy biztosított, ha a \pm előjel a keleti féltéken pozitív, a nyugatin pedig negatív. h képletét kiszámítva megállapítható, hogy a parallelkörök nem ekvidisztánsak (II.3. ábra), tehát a vetület biztosan nem területtartó.



II.1. ábra. APIANUS vetületeinek elve

APIANUS II. vetületének meridiánjai félellipszisek, féltengelyeik az x és y tengelyekre esnek. Az ellipszisek függőleges féltengelye a középmeridián hossztartása okán $R\pi/2$, vízszintes féltengelyük az Egyenlítő hossztartása miatt $R\widehat{\lambda}$. Így az ellipszisek egyelete:

$$\frac{x^2}{(R\widehat{\lambda})^2} + \frac{y^2}{(R\frac{\pi}{2})^2} = 1$$

A középmeridián hossztartó:

$$y = R\widehat{\varphi}$$

Visszahelyettesítve:

$$\frac{x^2}{R^2\widehat{\lambda}^2} = 1 - \frac{R^2\widehat{\varphi}^2}{R^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$x = R\widehat{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{2\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2}$$

II. Korai képzetes hengervetületek

Vizsgáljuk meg a vetület torzulásait!

$$k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \left(\frac{2\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2}$$

A paralellkörök tehát ekvidisztánsak. Vajon területtartó-e a vetület?

$$h = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dy}{d\varphi} = \frac{-4\widehat{\lambda}\widehat{\varphi}}{\pi^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2}}$$

$\tau = hk \sin \vartheta \neq 1$, tehát a vetület általános torzulású. A II.2. ábrán látható, hogy a vetület póluspontos, de póluspontja nem a valódi vetületeknél megszokott hegyes alakú, hanem esztétikai szempontból kedvezőbb, sima meridiánképpel rendelkezik.

A globuláris vetületeket a modern kartográfiában már nem használjuk, azonban APIANUS II. vetületének számtalan ma is kedvelt származtatott változata létezik. Ezek mind az *ellipszisíves vetületek* közé tartoznak, a félév során megismerkedünk velük. A származtatott vetületekben a φ szélesség helyett a könnyebb kezelhetőség érdekében egy χ paramétert alkalmazunk, amelyet a II.1. ábráról leolvasható módon a $\sin \chi = 2\widehat{\varphi}/\pi$ egyenlettel definiálunk. Ekkor a vetületi egyenletek a következő, egyszerűbb alakot öltik:

$$x = R\widehat{\lambda}\sqrt{1 - \sin^2 \chi} = R\widehat{\lambda} \cos \chi$$

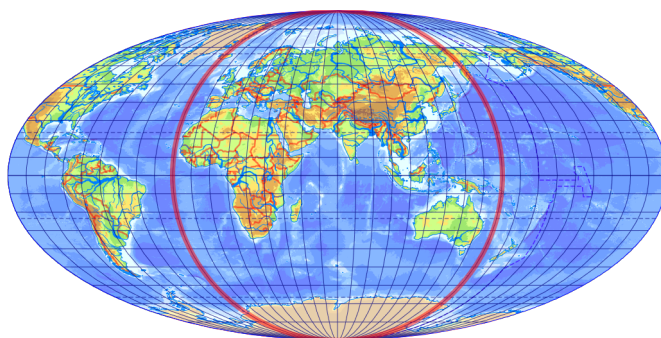
$$y = R\frac{\pi}{2} \sin \chi$$

II.3. Kiterjesztett globuláris vetületek

Természetesen a korai világtalaszokban a teljes gömbfelszín összefüggő ábrázolására is igény mutatkozott. APIANUS II. vetületét bár csak a félgömb ábrázolására alkottuk meg, a vetület egyenleteit a teljes gömbfelszínre is kiterjeszthetjük változatlan alakban. Így a Földet ellipszis kontúrban ábrázoló vetületet kapunk, amelynek középső félgömbje az eredeti globuláris vetület (II.2. ábra).

APIANUS I. vetületeinek egyenletei is alkalmazhatók lennének a teljes gömbre, azonban az így kapott vetület torzulásai indokolatlanul nagyok lennének. AGNESE XVI. századi olasz térképész ezért a $|\lambda| > 90^\circ$ hosszúságokra is ugyanakkora, $R\pi/2$ sugarú körökkel terjesztette ki a vetületet, mint

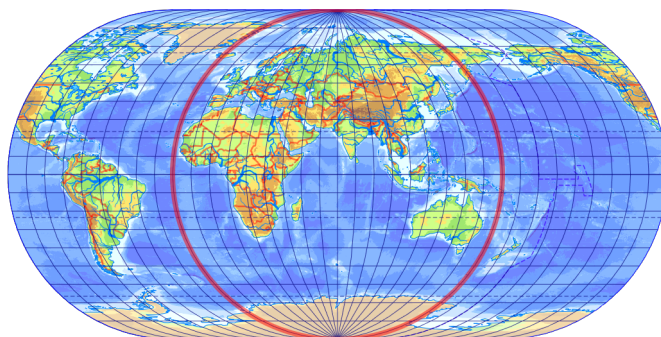
II. Korai képzetes hengervetületek



II.2. ábra. *APIANUS II. vetülete (középen a globuláris vetület)*

amekkora az eredeti körkontúr volt. Az Egyenlítő továbbra is hossztartó. A vetület egyenletei megegyeznek *APIANUS I.* vetületével, azzal az eltéréssel, hogy $|\lambda| > 90^\circ$ esetén $\rho = \pm R\pi/2$ helyettesítendő.

A vetületet arról lehet fölismerni, hogy bár pólusvonalas, a térkép közepén látható félgömb (amely valójában *APIANUS I.* vetülete) mégis póluspontos (II.3. ábra). Ezt a vetületet tévesen *ORTELIUS*nak tulajdonítják, aki világtalaszában alkalmazta.



II.3. ábra. *ORTELIUS*-vetület (középen *APIANUS I.* vetülete)

II.4. MERCATOR–SANSON-vetület

Készítsünk olyan képzetes hengervetületet, amely a középmeridiánban és minden paralelkörben hossztartó! A középmeridián hossztartásából következik, hogy:

$$y = R\widehat{\varphi}$$

II. Korai képzetes hengervetületek

Másfelől $k = 1$:

$$\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1$$

$$\int dx = R \int \cos \varphi d\lambda$$

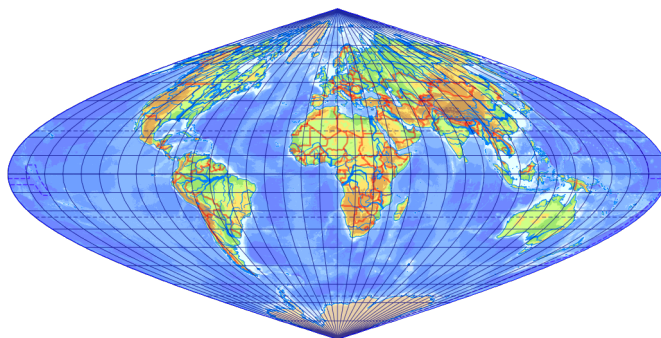
$$x = R\widehat{\lambda} \cos \varphi + f(\varphi)$$

A középmeridiánra vonatkozó szimmetria csak úgy teljesülhet, ha az $f(\varphi)$ integrációs konstans 0, ezért bátran elhagyhatjuk. Hogyan alakulnak a torzulások?

$$h = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dy}{d\varphi} = -\widehat{\lambda} \sin \varphi$$

Vetületünk területtartó, mert $hk \sin \vartheta = 1$. A torzulási viszonyok az Egyenlítőnél és a középmeridiánban is kedvezők ($h = k = 1$ és $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$). Távolodva $\operatorname{ctg} \vartheta$ igen gyors növekedésnek indul, nagy mértékű szögtorzulásokat okozva (II.4. ábra). Tanulság, hogy ha egyszerre sok torzulást akarunk teljesen kiküszöbölni, valamelyik figyelmen kívül hagyott torzulási jellemző mindig jelentősen megnő.



II.4. ábra. MERCATOR–SANSON-vetület

Ezt a leképezést COSSIN francia térképész alkotta meg a XVI. század végén, de MERCATOR–SANSON- vagy SANSON–FLAMSTEED-vetületnek* nevezük. Mivel meridiánjai egy szinuszív affin képei, ezért *szinuszoidális vetület* néven is ismert.

* MERCATORnak valójában semmi köze nincs ehhez a vetülethez; azért tulajdonítják neki, mert HONDIUS a MERCATOR-tól megvásárolt és továbbra is MERCATOR-atlasz néven árusított világatlaszában ebben a vetületben ábrázolta a Földet.

II. Korai képzetes hengervetületek

Lokálisan kedvező torzulásai miatt elvétve alkalmazzák alacsony szélességeken fekvő kontinensek területtartó bemutatására. Torzulási izovonalai hiperbolaágakra emlékeztetnek, kereszt alakú területekre tehát jó lenne, azonban a gyakorlatban kevés ilyen alakú terület jön elő. Gyakorlati jelentőségét az adja, hogy belőle tudjuk majd származtatni a modern *szinuszi* vetületeket, amelyeknek hasonló meridiánképük lesz.

Mivel ezt a vetületet használták regionális térképekhez is, létezik ellipszoidi változata. Ezt a gömbi vetülethez képest azonos feltételekkel definiáljuk. A hossztartó középmeridiánból:

$$y = \int_0^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A paralelkörök hossztartásából:

$$x = N(\Phi) \widehat{\Lambda} \cos \Phi$$

Az ellipszoidi változat is területtartónak adódik.

Harmadik előadás

Általános torzulású képzetes hengervetületek

III.1. Loximutális vetület

Néha a térkép tematikája érdekes torzulási viszonyokat igényel. SIEMON német térképész 1935-ben arra a problémára találta meg a megoldást, hogy egy adott kikötőből a hajóutak hosszát és irányát bemutassa. Ha a hajók ortodróma mentén közlekedtek volna, akkor POSTEL vetülete ferdetengelyű elhelyezésben megfelelő lett volna. SIEMON hasonló tulajdonságú vetületet keresett, csak loxodrómákra. A síkvetületek azon tulajdonságát, hogy a segédpólusból kiinduló ortodrómák (segédmeridiánok) a segédpólusban való szögükkel jelennek meg, *azimutálisságnak* nevezzük. Mivel ez a vetület a kezdőpontból kiinduló loxodrómákra nézve azimutális, TOBLER amerikai térképész nyomán a *loximutális* nevet kapta.

A kikötő helyezkedjen el a $\lambda_n = 0^\circ$ középmeridiánon! Ez nem jelent megkötést, mert a vetület középmeridiánja mindig tetszőlegesen megváltoztatható. A kezdőpont szélessége φ_n . A loxodróma α azimutja és s hossza az alapszakos jegyzetből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\widehat{\lambda} - \widehat{\lambda}_n}{\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_n}{2}\right)}$$
$$s = R \frac{\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n}{\cos \alpha}$$

Így megkaptuk a vetület polárkoordinátában értelmezett egyenleteit. Átszámítva derékszögű koordinátákra:

$$y = s \cos \alpha = R \frac{\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n}{\cos \alpha} \cos \alpha = R(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n)$$

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

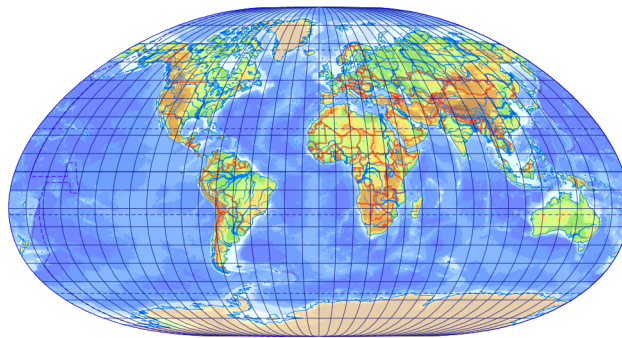
Ebből már látható, hogy a keletkező vetület a képzetes hengervetületek családjába tartozik. A másik koordináta:

$$x = s \sin \alpha = R \frac{\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n}{\cos \alpha} \sin \alpha = R(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n) \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= R \frac{\widehat{\lambda}(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_n)}{\operatorname{Intg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) - \operatorname{Intg}(45^\circ + \frac{\varphi_n}{2})}$$

Fönti képlet nullával való osztásra vezet, ha $\varphi = \varphi_n$. Ilyenkor azonban a két pontot összekötő loxodróma egy parallelív, amelynek azimutja 90° , hossza pedig $x = R\widehat{\lambda} \cos \varphi_n$. A vetület a két pólusban végtelennel való osztásra vezet, így $x \rightarrow \infty$, a vetület tehát annak ellenére póluspontos, hogy nem annak látszik.

A vízszintes koordináta λ lineáris függvénye, tehát a vetület parallel-körei ekvidisztánsak. A középmeridián és a φ_n szélesség a kezdőponton áthaladó loxodrómák, tehát szintén hossztartók. Ha $\varphi_n \neq 0$, a vetület képe aszimmetrikus az Egyenlítőre (III.1. ábra). Ez a vetület általános torzulású, mert $hk \sin \vartheta \neq 1$.



III.1. ábra. Loximutális vetület Lisszabonra

III.2. Keverékvetületek

Vetülettani felfedezéseink során már megtanultuk, hogy minden vetületnek vannak kedvezőtlen tulajdonságai. Például a MERCATOR–SANSON-vetület az Egyenlítő környékét igen kedvezően mutatja be, a magasabb szélességek viszont igen jelentős szögtorzulást szenvednek el. Az alakzatok megnyúlása észak–déli irányú. Másfelől a négyzetes hengervetület szintén az Egyenlítő környékére kedvező, a magas szélességeken pedig épp kelet–nyugat irányba húzza szét a térképi tartalmat. Ha valahogy tudnánk a két

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

vetület előnyeit egyesíteni, akkor azt várjuk, hogy a magas szélességeken a két vetület torzulásai kiegyenlítik egymást.

Egy A és B vetület *keverékvetületének* nevezzük azt a leképezést, amely a két vetület átlagából és egy c átméretezésből áll:

$$x = c \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y = c \frac{y_A + y_B}{2}$$

A keverékvetületek sok mindent őrizhetnek az eredeti vetületek tulajdonságaiból. A fokhálózat képe mindkét kiindulási vetületre emlékeztet. Ha volt a két vetületnek közös hossztartó vonala, akkor az az új vetületben is egyenközű ($c = 1$ esetben hossztartó) lesz. A keverékvetület ugyanakkor nem őrzi meg a kiindulási vetületek szög- vagy területtartását, ezért a keverékvetületek maguktól általános torzulásúak lesznek. Területtartó keverékvetületet a IV.1. fejezetben ismertetett módszerrel állítanak elő. A keverékvetület ötlete ECKERT nevéhez kötődik, aki 1906-ban hat vetületet állított elő ezzel a módszerrel.

Képezzük a **MERCATOR–SANSON** és a **négyszetes hengervetület** keverékét!

$$x = c \frac{R\widehat{\lambda} \cos \varphi + R\widehat{\lambda}}{2} = cR \frac{\widehat{\lambda}}{2} (1 + \cos \varphi)$$

$$y = c \frac{R\widehat{\varphi} + R\widehat{\varphi}}{2} = cR\widehat{\varphi}$$

x képleteibe $\lambda = \pm 180^\circ$ -ot behelyettesítve látszik, hogy a pólusvonal hossza ($cR\pi$) fele az Egyenlítő képi hosszának ($2cR\pi$). A középmeridián képi hossza az y egyenletbe $\varphi = \pm 90^\circ$ helyettesítéssel szintén fele ($cR\pi$) az Egyenlítő hosszának.

Válasszuk meg a c konstánst úgy, hogy a vetület teljes területe egyezzen meg a gömbfelszín területével! Az ilyen tulajdonságú vetületeket *területegyenlőnek* nevezzük, és a területtorzulások csökkenését várjuk tőlük. A térkép területe fölbontható egy $cR\pi$ oldalú négyzetre, és két $cR\pi$ alapú, $cR\pi/2$ magasságú szinuszív területére. A félperiódusnyi, A alapú, H magasságú szinuszív területe:

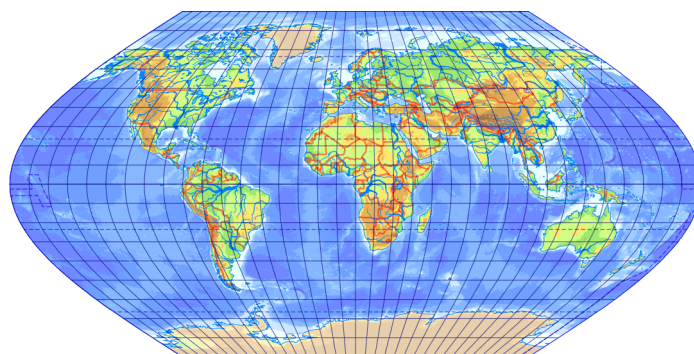
$$\int_0^A H \sin \frac{\pi x}{A} dx = -\frac{HA}{\pi} \cos \frac{\pi A}{A} + \frac{HA}{\pi} \cos \frac{0\pi}{A} = \frac{2HA}{\pi}$$

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

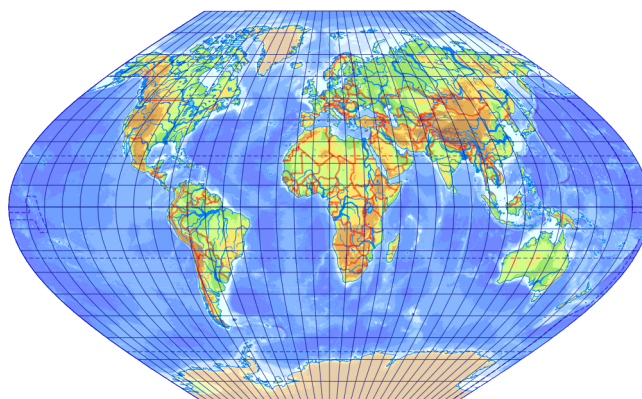
Tehát a négyzet területe $c^2 R^2 \pi^2$, a szinuszíveké $c^2 R^2 \pi$. Mivel a három terület összege egyenlő a $4R^2 \pi$ gömbfelszínnel:

$$c^2 R^2 \pi^2 + 2c^2 R^2 \pi = 4R^2 \pi$$

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}}$$



a) ECKERT V. vetülete



b) WINKEL I. vetülete

III.2. ábra. Szinuszíves keverékvetületek

A torzulások:

$$h = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{c}{\sin \vartheta}$$

$$k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{c}{2} \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\text{ctg } \vartheta = \frac{\partial x / \partial \varphi}{\partial y / \partial \varphi} = -\frac{\widehat{\lambda}}{2} \sin \varphi$$

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

Ezt a vetületet ECKERT V. vetületének nevezzük, általános torzulású (III.2. ábra). Német nyelvterületen világtérképek vetületeként időnként előfordul.

Nem csak utólagos átméretezéssel lehet a keverékvetület területegyenlőségét biztosítani. Ha mindkét eredeti vetület területegyenlő, akkor keverékük is területegyenlő lesz, és így nem kell az átméretezés miatt a középmeridián hossztartásáról lemondanunk. Ez adta az alapötletet WINKEL I. vetületének. A MERCATOR–SANSON-vetület területtartó, tehát a terület-egyenlőség eleve biztosított. A négyzetes hengervetület helyett válasszunk egy olyan meridiánban hossztartó valódi hengervetületet, amely terület-egyenlő!

A meridiánban hossztartó hengervetület képe egy téglalap, amelynek magassága $R\pi$, szélessége $2R\pi \cos \varphi_n$. Területe akkor egyezik meg a gömb felszínével, ha:

$$\begin{aligned} 2R^2\pi^2 \cos \varphi_n &= 4R^2\pi \\ \cos \varphi_n &= \frac{2}{\pi} \\ \varphi_n &\approx \pm 50^\circ 27' 35'' \end{aligned}$$

A vetületi egyenletek tehát előállnak a MERCATOR–SANSON és a $\pm\varphi_n$ normálparalelkörű négyzetes hengervetület átlagaként. A vetület pólusvonala kb. harmada (pontosan $1/\pi$ -szerese) az Egyenlítő hosszának.

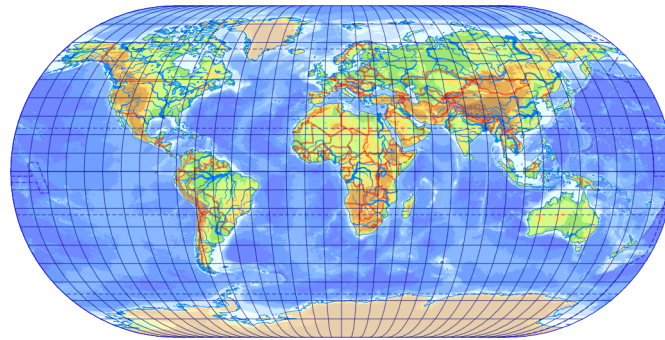
ECKERT III. vetületét APPIANUS II. vetülete és a négyzetes hengervetület keverékeként kapjuk, majd a szokásos módon átméretezzük, hogy terület-egyenlő legyen:

$$\begin{aligned} x &= c \frac{R\widehat{\lambda} \cos \chi + R\widehat{\lambda}}{2} = cR \frac{\widehat{\lambda}}{2} (1 + \cos \chi) \\ y &= c \frac{R\widehat{\varphi} + R\widehat{\varphi}}{2} = cR\widehat{\varphi} = cR \frac{\pi}{2} \sin \chi \end{aligned}$$

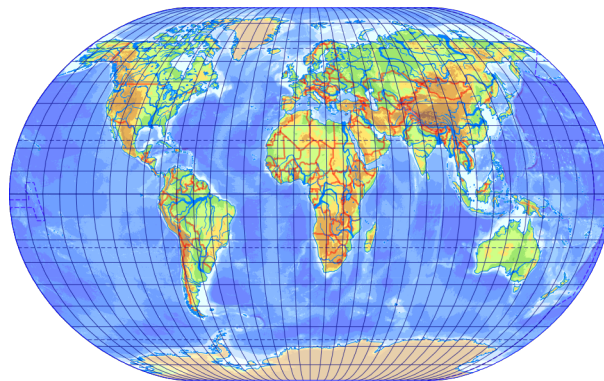
Mind a középmeridián, mind a pólusvonal hossza ($cR\pi$) fele az Egyenlítő képi hosszának. A határoló meridiánok képe körív (III.3. ábra). A térkép területe így fölbontható egy $cR\pi$ oldalhosszú négyzetre és két $cR\pi/2$ sugarú félkörre. Ezek együttes területe a területegyenlőség céljából $4R^2\pi$:

$$\begin{aligned} c^2 R^2 \pi^2 + \frac{c^2 R^2 \pi^2}{4} \pi &= 4R^2\pi \\ c &= \sqrt{\frac{4}{\pi + \frac{\pi^2}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{4\pi + \pi^2}} \end{aligned}$$

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek



a) ECKERT III. vetülete



b) WINKEL II. vetülete

III.3. ábra. Ellipszisíves keverékvetületek

A vetület torzulásai:

$$h = \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{c}{\sin \vartheta}$$

$$k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{c}{2} \frac{1 + \cos \chi}{\cos \varphi}$$

$$\text{ctg } \vartheta = \frac{\partial x / \partial \varphi}{\partial y / \partial \varphi} = \frac{-c \frac{\widehat{\lambda}}{2} \sin \chi \frac{d\chi}{d\varphi}}{c \frac{\pi}{2} \cos \chi \frac{d\chi}{d\varphi}} = -\frac{\widehat{\lambda}}{\pi} \text{tg } \chi$$

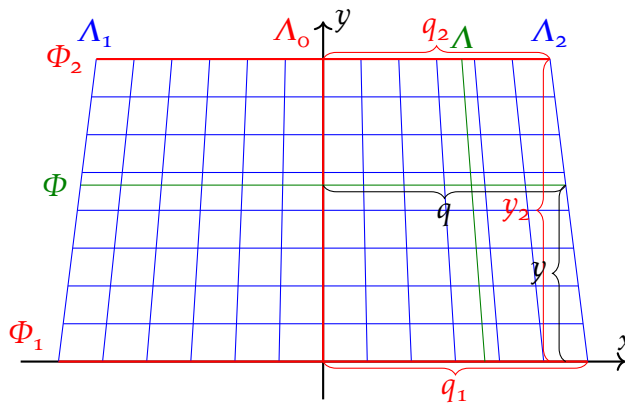
Európában készült világtérképeken találkozhatunk ezzel az általános torzulású vetülettel. Mivel az északi féltekén $\chi \leq \varphi$, a hossztorzulások kissé kedvezőbbek ECKERT V. vetületénél; viszont a pólusban a szögtorzulások minden határon túl megnőnek, amint az a $k \rightarrow \infty$ és $\text{ctg } \vartheta \rightarrow \infty$ határértékekből is látszik. Kellemes alakja miatt ajánlható, ha a magas szélességek kevésbé fontosak a tematika szempontjából.

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

WINKEL II. vetülete újfent a korábban kiszámolt területegyenlő meridiánban hossztartó hengervetülettel keveri APIANUS II. vetületét, így pólusvona-
la rövidebb. Bonyolultsága miatt nem ismerik, pedig ECKERT III. vetületénél kedvezőbb szögtorzulásokkal rendelkezik.

III.3. A poliédervetület

Az ellipszoidot osszuk föl 1° -os foktrapézokra, majd minden egyes foktrapézt képezzünk le síktrapézokba egy olyan képzetes hengervetülettel, amely a két határoló paralellkörben és a középmeridiánokban hossztartó, továbbá minden meridiánjának képe egyenes! Az ehhez hasonló egyenes meridiánképű képzetes hengervetületek az újkor hajnalán népszerűek voltak, tágabb kitekintés a C. függelékben található. Az így keletkezett szelvények mérete minden gömbömben eltérő, így nem mozaikolhatók össze a síkban, azonban a lapok egy diszkögömbre emlékeztető poliéderré összehajthatók, ezért a vetületet *poliédervetület*nek nevezzük.



III.4. ábra. A poliédervetület elve

A középmeridián hossztartásából:

$$y = \int_{\Phi_1}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A határoló paralellkörök hossztartásából a trapéz alapjainak fele:

$$q_{1,2} = N(\Phi_{1,2}) \cos \Phi_{1,2} \frac{\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1}{2}$$

III. Általános torzulású képzetes hengervetületek

A III.4. ábrán látható két hasonló derékszögű háromszög befogóiból:

$$\frac{y_2}{q_1 - q_2} = \frac{y}{q_1 - q}$$

$$q = \frac{q_2 y + q_1 (y_2 - y)}{y_2}$$

Végül a meridiánok a q hosszúságú paralelkört egyenközüen osztják:

$$x = q \frac{\widehat{\Lambda} - \widehat{\Lambda}_0}{\frac{\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1}{2}} =$$

$$= (\widehat{\Lambda} - \widehat{\Lambda}_0) \frac{N(\Phi_2) \cos \Phi_2 \int_{\Phi_1}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi + N(\Phi_1) \cos \Phi_1 \int_{\Phi}^{\Phi_2} M(\Phi) d\Phi}{\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} M(\Phi) d\Phi}$$

Ezt a vetületet LICHTENSTERN porosz katonatiszt nyomán számos európai ország (pl. Németország, Osztrák–Magyar Monarchia, Oroszország) katonai topográfiai térképeken alkalmazta az első világháború előtt. Magyarország területén a harmadik katonai felmérés térképein találkozunk vele. MÜFFLING-vetületnek is nevezik. A vetület általános torzulású, de területtorzulása igen csekély (a határoló paralelkörök lokálisan területtartók).

Ezt a vetületet a modern térinformatika nem támogatja, ezért a georeferálás során közelítenünk kell a vetület jellegét. A MERCATOR–SANSON-vetület ellipszoidi változata nem csak a két határoló paralelkörben, hanem minden paralelkörben hossztartó. Meridiánjai nem egyenesek, hanem szinuszivek, azonban kis területen a görbületüktől eltekinthetünk. Így ez a vetület max. 20 m-es hiba mellett jól közelíti a poliédervetületet, így a pontatlanság a szelvények rajzi pontossága alatt marad.

Negyedik előadás

A módosított földrajzi szélesség

IV.1. ECKERT területtartó vetületei

Az eddig tárgyalt képzetes vetületek eddig egy kivétellel mind általános torzulásúak voltak. Szükségünk lenne ezért egy olyan módszerre, amely valahogyan területtartó vetületet készít az általános torzulású vetületünkből. Erre szolgál a *módosított földrajzi szélesség* módszere, amelynek eredményeképp:

- A térkép kontúrvonala és a meridiánok képei változatlanok maradnak.
- Általános torzulású vetületből területtartó keletkezik.
- A fokhálózat alapvető tulajdonságai közül kizárólag a szélességek elhelyezkedése változik meg, ezért többek között a póluspontosságot megőrzi.

Már a II.1. fejezet óta tudjuk, hogy a területtartó képzetes hengervetületek paralelkörei ekvidisztánsak. Éppen ezért jelen módszer kizárólag olyan képzetes hengervetületekkel működik, amelyeknek paralelkörei ekvidisztánsak. Másik feltételünk a kiindulási vetület területgyenlősége, másképp nem lehetne az adott kontúrban területtartó vetületet szerkeszteni. Utóbbi nem okoz gondot, hiszen egy kicsinyítés-nagyítással bármelyik vetület területgyenlővé tehető.*

Mivel a meridiánok képeit nem szeretnénk változtatni, adódik, hogy csak a szélességeket fogjuk módosítani egy $\psi(\varphi)$ páratlan, differenciálható függvényvel. A vetület kontúrvonalát meg akarjuk őrizni, ebből $\psi(90^\circ) = 90^\circ$ következik. Elvárjuk továbbá a függvény szigorú monoton növekedését, hogy a térkép ne csavarodjon maga alá. Ezt követően az eredeti vetület

* A módszer általánosságát mi sem szemlélteti jobban, mint hogy a XX. század közepén sokan állítottak elő területtartó képzetes hengervetületet a segítségével. A feladat munkaigénye miatt itt csak a három legfontosabbat számoljuk végig, de léteznek területtartó vetületek parabola alakú meridiánokkal (CRASTER-vetület), különböző póluspontos és pólusvonalas vetületek kúpszelet alakú meridiánokkal (PUTNINŠ vetületei) és feltűnően rövid pólusvonallal rendelkező leképezések (MCBRYDE–THOMAS-vetületek). Ezek jellemzően a nyugati térképészetben terjedtek el. A korabeli paradigma az volt, hogy a jó térkép területtartó, ezért ebben az időszakban általános torzulású vetület alig keletkezett.

IV. A módosított földrajzi szélesség

egyenleteibe φ helyett a ψ módosított szélességet helyettesítjük be. Ez a módszer a következő előadáson ismertetett fokhálózat-átszámozás egy speciális esetének tekinthető. Az általános képletek kissé bonyolultak, ezért érthetőbb, ha konkrét vetületen mutatjuk be a módszer működését. Eszünkbe jut ECKERT V. vetülete, amely területegyenlő, parallelkörökben ekvidisztáns, de mégsem területtartó. Az eredeti egyenletekbe helyettesítsünk be ψ -t φ helyére!

$$\begin{aligned}x &= cR \frac{\widehat{\lambda}}{2} (1 + \cos \psi) \\y &= cR \widehat{\psi} \\c &= \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}}\end{aligned}$$

A IV.1. ábrán látszik, hogy a ψ szélességhez tartozó gömböv képe fölosztható egy kék téglalagra, és két piros koszinuszív alatti területre. A téglalap területe nem probléma, mert szélessége $cR\pi$, magassága az y értéke, azaz $cR\widehat{\psi}$, a terület ezek szorzata. A koszinuszív alatti terület izgalmasabb, mert ehhez integrálni kell. Ráadásul a koszinuszív magassága nem egységnyi, hanem $cR\pi/2$, így az integrandust ezzel szoroznunk kell. Mivel függőleges irányban a koszinuszív nem $\pi/2$, hanem $cR\pi/2$ távolságban éri el a zérushelyét, ezért ezt figyelembe véve az egész integrált szorozom cR -rel:

$$cR \int_{0^\circ}^{\psi} \frac{cR\pi}{2} \cos \psi \, d\psi = \frac{c^2 R^2 \pi}{2} \sin \psi - 0$$

A gömböv felszíne: $2R^2\pi(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$, az alapszokról ismert képlet az Egyenlítő és a φ szélességek között $2R^2\pi \sin \varphi$ -re egyszerűsödik. Ha a vetület területtartó, akkor a kék téglalap és a két piros koszinuszív alatti terület összege épp ezt kell kiadja:

$$\begin{aligned}c^2 R^2 \left(\pi \widehat{\psi} + 2 \frac{\pi}{2} \sin \psi \right) &= 2R^2 \pi \sin \varphi \\ \frac{4}{\pi + 2} (\widehat{\psi} + \sin \psi) &= 2 \sin \varphi\end{aligned}$$

c -t visszahelyettesítve ellenőrizhető, hogy a $\psi = \varphi = 90^\circ$ -ra az egyenlet teljesül, tehát a hozzárendelés megfelel az elvárásainknak. Mivel ψ az

IV. A módosított földrajzi szélesség

egyenletből nem fejezhető ki, ez egy *implicit függvény*. Megoldása numerikus módszerekkel történhet. A torzulások számításához képezzük az implicit deriváltat φ szerint!

$$c^2(1 + \cos \psi) \frac{d\psi}{d\varphi} = 2 \cos \varphi$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{2}{c^2} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \psi}$$

Látható, hogy ψ elvárásunknak megfelelően valóban szigorúan monoton nő, mert deriváltja pozitív. A láncszabály alkalmazásával:

$$h = \frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = c \frac{2}{c^2} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \psi} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{c}{2} \frac{1 + \cos \psi}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\varphi}}{\frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi}} = \frac{\partial x}{\partial \psi} \bigg/ \frac{dy}{d\psi} = -\frac{\widehat{\lambda}}{2} \sin \psi$$

Ellenőrizhetjük, hogy valóban $hk \sin \vartheta = 1$, tehát az így kapott ECKERT VI. vetülete területtartó. k képlete bonyolult, tehát a középmeridián ekvidisztanciája elveszett. Sőt, a pólusban $h = 0$, vagyis meridián irányban elfogadhatatlan mértékben összenyomja a térképi tartalmat. Ezt $k \rightarrow \infty$ kompenzálja, hogy a területtartás meglegyen, így a magas szélességek szögtorzulási viszonyai nem éppen kedvezők (IV.2. ábra). Európai készítésű világtérképeken gyakran előkerül, az általános torzulású keverékvetületeknél népszerűbb.

Készítsünk területtartó vetületet ECKERT III. vetületéből! A számolás megkönnyítésére az egyszerűbb χ -t tartalmazó egyenletekből indulunk ki, χ helyére írva a ψ módosított szélességet:

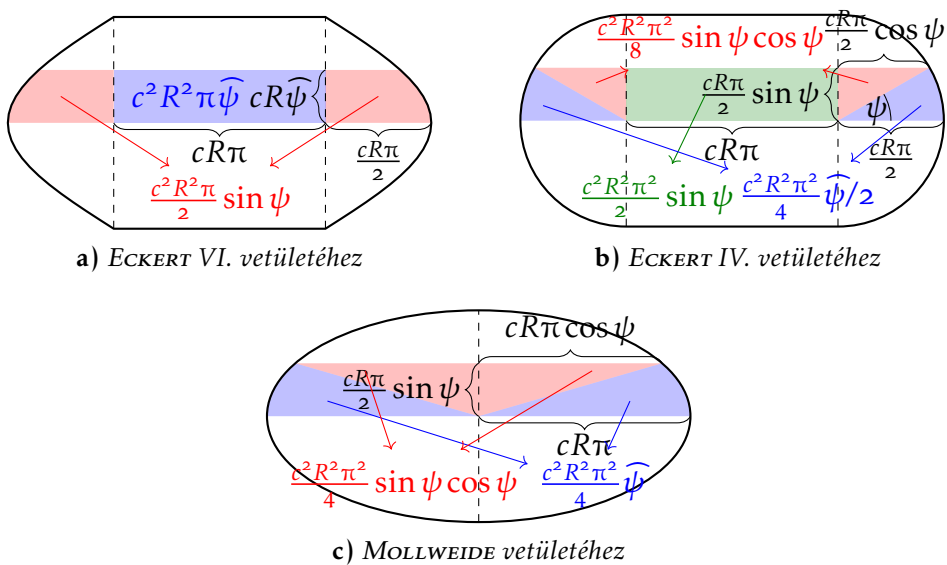
$$x = cR \frac{\widehat{\lambda}}{2} (1 + \cos \psi)$$

$$y = cR \frac{\pi}{2} \sin \psi$$

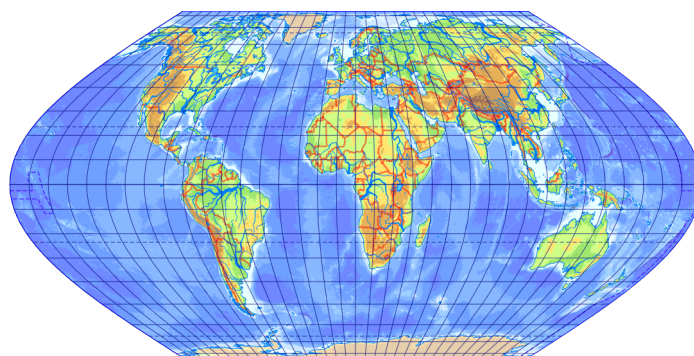
$$c = \frac{4}{\sqrt{4\pi + \pi^2}}$$

A IV.1. ábrán ezúttal háromféle alakzatra bontjuk föl a gömböv képét. A zöld téglalap területét egyszerű meghatározni, a magasság most $y = cR\pi/2 \sin \psi$. A két kék körcikk sugara $cR\pi/2$. Magasságuk $cR\pi/2 \sin \psi$, így

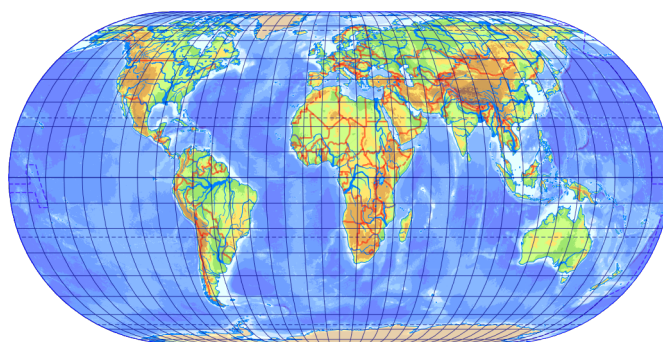
IV. A módosított földrajzi szélesség



IV.1. ábra. A módosított szélesség módszere



a) ECKERT VI. vetülete



b) ECKERT IV. vetülete

IV.2. ábra. Területtartó keverékvetületek

IV. A módosított földrajzi szélesség

a szinusz definícióját fölhasználva kiderül, hogy ψ éppen a körcikk szöge. A kör (vagyis a 2π szögű körcikk) területe $r^2\pi$, ebből egyenes arányossággal kiderül, hogy a körcikké $r^2\widehat{\psi}/2$. Már csak a két piros derékszögű háromszög van hátra. Ismert a függőleges befogó és az átfogó (ez utóbbi a körcikk sugara), így PITAGORASZ tételéből a vízszintes befogó is számítható. Ehhez fölhasználjuk, hogy $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$. A derékszögű háromszög területe a két befogó szorzatának a fele. A vetület akkor lesz területtartó, ha a gömbön képe, vagyis a zöld téglalap, a két kék körcikk és a két piros derékszögű háromszög területe éppen kiadja a gömbön $2R^2\pi \sin \varphi$ felszínét:

$$\begin{aligned} c^2 R^2 \left(\frac{\pi^2}{2} \sin \psi + 2 \frac{\pi^2}{8} \widehat{\psi} + 2 \frac{\pi^2}{8} \sin \psi \cos \psi \right) &= 2R^2 \pi \sin \varphi \\ \frac{16}{4\pi + \pi^2} \left[\frac{\pi}{2} \sin \psi + \frac{\pi}{4} \widehat{\psi} + \frac{\pi}{8} \sin(2\psi) \right] &= 2 \sin \varphi \\ 4 \sin \psi + 2\widehat{\psi} + \sin(2\psi) &= (4 + \pi) \sin \varphi \end{aligned}$$

Újfent implicit függvényt kaptunk, a pólusban az egyenlet teljesül, tehát eddig rendben. Ellenőrizzük a szigorú monotonitást az első egyenlet implicit deriváltja alapján:

$$\begin{aligned} c^2 R^2 \left[\frac{\pi^2}{2} \cos \psi + \frac{\pi^2}{4} (1 + \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \right] \frac{d\psi}{d\varphi} &= 2R^2 \pi \cos \varphi \\ \frac{c^2 \pi}{2} \left(\cos \psi + \frac{2 \cos^2 \psi}{2} \right) \frac{d\psi}{d\varphi} &= 2 \cos \varphi \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{4 \cos \varphi}{c^2 \pi \cos^2 \psi + \cos \psi} \end{aligned}$$

Ez valóban pozitív szám. A torzulások:

$$\begin{aligned} h &= \frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = c \frac{\pi}{2} \cos \psi \frac{4 \cos \varphi}{c^2 \pi \cos^2 \psi + \cos \psi} \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{2 \cos \varphi}{c} \frac{1}{1 + \cos \psi} \frac{1}{\sin \vartheta} \\ k &= \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{c}{2} \frac{1 + \cos \psi}{\cos \varphi} \\ \text{ctg } \vartheta &= \frac{\partial x}{\partial \psi} \bigg/ \frac{dy}{d\psi} = \frac{-cR \frac{\widehat{\lambda}}{2} \sin \psi}{cR \frac{\pi}{2} \cos \psi} = -\frac{\widehat{\lambda}}{\pi} \text{tg } \psi \end{aligned}$$

Bár a képletek ránézésre csak a területtartást bizonyítják ($hk \sin \vartheta = 1$), ECKERT IV. vetülete a térinformatikában általában elérhető területtartó képzetes hengervetületek közül az egyik legkedvezőbb (IV.2. ábra), ECKERT

vetületei közül ezt alkalmazzák a legtöbbet. Területtartást igénylő tematikákhoz világtérképekre erősen ajánlott. A meridiánok képei ellipszisívek. A leképezés egyetlen hátulütője a pólusvonal és a magas szélességeken e miatt minden határon túl megnövekvő szögtorzulás ($h = 0$; $k \rightarrow \infty$ és $\vartheta \rightarrow \infty$). ECKERT területtartó vetületeit is 1906-ban publikálta.

IV.2. MOLLWEIDE vetülete

APIANUS II. vetületét közvetlenül nem alakíthatjuk területtartóvá, mert a módosított szélesség módszere kizárólag területgegyenlő vetületekre működik. Azonban, ha a vetületet egy kissé lekicsinyítjük egy c konstanssal, akkor területgegyenlővé tehető. APIANUS II. vetülete egy $R\pi$ nagyfőeltengelyű, $R\pi/2$ kisméltengelyű ellipsziskontúrban található. A kicsinyítést követően mindkét főeltengelyt c -vel szorozzuk. Az ellipszis területe a két főeltengely és π szorzata, amely megegyezik a $4R^2\pi$ gömbfelszínnel:

$$\frac{c^2 R^2 \pi^3}{2} = 4R^2 \pi$$

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Ha ezzel a konstanssal beszorozzuk az egyenleteket, akkor már elvégezhető a módosított szélesség módszere. Ismét a χ -t tartalmazó képletekbe helyettesítjük ψ -t:

$$x = cR\widehat{\lambda} \cos \psi$$

$$y = cR\frac{\pi}{2} \sin \psi$$

Ezúttal már rutinosak vagyunk a módosított szélesség megtalálásában. A IV.1. ábrán látható, hogy a gömböv képe két piros derékszögű háromszögre és két kék alakzatra bontható. A piros derékszögű háromszög befogói az x és y vetületi egyenletekből adódnak, előbbibe $\lambda = 180^\circ$ helyettesítéssel. Mindjárt észre vesszük, hogy igazából a kék és piros alakzatok méretei csak abban különböznek ECKERT IV. vetületétől, hogy most minden vízszintes irányban a duplájára lett nyújtva, így területük értelemszerűen kétszeresre változik. A területek összege megint $2R^2\pi \sin \varphi$:

$$c^2 R^2 \left(2 \frac{\pi^2}{4} \widehat{\psi} + 2 \frac{\pi^2}{4} \sin \psi \cos \psi \right) = 2R^2 \pi \sin \varphi$$

$$\frac{8}{\pi^2} \left[\frac{\pi}{2} \widehat{\psi} + \frac{\pi}{4} \sin(2\psi) \right] = 2 \sin \varphi$$

$$2\widehat{\psi} + \sin(2\psi) = \pi \sin \varphi$$

IV. A módosított földrajzi szélesség

90°-ot behelyettesítve az egyenlet teljesül. Az implicit függvény deriváltja a levezetés első sorából számítva:

$$c^2 R^2 \frac{\pi^2}{2} (1 + \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \frac{d\psi}{d\varphi} = 2R^2 \pi \cos \varphi$$

$$\frac{c^2 \pi}{2} 2 \cos^2 \psi \frac{d\psi}{d\varphi} = 2 \cos \varphi$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{c^2 \pi \cos^2 \psi}$$

A derivált pozitív.

$$h = \frac{dy}{d\psi} \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = c \frac{\pi \cos \psi}{2 \sin \vartheta} \frac{2 \cos \varphi}{c^2 \pi \cos^2 \psi} = \frac{\cos \varphi}{c \cos \psi} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$k = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = c \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\partial x}{\partial \psi} \Big/ \frac{dy}{d\psi} = \frac{-cR \widehat{\lambda} \sin \psi}{cR \frac{\pi}{2} \cos \psi} = -2 \frac{\widehat{\lambda}}{\pi} \operatorname{tg} \psi$$

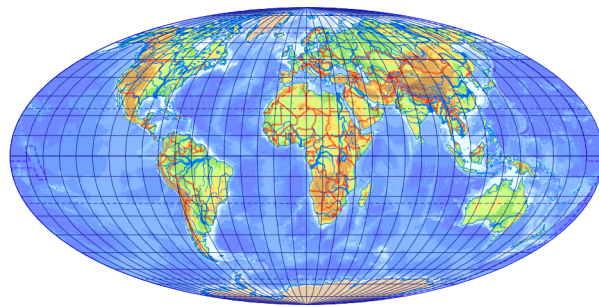
A képletekből látható, hogy a vetület területtartó. Az Egyenlítőn $k \approx 0,9003$, innen k folyamatosan nő, az 1 értéket (parallelkör menti hossz-tartás) a $\varphi \approx \pm 40,7367^\circ$ szélességen éri el. Szögtorzulásai igen nagyok (IV.3. ábra).

Ezt a leképezést a német MOLLWEIDE 1805-ben alkotta, de csak akkor terjedt el, amikor a francia BABINET *homolografikus vetület* néven kezdte népszerűsíteni. Régebben közkedvelt volt, ma kedvezőtlen torzulásai miatt már kevésbé alkalmazzuk.* A vetület póluspontos, meridiánjai a póluspontban simák, ez kifejezetten alkalmassá teszi a fokhálózat elforgatására.† BARTHOLOMEW skót térképész atlaszaiban található, 1948-ban megjelent *Atlantis* vetület valójában ez a leképezés ferde transzverzális elhelyezésben ($\varphi_0 = 0^\circ$; $\lambda_0 = 60^\circ$; $\lambda_k^* = -135^\circ$).

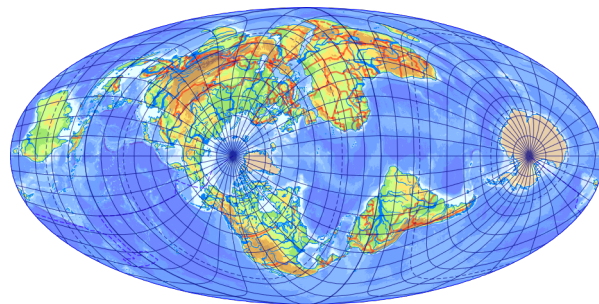
* Ritkán előfordul, hogy ez a vetület merőleges affinitással (a területtartást megőrzendő vízszintes irányban d , függőleges irányban $1/d$ szorzóval) átalakítva például kör alakban (TOBLER-vetület) vagy hossztartó Egyenlítővel (BROMLEY-vetület) jelenik meg.

† Nehéz dolga van annak, aki térinformatikai szoftverben próbál fokhálózat-elforgatást végrehajtani! Az ArcGIS általában nem ismeri az elforgatott képzetes vetületeket, ezt többnyire csak a valódi vetületek körében támogatja. A QGIS papíron minden betáplált vetületet képes elforgatni, ha a vetület definíciójában a +proj=kód helyére +proj=ob_tran +o_proj=kód kerül. Azonban nincs benne köszönet, mert a gyakorlatban vektoros állományainkból kusza vonalak lesznek, a rasztereket adathiányos sávokkal rajzolja tele.

IV. A módosított földrajzi szélesség



a) Normális elhelyezésben



b) Atlantis vetület (ferde transzverzális, az Atlanti-óceánra)

IV.3. ábra. *MOLLWEIDE-vetület*

Ötödik előadás

A fokhálózat-átszámozás

V.1. A módszer elve

Mind a MERCATOR–SANSON, mind az APIANUS II. vetület a vetületi kezdőpont közelében kedvező torzulású, míg a kontúrvonal közelében meglehetősen kedvezőtlen. WAGNER és SIEMON az 1930-as években állt elő azzal az ötlettel, hogy a vetületnek csak a kedvező részeit használjuk, és abban ábrázoljuk a teljes Földet.

Az ötlet lényege, hogy a vetületi egyenletekben φ helyére a ψ átszámozott szélességet, míg λ helyére a ζ átszámozott hosszúságot helyettesítjük. Mivel az eredeti vetület fokhálózatának jellegét szeretnénk megőrizni, fontos, hogy a szélességi körök szélességi körök, míg a hosszúsági körök hosszúsági körök maradjanak. Ezt úgy lehet elérni, hogy ψ kizárólag φ , míg ζ kizárólag λ függvénye. Természetesen az átszámozó függvények szigorúan monoton nőnek és folytonosan differenciálhatók.

Tekintsük a legegyszerűbb átszámozást:

$$\psi = m\varphi$$

$$\zeta = n\lambda$$

Ha $m; n < 1$, akkor a fenti átalakítás eredményeként csak az eredeti vetület egy kis részét fogjuk használni. Mivel így a térképünk teljes területe is lecsökkent, az eredeti méretarányt egy $1/\sqrt{mn}$ -szeres nagyítással állítjuk vissza. WAGNER az n és m paramétereket közvetlenül nem használta, hanem helyette a középmeridián és az Egyenlítő hosszának arányát (p) és a pólusvonal és az Egyenlítő hosszának arányát (q) használta. Ezek a határoló $\widehat{\psi}_H = m\pi/2$ szélességből és $\widehat{\zeta}_H = n\pi$ hosszúságból adódnak, hiszen a pólus és a 180° -os meridián ezekre az értékekre fognak átszámozódni. Két vetületre bemutatjuk, hogy m és n hogyan kapható meg p és q ismeretében:

A MERCATOR–SANSON-vetület esetén:

$$p = \frac{y(\psi_H)}{x(0; \zeta_H)} = \frac{R\widehat{\psi_H}}{R\widehat{\zeta_H}} = \frac{m\frac{\pi}{2}}{n\pi} = \frac{m}{2n}$$

$$q = \frac{x(\psi_H; \zeta_H)}{x(0; \zeta_H)} = \frac{R\widehat{\zeta_H} \cos \psi_H}{R\widehat{\zeta_H}} = \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)$$

$$m = \frac{2}{\pi} \arccos q$$

$$n = \frac{\arccos q}{\pi p}$$

APIANUS II. vetülete esetén:

$$p = \frac{y(\psi_H)}{x(0; \zeta_H)} = \frac{R\widehat{\psi_H}}{R\widehat{\zeta_H}} = \frac{m\frac{\pi}{2}}{n\pi} = \frac{m}{2n}$$

$$q = \frac{x(\psi_H; \zeta_H)}{x(0; \zeta_H)} = \frac{R\widehat{\zeta_H} \sqrt{1 - \left(\frac{2\widehat{\psi_H}}{\pi}\right)^2}}{R\widehat{\zeta_H}} = \sqrt{1 - m^2}$$

$$m = \sqrt{1 - q^2}$$

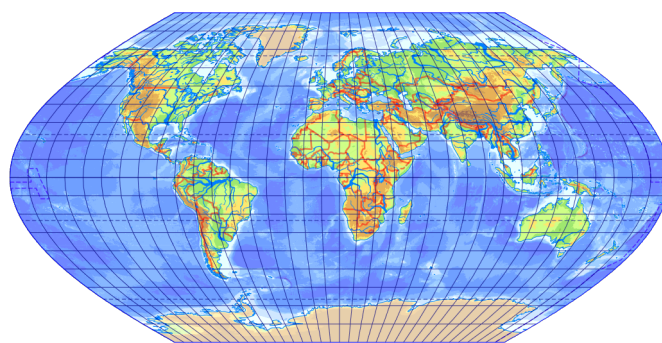
$$n = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{2p}$$

WAGNER III. vetülete a MERCATOR–SANSON-vetület átszámolása a $p = q = 1/2$ (azaz ebből $m = n = 2/3$) választással, míg WAGNER VI. vetülete APIANUS II. vetülete $p = q = 1/2$ (vagyis $m = n = \sqrt{3}/2$) átszámozással. Ezek az általános torzulású vetületek megszólalásig hasonlítanak ECKERT vetületeire, azonban a középmeridián hossztartását megőrzik.* Fontos különbség, hogy az átszámozott vetületek meridiánjai csak a szinusz- illetve ellipszisívek középső szakaszaiból állnak, így kevésbé görbülnek, mint a keverékvetületekben (V.1. ábra). Ezekkel a vetületekkel szinte soha nem találkozunk, azonban elvük segít megérteni egy közkedvelt orosz vetületet.

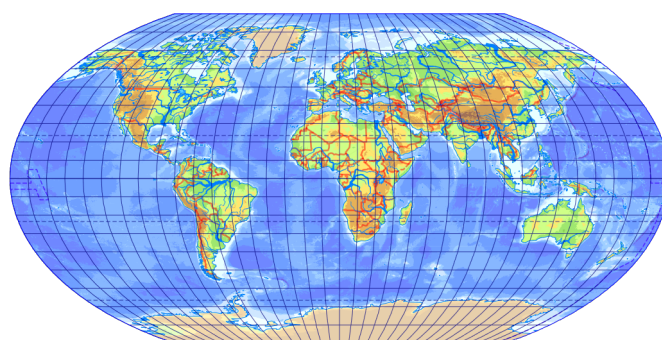
V.2. KAVRAJSZKIJ VII. vetülete

Ha általános torzulású képzetes hengervetületet keresünk, és a torzulások egyensúlyán kívül semmi sem számít, válasszuk KAVRAJSZKIJ VII.

* A torzulások kedvezőbb elosztása érdekében előfordulhat, hogy a vetületen végrehajtunk az Egyenlítő irányában egy d -szeres merőleges affinitást. Ez a középmeridián hossztartását továbbra is megőrzi, azonban az Egyenlítő helyett másik szélesség lesz hossztartó.



a) WAGNER III. vetülete



b) WAGNER VI. vetülete

V.1. ábra. Átszámított fókálózatú vetületek

vetületét! Az általánosan ismert képzetes hengervetületek közül ez a legkisebb torzulású. A vetületet négy feltétel definiálja:

- A paralellkörök képeit a meridiánok egyenközűen osztják.
- Meridiánjai ellipszisívek, de a $\pm 120^\circ$ -os meridiánok képe körív.
- Pólusvonal fele olyan hosszú, mint az Egyenlítő.
- Középmériánban hossztartó.

Az első két feltételből láthatjuk, hogy APIANUS II. vetületéből kell kivágni a megfelelő darabot átszámozással. Ebben a vetületben a $\pm 90^\circ$ -os meridiánok képei a körívek. Ahhoz, hogy a $\pm 120^\circ$ -os hosszúság számozódjon ide, a hosszúságok átszámozására $n = 90^\circ/120^\circ = 3/4$ adódik. A harmadik feltétel miatt $q = 1/2$, azaz WAGNER képleteit alkalmazva $m = \sqrt{1 - q^2} = \sqrt{3}/2$ adódik. A negyedik feltétel miatt a WAGNER által javasolt $1/\sqrt{mn}$ -szeres nagyítás nem lesz jó. Helyette olyan nagyítást keresünk, amelyik a függőleges tengelyt állítja vissza. Mivel a szélességeket m -szeresre zsugorítottuk, a középmérián hossztartása $1/m = 2/\sqrt{3}$ -szoros nagyítástól áll helyre. A vetületi egyenletek tehát:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{R}{m} \widehat{\zeta} \sqrt{1 - \left(\frac{2\widehat{\psi}}{\pi}\right)^2} = \frac{R}{m} n \widehat{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{2m\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2} = \\
 &= R \frac{6}{4\sqrt{3}} \widehat{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}\widehat{\varphi}}{2\pi}\right)^2} = R \frac{\sqrt{3}}{2} \widehat{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2} \\
 y &= \frac{R}{m} \widehat{\psi} = \frac{R}{m} m \widehat{\varphi} = R \widehat{\varphi}
 \end{aligned}$$

Számítsuk ki a torzulásokat is!

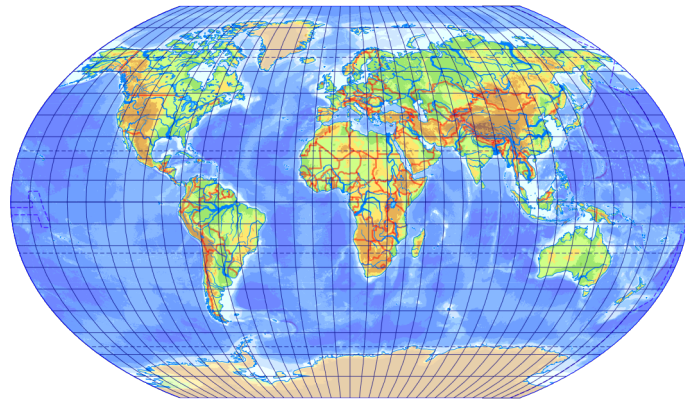
$$\begin{aligned}
 h &= \frac{dy}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} \\
 k &= \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2}}{\cos \varphi} \\
 \text{ctg } \vartheta &= \frac{\partial x / \partial \varphi}{dy / d\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \widehat{\lambda} \frac{-\frac{3\widehat{\varphi}}{\pi^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}\widehat{\varphi}}{\pi}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Eltételezve attól a kellemetlenségtől, hogy a pólusvonalban $k \rightarrow \infty$, egy nagyon kedvező vetületet kaptunk.* Egyetlen hibája, hogy КАВРАЈСКИЈ 1939-ben oroszul publikálta, így a világ nagy részén nyelvi akadályok miatt nem tudott elterjedni, többnyire Kelet-Európa és a volt szovjet államok atlaszaiban bukkanhat föl. Az eredeti levezetés még nem használta a fokhálózat-átszámolást, attól függetlenül született. Világtérképnek rendkívül alkalmas (V.2. ábra), ha a földrajzi övezeteket vízszintes sávokban akarjuk megjeleníteni (pl. éghajlati övek).

V.3. A WAGNER-transzformáció

Olyan fokhálózat-átszámolásunk már van, amelyik megőrzi a középperidián ekvidisztanciáját, és a vetületnek csak a kedvező részeiből indul ki. Olyan is van, amelyik területtartót készít, de az egész kontúrvonalat kitölti. Tudnánk-e olyan fokhálózat-átszámolást megadni, amely egy területtartó vetületnek csak a kedvező, középső részeiből indul ki, és az eredmény területtartó? Mivel egy képzetes hengervetület csak akkor lehet területtartó, ha

* Az ismert képzetes hengervetületek közül ez a vetület a legkisebb torzulásúak között van. De hogy nézhet ki a lehető legkisebb torzulású képzetes hengervetület? Erről nem sokat tudunk, csak annyit, hogy GYÖRFFY belátta, hogy a legjobb képzetes hengervetület középperidiánban hossztartó. Hát ez nem sok információ, tekintve, hogy a kedvezőtlen MERCATOR-SANSON-vetület szintén középperidiánban hossztartó...



V.2. ábra. KAVRAJSZKIJ VII. vetülete

paralelkörei ekvidisztánsak, így ezt meg kell őriznünk. Az új hosszúság tehát lineáris függvénye a réginek:

$$\zeta = n\lambda$$

A vetület csak akkor maradhat területtartó, ha bármelyik gömböv felszíne az átszámolás után egyenes arányosságban marad a régivel. Kicsinyítsünk minden gömbövet m -szeresre! A gömböv új felszíne ($2R^2\pi \sin \psi$) meg kell egyezzen a régi felszín ($2R^2\pi \sin \varphi$) m -szeresével:

$$\begin{aligned} 2R^2\pi \sin \psi &= m2R^2\pi \sin \varphi \\ \psi &= \arcsin(m \sin \varphi) \end{aligned}$$

Ezt az ötletet SIEMON dolgozta ki, majd WAGNER alkotott belőle területtartó vetületeket, ezért a területtartó fókálózat-átszámolás neve WAGNER-transzformáció.* Ha $m; n < 1$, akkor ismét a vetületből kivágtott középső részt fogjuk alkalmazni (V.3. ábra). A vetület még nem területtartó, mert a területeket a hosszúságok átszámolása n -szeresre, míg a szélességek átszámolása m -szeresre kicsinyítette. A területek így mn -szeresükre változtak, ezért vissza kell őket nagyítanunk $1/mn$ -szeresre. A területek a nagyítás tényezőjével négyzetesen arányosak, ezért egy $1/\sqrt{mn}$ -szeres nagyítás állítja helyre a területtartást.†

* WAGNER készített olyan térképeket is, amelyek a 60° -os szélességekig csekély ($\tau < 1,2$) területtorzulással rendelkeznek. Ezt a területtartó vetületekből kiindulva a $\psi = \arcsin[m_1 \sin(m_2 \varphi)]$ és $\zeta = n\lambda$ átszámolásokkal érte el. Ezek WAGNER II. és V. vetületei. Látható, hogy m_2 minél jobban eltér 1-től, annál jobban tér el a vetület a területtartástól, így a területtorzulások jól szabályozhatók.

† Természetesen a területtartás megmarad, ha ezek után vízszintes irányban d -szeresre, függőleges irányban $1/d$ -szeresre nyújtom a vetületet, ez egy további lehetőség a torzulások finomhangolására.



V.3. ábra. A WAGNER-transzformáció elve

WAGNER ezúttal is a középmeridián és az Egyenlítő hosszának arányát (p) és a pólusvonal és az Egyenlítő hosszának arányát (q) adta meg paraméternek. Nézzük meg ismét két vetületre, hogy ezek a határoló $\psi_H = \arcsin m$ szélességből és $\widehat{\zeta}_H = n\pi$ hosszúságból hogyan adódnak!

A MERCATOR–SANSON-vetület esetén:

$$p = \frac{y(\psi_H)}{x(0; \widehat{\zeta}_H)} = \frac{R\widehat{\psi}_H}{R\widehat{\zeta}_H} = \frac{\arcsin m}{n\pi}$$

$$q = \frac{x(\psi_H; \widehat{\zeta}_H)}{x(0; \widehat{\zeta}_H)} = \frac{R\widehat{\zeta}_H \cos \psi_H}{R\widehat{\zeta}_H} = \cos \arcsin m = \sqrt{1 - m^2}$$

$$m = \sqrt{1 - q^2}$$

$$n = \frac{\arcsin \sqrt{1 - q^2}}{\pi p}$$

A MOLLWEIDE-vetülethez trükközni kell, mert eleve átszámozott szélességet használ. Ezért ψ_H -t q -ból kifejezzük, majd az implicit függvényből kapjuk meg m -et:

$$q = \frac{x(\psi_H; \widehat{\zeta}_H)}{x(0; \widehat{\zeta}_H)} = \frac{cR\widehat{\zeta}_H \cos \psi_H}{cR\widehat{\zeta}_H} = \cos \psi_H$$

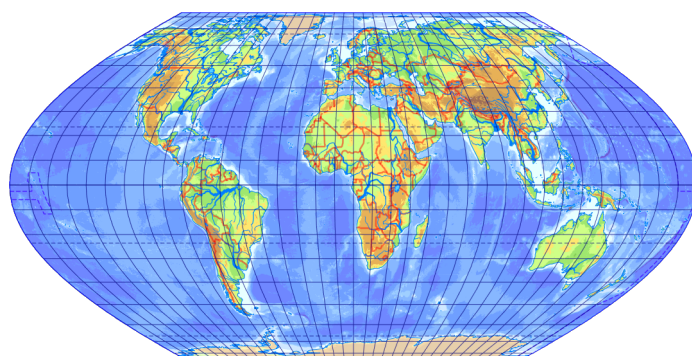
$$p = \frac{y(\psi_H)}{x(0; \widehat{\zeta}_H)} = \frac{cR\frac{\pi}{2} \sin \psi_H}{cR\widehat{\zeta}_H} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{1 - q^2}}{n\pi} = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{2n}$$

$$2\widehat{\psi}_H + \sin(2\psi_H) = m\pi \sin 90^\circ$$

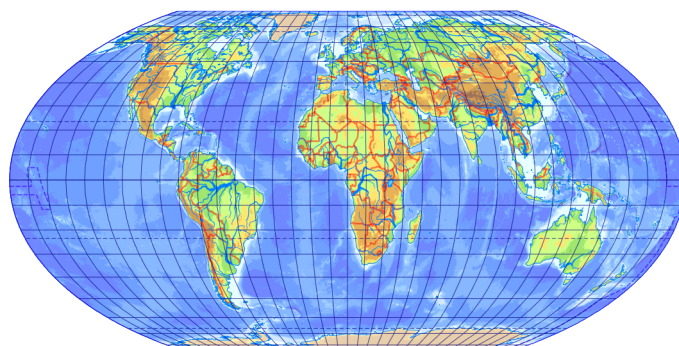
$$m = \frac{2 \arccos q + \sin(2 \arccos q)}{\pi}$$

$$n = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{2p}$$

Bonyolultsága miatt a MOLLWEIDE-vetület átszámolásait nem alkalmazzák, pedig területtartásuk ellenére meglepően kellemes képet adnak. A $p = q = 1/2$ választás az V.4. ábrán látható igen kedvező torzulású WAGNER IV. vetülete, a többi lehetőséget WAGNER MOLLWEIDE-sornak nevezte.



a) KAVRAJSZKIJ VI. vetülete (WAGNER I. vetülete)



b) WAGNER IV. vetülete

V.4. ábra. WAGNER-transzformált vetületek

Gyakorlati szempontból jelentősebb a MERCATOR-sor, vagyis a MERCATOR-SANSON-vetület területtartó átszámolása. A $p = q = 1/2$ feltételből $m = \sqrt{3}/2$; $n = 2/3$ és $1/\sqrt{mn} = \sqrt{3}$ adódik, vagyis a vetületi egyenletek:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{R\widehat{\zeta}}{\sqrt{mn}} \cos \psi = \frac{Rn\widehat{\lambda}}{\sqrt{mn}} \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \\
 &= \frac{Rn\widehat{\lambda}}{\sqrt{mn}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} = R \frac{2\sqrt{3}}{3} \widehat{\lambda} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} \\
 y &= \frac{R\widehat{\psi}}{\sqrt{mn}} = \frac{R \arcsin \sin \psi}{\sqrt{mn}} = \frac{R \arcsin(m \sin \varphi)}{\sqrt{mn}} = R \sqrt{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi\right)
 \end{aligned}$$

KAVRAJSZKIJ 1936-ban, míg WAGNER 1932-ben fedezte föl ezt a vetületet, így KAVRAJSZKIJ VI. vetületének vagy WAGNER I. vetületének egyaránt nevezik. A volt keleti blokk területtartó világtérképein nagyon gyakran találkozunk vele. A vetület nem tévesztendő össze ECKERT VI. vetületével, amelynek meridiánjai teljes szinuszívek, nem csak a középső kétharmadukból állnak. KAVRAJSZKIJ VI. vetületében a meridiánok ezért kevésbé

görbülnek. URMAJEV javaslatára m és n más megválasztásával szovjet készítésű óceántérképeken is előfordulnak a MERCATOR-sor tagjai.

V.4. Összetett vetületek

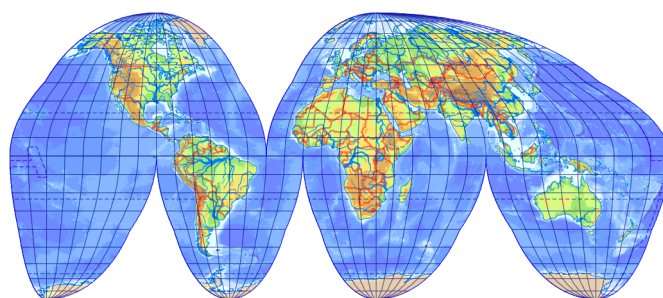
Bizonyos vetületek az Egyenlítő környékén, míg más vetületek inkább attól távolabb mutatnak kedvezőbb torzulásokat. Például a MERCATOR–SANSON-vetület az Egyenlítőt torzulásmentesen képezi le, de a magas szélességeken kevésbé alkalmazható, ott más vetületek előnyösebbek. Nem lehetne-e olyan vetületet létrehozni, amely minden területet külön-külön, a neki megfelelő vetületekben mutat be, majd a képeket összemontírozuk? Ha egy vetületben a Föld különböző részein más vetületi egyenletek érvényesek, a leképezést *összetett vetületnek* nevezzük.

GOODE amerikai térképész 1923-ban hozta nyilvánosságra az ötletét: ábrázoljuk az alacsony szélességeket MERCATOR–SANSON-vetületben, míg a magas szélességeket mindkét féltéken MOLLWEIDE vetületében! Természetesen elvárás, hogy a határoló szélességen a két vetület egymáshoz illeszkedjék. Tudjuk, hogy a MERCATOR–SANSON-vetület minden parallelkörben hossztartó, azonban MOLLWEIDE vetületében csak a $\varphi_H \approx \pm 40,7367^\circ$ szélességek hossztartók. Ebből már következik, hogy csak ezen a két szélességen illeszthető össze a két vetület. GOODE vetületében tehát a $-40,7367^\circ < \varphi < 40,7367^\circ$ szélességek között MERCATOR–SANSON, míg az ettől magasabb szélességeken MOLLWEIDE vetületet alkalmazunk.

A vetületek összeillesztése érdekében MOLLWEIDE vetületét függőleges irányban az Egyenlítő felé kissé össze kell tolni. A MERCATOR–SANSON-vetület esetén a határoló szélesség az $y_S = R\widehat{\varphi}_H$, míg MOLLWEIDE vetületében az $y_M = \sqrt{2}R \sin \psi_H$ koordinátára esik, ahol a ψ_H módosított szélesség az implicit függvényekből (IV.2. fejezet) $32,6893^\circ$ -nak adódik. Ebből az eltolás $\Delta y = y_S - y_M \approx -0,05280R$.

GOODE azt is javasolta, hogy mivel a vetület csak a középmeridián környezetében kedvező, ezért minden kontinenst saját középmeridiánnal képezzünk le. Az V.5. ábrán látható, hogy a különböző középmeridiánok miatt a részterületek egymással csak az Egyenlítő mentén érintkeznek, az óceánokban az ábrázolás folytonossága megszakad. A különböző hosszúságokon más középmeridiánt alkalmazó leképezéseket *osztott vetület* néven ismerjük.

GOODE vetületében a meridiánképek középső részei szinuszívek, széleik ellipszisívek. A határoló szélességeken a meridiánívek megtörnek, ez igen kevésbé esztétikus. A vetület területtartó vetületekből lett összeillesztve, tehát területtartó. Az osztott vetületek torzulásai általában jelentősen



V.5. ábra. GOODE-vetület

kedvezőbbek a hagyományos vetületekhez képest, azonban a vetületi szakadások megnövekvő száma miatt a szomszédos területek összetartozása nehezen érzékelhető rajtuk.* Globális kereskedelmi vagy geopolitikai viszonyokat bemutató térképekre alkalmatlanak. A szakadásokat mindig úgy kell elhelyezni, hogy azok a céltematikát a lehető legkevésbé érintsék. Ennek megfelelően GOODE óceáni változatot is alkotott: ebben a középmeridiánok az óceánok közepén, a szakadások többnyire a kontinenseken keresztül futnak.

Mivel GOODE vetületének sem túl kedvezők a torzulásai osztatlan alakjában, ÉRDI-KRAUSZ 1968-ban tovább javított az ötleten. Kiszélesítette a középső sáv területét a $\varphi_H = \pm 60^\circ$ vagy $\pm 70^\circ$ határoló szélességig. Ebben a sávban a MERCATOR-SANSON-vetületet az V.3. fejezetben található WAGNER-transzformációval átszámozva alkalmazta. ÉRDI-KRAUSZ a $p = 0,4$ és $q = 0,6$ értékeket választotta. Ebből $m = 0,8$ és $n = \arcsin(0,8)/(0,4\pi)$ adódik.

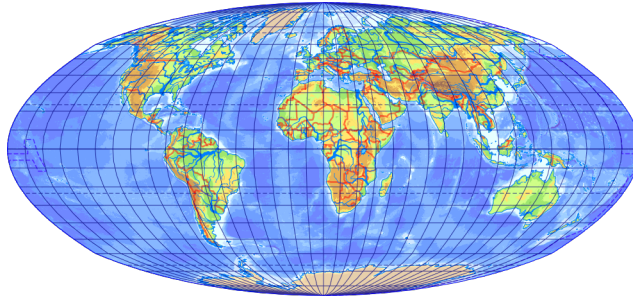
A MOLLWEIDE-vetületben a határoló paralellkör hossza rövidebb, mint a WAGNER-transzformált szinuszíves vetületben. Hogy össze tudjuk illeszteni a területeket, MOLLWEIDE vetületén nagyítani szükséges. A nagyítási tényező a megfelelő paralellkörök eredeti hosszából adódik $\varphi_H = 60^\circ$ esetén $c \approx 1,188719$ -nak, míg $\varphi_H = 70^\circ$ esetén $c \approx 1,387333$ -nak. Ebben a vetületben is össze kell tolni a MOLLWEIDE vetületet függőleges irányban, hogy az összeillesztés meglegyen. Az y koordinátából $\varphi_H = 60^\circ$ esetén $0,285475R$ -et, míg $\varphi_H = 70^\circ$ esetén $0,583282R$ -et kell levonni.

ÉRDI-KRAUSZ vetületében sem biztosított a meridiánok törésmentes csatlakozása, azonban ez kevésbé föltűnő, mint GOODE vetületében (V.6. ábra). A régi térképrajzolók laza tusvonással kenték el a törést.† A leképezés terü-

* Természetesen GOODE vetülete helyett bármelyik másik vetület is alkalmazható osztott vetületnek. A gyakori példák között található BOGGS vetülete, ez a MERCATOR-SANSON és MOLLWEIDE-vetületek keverékvetülete módosított szélességgel területtartóvá téve.

† JUHÁSZ 2002-ben bemutatta, hogy a vetületi egyenletek csekély módosításával ez a törés matematikai úton is eltüntethető, ráadásul megoldása egyúttal az eltérő

lettartó vetületekből áll össze, azonban a MOLLWEIDE vetületét alkalmazó részeket az illeszkedés érdekében nagyítanunk kellett. Mivel így a végső vetület már nem lenne területtartó, a térképek mellé két névleges méretarányt és mértéklécet tüntettek föl: egyiket az alacsony, másikat a magas szélességre vonatkozóan.



V.6. ábra. ÉRDI-KRAUSZ-vetület

Ez a vetület a magyar világatlaszokban gyakori, külföldön alig ismerik. Pólusíves, gazdasági vagy más területtartást igénylő tematikákhoz világtérképekre ajánlható. A térinformatikai szoftverek a leképezést jellemzően nem támogatják.

méretarányt is kiküszöböli, így szigorú értelemben véve is területtartónak tekinthető. GEDE 2004-ben a megoldást továbbfejlesztve egy vetületsokaságot fedezett föl, és kiválasztotta közülük a leginkább kedvező torzulásút, amely már területtartása ellenére viszonylag csekély szögtorzulást mutat.

Hatodik előadás

Modern képzetes hengervetületek

VI.1. BARANYI vetületei

A XX. század közepén nagy divatja volt a területtartó világtérképeknek. Ebben az időszakban ontották az újabbnál újabb területtartó vetületeket, és a nem területtartó világtérképek korszerűtlennek számítottak. Ezt koronázta meg PETERS a szögtorzulásokat figyelmen kívül hagyó vetületével. Ez fölforgatta a térképész közösséget, és elkezdtek általános torzulású, a kontinensek alakját kedvezően megjelenítő fokhálózatokat szerkeszteni. Ezeket a fokhálózatokat matematikában kevésbé jártas szakemberek rajzolták, így jellemzően szerkesztési utasításokban közölték a vetület leírását. Máskor kitüntetett kerek fokhálózati vonalak metszéspontjainak milliméterpapíron vett helyzetét közölték táblázatos formában. Ebben az időszakban ez nem jelentett problémát, mert az egyes foktrapézok térképi tartalmát amúgy is szemre rajzolták be. A digitális kartográfia azonban igényli a leképezés egzakt képleteit; így ezeket utólag, közelítő jelleggel meg kell adnunk, ha ilyen vetületet alkalmaznánk.

Az ilyen vetületek szerkesztői közül kiemelendő BARANYI, aki 1968-ban számos vetületet publikált. Ezek mind a kontinensek alakhű ábrázolására törekedtek. Vetületei kedvező torzulásaik miatt némi nemzetközi visszhangot is kaptak. Fokhálózatait szerkesztési utasítás formájában adta közre.

BARANYI II. vetületének kontúrvonala egymáshoz a $\varphi_H = 70^\circ$ szélességen törésmentesen csatlakozó körívekből áll. Az Egyenlítő hossztartó, a középmeridián képeinek hossza az Egyenlítő 0,7-szerese. A középmeridiánon a paralellkörök osztásközei számtani sorozat szerint nőnek úgy, hogy a 70° -os szélesség a középmeridiánt 13 : 5 arányban osztja. Valamennyi paralellkör egyenközü. A leírás alapján KARSAY és GYÖRFFY közelítő képletet adott meg:

* BARANYI vetületeit az ArcGIS nem támogatja, a régebbi nyílt forrású programokban pedig VOXLAND közelítő képleteit használták, amelyek kissé eltérnek a magyar szakirodalomban ismerttől. A QGIS-ből nyomtalanul eltűntek BARANYI vetületei.

VI. Modern képzetes hengervetületek

$$x = \frac{\widehat{\lambda}}{\pi} \cdot \begin{cases} (R\pi - r_1 + r_1 \cos \chi) & \text{ha } |\varphi| \leq \varphi_H \\ r_2 \sin \zeta & \text{ha } |\varphi| > \varphi_H \end{cases}$$

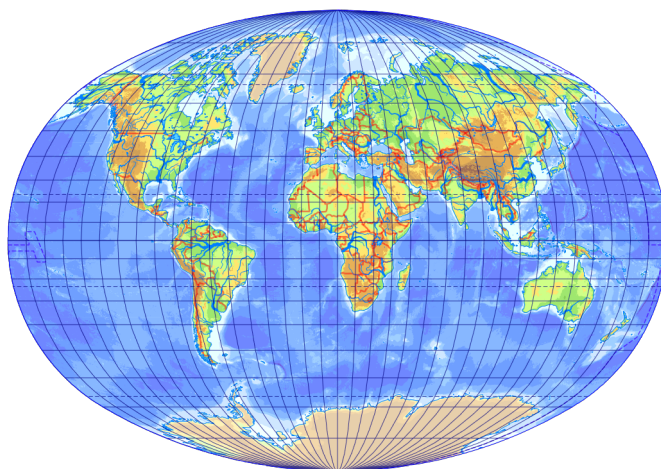
$$y = R \left(0,95|\widehat{\varphi}| + 0,005 \frac{180}{\pi} \widehat{\varphi}^2 \right) \text{sign } \varphi$$

Az oldalsó körívek sugara $r_1 \approx 1,844\,66R$, az alsó és felső körívek sugara $r_2 \approx 4,394\,61R$. χ és ζ a következő összefüggésekből számítható (levezetés a D. függelékben):

$$r_1 \sin \chi = y$$

$$r_2 \cos \zeta = r_2 - 0,7R\pi + y$$

BARANYI vetületeiben a meridiánok törésmentes ívben haladnak át a pólusponton. Általános torzulású, a szögtorzulások a kontúrvonalak környékén, a területtorzulások pedig a pólusok környékén jelentősek (VI.1. ábra). Ezért alacsonyabb szélességekre koncentrálnak tematikához ajánlható. Elsősorban magyar történelmi atlaszok világtérképeihez alkalmazták.



VI.1. ábra. BARANYI II. vetülete

BARANYI IV. vetületének leírása nem ad útmutatást arra nézve, hogy az alapfelületi hosszak hogyan aránylanak a térképi méretegységekhez. Ezért abból a feltételezésből fogunk kiindulni, mintha az Egyenlítő és a középmeridián metszéspontjában torzulásmentesség állna fenn.

A vetület kontúrvonalát ugyanúgy négy körív alkotja, mint a II. vetületben. Az oldalsó körívek sugara $r_1 = 100$ egység. A középmeridián hossza 222, az Egyenlítőé 368 egység. A körívek törésmentes csatlakozásából mértani megfontolásokkal számítható, hogy az alsó és felső körívek sugara

VI. Modern képzetes hengervetületek

$r_2 \approx 426,23$ egység. BARANYI a középmeridiánt nem egyenközűen osztotta föl. A közepes (30° – 60°) szélességeket fölnagyította, a kerek 10° -os paralelkörök távolsága egymástól itt 13 egység, az alacsonyabb és magasabb szélességeken csak 12 egység. GYÖRFFY az értékekre kilencedfokú polinomot illesztett, amely hatékonynak bizonyult. Az Egyenlítőn a kerek 10° -os meridiánok osztásközei rendre 2×12 ; 4×11 ; 8×10 ; majd 4×9 egység, a többi paralelkört azonos arányban osztják. GYÖRFFY a csökkenés jellegét logaritmussal közelítette.

A kontúrkörívek csatlakozása a vízszintes tengelytől kb. 96,63 egységre esik, ezt a paralelkörök elhelyezkedésével összevetve $\varphi_H \approx \pm 78,07^\circ$ adódik. Mivel a körívek sugara eltérő, a határoló szélesség két oldalán más függvény fogja megadni a paralelkörök hosszát. A közelítő egyenleteket GYÖRFFY adta meg:

$$y = R(\widehat{\varphi} + 0,073880\widehat{\varphi}^3 - 0,0538964\widehat{\varphi}^5 + 0,01560242\widehat{\varphi}^7 - 0,001639406\widehat{\varphi}^9)$$

$$x = \frac{\ln(1 + 0,11679|\widehat{\lambda}|)}{0,31255} \operatorname{sign} \lambda \cdot$$

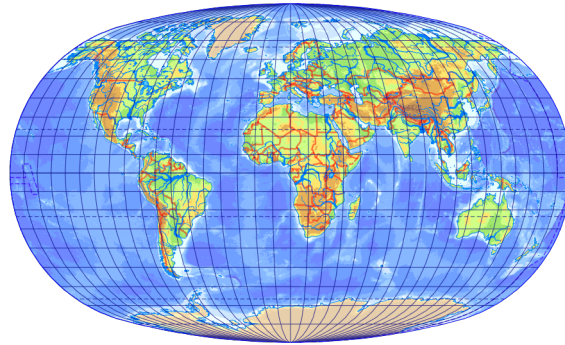
$$\cdot \begin{cases} (1,22172R + \sqrt{2,115393R^2 - y^2}) & \text{ha } |\varphi| \leq \varphi_H \\ \sqrt{38,4308R^2 - (4,58448R + |y|)^2} & \text{ha } |\varphi| > \varphi_H \end{cases}$$

BARANYI a közepes szélességek megnagyításával gazdasági térképeknek szánta vetületét, hiszen ilyenkor a legtöbb térképjelet ebben a sávban kell elhelyezni. A sarkkörökön túli területeken és a Csendes-óceánban erős torzulásokat tapasztalunk, de a kontinenseket igen jó alakhűséggel és kedvező torzulásokkal mutatja be (VI.2. ábra). Ezért a magyar atlaszkartográfia sokáig nagyon kedvelte. Pólusívessége miatt iskolai atlaszok világtérképein is gyakran föltűnt. Ha a területtartás nem követelmény, világtérképnek bátran alkalmazható. Mivel a térinformatikai csomagok túlnyomó többsége nem támogatja, a közelmúltban méltatlanul eltűnt, helyét kedvezőtlenebb pólusvonalas vetületek vették át.

BARANYI nem szerkesztett a kor divatja szerint osztott vetületet. MÁRTON kérésére azonban beleegyezett, hogy IV. vetületéből készülhessen osztott változat. Az *osztott BARANYI-vetület* célja a világtenger bemutatása, azaz BARANYI eredeti vetületeitől eltérően nem a szárazföldekre, hanem az óceánokra csoportosítjuk a kedvező torzulású területeket. A vetület szerkesztési utasítását MÁRTON alkotta meg, közelítő képletekkel utólag GYÖRFFY látta el. A vetület végleges formáját 2004-re nyerte el.

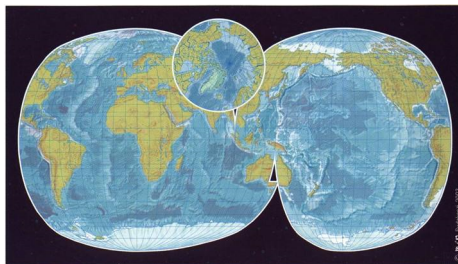
A vetület két BARANYI IV. vetületből tevődik össze. A bal oldali térkép-részen meghagyjuk az eredeti k. h. 10° -os középmeridiánt. Ez a rész az

VI. Modern képzetes hengervetületek



VI.2. ábra. BARANYI IV. vetülete

Atlanti- és Indiai-óceánokat mutatja be (ny. h. 100° és k. h. 100° között). A jobb oldali térképrész a Csendes-óceánt ábrázolja (k. h. 140° és ny. h. 60° között) ny. h. 160° középmériánnal. Az összeillesztés érdekében a jobb oldali területrészt x koordinátájához $3,036\ 131R$ -et hozzá kell adni. A VI.3. ábrán látható, hogy Amerika bizonyos részei (ny. h. 100° és ny. h. 60° között) mindkét térképrészen szerepelnek.



VI.3. ábra. Osztott BARANYI-vetület (MÁRTON nyomán)

A két rész között egy 40° széles átmeneti zóna található, amely az északi féltekén a jobb, a déli féltekén a bal oldali területrészhöz csatlakozik. Tasmánia környékét (d. sz. 35° -tól délre és k. h. 150° -tól nyugatra) megismételjük* az átmeneti zónában is. Az átmeneti zónában y megegyezik BARANYI IV. vetületével, x így alakul (x_b a bal oldali vetület határoló x koordinátája $\Delta\lambda = 90^\circ$ helyettesítéssel, x_j a jobb oldali vetület határa $\Delta\lambda = -60^\circ$ helyettesítéssel):

* Bár nem az osztott BARANYI-vetület az egyetlen, amely bizonyos területrészeket többszörösen mutat be, mégis a térinformatikai csomagok képtelenek ilyen vetületeket alkalmazni. Sehogyan nem lehet a többszörös megjelenítést beprogramozni. Éppen ezért az ilyen vetületek csak Corelben életképesek, jövőjük kérdéses.

$$x = \begin{cases} x_j + \left[0,332949 \left(\widehat{\lambda} + \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ \quad \left. + 0,0123215 \left(\widehat{\lambda} + \frac{\pi}{3} \right)^2 \right] \cdot \\ \quad \cdot \left(1,22172R + \sqrt{2,115393R^2 - y^2} \right) & \text{ha } 0 \leq \varphi \leq \varphi_H \\ \\ x_j + \left[0,332949 \left(\widehat{\lambda} + \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ \quad \left. + 0,0123215 \left(\widehat{\lambda} + \frac{\pi}{3} \right)^2 \right] \cdot \\ \quad \cdot \sqrt{38,4308R^2 - \left(4,58448R + |y| \right)^2} & \text{ha } \varphi > \varphi_H \\ \\ x_b + \left[0,315744 \left(\widehat{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \quad \left. + 0,0123215 \left(\widehat{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \cdot \\ \quad \cdot \left(1,22172R + \sqrt{2,115393R^2 - y^2} \right) & \text{ha } -\varphi_H \leq \varphi < 0 \\ \\ x_b + \left[0,315744 \left(\widehat{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \quad \left. + 0,0123215 \left(\widehat{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \cdot \\ \quad \cdot \sqrt{38,4308R^2 - \left(4,58448R + |y| \right)^2} & \text{ha } \varphi < -\varphi_H \end{cases}$$

A Jeges-tenger ábrázolása egy melléktérképen történik, POSTEL vetületében. Az északi pólus képe eltolva, az $x = 1,379854R$; $y = 1,055924R$ pontban található. A melléktérkép kör alakú, sugara 32° , vagyis $r = 0,558505R$, középpontja az é. sz. 81° ; ny. h. 90° (azaz $x = 1,240775R$; $y = 1,055924R$) pontban található.

Az általános torzulású vetülettel elsősorban az ELTÉ-n készült óceánográfiai tankönyvekben, óceánokkal kapcsolatos szakdolgozatokban találkozhatunk.

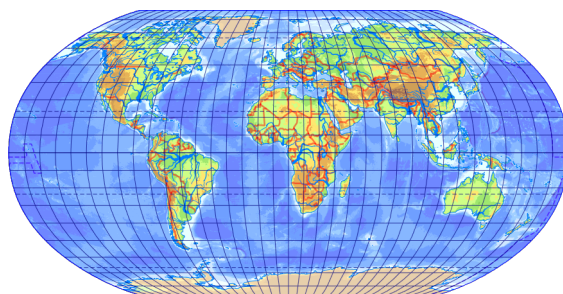
VI.2. Táblázattal megadott vetületek

BARANYIVAL egyidőben, teljesen azonos elvek mentén dolgozta ki fokhálózatát ROBINSON, aki a Rand McNally cég alkalmazottja volt. A vetületet táblázatos formában közölte, a legtöbb szoftver valamilyen interpolációs módszert alkalmaz. Ennél sokkal egyszerűbb, és geokartográfiai célokra kielégítő BEINEKE közelítő képlete:

$$x = R \left(2,6666 - 0,3670 \widehat{\varphi}^2 - 0,1500 \widehat{\varphi}^4 + 0,0379 \widehat{\varphi}^6 \right) \frac{\widehat{\lambda}}{\pi}$$

$$y = R \left(0,96047 \widehat{\varphi} - 0,00857 |\widehat{\varphi}|^{6,4100} \operatorname{sign} \varphi \right)$$

A VI.4. ábrán látható vetület általános torzulású, BARANYI IV. vetületére emlékeztet.* Kiemelkedő hátránya, hogy a hasonló torzulási jellemzőket pólusvonalas ábrázolással éri el. Az USA-ban a mai napig rendkívül népszerű, sokáig a National Geographic térképei is ebben a vetületben készültek.



VI.4. ábra. ROBINSON-vetület

ROBINSON és BARANYI elgondolása az volt, hogy a vetületi torzulások érzékelése szubjektív, ezért a kedvező torzulások eléréséhez is szubjektív módszerek szükségesek. Bár azóta számos tanulmány bemutatta, hogy a kontinensek térképi alakhúsége matematikailag jól megfogható, ma is népszerűnek számít a matematika megkerülésével vetületeket alkotni. Az új vetületek szaporodásához jelentősen hozzájárult a Flex Projector alkalmazás megjelenése.

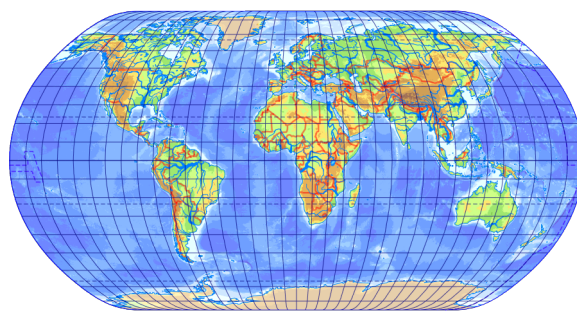
Ez egy interaktív alkalmazás, amelyben a vetület képét csúszkákkal tudjuk szabályozni. A kijelzőn a vetület képe mellett annak torzulásai is megjelennek. Ezzel a módszerrel számtalan érdeklődő alkotott (és nevezhetett el saját magáról) új fokhálózatokat. Némelyiküket támogatja már az ArcGIS és a QGIS. Az új vetületek többnyire a valódi és képzetes hengervetületek közé tartoznak, de egyéb képzetes vetület is készült ezzel a programmal. Bár lehetne benne póluspontos vetületet alkotni, a fölkapott vetületek mind pólusvonalasak. Példaként PATTERSON 2007-ben készült *Natural Earth* vetületét említhetjük, amelyhez ŠAVRIČ adott meg közelítő vetületi egyenletet.

A Flex Projector segítségével még *területtartó* vetület is készült 2018-ban *Equal Earth* néven, amely ROBINSON vetületét próbálja utánozni (VI.5. ábra),

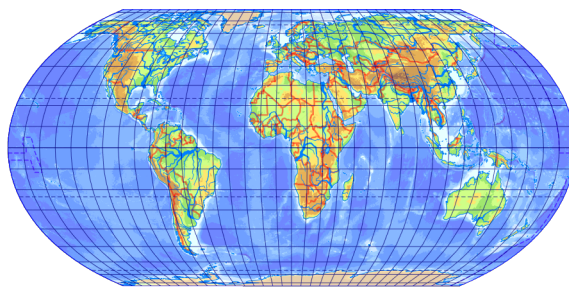
* Bizony volt is nagy veszekedés, amikor megjelentek a publikációk! Bár BARANYI már 1968-ban nyilvánosságra hozta vetületeit, ROBINSON ezt csak 1974-ben tette meg, és BARANYIRA véletlenül sem hivatkozott. BARANYI plágiummal vádolta ROBINSONT, azonban ő azt állította, hogy vetületét már 1963-ban megalkotta, jelentek is meg térképek ebben a vetületben; tehát övé az elsőség, és BARANYIT gyanúsította plagizálással. Bizonyítékok híján sohasem derült ki, kié volt az első kézzel rajzolt vetület.

VI. Modern képzetes hengervetületek

szerzői PATTERSON, JENNY és ŠAVRIČ.* Ehhez is ismert közelítő matematikai leírás, ez biztosítja a vetület területtartását is.



a) *Natural Earth*



b) *Equal Earth*

VI.5. ábra. *Flex Projectorral készült alkotások*

Az előzőekhez képest közelebb áll az analízishez URMAJEV módszere, aki a térkép bizonyos pontjain önkényesen írt elő torzulási viszonyokat. Ebből egy másodrendű deriváltakat tartalmazó nemlineáris egyenletrendszert kapott, amelyet közelítően oldott meg: a becsült fokhálózatot fölszerkesztette milliméterpapírra, majd kézzel igazította a rajzot, mígnem a kartometriával visszamért torzulások már közel lettek az elvárthoz. A módszer széles körben elterjedt a Szovjetunióban, leginkább GINZBURG vetületei emelendők ki.

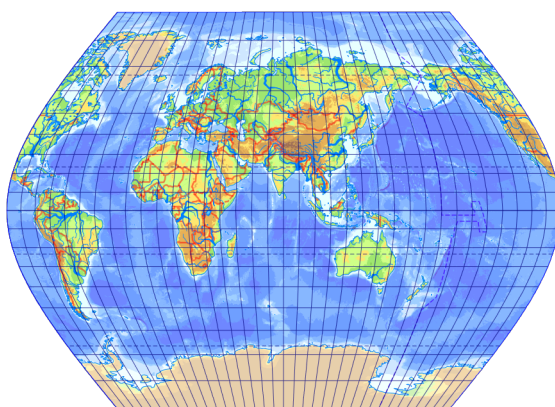
GINZBURG 1949-ben alkotott VIII. vetülete egy képzetes hengervetület, amelyben Szovjetunió kedvező torzulását várjuk el (VI.6. ábra). Az é. sz. 50° ; k. h. 80° pontban nincs szögtorzulás, a területnövekedés 50%. A 28° -os

* PATTERSONÉK szándéka még pár évvel ezelőtt is az volt, hogy a GALL–PETERS-vetülettel szemben kínáljanak jobb területtartó vetületet. Mert igen, még ma is van, aki ezt a vetületet reklámozza.

VI. Modern képzetes hengervetületek

szélességen területtartást, az Egyenlítő és a határoló meridián metszéspontjában 25%-os területcsökkenést írunk elő. GINZBURG ezt a következő képletekkel közelítette:*

$$x = R \left(1 - \frac{\widehat{\varphi}^2}{6,16} \right) \left(0,87\widehat{\lambda} - \frac{|\widehat{\lambda}|^4 \operatorname{sign} \lambda}{1049,95} \right)$$
$$y = R(\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}^3/12)$$



VI.6. ábra. GINZBURG VIII. vetülete

A vetület általános torzulású, a meridiánok a térkép szélén összesűrűsödnek. Az orosz kartográfia kedvelte, Amerika megszakadása miatt az ábrázolást a határoló meridiánon túl is folytatták, a pólusokat azonban levágták.

* A QGIS-ben alkalmazott képletek hibásak!

Hetedik előadás

Igazi képzetes kúp- és síkvetületek

VII.1. A képzetes kúp- és síkvetületek leírása

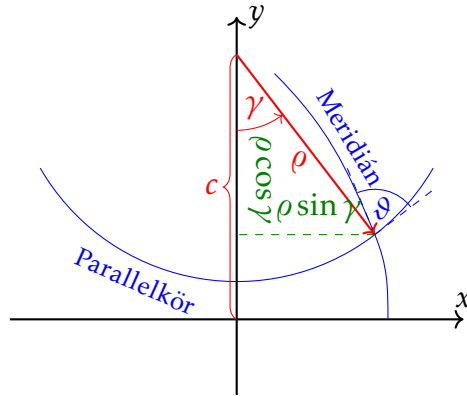
A képzetes sík- és kúpvetületekben a parallelkörök képei körök vagy körívek. Elvárjuk továbbá a tengelyes szimmetriát az y tengelyre, ezért e körök középpontjai az y tengelyre esnek. A vetületeket a valódi kúpvetületekben megszokott polárkoordináta-rendszerben írjuk föl, azonban két eltérésre figyeljünk! Egyrészt a parallelkörök képeinek középpontja nem állandó, ezek x -tengelytől vett távolságát egy $c(\varphi)$ függvénnyel írjuk le, így a polárkoordináták origója a szélességtől függően mozog. Másrészt mivel a meridiánok sem nem feltétlenül egyenesek, sem nem feltétlenül egyenközűek, a polárszög egy tetszőleges (a szimmetria miatt λ -ban páratlan és szigorúan monoton növekvő) $\gamma(\varphi; \lambda)$ függvény lehet. A parallelkörök sugarát továbbra is a $\rho(\varphi)$ sugárfüggvény adja meg. A VII.1. ábrán látható, hogy az általános vetületi egyenletek:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \gamma \\y &= c - \rho \cos \gamma\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az ilyen vetületek torzulásait!

$$\begin{aligned}k &= \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{d\lambda}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{d\lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{\rho}{R \cos \varphi} \frac{d\gamma}{d\lambda} \\ \text{ctg } \vartheta &= \frac{\frac{dx}{d\varphi} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{dy}{d\varphi} \frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dy}{d\varphi} \frac{dx}{d\lambda} - \frac{dx}{d\varphi} \frac{dy}{d\lambda}} = \\ &= \frac{\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \sin \gamma + \rho \cos \gamma \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) \rho \cos \gamma \frac{d\gamma}{d\lambda} + \left(\frac{dc}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \gamma + \rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) \rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{d\lambda}}{\left(\frac{dc}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \gamma + \rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) \rho \cos \gamma \frac{d\gamma}{d\lambda} - \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \sin \gamma + \rho \cos \gamma \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) \rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{d\lambda}} =\end{aligned}$$

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek



VII.1. ábra. Polárkoordináták a képzetes kúp- és síkvetületekben

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \cos^2 \gamma + \frac{dc}{d\varphi} \sin \gamma + \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \sin^2 \gamma \right) = \frac{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \frac{dc}{d\varphi} \sin \gamma}{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \cos^2 \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \sin^2 \gamma \right)} = \frac{\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi}}{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right)} \end{aligned}$$

A meridián irányú hossztorzulás számítható lenne az általános $h = \sqrt{(\partial x / \partial \varphi)^2 + (\partial y / \partial \varphi)^2} / R$ képlettel is, azonban a deriválások elvégzése után kezelhetetlen hosszú képleteket kapunk. Ezért trükkhöz folyamodunk. Előbb kifejezzük a τ területtorzulást. Vegyük észre, hogy τ számlálója megegyezik $c \tau g \vartheta$ nevezőjével, így nem kell újra deriválni, behelyettesíthetjük az előbb átalakított nevezőt!

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R^2 \cos \varphi} = \frac{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \cos^2 \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \sin^2 \gamma \right)}{R^2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{\rho}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \end{aligned}$$

De $\tau = h k \sin \vartheta$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) &= h \frac{\rho}{R \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \sin \vartheta \\ h &= \frac{1}{R \sin \vartheta} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \end{aligned}$$

VII.2. Igazi képzetes kúpvetületek

Ha egy képzetes kúpvetületben valamennyi paralelkör képe koncentrikus körív, akkor az *igazi képzetes kúpvetületek*hez soroljuk. Ezekben a

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek

vetületekben c konstans, így $\text{ctg } \vartheta$ képletében a c deriváltját tartalmazó tagokat elhagyhatjuk:

$$\text{ctg } \vartheta = -\rho \frac{\partial \gamma / \partial \varphi}{\frac{d\rho}{d\varphi}}$$

Az ortogonális vetületben vagy ρ vagy $\partial \gamma / \partial \varphi$ nulla kell legyen. Előbbi esetben a térkép egyetlen pontba ugrana össze, utóbbi esetben a meridiánok kiegyenesednének, amellyel a valódi kúpvetületek közé jutnánk. Ezért *az igazi képzetes kúpvetületek között nincs ortogonális, tehát szögtartó vetület sem*. Továbbá h is egyszerűsödik:

$$h = -\frac{d\rho}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta}$$

Ebből:

$$\tau = h k \sin \vartheta = -\frac{d\rho}{d\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\rho}{\cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \frac{\sin \vartheta}{RR} = \frac{-\rho}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \frac{d\rho}{d\varphi}$$

Területtartó vetületekben $\tau = 1$, tehát:

$$\begin{aligned} \frac{-\rho}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \frac{d\rho}{d\varphi} &= 1 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} &= -R^2 \frac{\cos \varphi}{\rho \frac{d\rho}{d\varphi}} \end{aligned}$$

Jobb oldalt kizárólag φ függvényei állnak, azaz γ parciális deriváltja λ -tól független. Ez azt jelenti hogy γ λ lineáris függvénye, *a területtartó igazi képzetes kúpvetületekben a meridiánok a paralelköröket egyenközűen osztják*.

Keressünk olyan igazi képzetes kúpvetületet, amely középmeridiánban és minden paralelkörben hossztartó! A középmeridián hossztartásából $-d\rho/d\varphi = R$:

$$\rho = R(-\widehat{\varphi} + d) = R(d - \widehat{\varphi})$$

$k = 1$, tehát:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} &= 1 \\ \int d\gamma &= \int \frac{\cos \varphi}{d - \widehat{\varphi}} d\lambda \\ \widehat{\gamma} &= \frac{\cos \varphi}{d - \widehat{\varphi}} \widehat{\lambda} + f(\varphi) \end{aligned}$$

A középmeridiánra vonatkozó szimmetria akkor teljesül, ha $f(\varphi) = 0$, így az integrációs konstánst továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk.

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek

$\varphi = \pm 90^\circ$ helyettesítésre $\gamma = 0$ -t kapunk, vagyis a vetület póluspontos. Vizsgáljuk meg a torzulásokat, emlékezve, hogy $k = 1$:

$$h = -\frac{d\rho}{d\varphi} \frac{1}{R \sin \vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$\text{ctg } \vartheta = -\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \Big/ \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{R(d - \widehat{\varphi}) - \sin \varphi (d - \widehat{\varphi}) + \cos \varphi \widehat{\lambda}}{R} =$$

$$= \frac{-\sin \varphi (d - \widehat{\varphi}) + \cos \varphi \widehat{\lambda}}{d - \widehat{\varphi}}$$

Első észrevételünk, hogy $hk \sin \vartheta = 1$, tehát területtartó vetületet kapunk. Látszik még, hogy a középmeridián torzulásmentes ($h = k = 1$ és $\text{ctg } \vartheta = 0$), azonban távolodva a szögtorzulás rohamosan nő. Lehetne-e egy φ_n normálparallel torzulásmentességét is elvárni? Ehhez elég a $\text{ctg } \vartheta = 0$ egyenlet megoldása a $\varphi = \varphi_n$ helyen, hiszen ekkor $\sin \vartheta = 1$, azaz $h = k = 1$ is azonnal biztosított:

$$\frac{-\sin \varphi_n (d - \widehat{\varphi}_n) + \cos \varphi_n \widehat{\lambda}}{d - \widehat{\varphi}_n} = 0$$

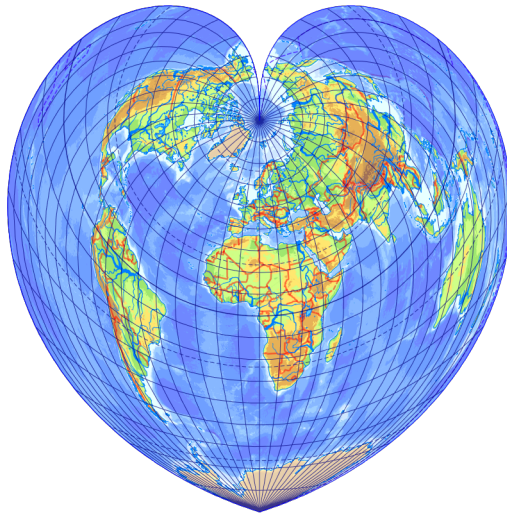
$$\cos \varphi_n = \sin \varphi_n (d - \widehat{\varphi}_n)$$

$$d = \text{ctg } \varphi_n + \widehat{\varphi}_n$$

Azaz a vetületnek van normálparallelköre, helyzete a d integrációs konstans megválasztásával szabályozható. $\varphi_n = 90^\circ$, azaz $d = \pi/2$ választás esetén a vetületet WERNER vagy STABIUS vetületének nevezzük (VII.2. ábra), pontos szerzősége ismeretlen, névadóik már az 1500-as évek elején alkalmazták. A vetület jellegzetessége, hogy a Földet szív kontúrban jeleníti meg. $\varphi_n = 0^\circ$ esetén $d \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$, vagyis a parallelkörök kiegyenesednek, és a MERCATOR–SANSON-vetületet kapjuk.

φ_n más megválasztásával BONNE vetületéről beszélünk. PTOLEMAIOSZ II. vetületéből alakították ki úgy, hogy az 1400-as években egyre több parallelkört tettek hossztartóvá, így ez az első területtartó leképezés. Bár a vetület a középmeridián és a normálparallelkör által meghatározott kereszt alakú területen kedvező, távolodva a szögtorzulások igen kedvezőtlenek, még a területtartó valódi kúpvetületnél is rosszabbak. Ennek ellenére ez a vetület túlhasználatnak örvend kontinenstérképeken. A franciák még egyenesen topográfiai térképeken is használták a II. világháború előtt, pedig hát nem éppen szög tartó. Szenvedtek is vele. A topográfiai alkalmazás miatt

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek



a) $\varphi_n = 90^\circ$ (WERNER-vetület)



b) $\varphi_n = 45^\circ$

VII.2. ábra. BONNE-vetület

ellipszoidi képletek is ismertek, amelyek hasonlóan a középmeridián és a paralelkörök hossztartásából adódnak:

$$\rho = N(\Phi_n) \operatorname{ctg} \Phi_n - \int_{\Phi_n}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

$$\widehat{\gamma} = \frac{N(\Phi) \cos \Phi}{\rho} \widehat{\Lambda}$$

Más igazi képzetes kúpvetületeket is fejlesztettek, ezek is többnyire területtartók, azonban ismertségük csekély. Ezek az egyáltalán nem használt pólusvonalas leképezések közepes szélességen elhelyezkedő, nagy kelet–nyugati kiterjedésű területekre ajánlhatók, némelyikük teljes Föld ábrázolására is alkalmas.* Ezek BONNE vetületével ellentétben kifejezetten csekély torzulásokat mutatnak.

VII.3. Igazi képzetes síkvetületek

Ha a paralelkörök képei teljes körök, akkor *képzetes síkvetületről* beszélünk. Mivel minden paralelkör képe kör, a pólus középpontú végtelen kis kör képe is kör. Ez azt jelenti, hogy a képzetes síkvetületek a pólusban lokálisan szögtartók. Kedvező tulajdonságuk, hogy az ábrázolás csak egy pontban szakad meg. A valódi síkvetületekkel ellentétben a torzulási izovonalak ovális alakot mutatnak, tehát ilyen alakú területekhez választjuk. A vetület pólus közelében kedvező, ezért a képletekben a $\beta = 90^\circ - \varphi$ pólustávolságot használjuk a szélesség helyett.

A képzetes síkvetületekben a paralelkörök záródása miatt bármely λ -ra igaz, hogy $\gamma(\beta; \lambda) = \gamma(\beta; \lambda + 360^\circ) - 360^\circ$ (azaz a hosszúsággal körbehaladva a szélességi kör mentén egy teljesszöggel, γ is teljesszöget változik). Ezért egy vetület akkor lehet képzetes síkvetület, ha a $\gamma - \lambda$ szög 360° periódusú függvény λ -ban.

Az *igazi képzetes síkvetületek* között elvárjuk a paralelkörök képeinek koncentrikusságát is, ezért az igazi képzetes kúpvetületeknél megismert, egyszerűbb torzulási képleteket is használhatjuk. Ezekből a képletekből már megállapítottuk, hogy ortogonális fokhálózat kívánalma esetén a meridiánok kiegyenesednének, így *a képzetes síkvetületek között sem találunk szögtartót*. A területtartás egyenletéből megállapítottuk, hogy a területtartás szükséges feltétele, hogy γ lineáris függvénye λ -nak. Azonban $\gamma - \lambda$ csak akkor lehet ezzel a feltétellel együtt periodikus, ha $\gamma - \lambda$ konstans

* Ilyen például HILL vetülete, amely ECKERT IV. vetületének általánosítása, és a Föld területtartó ábrázolására a legjobb vetületek között foglal helyet.

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek

(pontosabban csak β függvénye). Mivel a szimmetria kívánalma miatt $\gamma - \lambda$ páratlan függvény, az egyetlen lehetséges konstans a $\gamma - \lambda = 0$. Ebből $\gamma = \lambda$, azaz a valódi síkvetületek körébe jutottunk. Az ellentmondás miatt *az igazi képzetes síkvetületek között területtartó sincs*.^{*}

Megjegyezzük, hogy a képzetes síkvetületekkel szemben legtöbbször nem csak a függőleges, hanem a vízszintes tengelyre is elvárjuk a tengelyes szimmetriát. A levezetés mellőzésével megállapítjuk, hogy ilyenkor a $\gamma - \lambda$ szög 180° periódusú páratlan függvénynek választható.

GINZBURG III. vetülete egy képzetes síkvetület, amely GINZBURG síkvetületének sugárfüggvényét (előző félèves jegyzet) alkalmazza:

$$\rho = 3R \sin \frac{\beta}{3}$$

Mivel $\gamma - \lambda$ periodikus páratlan függvény, GINZBURG a $\widehat{\gamma} - \widehat{\lambda} = f(\beta) \sin(\kappa \lambda)$ képletet javasolta, ha $\kappa = 1$, akkor a periódus 360° , és a vetület egyszerűen szimmetrikus; $\kappa = 2$ esetben a periódus 180° , tehát a vízszintes tengelyre is szimmetrikus. GINZBURG $f(\beta)$ -ra tett javaslatát beírva:

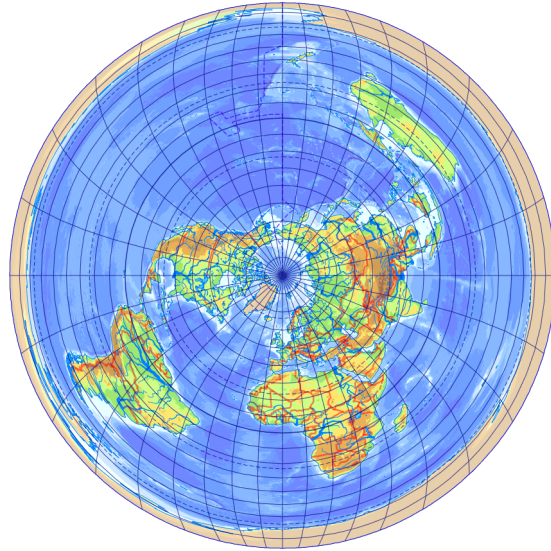
$$\widehat{\gamma} = \widehat{\lambda} - d \left(\frac{\beta}{\beta_H} \right)^q \sin(\kappa \lambda)$$

Itt q értéke 1 vagy 2, a meridiánok görbeségének változását szabályozza, $0,002 \leq d \leq 0,2$ a meridiánok görbeségének mértéke, β_H pedig a határoló pólustávolság.

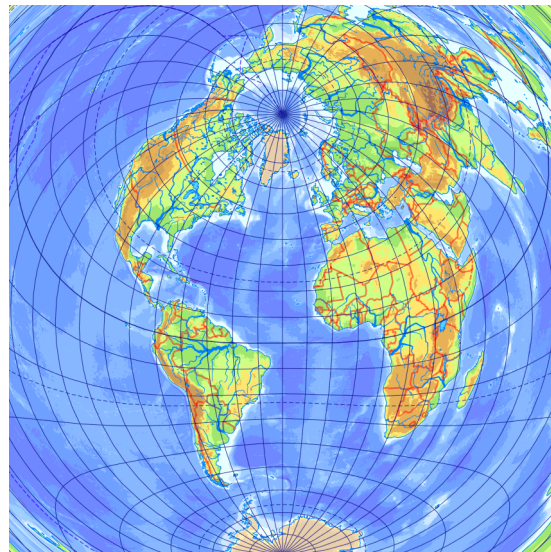
Az 1952-ben publikált vetület torzulási izovonalai oválisak, ilyen alakú területekhez ajánlott. Mivel a segédpólus környékét mutatja be előnyösen, normális elhelyezésben nem szokás alkalmazni. Első transzverzális és egyszerű ferdetengelyű elhelyezésben orosz készítésű, Atlanti-óceánt ábrázoló térképeken találkozunk vele (VII.3. ábra). Oroszország európai részét bemutató térképeken középmeridiánban hossztartó ($\rho = R\beta$) változatát találjuk egyszerű ferdetengelyű elhelyezésben. Használták világtérképen is (Antarktisz nélkül) aszimmetrikus ferdetengelyű elhelyezésben. Nyelvi akadályok és bonyolultsága miatt a volt keleti blokkon kívül nem tudott elterjedni.

^{*} Ha elengedjük a szimmetriára vonatkozó elvárásunkat, már lehet területtartó igazi képzetes síkvetületet alkotni. WIECHEL igazi képzetes síkvetülete például egyszerre területtartó és meridiánban hossztartó, azonban jelentős szögtorzulásai és a szimmetria hiánya miatt kartográfiai értéke nincs.

VII. Igazi képzetes kúp- és síkvetületek



a) Normális



b) Egyszerű ferdetengelyű (Atlanti-óceán)

VII.3. ábra. GINZBURG III. vetülete

Nyolcadik előadás

Polikónikus vetületek

VIII.1. Polikónikus vetületek tulajdonságai

Tudjuk, hogy egy paralelkör környezetét kedvezően tudjuk megjeleníteni a valódi kúpvetületekben. Képezzük le ennek megfelelően mindegyik paralelkör kis környezetét egy-egy érintő perspektív kúpvetülettel! A felosztást minden határon túl finomítva a kúpvetületek közötti rések végtelen kicsivé válva elmosódnak, határhelyzetben egy *polikónikus vetületet* (VIII.1. ábra) kapunk.



VIII.1. ábra. Polikónikus vetületek származtatása

Vizsgáljuk meg a kapott vetületet! Minden paralelkör a neki megfelelő érintő perspektív kúpvetületben van leképezve. Előző félévben kiszámoltuk, hogy ezek a leképezések az érintési paralelkört $\rho = R \operatorname{ctg} \varphi$ sugarú körre képezik le, tehát vetületünk a képzetes kúpvetületek közé tartozik. Az összeillesztés érdekében a gömbövek képeit függőlegesen el kellett tolni, ezért a paralelkörök képei nem koncentrikusak, így a leképezés az igazi képzetes kúpvetületek családján kívül esik. Ugyanakkor a perspektív kúpvetületek érintési paralelkörein a meridián irányában sincs hossztorzulás, ezért a hézagmentesen illeszkedő középmeridián biztosan hossztartó.

Bár a származtatásból a paralelkörök hossztartása is következne, ezt a gyakorlatban nem mindig követeljük meg. Hasonlóan a sugárfüggvényt egy S_n , a középmeridián hossztorzulását pedig egy S_m konstanssal fölszorozhatjuk a torzulások finomhangolása érdekében, bár ezeket többnyire 1-nek választjuk. Ennek megfelelően *polikónikus vetületnek* nevezzük azokat a képzetes kúpvetületeket, amelyekben a paralelkörök sugara a szélesség kotangensével arányos, és a körívek a középmeridiánt egyenközűen osztják.

Ugyanez képletekkel a VII.1. fejezet polárkoordinátaival megfogalmazva:

$$\begin{aligned}\rho &= S_n R \operatorname{ctg} \varphi \\ c &= S_m R \widehat{\varphi} + \rho\end{aligned}$$

Ha egy nem koncentrikus képzetes kúpvetületben a fenti feltétel nem teljesül, akkor a leképezést a *pszeudopolikónikus vetületek* családjába soroljuk. A polikónikus és pszeudopolikónikus vetületek torzulásait egyaránt a képzetes kúpvetületek általános képleteiből számíthatjuk. A polikónikus vetületek meridián mentén hosszan elnyúló területekre alkalmasak. Bár erre a célra a transzverzális hengervetületek is alkalmasak, a polikónikus vetületek körív alakú paralelköröit körzővel egyszerűbb volt szerkeszteni.

Mivel a polikónikus vetületeket inkább regionális térképeken alkalmazzuk, ezért inkább ellipszoid alapfelülettel terjedtek el. Ekkor a polikónikus vetületek definíciója kissé módosul:

$$\begin{aligned}\rho &= S_n N(\Phi) \operatorname{ctg} \Phi \\ c &= \rho + S_m \int_0^{\Phi} M(\Phi) d\Phi\end{aligned}$$

VIII.2. Amerikai polikónikus vetület

Speciálisan az *egyszerű* vagy *közönséges*, sőt *amerikai polikónikus vetület* néven is ismert leképezésnél elvárjuk a paralelkörök korább említett hossztartását is ($k = 1$):

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{R \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} &= 1 \\ \int d\gamma &= \int \frac{\cos \varphi}{S_n \operatorname{ctg} \varphi} d\lambda \\ \widehat{\gamma} &= \frac{\widehat{\lambda} \sin \varphi}{S_n} + f(\varphi)\end{aligned}$$

A középmeridiánra vonatkozó szimmetria miatt az $f(\varphi)$ integrációs konstans zérus. A vetületi egyenletek az Egyenlítőn nem értelmezhetők, azonban itt $\gamma = 0$ és a paralelkörök (így az Egyenlítő) hossztartásából $x = R\widehat{\lambda}$. A vetület torzulásai:

$$h = \frac{1}{R \sin \vartheta} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = \frac{\left(S_m - \frac{S_n}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \gamma + \frac{S_n}{\sin^2 \varphi}}{\sin \vartheta}$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \frac{dc}{d\varphi} \sin \gamma}{\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi}} = \frac{\widehat{\lambda} \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi + \left(S_m - \frac{S_n}{\sin^2 \varphi} \right) \sin \gamma}{\left(S_m - \frac{S_n}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \gamma + \frac{S_n}{\sin^2 \varphi}}$$

Mivel $hk \sin \vartheta \neq 1$ és $\operatorname{ctg} \vartheta \neq 0$, a vetület általános torzulású. A képletek és a VIII.2. ábra mutatja, hogy a torzulások a középmeridiántól távol rendkívül gyorsan romlanak.

Az ellipszoidi változat képlete a paralelkörök hossztartásából:

$$\widehat{\gamma} = \frac{\widehat{\Lambda} \sin \Phi}{S_n}$$

A polikónikus vetület ötletét 1825-ben mutatta be HASSLER Amerikába vándorolt svájci geodéta. A vetület az USA-ban hamar fölkapottá vált, kontinenstérképek készültek benne, a két világháború között még topográfiai térképeket is szerkesztettek benne. DEETZ javaslatára ferde transzverzális elhelyezésben is előfordul, ez igen nagy kelet–nyugat kiterjedésű területekre alkalmas.

Az amerikai polikónikus vetületre hasonlít LALLEMAND francia geodéta módosított polikónikus vetülete, ezt 1911–1962 között a nemzetközi egymillió világtérképműhöz alkalmazták CLARKE 1880 ellipszoid alapfelülettel. Minden szelvényt saját vetületben képezünk le a poliédervetülethez hasonlóan.

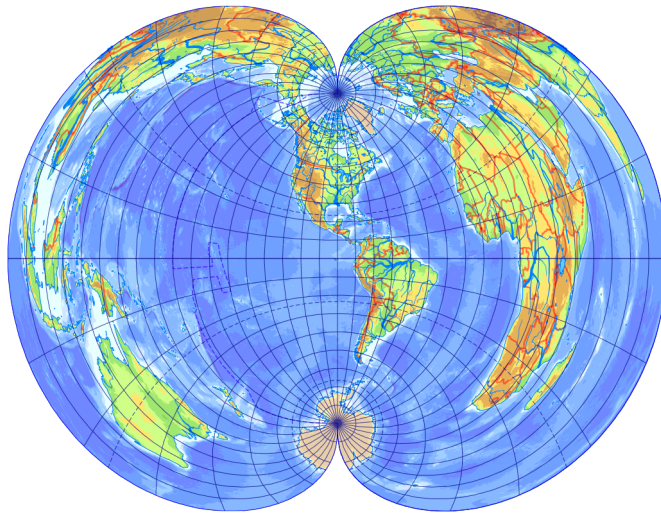
A könnyű szerkesztés érdekében csak a szelvényeket határoló kerek 4° -os paralelkörökön várjuk el a hossztartást, közöttük a meridiánok egyenesen futnak. A középmeridián a polikónikus vetületekkel ellentétben nem ekvidisztáns, helyette c képletét az a feltétel határozza meg, hogy a határoló hosszúság kétharmadánál található meridiánok ($\pm 60^\circ$ szélességig a $\pm 2^\circ$ -os, $\pm 76^\circ$ -ig a $\pm 4^\circ$ -os, végül a $\pm 84^\circ$ -ig terjedő gömbömben a $\pm 8^\circ$ -os hosszúságok) legyenek hossztartók. A szerkesztés útján megadott leképezés nehézkesen számítható matematikai leírása a B. függelékben olvasható.

VIII.3. Ortogonális polikónikus vetület

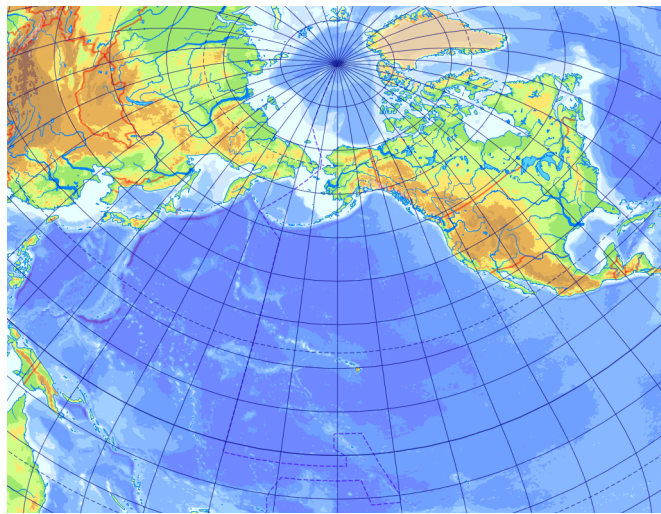
Célunk ezúttal a merőleges fokhálózat ($\operatorname{ctg} \vartheta = 0$):

$$\frac{\rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \frac{dc}{d\varphi} \sin \gamma}{\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi}} = 0$$

$$S_n R \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = - \left(S_m R - \frac{S_n R}{\sin^2 \varphi} \right) \sin \gamma$$



a) Normális



b) Ferde transzverzális (Északi-Csendes-óceán)

VIII.2. ábra. Közös (amerikai) polikónikus vetület

$$\int \frac{1}{\sin \gamma} d\gamma = \int \frac{S_m - \sin \varphi}{S_n \cos \varphi} - \frac{-1}{\sin^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi} d\varphi$$

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{S_m}{S_n} \ln \cos \varphi - \ln \operatorname{ctg} \varphi + \ln f(\lambda)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = f(\lambda) \cos^{\frac{S_m}{S_n}} \varphi \operatorname{tg} \varphi$$

Itt az $f(\lambda)$ integrációs konstans szabadon megválasztható. Legyen például a φ_n szélesség hossztartó!

$$\frac{\rho}{R \cos \varphi_n} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = 1$$

$$\int d\gamma = \int \frac{\cos \varphi_n}{S_n \operatorname{ctg} \varphi_n} d\lambda$$

$$\widehat{\gamma} = \frac{\sin \varphi_n \widehat{\lambda}}{S_n}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\lambda \sin \varphi_n}{2S_n}$$

$$f(\lambda) \cos^{\frac{S_m}{S_n}} \varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n = \operatorname{tg} \frac{\lambda \sin \varphi_n}{2S_n}$$

$$f(\lambda) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda \sin \varphi_n}{2S_n}}{\cos^{\frac{S_m}{S_n}} \varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n}$$

A képletek az Egyenlítőn nincsenek értelmezve, de itt $y = 0$ és $x = 2S_n R f(\lambda)$. Ebből kapjuk, hogy az Egyenlítő hossztartó, ha:

$$f(\lambda) = \frac{\widehat{\lambda}}{2S_n}$$

Ha a vetület ortogonális, nem lehetne-e olyan $f(\lambda)$ -t választani, amely a vetületet szögtartóvá teszi? Sajnos a $h = k$ egyenletbe helyettesítve nem kapunk megoldást*, *nem létezik szögtartó polikónikus vetület*.†

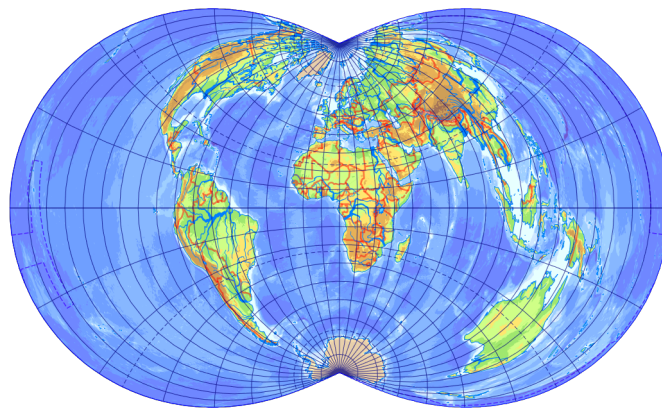
* Egy kiválasztott φ_n paralellkör ugyanakkor szögtartóvá tehető ezzel a módszerrel. Ez az ötlet McCaw brit geodétától származik.

† Szerencsétlen módon a transzverzális sztereografikus vetületet hívják szögtartó polikónikus vetületnek is. Ezt azonban amellet, hogy valódi síkvetület, már csak azért sem lehet polikónikusnak hívni, mert bár $\rho = \operatorname{ctg} \varphi$ teljesül, középperidiánja nem ekvidisztáns.

Ezt a vetületet inkább ellipszoidi alakjában használták:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = f(\Lambda) \sin \Phi \left[\frac{N(\Phi) \cos \Phi}{a} \right]^{\frac{S_m}{S_n} - 1}$$

Ahol az $S_m = S_n = 1$ és $f(\Lambda) = \widehat{\Lambda}/2$ (utóbbi az Egyenlítő hossztartását biztosítja) választással kapott leképezést *War Office vetület* néven ismerjük. Ez a vetület is általános torzulású, a középmeridián mentén torzulásmentes (VIII.3. ábra).



VIII.3. ábra. *War Office vetület*

A War Office vetületet 1853-ban említik először az USA-ban, mint a közönséges polikónikus vetület javítását. Ennek ellenére a brit katonai topográfiában terjedt el, nevét is erről kapta. Fokhálózata körzővel igen könnyen szerkeszthető.

Kanadai térképészek LAMBERT–GAUSS-vetületben térképezték országukat $\Phi_1 = 49^\circ$; $\Phi_2 = 77^\circ$ választással. Mint ismeretes, ez a vetület a póluspontban nem szögtartó, és a magas szélességeken a területtorzulása végtelenhez tart. Ezért Kanada északi részének ($\Phi > 80^\circ$) ábrázolására egy másik vetületet kellett választani. BOUSFIELD az ortogonális polikónikus vetület mellett döntött. Hogy a szomszédos, kúpvetületet alkalmazó szelvényekkel a térkép összeilleszthető legyen $S_n \approx 1,1164$ és $S_m \approx 1,0211$ adódott, továbbá $f(\Lambda)$ -nak olyan függvényt kellett választani, amely a határon a kúpvetülettel egyező módon biztosítja a $k(\Phi = 80^\circ) \approx 1,0211$ konstans hossztorzulást. Az eredetileg szerkesztés útján előállított fokhálózat vetületi egyenleteit HAINES adta meg.

VIII.4. Területtartó polikónikus vetület

MAURER német térképésznek 1935-ben, amikor a térképvetületek rendszerezését taglaló művét készítette, tűnt föl, hogy még nem ismert területtartó polikónikus vetület. Ennek megoldására alkotta ezt a vetületet.

Abból indulunk ki, hogy $\tau = 1$:

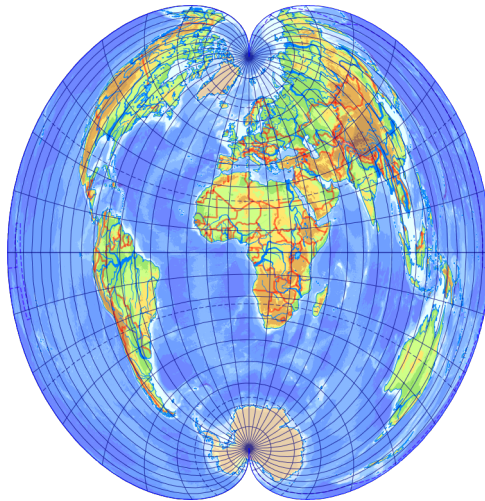
$$\frac{\rho}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \left(\frac{dc}{d\varphi} \cos \gamma - \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = 1$$

$$\int \frac{S_n R \operatorname{ctg} \varphi}{R^2 \cos \varphi} \left[\left(S_m R - \frac{S_n R}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \gamma + \frac{S_n R}{\sin^2 \varphi} \right] d\gamma = \int d\lambda$$

$$\left(\frac{S_m S_n}{\sin \varphi} - \frac{S_n^2}{\sin^3 \varphi} \right) \sin \gamma + \frac{S_n^2}{\sin^3 \varphi} \widehat{\gamma} = \widehat{\lambda} + f(\varphi)$$

A fenti egyenletből γ nem fejezhető ki, implicit függvényt kaptunk. Az $f(\varphi)$ integrációs konstans nulla, másképp a vetület szimmetriája nem lenne biztosított.

A VIII.4. ábrán látható vetület amellet, hogy meglehetősen nehézkesen számítható, világtérképnek a lehető legrosszabb torzulásúak között foglal helyet, azonban meridián mentén hosszan elnyúló, keskeny területek ábrázolására meglepően kedvező. Érdekessége, hogy az Egyenlítőn az x koordináta kifejezéséhez harmadfokú egyenlet ($x^3/6S_n R^2 + S_m x - R\widehat{\lambda} = 0$) megoldása szükséges.



VIII.4. ábra. Területtartó polikónikus vetület

Kilencedik előadás

Pszeudopolikónikus vetületek

IX.1. LAGRANGE vetülete

Induljunk ki MERCATOR vetületének Egyenlítőben hossztartó változatából! Kicsinyítsük a vetület képét κ -szorosra, majd vetítsük vissza a gömbre a MERCATOR-vetület inverzével! Az új gömbön a szélességet ψ -vel, a hosszúságot ζ -val jelölve adódik:

$$\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) = \kappa \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\zeta = \kappa \lambda$$

Látható, hogy a szélességi körök képei az új gömbön is szélességi körök, míg a hosszúsági körök szintén hosszúsági körökre képeződtek le. Ha $\kappa < 1$, akkor a vetület képe nem fogja a teljes gömbfelszínt kitölteni. Mindemellett a leképezés szögtartó, hiszen mind MERCATOR vetülete, annak inverze és a kicsinyítés egyaránt szögtartók.* A fenti képletből ψ kifejezhető, azonban a gyakorlatban ehelyett a következő, ekvivalens képlettel szokás számolni:

$$\psi = \arcsin \frac{(1 + \sin \varphi)^\kappa - (1 - \sin \varphi)^\kappa}{(1 + \sin \varphi)^\kappa + (1 - \sin \varphi)^\kappa}$$

Tekinthetünk úgy erre a transzformációra, mint egy szögtartó fokhálózat-átszámozásra a gömbön. Azaz ha egy szögtartó vetületbe φ és λ helyett a ψ és ζ átszámozott koordinátákat helyettesítjük, akkor a vetület szögtartó marad. Példaként válasszuk a transzverzális sztereografikus vetületet!

* Az anekdota szerint GILBERT készített olyan szögtartó földgömböt, amely a $\kappa = 1/2$ értékkel a gömbfelszínt a félgömbön ábrázolta, így a teljes földgömbjén minden kontinens kétszer szerepelt. Állítólag a hozzá betérő kollégákat rendszeresen ugratta, hogy észrevesznek-e valami szokatlant a gömbön, de szinte senki nem vett észre semmit a gömbvetület nagy területtorzulásai ellenére sem.

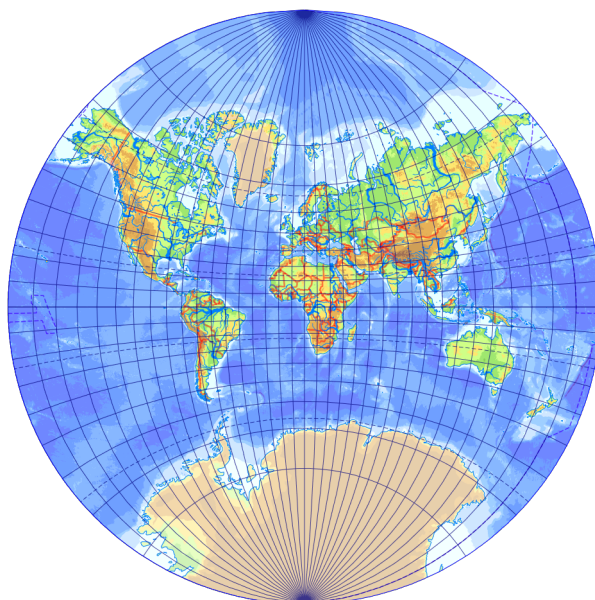
IX. Pszeudopolikónikus vetületek

Az előző féléves jegyzetből $\varphi_0 = 0^\circ$ helyettesítéssel, majd a fókálózatot átszámozva:

$$x = \frac{2R}{\kappa} \frac{\sin \zeta \cos \psi}{1 + \cos \psi \cos \zeta}$$
$$y = \frac{2R}{\kappa} \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi \cos \zeta}$$

Itt a κ -val való leosztás nem szükségszerű, csak a MERCATOR-vetület kicsinyítéséből adódó területcsökkenést kompenzáltuk a visszanagyítással. Mivel a sztereografikus vetület körtartó, az átszámozott szélességi és hosszúsági körök (amelyek a fókálózat-átszámozás miatt nem érik körbe a teljes gömböt) képei körívek. A valamennyi fókálózati vonalat körívekre képező vetületek sokaságát *LAGRANGE-féle vetületcsalád*nak nevezzük, jelentőségüket az adta, hogy körzővel egyszerűen szerkeszthetők. Mivel az ilyen vetületekben a paralellkörök képei általában nem koncentrikusak, és sugárfüggvényük sem arányos a szélesség kotangensével, a pszeudopolikónikus vetületek közé tartoznak.

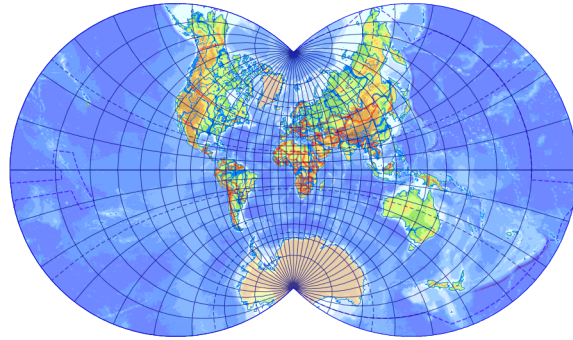
Az előbb levezetett konkrét leképezést LAGRANGE vetületének nevezzük. Jelentőségét az adja, hogy ez az egyetlen létező szögtartó képzetes kúpvetü-



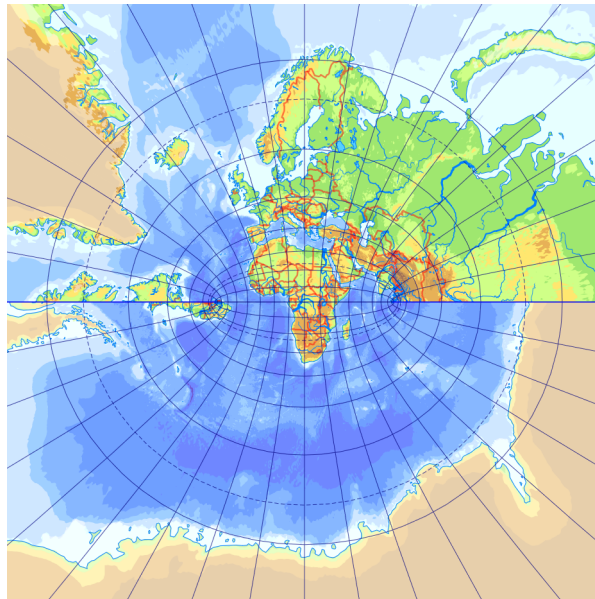
a) $\kappa = 1/2$

IX.1. ábra. LAGRANGE-vetület

IX. Pszeudopolikónikus vetületek



b) $\kappa = 3/4$



c) $\kappa = 2$, második transzverzális (LITROW-vetület)

IX.1. ábra. (folytatás)

let.* A vetület a póluspontokban nem szögtartó, az ide beérkező meridiánok térképi szöge az eredeti hosszúságkülönbség κ -szorosa; a hossztorzulási modulus itt $\kappa < 1$ esetén végtelen, $\kappa > 1$ esetén nulla. $\kappa = 1$ esetén a fokhálózat-átszámolás nem változtat semmit, így a vetület megmarad transzverzális sztereografikusnak. A $\kappa = 1/2$ választás a Földet kör alakban ábrázolja (IX.1. ábra). A vetületet LAMBERT vezette le 1772-ben, ellipszoidra LAGRANGE francia matematikus 1779-ben általánosította. A vetület ellipszoidi változatát könnyen megkapjuk, ha az első lépésben a gömbi helyett az ellipszoidi MERCATOR-vetületet választjuk, de az átméretezés után gömbi inverzével térünk át a gömbre. A $\kappa = 2$ változatot második transzverzális elhelyezésben (a paralellkörök képei közös fókuszú ellipszisek, a meridiánokéi hiperbolák) a vetületet alkotó osztrák csillagászról LITROW vetületének[†] nevezzük, 1833 óta ismert.

IX.2. Köríves fokhálózatú vetületek

Vizsgáljuk meg a LAGRANGE-féle vetületcsalád általános egyenleteit! A paralellkörök képei nem koncentrikus körívek, sugaruk ρ , középpontjuk az y tengely pozitív felén, c távolságban van. A meridiánképek sugarát r jelöli, középpontjuk az x tengelyen, d koordinátán található. A IX.3. ábrán az s szakasz és a két tengely által határolt derékszögű háromszögre:

$$s = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{-d}{c}$$

σ számításához az atan2 függvény javasolt. A piros háromszögben mindhárom oldal ismert, fölírható a koszinusztétel a $\sigma + \gamma$ és a δ szögére is. Mivel

* Ezt az állítást ADAMS bizonyította, a levezetés bonyolultsága miatt eltekintünk tőle. Valójában ha a MERCATOR-vetületen egy függőleges irányú eltolást is megengedünk a visszavetítés előtt, a vetület tovább általánosítható: a szögtartás és a körív alakú fokhálózat megőrződik, azonban az Egyenlítő helyett egy másik paralellkör képe lesz egyenes.

† LITROW vetülete egy igazi kuriózum. Bár mi egy másik vetület második transzverzális elhelyezéseként vezettük le, vetületi egyenletei ($x = R \sin \lambda / \cos \varphi$; $y = R \cos \lambda \operatorname{tg} \varphi$) nem bonyolultabbak a normális elhelyezésünél. Akkor most melyik elhelyezés a normális? Mivel LITROW az ábrán láthatót vezette le elsőként, így teljes joggal tekinthetjük ezt normálisnak, és a $\kappa = 2$ választású LAGRANGE-vetületet pedig a LITROW-vetület első transzverzálisának. De akkor meg már nem sorolhatjuk a pszeudopolikónikus vetületek közé, mert normális elhelyezésben fokhálózati vonalai ellipszisek és hiperbolák!

IX. Pszeudopolikónikus vetületek

$\delta = 90^\circ - (\sigma + \zeta)$, ezért $\cos \delta$ helyett írhatunk $\sin(\sigma + \zeta)$ -t. Ezekből az ismeretlen γ és ζ szögeket egyszerűen kifejezhetjük:

$$r^2 = s^2 + \rho^2 - 2s\rho \cos(\sigma + \gamma)$$

$$\gamma = \pm \arccos \frac{s^2 + \rho^2 - r^2}{2s\rho} - \sigma$$

$$\rho^2 = s^2 + r^2 - 2sr \sin(\sigma + \zeta)$$

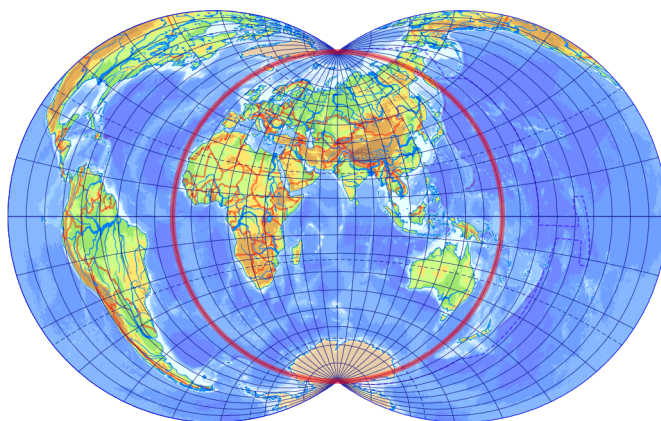
$$\zeta = \pm \arcsin \frac{s^2 + r^2 - \rho^2}{2sr} - \sigma$$

Az ábra alapján x és y már számítható:

$$x = \rho \sin \gamma$$

$$y = r \sin \zeta$$

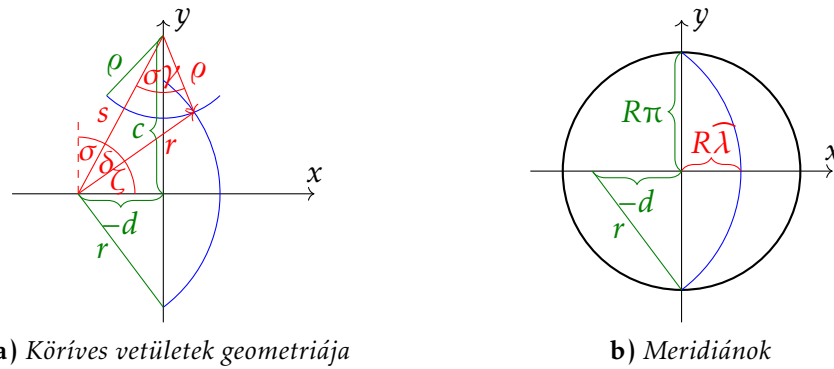
Az első ilyen vetületek a II.2. fejezetből ismert globuláris vetületek közé tartoztak, azaz a félgömböt képezték bele a körkontúrba. Például NICOLOSI vetülete APPIANUS I. vetületének javítása, amelyben az egyenes paralellkörök helyett olyan köríveket szerkesztett, amelyek nem csak a középmeridiánt, hanem a körkontúrt is egyenközűen metszik. A vetület félgömbre alkalmazva torzulási szempontból igen kedvező, megközelíti a transzverzális POSTEL-vetületet, ezért a számítógépek elterjedése előtt gyakran alkalmazták. Teljes gömbre kiterjesztve alma kontúrban ábrázolja a Földet (IX.2. ábra).



IX.2. ábra. NICOLOSI-vetület (középen a globuláris vetület)

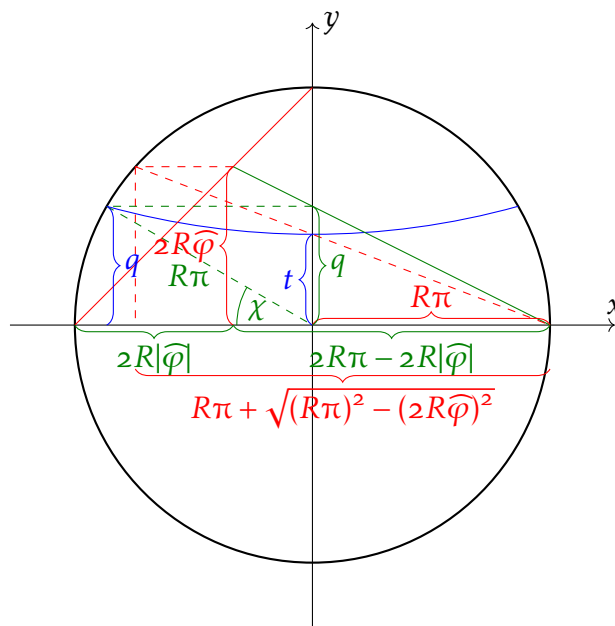
A globuláris vetületek mintájára alkotta meg VAN DER GRINTEN német származású, amerikában élő térképész a RandMcNally kiadó számára két

IX. Pszeudopolikónikus vetületek



a) Köríves vetületek geometriája

b) Meridiánok



c) Parallelkörök

IX.3. ábra. VAN DER GRINTEN I. vetületének szerkesztése

pszeudopolikónikus vetületét.* Ezek közül csak az 1898-ben alkotott I. vetület terjedt el, az azonban igen széles körben. Ez a vetület már a teljes gömbfelszínt körkontúrban mutatja be. Bár az általános torzulású vetület területtorzulása rendkívül jelentős, a ROBINSON-vetület előtt még a National Geographic is ezt a leképezést alkalmazta. A nagy területtorulás miatt a térkép egy A/4-es papírlapon nehezen helyezhető el, ezért a magas szélességeket gyakran levágják, így a vetület egyetlen előnyös tulajdonságát, a körkontúrt elveszítik. Külön vetülettani érdekességnek számít, hogy ilyenkor gyakran a téglalap alakú térképtükröt a 180°-os hosszúságon túl megismételt területekkel töltik ki, ezzel végleg eltüntetik a vetület egyetlen lehetséges értelmét.

A meridiánok képei ($d; o$) középpontú körívek:

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2$$

A vetület kontúrja egy $R\pi$ sugarú kör, az Egyenlítő hossztartó. Ebből adódik, hogy $d = R\widehat{\lambda} - r$. Továbbá a meridiánok áthaladnak a $(o; R\pi)$ ponton:

$$\begin{aligned} (o + r - R\widehat{\lambda})^2 + (R\pi)^2 &= r^2 \\ r &= R \frac{\widehat{\lambda}^2 + \pi^2}{2\widehat{\lambda}} \end{aligned}$$

A paralelkörök ($o; c$) középpontú körívekre képeződnek:

$$x^2 + (y - c)^2 = \rho^2$$

A paralelkörök az $y = t$ pontban keresztezik az y tengelyt, amelynek szerkesztését az ábrán a piros szaggatott vonal mutatja. Mivel a kontúrkör $R\pi$ sugarú, az x tengelytől $2R\widehat{\varphi}$ távolságra lévő pontja az y tengelytől $\sqrt{(R\pi)^2 - (2R\widehat{\varphi})^2}$ távolságra van. A piros szaggatott átfogójú hasonló derékszögű háromszögek befogóinak arányát fölírva, majd a törtet $\pi - \sqrt{\pi^2 - (2\widehat{\varphi})^2}$ -tel bővítve:

$$\begin{aligned} \frac{t}{R\pi} &= \frac{2R\widehat{\varphi}}{R\pi + \sqrt{(R\pi)^2 - (2R\widehat{\varphi})^2}} \\ t &= R\pi \frac{2\widehat{\varphi}[\pi - \sqrt{\pi^2 - (2\widehat{\varphi})^2}]}{\pi^2 - \pi^2 + (2\widehat{\varphi})^2} = R\pi \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - (2\widehat{\varphi})^2}}{2\widehat{\varphi}} \end{aligned}$$

* A szakirodalom négy vetületet említ, azonban VAN DER GRINTEN II. és III. vetületét valójában BLUDAU alkotta meg az I. vetület módosításával. A IV. vetület NICOLOSI vetületéhez hasonlóan a félgömböt képezi bele kör kontúrba.

IX. Pszeudopolikónikus vetületek

Az elrendezésből adódik, hogy $c = t + \rho$. A χ szög szinusza $q/R\pi$, ugyanakkor a folytonos zöld átfogójú kisebbik derékszögű háromszög két befogójának szintén ez az aránya. Ekkor a két hasonló háromszögből:

$$\sin \chi = \frac{q}{R\pi} = \frac{2R\widehat{\varphi}}{2R\pi - 2R|\widehat{\varphi}|} = \frac{\widehat{\varphi}}{\pi - |\widehat{\varphi}|}$$

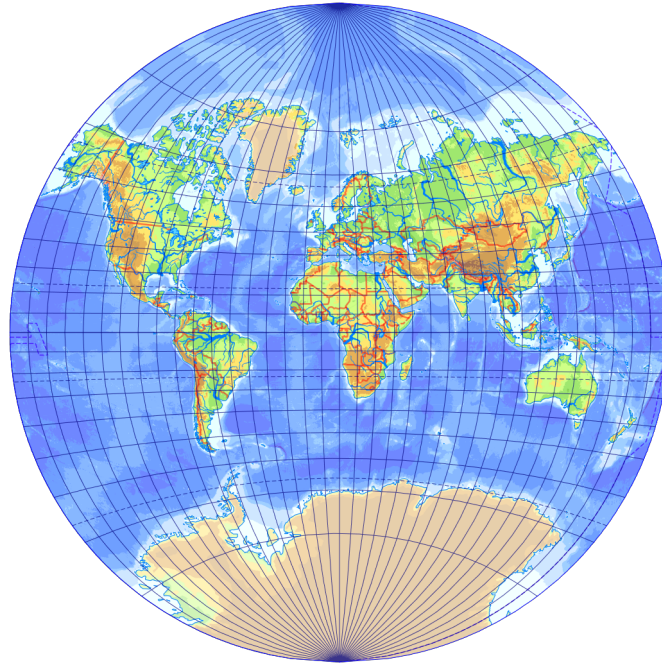
A paralelkörök a kontúrkört a $(R\pi \cos \chi; R\pi \sin \chi)$ pontban metszik. Eből ρ kifejezhető:

$$\begin{aligned} R^2 \pi^2 \cos^2 \chi + (R\pi \sin \chi - t - \rho)^2 &= \rho^2 \\ \rho &= \frac{t^2 - 2R\pi t \sin \chi + R^2 \pi^2}{2R\pi \sin \chi - 2t} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy t előbbi képletét megfordítva $\widehat{\varphi} = \pi^2 R t / (t^2 + R^2 \pi^2)$ adódik, amelyet $\sin \chi$ -n keresztül behelyettesítve ρ képlete ekképpen egyszerűsödik:

$$\rho = \frac{R^3 \pi^3 - |t^3|}{2t^2} \operatorname{sign} t$$

Miután a körök adatai (c ; ρ ; d ; r) ismertek, az általános képletekkel a IX.4. ábrán látható vetület képe már számítható.



IX.4. ábra. VAN DER GRINTEN I. vetülete

IX.3. További képzetes kúpvetületek

A szovjet kartográfia előszeretettel alkalmazott pseudopolikónikus vetületeket mind Szovjetunió, mind a teljes Föld ábrázolására. Elterjedtségük okán GINZBURG IV–VII. és IX. vetületeit lehet kiemelni. Ezek a vetületek a VI.2. fejezetben ismertetett módon, bizonyos pontokban előírt torzulásokat kézi rajzzal közelítve készültek. A vetületeket táblázatos formában adták meg, a ma használatos közelítő képleteket az amerikai VOXLAND számításai alapján török térképészek, İPBÜKER és BILDIRICI közölték.

A Szovjetunió kedvezőbb ábrázolása érdekében a középmeridiánt keletre tolták, a kedvező torzulású pontokat magas szélességen (változattól függően $48-52^\circ$ körül) írták elő. Ezek a vetületek világtérképre torzulási szempontból a legkedvezőbbek között vannak. Hátrányuk a IX.5. ábrán tapasztalt szokatlan kontúrvonal, amelyet úgy kezeltek, hogy a pólusoknál egy picit a térkép aljából és tetejéből levágtak, az ábrázolást pedig a határoló meridiánon túl is folytatták, a téglalap alakú térképtükröt teljesen kitöltve. Enciklopédiákban és iskolai atlaszokban is alkalmazták őket a keleti blokk országaiban, a modern térinformatika söpörte el őket.

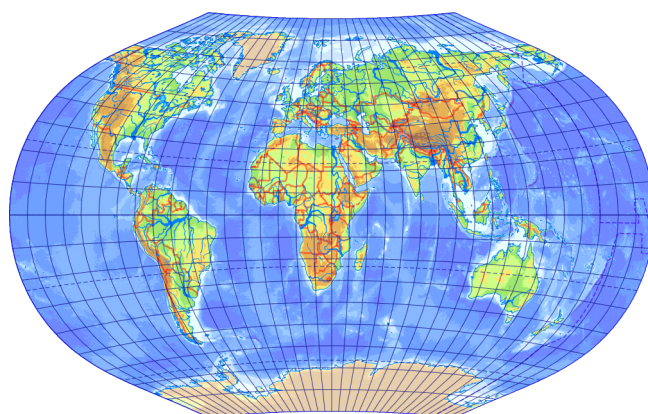
A pseudopolikónikus vetületek között találunk továbbá ortogonális fokhálózatú (nem szükségszerűen szögtartó) és területtartó vetületeket is. Alkalmazási lehetőségeiket közepes szélességen fekvő regionális térképekre GYÖRFFY, világtérképekre pedig KERKOVITS vizsgálta. A kutatásokból kiderült, hogy a vetületcsalád igen rugalmasan alakítható az ábrázolt területre, lehetőségeik még kiaknázatlanok.

IX.4. Poliazimutális vetületek

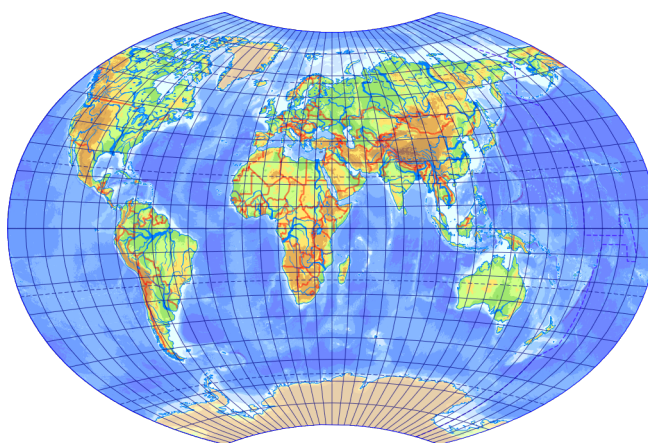
A képzetes kúpvetületek mellett a képzetes síkvetületek között is találunk olyan vetületeket, ahol a paralelkörök képei nem koncentrikusak. Az ilyen vetületek a *poliazimutális* nevet kapták. Ezekre a vetületekre is igazak a VII.3. fejezetben elmondott általános jellemzők, azaz a póluspontban lévő szögtartás és a $\gamma - \lambda$ függvény periodikussága. Az igazi képzetes síkvetületekkel ellentétben nincs olyan poliazimutális vetület, amely a vízszintes tengelyre is szimmetrikus lenne: ebből a paralelkörök koncentrikussága következne. A poliazimutális vetületek között van területtartó és ortogonális fokhálózatú is, szögtartó azonban nincs.* A poliazimutális vetületek definícióját 1989-ben TOLSZTOVA orosz térképész alkotta meg, azonban a

* A szögtartás egyenletét a poliazimutális vetületek körében megoldva a ferdetengelyű sztereografikus vetületet kapjuk meg, csak jó bonyolultan. Az meg inkább egy valódi vetület.

IX. Pszeudopolikónikus vetületek



a) V. vetület

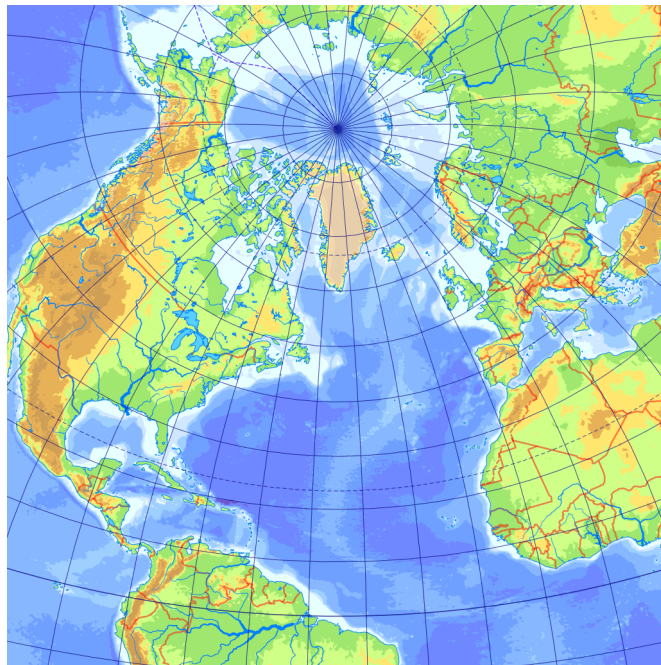


b) VI. vetület

IX.5. ábra. Példák GINZBURG pszeudopolikónikus vetületeire

szerzõn kívül más nemigen foglalkozott velük. Magas szélességeken fekvõ, erõsen aszimmetrikus területekre ajánlhatók (IX.6. ábra).

IX. Pszeudopolikónikus vetületek



IX.6. ábra. *KERKOVITS* ortogonális poliazimutális vetülete az Északi-Atlanti-óceánra

Tizedik előadás

Valódi síkvetületekből képzett vetületek

X.1. AITOFF és HAMMER vetületei

Ezen a ponton hagyjuk el a vetületeknek azon körét, amelyeket a fokhálózat képe szerint csoportosítani tudunk. A korábban fölállított kategóriákba nem illő vetületeket egyszerűen az *egyéb képzetes vetületek*hez soroljuk. Mivel ezeknek a vetületeknek semmilyen közös tulajdonságuk nincs, torzulásaikat az előző félévben megismert, általános képletekkel lehet csak számítani. A leggyakrabban alkalmazott ilyen vetületek mind a valódi síkvetületekből származtathatók valamely korábbról ismert módszer (pl. fokhálózat-átszámolás, keverékvetület) segítségével.

Ismert, hogy egy kör alakú terület, többek között a félgömb általános torzulású bemutatására igen kedvező torzulásokkal rendelkezik POSTEL vetülete. Ugyanakkor ugyanezt a leképezést érthető módon nem alkalmazzuk a teljes Föld bemutatására. Mivel a *transzverzális* POSTEL-vetület kedvező része a vetület közepén található félgömb, a vetület fokhálózat-átszámolás után kiált. A transzverzális POSTEL-vetület egyenleteinek levezetése az előző félévben jegyzetben található:

$$x = R \arccos(\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}$$
$$y = R \arccos(\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}$$

A teljes gömb $\pm 180^\circ$ hosszúság-tartományát szeretnénk beleképezni a félgömb $\pm 90^\circ$ -os tartományába. Ebből adódik, hogy λ helyett a $\zeta = \lambda/2$ átszámozott hosszúságot kell alkalmaznunk. Ugyanakkor ezzel az eredetileg hossztartó Egyenlítő fele hosszúságúvá vált. Az Egyenlítő hossztartása

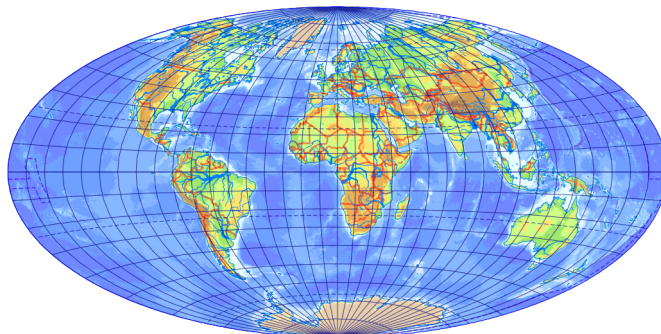
X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek

érdekében az x koordinátát 2-vel visszaszorozzuk:

$$x = 2R \arccos\left(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right) \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}}$$

$$y = R \arccos\left(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}}$$

Ezt a leképezést a Franciaországban élő orosz térképész, АИТОВ alkotta meg 1889-ben. Neve helytelen átírással terjedt el, АИТОВФ-vetület néven ismerjük. Mivel az eredeti vetület a félgömböt kör alakban jelenítette meg, az átszámozást és vízszintes irányú affinitást követően ez egy ellipsziskon-túrba megy át (X.1. ábra). A középmeridián POSTEL vetületében hossztartó volt, ezt a fokhálózat-átszámozás nem változtatta meg, mert a szélességeket nem számoltuk át. A kiindulás egy általános torzulású vetület volt, amelyen a fokhálózat-átszámozás nem változtatott, így jelen leképezés is az. A vetület torzulásait tekintve világtérképre kedvezőbb a hasonló АРΙΑΝУS II. vetületénél, azonban ez a leképezés nem képzetes hengervetület.



X.1. ábra. АИТОВФ-vetület

АИТОВ nyomán HAMMER német térképész 1892-ben javasolta, hogy hasonlóképp bánjunk a transzverzális LAMBERT-síkvetülettel. Ismételten az előző féléves jegyzetből keressük ki a képleteket:

$$x = R \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}$$

$$y = R \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}$$

A területtartást értelemszerűen szeretnénk megőrizni. Világos, hogy ha a $\zeta = \lambda/2$ átszámozást alkalmazom, akkor minden terület a felére fog zsugorodni. Ebből következik, hogy a térkép területét valamelyik (de nem

X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek

mindkét) irányban kétszeresére nyújtva fog helyreállni a területtartás. Mivel a hosszúságok átszámozása vízszintes irányban nyomta össze a térképet, adódik, hogy x irányban érdemes a nyújtást is elvégezni.

$$x = 2R \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}}$$
$$y = R \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}}$$

A fokhálózat-átszámozás és a nagyítás együttesen megőrzi a területtartást, HAMMER vetülete területtartó. A vetület igen kedvelt, területtartása és póluspontossága ellenére sem bosszantó mértékűek a szögtorzulásai. A Földet MOLLWEIDE vetületével egyező ellipszis kontúrban mutatja be (X.2. ábra).

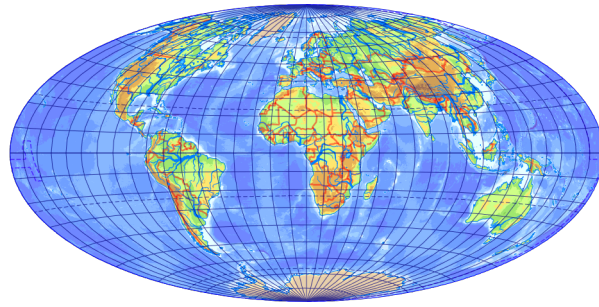
Bár a bimeridiánok töréssel futnak át a pólusponton, és ez fokhálózat-elforgatás esetén kisebb esztétikai problémát okoz, mégis elterjedt ezt a vetületet egyszerű ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazni. Az első ilyen alkalmazás PÉCSI nevéhez kötődik (*termelés térképvetülete*), aki 1926-ban a vetület középpontjába az északi 25° szélességet forgatta, így a kedvező torzulások a gabonatermelő országokra estek. A vetület a két világháború közötti magyar iskolai atlaszok mezőgazdasági térképein fordul elő, és világszinten a legelső ferdetengelyű képzetes vetületként tarthatjuk számon. A nemzetközi példák közül megemlíthetjük BARTHOLOMEW skót térképész *Nordic* vetületét, amelynek középpontja é. sz. 45° ; k. h. 0° . BRIESEMEISTER vetülete ettől csak annyiban tér el, hogy a középpont a k. h. 10° -on található, és a kedvezőbb szögtorzulások érdekében a vetületet x irányban $\sqrt{7/8}$ -szorosára zsugorítja, a területtartás megőrzése érdekében y irányban a reciprokával nyújtja.

X.2. WINKEL III. vetülete

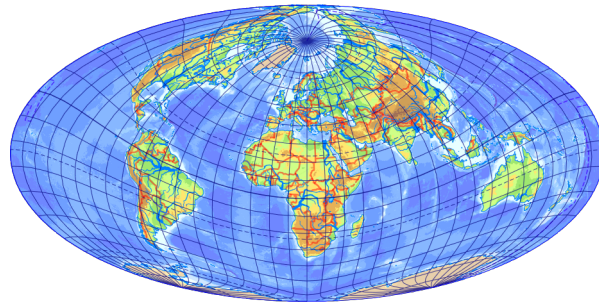
AITOFF vetülete már egészen kedvező módon mutatja be a Földet, azonban a magasabb szélességeken még mindig túl nagy a szögtorzulás. Eszünkbe jut, hogy a kedvezőtlen MERCATOR–SANSON-vetületet mennyire föl tudtuk javítani pusztán egy másik vetület hozzákeverésével. Lehet, hogy ennek a vetületnek is jót tenne? WINKEL III. (más néven *Tripel*) vetülete az AITOFF-vetület és a meridiánban hossztartó valódi hengervetület keveréke:

$$x = \frac{R}{2} \left[\widehat{\lambda} \cos \varphi_n + 2 \arccos \left(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \right]$$

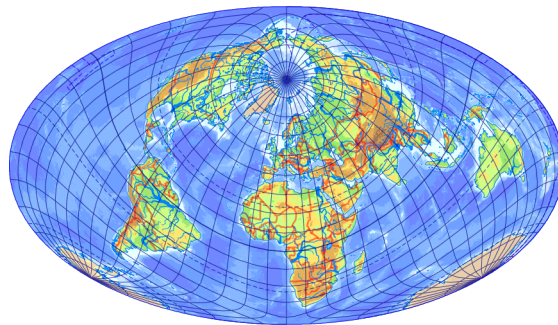
X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek



a) Normális



b) Egyszerű ferdetengelyű (termelés térképvetülete)



c) Egyszerű ferdetengelyű, átméretezett (BRIESEMEISTER-vetület)

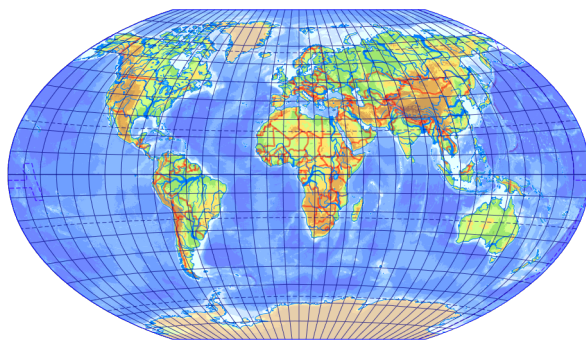
X.2. ábra. HAMMER-vetület

X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek

$$y = \frac{R}{2} \left[\widehat{\varphi} + \arccos \left(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \right]$$

A hengervetület φ_n normálparalelkörét WINKEL többi vetületéhez hasonlóan $\sim 50^\circ 27' 35''$ -nek ajánlotta, azonban a gyakorlatban BARTHOLOMEW javaslatára a $\varphi_n = 40^\circ$ választás terjedt el.

A vetület 1921-ből származik, általános torzulású. Világtérképre alkalmazva a gyakori vetületek közül a legkisebb torzulású (X.3. ábra), igen kedvező, különösen általános földrajzi térképekhez*. A leképezés gyorsan kezdett terjedni először Közép-Európában, ma már világszinten a legkedveltebb vetületek között van. Újabban ROBINSON vetületét is kiszorította a National Geographic térképein. Egyetlen hátránya a pólusvonal.



X.3. ábra. WINKEL III. vetülete ($\varphi_n = 40^\circ$)

X.3. WAGNER módosított síkvetületei

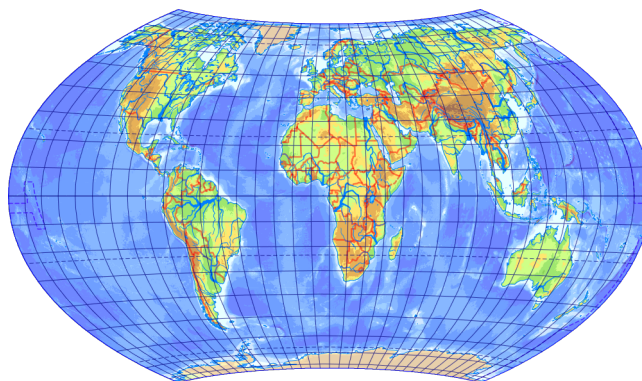
A levezetésből látszott, hogy HAMMER vetülete fölfogható a transzverzális LAMBERT-síkvetület területtartó fokhálózat-átszámozott változataként. Az V.3. fejezetben levezettük, hogy a területtartó WAGNER-transzformáció általánosan fölírható a $\psi = \arcsin(m \sin \varphi)$ és $\zeta = n\lambda$ átszámozó függvényekkel. HAMMER vetülete ekkor az $m = 1$ és $n = 1/2$ választással állítható elő. Természetesen n -nek más szám is választható, így további területtartó

* Az, hogy egy vetület kis torzulású, még nem jelenti azt, hogy mindenütt ezt kell alkalmazni. Sajnos találkozni ezzel a vetülettel időzónatérképen (ahol zavaró a meridiánkonvergencia), globális kapcsolatokat bemutató tematikus térképeken (pedig nem lehet rendesen Amerikát Ázsiával összekötni benne) és iskolai atlaszokban (ahova meg nem kellene pólusvonalas vetületet alkalmazni) is. Ezzel együtt még inkább ez az amúgy kedvező vetület legyen érdemén felül használva, mint például VAN DER GRINTEN I. vetülete...

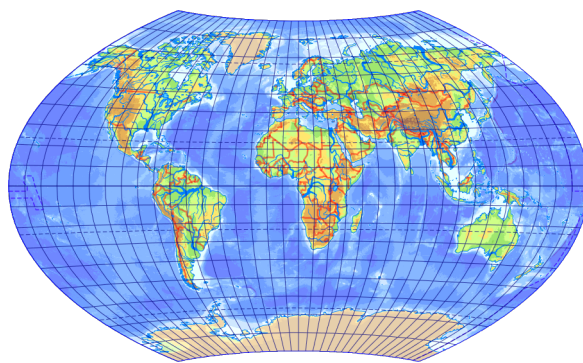
X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek

vetületeket kaphatunk. Ha nem ragaszkodunk a póluspontossághoz, akkor m értékének is választhatunk 1-nél kisebb számot.

A X.4. ábrán látható WAGNER VII. vetülete egy igen kedvező torzulású, területtartó vetület. WAGNER célja az volt, hogy a pólusvonal hossza megközelítőleg az Egyenlítő fele legyen, ezért a szélességeket úgy számozta át, hogy a pólus a 65° -os szélességre képeződjön. Ebből $m = \arcsin(65^\circ)$ következik. Továbbá WAGNER a hosszúságokat $n = 1/3$ -dal szorozta be. A területtartást a szokott módon, mindkét koordinátát $1/\sqrt{mn}$ -nel szorozva állította vissza. A vetület területtartó világtérképek körében a legjobbak közé tartozik, erős hátránya a befelé ívelt pólusvonal. Bár megalkotása a XX. század elején történt, népszerűsége csak a XXI. században kezdett növekedésnek indulni.



a) VII. vetület



b) IX. vetület

X.4. ábra. WAGNER fokhálózat-átszámozott transzverzális valódi síkvetületei

Hasonlóan a transzverzális POSTEL-vetületnek sem az AITOFF-vetület az egyetlen átszámozási lehetősége, azonban itt a középmeridián hossztartását szeretnénk megőrizni. Ezért a szélességeket az egyszerűbb $\psi = m\varphi$ függvénnyel számozzuk át. WAGNER IX. vetületében a cél az akkor népszerűnek

számító WINKEL III. vetületéhez hasonló megjelenés. Ez $m = 7/9$ és $n = 5/18$ választással érhető el. A merőleges affinitást y irányban a hossztartó középmeridián köti ($1/m$), azonban x irányban csak $0,88/n$ -et választunk. A vetület kedvező torzulású, de szokatlan kontúrja van. Ismertsége igen csekély.

X.4. Retroazimutális vetületek

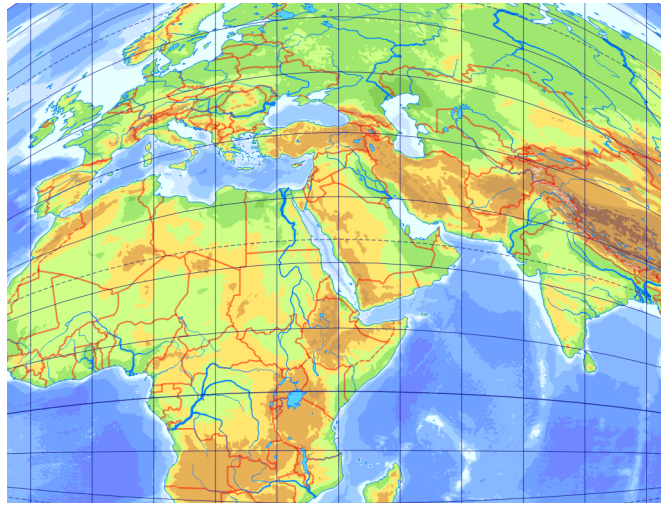
A IX.1. fejezetben megismert LITROW-vetület elméleti szempontból már eddig is sok érdekeséget tartogatott, most gyakorlati hasznára világítunk rá. Ebben a vetületben ugyanis ha bármely pontot összekötjük a középmeridián tetszőleges pontjával, akkor a szakasz irányszöge megegyezik a két pontot összekötő ortodróma azimutjával. Míg az *azimutális* vagy más néven síkvetületek a vetületi kezdőpontból induló ortodrómák azimutját őrzik meg; az olyan vetületeket, amelyek fordítva, a kezdőpont felé visszainduló ortodrómák azimutját mutatják helyesen, *retroazimutális* vetületeknek nevezzük. Az ilyen vetületek alkalmasak navigációs (merre induljon vissza a hajós, hogy a vetületi kezdőpontba visszatérjen) vagy távközlési (merre fordítsam az antennát, hogy a kezdőpontban lévő tornyot lássa) célokra.

A retroazimutális vetületek érdekes alkalmazását látjuk a muszlim kultúrában, ahol fontos Mekka irányának helyes leolvasása. Itt is a kezdőpont felé tartó ortodróma azimutját keressük. A probléma több vetületet is szült. CRAIG vetületében a meridiánok egyenközű függőleges egyenesek, így a Mekka felé mért azimut bármely meridiánhoz képest leolvasható (X.5. ábra). HAMMER retroazimutális vetülete a kezdőpontból kiinduló ortodrómákban hossztartó. Az ismert retroazimutális vetületek torzulásai jelentősek, az átfedések miatt általában nagyobb kiterjedésű terület nem ábrázolható bennük, ezért csak speciális tematikához ajánlhatók. A retroazimutális vetületek kiválthatók a kedvezőbb torzulású ferde sztereografikus vetülettel, azonban utóbbi esetben a segédpólusba visszamutató azimutot nem a függőleges irányhoz, hanem a görbült meridiánokhoz képest lehet megmérni.

X.5. RAISZ vetületei

A sík térképlap nem csak torzulásokkal mutatja be a földfelszínt, de még azt a hamis képzetet is kelti az olvasóban, mintha a gömbhéjon található földrészek valójában laposak lennének. Néhány vetület, köztük az ortografikus azonban kifejezetten alkalmas a gömb térszerűségének bemutatására.

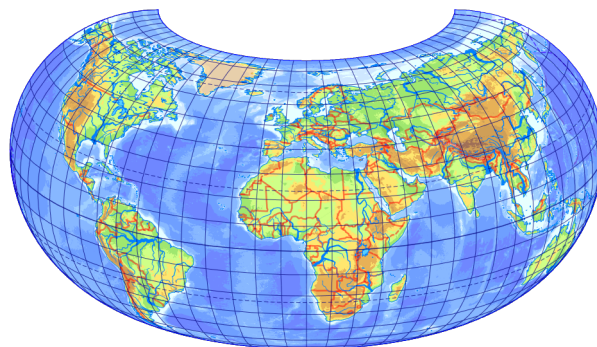
X. Valódi síkvetületekből képzett vetületek



X.5. ábra. CRAIG-vetület Mekka középponttal

RAISZ ERVIN Amerikában élő magyar térképész úgy vélte, hogy az ortografikus vetület torzulásmentesnek tekinthető, hiszen az ember a vetület képét térben látja, mintha egy földgömböt nézne.

Az ortografikus vetület jelentős hátránya, hogy nem tud félgömbnél nagyobb területet bemutatni. RAISZ trükkhöz folyamodott. A gömböt első lépésben változatos (pl. erősen lapult forgási ellipszoid vagy bab alakú) téridomokra képezte le. Ezeknek a vetületeknek a képfelület gömbhöz közel álló görbülete miatt mérsékelt torzulásai lettek. Második lépésben a téridomra képezett gömbfelszínt ferdetengelyű ortografikus vetületben mutatta be. A legnépszerűbb RAISZ *Armadillo-vetülete* lett, amely köztes felületnek egy elfajult tórusz (fánk alakú test) felszínére képezi le a gömböt. A X.6. ábrán látható vetületben Antarktisz és Új-Zéland nem ábrázolható, minden fokhálózati vonal ellipszisívre képeződik le.

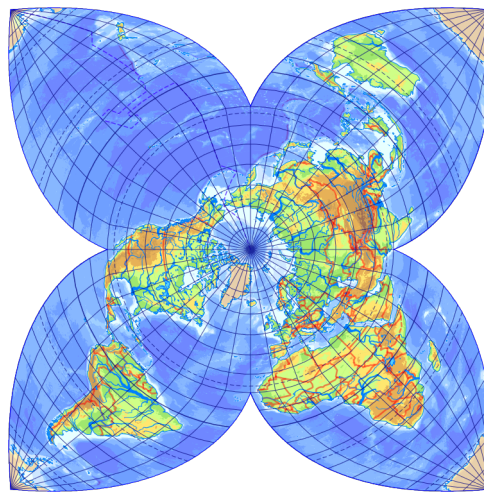


X.6. ábra. Armadillo-vetület

X.6. Csillag alakú vetületek

A normális elhelyezésű valódi síkvetületek az északi félteke ábrázolására alkalmasak, azonban a déli féltekén torzulásaik elfogadhatatlanok. Ezért merült föl az ötlet, hogy a déli féltekén GOODE vetületéhez hasonlóan a félteke egyes részeit más-más középmeridiánnal, saját vetületben képezzük le. Az így megalkotott vetületek jellegzetes csillag vagy virág alakúak lesznek (X.7. ábra). A paralellkörök koncentrikusságát szeretnénk megőrizni, ezért a térkép „szirmainak” valamilyen igazi képzetes kúpvetületet (pl. BONNE-vetület) választunk. A síkvetület és a képzetes kúpvetület határa nem szükségszerűen az Egyenlítő, továbbá a képzetes kúpvetületet úgy kell módosítani, hogy a határoló szélességen a meridiánok folytonossága ne szakadjon meg.

Az ilyen vetületek torzulási szempontból alkalmasak világtérképre, azonban a kedvező torzulásokért nagy árat fizetünk: a vetületben mindenféle folytonossági hiányok, szakadások jelennek meg, a szomszédos területek egymástól távolra kerülnek. Általánosságban elmondható, hogy minél több szakadás van egy térképen, annál jobban csökkenthetők a torzulások. Fontos szabály, hogy a szakadásokat a térkép tematikája szempontjából kiemelt területektől távol (pl. gazdasági térképen az óceánok közepén) helyezzük el. Az ilyen térképek szokatlan kontúrvonalukkal dekoratív és figyelemfölkeltő célokra, például atlaszborítókön, falitérképeken, emblémákban alkalmazhatók. Példaként BERGHAUS, BARTHOLOMEW és WILLIAM-OLSSON vetületeit említhetjük.



X.7. ábra. WILLIAM-OLSSON-vetület (területtartó)

Tizenegyedik előadás

Különleges vetületek

XI.1. Szögtartó vetületek

Mindeddig feltűnően kevés szögtartó vetülettel találkoztunk. Nem lehetne-e úgy új szögtartó vetületeket fölfedezni, hogy meglévő szögtartó vetületeinket átalakítjuk egy $u(x; y); v(x; y)$ alakban fölirt differenciálható $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvénnyel?

Tissor tételéből ismert, hogy az ilyen leképezések végtelen kis területek affin transzformációiból állnak össze, azaz ha az $(x_0; y_0)$ pont képe az új vetületben $(u_0; v_0)$, akkor a hozzá igen közel lévő $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ képe fölírható a függvény helyi lineáris közelítésével. Ezt a közelítést fölbonthatjuk a kis $(\Delta x; \Delta y)$ vektor és egy mátrix szorzatára, majd az eredményül kapott vektor eltolására:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Ez a leképezés akkor és csak akkor szögtartó, ha a fönti mátrix minden lehetséges szögszárát egyforma δ szöggel forgat el (lokális hasonlósági transzformáció). Azaz a mátrix felbontható egy nagyításra és egy elforgatásra. Ebből adódik, hogy a mátrix meg kell egyezzen a δ szögű forgatómátrix skalárszorosával:

$$\begin{pmatrix} s \cos \delta & s \sin \delta \\ -s \sin \delta & s \cos \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Világos, hogy a fönti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a jobb oldali mátrix főátlójában azonos értékek találhatók, míg a mellékátló elemei egymás ellentettjei:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ezt *CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenletnek* nevezzük, a szögtartó leképezések szükséges feltétele. Gond csak akkor van, ha mind a négy parciális

derivált nulla: bár a differenciálegyenlet teljesül, az eredeti egyenletben az elforgatás szögére nem kapunk egyértelmű megoldást.

Az $x; y$ térképi síkkoordinátákat egy, a felsőbb matematikából ismert ún. *komplex szám* valós és képzetes részének tekinthetjük, azaz az eredeti koordinátákat a $z = y + ix$, míg az újakat a $w = v + iu$ komplex számmal jellemezhetjük, ahol i a *képzetes egység*, $i^2 = -1$. Ekkor $w(z)$ egy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ *komplex függvény*. Feltételezve, hogy $w(z)$ differenciálható, alkalmazzuk a láncszabályt, az összeg deriváltjának képletét, és hogy $(-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{dw}{dz} \frac{dz}{\partial x} = -i \frac{dw}{dz} \cdot i$$

Azaz:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x}$$

A valós és képzetes részek egyenlőségéből éppen a CAUCHY–RIEMANN-differenciálegyenlet következik. *Minden szögtartó leképezés előállítható egy másik szögtartó vetületből egy olyan függvénnyel, amely a komplex számsík egy nyílt részhalmazán differenciálható, és deriváltja nem nulla.* Megdőbentő módon bármilyen (nem konstans) differenciálható függvénnyel átalakíthatunk egy meglévő szögtartó vetületet, és így az eredmény is szögtartó; sőt, valamennyi szögtartó vetület elérhető bármelyik szögtartó vetületből a neki megfelelő differenciálható függvénnyel!*

Bármilyen sima függvény tetszőleges pontossággal közelíthető a TAYLOR-polinomjával, azaz bármelyik szögtartó vetületet közelíthetünk komplex számokon értelmezett polinomokkal.[†] Közelíthetjük például a lehető legkisebb torzulású vetületet, amelyről CSEBISEV után tudjuk, hogy torzulási izovonalai követik a terület határát. Ilyenkor egy jól megválasztott transzverzális vagy ferdetengelyű sztereografikus vetületből érdemes kiindulni. Például MILLER módosított sztereografikus vetülete harmadfokú polinommal éri el, hogy az izovonalak ne kör, hanem ovális alakúak legyenek,

* A valós számok körében differenciálható függvények nem szükségszerűen differenciálhatók a komplex számokon, azonban a közismert függvények (polinomok, trigonometrikus, hatvány- és logaritmusfüggvények) a komplex számok körében is differenciálhatók.

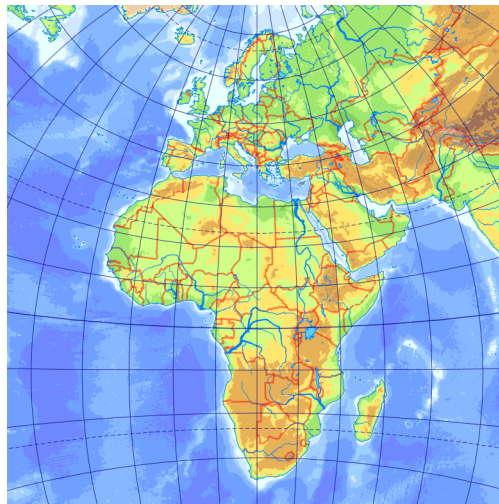
[†] Eszerint két szögtartó vetület közötti illesztő pontos transzformációnál (alapszakos jegyzet) nem valós, hanem komplex polinomokkal célszerű átszámítani, mert így a szögek nem torzulnak.

XI. Különleges vetületek

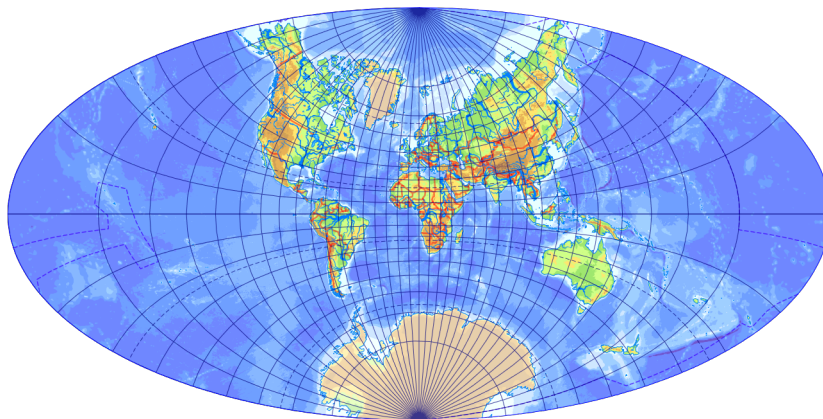
így ilyen területekre (pl. Afrika és Európa, Csendes-óceán) alkalmazható. Madagaszkár topográfiai térképvetületében is ezzel a módszerrel érik el, hogy a kettős leképezésű GAUSS–SCHREIBER-vetület torzulási izovonalai ne függőlegesek legyenek, hanem kövessék a sziget ferde elhelyezését. Bár a módszer régóta ismert, és geodéziai célokra a jelenleg ismerteknél jóval kedvezőbb vetületeket biztosít, többnyire elutasítják használatát.*

Egy másik alkalmazás világtérképeken történik. Ismert, hogy a teljes gömböt LAGRANGE, a félgömböt pedig a sztereografikus vetület körbe képe-

* Magyarország területére a legkedvezőbb szögtartó vetületet JUHÁSZ vezette le ezen a módon.

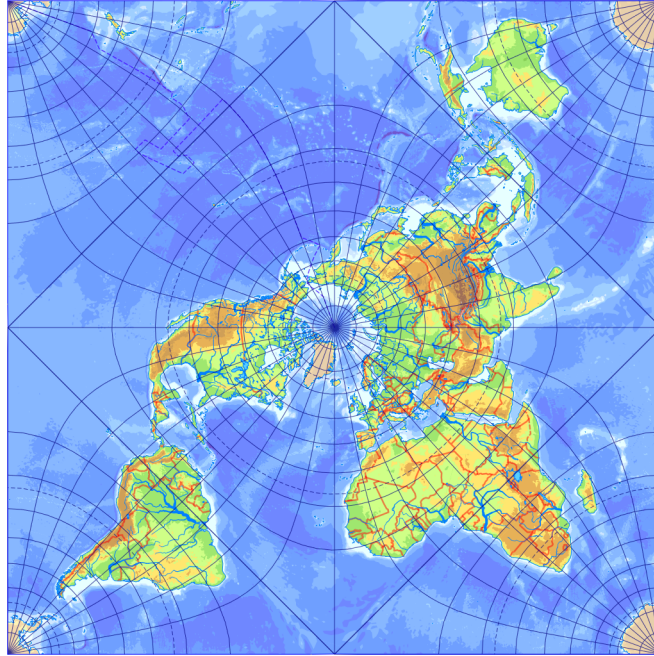


a) MILLER módosított sztereografikus vetülete

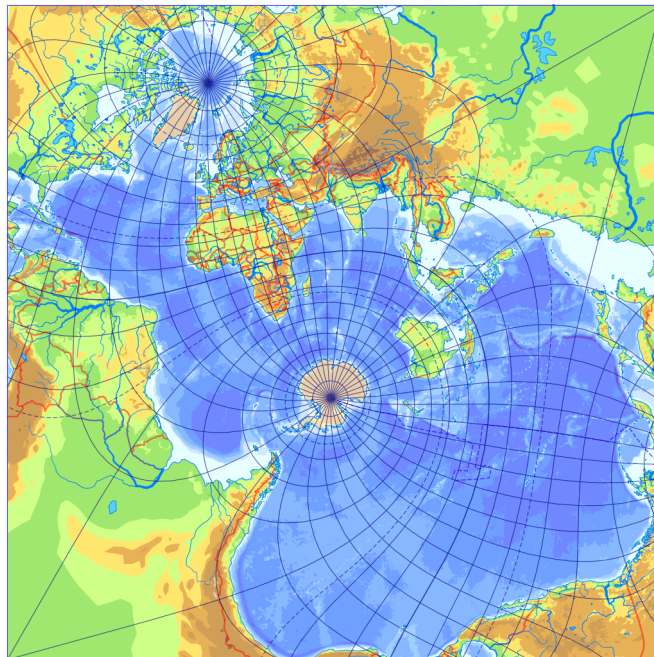


b) LEE ellipszis kontúrú vetülete

XI.1. ábra. Néhány szögtartó képzetes vetület



c) PEIRCE-vetület



d) SPILHAUS-vetület (plagális elhelyezés)

XI.1. ábra. (folytatás)

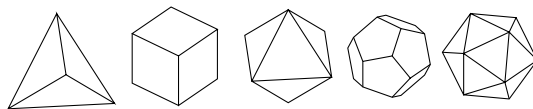
zi bele. SCHWARZ német matematikus mutatta be annak lehetőségét, hogy a körlap bizonyos differenciálható (azaz szögtartó) komplex függvénnyel tetszőleges sokszögbe beleképezhető. Bár ezek a függvények mind agypusztító elliptikus integrálok, a XX. század elején ADAMS amerikai matematikus, majd a '70-es években LEE új-zélandi geodéta számtalan alakzatba (pl. téglalap, ellipszis, háromszög, rombusz) képezték bele a gömböt vagy a félgömböt szögtartó módon. A XI.1. ábra a legrégebbi ilyen vetületet is bemutatja, ezt PEIRCE 1879-ben alkotta, az északi félgömböt négyzet alakban ábrázolja. A déli félgömb képe azonos vetületben van, de négy egybevágó részre osztva az északi félgömb oldalaihoz csatoltan. Hasonló vetületeket akkor alkalmazhatunk, ha fontos, hogy térképünk adott kontúrvonalat töltsön ki.

Az előzőeknél már csak az lehet bonyolultabb, ha az ilyen vetületet plagális elhelyezésben alkalmazzuk. SPILHAUS 1979-ben alkotta meg vetületét a világóceán ábrázolására. Ez ADAMSnek a Földet négyzet alakban ábrázoló leképezése elforgatva.

XI.2. Poliéder rendszerű vetületek

Vetületeink képfelülete az esetek túlnyomó többségében sík, néhány igen ritka perspektív vetület esetén lehet henger- vagy kúppalást. Ugyanakkor ezek a felületek nem közelítik hatékonyan a gömb alakját. A sokszöglapok által határolt testek, más néven *poliéderek* hálójá síkba fejthető. A gömb tökéletes szimmetriája miatt vetülettani alkalmazásra elsősorban a *szabályos poliéderek* számítanak, amelyeknek minden lapja egybevágó szabályos sokszög.

A szabályos sokszögekkel szemben szabályos poliéderből csak öt létezik (XI.2. ábra): a négy háromszögből álló *tetraéder*; a hat négyzet határolta *hexaéder* (kocka); a nyolc háromszöget tartalmazó *oktaéder*; a tizenkét ötszög alkotta *dodekaéder* és a húsz háromszögből alkotott *ikozaéder*.



XI.2. ábra. Szabályos poliéderek

A poliéder képfelületű vetületeket *poliéder rendszerű vetületek*nek nevezzük, viszont a *poliédervetület* elnevezést egy képzetes hengervetületre használjuk (III.3. fejezet). Alapötletük DÜRERTŐL származik. A hagyományos vetületeknél kedvezőbb torzulásuk mellett földgömböket helyettesítő poliédermodellek készítésére is előnyösek. Hátrányuk ugyanakkor, hogy a

lapok kiterítése során bizonyos éleket fölvágva vetületi szakadások keletkeznek. A poliéder rendszerű vetületekkel szemben elvárásunk, hogy az ábrázolás a poliéder élei mentén ne szakadjon meg:

- Az egyes sokszöglapok ősképeit, azaz a poliéder fölosztásának megfelelő gömbi sokszögeket a poliéderlapot egészében kitöltve kell leképezni, a határoló ortodrómák képe tehát egyenes.
- A határoló élekbe befutó vonalaknak a szomszédos poliéderlap megfelelő pontjában kell folytatódnia.

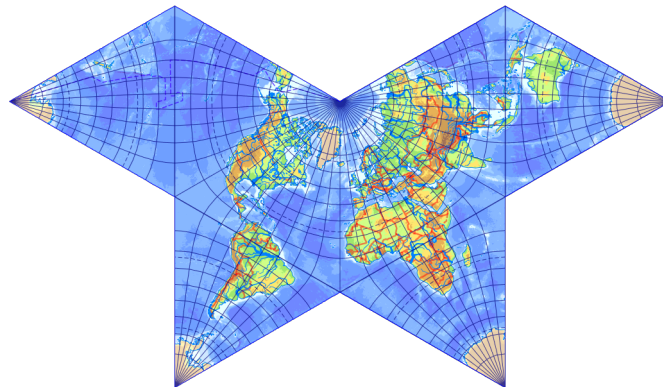
A bonyolult feltételeknek triviális megoldása a gnomonikus vetület, amely minden ortodrómát, így a poliéder éleinek ősképeit is egyenesre képezi le. A vetület torzulásai ekkor a poliéder csúcsainál jelentősek lesznek. Természetesen más, a feltételeknek megfelelő bonyolult leképezés is használható, így ismeretes például területtartó poliéder rendszerű vetület is. A korábban megismert komplex elliptikus integrálok nem csak köröket, hanem szabályos gömbi sokszögeket is tudnak síkbeli sokszögekbe képezni szögtartó módon, így ADAMS és LEE poliéderekre is alkalmazták szögtartó vetületeiket.

A tetraéder vetülettani jelentőségét az adja, hogy lapjait kiterítve, majd az egyik lapot elfelezve és átrendezve téglalap alakúra hozható, így nyomtatása kedvező, azonban a gömböt nem közelíti hatékonyan. A kocka jobb lenne, azonban lapjait nehéz kartográfiai szempontból előnyösen kiteríteni. Az oktaéder alkalmasnak számít, mert éleinek ősképe az Egyenlítőre és kerek 90° -os meridiánokra esik. A kezdőmeridián megfelelő megválasztásakor a poliéder fölvágásával a szárazfölkék csak kis mértékben szakadnak meg. Ez jellegzetes, pillangó alakú térképeket eredményez. Az ötlet CAHILL amerikai építészről származik, aki egy csekély területtorzulású, egy gnomonikus és egy szögtartó változatot is készített 1909-ben (XI.3. ábra). Az ötletet később KEYES majd WATERMAN fejlesztették tovább bonyolult, általános torzulású vetületeikkel.*

A sokkal gömbszerűbb dodekaéder már jóval több szakadással fejthető síkba, az ikozaéder esetében pedig ez még jelentősebb. Mégis, mivel a legtöbb lappal az ikozaéder rendelkezik, FULLER 1954-es *Dymaxion* nevű vetülete (XI.4. ábra) ezt alkalmazza képfelületnek plagális[†] elhelyezésben.

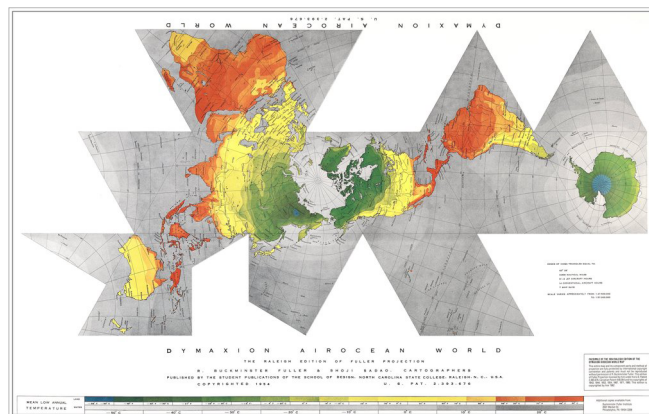
* A poliéder rendszerű vetületek látványosan kedvező torzulásait időről-időre újra fölfedezik, és mindenféle blikkfangos újságcikket írogatnak róluk. Alkotóik jellemzően nem térképészek. A média a szokatlan kinézetű térképeket előszeretettel kapja föl, mintha valami eget rengető újdonságok lennének, és ezek lennének a lehető legpontosabb térképek; ugyanakkor a koncepció közel ötszáz éves, és hátrányaikkal (pl. szakadások) is fontos tisztában lennünk.

[†] A poliéder rendszerű vetületek esetén is a legegyszerűbben leírható elhelyezést tekintjük normálisnak. A szabályos poliéderek általában akkor normális elhelyezésűek,



XI.3. ábra. CAHILL szög tartó vetülete

A vetület nem gnomonikus, hanem egy, a poliéder élei mentén hossz tartó leképezés, azonban az ikozaéderlapok kis területe miatt ez kevésbé befolyásolja a térképet. A vetületi szakadások a kontinenseket elkerülik, azonban ehhez néhány lapot ketté kell vágni és át kell rendezni.



XI.4. ábra. Dymaxion vetület

XI.3. Vetületanalízis

A térképek georeferálásához ismernünk kell a térkép vetületét annak összes paraméterével együtt. Míg ez az információ a topográfiai térképek

ha a pólus képe az egyik él felezőpontjára esik. Kivétel a kocka, amelynél normális elhelyezésben a pólus a lap közepére esik, és az oktaéder, amelynél a normális elhelyezés a test csúcsába eső pólust jelöl. A transzverzális elhelyezést poliéder rendszerű vetületekben nem értelmezzük, azonban kiemeljük azokat az elhelyezéseket, ahol a pólus képe valamelyik csúcsra, lapközépre, élre vagy szögfelezőre esik. Az általános elhelyezés neve továbbra is plagális.

esetén rendelkezésre áll, a tömegtérképek gyámrajzán a vetületi információk sekélyesek, már ha egyáltalán megtalálhatók. Az ismeretlen vetületű térkép vetületének meghatározását *vetületanalízis*nek nevezzük.

Nagy és közepes méretarányú térképeken az alkalmas vetületek egymástól csak csekély mértékben térnek el, így a vetület pontos megállapításának jelentősége kisebb. Ilyen esetekre találták ki a *detectproj* alkalmazást, amely illesztőpontok segítségével több szóba jöhető vetület paramétereit addig igazítja, amíg a vetület a lehető legjobban nem illeszkedik a megadott pontokra. Az alkalmazás a legvalószínűbbnek ítélt vetületeket kiliktázza a képernyőre. A végleges döntés előtt érdemes figyelembe venni a térkép korát: egyes vetületek csak bizonyos korszakokban voltak népszerűek, míg más vetületeket csak a közelmúltban fedeztek föl.

Kis méretarányú térképeken ritka vetületek is előfordulhatnak, azonban ilyenkor a fókálózat képeinek jellegzetességei jobban megfigyelhetők. ÉRDI-KRAUSZ a leggyakoribb típusokat csoportokba rendszerezte, így manuálisan, kevés méréssel is jól behatárolható a térkép vetülete. A csoportokat itt GYÖRFFY módosításaival találjuk:

1. A paralelkörök párhuzamos egyenesek, a meridiánok párhuzamos egyenesek.
 - a) Egyenközű meridiánok: Ha a foktrapézok alakja négyzet: *négyzetes hengervetület*. Ha téglalap: *meridiánban hossztartó valódi hengervetület*.
 - b) A paralelkörök a térkép széle felé sűrűsödnek: valószínűleg *területtartó valódi hengervetület*, a normálpárhuzamos kör méréssel határozható meg.
 - c) A paralelkörök a térkép széle felé ritkulnak: inkább *MERCATOR*, de lehet több hozzá hasonló ritka perspektív hengervetület is.
2. A paralelkörök párhuzamos egyenesek, a meridiánok egyéb vonalak.
 - a) A meridiánok körívek: Ha körkontúrban félgömb látható: *APIANUS I.*, vagy teljes gömbre kiterjesztve *ORTELIUS*. Teljes gömb körkontúrban: *VAN DER GRINTEN III.*
 - b) A meridiánok ellipszisívek, póluspontos: Egyenközű középmeridián: *APIANUS II.* Sűrűsödő paralelkörök: *MOLLWEIDE* vagy félgömb ábrázolására *transzverzális ortografikus*.
 - c) A meridiánok ellipszisívek, pólusvonalas: Meridiánok töréssel futnak a pólusba: *KAVRAJSZKIJ VII.* Meridiánok simán futnak a pólusba: Egyenközű középmeridián: *ECKERT III.* Sűrűsödő paralelkörök: *ECKERT IV.*
 - d) A meridiánok több ellipszisívből állnak: Meridiánok távolsága egyenletes: *BARANYI II.* Meridiánok a térkép széle felé sűrűsödnek: *BARANYI IV.*

- e) A meridiánok szinuszívek: Póluspontos: *MERCATOR–SANSON*. Pólusvonalas: Egyenközű középmeridián: *ECKERT V*. Sűrűsödő paralelkörök: *ECKERT VI*. vagy *KAVRAJSZKIJ VI*. (vagy a *MERCATOR-SOR* valamelyik másik tagja).
 - f) A meridiánok szinuszívekből és ellipszisívekből állnak: *GOODE* vagy *ÉRDI-KRAUSZ*.
 - g) A meridiánok egyenesek: Lehet *DONIS*, *COLLIGNON* vagy ha pólusvonalas, akkor *ECKERT I*. vagy *II*. Régi térképen a poliédervetület is felmerül.
 - h) Az előbbi alcsoportok egyikébe sem illik: *loximutális*, *ROBINSON*, a táblázatos formában megadott képzetes hengervetületek, továbbá több ritka területtartó képzetes vetület (pl. *KAVRAJSZKIJ V*., *CRASTER*, *PUTNIŃŠ*).
3. Parallelkörök teljes körök, meridiánok egy pontba tartó egyenesek.
- a) Egyenközű meridiánok: *POSTEL*.
 - b) A paralelkörök a térkép széle felé sűrűsödnek: valószínűleg *LAMBERT*, kis eséllyel *GINZBURG síkvetülete*. Ha igen gyorsan sűrűsödnek: perspektív síkvetület, valószínűleg *ortografikus*.
 - c) A paralelkörök a térkép széle felé ritkulnak: *sztereografikus*. Ha igen gyorsan ritkulnak: *gnomonikus*.
4. Parallelkörök teljes körök, meridiánok egyéb vonalak: normális képzetes síkvetület, rendkívül ritka.
5. Parallelkörök körívek, meridiánok egy pontba tartó egyenesek. Ebben a csoportban a hossztartó paralelkörök csak a sugárfüggvény és a sugárhajlás mérésével határozhatók meg.
- a) Egyenközű meridiánok: *DE L'ISLE*.
 - b) A paralelkörök a térkép széle felé sűrűsödnek: Póluspontos: *LAMBERT-kúpvetület*. Pólusvonalas: *ALBERS*.
 - c) A paralelkörök a térkép széle felé ritkulnak, póluspontos: minden bizonnyal *LAMBERT–GAUSS*, rendkívül ritkán lehet valamilyen perspektív kúpvetület is.
6. Parallelkörök körívek, meridiánok egyéb vonalak.
- a) Parallelkörök koncentrikusak: Szinte biztosan *BONNE* vagy *WERNER*, de ha pólusvonalas, akkor valamilyen ritka igazi képzetes kúpvetület.
 - b) Parallelkörök sugara a szélesség kotangensével arányos: Hossztartó paralelkörök: *amerikai polikónikus*. Merőleges fokhálózat: valószínűleg *War Office*. Egyenes meridiánok: *módosított polikónikus*. Parallelkörök a pólusok felé ritkulnak: *transzverzális sztereografikus*.
 - c) Nem illik az előzőekbe, de az Egyenlítő egyenközű: Teljes gömb kör kontúrban: *VAN DER GRINTEN I*. (a ritkább *II*. vetületben a fokháló-

XI. Különleges vetületek

- zat merőleges). Félgömb kör kontúrban, a gömb képe alma alakú: *NICOLOSI* vagy *VAN DER GRINTEN IV.* Pólusvonalas: *GINZBURG pszeudopolikónikus vetületei.*
- d) Az Egyenlítő nem egyenközü, de egyenes: *LAGRANGE.* Az Egyenlítő kör: *ferde szterografikus.*
7. Parallelkörök hiperbolák, meridiánok párhuzamos egyenesek: *transzverzális gnomonikus.*
8. Parallelkörök kúpszeletek, meridiánok összetartó egyenesek: *ferde gnomonikus.*
9. Parallelkörök ellipszisívek, meridiánok ellipszisívek: *ferde ortografikus* vagy *RAISZ* valamelyik vetülete.
10. Parallelkörök ellipszisek, meridiánok hiperbolák: *VON DER MÜHL vetületei,* legvalószínűbb a *LITROW.*
11. Egyéb vetületek
- a) Egyenlítő és középmeridián egyenes, a teljes gömb ellipszis kontúrban: Egyenközü középmeridián: *AITOFF.* Sűrűsödő paralelkörök: *HAMMER.*
- b) Egyenlítő és középmeridián egyenes, félgömb körkontúrban: Egyenközü középmeridián: *transzverzális POSTEL.* Sűrűsödő paralelkörök: *transzverzális LAMBERT-síkvetület.*
- c) Egyenlítő és középmeridián egyenes, utóbbi ekvidisztáns is, póluspontos: valószínűleg *transzverzális hengervetület.*
- d) Egyenlítő és középmeridián egyenes, egyenes pólusvonal: *WINKEL III.*
- e) Egyenlítő és középmeridián egyenes, görbe pólusvonal: *WAGNER* átszámozott síkvetületei.
- f) Csak a középmeridián egyenes: Valamilyen ferdetengelyű vetület.
- g) Csak az Egyenlítő egyenes: Transzverzális kúpvetület.
- h) Nincs szimmetriatengely: Valamilyen egzotikus vetület, leggyakrabban a *CHAMBERLIN.*

Tizenkettedik előadás

Vetületválasztás

XII.1. Hagyományos szempontok

Miután ennyi vetületet megismertünk, mi alapján válasszuk ki a megfelelő vetületet? A döntéshez figyelembe kell vennünk a térkép tematikáját, célját (pl. falitérkép, atlaszlap, terepi használat) és a várható olvasóközönség ismereteit.

Területre vonatkozó statisztikai adatokat, legyenek azok mezőgazdasági, demográfiai, növényzeti jellegűek, mindig *területtartó* vetületben mutassunk be! Hasonlóan területtartást igényelnek azok a földtudományi tematikus térképek, amelyeken a szakemberek várhatóan területeket fognak mérni, különösen ide értve a földtani, talajtani és éghajlattani térképeket. Az országok helyes kiterjedésének ábrázolása fontos a politikai és történelmi térképeken, azonban az ilyen, széles közönségnek szánt térképeken a túlzott szögtorzulás is kerülendő, ezért nagy kiterjedésű terület bemutatásakor eltekintünk a területtartástól.

A terepi használatra szánt térképek (turišta, navigációs, topográfiai stb.) minden esetben legyenek *szögtartók*! A mérhetőség érdekében különösen törekednünk kell egyúttal a terepi hosszak minél kisebb torzulására is. Szintén gyakori az irányok mérésének igénye a geofizikai (földmágnesesség, tektonika) és meteorológiai (áramlások, légnyomás) térképeken, ezeken még a nagyobb területtorzulások árán is ragaszkodjunk a szögtartáshoz!

Az előbb nem említett példáknál, különösen az általános földrajzi térképeken azonban sem a területtartás, sem a szögtartás nem ajánlott. Egy jól megválasztott általános torzulású vetület mindig jelentősen kedvezőbb a speciális torzulásúaknál. Valódi vetületek körében a meridiánban hossztartó vetületeknél nehéz jobbat találni; a képzetes vetületek között nincs ökölszabály, de kellő figyelemmel találhatunk igen kedvező leképezést. Atlasztérképek esetén eltérhetünk a fönti szabályoktól, mert egy atlaszon belül célszerű azonos területeket tematikától függetlenül azonos vetületben bemutatni, különböző területekre pedig hasonló torzulású leképezéseket választunk.

A vetület kedvező torzulású helyeit mindig törekedjünk a céltematika szempontjából legfontosabb helyekre forgatni! Például egy hosszú vasútvonal vagy vándorlás bemutatásakor a vetület hossztartó segédegyenlítője, esetleg segédparalelkörei kövessék az útvonal futását! Az egy pontból kiinduló hatások (pl. földrengés, rádiótorony hatósugara) ábrázolására a ferdetengelyű *POSTEL*-vetület alkalmas. Különleges célokra speciális torzulású vetületekre (pl. ortodrómak egyenesként jelennek meg a gnomonikus vetületben, a körök körökre képeződnek a sztereografikus vetületben) lehet szükségünk. Időzónatérképeken mindenképp párhuzamos egyenesre képeződő meridiánokra, földrajzi övezetek bemutatására (mezőgazdaság, növényzet, éghajlat) egyenes paralelkörökre van szükség.

Az olvasóközönség iskolázottsága döntő szempont a mellett, hogy lehet-e kedvezőbb torzulású pólusvonalas vetületet alkalmazni akkor is, ha a pólus környéke a térképtükörben megjelenik. Alacsonyabb képzettséget figyelembe vevő vagy esztétikai szempont lehet a fokhálózat merőlegessége is. Regionális térképeket rendszerint téglalap alakú tükörben ábrázolunk, azonban félgömböt vagy gömböt ábrázoló vetület esetén már kénytelenek vagyunk a vetület kontúrvonalát használni. Ekkor szempont lehet a kontúrvonal alakja. A félgömböket körkontúrban a síkvetületek ábrázolják. Gömb ábrázolása kör (pl. *VAN DER GRINTEN I.*), ellipszis (pl. *MOLLWEIDE*, *AITOFF*, *HAMMER*) és négyzet (pl. *PEIRCE*) alakban is lehetséges. A szokatlan alakú kontúrvonalakat (pl. *GINZBURG* képzetes vetületei) érdemes ugyanakkor a pólusvonal levágásával és a határoló meridiánon túli területek ismétlésével elrejtetni.

Általános ökölszabály, hogy kis területre bármilyen valódi vetület alkalmas, ha a torzulásmentes helyek legalább részben áthaladnak az ábrázolt területen, és a torzulási izovonalak közel párhuzamosak a terület alakjával. Két hossztartó paralelkör esetén ezeket az ábrázolt terület közepe és határa között érdemes fölvenni úgy, hogy inkább a széléhez essenek közelebb.

A vetületválasztás bonyolult folyamatát kézikönyvekkel is támogatják. *GINZBURG* vetületválasztási atlasza az orosz világatlaszok jellemző atlaszlapjaira ajánl kedvező torzulású vetületeket. A javasolt vetületekben készített térképvázlatokon a torzulásokat izovonalak segítségével ellenőrizhetjük. Nyugati megfelelője *SNYDER* albuma, amely sorra mutatja be a vetületeket, torzulási ellipszisekkel és részletes szöveges leírással ad tanácsokat azok alkalmazására. *SNYDER* útmutatása alapján írta *ŠAVRIČ* a *Projection Wizard* alkalmazást, amely egy tetszőleges foktrapézra ajánl megfelelő leképezéseket. Ez utóbbi azonban csak a legismertebb vetületek közül válogat az előbb ismertetett ökölszabályok alapján.

XII.2. A lokális torzultság

Miután meghatároztuk a leképezés tulajdonságaival szemben elvárásainkat, szeretnénk a szóba jöhető vetületek közül a lehető legkisebb torzulásút kiválasztani. Ehhez szükséges a térkép valamelyik pontjában a vetület torzulásmentes állapottól való eltérését valamilyen mérőszámmal (a továbbiakban *lokális torzultság*) jellemezni.

A módszer alapjait AIRY brit csillagász vetette meg azzal, hogy 1861-ben a *területtorzultságot*, azaz τ 1-től vett eltérését az $\varepsilon_\tau^2 = (\tau - 1)^2 = (ab - 1)^2$ képlettel határozta meg. A négyzetre emelés a negatív számok kiküszöbölése miatt szükséges, továbbá a számítások szempontjából fontos lesz a differenciálhatóság, így az abszolútérték függvény nem lenne alkalmas. A szögtorzulás jellemzésére alkotott b/a hányados korlátos (ugyanis ha az egyik szögszár az I. vetületi főirányba esik, akkor $i = b/a \leq 1$). Ezért AIRY ennek reciprokát helyettesítette a *szögtorzultság* képletébe: $\varepsilon_i^2 = (a/b - 1)^2$. A hiányzó hossztorzulás nem csak a helytől, hanem az iránytól is függ,* JORDAN javaslatára annak 1-től vett eltérését minden δ irányban átlagoljuk: $\varepsilon_l^2 = 1/(2\pi) \oint (l - 1)^2 d\delta$.

A térképen nem csak egyfajta, hanem az összes torzulást szeretnénk egyidejűleg minimumra szorítani, ezért ennek jellemzésére be kell vezetnünk a *teljes torzultság* fogalmát. AIRY ezt egyszerűen úgy mérte, hogy a szögtorzultság és a területtorzultság számtani közepét vette, azaz $\varepsilon^2 = (\varepsilon_\tau^2 + \varepsilon_i^2)/2 = [(ab - 1)^2 + (a/b - 1)^2]/2$. Föltűnik, hogy a hossztorzultság nem szerepel a teljes torzultság képletében. Ennek oka, hogy a hossztorzulások képletszerűen összefüggnek a szög- és területtorzulásokkal, így semmilyen hozzáadott információt nem nyújtanak a vetületi torzulások értékelésében. Megjegyezzük, hogy az átlagolás során nem szükséges a szög- és területtorzulásnak azonos súlyt adni, ha azok nemkívánatossága nem egyenlő a tematika szempontjából, a különböző súlyozást KLINGATSCH javasolta. A bonyolult számításhoz vezető kifejezést AIRY csak meglévő vetületek értékeléséhez alkalmazta, a legkisebb torzulású vetület keresésére az egyszerűbb alakú $\varepsilon_A^2 = [(a - 1)^2 + (b - 1)^2]/2$ képletet választotta.

AIRY elmélete bár a mai napig meghatározza a vetületi torzultság értékelését, három súlyos hiányossága van: KAVRAJSZKIJ kifogásolta, hogy a területnövekedéseknek és -csökkenéseknek a képletek nem adnak azonos súlyt. Például az azonos mértékű $\tau = 2$ és $\tau = 1/2$ torzulások közül előbbi torzultsága 1, utóbbié csak 1/4. BAJEVA kimutatta, hogy a képletek nem összevethető skálán mérik a terület- és szögtorzultságot, ezért különösen

* Valójában a szögtorzulás is függne a szögszárak irányától, ha nem kötnénk ki, hogy az egyik szögszár az I. vetületi főirány legyen.

súlyozott átlagolásukkor félrevezető eredményeket adnak. GYÖRFFY azt mutatta be, hogy az AIRY egyszerűbb teljes torzultsága valójában teljesen más tulajdonságait vizsgálja a vetületnek, mint a mérőszám eredeti változata. Mindhárom hiányosság csak nagy mértékű torzulások esetén jelentkezik, ezért AIRY képletei kis kiterjedésű területekre javasolhatók.

A problémák megoldására javasolta KAVRAJSZKIJ az 1-től vett eltérés vizsgálatára a logaritmusfüggvényt, amely mindhárom hiányosságot föloldja. Így a terület-, szög- és hossztorzultság valamint a teljes torzultság ajánlott képletei rendre:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\tau^2 &= \ln^2 \tau = \ln^2(ab) \\ \varepsilon_i^2 &= \ln^2 i = \ln^2 \frac{b}{a} = \ln^2 \frac{a}{b} \\ \varepsilon_l^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint \ln^2 l \, d\delta = \frac{1}{2\pi} \oint \ln^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \delta + b^2 \sin^2 \delta} \, d\delta \\ \varepsilon^2 &= \frac{1}{2} \left[\ln^2(ab) + \ln^2 \frac{a}{b} \right] = \ln^2 a + \ln^2 b\end{aligned}$$

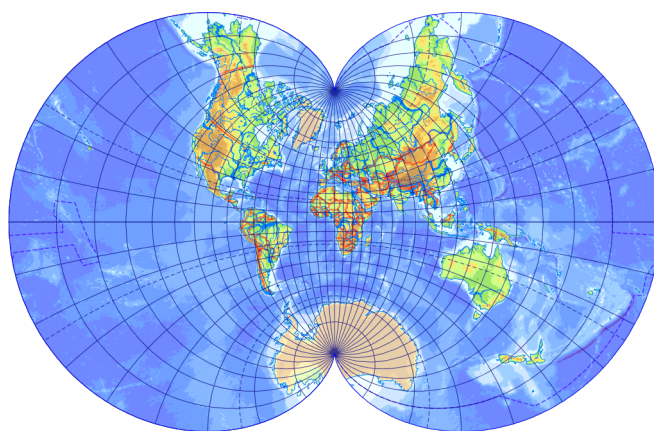
Értelemszerűen a szög- és területtorzultságoknak ebben az esetben is számíthatjuk a súlyozott átlagát.

XII.3. A globális torzultság

A lokális torzultsággal ellentétben a vetület egy teljes területre vonatkozó torzulásait fejezi ki a *globális torzultság*. Természetesen ilyen számításokkal csak akkor érdemes vesződni, ha az ábrázolt terület nagy kiterjedése miatt a torzulások már szabad szemmel is érzékelhetők, vagy ha a térképen geodéziai méréseket kívánunk végezni. A két említett felhasználás azonban egészen más elvárásokat támaszt. A geodéták azt szeretnék, hogy térképi méréseiket sehol ne terhelje egy bizonyos mértéknél nagyobb torzulás, ezért egy vetület jóságát a területen előforduló lokális torzultságok *szélsőértékei* jellemzik. Ezzel szemben a kis méretarányú térképeken a lokálisan kiugró értékű torzulások (pl. pólusvonal) elfogadhatók, azonban a torzultságok *átlaga* szorítandó minimumra. A két elvet MESCSEJAKOV rendszerezte. Az ő nyomán előbbi elvet *minimax*, utóbbit *variációs elv* néven ismerjük.

A geodéziában hasznos minimax elvet így elsősorban szögtartó vetületekre alkalmazzuk. Ekkor a globális torzultság a hossztorzulás legkisebb és legnagyobb előforduló értékének hányadosa. A minimax elv szerinti legkisebb torzulású szögtartó vetület létezését mondja ki CSEBISJEV tétele: *A gömb bármelyik kétszeresen differenciálható görbével határolt egybefüggő tartományára egyértelműen létezik egy olyan szögtartó vetület, amelyre a hossztorzulás*

szuprémumának és infimumának hányadosa minimális. Ennek a vetületnek a hossztorzulása a tartomány határán konstans. Pongyolán fogalmazva a legjobb szögtartó vetület torzulási izovonalai az ábrázolni kívánt terület határával párhuzamosan futnak. Bár ilyen vetületeket inkább topográfiai célokra használunk, érdekességképp a XII.1. ábrán látható a teljes gömb minimax elv szerint legkisebb torzulású szögtartó vetülete. Bonyolult alakú területekre (pl. országok) a legjobb topográfiai célú vetületet a sztereografikus vetület komplex polinomokkal történő átalakításával közelítjük (vö. XI.1. fejezet).



XII.1. ábra. EISENLOHR-vetület

A variációs elv esetén a lokális torzultságok egy T területen vett átlagát, azaz integrálközepét tekintjük a globális torzulásnak:

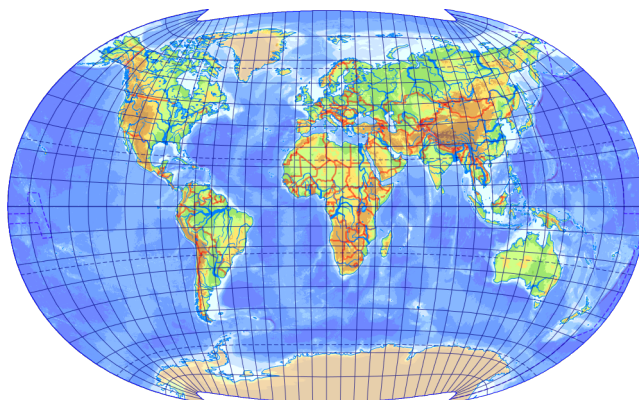
$$E^2 = \frac{1}{T} \iint_T \varepsilon^2 dT$$

Ebben a képletben ε helyére bármelyik lokális torzultságot behelyettesíthetjük. Ha speciálisan a KAVRAJSZKIJ által javasolt teljes torzultságot helyettesítjük be, akkor a globális torzultságot AIRY–KAVRAJSZKIJ-kritériumnak nevezzük. Az AIRY–KAVRAJSZKIJ-kritériummal minősítve a meglévő bevett vetületeket, világtérképre a legkedvezőbb vetületek között szerepel WINKEL III., BARANYI IV. és KAVRAJSZKIJ VII. vetülete, továbbá GINZBURG képzetes kúpvetületei, míg a legrosszabbak között található a polikónikus

* Néhány kutató úgy gondolja, hogy a térképolvasó által tapasztalt torzulások nem csak a kicsi lokális torzultságok összességéből adódnak, hanem a véges méretű alakzatokon mért torzulási arányszámokat kell vizsgálni. Ugyanakkor képletszerű összefüggésekkel és statisztikai vizsgálatokkal kimutatható, hogy ezzel a módszerrel nem nyerünk a variációs elvhez képest alapvetően különböző mérőszámot.

vetületek, VAN DER GRINTEN vetületei és BONNE vetülete. Területtartás követelménye esetén a WAGNER-transzformált vetületek és ECKERT IV. vetülete ajánlható világtérképre, a póluspontosak közül KAVRAJSZKIJ V. és HAMMER vetületei számítanak relatíve előnyösnek, azonban a területtartó vetületek torzultsága általában lényegesen meghaladja az általános torzultságúakét.

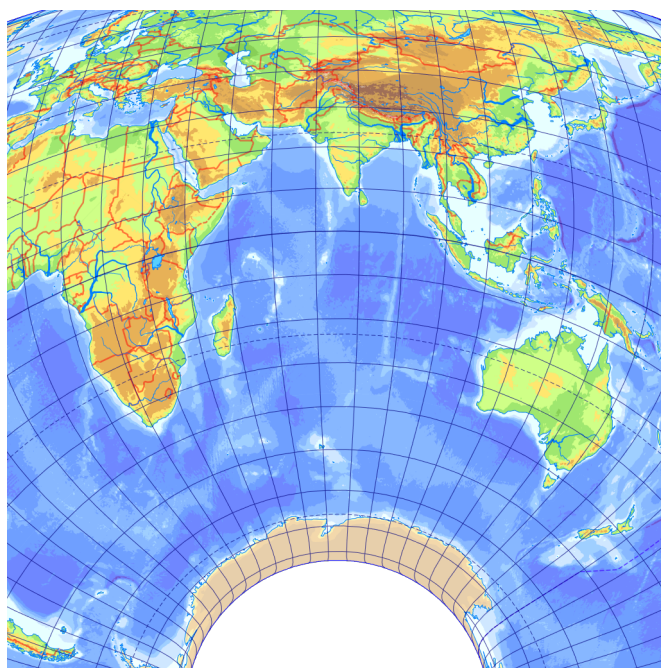
A variációs elv szerint egy adott T terület ábrázolására legkisebb globális torzultságú vetületet *ideális vetületnek* nevezzük. Az ideális vetület meghatározásához szükséges másodrendű EULER–LAGRANGE-differenciál-egyenlet megoldása még senkinek sem sikerült. Ez nem jelenti azt, hogy ne lehetne az ideális vetületet egy hatványsorral közelíteni. Így csak egy polinom ismeretlen együtthatóit kell úgy meghatározni, hogy a globális torzultság minimális legyen. Ez numerikus módszerekkel egyszerűen megkereshető. Ideális vetület nem csak a teljes Földre, hanem részterületek ábrázolására is értelmezhető, ekkor a vetület torzulása csak a kiválasztott területre vonatkoztatva minimális, azon kívül tetszőleges torzulási viszonyok fülléphetnek.



XII.2. ábra. Az ideális vetület közelítése

A XII.2. ábrán látható, hogy a teljes Föld ideális vetülete nem éppen ideális kartográfiai célokra. Illetve a torzulások tényleg meglepően jók, azonban a térkép kontúrvonala és a fokhálózat képe rendkívül zavaró, miközben ezek is fontos szempontok lehetnek a vetületválasztás során. MESCERJAKOV nyomán *legjobb kartográfiai vetületnek* nevezzük azt a vetületet, amely egy előírásokkal körülhatárolt vetületsokaságból az ábrázolt területre a legkisebb globális torzultságú. Az AIRY–KAVRAJSZKIJ-kritérium szerinti legjobb kartográfiai vetület kizárólag a valódi hengervetületek körében ismert (ez a meridiánban hossztartó), AIRY eredeti, egyszerűbb kritériumára azonban a valódi sík- és kúpvetületek között is ismert a legjobb vetület (ezek igen bonyolultak, miközben félgömbnél kisebb területen alig különböztethetők meg a meridiánban hossztartó vetületektől).

Képzetes vetületek körében a legjobb vetület függvényei csak numerikusan, polinomokkal közelíthetők. Ezek a vetületek (ha a szokatlan kontúrvonaltól eltekintünk, vagy azokat levágjuk) verhetetlen torzulási viszonyokat biztosítanak az adott terület ábrázolására. A IX.6. ábrán látható vetület például a legjobb ortogonális poliazimutális vetület az Északi-Atlanti-óceán és a Jeges-tenger együttes ábrázolására; a XII.3. ábrán pedig az Indiai-óceán legjobb területtartó pszeudopolikónikus vetületét tekinthetjük meg. Jól megfigyelhető, hogy az ilyen vetületek kedvező részei egy kiválasztott területre csoportosíthatók, attól távolodva azonban a torzulások rohamosan növekedni kezdenek.



XII.3. ábra. KERKOVITS pólusvonalas területtartó képzetes kúpvetülete az Indiai-óceánra

XII.4. Végszó

A helyes vetületválasztás során a térképész valamennyi vetülettani ismeretét egyidejűleg alkalmazza. Mint látható, nincs egységes recept a legalkalmasabb vetület megtalálására. A vetület megváltoztatása jobb esetben csak pár kattintás a megfelelő programban (már ha a kívánt vetületet éppen támogatja a térinformatikai rendszer), megéri tehát bölcsen élni a lehetőséggel. Különösen fiatalabb célközönség esetén nagy a felelősség, mert ők még nem rendelkeznek a vetületi torzulások korrigálásához szükséges

XII. Vetületválasztás

ismeretekkel; de egy rosszul megválasztott vetület a legjobb szakemberek munkáját is megkeserítheti egy tematikus térkép értelmezése során.

A. függelék

Angol–magyar szószedet

Ezúttal néhány képzetes vetületekhez köthető szakkifejezést tanulhatunk meg. Angol nyelven bár szintén gyakran nevezzük el a vetületeket szerzőjükéről, néhány vetületet e mellett saját néven is megjelölhetnek. Ilyen esetben a két név egymás mellett létezik.

- Angular distortion** ♦ Szögtorzulás
- Aphylactic (compromise)** ♦ Általános torzulású
- Areal scale** ♦ Területtorzulás
- Blended projection** ♦ Keverékvetület
- Central meridian** ♦ Középméridián
- Composite projection** ♦ Összetett vetület
- Conformal** ♦ Szögtartó
- Equal-area (equivalent)** ♦ Területtartó
- Flat-polar** ♦ Pólusvonalas
- First transverse** ♦ Első transzverzális
- Globular projection** ♦ Globuláris vetület
- Homolographic** ♦ MOLLWEIDE-vetület
- Homolosine** ♦ GOODE-vetület
- Interrupted projection** ♦ Osztott vetület
- Interruption** ♦ Vetületi szakadás
- Latitude** ♦ Szélesség
- Linear scale** ♦ Hossztorzulás
- Longitude** ♦ Hosszúság
- Minimum-error projection** ♦ Legjobb kartográfiai vet.
- Modified azimuthal** ♦ Egyéb képzetes vetület
- Modified polyconic** ♦ Módosított polikónikus vetület
- Normal** ♦ Normális
- Ordinary polyconic** ♦ Amerikai polikónikus vetület
- Orthoapsidal** ♦ RAISZ vetületei
- Orthophanic** ♦ ROBINSON-vetület
- Plagal** ♦ Általános ferdetengelyű
- Pointed-polar** ♦ Póluspontos
- Polyconic projection** ♦ (Pseudo)polikónikus vetület

Polyhedral projection ♦ Poliéder rendszerű vetület
Polyhedric projection ♦ Poliédervetület (III. kat. felm.)
Prime meridian ♦ Kezdőmeridián
Pseudoazimuthal projection ♦ Igazi képzetes síkvetület
Pseudoconic projection ♦ Igazi képzetes kúpvetület
Pseudocylindrical projection ♦ Képzetes hengervetület
Rectangular ♦ Ortogonális fokhálózatú
Rectangular polyconic ♦ War Office vetület
Second transverse ♦ Második transzverzális
Simple oblique ♦ Egyszerű ferdetengelyű
Sinusoidal ♦ MERCATOR–SANSON-vetület
Skew ♦ Aszimmetrikus ferdetengelyű
Standard line ♦ Torzulásmentes vonal
Star projection ♦ Csillag alakú vetület
Transverse oblique ♦ Ferde transzverzális
Trapezoidal ♦ DONIS-vetület
Umbeziffern ♦ WAGNER-transzformáció

B. függelék

Módosított polikónikus vetület

A VIII.2. fejezetben leírt módosított polikónikus vetületnél az ellipszoid alapfelületet foktrapézokra bontjuk fel, kiterjedésük szélességben 4° , hosszúságban $\pm 60^\circ$ -ig 6° , onnan $\pm 76^\circ$ -ig 12° , végül $\pm 84^\circ$ -ig 24° . Minden foktrapézt külön képezünk síkra, és minden foktrapéz képe külön térkép-szelvény saját síkkoordináta-rendszerrel. A szomszédos szelvények akár a határoló paralelkörök, akár a határoló meridiánok mentén összeilleszthetők, azonban a szelvények sarkai nem derékszögek, így négy szomszédos szelvényt már lehetetlen hézagmentesen illeszteni.

Legyen $\Lambda_{1,2}$ a két határoló hosszúság, $\Phi_{1,2}$ a két határoló (és egyben hossztartó) szélesség, továbbá $\Lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$ a középmeridián és $\Lambda_3 = \Lambda_0 + 2(\Lambda_2 - \Lambda_0)/3$ az egyik hossztartó meridián! A meridiánok képei egyenesek, a paralelkörök körív alakú képének sugarát a polikónikus vetületnél megszokott $\rho = N(\Phi) \operatorname{ctg} \Phi$ képlet adja meg. A paralelkör és az y tengely metszéspontja az origótól t távolságra van, a B.1. ábra alapján $t_1 = 0$. Keressük a P pont $x; y$ koordinátáit. A $P_{1,2}$ pontok koordinátái megkaphatók a sugárfüggvényből és a határoló paralelkörök hossztartásából:

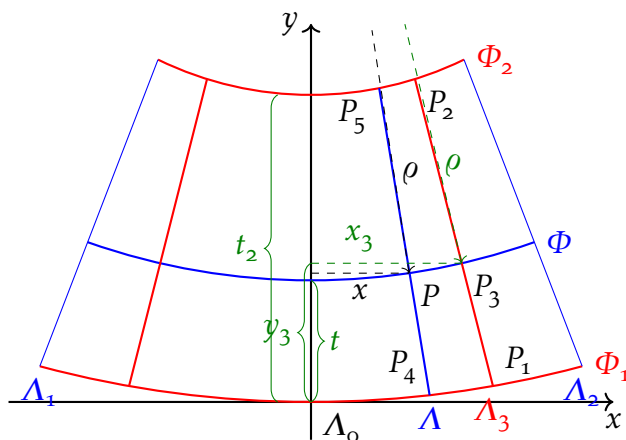
$$\begin{aligned}x_{1,2} &= N(\Phi_{1,2}) \operatorname{ctg} \Phi_{1,2} \sin[(\Lambda_3 - \Lambda_0) \sin \Phi_{1,2}] \\y_{1,2} &= t_{1,2} + N(\Phi_{1,2}) \operatorname{ctg} \Phi_{1,2} \left(1 - \cos[(\Lambda_3 - \Lambda_0) \sin \Phi_{1,2}]\right)\end{aligned}$$

A fenti egyenletekből t_2 ismeretlen (hiszen kivételesen nem kötöttük ki a középmeridián ekvidisztanciáját), így y_2 is. Ugyanakkor P_1 és P_2 távolsága megegyezik a valós ellipszoidi távolsággal:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} M(\Phi) d\Phi$$

Ebből csak y_2 ismeretlen, azt kifejezve, majd a fenti egyenletbe helyettesítve t_2 is kiszámítható. Legyen a P_3 pont a P pont szélességi körének metszéspontja a Λ_3 meridiánnal! Ekkor egyrészt abból, hogy a P_3 pont képe

B. Módosított polikónikus vetület



B.1. ábra. Módosított polikónikus vetület (a piros vonalak hosszartók)

a P_1 és P_2 pontokon átmenő egyenesen található, másrészt a Λ_3 meridián hosszartásából:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \int_{\Phi_1}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldható úgy, hogy az alsó egyenletből $x_3 - x_1$ -et kifejezzük, és a felsőbe behelyettesítjük y_3 -at megkapva. Ezt a felső egyenletbe helyettesítve x_3 is kijön. A zöld szaggatott vonal és a paralelkör P_3 pontba mutató sugara meghatároz egy derékszögű háromszöget. Ennek függőleges befogója $y_3 - t$ -vel rövidebb a sugárnál. A PITAGORASZ-tételből:

$$\rho^2 = x_3^2 + [\rho - (y_3 - t)]^2$$

Mivel $\rho = N(\Phi) \text{ctg } \Phi$, kizárólag t ismeretlen, így átrendezve kifejezhető.

A P_4 és P_5 pontok újfent a határoló paralelkörök hosszartásából megkaphatók, t_2 már ismert:

$$x_{4,5} = N(\Phi_{1,2}) \text{ctg } \Phi_{1,2} \sin[(\Lambda - \Lambda_0) \sin \Phi_{1,2}]$$

$$y_{4,5} = t_{1,2} + N(\Phi_{1,2}) \text{ctg } \Phi_{1,2} (1 - \cos[(\Lambda - \Lambda_0) \sin \Phi_{1,2}])$$

A P pont a P_4 és P_5 pontokon átfektetett egyenesen található:

$$\frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = \frac{y - y_4}{y_5 - y_4}$$

B. Módosított polikónikus vetület

Másrészt az előbb fölirt PITAGORASZ-tétel a ρ átfogójú fekete szaggatott derékszögű háromszögre is igaz:

$$\rho^2 = x^2 + [\rho - (y - t)]^2$$

Az utolsó két egyenlet egy másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer ad a keresett $x; y$ koordinátákra, amely például egymásba helyettesítéssel, majd a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldható.

Ezt az általános torzulású vetületet az 1 : 1 000 000 méretarányú, nemzetközi együttműködéssel készített világtérképműhöz (*Internationale Weltkarte; International Map of the World*) alkalmazták. A térképmű ötlete 1891-ben született, majd 1909-ben döntöttek a vetületválasztásról. A szerkesztési utasítást LALLEMAND dolgozta ki 1911-ben, de analitikus képleteket csak SNYDER közölte 1982-ben. 1962 után a térképművet szögtartó valódi kúpvetületben rajzolták.

C. függelék

Egyenes fókálózatú képzetes vetületek

A képzetes hengervetületek körében létezik egy olyan csoport, amelyben nem csak a paralelkörök, hanem a meridiánok is egyenes vonalra képeződnek le, azonban utóbbiak nem zárnak be derékszöget a paralelkörökkel. Ezeket a vetületeket régebben egyszerű szerkeszthetőségük miatt néha alkalmazták, mára azonban lényegében teljesen kiszorultak a gyakorlatból. Jelentős hátrányuk, hogy a meridiánok képei az Egyenlítőnél megtörnek.

A legrégebbi ilyen leképezés, a DONIS-vetület szerzője ismeretlen, valamikor a XV. századból eredhet. Ebben a középmeridián és az Egyenlítő hossztartó, a meridiánok az Egyenlítőt és a póluspontot egyenesen kötik össze. Ebből adódnak a leképezés egyenletei:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{\pi} R \widehat{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - |\widehat{\varphi}| \right) \\y &= R \widehat{\varphi}\end{aligned}$$

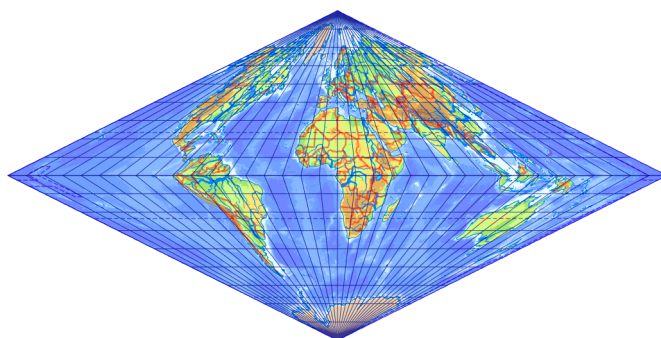
A C.1. ábrán látható vetület általános torzulású. A vetületet elsősorban regionális térképekhez alkalmazták. Ilyenkor gyakran az Egyenlítő helyett a határoló paralelköröket tették hossztartóvá. A vetületi egyenletek ekkor a III.3. fejezetben ismertetett poliédervetülettel egyeznek meg, a görbületi sugarak helyére értelemszerűen a gömb sugarát helyettesítve.

Alkossunk területtartó vetületet! Ehhez először átméretezéssel próbáljuk meg a területegyenlőséget elérni! A rombusz területe $R\pi \cdot 2R\pi/2 = R^2\pi^2$, amelyet mindkét irányban c -szeresre nagyítva a $4R^2\pi$ földfelszín szeretnénk visszakapni:

$$\begin{aligned}c^2 R^2 \pi^2 &= 4R^2 \pi \\c &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

A nagyítás után alkalmazzuk a módosított földrajzi szélesség módszerét, az új szélességet ψ -vel jelölve. A gömböv képe egy trapéz, alapja, az

C. Egyenes fókálózatú képzetes vetületek



C.1. ábra. DONIS-vetület

Egyenlítő, $cR2\pi$ hosszú, magassága $cR\widehat{\psi}$, felső alapja pedig $4cR(\pi/2 - |\widehat{\psi}|)$. A trapéz területe, azaz a két alap átlaga szorozva a magassággal egyezik a gömbön $2\pi \sin \varphi$ felszínével:

$$\begin{aligned} \frac{2cR\pi + 4cR\left(\frac{\pi}{2} - |\widehat{\psi}|\right)}{2} cR\widehat{\psi} &= 2R^2 \pi \sin \varphi \\ 2\pi\widehat{\psi} - 2\widehat{\psi}^2 \operatorname{sign} \psi &= \frac{2\pi \sin \varphi}{c^2} \\ 2\widehat{\psi}^2 \operatorname{sign} \psi - 2\pi\widehat{\psi} + \frac{\pi^2}{2} \sin \varphi &= 0 \\ \widehat{\psi} &= \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 4\pi^2 \sin \varphi \operatorname{sign} \psi}}{4 \operatorname{sign} \psi} = \frac{\pi(1 \pm \sqrt{1 - \sin|\varphi|})}{2 \operatorname{sign} \varphi} \end{aligned}$$

Mivel $\widehat{\psi} < \pi/2$, a két megoldás közül a negatív előjelet tartalmazót vehetjük csak figyelembe, emellett φ és ψ előjelei megegyeznek. Továbbá:

$$\begin{aligned} 1 - \sin \varphi &= 1 - \cos(90^\circ - \varphi) = \\ &= \sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} + \cos^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} - \left(\cos^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} - \sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right) = \\ &= 2 \sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \end{aligned}$$

Ebből:

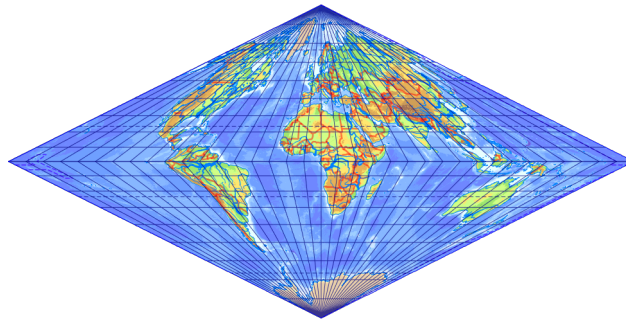
$$\widehat{\psi} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{90^\circ - |\varphi|}{2} \right) \operatorname{sign} \varphi$$

C. Egyenes fokhálózatú képzetes vetületek

Ezt a DONIS-vetület egyenleteibe behelyettesítve kapjuk a francia COLLIGNON 1865-ben alkotott területtartó vetületét (C.2. ábra):

$$x = c \frac{2}{\pi} R \widehat{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - |\widehat{\psi}| \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} R \widehat{\lambda} \sin \frac{90^\circ - |\varphi|}{2}$$

$$y = c R \widehat{\psi} = \sqrt{\pi} R \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{90^\circ - |\varphi|}{2} \right) \text{sign } \varphi$$



C.2. ábra. COLLIGNON-vetület

Készítsük el a DONIS-vetület és a négyzetes hengervetület keverékét!

$$x = c \frac{\frac{2}{\pi} R \widehat{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - |\widehat{\varphi}| \right) + R \widehat{\lambda}}{2} = c R \widehat{\lambda} \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}|}{\pi} \right)$$

$$y = c \frac{R \widehat{\varphi} + R \widehat{\varphi}}{2} = c R \widehat{\varphi}$$

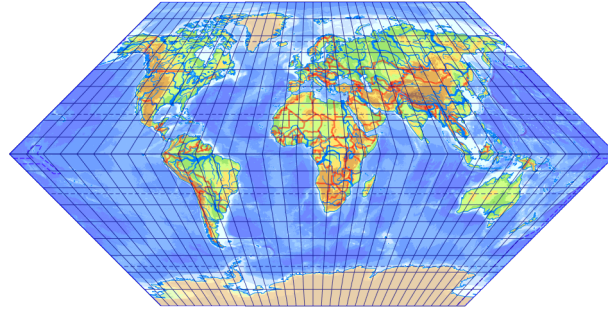
Ez ECKERT I. vetülete (C.3. ábra). ECKERT a kizárólag szerkesztési utasítással megadott leképezéshez nem definiálta a fokhálózat és a földi méretviszonyok közötti összefüggést, így a c konstans nem határozható meg. Ugyanakkor feltételezhetjük, hogy ECKERT többi vetületéhez hasonlóan ezt is területegyenlőnek szánhatta. A vetület egy négyzetből áll, amelynek területe $c^2 R^2 \pi^2$, és két egyenlő szárú háromszögből, amelyek területe $(c R \pi \cdot c R \pi / 2) / 2$, és az összterület $4 R^2 \pi$:

$$c^2 R^2 \pi^2 + 2 \frac{c^2 R^2 \pi^2}{4} = 4 R^2 \pi$$

$$\frac{3c^2}{2} \pi = 4$$

$$c = 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}}$$

C. Egyenes fókálózatú képzetes vetületek



C.3. ábra. ECKERT I. vetülete

ECKERT II. vetülete hasonló kinézetű (C.4. ábra), de területtartó. Vezessük be ismét a ψ módosított szélességet! Ezúttal a gömbön képe egy majdnem ugyanolyan trapéz, mint COLLIGNON vetületénél volt, csak a felső alap hossza most $2cR(\pi - |\widehat{\psi}|)$.

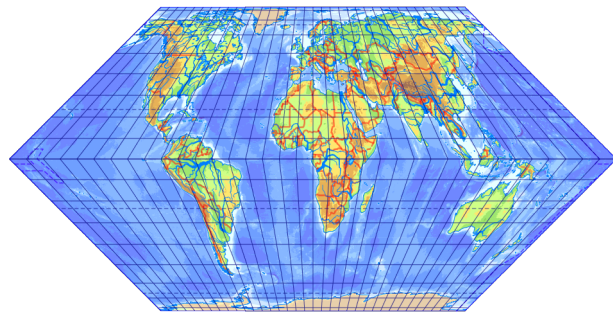
$$\begin{aligned} \frac{2cR\pi + 2cR(\pi - |\widehat{\psi}|)}{2} cR\widehat{\psi} &= 2R^2 \pi \sin \varphi \\ 2\pi\widehat{\psi} - \widehat{\psi}^2 \operatorname{sign} \psi &= \frac{2\pi \sin \varphi}{c^2} \\ \widehat{\psi}^2 \operatorname{sign} \psi - 2\pi\widehat{\psi} + \frac{3\pi^2}{4} \sin \varphi &= 0 \\ \widehat{\psi} &= \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 3\pi^2 \sin \varphi \operatorname{sign} \psi}}{2 \operatorname{sign} \psi} = \frac{\pi(2 \pm \sqrt{4 - 3 \sin|\varphi|})}{2 \operatorname{sign} \varphi} \end{aligned}$$

Ismételten csak a negatív előjelet tartalmazó gyököt fogadhatjuk el megoldásnak, mert $\psi < 90^\circ$. Végül:

$$\begin{aligned} x &= cR\lambda \left(1 - \frac{|\widehat{\psi}|}{\pi} \right) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} R\lambda \sqrt{4 - 3 \sin|\varphi|} \\ y &= cR\widehat{\psi} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} R(2 - \sqrt{4 - 3 \sin|\varphi|}) \operatorname{sign} \varphi \end{aligned}$$

Ez a vetület a többivel ellentétben rendkívül ritkán előfordulhat kevésbé régi térképen is. Az egyenes meridiánképű képzetes hengervetületek alkalmazása a modern térinformatikában kizárólag régi térképek georeferálásakor fordul elő.

C. Egyenes fókálózatú képzetes vetületek



C.4. ábra. ECKERT II. vetülete

D. függelék

Közelítő képletek BARANYI vetületeihez

Itt olvasható a VI.1. fejezetben levezetés nélkül megadott BARANYI-vetületek matematikai leírása.

BARANYI II. vetületében az Egyenlítő hossztartó, azaz $2R\pi$ hosszú. A középmeridián $2y_{max}$ hossza az Egyenlítő $7/10$ -szerese, azaz $y_{max} = y(90^\circ) = 7R\pi/10$ (D.1. ábra). A $\varphi_H = 70^\circ$ szélesség a középmeridiánt $13 : 5$ arányban osztja föl, ezért $y(70^\circ) = 13y_{max}/18 = 91R\pi/180$. A paralellkörök távolsága az Egyenlítőtől távolodva számtani sorozat szerint növekszik, azaz y (az északi féltekén) egy pl. $p\widehat{\varphi} + q\widehat{\varphi}^2$ alakban fölírható másodfokú függvény. φ helyére 90° -ot, majd 70° -ot helyettesítve két egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}p + \frac{\pi^2}{4}q &= \frac{7R\pi}{10} \\ \frac{7\pi}{18}p + \frac{49\pi^2}{324}q &= \frac{91R\pi}{180}\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer pl. CRAMER-szabállyal megoldva $p = 19R/20$ és $q = 9R/(10\pi)$ adódik. Ebből (már a déli féltekét is figyelembe véve) a következő vetületi egyenletet kapjuk:

$$y = R\left(\frac{19}{20}|\widehat{\varphi}| + \frac{9}{10\pi}\widehat{\varphi}^2\right)\text{sign } \varphi$$

A közöséges törteket tizedestörtekre váltva kapjuk y szokásos alakját.

A piros körív középpontja $R\pi - r_1$ távolságra van a középmeridiántól. Ugyanakkor a φ_H paralellkör d félhossza ettől $r_1 \cos \delta$ -val hosszabb:

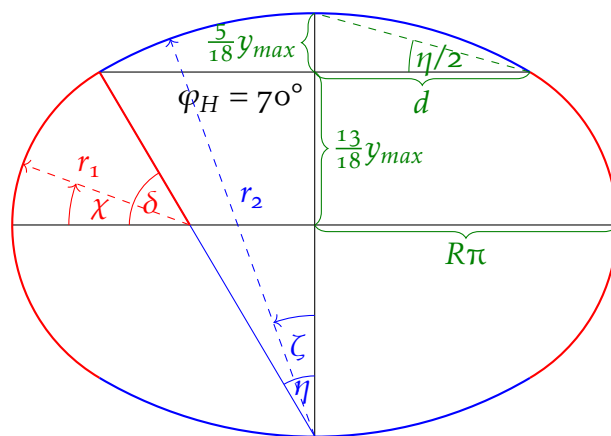
$$d = R\pi - r_1 + r_1 \cos \delta$$

Következőnek a δ szöget határozzuk meg, amely a kontúrkörívek csatlakozási pontjának az Egyenlítővel bezárt szöge. Egyfelől a piros r_1 sugarú körívből:

$$\sin \delta = \frac{\frac{13}{18}y_{max}}{r_1} = \frac{\frac{91}{180}R\pi}{r_1}$$

Másfelől az ábráról látszik, hogy a körívek törésmentes csatlakozása okán δ pótszöge η . A középponti és kerületi szögek tételéből adódik, hogy az

D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez



D.1. ábra. BARANYI II. vetülete

azonos húrhoz tartozó zöld szög nagysága $\eta/2$. Ugyanakkor ennek tangense egyszerűen leolvasható:

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \delta}{2} = \frac{\frac{5}{18} y_{\max}}{d} = \frac{\frac{35}{180} R\pi}{R\pi - r_1 + r_1 \cos \delta}$$

Az előző két egyenletből δ egyaránt kifejezhető. A két kifejezés egymással szükségszerűen egyenlő:

$$\arcsin \frac{\frac{91}{180} R\pi}{r_1} = 90^\circ - 2 \operatorname{arctg} \frac{\frac{35}{180} R\pi}{R\pi - r_1 + r_1 \cos \delta}$$

A jobb oldal nevezőjében $\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta}$ átalakítást követően $\sin \delta$ korábban megkapott képlete behelyettesíthető, így az egyenletből már csak r_1 marad ismeretlen. Kellő mennyiségű trigonometrikus átalakítás után az egyenlet megoldható:

$$r_1 = \frac{R\pi}{1450} \left(1003 - 3 \sqrt{\frac{5107}{2}} \right) \approx 1,84466R$$

Visszahelyettesítve a korábban levezetett egyenletekbe $\delta \approx 59,42867^\circ$ és $d \approx 2,23514R$ adódik. Mivel $\sin \eta = \cos \delta = d/r_2$, $r_2 \approx 4,39461R$ is kiszámítható. Utóbbi a középmeridián hosszánál alig kisebb.

D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez

Legyen a $-70^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ$ szélességű paralelkör végpontjába mutató sugár Egyenlítővel bezárt hajlásszöge χ ! Ekkor az ábráról:

$$\sin \chi = \frac{y(\varphi)}{r_1}$$

Továbbá a piros kör középpontja az y tengelytől $R\pi - r_1$ távolságra van, a paralelkör végpontjának x koordinátája ettől $r_1 \cos \chi$ -vel nagyobb. Mivel a hosszúsági körök a szélességi köröket egyenközűen osztják:

$$x = (R\pi - r_1 + r_1 \cos \chi) \frac{\widehat{\lambda}}{\pi}$$

$|\varphi| > 70^\circ$ szélességekre a kék kör középpontjától a paralelkör képe $r_2 - y_{max} + y$ távolságra van. A paralelkör végpontjába mutató ζ szög így megkapható:

$$\cos \zeta = \frac{r_2 - \frac{7}{10}R\pi + y(\varphi)}{r_2}$$

A paralelkör végpontjának x koordinátája $r_2 \sin \zeta$, így:

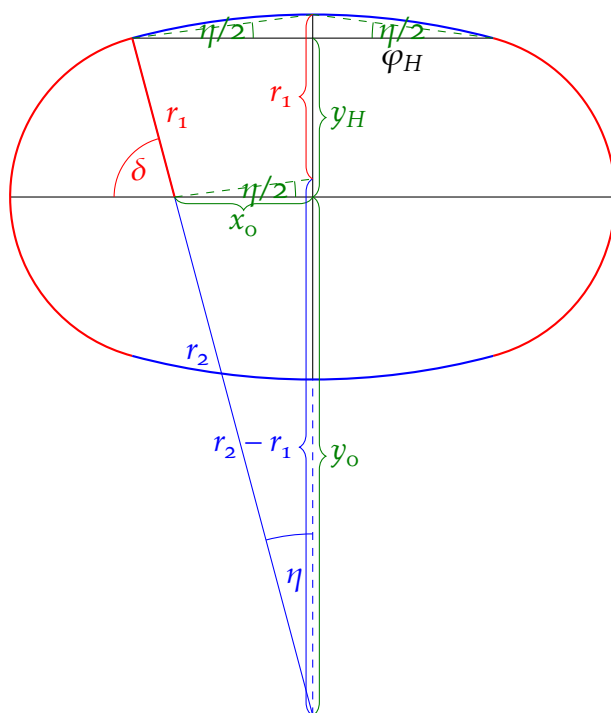
$$x = r_2 \sin \zeta \frac{\widehat{\lambda}}{\pi}$$

Ezzel a II. vetület leírását elkészítettük. Térjünk át a IV. vetület tárgyalására! Ebben BARANYI nem adta meg az általa használt egységek és a valódi távolságok közötti kapcsolatot. Ha fölteszük a vetületi kezdőpontban a torzulásmentességet, akkor tudva, hogy itt a 10° -os foktrapézok oldalhossza 12 egység, következik, hogy egy egység $10R\pi/(180 \cdot 12) = R\pi/216 \approx 0,0145444R$. Ebben a vetületben a piros körív sugara $r_1 = 100$ egység. Az Egyenlítő hossza 368 egység, a középmeridiáné 222 egység. Ebből adódik, hogy a piros kör középpontja az y tengelytől 84 egységre kerül, azaz átváltva $x_0 \approx 1,22172R$ (D.2. ábra).

A kék és piros körívek középpontjai a törésmentes csatlakozásból adódóan $r_2 - r_1$ távolságra vannak egymástól. Ezt a távolságot az y tengelyre a kék körív középpontjából felmérve az Egyenlítőtől $111 - r_1 = 11$ egység távolságba kerülünk (itt fölhasználtuk, hogy a középmeridián fele 111 egység). Jelöljük az előbbi két egyforma szakasz hajlásszögét η -val!

Ekkor a jobb felső sarokban lévő szög a kerületi szögek tétele szerint $\eta/2$, a bal felső sarokban lévő a szimmetria miatt szintén $\eta/2$. A kék és piros körívek középpontjai és a középmeridiánon előbb kijelölt pont által meghatározott $r_2 - r_1$ szárhosszúságú, valamint a kék kör középpontja, az Északi-sark és a két körív csatlakozási pontja által meghatározott r_2

D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez



D.2. ábra. BARANYI IV. vetülete

szárhosszúságú egyenlő szárú háromszögek hasonlóak. E miatt a bal felső sarokban és a piros körív középpontjánál található két szög egyállású, így utóbbi szintén $\eta/2$. Ennek tangense (a befogókat egységekben mérve):

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{111 - r_1}{x_0} = \frac{11}{84}$$

Azaz $\eta \approx 14,92^\circ$. Ebből $\delta = 90^\circ - \eta \approx 75,08^\circ$ adódik. Mivel $y_H = r_1 \sin \delta$, $y_H \approx 96,63$ egység. Továbbá:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{84}{r_2 - 111}$$

Így $r_2 \approx 426,23$ egység, $y_0 = r_2 - 111 \approx 315,23$ egység.

Az y koordinátát egy kilencedfokú, a szimmetria érdekében páratlan polinommal közelítjük, ahol a vetületi kezdőpont torzulásmentessége miatt az elsőfokú együttható egy ($\varphi = 0$ helyen y deriváltja így R):

$$y = R(\widehat{\varphi} + a\widehat{\varphi}^3 + b\widehat{\varphi}^5 + c\widehat{\varphi}^7 + d\widehat{\varphi}^9)$$

Az együtthatókat úgy választjuk meg, hogy azok kövessék BARANYI VI.1. fejezetben ismertetett szerkesztési utasítását. Azaz a pólusban

D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez

$y = 111$ egység, átváltva $37R\pi/72$. A pólus környékén a szélességi körök ugyanolyan távolságra vannak, mint az Egyenlítőnél, azaz y deriváltja itt is R . A pólusban és a 45° -os szélesség környezetében a szélességi körök egyenletesen helyezkednek el, azaz y második deriváltja e két helyen zérus. Ebből négy egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\pi}{2} + a\frac{\pi^3}{8} + b\frac{\pi^5}{32} + c\frac{\pi^7}{128} + d\frac{\pi^9}{512}\right) &= \frac{37R\pi}{72} \\ R\left(1 + a\frac{3\pi^2}{4} + b\frac{5\pi^4}{16} + c\frac{7\pi^6}{64} + d\frac{9\pi^8}{256}\right) &= R \\ R\left(a\frac{6\pi}{2} + b\frac{20\pi^3}{8} + c\frac{42\pi^5}{32} + d\frac{72\pi^7}{128}\right) &= 0 \\ R\left(a\frac{6\pi}{4} + b\frac{20\pi^3}{64} + c\frac{42\pi^5}{1024} + d\frac{72\pi^7}{16384}\right) &= 0 \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az $a; b; c; d$ együtthatókat. Ezeket az eredeti polinomba visszahelyettesítve nemlineáris egyenlet megoldásával kereshetjük meg, hogy az $y = y_H$ értéket a polinom a $\varphi_H \approx \approx 78,07^\circ$ szélességen veszi föl. Ez fontos az x vetületi egyenletek meghatározásához, mert a piros és kék kontúrkörök egyenletei eltérnek. Ezek rendre:

$$\begin{aligned} x_p &= x_0 + \sqrt{r_1^2 - y^2} \\ x_k &= \sqrt{r_2^2 - (|y| + y_0)^2} \end{aligned}$$

A paralelkörök egyre lassabban sűrűsödő osztásközeit logaritmussal közelítjük:

$$f(\lambda) = \frac{\ln(1 + A|\widehat{\lambda}|)}{AB} \text{sign } \lambda$$

Az együtthatók megválasztásánál arra törekszünk, hogy $f(180^\circ) = 1$ legyen. A kezdőpont torzulásmentessége miatt az Egyenlítő hosszának felét és az f deriváltjának 0 helyen vett értékét összeszorozva R -et kell kapnunk. Utóbbi feltételből $B = 23\pi/27$, míg előbbi feltételbe ezt visszahelyettesítve egy nemlineáris egyenletet kapunk, amelyből A közelítő értéke kiszámítható. Végül a vetületi x koordinátát az adott szélességen érvényes kontúrkörök

D. Közelítő képletek BARANYI vetületeihez

egyenletéből számított x_p vagy x_k és $f(\lambda)$ szorzataként kapjuk. A végeredmény:

$$y = R(\widehat{\varphi} + 0,073880\widehat{\varphi}^3 - 0,0538964\widehat{\varphi}^5 + 0,01560242\widehat{\varphi}^7 - 0,001639406\widehat{\varphi}^9)$$

$$x = \frac{\ln(1 + 0,11679|\widehat{\lambda}|)}{0,31255} \operatorname{sign} \lambda \cdot \begin{cases} (1,22172R + \sqrt{2,115393R^2 - y^2}) & \text{ha } |\varphi| \leq \varphi_H \\ \sqrt{38,4308R^2 - (4,58448R + |y|)^2} & \text{ha } |\varphi| > \varphi_H \end{cases}$$