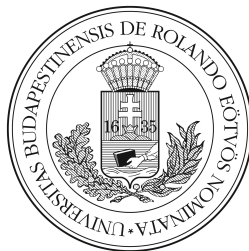


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI INTÉZET

DR. KERKOVITS KRISZTIÁN ANDRÁS

Valódi vetületek

Jegyzet a **Vetülettan** előadáshoz (*ősz*i félév)



Budapest, 2022.

Lektorálta: DR. GYÖRFFY JÁNOS

A jegyzet az ELTE IK 2022. évi tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán
elnyert forrás felhasználásával készült.

A jegyzet szedése a \LaTeX 2_ε programban készült.

Ez a jegyzet non-profit oktatási és kutatási célokra szabadon felhasználható és terjeszthető az eredeti szerző és esetleges módosítás esetén azok egyértelmű megjelölése mellett. Minden más célú, különösen az anyagi haszonszerzéssel járó felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével lehetséges.

Tartalomjegyzék

Előszó	5
I. A vetülettan alapjai	6
I.1. A Theorema Egregium.	6
I.2. Mi a vetület?	8
I.3. Geodéziai dátumok	9
I.4. A vetületek osztályozása	12
II. Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból	15
II.1. A hossztorzulás.	15
II.2. A fokhálózat szögének torzulása	18
II.3. A területtorzulás	19
III. Tissot torzulási elmélete	21
III.1. A vetület mint lokális affin transzformáció	21
III.2. A torzulási ellipszis	23
III.3. A hossztorzulás szélsőértékeinek számítása	25
III.4. A legnagyobb szögmegváltozás.	26
IV. Vetületi torzulások a gyakorlatban	28
IV.1. A torzulások szemléltetése	28
IV.2. Tissot tételéből nem következő torzulások	29
IV.3. Földrajzi segédkoordináták	32
V. Perspektív síkvetületek	35
V.1. Valódi síkvetületek általában	35
V.2. Általános perspektív síkvetület.	36
V.3. Gnomonikus vetület	37
V.4. Ortografikus vetület	39
V.5. Sztereografikus vetület	39
VI. Nemperspektív síkvetületek	44
VI.1. POSTEL vetülete	44
VI.2. LAMBERT síkvetülete	46

VI.3. A GINZBURG-féle séma	48
VI.4. Ellipszoid alapfelületű síkvetületek	49
VII. Perspektív és területtartó hengervetületek	52
VII.1. Általános képletek	52
VII.2. Perspektív hengervetület	53
VII.3. Kváziperspektív hengervetületek	54
VII.4. Területtartó hengervetület	57
VIII. További valódi hengervetületek	60
VIII.1. Meridiánban hossztartó hengervetületek	60
VIII.2. MERCATOR vetülete	62
VIII.3. Ritkábban előforduló hengervetületek.	65
IX. A forgási ellipszoid hengervetületei	67
IX.1. Normális elhelyezésű hengervetületek	67
IX.2. A CASSINI–SOLDNER-vetület	68
IX.3. A Web Mercator	68
IX.4. A GAUSS–KRÜGER-vetület	69
IX.5. ROSENMUND és HOTINE vetületei	72
X. Általános torzulású kúpvetületek	74
X.1. Valódi kúpvetületek	74
X.2. Perspektív kúpvetület	75
X.3. Parallelkörben hossztartó kúpvetület	77
X.4. DE L'ISLE vetülete	78
XI. Speciális torzulású kúpvetületek	83
XI.1. ALBERS vetülete.	83
XI.2. LAMBERT–GAUSS-vetület	87
XI.3. Az ellipszoid kúpvetületei	92
XII. Alkalmazott vetülettan	93
XII.1. Lehet a torzulás hasznos?	93
XII.2. Fókuszált vetületek	94
XII.3. Vetületek és térinformatika	96
XII.4. Georeferálás	98
Függelékek	101
A. Angol–magyar szószedet	101
B. Alternatív bizonyítás Tissot tételéhez	103
C. Inverz vetületi egyenletek számítása.	107
D. Magassági dátumok	112

Előszó

Az előző évben megjelent alapszakos jegyzet sikerére való tekintettel és a hallgatók nagy örömeire 2021-ben indult meg a mesterszakos előadások anyagainak lejegyzése.

Jelen jegyzet a mesterszakos Vetülettan előadások őszi félévének anyagát tartalmazza. A fejezetek az egyes előadások időkereteibe próbálnak beleférni, ezért bár törekedtem arra, hogy a tananyag kövessen valamilyen tematikus rendező elvet, ezt nem lehetett mindenütt maradéktalanul megvalósítani.

A jegyzet nyelvezetében próbál ismeretterjesztő lenni és a matematikában kevésbé járatos olvasónak is élményt nyújtani, de nem lehet minden esetben elkerülni a szabatos, elemi analízisből ismert fogalmak használatát. Ilyenkor nem a szokásos, matematikai írásokban megszokott szabatos definíciót közlöm az új fogalmakra, hanem ezek láttató jelentését igyekszem átadni. Ezzel együtt, ahol ez a keret lehetőséget ad, föl-fölvillantok néhány matematikai érdekességet is lábjegyzetek formájában.

A szövegben található kék linkek kattinthatók, ezek könnyítik a navigációt a jegyzeten belül. A jegyzetben többfelé találkozhatunk színes képletekkel. Ez a könnyebb megértést hivatott segíteni a bonyolult átalakítások során. Ha egy egyenlőségjel két oldalán azonos színű kifejezéseket látunk, akkor azok értéke megegyezik. Gyakran a törtek vagy egyenletek egyszerűsítése előtt vagy bővítését követően jelennek meg mindkét oldalon az azonos színű kifejezések az átalakítás kiemelésére. Ezért nem javasolt a jegyzet fekete-fehér nyomtatása.

Az alapismeretek fölelvenítése céljából az olvasónak ajánlatos az alapszakos tantárgy jegyzetét (Bevezetés a vetülettanba és a geodéziába) előzetesen átfutni. Ez a jegyzet többször hivatkozik az abban levezetett összefüggésekre.

Ebből a jegyzetből az általános vetülettani fogalmak és képletek levezetését követően a valódi vetületek jellemzőit, történetét és csoportosítását ismerheti meg az olvasó. Kívánom, hogy e felfedezőút legyen élvezetes az előadás hallgatói és az érdeklődők számára is!

Első előadás

A vetülettan alapjai

I.1. A Theorema Egregium

Vegyünk egy körcikk alakú pizzaszeletet, és fogjuk meg a pereménél! A pizzaszelet felénk eső csúcsa lekonyul, és a feltét lefolyik róla. Közismert a megoldás: a pizzaszelet peremének két végét kissé megemeljük, és ívesen behajlítjuk. Ekkor a pizzaszelet közel vízszintes marad. Hogyan lehetséges ez, és miképpen kezdődhet egy vetülettan előadás egy ilyen példával?

A görbült felületek belső méretviszonyaival a *differenciálgeometria* tudományága foglalkozik. Néhány definíció: *Felületnek* nevezünk egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos függvény értékkészletét. A nem túl szemléletes definíció magyarázata, hogy veszünk egy $(u; v)$ rendezett párt, amelyeket *paraméternek* nevezünk. Az f függvény, amelyet a felület *paraméteres alakjának* nevezünk, ezekhez a paraméterpárokhoz rendeli hozzá a tér $(x; y; z)$ pontjait. A lehetséges értéktriplák a felület pontjait adják vissza. Ha a két paraméter közül az egyiket rögzítjük, a függvény képe egy felületi görbe, a *paramétervonal* lesz. Az R sugarú gömb egy lehetséges paraméteres alakja a φ földrajzi szélesség és λ hosszúság, mint paraméterek szerint:

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = R \sin \varphi$$

Egy felületet *sima felületnek* nevezünk, ha bármely pontjának van olyan kis környezete, amely paraméterezhető egy injektív, akárhányszor differenciálható függvénnyel (azaz bármely pontjának környezete végtelenül sima). Egy felület *metszete* a felület és egy sík közös részeként előálló görbe. A felület adott pontra és irányra vonatkozó *normálmetszete* az a metszet, amelynek síkja a vizsgált pontban merőleges a felület érintősíkjára, és a vizsgált irányban áll. Egy síkgörbe adott pontban vett *simulóköre* az a kör, amelyik a görbét a pontban közös érintővel érinti, és második deriváltjuk is megegyezik. A görbe *görbületi sugara* a simulókör sugara, *görbülete* pedig ennek előjeles reciproka (a jobbra vagy balra kanyarodástól függően).

Egy sima felület görbülete a normálmetszetének görbülete, amely helytől és iránytól függ. A felület adott pontban vett *szorzatgörbülete* a pontban föllépő legkisebb és legnagyobb görbületek szorzata.

Néhány példa: a sík görbülete minden irányban zérus, tehát szorzatgörbülete is. A kúpnak az alkotó irányában nincs görbülete, a többi irányban a görbület pozitív. Következésképp a szorzatgörbület nulla (hiszen a legkisebb görbületet akármivel szorozhatom). A nyereg alakú burgonyaszírom szorzatgörbülete negatív, hiszen a görbületek szélsőértékei ellenkező előjelűek (ellentétes irányúak). A gömb görbülete minden pontban és irányban $1/R$, tehát szorzatgörbülete konstans (pozitív) $1/R^2$. Az a nagyfőeltengelyű és e első excentricitású forgási ellipszoid görbületi sugarai az alapszakos jegyzetből:

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$$

$$M(\Phi) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}$$

Itt Φ az alapszakos jegyzetből ismert geodéziai szélesség, a forgási ellipszoid alábbi paraméterezése szerint:

$$x = N(\Phi) \cos \Phi \cos \Lambda$$

$$y = N(\Phi) \cos \Phi \sin \Lambda$$

$$z = N(\Phi)(1 - e^2) \sin \Phi$$

A forgási ellipszoid szorzatgörbülete a szélességtől függően változik: $1/N(\Phi)M(\Phi)$.

GAUSS nevezetes összefüggése, a *Theorema Egregium* (kimagasló tétel) a következőt állítja: *Két sima felületdarab között akkor és csak akkor létesíthető torzulásmentes (távolságokat, szögeket és területeket megőrző) leképezés, ha szorzatgörbületük pontról-pontra megegyezik. Azaz szigorú feltételei vannak a torzulásmentességnek (vegyük észre, hogy a sík pizzaszelet csavarása egy torzulásmentes leképezés):*

- A kúp és a sík szorzatgörbülete is zérus, tehát köztük lehetséges a torzulásmentes leképezés. A sík pizzaszelet kúppalást alakban le tud konyulni.
- A gömb szorzatgörbülete konstans pozitív. Nem lehet torzulásmentes vetületet alkotni gömb és sík között. Ha a pizzaszeletet egyik irányba meggörbítem, nem tudom egyidőben a rá merőleges irányban is csavarni. Nem lehet a pizzaszelettel gyűrődés vagy szakadás nélkül egy gömbnek még csak egy részét sem befedni.

- A forgási ellipszoid szorzatgörbülete bár szintén pozitív, de csak a szélességi körök mentén állandó. Nem lehet a forgási ellipszoid egészét torzulásmentesen a gömbre leképezni, de egy kitüntetett szélességi kör végtelenül kis környezetét már igen (lásd a GAUSS-féle igen kis torzulású gömbvetületet az alapszakos jegyzetből).
- A burgonyaszirmot azért sütik negatív szorzatgörbületű (nyereg alakú) felületté, mert ezek nagy stabilitást adnak: nem lehet torzulásmentesen más alakzattá hajlítani őket.

A Theorema Egregium bizonyítása rendkívül bonyolult, másodrendű parciális deriváltak és tenzoralgebra segítségével történik.

I.2. Mi a vetület?

Két síma felület valamilyen paraméterezései közötti $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hozzárendelést *vetületnek* nevezzük. Az értelmezési tartomány neve *alapfelület*, az értékkészleté *képfelület*. A hozzárendelés szabályát, más néven a *vetületi egyenleteket* általában $x = f_1(\varphi; \lambda)$; $y = f_2(\varphi; \lambda)$ alakban szoktuk megadni.

A térképvetületekkel kapcsolatban a következő praktikus elvárásokat tehetjük, azonban valamennyi elvárásunkra lehet ellenpéldát hozni:

- Az alapfelület legyen egy zárt alakban leírható forgástejt, hogy egyszerű képleteink legyenek. Ugyanakkor bizonyos kisebb égitestek alakja nem közelíthető jól forgástejttel, ezért orosz kartográfusok dolgoztak ki rájuk vetületeket háromtengelyű ellipszoid alapfelülettel.
- A képfelület legyen zérus szorzatgörbületű (síkba fejthető), hiszen sík térképet szeretnénk. A Google Earth ellenben gömbvetületet használ a forgási ellipszoid és a gömbmodell között.
- Nem szeretnénk, hogy ugyanaz az alapfelületi pont több helyen jelenjen meg a térképen, azaz a hozzárendelés legyen egyértelmű. Találunk ugyanakkor olyan térképeket, amelyek a pólusokat vonalként jelenítik meg, és olyanokat is, amelyek a $\pm 180^\circ$ -os meridiánt kétszer ábrázolják.
- Nem szeretnénk a térképen szakadásokat és töréseket, azaz a vetület legyen egy folytonos, többször differenciálható függvény. Ezt a topológia eredményei alapján lehetetlen mindenütt teljesítenünk, minden vetületben találunk olyan pontot vagy vonalat, amely mentén a folytonosság nem teljesül.
- Nem szeretnénk, hogy a térkép önmaga alá kanyarodjon, azaz a leképezés legyen injektív. Különösen a perspektív vetületeknél fogunk erre sok ellenpéldát látni, ilyenkor a problémás részeket egyszerűen nem ábrázoljuk.

A vetület alapfelülete jellemzően az R sugarú gömb lesz. Ennek φ -paramétervonalai a *szélességi körök* vagy *parallelkörök*, amelyeknek sugara

$R \cos \varphi$. A λ -paramétervonalakat *hosszúsági köröknek* vagy *meridiánoknak* hívjuk, sugaruk R .

A másik gyakori alapfelületet, a forgási ellipszoidot az a nagyfő-tengellyel és az e első excentricitással jellemezzük. A Φ -paramétervonalak továbbra is körök, sugaruk $N(\Phi) \cos \Phi$. A Λ -paramétervonalak azonban fél ellipszoidok, görbületes sugaruk $M(\Phi)$. Akinek az itt leírt fogalmak újnak hatnak, az alapszakos jegyzetből olvassa újra a második, az ötödik és a hetedik előadások anyagát!

1.3. Geodéziai dátumok

Előbbi követelményekből látszik, hogy a Föld geoid alakját a legnagyobb pontosság kívánalma esetén is forgási ellipszoiddal közelítjük. Ez a közelítés két okból nem egyértelmű. Egyfelől a különböző helyen végzett mérések alapján a Föld nagyfő-tengelyére és lapultságára más és más adatok jönnek ki. Másfelől nem biztos, hogy a jól illeszkedő forgási ellipszoid középpontja éppen a geoid tömegközéppontjába esik, sőt a forgástengelye is elfordulhat a Föld valós forgástengelyéhez képest. A forgási ellipszoid méreteit és elhelyezési adatait együttesen *geodéziai dátumnak* nevezzük. A különböző dátumokon értelmezett azonos földrajzi koordináták között akár ~ 100 m nagyságrendű eltérés is adódhat, ezért mindig fontos utánajárni, hogy adataink melyik dátumra vonatkoznak!

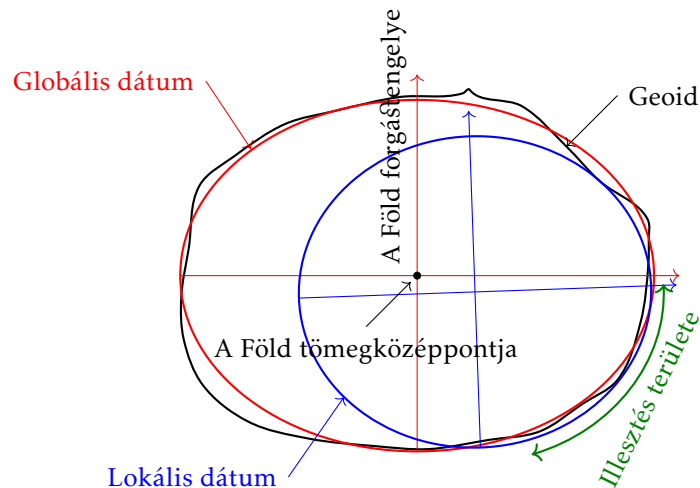
A régebbi forgási ellipszoidok (pl. az 1810-es ZÁCH–ORIANI) nagyfő-tengelye és lapultsága is kisebb volt a ma használtaknál (I.1. táblázat). Ennek oka, hogy az első mérések csak Európára korlátozódtak, és a geoid alakja itt ezeknek a méreteknél felel meg. A későbbi ellipszoidok (pl. az 1841-ben alkotott BESSEL) már több helyen végzett mérések átlagértékeit vették alapul, így közel állnak a ma ismert földalakhhoz. A mai ellipszoidok (pl. WGS84) műholdas méréseken alapulnak.

I.1. táblázat. Néhány földi ellipszoid mérete

Név	Év	a (m)	b (m)	$1/f$
ZÁCH–ORIANI	1810	6 376 130	6 355 561,839	310
BESSEL	1841	6 377 397,155	6 356 078,963	299,152 815
CLARKE	1880	6 378 249,145	6 356 514,870	293,465
HAYFORD	1924	6 378 388	6 356 911,946	297
KRASZOVSKIJ	1940	6 378 245	6 356 863,019	298,3
IUGG67	1967	6 378 160	6 356 774,516	298,247 167
WGS84	1984	6 378 137	6 356 752,314	298,257 224

Űrgeodéziai (műholdas) felmérések esetén a Föld tömegközéppontja és forgástengelye jól mérhető, ezért az ellipszoidot úgy helyezzük el, hogy a

középpontja és a forgástengelye a földi adatokkal egybeessen. Az így nyert dátumot *globális dátumnak* nevezzük, ez mindenütt egészen jól illeszkedik a Föld geoid alakjához (I.1. ábra). Példa a WGS84, amely az azonos nevű WGS84 ellipszoidon alapszik.



I.1. ábra. A geoid és a dátumok kapcsolata

A földi felméréseknél kizárólag a helyi mérések adataira tudunk támaszkodni, így az ellipszoidot lokálisan illesztjük a területünkhöz (*lokális dátum*). Az így elhelyezett ellipszoid középpontja eltolódik (~ 100 m) a Föld tömegközéppontjához képest, forgástengelye pedig elfordul ($\sim 1''$) a Föld forgástengelyétől, azonban területünkön jól illeszkedik a geoidra.* Fontos, hogy ilyenkor az ellipszoid paramétereit (nagyfő-tengely, lapultság) nem változtatjuk a folyamat során, az valamelyik korábbi, nemzetközi mérésen alapuló ellipszoid lesz. Magyarországon területén a HD72 dátumot használjuk, amely az IUGG67 ellipszoid nagyfő-tengelyén és lapultságán alapszik.†

A különböző dátumok közti átszámításnál 7 paramétert tudunk figyelembe venni: a Δx ; Δy és Δz eltolást a tér három irányában, az ε_x ; ε_y és

* Ez alatt valójában nem azt kell érteni, hogy az ellipszoid és a geoid közötti magasságkülönbség (*geoidunduláció*) minimális, hanem hogy a geoidon csillagászati módszerrel mért helyi függőleges iránya és az ellipszoid normálisa közötti eltérés (*függővonal-elhajlás*) az illesztéshez használt *LAPLACE-pontokon* a lehető legkisebb. Ezáltal a csillagokhoz képest mért és az ellipszoidon számított geodéziai szélességek közötti ellentmondás is minimálissá válik (lásd még a D. függelékben).

† A lokális dátumok realizációja olyan megjelölt földi pontokon nyugszik, amelyek szélességét és hosszúságát papíron rögzítjük, így a lokális dátum a kőzetlemezek vándorlásával az időben lassan elfordulhat eredeti helyzetéhez képest. Ennek jellemző mértéke kb. 25 évente egy méter.

ε_z elforgatást a három tengely körül és egy σ nagyítást.* Mivel az ε szögek kicsik, éljünk a $\sin \varepsilon \approx \widehat{\varepsilon}$; $\cos \varepsilon \approx 1$ és $\varepsilon_i \varepsilon_j \approx 0$ közelítéssel, így egyszerűbb alakban kapjuk meg a forgatómátrixot. Ezt követően az átméretezés egy skalárral való szorzást, míg az eltolás a megfelelő vektor hozzáadását jelenti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + (1 + \sigma) \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & -\widehat{\varepsilon}_y \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ \widehat{\varepsilon}_y & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Fönti átalakítás neve *BURŠA–WOLF-transzformáció*. Látható, hogy az átalakításhoz nem a földrajzi, hanem a térbeli derékszögű koordináták szükségesek, az oda-vissza számítás képletei az alapszakos jegyzetben olvashatók. Az átszámítás pontossága jellemzően méter körüli. Fontos figyelni, hogy bizonyos térinformatikai csomagok az elforgatások irányára vonatkozó előjelkonvenciónk fordítottját alkalmazzák, ezért ha a transzformáció a szakirodalomban megadott paraméterekkel egy programban nem működik, mindig próbáljuk meg forgatások előjelét ellentettjére változtatni!

Előfordul, hogy az egyszerűség érdekében csak az eltolást vesszük figyelembe, a hiba ekkor jellemzően öt méter körüli. Ezt *MOLOGYENSKIJ-transzformáció*nak nevezzük, csak három paramétere van. Bár a *MOLOGYENSKIJ-transzformáció*nak fölírható olyan alakja is, amely közvetlen kapcsolatot biztosít a két dátum földrajzi koordinátái között (*áthidaló transzformáció*), itt most az egyszerűség kedvéért a térbeli derékszögű alak szerepel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alternatív lehetőségként nagyobb pontosság érdekében *korrekciós rácsot* szoktak még a térinformatikai rendszerek biztosítani, amely gyakorlatilag egy raszteres állományból interpolálva helyről-helyre más értékeket ad hozzá vagy von ki a földrajzi koordinátákból. Ez deciméteres pontosságot eredményez, azonban számításigénye nagy, hiszen a helyben érvényes eltolásokat lassú a raszterből kikeresni.

* A háromszöghálózatok mérési hibáinak kiegyenlítése miatt a lokális dátumok és a globális dátumok méretviszonyai egymásnak ellentmondanak, ezt az átszámításnál figyelembe vesszük, azonban a szögek mérési pontossága megbízhatóbb, ezért az átszámításnál ügyelünk ezek megőrzésére. Ezért választottunk hasonlósági transzformációt.

I.4. A vetületek osztályozása

A vetületeket többféleképp csoportosíthatjuk. Leggyakrabban a *fokhá-lózat képe szerint* osztályozunk. Ekkor *valódi vetület*nek nevezzük azokat a leképezéseket, amelyekben:

- a parallelkörök képei koncentrikus körök, körívek vagy párhuzamos egyenesek;
- a meridiánok képei egy pontba összetartó vagy párhuzamos egyenesek;
- a parallelkörök és a meridiánok egymást mindenütt merőlegesen keresztezik;
- a meridiánok a parallelköröket egyenközűen (a hosszúsággal egyenes arányban) osztják.

Ha csak egy feltétel nem teljesül, akkor *képzetes vetület*ről beszélünk.

A parallelkörök képei alapján mind a valódi, mind a képzetes vetületeket tovább csoportosítjuk (I.2. ábra):

- Ha a parallelkörök képei teljes körök, *síkvetület*et kaptunk.
- Ha csak körívre képeződtek le, *kúpvetület*ről beszélünk.
- Ha a szélességi körök képei párhuzamos egyenesek, akkor leképezésünk *hengervetület*.
- A képzetes vetületek között van olyan, amelyik egyik példához sem illik. Ezek az *egyéb képzetes vetületek*.

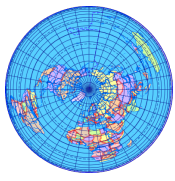
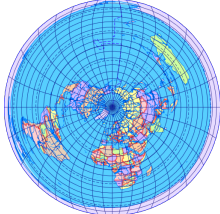
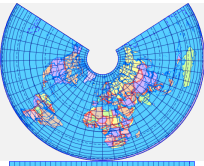
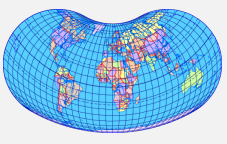
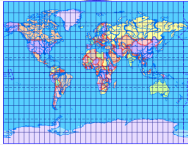


A vetületeket csoportosítjuk még *geometriai származtatás szerint* is: a vetület *perspektív*, ha előállítható centrális vetítéssel (a forgásszimmetrikus képfelület és az alapfelület közös forgástengelyén lévő gyújtópontból kiinduló egyenessereg segítségével), minden más vetület *nemperspektív*. Minden perspektív vetület egyúttal valódi is.

A vetületekben a Theorema Egregium miatt mindenképp kell, hogy legyen valamennyi torzulás. A torzulásokat a *torzulási modulusok* jellemzik. Ezek a megfelelő képfelületi és alapfelületi mennyiségek arányai, ahogy az alapfelületi mennyiséggel tartunk a nullához. Jelölje l a *hossztorzulási* vagy *lineármodulust*, τ a *területtorzulási* vagy *területi modulust* és i a *szögtorzulási* vagy *iránymodulust*! Jelölje rendre Δs , ΔT és δ az alapfelületi távolságokat, területeket és szögeket, míg $\Delta s'$, $\Delta T'$ és δ' ezek képfelületi megfelelőit! A torzulási modulusokat így definiáljuk:

$$l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta s}$$

$$\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta T'}{\Delta T}$$

$$i = \frac{\text{tg } \delta'}{\text{tg } \delta}$$

	Valódi	Képzetes
Sík		
Kúp		
Henger		
Egyéb	—	

I.2. ábra. Vetületek osztályozása a fokhálózat képe alapján

Tehát egy vetület ott torzulásmentes, ahol mindhárom modulus értéke egység. Ennek alapján csoportosíthatjuk a vetületeket *torzulási jellemzők szerint* is: Ha minden pontban $\tau = 1$, akkor a vetület *területtartó*. Ha a teljes térképen $i = 1$, akkor leképezésünk *szögtartó*. Ha minden pontban és irányban $l = 1$, akkor vetületünk semmiképp sem távolságtartó, hanem szükségszerűen tévedést feltételezhetünk. Ebből ugyanis torzulásmentesség következne, amelyet a Theorema Egregium kizár. Vannak ugyan olyan vetületek, amelyeknek vannak hossztartó pontjai, vonalai, sőt akár végtelen sok vonal (összes meridián vagy összes paralellkör) lehet hossztartó, de akkor sem lehet minden irányban egyszerre. Tehát a harmadik lehetséges kategóriánk az *általános torzulású*.

Mindhárom csoport vetületein előfordulhatnak olyan pontok vagy vonalak, amelyek mentén teljes torzulásmentesség áll fenn. Ha egy adott szélességi kör mentén torzulásmentes vonal fut, akkor a szélességi kört *normálpárhelykörnek* nevezzük.

Csoportosíthatjuk a vetületeket *elhelyezés szerint* is: ezt a csoportosítást először gömb alapfelületen definiáljuk a *földrajzi segéd-koordinátarendszer* segítségével. Ezt úgy képzeljük el, mintha a fokhálózatot elforgatnánk eredeti helyzetéhez képest, hogy egy önkényesen választott pont, a *segédpólus*

viselkedjen úgy, mint az eredeti pólusok. A pontos definíció és a képletek az alapszakos jegyzetben olvashatók, illetve megismételjük majd a IV.3. fejezetben is. Ezt követően a vetületet nem a földrajzi, hanem a földrajzi segédkoordináták alapján rajzoljuk ki.

Ha a segédpólus valamelyik pólussal egybeesik, a vetület *normális elhelyezésű*, ha az Egyenlítőre kerül, akkor *transzverzális*, egyébként *ferdetengelyű*. Forgási ellipszoid alapfelület esetén ezt a definíciót úgy általánosítjuk, hogy az ellipszoidi képletekből $e = 0$ helyettesítéssel kapott gömbi vetület elhelyezését tekintjük mérvadónak. Nem normális elhelyezésű vetületeket a fokhálózat képe szerint úgy csoportosítjuk, hogy a meridiánok és parallelkörök helyett a segédmeridiánok és segédparallelkörök képeit vizsgáljuk az osztályozás során.

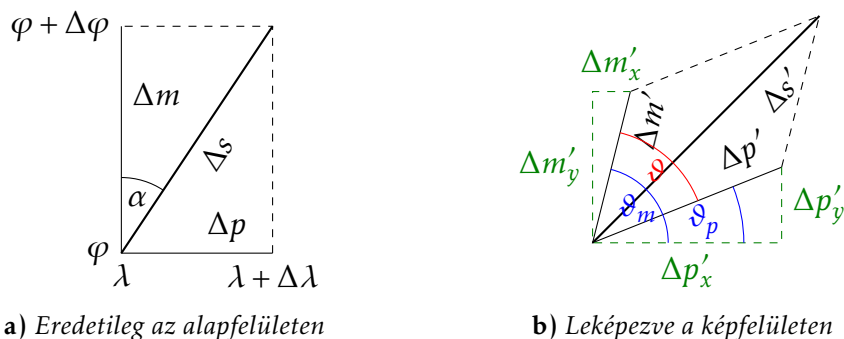
Fontos észben tartani, hogy a fokhálózat-elforgatás a vetület belső torzulási viszonyait (pl. szög- és területtartás) megőrzi, azonban a fokhálózatra vonatkozó torzulások (pl. meridiánban hossztartás, fokhálózat képének merőlegessége) a segédfokhálózatra fog vonatkozni, a földrajzi fokhálózat képe ezeket a tulajdonságokat elveszíti. Ez a fokhálózat képe szerinti osztályozást nem befolyásolja; ha a segédfokhálózatra a valódi vetületekre vonatkozó kikötéseink teljesülnek, a vetületet akkor is valódi vetületnek nevezzük, ha a földrajzi fokhálózat képe alapján nem erre következtetnénk.

Második előadás

Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból

II.1. A hossztorzulás

Vegyünk egy végtelen kis Δs szakaszt a kis méretek miatt síknak tekinthető alapfelületen! A kis szakaszt befoglaló végtelen kis foktrapéz közelítőleg egy sík téglalapnak felel meg. A differenciálhatóságból következően feltételezhetjük, hogy az egymáshoz igen közel eső oldalak leképezett meredkségei lényegében azonosak, így a foktrapéz egy kis paralelogrammára képeződik le (II.1. ábra).



a) Eredetileg az alapfelületen

b) Leképezve a képfelületen

II.1. ábra. Az elemi kis foktrapéz és képe

A vetületeket a továbbiakban $x(\varphi; \lambda); y(\varphi; \lambda)$ alakú függvénpárral írjuk le. A parciális derivált definíciója $\partial_x f(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x; y) - f(x; y)] / \Delta x$. Ezt átrendezve $f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \approx \Delta x \cdot \partial_x f(x; y)$. Ezzel az összefüggéssel a zöld szakaszok hosszát közelíteni tudjuk:

$$\Delta m'_x \approx \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi$$

$$\Delta m'_y \approx \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi$$

II. Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból

$$\Delta p'_x \approx \frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda$$

$$\Delta p'_y \approx \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda$$

PITAGORASZ tételéből $\Delta s'$ -re adódik, hogy:

$$\begin{aligned} \Delta^2 s' &= (\Delta m'_x + \Delta p'_x)^2 + (\Delta m'_y + \Delta p'_y)^2 \approx \\ &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right)^2 = \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \Delta^2 \varphi + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] \Delta \varphi \Delta \lambda + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \Delta^2 \lambda \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben lévő tényezőket* a továbbiakban a tömörség kedvéért rendre az $E; F; G$ betűkkel jelölöm:

$$\Delta^2 s' = E \Delta^2 \varphi + 2F \Delta \varphi \Delta \lambda + G \Delta^2 \lambda$$

Az alapfelületi téglalap parallelkör és meridián irányú oldalai rendre Δp és Δm , így:

$$\Delta^2 s = \Delta^2 m + \Delta^2 p \approx \left(\frac{dm}{d\varphi} \right)^2 \Delta^2 \varphi + \left(\frac{dp}{d\lambda} \right)^2 \Delta^2 \lambda$$

A szakasz meridiánnal bezárt szögére (α azimut):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta p}{\Delta m} \approx \frac{\frac{dp}{d\lambda} \Delta \lambda}{\frac{dm}{d\varphi} \Delta \varphi}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi} \approx \frac{\frac{dm}{d\varphi}}{\frac{dp}{d\lambda}} \operatorname{tg} \alpha$$

A hossztorzulás definíciója:

$$l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta s}$$

* Ezeket a mennyiségeket a leképezés GAUSS-féle első főmennyiségeinek nevezzük.

II. Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból

Most már számíthatjuk a hossztorzulást!

$$\begin{aligned}
 l^2 &= \frac{\Delta^2 s'}{\Delta^2 s} = \frac{E\Delta^2\varphi + 2F\Delta\varphi\Delta\lambda + G\Delta^2\lambda}{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2\Delta^2\varphi + \left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2\Delta^2\lambda} = \frac{E + 2F\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} + G\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta^2\varphi}}{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta^2\varphi}} = \\
 &= \frac{E + 2F\frac{\frac{dm}{d\varphi}}{\frac{dp}{d\lambda}}\operatorname{tg}\alpha + G\frac{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2}\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2\frac{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2}\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{E\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2} + 2F\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}{\frac{dm}{d\varphi}\frac{dp}{d\lambda}} + G\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha}{\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2}}{\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha} = \\
 &= E\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)^2} + 2F\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{dm}{d\varphi}\frac{dp}{d\lambda}} + G\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dp}{d\lambda}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a kis alapfelületi ívhossz egyenlő a sugár és a közbezárt szög szorzatával (a következő képleteknél a bal oldaliak a gömbre, a jobb oldaliak forgási ellipszoidra érvényesek):

$$\begin{aligned}
 \Delta m &= R\widehat{\Delta\varphi} & \Delta m &= M(\Phi)\widehat{\Delta\Phi} \\
 \frac{dm}{d\varphi} &= R & \frac{dm}{d\Phi} &= M(\Phi) \\
 \Delta p &= R\cos\varphi\widehat{\Delta\lambda} & \Delta p &= N(\Phi)\cos\Phi\widehat{\Delta\Lambda} \\
 \frac{dp}{d\lambda} &= R\cos\varphi & \frac{dp}{d\Lambda} &= N(\Phi)\cos\Phi
 \end{aligned}$$

Azaz gömbön az $E; F; G$ jelöléseket is kifejtve:

$$\begin{aligned}
 l^2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \frac{\cos^2\alpha}{R^2} + \\
 &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \frac{\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\varphi} + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2\cos\varphi}
 \end{aligned}$$

És forgási ellipszoidon:

$$\begin{aligned}
 l^2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 \right] \frac{\cos^2\alpha}{M^2(\Phi)} + \\
 &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 \right] \frac{\sin^2\alpha}{N^2(\Phi)\cos^2\Phi} + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right] \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{M(\Phi)N(\Phi)\cos\Phi}
 \end{aligned}$$

Látható, hogy a hossztorzulás függ (a parciális deriváltakon keresztül) a helytől és az α iránytól is. Nevezzük *fokhálózat menti torzulásoknak* a

II. Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból

fokhálózati vonalak irányában fellépő hossztorzulásokat! Ha $\alpha = 0^\circ$, akkor a h -val jelölt *meridián menti hossztorzulásról* beszélünk, ha $\alpha = 90^\circ$, akkor pedig a k -val jelölt *parallelkör menti hossztorzulást* kapjuk meg:

$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{R} \quad h = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2}}{M(\Phi)}$$

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} \quad k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda}\right)^2}}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

Meridiánban hossztartó vetületeket a $h = 1$, míg parallelkörben hossztartókat a $k = 1$ kikötéssel találhatunk.

II.2. A fokhálózat szögének torzulása

Visszatérve a II.1. ábrára észrevehetjük, hogy a ϑ_m és ϑ_p szögek a megfelelő derékszögű háromszögekből egyszerűen levezethetők:

$$\sin \vartheta_m = \frac{\Delta m'_y}{\Delta m'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi}{\Delta m'}$$

$$\cos \vartheta_m = \frac{\Delta m'_x}{\Delta m'} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi}{\Delta m'}$$

$$\sin \vartheta_p = \frac{\Delta p'_y}{\Delta p'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda}{\Delta p'}$$

$$\cos \vartheta_p = \frac{\Delta p'_x}{\Delta p'} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda}{\Delta p'}$$

Jelölje a *fokhálózat képe által bezárt szöget* ϑ ! Ekkor fölhasználva, hogy az ábra szerint $\vartheta = \vartheta_m - \vartheta_p$:

$$\sin \vartheta = \sin(\vartheta_m - \vartheta_p) = \sin \vartheta_m \cos \vartheta_p - \cos \vartheta_m \sin \vartheta_p =$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\Delta \varphi \Delta \lambda}{\Delta m' \Delta p'}$$

$$\cos \vartheta = \cos(\vartheta_m - \vartheta_p) = \cos \vartheta_m \cos \vartheta_p + \sin \vartheta_m \sin \vartheta_p =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\Delta \varphi \Delta \lambda}{\Delta m' \Delta p'}$$

Csak egy apró lépés, és használható képletet kapunk:

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}$$

A forgási ellipszoidon is érvényes képlet érdekessége, hogy számlálója a hossztorzulás képletének utolsó együtthatója, nevezője pedig majd a területtorzulás képleténél fog visszaköszönni. Fontos megjegyezni, hogy merőleges fokhálózatú vetületek minden pontjában $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$, ami segít az ilyen vetületek megtalálásában.

II.3. A területtorzulás

Térjünk vissza a II.1. ábrára! A kicsi foktrapéz (téglalap) ΔT felszíne az oldalak szorzata, míg a leképezett kicsi paralelogramma $\Delta T'$ területe a két oldal és a közbezárt ϑ szög szinuszának szorzata:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta m \Delta p \\ \Delta T' &= \Delta m' \Delta p' \sin \vartheta \end{aligned}$$

A fenti képletbe $\sin \vartheta$ -ra a korábban már megkapott képletet helyettesítve:

$$\Delta T' = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \Delta \varphi \Delta \lambda$$

A területtorzulás definíciója:

$$\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta T'}{\Delta T}$$

Erre két használható képletet is kaphatunk, attól függően, hogy $\Delta T'$ melyik alakját helyettesítjük be. Egyfelől:

$$\tau = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta p \rightarrow 0}} \frac{\Delta m' \Delta p' \sin \vartheta}{\Delta m \Delta p} = h k \sin \vartheta$$

II. Torzulások a vetület parciális deriváltjaiból

Másfelől:*

$$\tau = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta p \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \Delta \varphi \Delta \lambda}{\Delta m \Delta p} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{dm}{d\varphi} \frac{dp}{d\lambda}}$$

A gömbi és ellipszoidi mennyiségeket behelyettesítve:

$$\tau = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{R^2 \cos \varphi} \quad \tau = \frac{\frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} - \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda}}{M(\Phi)N(\Phi) \cos \Phi}$$

Mivel a területtartó vetületekben $\tau = 1$, ezért területtartó vetületeket egyszerűen tudunk majd keresni a $hk \sin \vartheta = 1$ egyenlet megoldásával. Merőleges fokhálózatú vetületekben $\sin \vartheta = 1$, ilyen vetületek között elegendő a még egyszerűbb $hk = 1$ egyenlet fölírása.

* A számlálóban szereplő zárójeles kifejezés a parciális deriváltakból képzett *JACOBI-mátrix* determinánsa. Ezek szerint a vetület *JACOBI-determinánsa* szoros kapcsolatban áll a területtorzulással.

Harmadik előadás

Tissot torzulási elmélete

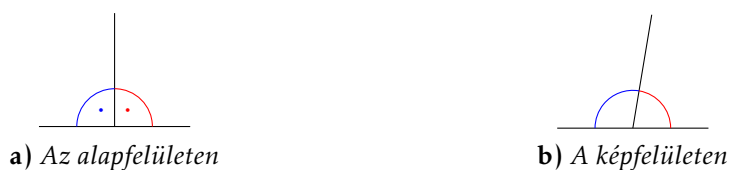
III.1. A vetület mint lokális affin transzformáció

A modern vetülettan Tissot francia geodéta XIX. század végén írt művein alapszik. A tanulmányok főbb eredményeit *Tissot tételének* nevezzük. Mivel ezeket a tételeket későbbi szerzők foglalták össze, ezért eltéréseket tapasztalhatunk a tételek darabszámában, számozásában és szövegezésében, azonban ezek a megfogalmazások ekvivalensek az eredeti francia szöveg megállapításaival.

Tissot tételét jelen jegyzetben három pontban foglaljuk össze:

- I. *Bármely két sima felület között értelmezett differenciálható leképezés fölfogható végtelen sok, végtelen kis terület affin transzformációjának együtteseként.* E miatt bármilyen végtelen kis sugarú alapfelületi kör képe a képfelületen egy olyan ellipszis, amely az eredeti körből merőleges affinitással és hasonlósággal előállítható.
- II. *Az ilyen differenciálható vetületek alapfelületének bármely pontjában van legalább egy olyan egymásra merőleges iránypár, amelynek képe a képfelületen is merőleges egymásra.* Ezeket a kitüntetett irányokat *vetületi főirányoknak* nevezzük.
- III. *Az egy pontban mért hossztorzulások szélsőértékeinek iránya mindig valamelyik vetületi főiránnyal egybeesik.* A maximális hossztorzulás irányát *I.*, a minimális hossztorzulás irányát *II. vetületi főiránynak* hívjuk.

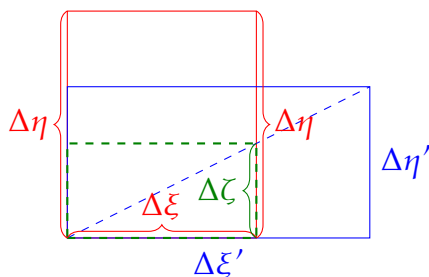
Először a II. pontot bizonyítjuk be: Vegyünk egy szakaszt és egy rá merőleges másik szakaszt az alapfelület érintősíkján, és vizsgáljuk meg képüket a képfelület érintősíkján (III.1. ábra)! Mivel az alapfelületen a két derékszög egy egyenesszöget ad ki, és a vetület differenciálhatóságát (simaságát) eleve feltételeztük, bizonyos hogy a képfelületi irányok is egyenesszöget zárnak be (hiszen másképp az egyenesek képei megtörnének, és a vetület nem lenne differenciálható). Ebből látszik, hogy a képfelületen a másik szakasz képe vagy két derékszögre osztja az egyenesszöget, vagy egy hegyes- és egy tompaszögre. Előbbi esetben máris találtunk két vetületi főirányt, utóbbi esetben tovább kell gondolkodnunk.



III.1. ábra. Két egymásra merőleges irány képe

A képfelületet vizsgálva azt látjuk, hogy a piros derékszög képe kisebb lett, míg a kék derékszög képe nagyobb lett. Mivel a leképezés differenciálható, alkalmazhatjuk a derékszögek képeire az analízisből ismert BOLZANO-tételt, miszerint a folytonos függvények egy $[a; b]$ intervallumon az $[f(a); f(b)]$ intervallum valamennyi lehetséges értékét fölveszik: Ha az egyik derékszög képe tompaszög, a másiké hegyesszög, bizonyosan kell a két derékszög között valamennyivel elfordulva egy olyan derékszögnek is léteznie, amelyiknek képe éppen derékszög. Ezt akartuk bizonyítani.

Következőnek az I. pontot bizonyítjuk: Vegyünk egy végtelenül kis, $\Delta\xi$ és $\Delta\eta$ oldalhosszúságú téglalapot az alapfelületen (pontosabban annak érintősíkján) úgy, hogy oldalai vetületi főirányokba essenek! Ekkor a képfelületen ennek képe téglalap lesz, hiszen korábban beláttuk, hogy a vetületi főirányok a képfelületen is merőlegesek egymásra. Helyezzük az alapfelületi piros és a képfelületi kék téglalapot egymásra (III.2. ábra)!



III.2. ábra. A kicsi alapfelületi és képfelületi téglalap egymásra helyezve

Az ábrán látható, hogy a piros téglalap a kék téglalapba átvihető úgy, hogy először függőleges irányban végzünk egy merőleges affinitást (zöld szaggatott téglalap), majd ezt középpontos hasonlósággal átméretezve már a kék téglalapot kapom. Ha a merőleges affinitás és a hasonlóság tényezői függetlenek a téglalap méreteitől, és csak a vetület torzulási viszonyaitól függenek, akkor ez a két transzformáció tökéletesen leírja a pont végtelen kis környezetében minden pontnak a képét.

Legyen az egyik vetületi főirányban mért hossztorzulás jele $a = \Delta\xi'/\Delta\xi$, míg a másik főirányban $b = \Delta\eta'/\Delta\eta$. Ekkor a piros és a zöld téglalap közti merőleges affinitás tényezője:

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta\eta} = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\eta'} \frac{\Delta\eta'}{\Delta\eta} = \frac{\Delta\xi}{\Delta\xi'} \frac{\Delta\eta'}{\Delta\eta} = \frac{b}{a}$$

A fönti levezetésben kihasználtuk, hogy a $\Delta\xi; \Delta\zeta$ és $\Delta\xi'; \Delta\eta'$ befogójú derékszögű háromszögek hasonlóak, így a megfelelő befogók aránya megegyezik. Az eredményből látjuk, hogy az affinitás tényezője független a téglalap méreteitől, mert a hossztorzulásokból föl tudtuk írni.

Nézzük a zöld és kék téglalapok közötti hasonlóság tényezőjét:

$$\frac{\Delta\xi'}{\Delta\xi} = a$$

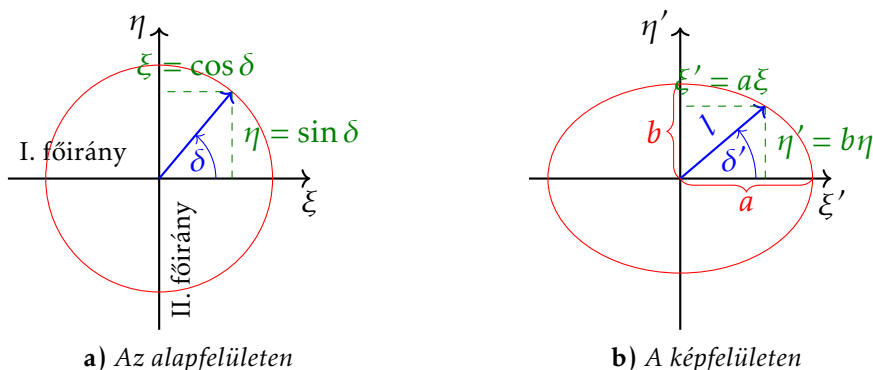
Mivel ez is független a téglalap méreteitől, így a pont kis környezetében általánosan érvényes, hogy az alapfelületi alakzatok képe ezek b/a -szoros merőleges affinitása és a -szoros középpontos hasonlósága után megkapható, ahol a és b a vetületi főirányokban föllépő hossztorzulások. Ezt akartuk bizonyítani. Egy ennél hosszadalmasabb, algebrai bizonyítást az érdeklődők a B. függelékben találnak.

III.2. A torzulási ellipszis

Mielőtt a III. pontot is bizonyítanánk, meg kell vizsgálnunk az első két állítás következményeit. Ha találtunk egy alapfelületi pontban két vetületi főirányt, jelöljük ezekben az irányokban a hossztorzulást a -val és b -vel, a betűzést úgy megválasztva, hogy $a \geq b$. Nevezzük a irányát I., b irányát II. vetületi főiránynak! Vegyünk fel az alapfelület érintősíkján egy $\xi; \eta$ derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a ξ tengely az I. vetületi főirányba álljon! Vegyünk föl hasonlóképp a képfelület érintősíkján is analóg módon egy $\xi'; \eta'$ koordináta-rendszert!

Vegyünk egy végtelenül kicsi, egységsugarúnak tekintett kört az alapfelületen (a kis méret és a sima felületre vonatkozó kikötésünk miatt a felület és az érintősík közti eltérést elhanyagolhatjuk). Ekkor az I. állítást alkalmazva a képfelületen egy olyan alakzatot kapunk, amelyet az η tengely irányában vett merőleges affinitással b/a -szorosra zsugorítunk, majd hasonlósággal a -szorosra nagyítottunk. Ez egy olyan ellipszis, amelynek a ξ' irányú féltengelye a , az η' irányú féltengelye b . Ezt az ellipszist *torzulási ellipszisnek* vagy *Tissor-féle indikatrixnak* nevezzük (III.3. ábra).

Tudjuk, hogy a területtorzulás megkapható, mint egy kis képfelületi terület és a neki megfelelő alapfelületi terület hányadosa. Osszuk el a



III.3. ábra. A Tissor-féle indikátrix

torzulási ellipszis területét az eredeti kör területével, hogy egy harmadik módszert is kapjunk a területtorzulások számítására!

$$\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta T'}{\Delta T} = \frac{ab\pi}{1^2\pi} = ab$$

Azaz területtartás esetén $ab = 1$, a torzulási ellipszisek területe a helytől független.

Vizsgáljuk meg azoknak a szögeknek a szögtorzulását, amelyeknek egyik szögszára az I. vetületi főirány!

$$i = \frac{\operatorname{tg} \delta'}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\frac{b\eta}{a\xi}}{\frac{\eta}{\xi}} = \frac{b}{a}$$

Azaz szögtartó vetületekben $a = b$. Ez azt jelenti, hogy szögtartás esetén a torzulási ellipszisek körök lesznek.

A hossztorzulást úgy tudjuk kiszámolni, hogy végtelenül kicsi képfelületi és alapfelületi távolságok arányát vesszük. Az I. vetületi főiránnyal az alapfelületen δ szöget bezáró kis sugarú egységnyi körteként tekintjük. Ennek képe a kis félátmérő a torzulási ellipszisben, amelynek hosszát úgy számíthatjuk, hogy a b/a -szoros merőleges affinitást és az a -szoros hasonlóságot figyelembe véve az alapfelület érintőjén vett koordinátákat rendre a -val, illetve b -vel szorzom:

$$l = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}{1} = \sqrt{a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \delta + b^2 \sin^2 \delta}$$

Most már tudjuk bizonyítani a III. pontot is. Korábban kikötöttük, hogy $a \geq b$, és mivel a hossztorzulás definíció szerint pozitív szám, ezért $a^2 \geq b^2$.

Mivel $\cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1$, a gyökjel alatt a^2 és b^2 valamilyen súlyozott átlaga szerepel. Ennek értéke akkor a lehető legnagyobb, ha a^2 súlya 1 és b^2 -é 0, míg akkor a lehető legkisebb, ha b^2 súlya 1 és a^2 -é 0. Ebből következik egyrészt, hogy $b \leq l \leq a$, másrészt pedig, hogy a maximumhelyen $\delta = 0^\circ$, míg a minimumhelyen $\delta = 90^\circ$, amely szintén vetületi főirány a II. pont miatt. Tehát a szélsőérték helyek vetületi főirányok. Ezt akartuk bizonyítani. Probléma van, ha $a = l = b$, mert ebben az esetben minden irány szélsőérték hely. Azonban ilyenkor a vetület szögtartó, bármilyen merőleges iránypárt merőleges iránypárra fog képezni. Azaz szögtartó vetületekben minden irány vetületi főirány. Tissor tételét ezzel maradéktalanul bizonyítottuk.

A továbbiakban a -t *maximális*, b -t *minimális hossztorzulásnak* nevezzük. Fontos eredményünk még, hogy beláttuk, szögtartó vetületekben a hossztorzulás független az iránytól, mert $a = b = l$.

III.3. A hossztorzulás szélsőértékeinek számítása

Következőekben gyakorlatban használható képleteket keresünk a -ra és b -re. Legyen a paralelkör és az I. vetületi főirány által bezárt alapfelületi szög jele v ! Ekkor a meridián $v + 90^\circ$ -ot fog bezárni. A meridián és paralelkör menti hossztorzulás az előbb megkapott képlettel:

$$h = \sqrt{a^2 \cos^2(v + 90^\circ) + b^2 \sin^2(v + 90^\circ)}$$

$$k = \sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$$

Vagyis:^{*}

$$h^2 + k^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v = a^2 + b^2$$

A területtorzulásra kapott bármelyik képlet ugyanazt az értéket kell adja:

$$\tau = hk \sin \vartheta = ab$$

Az előző két egyenletből:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = h^2 + k^2 + 2hk \sin \vartheta$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = h^2 + k^2 - 2hk \sin \vartheta$$

^{*} Az itt megkapott összefüggés általánosan érvényes: APOLLÓNIUSZ mutatta be elsőként, hogy egy ellipszis két *konjugált félátmérőjének* (az ellipszist a kör affin képeként tekintve az eredeti kör két merőleges sugarának képei) négyzetösszege állandó.

Egyszerű átalakítással megkapható, hogy:

$$a = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a-b)^2}}{2}$$

$$b = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(a-b)^2}}{2}$$

Vagyis a végeredmény:

$$a = \frac{\sqrt{h^2+k^2+2hk\sin\vartheta} + \sqrt{h^2+k^2-2hk\sin\vartheta}}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{h^2+k^2+2hk\sin\vartheta} - \sqrt{h^2+k^2-2hk\sin\vartheta}}{2}$$

Tegyük néhány megállapítást! Merőleges fokhálózatú vetületekben (így minden valódi vetületben is) a fokhálózati vonalak vetületi főirányok, így h és k egyúttal a hossztorzulások szélsőértékei. Szögtartó vetületekben minden irány, így a fokhálózati vonalak is főirányok, azaz a fokhálózat képe mindig merőleges ($\vartheta = 90^\circ$). A szögtartás bizonyításához a merőleges fokhálózati kép megléte esetén már elégséges a $h = k$ egyenlőség vizsgálata, hiszen a és b helyére ilyenkor nyugodtan írhatok h -t és k -t.

III.4. A legnagyobb szögmegváltozás

Először végezzünk el egy számítást az I. vetületi főiránnyal bezárt δ szöggel és annak δ' képével. Tekintsük az alábbi hányadoszt:

$$\frac{\sin(\delta - \delta')}{\sin(\delta + \delta')} = \frac{\sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta'}{\sin\delta \cos\delta' + \cos\delta \sin\delta'} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\delta \cos\delta'}{\cos\delta \sin\delta'} - 1}{\frac{\sin\delta \cos\delta'}{\cos\delta \sin\delta'} + 1} = \frac{\frac{\text{tg}\delta}{\text{tg}\delta'} - 1}{\frac{\text{tg}\delta}{\text{tg}\delta'} + 1} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{a-b}{a+b}$$

Az előbb alkalmaztuk azt a korábbi ismeretünket, hogy az ilyen szögekre $i = \text{tg}\delta'/\text{tg}\delta = b/a$. A fönti egyenlet $\sin(\delta + \delta')$ -vel fölszorozva:

$$\sin(\delta - \delta') = \frac{a-b}{a+b} \sin(\delta + \delta') \leq \frac{a-b}{a+b}$$

$$\delta - \delta' \leq \arcsin \frac{a-b}{a+b}$$

A fönti összefüggés egy felső korlátot ad arra, hogy egy szögészár legfeljebb mekkora irányváltozást szenvedhet el a vetületben. Ez szükségszerűen arra vezet, hogy egy alapfelületi szög akkor szenved el a lehetséges

III. Tissor torzulási elmélete

legnagyobb szögváltozást, ha mindkét szögszára ennyit változik. Ekkor a legnagyobb szögmegváltozást ω -val jelölve:

$$\omega = 2 \arcsin \frac{a-b}{a+b}$$

Figyelembe véve, hogy az arkuszszinusz soha nem ad 90° -nál nagyobb értéket, ω mindig kisebb vagy egyenlő, mint 180° . A legnagyobb szögmegváltozás vizsgálata esetenként szemléletesebb lehet, mint a szögtorzulásé.

Negyedik előadás

Vetületi torzulások a gyakorlatban

IV.1. A torzulások szemléltetése

Ahhoz, hogy ábrázolásunk céljának legmegfelelőbb vetületet válasszuk, szükséges megfigyelnünk azok torzulásait. A torzulásokat valamilyen módon szemléltetnünk kell, ezt jellemzően a tematikus kartográfiából ismert diagram- és izovonalmódszerrel oldjuk meg. Kézenfekvő a Tissot-indikatrixok alkalmazása. A végtelen kis torzulási ellipsziseket valamilyen egyezményes méretre föl kell nagyítani annak érdekében, hogy azok véges méretűek legyenek. Az ellipsziseket el kell forgatni, hogy a féltengelyek a megfelelő vetületi főirányba álljanak. A torzulások leolvasása a következőképp történik (IV.1. ábra):

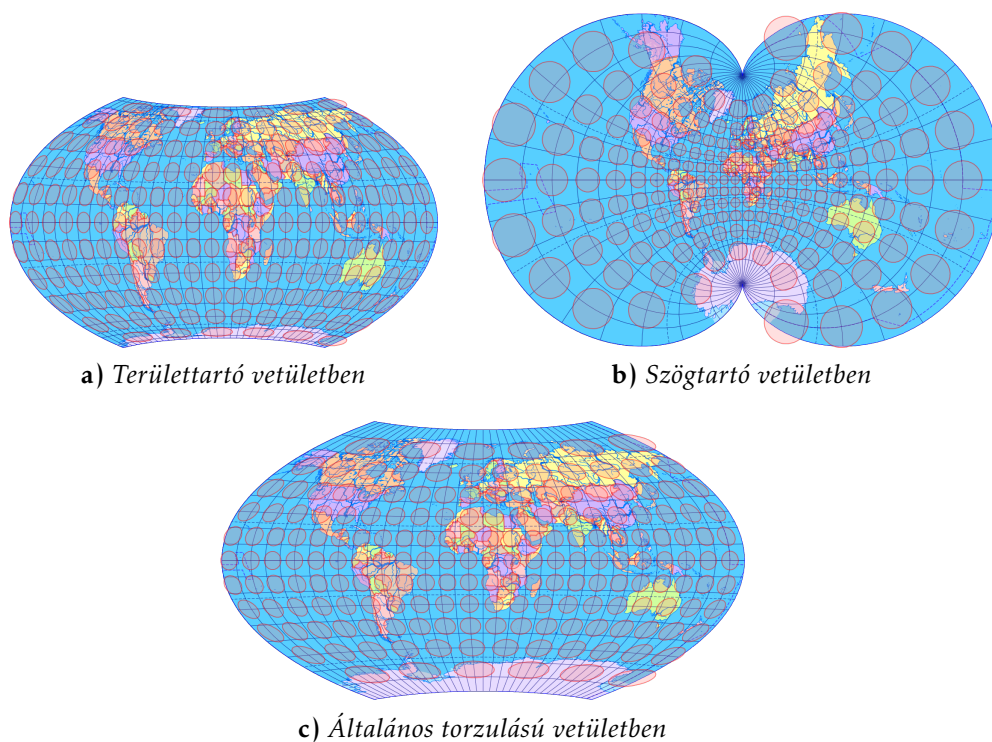
- A hossztorzulás egyenesen arányos az ellipszis megfelelő irányú félátméréjével.
- Az ellipszis lapultsága a szögtorzulást szemlélteti. A kör alakú indikatrixok szögtartó vetületre utalnak.
- Az ellipszis területe a területtorzulást mutatja be. A térképen mindennütt azonos területű ellipszisek területtartó vetületet sejtetnek.

Másik lehetőség a *torzulási izovonal*. Ezzel csak olyan mennyiségeket mutathatunk be, amelyek nem függenek az iránytól, csak a helytől, így a hossztorzulás szemléltetésére ezen a módon nincs lehetőség*. A területtorzulás azonban már csak helytől függő mennyiség, így alkalmazható rá a módszer. Időnként τ helyett annak 1 -től vett eltérését találjuk a térképeken. A szögtorzulás csak akkor független a második szög szár irányától, ha az első szög szár az I. vetületi főirányban áll. Ezért gyakran az ω legnagyobb szögmegváltozást írjuk helyette a térképre.

Az ábrázolni kívánt területnek megfelelő vetület megtalálásában segít CSEBISEV tétele: *Ha egy szögtartó vetület valamelyik torzulási izovonala az ábrázolt terület határvonalával egybeesik, akkor az a szögtartó vetületek között a*

* Kivéve a szögtartó vetületeket, hiszen korábban beláttuk, hogy ezekben a vetületekben a hossztorzulás nem irányfüggő.

IV. Vetületi torzulások a gyakorlatban



IV.1. ábra. Torzulási ellipszisek

lehetséges legkisebb torzulású.* CSEBISEV tételére példa, hogy a szterografikus vetület torzulási izovonali körök (IV.2. ábra), tehát kör alakú területekre ez a legkedvezőbb torzulású vetület.

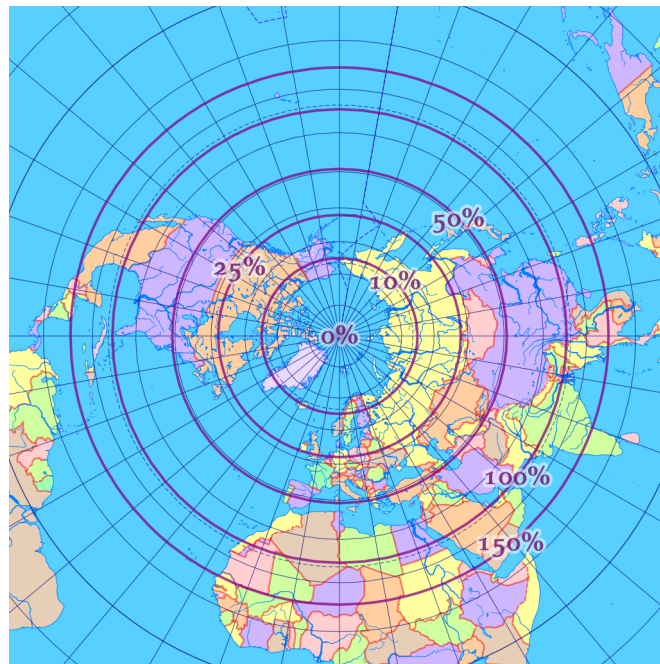
A nem szögtartó vetületekre a tétel nem érvényes, ellenpéldát is könnyen találunk: LAMBERT és WIECHEL vetületei egyaránt területtartók, és torzulási izovonalai körök (IV.2. ábra). Mégis WIECHEL vetületének jóval kedvezőtlenebbek a torzulásai, tehát utóbbi biztosan nem a legjobb területtartó vetület kör alakú területek ábrázolására. Ennek ellenére a közelmúlt kutatásai azt sejtetik, hogy a legjobb vetületek torzulási izovonalai is követik az ábrázolt terület határát, ezért ilyen esetekben is törekszünk olyan vetületek választására, amelyek torzulási izovonalai lehetőleg területünk határával párhuzamosak.

IV.2. TISSOT tételéből nem következő torzulások

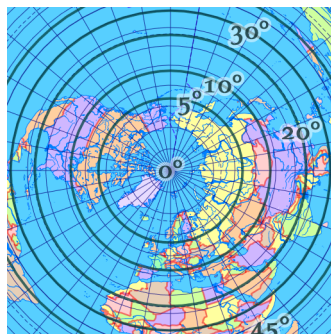
Vetületválasztásunkat olyan torzulások is befolyásolhatják, amelyeket Tissot tétele nem jelez előre. Például a térképeket jellemzően északra tá-

* Szabatosan fogalmazva: az ábrázolt területen a legkisebb és legnagyobb hossztorzulások logaritmusai között vett eltérés minimális.

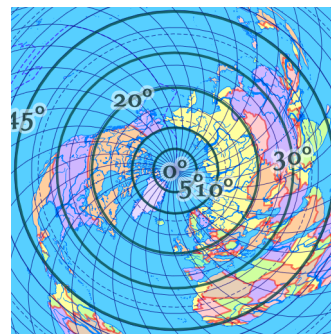
IV. Vetületi torzulások a gyakorlatban



a) Sztereografikus vetületben ($\tau - 1$)



b) LAMBERT-vetületben (ω)



c) WIECHEL-vetületben (ω)

IV.2. ábra. Torzulási izovonalak

oljuk. Azonban a vetület fokhálózata ezt nem feltétlenül teljesíti minden pontban: a függőleges irány és a valós észak közötti eltérést *vetületi meridiánkonvergenciának* nevezzük. Ez klasszikus értelemben véve nem torzulás, mert csak elforgatja a térkép bizonyos részeit. A μ meridiánkonvergencia számítása a meridiánkép érintőjének meredekségéből (differenciálhányadosából) adódik, ahol λ konstans:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{x(\varphi + \Delta\varphi; \lambda) - x(\varphi; \lambda)}{y(\varphi + \Delta\varphi; \lambda) - y(\varphi; \lambda)} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

A valódi hengervetületekben nincs meridiánkonvergencia, a többi vetülettel szemben elvárás, hogy a térkép közepén ne legyen meridiánkonvergencia. Ezt a *középméridián*^{*} megfelelő beállításával szoktuk elérni. Ezt úgy kell elképzelni, hogy a vetületi egyenletekbe λ helyett mindenütt $\lambda - \lambda_k$ -t írunk, ahol λ_k a középméridián. Mivel a legtöbb vetületben a középméridiánon ($\lambda = 0^\circ$) nincs meridiánkonvergencia, ezért λ_k rendszerint a területünk közepén futó hosszúság.

Már torzulásnak számít, mégsem jelzi előre Tissot elmélete azt, hogy a geodéziai vonalak képei nem szükségszerűen egyenes vonalak. Az ettől vett eltérést fejezi ki a κ *görbültség*, amely azt mutatja meg, hogy egységnyi távolság megtétele során hány radiánt fordul el a geodéziai vonal képe:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

Gömb alapfelületen szerkeszthető olyan vetület, amely a geodéziai vonalakat egyenesekre képezi le, forgási ellipszoidra azonban nem.

A szög tartó vetületek Tissot elmélete szerint lokálisan hasonlósági transzformációk. Mégsem gondolná senki, hogy pl. MERCATOR vetületében (VIII.3. ábra) Grönlandot az alapfelületi alakzathoz hasonlóan látnánk. Az itt látott alaktorzulás oka, hogy a hossztorzulások helyről-helyre gyorsan változnak; míg ugyanabban a vetületben Afrika alakja azért néz ki kevésbé torzultnak, mert itt a hossztorzulások lassan változnak. Az ebből származó alaktorzulás mértékét jelzi a σ *ferdültség*, amely azt mutatja meg, hogy egységnyi távolság megtétele során hányszorosára változik a hossztorzulás:

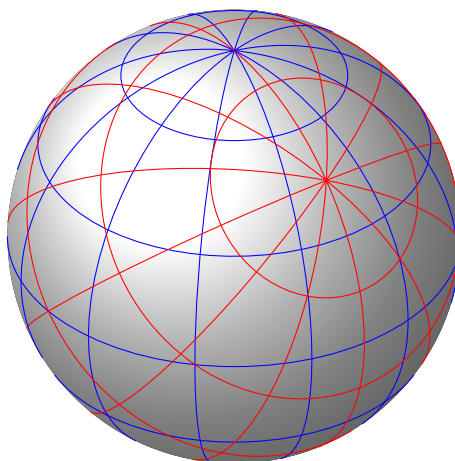
$$\sigma = \frac{1}{l} \frac{dl}{ds}$$

A görbültséget és a ferdültséget a közelmúltban két asztrofizikus, GOLDBERG és GOTT definiálta bolygótérképek torzulásainak vizsgálatára. A gyakorlati számításokhoz szükséges képleteket KERKOVITS vezette le.

* A középméridián nem azonos a kezdőmeridiánnal! A kezdőmeridián a 0° -os hosszúsági kör, ahonnan λ -t mérjük; míg a középméridián az a jellemzően kerek értékű hosszúság, amely a vetületi fokhálózat szimmetriatengelye lesz. A középméridiántól $\pm 180^\circ$ -ra található hosszúságot, amelyben a legtöbb vetületnek szakadása van, *ellenmeridiánnak* nevezzük.

IV.3. Földrajzi segédkoordináták

A vetületi torzulások csökkentésének egyik módszere a *fokhálózat-elforgatás*, amely azt jelenti, hogy nem a Föld forgástengelyét, hanem egy önkényesen választott másik tengelyt tekintünk forgástengelynek (IV.3. ábra). Az így kijelölt pólusok neve *segédpólus*, a rá vonatkozó koordinátákat pedig *földrajzi segéd-koordinátarendszer* néven jelöljük. A két paraméterét (*segédszélesség* és *segédhosszúság*) csillaggal különböztetjük meg a földrajzi koordinátáktól. Az elforgatott rendszer elhelyezését a *segédpólus* földrajzi koordinátaival adjuk meg. A kezdő-segédmeridiánt úgy definiáljuk, hogy az mindig áthalad az Északi-sarkon.*



IV.3. ábra. A fokhálózat-elforgatás

Először megadjuk a segédpólus $\varphi_0; \lambda_0$ koordinátáit. A IV.4. ábrán látható, hogy a pont, a pólus és a segédpólus egy gömbháromszöget határoz meg, amelyre fölírható az oldal-koszínusztétel:

$$\sin \varphi^* = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

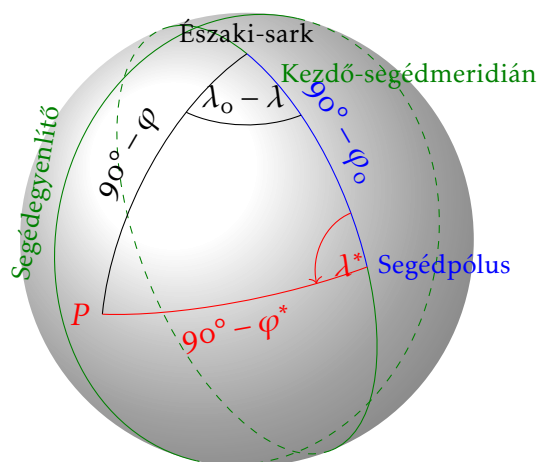
A hiányzó λ^* most már számítható a szinusztételből:

$$\frac{\cos \varphi^*}{-\sin(\lambda - \lambda_0)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \lambda^*}$$

$$\sin \lambda^* = -\frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cos \varphi^*}$$

* Ettől eltérő elhelyezést csak a képzetes vetületekben van értelme alkalmazni.

IV. Vetületi torzulások a gyakorlatban



IV.4. ábra. Földrajzi segédkoordináták a segédpólus ismeretében

Vagy akár az oldal-koszinusztételből is:

$$\sin \varphi = \sin \varphi^* \sin \varphi_0 + \cos \varphi^* \cos \varphi_0 \cos \lambda^*$$

$$\cos \lambda^* = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi^* \sin \varphi_0}{\cos \varphi^* \cos \varphi_0}$$

Önmagában sem a szinuszos, sem a koszinuszos képlet nem elegendő, hiszen mindkettő két megoldást ad. A két képlet előnyeit úgy egyesíthetjük, ha elosztjuk egymással, majd behelyettesítjük $\sin \varphi^*$ képletét:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda^* &= \frac{\frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cos \varphi^*}}{\frac{\sin \varphi - \sin \varphi^* \sin \varphi_0}{\cos \varphi^* \cos \varphi_0}} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi_0) - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - \sin \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi_0 - \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0)}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 - \cos(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0} \end{aligned}$$

Az így kapott képlet alkalmas az arctg2 függvény használatára, így λ^* egyértelműen meghatározható.

IV. Vetületi torzulások a gyakorlatban

A visszafelé számítás képleteit ugyanígy tudjuk levezetni:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \sin \varphi^* \sin \varphi_0 + \cos \varphi^* \cos \varphi_0 \cos \lambda^* \\ \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) &= \frac{-\sin \lambda^*}{\operatorname{tg} \varphi^* \cos \varphi_0 - \cos \lambda^* \sin \varphi_0}\end{aligned}$$

A fokhálózat-elforgatás célja, hogy az ábrázolt területet vetületek kedvező torzulású területeire helyezzük át a gömbön. Például a IV.2. ábrán látható, hogy a sztereografikus vetület a pólus középpontú körökre a lehető legjobb szögtartó vetület. Ha a mi területünk nagyjából kör alakú, de nem a pólus közelében helyezkedik el, egyszerűen csak elforgatjuk a fokhálózatot úgy, hogy a segédpólus az ábrázolni kívánt terület közepére essék. Az így elforgatott vetületekben egyszerűen csak a segédkoordinátákat kell a szélesség és a hosszúság helyére behelyettesíteni.

Időnként hasznosak lehetnek további összefüggések is. A λ^* -ra fölírt szinusztétel átrendezéséből adódik:

$$\sin \lambda^* \cos \varphi^* = -\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi$$

A koszinusztételből:

$$\begin{aligned}\cos \lambda^* \cos \varphi^* &= \frac{\sin \varphi - \sin \varphi^* \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \\ &= \frac{\sin \varphi - [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \\ &= \frac{\sin \varphi - \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi_0) - \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}{\cos \varphi_0} = \\ &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)\end{aligned}$$

Transzverzális elhelyezésben ($\varphi_0 = 0$) a képletek jelentősen egyszerűsödnek, hiszen $\sin \varphi_0 = 0$ és $\cos \varphi_0 = 1$:

$$\begin{aligned}\sin \varphi^* &= \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \sin \lambda^* &= \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cos \varphi^*} = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2(\lambda - \lambda_0)}} \\ \cos \lambda^* &= -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^*} = -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2(\lambda - \lambda_0)}}\end{aligned}$$

Az előbb λ^* szöggfüggvényeinek előjelét azért fordítottuk meg, mert egyébként a keletkező térképeken nem észak, hanem dél nézne fölfelé.

Ötödik előadás

Perspektív síkvetületek

V.1. Valódi síkvetületek általában

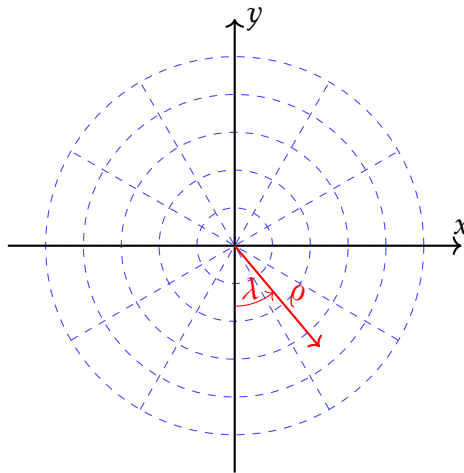
Most értünk el oda, hogy konkrét vetületeket ismerjünk meg. Az eddig tárgyalt témakörök az *általános vetülettan* tárgykörébe tartoznak, míg az egyes vetületek rendszeres vizsgálatát *leíró vetülettannak* nevezzük.

Kezdjük meg a fölfedezést a *valódi síkvetületek* körében! A síkvetületeket polárkoordináta-rendszerben érdemes tárgyalni. A parallelkörök képei koncentrikus körök. Az egy pontból kiinduló egyenes meridiánok ezeket egyenközűen osztják, ezért a polárszög a hosszúsággal egyezik, kizárólag a parallelkörök képeinek sugarát változtathatjuk. Jelölje ezt a sugarat a $\rho(\beta)$ szigorúan monoton növekvő *sugarfüggvény*, ahol a β *pólustávolság* a φ szélesség pótszöge ($\beta = 90^\circ - \varphi$)! Ez a valódi síkvetület egyértelműen meghatározza (V.1. ábra):

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \lambda \\y &= -\rho \cos \lambda\end{aligned}$$

A valódi síkvetületeket nevezik még *azimutálisnak*, mert a középpontból kiinduló ortodróma azimutjait megőrzi; és hívják *zenitálisnak* is, mivel a középponttól azonos távolságra lévő pontokat a térképen is azonos távolságra találjuk. A fokhálózat menti torzulások:

$$\begin{aligned}h &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \sin^2 \lambda + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \lambda}}{R} = \\&= \frac{\sqrt{\left(-\frac{d\rho}{d\beta}\right)^2 \sin^2 \lambda + \left(-\frac{d\rho}{d\beta}\right)^2 \cos^2 \lambda}}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \\k &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \lambda + \rho^2 \sin^2 \lambda}}{R \sin \beta} = \frac{\rho}{R \sin \beta}\end{aligned}$$



V.1. ábra. Polárkoordináták valódi síkvetületekben

Az előbb kihasználtuk, hogy:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\beta} \frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\beta} \frac{d(90^\circ - \varphi)}{d\varphi} = -\frac{d\rho}{d\beta}$$

Általánosságban megjegyezzük, hogy a pólusban a folytonos ábrázolás céljából elvárhatjuk $\rho(0) = 0$ egyenlőséget. Továbbá a β póluštávolságot a valódi sík- és kúpvetületeknél nem szükségszerű az Északi-sarktól mérni, lehet a Déli-sarktól is. Ez esetben a déli félteke kerül a térkép középpontjába.

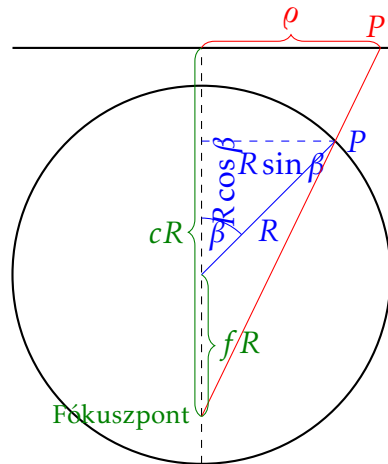
V.2. Általános perspektív síkvetület

A perspektív síkvetületek előállíthatók centrális perspektív vetítéssel. Jelölje a gömb középpontja és a vetítés középpontja közötti távolságot fR , míg a vetítési középpont és a sík távolságát cR ! A perspektív vetület *érintő*, ha a képfelület a gömböt érinti ($c = 1 + f$), *metsző*, ha metszi a gömböt, egyébként *lebegő*. Az V.2. ábrán található két hasonló derékszögű háromszög befogóinak aránya egymással megegyezik:

$$\frac{R(f + \cos \beta)}{R \sin \beta} = \frac{cR}{\rho}$$

$$\rho = R \frac{c \sin \beta}{f + \cos \beta}$$

Az általános perspektív síkvetületek közül leginkább a külső (*extern*) elhelyezésűeket ($|f| > 1$) alkalmazzuk. Ha a vetítési középpont a gömb sík



V.2. ábra. Perspektív síkvetületek elve

felőli oldalára esik ($f < -1$), akkor úgy ábrázoljuk a Földet, mint ahogy az a magasból látszik. Ilyesmi leképezést találunk tehát a Google Earth alkalmazásban. Ha a fókuszpont a gömb áttellenes oldalán található, akkor félgömbnél nagyobb területek ábrázolására alkalmazhatjuk (V.3. ábra).

A perspektív síkvetületek azokat a gömbi köröket, amelyeknek síkjába beleesik a fókuszpont, egyenesre képezik le. Ez egyszerűen belátható, hiszen ilyenkor a vetítési középpontból kiinduló sugársereg ebben a síkban van. A vetítésugarak síkjának és a vetítés síkjának metszészvonala pedig értelemszerűen egy egyenes. A többi gömbi kör képe kúpszelet. Ez is könnyen bizonyítható, hiszen ezúttal a kör és a vetítési középpont közé húzott egyenessereg most egy ferde kúpot súrol, amelynek bármely síkmetszete definíció szerint kúpszelet.

V.3. Gnomonikus vetület

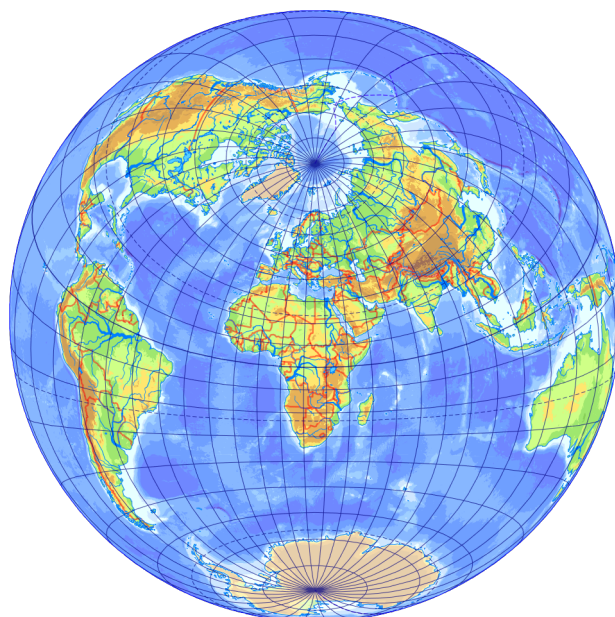
Az $f = 0$ esetben (vetítés a gömb középpontjából):

$$\rho = cR \operatorname{tg} \beta$$

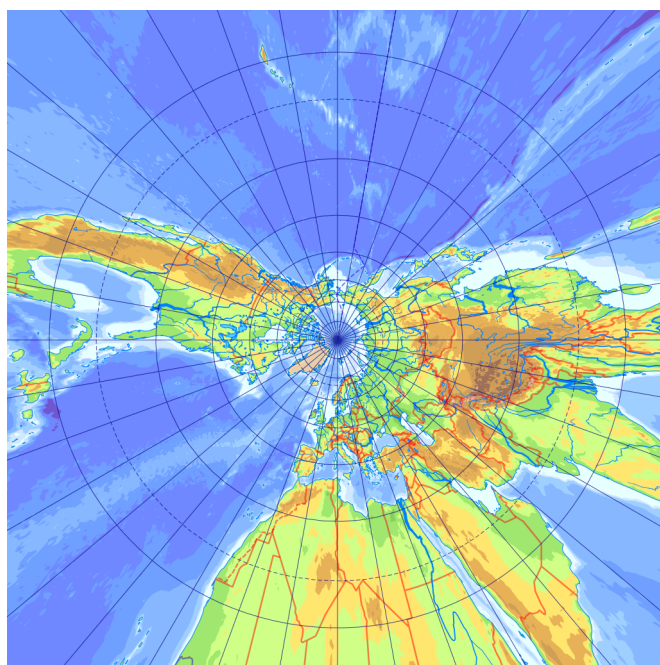
Ezt *gnomonikus* vetületnek nevezzük (V.4. ábra), és THALÉSZ alkotta meg. A képletből látható, hogy az Egyenlítő már nem ábrázolható benne. A torzulások érintő ($c = 1$) esetben:

$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$$



V.3. ábra. Ferdetengelyű perspektív síkvetület



V.4. ábra. Gnomonikus vetület

A pólusban $h = k = 1$, tehát torzulásmentes, míg az Egyenlítőn a torzulások végtelen nagyok. Közötte a torzulások rohamosan nőnek, jelentős területnövekedést ($hk > 1$) és szögtorzulást ($h \neq k$) tapasztalunk. Torzulásai igen kedvezőtlenek, azonban ritkán mégis alkalmazzuk, mert ez a vetület a gömbi geodéziai vonalakat egyenesre képezi le (hiszen most ezeknek a síkjában van a vetítési középpont). Ez híradástechnikai (pl. rádiótoronyok elhelyezése) vagy navigációs szempontból lehet érdekes.

A vetület transzverzális és ferdetengelyű elhelyezésben is könnyen fölismerhető, mert meridiánjai párhuzamos vagy egy pontba összetartó egyenesek, a paralellkörök képei pedig kúpszeletek.

V.4. Ortografikus vetület

Vizsgáljuk meg a $f \rightarrow \infty; c \rightarrow \infty$ esetet határérték-számítással (ekkor a vetítési középpont végtelen távol van, a sugarak párhuzamosak):

$$\rho = R \sin \beta$$

Ez az *ortografikus* vetület, amely úgy mutatja a Földet, mintha nagy távolságból tekintenénk rá (V.5. ábra). Megalkotója APOLLÓNIUSZ. Mivel a távoli égitesteket távcsőbe nézve így látjuk, előszeretettel alkalmazzuk bolygóterképeknél, különösen transzverzális elhelyezésben. Félgömbnél nagyobb terület nem ábrázolható benne. A torzulások:

$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \cos \beta$$

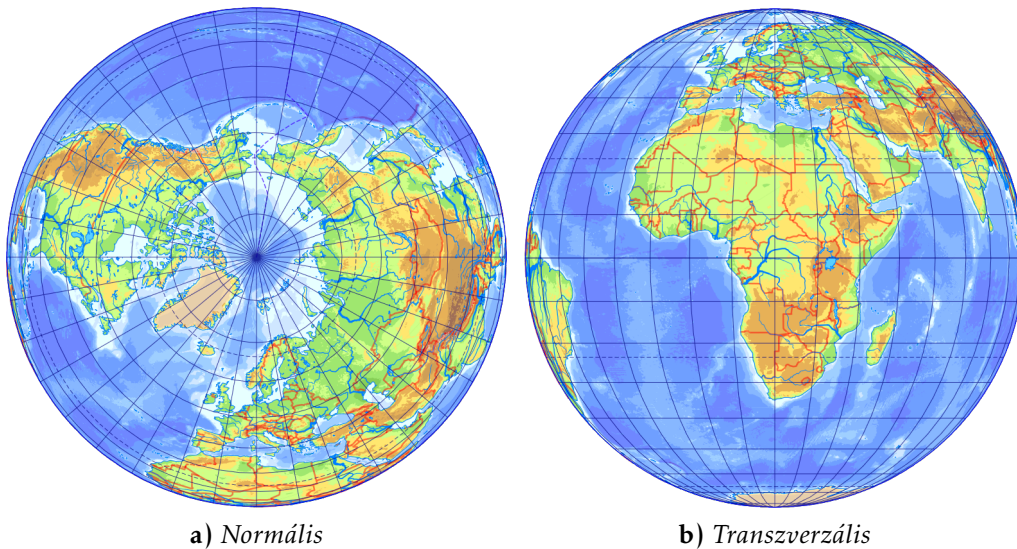
$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta} = 1$$

$k = 1$, tehát a vetület paralellkörben hossztartó. A pólusban nincs torzulás ($h = 1$), az Egyenlítőn a meridián irányú hosszrövidülés elfogadhatatlan ($h = 0$). A torzulások a pólustól távolodva gyorsan nőnek területcsökkenést ($hk < 1$) és szögtorzulást ($h \neq k$) okozva. Az elforgatott fokhálózatú változatokban a meridiánok képei ellipszisívek, a paralellkörök pedig ellipszisívként vagy párhuzamos egyenesként jelennek meg (utóbbi transzverzális elhelyezésben).

V.5. Sztereografikus vetület

A legfontosabb perspektív síkvetület az $f = 1$, vagyis amikor a vetítés középpontja az átellenes pólusban van. Ez a *sztereografikus vetület* (V.6. ábra):

$$\rho = Rc \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} = Rc \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = Rc \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$



V.5. ábra. Ortografikus vetület

A torzulási viszonyok megismeréséhez írjuk föl a leképezés fokhálózat menti torzulásait:

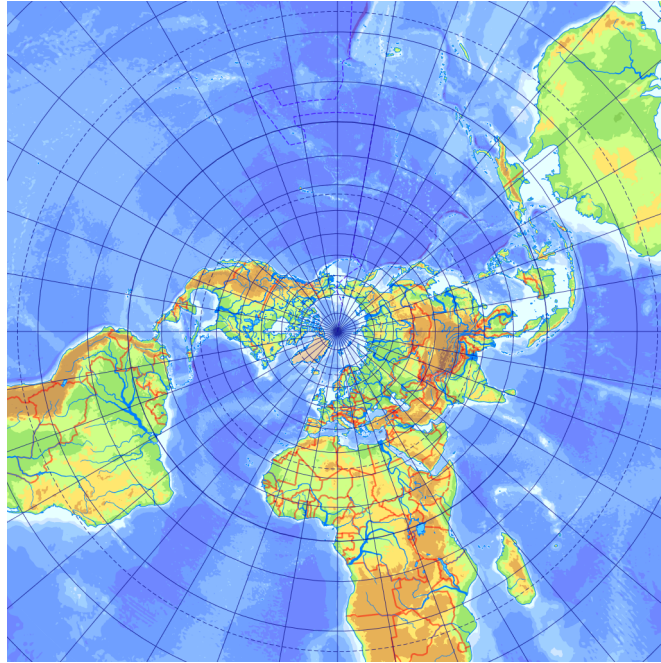
$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{1}{R} \frac{Rc}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{R \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

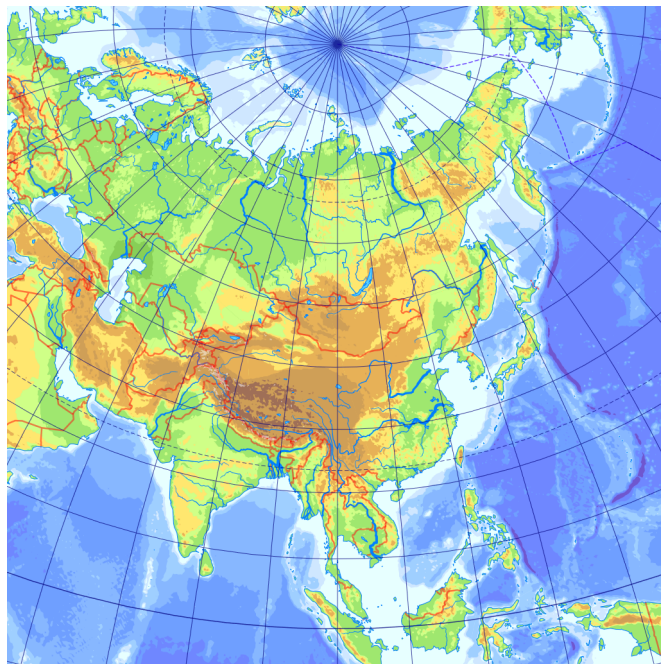
$h = k$, azaz a sztereografikus vetület szögtartó. Ráadásul minden gömbi kör képe ebben a vetületben kör vagy egyenes, azaz a vetület *körtartó* is egyben. A bizonyítás menete az V.7. ábrán követhető:

Vegyünk egy tetszőleges kört a gömb felszínén! Az ábra a gömbnek azt a függőleges metszetét mutatja, amely éppen merőleges a kör síkjára. Korábban beláttuk, hogy ha a kör síkja tartalmazza a vetítési középpontot, akkor képe minden perspektív síkvetületben egyenes; a továbbiakban csak az általános elhelyezkedésű körökkel foglalkozunk. A kör minden pontját félegyenesekkel kötjük össze a vetítési középponttal, így egy ferde kúpot (kék) kapva. A vetület síkja ebből egy kúpszeletet metsz ki. A piros és zöld szögek egymással megegyeznek, mert ugyanahhoz a vastag kék húrhoz tartozó kerületi szögek. A zöld és a kék szögek a szimmetria miatt egyenlők, míg a kék és a fekete egyállású szögek, tehát mind a négy szög egyforma.

A kék ferde kúp szimmetrikus a kék szaggatott vonallal jelölt síkra, mert az a két alkotó szögfelezője. Mivel a vetítés síkjának függőleges elhelyezése a körtartást nem befolyásolja (hiszen ez csak arányos kicsinyítés), ezért

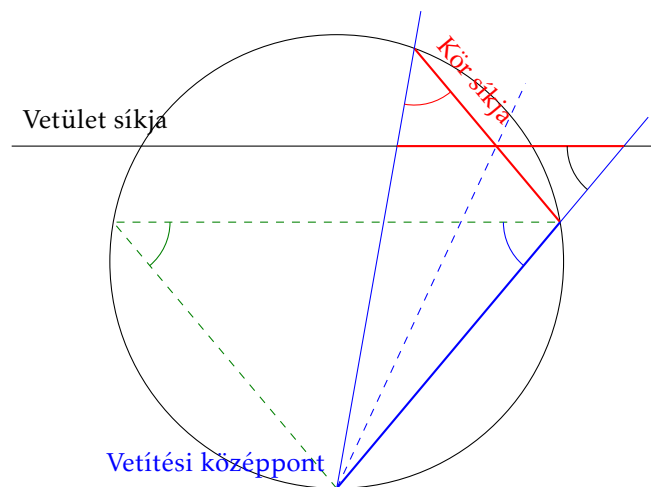


a) Normális



b) Ferdetengelyű (Ázsiára)

V.6. ábra. Sztereografikus vetület



V.7. ábra. A sztereografikus vetület körtartásának belátása

az általánosság föladata nélkül elhelyezhetjük úgy, hogy tartalmazza az eredeti kör síkjának és a ferde kúp szimmetriasíkjának metszési egyenesét (ez az ábra síkjára merőleges). Mivel a piros és fekete szögek egyformák, a kör síkja és a vetület síkja egymás tükörképei a kék szaggatott síkra vonatkoztatva. Tehát a vetület síkján pirossal megjelölt kép az eredeti kör tükörképeként is előállítható, így értelemszerűen ez is egy kör. Ezt akartuk bizonyítani.

Ezt a vetületet már az ókori egyiptomiak is ismerték és csillagtérképeken alkalmazták. Ma többek között meteorológiai térképeken alkalmazzuk, ahol fontos a szögtartás. A vetület torzulási izovonalai pólus középpontú körök, azaz CSÉBISEV tétele alapján kör alakú területekre a legkisebb torzulású szögtartó vetület. Éppen ezért közel kör alakú területekre transzverzális (pl. féltekék szögtartó ábrázolása) és ferdetengelyű elhelyezésben gyakran találkozunk vele. Előnyös tulajdonságai miatt ez a leképezés széles körben elterjedt annak ellenére, hogy a déli pólus képe a végtelenben van.

A $c = 2$ (érintő) változat az Északi-sarkon torzulásmentes ($h = k = 1$), ettől távolodva a torzulások gyorsan nőnek. Most messe a sík a gömböt a β_n metszési paralellben! Ekkor:

$$c = 1 + \cos \beta_n = \sin^2 \frac{\beta_n}{2} + \cos^2 \frac{\beta_n}{2} + \cos^2 \frac{\beta_n}{2} - \sin^2 \frac{\beta_n}{2} = 2 \cos^2 \frac{\beta_n}{2}$$

h és k képletébe a kifejezést visszahelyettesítve, és $\beta = \beta_n$ helyen vizsgálva torzulásmentességet találunk ($h = k = 1$), azaz a metsző sztereografikus

vetület metszési paralelköre torzulásmentes.* Vegyük észre, hogy c csak egy arányos kicsinyítési tényező a vetületben, így a metsző sztereografikus vetület mindig megkapható a megfelelő érintő vetület kicsinyítésével.

A ferdetengelyű sztereografikus vetület levezetése (érintő, $c = 2$ esetre):

$$\begin{aligned}\rho &= 2R \frac{\sin \beta^*}{1 + \cos \beta^*} = 2R \frac{\cos \varphi^*}{1 + \sin \varphi^*} \\ x = \rho \sin \lambda^* &= 2R \frac{\cos \varphi^* \sin \lambda^*}{1 + \sin \varphi^*} = \\ &= -2R \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)} \\ y = -\rho \cos \lambda^* &= -2R \frac{\cos \varphi^* \cos \lambda^*}{1 + \sin \varphi^*} = \\ &= -2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}\end{aligned}$$

Az inverz vetületi egyenletek levezetése a C. függelékben olvasható.

A ferdetengelyű sztereografikus vetület fokhálózata a szögtartás és körtartás okán könnyen azonosítható: a fokhálózati vonalak képei minden elhelyezésben teljes körök vagy egyenesek, amelyek egymást mindig derékszögben metszik.

* Bár a vetülettani szakirodalomban helyenként sajnos tájékozatlanul az ellenkezőjét állítják, a perspektív vetületek általában nem torzulásmentesek a metszési paralelkörben, ez csak a sztereografikus vetület speciális tulajdonsága!

Hatodik előadás

Nemperspektív síkvetületek

VI.1. POSTEL vetülete

Készítsünk meridiánban hossztartó vetületet ($h = 1$)!

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} &= 1 \\ \int d\rho &= R \int d\beta \\ \rho &= R\widehat{\beta} + d\end{aligned}$$

Az integrációs konstans $d = 0$, mert a pólusban $\rho = 0$. Ez POSTEL vetülete (VI.1. ábra). A neve ellenére ezt a vetületet nem POSTEL találta föl, már az ókori Egyiptomban is alkalmazták csillagtérképek vetületeként. A paralelkör menti hossztorzulás:

$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{\widehat{\beta}}{\sin \beta}$$

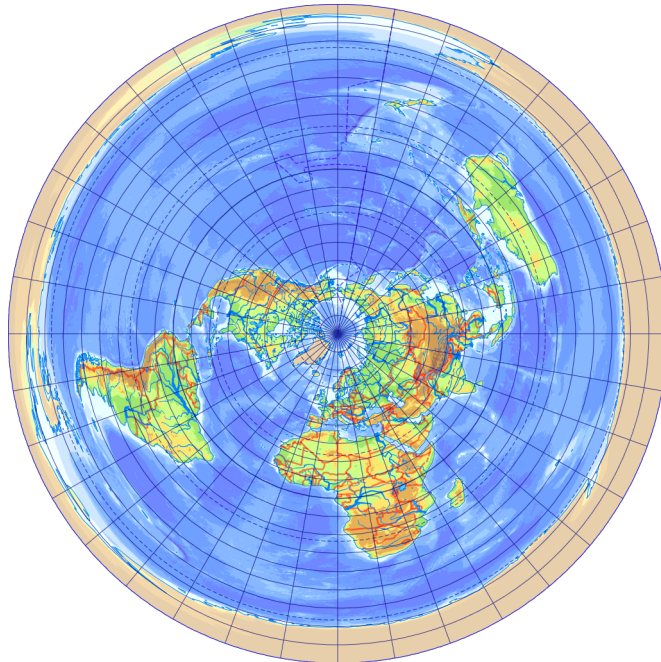
Az északi pólusban ($\beta = 0$) k a L'HÔPITAL-szabállyal kapható meg:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} k = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\widehat{\beta}}{\sin \beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \beta} = 1$$

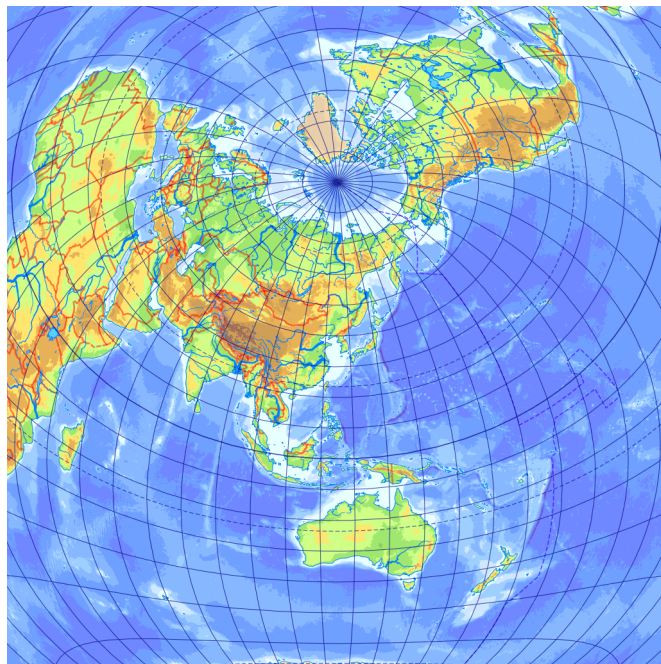
Az északi pólusban a vetület torzulásmentes ($h = k = 1$), a déli pólusban k nevezőjében nulla áll, a torzulás így végtelen nagy, a kettő között a torzulások fokozatosan nőnek.

A vetület torzulási izovonalai körök, hiszen k csak β függvénye, míg h konstans. Bár ismert ennél kedvezőbb torzulású valódi síkvetület, annak képletei igen bonyolultak, és félgömbnél kisebb területen nem tér el látványosan ettől a vetülettől. Ezért ha sem szögtartás, sem területtartás nem szükséges, közel kör alakú területekre ökölszabályként ez a leképezés ajánlott.

VI. Nemperspektív síkvetületek



a) Normális



b) Ferdetengelyű (Észak-Korea középponttal)

VI.1. ábra. *POSTEL* vetülete

Ferdetengelyű elhelyezésben a vetület segédpólusa lesz torzulásmentes, az ebből kiinduló segédmeridiánok azimutálisak és hossztartók. Ez előnyös például híradástechnikai alkalmazásokhoz. Szintén előnyös, hogy a segédpólus középpontú koncentrikus körök segédszélességek, amelyek ekvidisztáns koncentrikus körökre képeződnek le. Például ha valaki azt akarja ábrázolni, hogy Észak-Korea adott hatósugarú rakétája milyen területeket tud eltalálni, egyszerűen ezt a vetületet kell alkalmazza megfelelő elhelyezésben, hiszen így az Észak-Korea középpontú körök olyan körökre képeződnek le, amelyeknek a sugara sem torzul. Ez utóbbi tulajdonság előnyös akkor is, ha például egy adott repülőtérrel induló légi járatokat akarunk bemutatni.

A keleti és a nyugati félgömb is kör alakú terület, ezek egymás mellett történő ábrázolására a vetületet transzverzális elhelyezésben alkalmazzuk, főleg atlaszokban. Levezetése a IV.3. fejezet végén található transzverzális képletekkel:

$$\begin{aligned}\rho &= R\widehat{\beta}^* = R \operatorname{arccos} \cos \beta^* = R \operatorname{arccos} \sin \varphi^* = R \operatorname{arccos}(\cos \varphi \cos \lambda) \\ x &= \rho \sin \lambda^* = R \operatorname{arccos}(\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} \\ y &= -\rho \cos \lambda^* = R \operatorname{arccos}(\cos \varphi \cos \lambda) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}}\end{aligned}$$

A transzverzális és ferdetengelyű POSTEL-vetület fokhálózata nehezen ismerhető föl, de ha egy regionális térkép fokhálózata bonyolult vonalak adják és a középmeridiánt a fokhálózati vonalak egyenközüen metszik, továbbá a vetületi torzulások a térkép közepén kicsik, míg a szélein nagyobbak, akkor gyanakodhatunk rá. Transzverzális elhelyezésben az Egyenlítő osztásközei is egyenletesek.

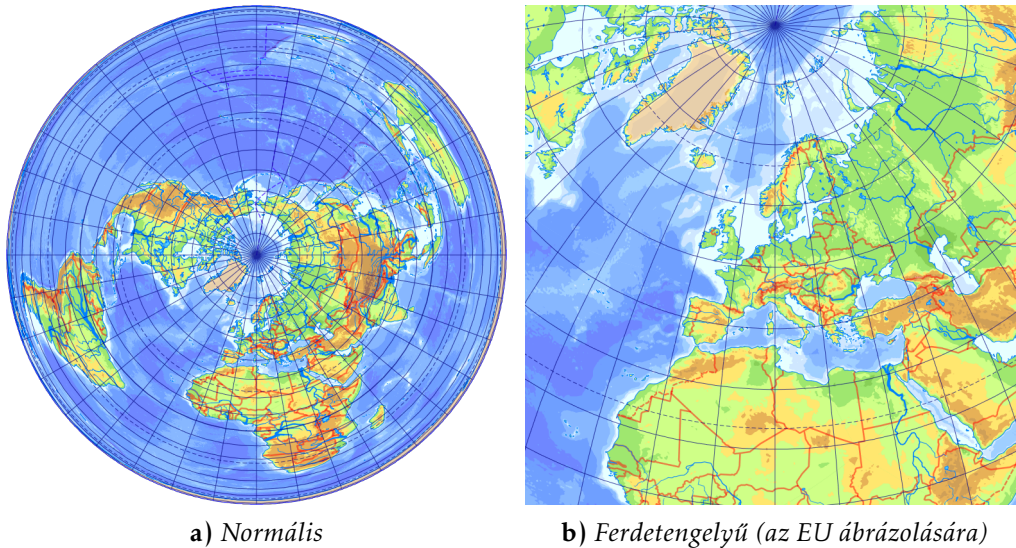
VI.2. LAMBERT síkvetülete

Készítsünk területtartó változatot is ($hk = 1$)! Az integrációs konstans legyen $R^2 + d/2$ alakú!

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \frac{\rho}{R \sin \beta} &= 1 \\ \int \rho d\rho &= R^2 \int \sin \beta d\beta \\ \frac{\rho^2}{2} &= -R^2 \cos \beta + R^2 + \frac{d}{2} = -R^2 \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) + \frac{d}{2} \\ \rho &= \sqrt{-2R^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) + d} = 2R \sin \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

VI. Nemperspektív síkvetületek

Az utolsó lépésben kihasználtam, hogy a pólusban $\rho = 0$, ami csak akkor lehet, ha $d = 0$. Az eredmény LAMBERT síkvetülete, 1772 óta ismert* (VI.2. ábra).



VI.2. ábra. LAMBERT síkvetülete

A fokhálózat menti torzulások:

$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \cos \frac{\beta}{2}$$

$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Az északi pólusban $h = k = 1$, azaz a vetület torzulásmentes. A déli pólusban a torzulások végtelen nagyok, hiszen $h = 0$ és $k \rightarrow \infty$. A torzulási izovonalak szélességi körök, mert h és k független a hosszúságtól. Ezért a vetületet közel kör alakú területek területtartó ábrázolására ajánlhatjuk. Az Európai Unió hivatalos térképeit ferdetengelyű LAMBERT-síkvetületben készítik, é. sz. 52° ; k. h. 10° segédpólussal.

* LAMBERT svájci matematikus elsősorban fizikai és matematikai problémákkal foglalkozott, a vetülettan csak marginálisan érdekelte. Mindösszesen egyetlen cikket írt a témában, azzal mégis forradalmasította a vetülettant. Hét új vetülete (területtartó valódi sík-, kúp- és hengervetület, szögtartó valódi és képzetes kúpvetület, szög- és területtartó transzverzális valódi hengervetület) közül öt jelenleg is a legelterjedtebbek között van. Ő volt az első, aki a jegyzetben is alkalmazott $h = k$ és $hk = 1$ differenciálegyenletek megoldásával keresett szög- és területtartó leképezéseket.

Ezt a vetületet is használják a keleti és nyugati féltekék ábrázolására, transzverzális elhelyezésben. A levezetés:

$$\begin{aligned}\rho &= 2R \sin \frac{\beta^*}{2} = R\sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\beta^*}{2} + \cos^2 \frac{\beta^*}{2} - \cos^2 \frac{\beta^*}{2} + \sin^2 \frac{\beta^*}{2}} = \\ &= R\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \beta^*} = R\sqrt{2 - 2 \sin \varphi^*} = R\sqrt{2 - 2 \cos \varphi \cos \lambda} \\ x &= \rho \sin \lambda^* = R\sqrt{2 - 2 \cos \varphi \cos \lambda} \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} = \\ &= R \frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi \cos \lambda)} \sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{(1 - \cos \varphi \cos \lambda)(1 + \cos \varphi \cos \lambda)}} = R \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \\ y &= -\rho \cos \lambda^* = R\sqrt{2 - 2 \cos \varphi \cos \lambda} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} = \\ &= R \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}\end{aligned}$$

Ezt a vetületet még nehezebb a fokhálózatáról fölismereni elforgatott esetben. Leginkább az jelenthet támpontot, hogy a térkép éleinél jelentős szögtorzulást tapasztalunk, és a középmeridián osztásai a térkép széle felé kissé sűrűsödnek.

VI.3. A GINZBURG-féle séma

GINZBURG észrevette, hogy a gyakran használt valódi síkvetületek sugárfüggvényei azonos mintát követnek:

$$\rho = dR \sin \frac{\beta}{d} \quad \text{vagy} \quad \rho = dR \operatorname{tg} \frac{\beta}{d}$$

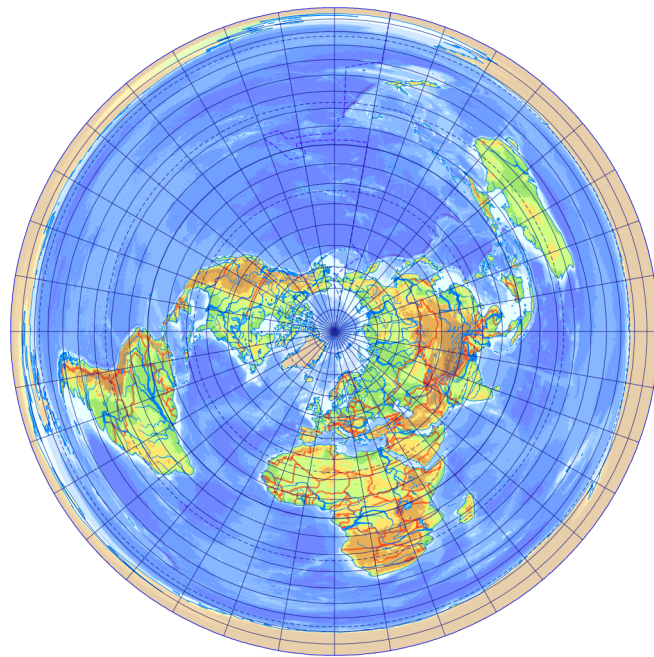
Az ortografikus és a területtartó leképezések a szinuszos változatba illeszkednek, előbbinél $d = 1$, utóbbinál $d = 2$. Az érintő gnomonikus és sztereografikus vetületek tangenses alakúak, ahol d rendre 1 és 2. Első ránézésre POSTEL vetülete kilóg a sémából, pedig valójában mindkét sorba beleillik. A szinuszos változatba illeszkedését L'HÔPITAL-szabállyal tudjuk bizonyítani:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} R d \sin \frac{\beta}{d} = R \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\beta}{d}}{\frac{1}{d}} = R \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\widehat{\beta}}{d^2} \cos \frac{\beta}{d}}{-\frac{1}{d^2}} = R \widehat{\beta}$$

A tangenses változat határértéke hasonló módon számítható, és szintén $R \widehat{\beta}$ -nak adódik. Azaz ez a vetület mindkét képletből kijön, ha d -t végtelen nagyra választjuk.

GINZBURG elsősorban a szinuszos sorozattal foglalkozott, és 1957-ben javasolta a $d = 3$ változat alkalmazását:

$$\rho = 3R \sin \frac{\beta}{3}$$



VI.3. ábra. GINZBURG síkvetülete

Ez GINZBURG síkvetülete (VI.3. ábra), torzulásai nagyon csekélyek (a hossztorzulások szempontjából még POSTEL vetületénél is kedvezőbb), általános torzulású, de területtorzulása igen kicsi. GINZBURG ajánlotta még a $d = 1,5$ változatot is, amely a Föld gömb alakjára emlékeztet.

VI.4. Ellipszoid alapfelületű síkvetületek

A valódi síkvetületek fokhálózat menti torzulásai ellipszoid alapfelületen a következőképp alakulnak:

$$h = -\frac{1}{M(\Phi)} \frac{d\rho}{d\Phi}$$

$$k = \frac{\rho}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

A meridiánban hossztartó síkvetület a $h = 1$ egyenlet megoldásából származik:

$$\rho = \int_{90^\circ}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A területtartó síkvetülethez a $hk = 1$ egyenletet kell megoldanunk, az integrációs konstánst pedig a póluspontosság követelményéből lehet kifejezni:

$$\rho = a\sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{\sin \Phi}{1-e^2 \sin^2 \Phi} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin \Phi}{1-e \sin \Phi} \right)^{1/2}$$

A szögtartó síkvetület esetén a $h = k$ egyenlet megoldásával kapott függvényben a d integrációs konstans szabadon választható meg:

$$\rho = d \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\Phi}{2} \right) \left(\frac{1+e \sin \Phi}{1-e \sin \Phi} \right)^{e/2}$$

Ha azt szeretnénk, hogy a pólusban a hossztorzulás c legyen, akkor:

$$d = \frac{2ca}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{e/2}$$

Ezt a vetületet alkalmazza a NATO a póluskörnyéki területekre *UPS* (*Univerzális Poláris Sztereografikus*) néven, $c = 0,994$ választással WGS84 alapfelületen. Itt hívom föl a figyelmet, hogy a gömbbel ellentétben az ellipszoidi szögtartó síkvetület nem perspektív, így a sztereografikus megnevezés megtévesztő! * Az UPS vetületet az északi féltekén a 84° -os, a déli féltekén a 80° -os szélességig alkalmazzuk az UTM zónái helyett.

Forgási ellipszoid alapfelületre nem definiáltuk a fokhálózat-elforgatást, így ferdetengelyű vetület előállítására két módszer kínálkozik: Az első lehetőség a *kettős leképezés*, amely esetben először a gömbre vetítünk valamilyen gömbvetülettel, a gömbön elvégezzük a fokhálózat-elforgatást, végül alkalmazzuk a gömb alapfelületű vetületet. A másik lehetőség, hogy a gömbi ferdetengelyű vetület torzulási viszonyai közül valamennyit önkényesen kiválasztunk úgy, hogy ezek a feltételek az ellipszoidra vonatkoztatva egyértelműen meghatározzák a vetület egyenleteit. Így közvetlen ellipszoidról síkra képező képleteket kapunk. Alább megnézzük mindkét módszert az

* Emlékezzünk, hogy a *metsző* szakkifejezés csak perspektív vetületekre alkalmazható, így az UPS hiába tartalmaz kicsinyítést és ennek következtében egy torzulásmentes szélességet, attól még nem lesz metsző vetület (hiába állítja ezt a szakirodalom jó része), hanem helyesen fogalmazva inkább *redukált*!

ellipszoid alapfelületű ferdetengelyű szögtartó valódi síkvetület meghatározására.

A kettős leképezés módszerét alkalmazza a holland topográfiai térképeken előforduló *Amersfoort*-vetület. Az alapfelület a BESSEL-ellipszoidon alapuló Amersfoort dátum. Gömbvetületnek a GAUSS-féle igen kis torzulású szögtartó gömbvetületet (lásd alapszakos jegyzet) választották, a torzulásmentes parallelkör az Amersfoort erőd szélessége. Ezt követően történik a ferdetengelyű sztereografikus vetület alkalmazása Amersfoort segédpólussal. Végezetül a koordinátatengelyeket eltolták, hogy ne legyenek negatív koordináták és a függőleges koordináta mindig nagyobb legyen, mint a vízszintes. Mivel csak szögtartó leképezéseket alkalmaztunk, az eredmény szögtartó.

Az Amersfoort-vetület magyar szempontból jelentős, mert nagyon emlékeztet a régi sztereografikus vetületünkre. Az elvében az egyetlen eltérés, hogy a régi budapesti és marosvásárhelyi sztereografikus rendszerek esetén a szögtartó gömbvetületek torzulásmentes szélessége nem halad át a vetületi kezdőponton. Ha térinformatikai rendszerünk nem támogatja a magyar sztereografikus vetületet, nyugodtan alkalmazzuk helyette az Amersfoort-vetületet gellérthegyi kezdőpontra átparaméterezve. A transzformáció hibája így centiméter körüli lesz, amely gyakorlati alkalmazásokhoz legtöbbször elegendő. A magyar sztereografikus koordinátákról bővebben az alapszakos jegyzetben lehet olvasni.

A másik módszert alkalmazza ROUSSILHE vetülete. Tudjuk, hogy a gömb alapfelületű érintő sztereografikus vetületben a középmeridián pontjai az $y = 2R \operatorname{tg}(s/2R)$ koordinátára képeződnek, ahol s a segédpólustól vett távolság. Ezt úgy általánosítjuk a forgási ellipszoidra, hogy az s meridián mentén mért távolságot az ellipszoidon értelmezzük, míg az R sugár helyére a vetületi kezdőpontban fölött simulógömb sugarát ($\sqrt{M(\Phi_0)N(\Phi_0)}$) helyettesítjük. A középmeridián így kapott felosztása és a szögtartás a vetületet egyértelműen meghatározza. Mivel a vetület komplex számsíkon értelmezett trigonometrikus függvényeket és elliptikus integrálokat igényel, ezért a gyakorlatban többféle sorfejtéssel közelítik.

ROUSSILHE-vetületet ma például Romániában találunk Stereo70 néven Brassó közelében fölött kezdőponttal, eltolva és kicsinyítve. Hasonló vetületet használtak a közelmúltig a lengyelek is, az országot öt külön leképezett zónára osztva, melyek közül négy zónát ebben a vetületben ábrázoltak.

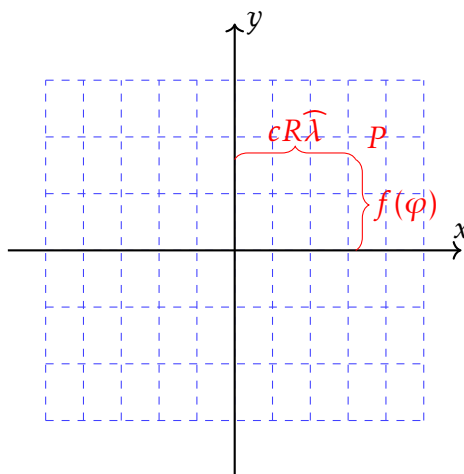
Hetedik előadás

Perspektív és területtartó hengervetületek

VII.1. Általános képletek

A *valódi hengervetületekben* a szélességi és hosszúsági körök egymásra merőleges egyenesseregként jelennek meg. A függőleges koordináta tehát csak a szélességtől függ, annak szigorúan monoton növő, a szimmetria céljából gyakran páratlan függvénye. Az x tengely általában az Egyenlítő képére esik. Az egyenközűség feltétele miatt a vízszintes koordináta a hosszúsággal egyenes arányban áll (VII.1. ábra). Legyen az arányosság tényezője cR !

$$\begin{aligned}x &= cR\widehat{\lambda} \\ y &= f(\varphi)\end{aligned}$$



VII.1. ábra. Koordináták valódi hengervetületekben

Írjuk föl a fokhálózat menti torzulásokat!

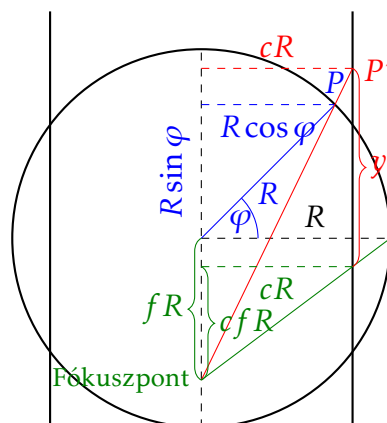
$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{0^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}}{R} = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi}$$

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{\sqrt{(cR)^2 + 0^2}}{R \cos \varphi} = \frac{c}{\cos \varphi}$$

k képletét megvizsgálva látható, hogy a $\pm\varphi_n$ szélesség hossztartó, ha $c = \cos \varphi_n$.

VII.2. Perspektív hengervetület

A perspektív hengervetület levezetéséhez tekintsük a VII.2. ábrát! A henger alapjának kerülete megegyezik az x koordináta megváltozásával a $\pm 180^\circ$ -os hosszúságok között, azaz $cR2\pi = 2R\pi \cos \varphi_n$ -nel. Ebből a henger sugarára $cR = R \cos \varphi_n$ adódik, azaz $\pm\varphi_n$ éppen a henger két metszési paralellköre.



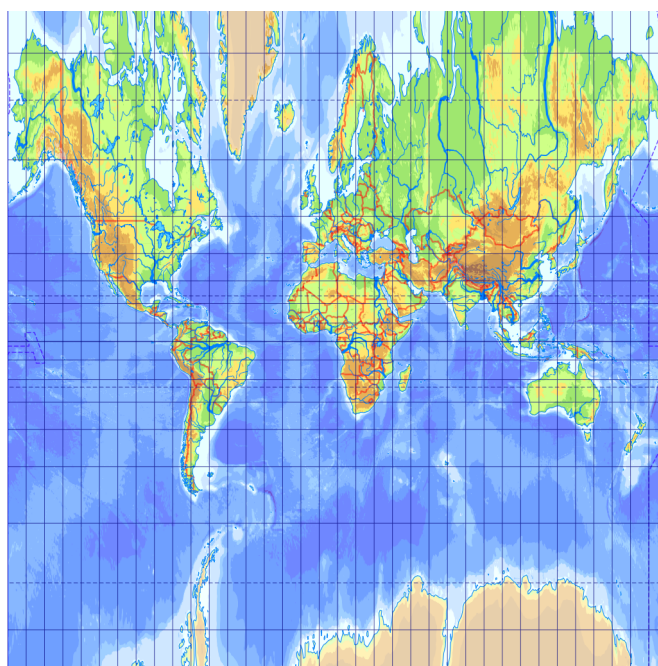
VII.2. ábra. Perspektív hengervetületek elve

Legyen a fókuszpont távolsága a középponttól fR ! Ekkor a zöld átfogójú (az Egyenlítő leképezését szemléltető) hasonló derékszögű háromszögek befogóinak aránya megegyezik, így a kisebbik háromszög függőleges befogója

VII. Perspektív és területtartó hengervetületek

szükségszerűen cfR . A piros átfogójú hasonló derékszögű háromszögek befogóinak arányából:

$$\frac{y + cfR}{cR} = \frac{R(f + \sin \varphi)}{R \cos \varphi}$$
$$y = cR \left(\frac{f + \sin \varphi}{\cos \varphi} - f \right)$$



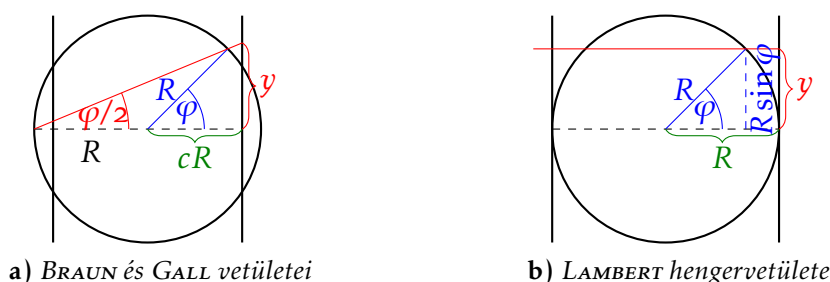
VII.3. ábra. Perspektív hengervetület

A perspektív hengervetületek torzulási viszonyai rendkívül előnytelenek (VII.3. ábra). A vetület általános torzulású ($h \neq k$ és $hk \neq 1$). Perspektív hengervetületekkel szinte kizárólag orosz nyelvű atlaszokban találkozunk.

VII.3. Kváziperspektív hengervetületek

A valódi henger- és kúpvetületek között tágabb értelemben perspektívnek tekinthetjük azokat a vetületeket is, amelyekben minden egyes meridiánt külön fókuszpontból vetítünk a képfelületre. A vetítési középpont az aktuálisan leképezendő meridiánnak megfelelő képfelületi alkotóra merőleges és az alapfelület középpontján áthaladó egyenesen van, és a leképezés során a meridiánokkal együtt forgásszimmetrikusan változtatja a helyét.

VII. Perspektív és területtartó hengervetületek



VII.4. ábra. Fontosabb kváziperspektív hengervetületek

Ezek a kváziperspektív vetületek. Ezen a kurzuson két kváziperspektív vetülettel ismerkedünk meg (VII.4. ábra).

Az első esetben legyen a vetítési középpont a sztereografikus síkvetülethez hasonlóan a henger alkotójával átellenes egyenlítői pontban! Az ábrán látható piros kerületi szög a kék középponti szög fele. A kerületi szög tangense:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \frac{y}{R + cR} \\ y &= R(1 + c) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

A valódi hengervetületekben a paralellkör menti hossztorzulás $k = c/\cos \varphi$. A meridián menti hossztorzulás:

$$h = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1 + c}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + c}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + c}{1 + \cos \varphi}$$

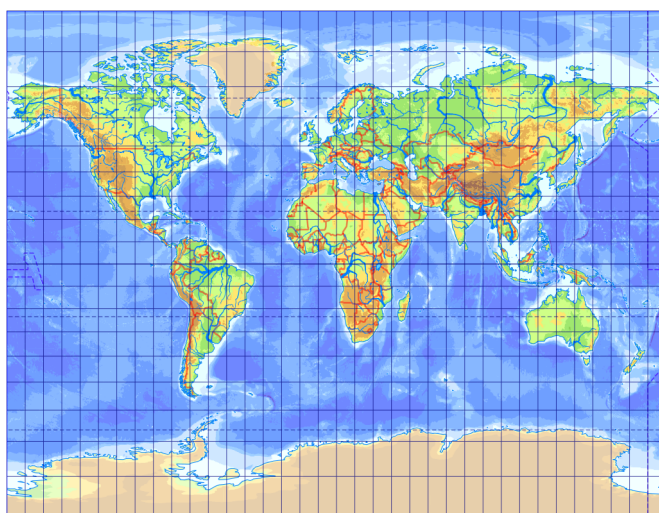
Azaz a vetület a sztereografikus vetülettel ellentétben általános torzulású ($h \neq k$ és $hk \neq 1$), azonban a sztereografikus vetületre emlékeztető tulajdonság, hogy a metszési paralellkörök kivételesen torzulásmentesek (ha $\varphi = \varphi_n$ és $c = \cos \varphi_n$, akkor $h = k = 1$).

A vetületet GALL skót térképész vezette le elsőként 1855-ben a $\varphi_n = \pm 45^\circ$ metsző szélességgel, így a $c = \sqrt{2}/2$ változatot róla nevezték el. Tőle függetlenül alkotta meg BRAUN az érintő ($c = 1$) változatot 1867-ben.

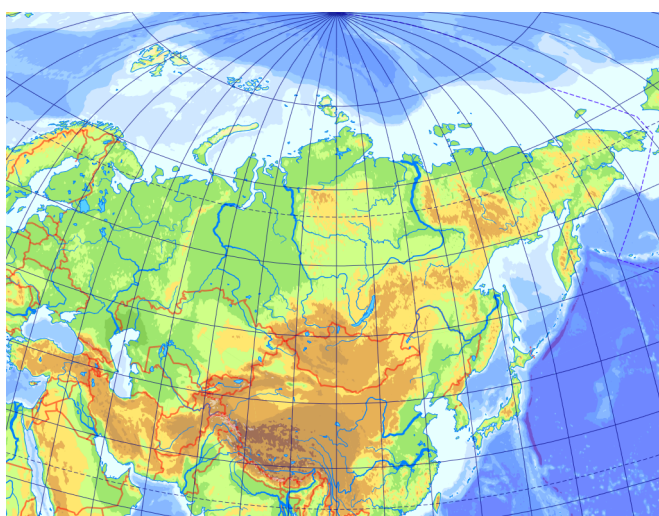
Bár meglehetősen kellemes ábrázolást ad, mégis rendkívül ritkán találkozunk ezzel a leképezéssel. Alkalmazása például időzónatérképeken jöhetne szóba, ahol nincs szükség speciális torzulási viszonyokra, de a meridiánkonvergenciát ki szeretnénk küszöbölni.

Mint ahogy a perspektív vetületeknél általában, úgy itt is elmondható, hogy elsődlegesen orosz nyelvű atlaszokban találkozunk ilyen leképezésekkel, világtérképre néha $\varphi_n = \pm 30^\circ$ választással is. Ferdetengelyű elhelyezésben Szovjetunió ábrázolására is alkalmaztak kváziperspektív vetületeket (VII.5. ábra).

VII. Perspektív és területtartó hengervetületek



a) Normális



b) Ferdetengelyű (Szovjetunióra) SZOLOVJOV nyomán

VII.5. ábra. GALL vetülete

VII. Perspektív és területtartó hengervetületek

Következő kváziperspektív vetületünket úgy kapjuk meg, hogy a vetítési középpontot az ortografikus vetülethez hasonlóan végtelen távol helyezzük. Ekkor a vetítősugarak párhuzamosak. Legyen a henger érintő, azaz R sugarú ($c = 1$)! A VII.4. ábrán jól látható módon:

$$y = R \sin \varphi$$

A vetület torzulásai:

$$h = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = \cos \varphi$$
$$k = \frac{c}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$hk = 1$, tehát területtartó vetületet kaptunk. Ez LAMBERT hengervetülete (1772). Vajon ez az egyetlen területtartó hengervetület, vagy a nemperspektív vetületek között találunk még továbbiakat is?

VII.4. Területtartó hengervetület

Kérdésünkre válaszul a $hk = 1$ egyenletet oldjuk meg:

$$\frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} \frac{c}{\cos \varphi} = 1$$
$$\int dy = \frac{R}{c} \int \cos \varphi d\varphi$$
$$y = \frac{R}{c} \sin \varphi + d$$

A d integrációs konstans csak egy eltolás, így figyelmen kívül hagyható, c pedig a hossztartó szélesség koszinusza. Ha a hossztartó szélesség 0° ($c = 1$), akkor LAMBERT hengervetületét kapjuk vissza, egyéb esetben azonban további, nemperspektív vetületeket kapunk megoldásnak. A torzulások:

$$h = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{c}$$
$$k = \frac{c}{\cos \varphi}$$

A nem meglepő területtartás mellett leolvasható, hogy a $\pm\varphi_n$ szélesség torzulásmentes, mert itt $h = k = 1$. Az ilyen szélességeket a vetület *normalparalelköreinek* hívjuk. A pólusban h zérus, míg k végtelen nagy, tehát a szögtorzulások végtelen nagyok. BEHRMANN 1910-ben javasolta a $\varphi_n = \pm 30^\circ$ ($c = \sqrt{3}/2$) változatot, ennek a teljes Földre átlagolt szögtorzulását a

VII. Perspektív és területtartó hengervetületek

lehetséges legkedvezőbbnek találta a területtartó hengervetületek között (VII.6. ábra).

PETERS német történész 1967-ben a $\varphi_n = \pm 45^\circ$ ($c = \sqrt{2}/2$) változatot ajánlotta, amelyet GALL–PETERS-vetület néven ismerünk. Ezzel a vetülettel ma is viszonylag gyakran találkozunk, pedig szögtorzulásai zavaróan nagy mértékűek.*

Különböző neveken számtalan további területtartó hengervetület is ismert, amelyek csak a hossztartó szélességben különböznek. Ezeket a vetületeket aktuális megalkotójuk rendszerint saját magáról nevezte el. A területtartó hengervetületek fokhálózati képe a széle felé sűrűsödő fokhálózatról ismerhető fel.

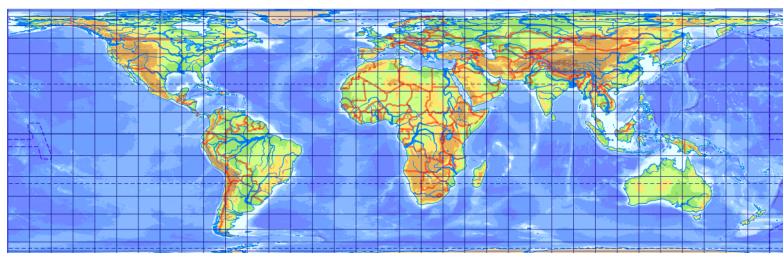
* A GALL–PETERS-vetület tipikus példája egy újra meg újra feltűnő jelenségnek, amikor vetülettanhoz nem értő laikusok találják föl újra a kereket. A XX. századi amerikai térképészetben gyakori volt, hogy a világtérképeket (legyen az iskolai atlasz vagy falitérkép) a következő előadáson ismertetett MERCATOR-vetületben mutatták be. Ez helytelen vetületválasztás, mert a magas szélességeken jelentős területtorzulást mutat, míg a szögtartó tulajdonság egy szobai használatra szánt térképnél nem szokott előnyös lenni. Ez nem jelenti azt, hogy ez a vetület önmagában rossz lenne, de inkább egy (segéd)egyenlítő környékét bemutató, közepes vagy nagy méretarányú, terepi használatra szánt térképen (pl. turisztatérkép) tudjuk jól kihasználni a szögtartását.

PETERS azonban politikai ügyet kavart az egészből. Azt állította, hogy az imperialista nagytőkés államok szánt szándékkal állítanak elő olyan torzulású térképeket, amelyek a fejlett országokat tudatosan mutatják be nagyobbak, mint a szerencsétlenebb sorsú afrikai és dél-amerikai régiókat. PETERS azt állította, hogy a térképek hazudnak, és csak az ő ábrázolása mutatja be helyesen a Földet. Demagóg lobbija célt ért, a szakma heves tiltakozása ellenére elérte, hogy különböző ENSZ-szervezetek hivatalos térképeit az ő vetületében szerkesszék.

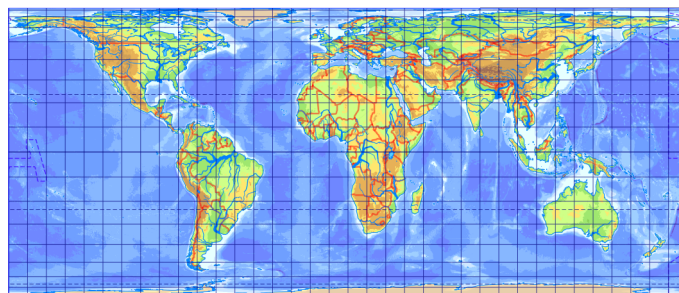
Szakmai szempontból nézve PETERS állításai finoman fogalmazva vitathatók. Az a feltételezése, miszerint csak egy területtartó vetület mutathatja be helyesen a Földet, még hagyján; de hogy az ő vetülete lett volna az első területtartó vetület a világon, az már nevetséges. Még az általa terjesztett leképezést sem ő, hanem már 1855-ben GALL skót térképész találta föl elsőként. A szögtorzulások pedig éppen a fejlett régiók 45°-os szélességénél csekélyek, míg az Egyenlítő környékén található országokat palacsintává lapítja, tehát pont ott a legnagyobb a torzulás, ahol PETERS állítása szerint kedvezni akar.

Sajnos a bulvármédia a mai napig föl-fölkapja ezt a témát, és moztanában is lehet „A térképek hazudnak nekünk” típusú írásokba botlani. Ennek következtében pár éve is jelent meg olyan cikk, miszerint Bostonban az iskolákban kötelező jelleggel GALL–PETERS-vetületben készült térképeken kell oktatni az iskolákban, mert ez a tisztességes az egykori gyarmatokkal szemben.

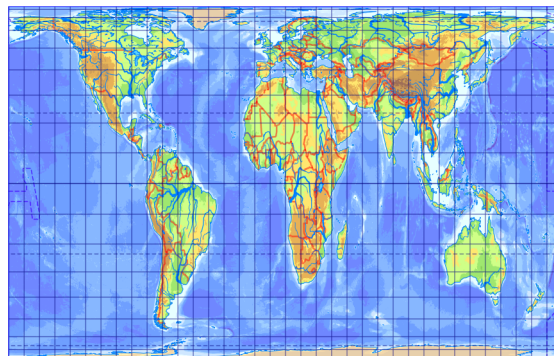
VII. Perspektív és területtartó hengervetületek



a) *LAMBERT-hengervetület*



b) *BEHRMANN-vetület*



c) *GALL-PETERS-vetület*

VII.6. ábra. *Területtartó hengervetületek*

Nyolcadik előadás

További valódi hengervetületek

VIII.1. Meridiánban hossztartó hengervetületek

Készítsünk meridiánban hossztartó hengervetületet ($h = 1$)!

$$\frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = 1$$
$$\int dy = R \int d\varphi$$
$$y = R\widehat{\varphi} + d$$

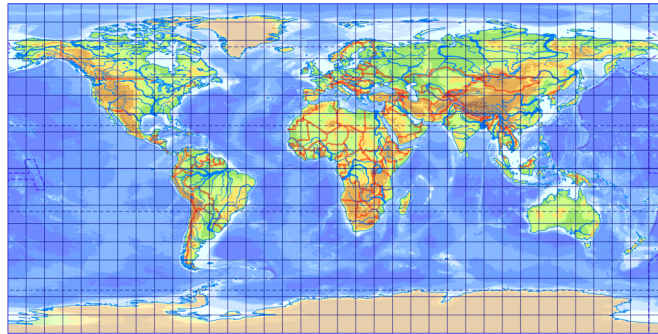
A d integrációs konstans szintén csak eltolást eredményez, ezért nem vesszük figyelembe. A meridiánban hossztartás okán $h = 1$, míg minden valódi hengervetületben $k = c/\cos \varphi$ (hiszen továbbra is $x = cR\widehat{\lambda}$). Tudva, hogy $c = \cos \varphi_n$, könnyen belátható, hogy a $\pm \varphi_n$ szélesség torzulásmentes, azaz normálparallel ($h = k = 1$). A pólusban k végtelen nagy, a normálparallelek között egynél kisebb, azoktól távolodva egyre nagyobb.

A vetületet $c = 1$ (az Egyenlítő torzulásmentes) választás esetén fokhá-lózata alapján *négyzetes hengervetületnek* (VIII.1. ábra) nevezzük, és ERATOSZTHENÉSZ nevéhez kötjük. A legtöbb térinformatikai szoftver ebben a vetületben jeleníti meg az adatokat akkor, ha nem adunk meg vetületet. Vegyük azonban észre, hogy ha nem adunk meg vetületet, akkor a koordinátákat a szoftver fokban értelmezi, míg ha kifejezetten a négyzetes hengervetületet állítjuk be, akkor minden méterben lesz kifejezve.

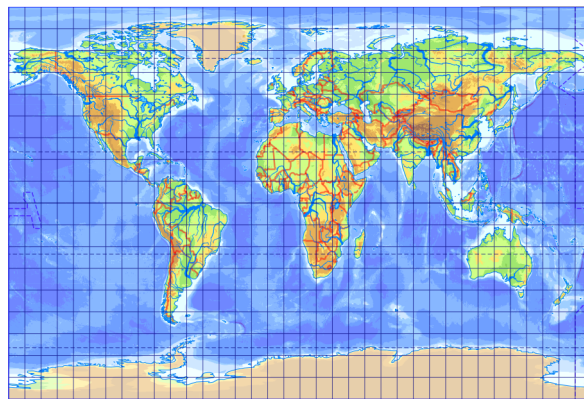
A meridiánban hossztartó hengervetületnek c megfelelő megválasztásával más hossztartó szélességet is kijelölhetünk. Ebben a formában a vetületet MARINOSZ alkalmazta először, aki a Rhodosz szigetén átmenő szélességi kört választotta torzulásmentesnek.

Mivel k az Egyenlítőre szimmetrikus minden valódi hengervetületben, és a legtöbb eddig megismert leképezésben h is rendelkezik ezzel a szimmetriával, megállapíthatjuk, hogy a valódi hengervetületek torzulási izovonalai is legtöbbször az Egyenlítőre szimmetrikusan futnak. Ebből következik, hogy az Egyenlítőre szimmetrikus, a mentén hosszan elnyúló területekre ezt

VIII. További valódi hengervetületek



a) Négyzetes hengervetület



b) Kedvező torzulású ($\varphi_n = \pm 42^\circ$)

VIII.1. ábra. Meridiánban hossztartó hengervetületek

a vetületcsaládot érdemes alkalmazni. Ha a térképi tematika nem követeli meg sem a szögtartást, sem a területtartást, akkor érdemes ezt a vetületet alkalmazni, mert GYÖRFFY bebizonyította, hogy egy Egyenlítőre szimmetrikus gömböv ábrázolására a valódi hengervetületek között a meridiánban hossztartónál kisebb torzulású nem létezik. Bár teljes Föld ábrázolására valódi hengervetület választása csak ritka esetekben szerencsés, FRANČULA belátta, hogy ebben az esetben a normálparalelkört nagyjából a $\pm 42^\circ$ -os szélességen érdemes fölvenni a lehető legkisebb torzulás érdekében.

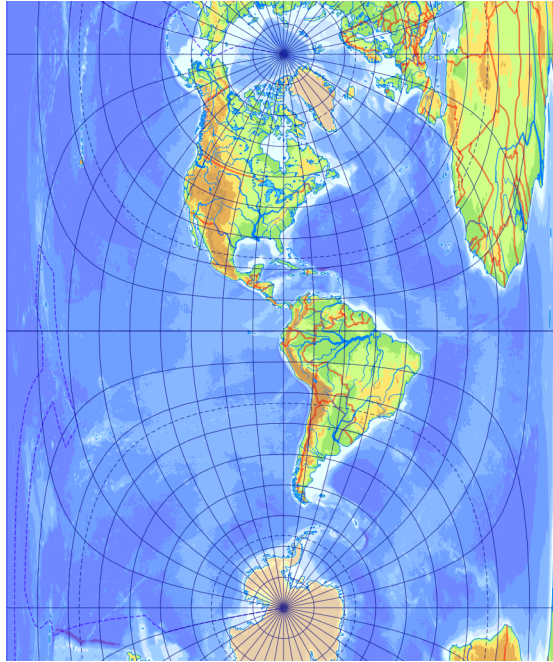
Transzverzális elhelyezésben:

$$x = cR\widehat{\lambda}^* = cR \operatorname{arctg} \frac{\sin \lambda^*}{\cos \lambda^*} = cR \operatorname{arctg} [-\sin(\lambda - \lambda_0) \operatorname{ctg} \varphi]$$

$$y = R\widehat{\varphi}^* = R \operatorname{arcsin}(\cos \varphi \sin \lambda)$$

Ebben az elhelyezésben és $c = 1$ választással CASSINI-vetület néven ismerjük a leképezést (VIII.2. ábra), a neves francia geodéta 1745-ben írta

le. A segédegyenlítő (egy bimeridián) környezetét kedvező torzulásokkal mutatja be, ezért földgömbök készítésénél a fölkasírozandó gömbcikkeket ebben a vetületben készítették.



VIII.2. ábra. CASSINI vetülete Amerikára

VIII.2. MERCATOR vetülete

A szögtartó változat ($h = k$):

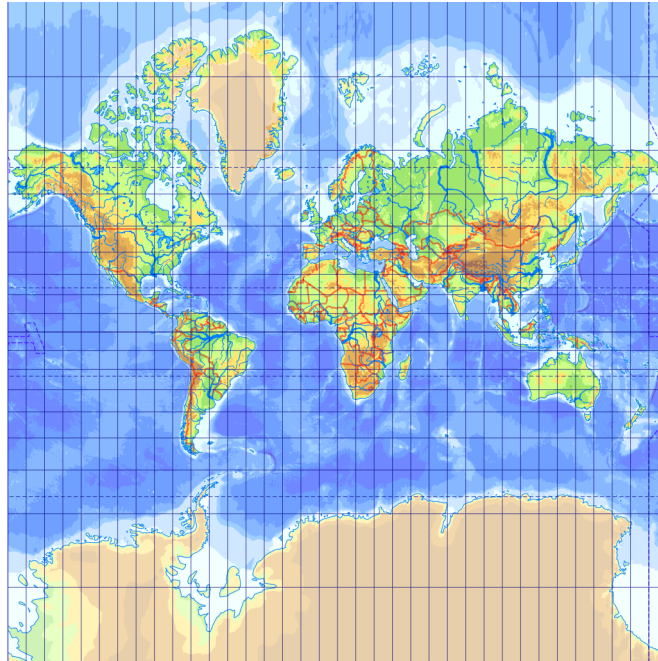
$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{c}{\cos \varphi} \\ \int dy &= cR \int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \\ y &= cR \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + d\end{aligned}$$

Az előbbi számításban az $1/\cos \varphi$ primitív függvénye levezetés nélkül lett behelyettesítve, ezért ezt ellenőrizzük visszaderiválással!

$$\begin{aligned}\left[\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\right]' &= \frac{1}{2 \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2 \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

VIII. További valódi hengervetületek

Ez MERCATOR vetülete (VIII.3. ábra), eredeti nevén KREMER holland térképész 1569-ben alkotta.* A pólusok képei a végtelenben vannak. A vetület az Egyenlítőtől távolodva ritkuló paralellköreiről ismerhető föl. Jelentőségét az adja, hogy a loxodrómákat egyenesre képezi le. E miatt régen igen fontos volt a navigációban: mivel a leképezés egyúttal szögtartó is, bármely két pont között futó loxodróma azimutja közvetlenül leolvasható róla.



VIII.3. ábra. MERCATOR-vetület

Azt hogy a loxodrómák képei egyenesek, igen egyszerű belátni. Az $\alpha = 0^\circ$ azimuthoz tartozó speciális loxodrómák meridiánok, amelyek a valódi hengervetületekben mindig egyenesek. A többi loxodróma a szögtartás miatt minden meridiánt α szög alatt metsz. Az a vonal, amely a párhuzamos egyenesseregként megjelenő meridiánokat konstans szög alatt metszi, csakis egyenes lehet. Ezt akartuk bizonyítani.

Vizsgáljuk meg a vetület torzulásait!

$$h = k = \frac{c}{\cos \varphi}$$

A c konstans a térképet kicsinyíti-nagyítja. $c = 1$ esetén az Egyenlítő torzulásmentes. A redukált változat ($c < 1$) a kedvező torzulású sáv méretét

* ETZLAUB már 1511-ben készített hasonló vetületet, azonban a közelmúlt kartometriai vizsgálatai alapján úgy tűnik, mintha ETZLAUB inkább BRAUN vetületét találta föl jóval korát megelőzően, és valóban MERCATORÉ az első szögtartó hengervetület.

VIII. További valódi hengervetületek

növelheti, hiszen ekkor két torzulásmentes paralelkör keletkezik, közöttük hosszrövidülés, tőlük kifelé hossznövekedés lép föl, de az egységtől való eltérés kisebb, mint $c = 1$ esetén.* Ezt a vetületet is az Egyenlítő mentén hosszan elnyúló területekre érdemes alkalmazni CSÉBISEV tétele alapján, hiszen torzulási izovonalai az Egyenlítővel párhuzamosak.

A vetületnek más alakját érdemes fölírni az elforgatott fokhálózatú esetek kifejezésére:

$$\begin{aligned} y &= cR \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) = cR \ln \sqrt{\frac{2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right)}{2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right)}} = \\ &= \frac{cR}{2} \ln \frac{\sin^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) + \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) + \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) - \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right)}{\cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) + \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) + \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) - \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right)} = \\ &= \frac{cR}{2} \ln \frac{1 - \cos(90^\circ + \varphi^*)}{1 + \cos(90^\circ + \varphi^*)} = \frac{cR}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi^*}{1 - \sin \varphi^*} \end{aligned}$$

Ez azért kedvező, mert $\sin \varphi^*$ -ra már van képletünk, és azt egy az egyben be tudjuk helyettesíteni. Továbbá élünk a $\widehat{\lambda}^* = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \lambda^*$ átalakítással is. A segédpólus φ_o szélessége helyett a segédegyenlítő és segédkezdőmeridián φ_k szélességét fogjuk beírni. Mivel $\varphi_k = 90^\circ - \varphi_o$, ezért $\sin \varphi_o = \cos \varphi_k$ és $\cos \varphi_o = \sin \varphi_k$. Hogy ne fejjel lefelé jelenjen meg a térkép, $\sin \lambda$ és $\cos \lambda$ előjeleit meg kellett fordítani (ábrás magyarázat az alapszakos jegyzetben).

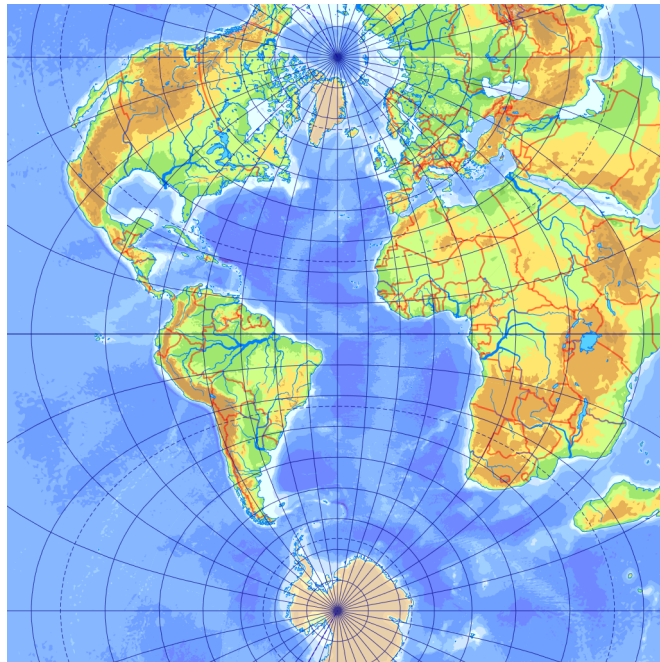
$$\begin{aligned} x &= cR \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \lambda^* = cR \operatorname{arctg} \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_k - \cos \lambda \cos \varphi_k} \\ y &= \frac{cR}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda}{1 - \sin \varphi \cos \varphi_k + \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda} \end{aligned}$$

Az inverz vetületi egyenletek levezetése a C. függelékben olvasható.

A transzverzális MERCATOR-vetület neve GAUSS–SCHREIBER-vetület, bár valójában ezt is LAMBERT vezette le elsőként. Ez meridián mentén fekvő területekre egy kedvező torzulású szögtartó vetületnek számít. Fokhálózata

* Sajnos a vetülettanban elterjedt a MERCATOR-vetület redukált változatát süllyesztett vagy metsző hengervetületnek, a torzulásmentes paralelköröket metszési paralelkörnek nevezni, azonban ez megtévesztő, hiszen ez a vetület *nem perspektív*, levezetéséhez nem használtunk sem metsző hengert, sem centrális vetítést, csupán matekozunk egy jót. Az azonban speciálisan ennél a vetületnél véletlenül igaz, hogy ha a térképet hengerpalást alakjában összecsavarjuk és ráhelyezzük a gömbre, akkor éppen azok a *gömbi* paralelkörök lesznek torzulásmentesek, ahol a hengerpalást belemetsz a gömbbe, de ez csak a matematika játéka.

hasonlít a CASSINI-vetületre, attól úgy különböztethető meg, hogy CASSINI vetületében a meridiánok az Egyenlítőt egyenközűen osztják, míg a GAUSS–SCHREIBER-vetületben az osztások középmeridiántól távolodva fokozatosan ritkulnak (VIII.4. ábra).



VIII.4. ábra. GAUSS–SCHREIBER-vetület az Atlanti-óceánra

VIII.3. Ritkábban előforduló hengervetületek

Bár MERCATOR vetülete nem igazán kedvező világtérképek számára, mégis túlzott használatnak örvend a mai napig. Gondot okoz, hogy a pólusok képe a végtelenben van, hiszen e miatt valamelyik szélességnél a vetületet önkényesen le kell vágni. Igény mutatkozott olyan vetületekre, amelyek emlékeztetnek MERCATOR vetületére, de a pólusokat nem a végtelenbe képezik bele.

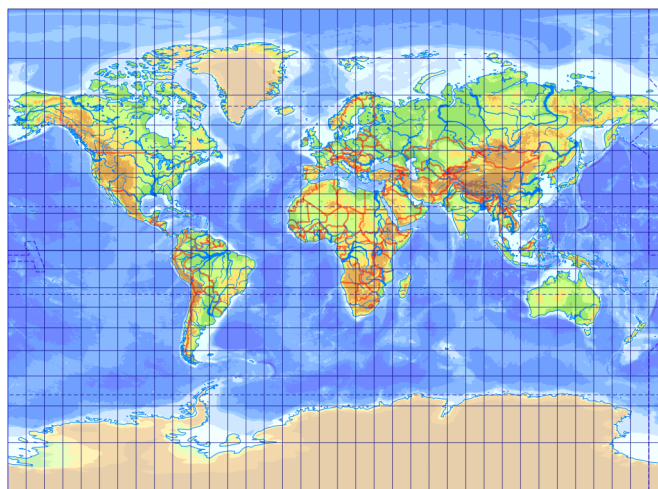
BRAUN a kváziperspektív hengervetületek között találta azt a változatot, amelynek fókuszpontja az Egyenlítő síkjában, a forgástengelytől kétötöd földugárra található. Ez a vetület bár megjelenésében nagyon emlékeztet MERCATOR vetületére, de azzal nem egyezik, hiszen nem szögtartó, és a pólus képe sem a végtelenben található. Ez a kutatás bemutatja, hogy MERCATOR vetülete perspektív leképezésként valóban nem állítható elő.

* Bár ez a megállapítás elég egyértelműnek tűnik, sajnos mégsem az: Néhány éve jelent meg például Németországban „500. Geburtstag Mercator” címen egy postabélyeg, amely ezt a leképezést kváziperspektív vetületnek mutatja be.

VIII. További valódi hengervetületek

Valamivel nagyobb népszerűségnek örvend MILLER 1942-ben publikált vetülete, amely a MERCATOR-vetület ($c = 1$) alkalmazása előtt a szélességet négyötöddel szorozza, majd a leképezést követően a függőleges koordinátát ugyanennyivel osztja:

$$y = \frac{5R}{4} \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{2\varphi}{5} \right)$$



VIII.5. ábra. MILLER-vetület

Ezzel a vetülettel atlaszokban és falitérképeken, ritkán szoktunk találkozni, általános torzulású, a MERCATOR-vetülettel ellentétben a pólusok is ábrázolhatók benne (VIII.5. ábra).

Kilencedik előadás

A forgási ellipszoid hengervetületei

IX.1. Normális elhelyezésű hengervetületek

Az ellipszoid alapfelületű valódi hengervetületekben a meridiánok osztásközét előíró c konstans más alakban jelenik meg. Eszerint:

$$x = c\widehat{\Lambda}$$

Ennek megfelelően a valódi hengervetületek fokhálózat menti torzulásai a következők:

$$h = \frac{1}{M(\Phi)} \frac{dy}{d\Phi}$$
$$k = \frac{c}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

Azaz a $\pm\Phi_n$ szélességek akkor lesznek hossztartók, ha $c = N(\Phi_n) \cos \Phi_n$.

A meridiánban hossztartó hengervetület a $h = 1$ egyenlet megoldásából adódik:

$$y = \int_{0^\circ}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A területtartó hengervetülethez a $hk = 1$ egyenletet oldjuk meg, az integrációs konstánst pedig elhagyhatjuk, mert az csak függőleges eltolást okoz:

$$y = a^2 \frac{1 - e^2}{2c} \left(\frac{\sin \Phi}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)$$

A szögtartó hengervetület esetén a $h = k$ egyenlet megoldásával kapott függvényben az integrációs konstans szintén elhagyható:

$$y = c \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{e/2} \right]$$

IX.2. A CASSINI–SOLDNER-vetület

A CASSINI–SOLDNER-vetület a CASSINI-vetület (transzverzális négyzetes hengervetület) általánosítása forgási ellipszoidra. A CASSINI-vetület a középmeridiánnal egybeeső segédegyenlítőben és a rá merőleges segédmeridiánokban hossztartó. Ezt akarjuk forgási ellipszoidra úgy átültetni, hogy a középmeridián maradjon hossztartó, a rá merőleges geodéziai vonalak képe pedig legyen a középmeridiánra merőleges egyenes, amelyek mentén szintén hossztartás áll fenn. Ezek a feltételek a forgási ellipszoid legnagyobb részén egyértelműen definiálják a vetületet.*

Ezt a leképezést SOLDNER alkotta meg 1810-ben. Az első európai topográfiai térképezéseket a korszerű szögtartó vetületek elterjedése előtt ebben a vetületben dolgozták ki. A II. katonai felmérés vetület nélküli koordinátáit többé-kevésbé jól közelíti. A koordináták gyakorlati számítása történhet ellipszoidi geodéziai főfeladatok megoldásával (lásd alapszakos jegyzet) vagy MUGNIER kis számításigényű közelítő sorfejtésével. Utóbbi csak a középmeridián szűk környezetében megbízható, de mivel jellemzően amúgy is csak itt használható a vetület, a térinformatikai szoftverek jellemzően ezt alkalmazzák.

IX.3. A Web Mercator

Az internetes térképszolgáltatók kedvelt vetülete a *Web Mercator*. Milyen vetület ideális egy nagyítható internetes térképnek?

- Akármelyik részletébe nagyítok bele, Észak mindig fölfelé nézzen. Azaz legyen valódi hengervetület.
- Akármelyik részletet nézem, lokálisan ne legyen észrevehető torzulás. A lokálisan hasonlósági transzformációt mutató térképek szögtartók, tehát marad MERCATOR vetülete.
- Legyenek a leképezés egyenletei alacsony számításigényűek! A gömbi képletek kevesebb erőforrást igényelnek a szerveren, mint a jóval bonyolultabb ellipszoidi képletek.

Az előbbi feltételek miatt a gömbi szögtartó valódi hengervetület mellett döntöttek. Az ellipszoidi adatokat a lehető legkevesebb számítással akarták gömbre vetíteni, ezért gömbvetületnek a Google gömbvetületét ($\varphi = \Phi$ és $\lambda = \Lambda$, lásd alapszakos jegyzet) választották. Mivel ez a gömbvetület általános torzulású, szigorú értelemben a Web Mercator sem szögtartó vetület, de szögtorzulása igen csekély (sehol nem éri el a fél fokot). Az

* Egy a középmeridiánnal átellenes helyen fekvő kis területen ez a definíció ellentmondásos, de mivel ezt a vetületet úgysem fogjuk a középmeridiántól nagy távolságra alkalmazni, ez nem jelent gyakorlati problémát.

igazi szögtartó hengervetület és a Web Mercator között az eltérés 10 km-es nagyságrendű.

A vetületet a 2005-ben induló Google Maps alkalmazta elsőként, mára gyakorlatilag szabványossá vált. Mivel világtérképnek a vetület alkalmatlan, újabban csak nagyobb nagyítási szinten találkozunk a Google Mapsben vele, azonban a háttérben továbbra is ebben a vetületben tárolja az adatokat, és az alternatív térképszolgáltatók a mai napig ebben a vetületben jelenítik meg világtérképeiket is.

IX.4. A GAUSS–KRÜGER-vetület

Készítsünk olyan szögtartó vetületet, amelyik egy kiválasztott középmeridiánt torzulásmentesen képez le, annak környezetét pedig csekély torzulással! Gömb alapfelület esetén a feladat egyszerűen megoldható. Tudjuk, hogy a MERCATOR-vetület szögtartó, és az Egyenlítőt torzulásmentesen képezi le. Forgassuk el a segéd-földrajzkoordinátarendszert transzverzális elhelyezésbe, azaz a segédpólus essék az Egyenlítőre! Ekkor a segédegyenlítő a segédpólustól $\pm 90^\circ$ -ra lévő bimeridiánra esik. A MERCATOR-vetületet a segédkoordinátákra alkalmazva ez a bimeridián torzulásmentes lesz, az egész vetület pedig szögtartó, tehát a feladat megoldása a GAUSS–SCHREIBER-vetület.

Nem ilyen egyszerű a helyzet a forgási ellipszoidon. Mivel a fokhálózat-elforgatást gömbön értelmeztük, át kellene térnünk egy gömbvetülettel a gömbre. Mivel a szögtartást szeretnénk megőrizni, kizárólag a szögtartó gömbvetület jöhetne szóba. Egy szögtartó gömbvetületből és egy transzverzális MERCATOR-vetületből álló kettős leképezés ugyanakkor nem lenne torzulásmentes a középmeridiánban, hiszen a szögtartó gömbvetület csak egy kiválasztott szélességi kört tud torzulásmentesen leképezni. Tehát kizárólag közvetlenül a forgási ellipszoidról síkra képező vetület lehet alkalmas a feladatra.

Talán meglepően hangzik, de ha egy szögtartó vetület torzulásait egyetlen tetszőleges sima görbe mentén meghatározom, az egyértelműen definiálja a teljes vetületet. Jelen esetben a középmeridián hossztartása van előzetesen meghatározva, azaz ez és a szögtartás egyetlen vetületet definiál. A végeredményt ilyen alakban írhatjuk föl:[†]

$$x = A_0(\Phi) + A_2(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^2 + A_4(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^4 + \dots$$

* Ennek oka mélyen az analízisben rejlik. Két komplex számokkal koordinátázott vetületi sík között kizárólag olyan függvény tud szögtartó leképezést létesíteni, amely a komplex számsík egy nyílt részalmazán differenciálható.

† A levezetés igen bonyolult, komplex számsíkon értelmezett elliptikus integrálok sorba fejtésén alapul.

IX. A forgási ellipszoid hengervetületei

$$y = A_1(\Phi)\widehat{\Delta\Lambda} + A_3(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^3 + A_5(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^5 + \dots$$

Az első két tényező képlete egyszerű:

$$A_0(\Phi) = \int_0^\Phi M(\Phi) d\Phi$$

$$A_1(\Phi) = N(\Phi) \cos \Phi$$

Az A_i ($i = 2; 3; \dots$) tényezők képletei rekurzív módon adódnak:

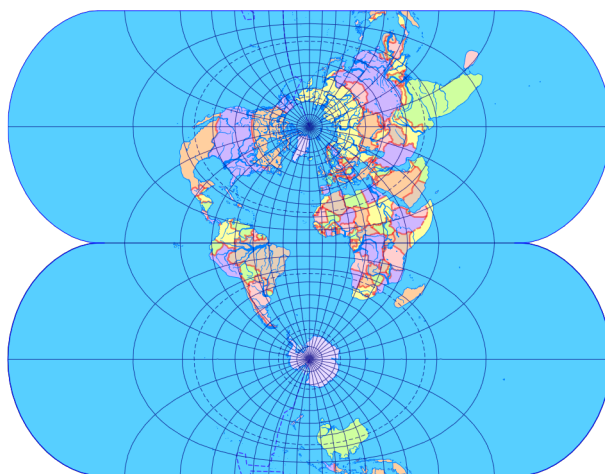
$$A_i = -\frac{1}{i} \frac{N(\Phi) \cos \Phi}{M(\Phi)} \frac{dA_{i-1}}{d\Phi}$$

A vetületet GAUSS alkotta meg, míg a gyakorlati alkalmazáshoz szükséges sorfejtést KRÜGER számolta végig 1912-ben, ezért ezt a leképezést GAUSS–KRÜGER-vetület néven ismerjük. A sorfejtés csak kis $\Delta\Lambda$ esetén konvergál, a középmeridiántól távol LEE elliptikus függvényeket tartalmazó képletei alkalmazhatók. A népszerű térinformatikai szoftverek sorfejtéssel számolnak, ezért a leképezést csak a középmeridián kb. 10° -os környezetében tudják helyesen megjeleníteni, ne bízzunk vakon a távolabbi tartományok képében!

A leképezés bár nagyon hasonlít a transzverzális szögtartó hengervetületre, valójában nem teljesen az. A szögtartó hengervetület például a gömb két átellenes pontját a végtelenbe képezi bele, a GAUSS–KRÜGER-vetület ezzel szemben a teljes ellipszoidot egy véges nagyságú alakzatban jeleníti meg (IX.1. ábra). Bár szigorú matematikai szempontból ezt nem tehetnénk meg, a származtatás miatt mégis a hengervetületek családjába szoktuk sorolni.

Ezt a leképezést a középmeridián szűk környezetének ábrázolására használjuk. Topográfiai célokra a -180° -os ellenmeridiántól kiindulva 6° -os ellipszoidi kétszögekre, más néven *zónákra* osztjuk a Földet, amelyeket arab számokkal jelölünk.

A Varsói Szerződés hivatalos vetülete a GAUSS–KRÜGER vetületi rendszer volt. Alapfelületnek a KRASZOVSKIJ-ellipszoid felhasználásával alkotott S42 (más néven Pulkovo) dátumot választották. Magyarországon a szovjet megszállás kezdetétől a NATO-csatlakozásig a katonai térképészet (rövid



IX.1. ábra. A WGS84 ellipszoid GAUSS–KRÜGER-vetülete

ideig a polgári is) ezt a rendszert alkalmazta. A magyar készítésű térképeken az 1942. évi koordináta-rendszer megírás szerepel.* Geodéziai célokra több ország is (többnyire Kelet-Európában, de Ausztria, Németország és a délszláv országok is) alkalmazza ezt a vetületet, azonban a középmeridiántól távolodva a torzulások gyorsan növekednek, ezért 2°-os vagy 3°-os zónaszélesség használatával is találkozunk. Kissé módosított változata a brit és ír térképészet hivatalos vetülete.

A másik nagy nemzetközi szervezet, a NATO is kifejlesztett egy saját vetületi rendszert, mely két vetületfajta alkalmaz: a d. sz. 80° és az é. sz. 84° között az *Univerzális Transzverzális Mercator* (UTM), amely nem MERCATOR-vetület és a pólusoknál az *Univerzális Poláris Sztereografikus* (UPS), amely nem sztereografikus leképezés (lásd VI.4. fejezet).

* A vetület bevezetése Magyarországon nem volt zökkenőmentes: Az érkező szovjet parancsnokok elvárták a honvédségtől az országterület azonnali gyorsfelmérését és térképezését GAUSS–KRÜGER-vetületben. Amint a katonák átadták az első szelvényeket a Tiszahát térségéről, a szovjetek azonnal megpróbálták összeilleszteni a saját, Kárpátalját ábrázoló térképükkel, de a szelvények kb. 100 m hézaggal illeszkedtek! Természetesen azonnal kitört a botrány, és a szovjetek szabotázzsal gyanúsították meg a magyarokat. Valóságban persze csak annyi történt, hogy a szovjetek nem mondták meg, hogy mégis milyen alapelületet használnak. A magyarok a II. világháború alatt már alkalmazták GAUSS–KRÜGER-vetületet, mert a német hadsereg ezt használta valamennyi hadszínterén. A magyarok örültek, hiszen az alappontokat már korábban átszámították ebbe a rendszerbe. Igen ám, de a németek ekkor ezt a leképezést BESSEL-ellipszoidra definiálták RDN₁₉₄₀ dátummal! A szovjeteknek persze utána magyarázzkodhattak a KRASZOVSKIJ- és a BESSEL-ellipszoid közötti eltérésről, meg dátumtranszformációról, az illetékes szovjet elvtársak kiválóan értettek ám mindenhez... Maradjon ez a történet emlékeztetőül, hogy geodéziai dátum nélkül sohasem teljes egy vetület megadása!

Az UTM-vetület valójában a GAUSS–KRÜGER vetületi rendszer képleteit alkalmazza WGS84 ellipszoidra, de a kedvezőbb torzulások érdekében egy 0,9996-szoros kicsinyítéssel. Ennek következtében a torzulások kedvezőbben oszlanak el: két, a középmeridiánnal közel párhuzamos vonal lesz torzulásmentes, közöttük hosszrövidülés, azokon kívül hossznövekedés tapasztalható. A dél-európai és a skandináv államok topográfiai térképei kivétel nélkül ebben a vetületben készülnek. A magyar katonai topográfia a NATO-csatlakozás ('90-es évek) óta a 33-as és 34-es zónák UTM-vetületeit használja, amelyeket a Veszprém közelében haladó 18°-os meridián határol.

IX.5. ROSENMUND és HOTINE vetületei

A sztereografikus vetülethez hasonlóan MERCATOR vetületét is gyakran alkalmazzák ferdetengelyű elhelyezésben forgási ellipszoid alapfelülettel. Közvetlen ellipszoidról síkra képező egyenletekkel nem rendelkezünk, mert nem lehetséges ellipszoidi szögtartó vetületben egy általános geodéziái vonalat hossztartó egyenesként megjeleníteni. Ezért kettős leképezéshez folyamodunk.

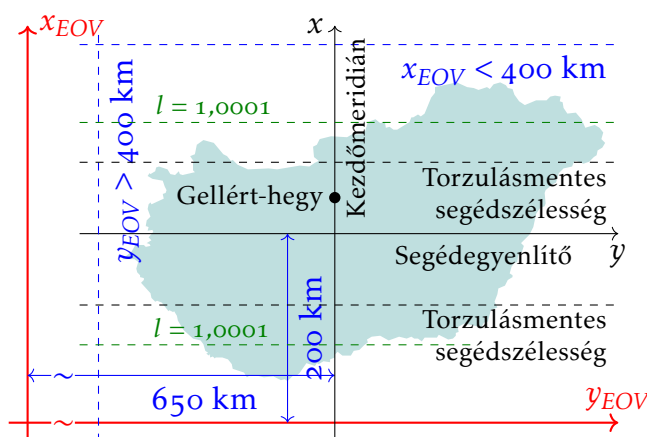
A svájci ROSENMUND 1903-ban fejlesztette ki a következő vetületet: Első lépésben a forgási ellipszoidról gömbre képezett a GAUSS-féle igen kis torzulású szögtartó gömbvetülettel. A hossztartó parallelkör a berni csillagvizsgáló szélessége. Második lépésben a gömbi ferdetengelyű MERCATOR-vetületet alkalmazzuk ($c = 1$, azaz a segédegyenlítő képe hossztartó), a segédegyenlítő és a kezdő-segédmeridián gömbi metszéspontja újfent a berni csillagvizsgáló. A modern svájci topográfiai vetület ettől abban különbözik, hogy arányos kicsinyítést és a negatív koordináták és a koordinátatengelyek fölcserélhetősége ellen eltolásokat alkalmaznak. Mivel minden transzformáció szögtartó volt, azok egymásutánja is szögtartó leképezés.

Ez a leképezés nagyon hasonlít az *Egységes Országos Vetületre (EOV)*, amely:

- IUGG67-es ellipszoidon nyugvó HD72-es dátumot használ.
- A GAUSS-gömbvetület hossztartó parallelkörének ellipszoidi szélessége $\Phi_n = 47^\circ 10'$.
- A segédegyenlítő gömbi szélessége $47^\circ 6'$.
- A hengervetületi koordinátákat 0,999 93-del beszorozták, így két torzulásmentes segédszélesség keletkezett. A torzulások eloszlása így kedvezőbb: a két torzulásmentes vonal között hosszrövidülés, azokon kívül hossznövekedés lép föl. A megkívánt 1 : 10 000 értéknél a hossztorzulás csak Torna és Zemplén környékén, valamint az Ormánságban lett nagyobb.
- A koordinátatengelyek északkeleti tájékozásúak. A negatív előjelek elkerülése érdekében déli irányban 200 km-rel, nyugati irányban

650 km-rel el lettek tolva. Így Magyarország területén a függőleges koordináták 400 km-nél kisebbek, a vízszintesek ettől mindig nagyobbak (IX.2. ábra).

Az EOVS Magyarország hivatalos vetülete: A katonai topográfiai és geológiai térképek kivételével gyakorlatilag minden magyarországi térképi adatbázis ezt a rendszert alkalmazza. Legfontosabb alkalmazása az EOVS, *Egységes Országos Térképrendszer*, amely egy ebben a koordináta-rendszerben készített, Magyarország teljes területét lefedő topográfiai térképmű.



IX.2. ábra. Egységes Országos Vetület

A népszerű nyílt forrású térinformatikai csomagok EOVS-implemmentációja nem pontos, mert azt ROSENEMUND vetületével közelíti. Mint láttuk, ennek egyetlen eltérése, hogy a GAUSS-gömb hossztartó paralellköre nem paramétrezhető, hanem az a segédegyenlítő szélességével esik egybe. A hiba cm-es nagyságrendű.

HOTINE brit geodéta 1946-ban GAUSS-gömb helyett egy retekhez hasonló alakú forgástejtet (*aposzféra*) használt közbenső felületnek a kettős szög-tartó vetítéshez. Ez a felület konstans szorzatgörbületű, azaz a retek és a gömb között torzulásmentes vetület készíthető (I.1. fejezet). A vetület az aposzféra és a sík között olyan szög-tartó leképezést alkalmaz, amely az aposzféra egy geodéziai vonalát hossz-tartó egyenesre képezi le. HOTINE és ROSENEMUND képletei elméletileg tökéletesen ugyanazt a vetületet adják, azonban az eltérő levezetés miatt HOTINE vetületét másképp kell paramétrezni. Ezt a vetületet Malajzia ábrázolására dolgozták ki, amely két ferde geodéziai vonal mentén helyezkedik el. Ez a vetület is alkalmazható az EOVS közelítésére, ha ROSENEMUND vetületét a szoftver nem támogatja.

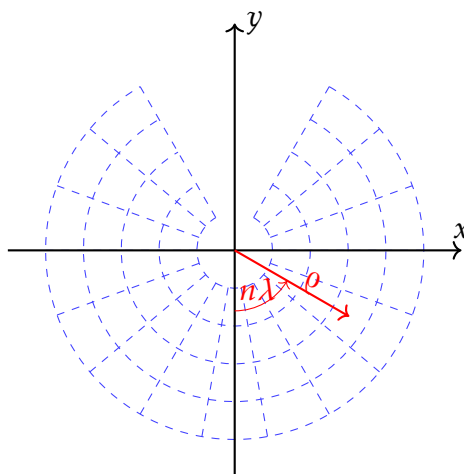
Tizedik előadás

Általános torzulású kúpvetületek

X.1. Valódi kúpvetületek

A valódi kúpvetületekben a meridiánok képei egy pontba tartó egyenesek, a paralellkörök képei rájuk merőleges, koncentrikus körívek. Az egyenközűség miatt a meridiánok által bezárt szög egyenes arányban van a hosszúságkülönbséggel. E miatt a valódi kúpvetületek a valódi síkvetületektől csak abban különböznek, hogy a polárszög $n\lambda$ (X.1. ábra). A meridiánok képeinek hajlásszögét szabályozó $0 < n < 1$ sugárhajlás mellett továbbra is szabadon választhatjuk meg a szigorúan monoton növekvő ρ sugárfüggvényt. A polárkoordináták és a derékszögűek közti átszámítás:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin(n\lambda) \\ y &= -\rho \cos(n\lambda)\end{aligned}$$



X.1. ábra. Polárkoordináták valódi kúpvetületekben

A valódi kúpvetület *póluspontos*, ha $\beta = 0$ helyen $\rho = 0$, egyébként *pólusvonalas*. A fokhálózat menti torzulások számítása során használjuk az V.1. fejezetben talált összefüggést, amely szerint $d\rho/d\varphi = -d\rho/d\beta$:

$$h = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{\left(-\frac{d\rho}{d\beta}\right)^2 \sin^2(n\lambda) + \left(-\frac{d\rho}{d\beta}\right)^2 \cos^2(n\lambda)}}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta}$$

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\rho^2 n^2 \cos^2(n\lambda) + \rho^2 n^2 \sin^2(n\lambda)}}{R \sin \beta} = \frac{\rho n}{R \sin \beta}$$

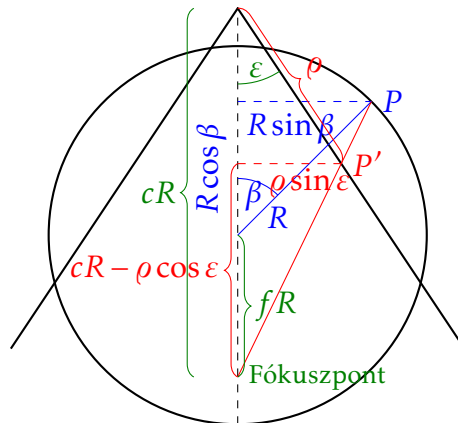
X.2. Perspektív kúpvetület

A perspektív kúpvetületek levezetéséhez tekintsük a X.2. ábrát! Jelöljük a kúp nyílásszögének felét ε -nal! Ekkor látható, hogy a paralellkörök képének kiterítés előtti sugara a ρ átfogójú derékszögű háromszögből $\rho \sin \varepsilon$. Azaz a kúppaláston a paralellkör képének kerülete $2\pi\rho \sin \varepsilon$. A kúppalástit kiterítve a körívvé képezett szélességi kör sugara ρ lesz, nyílásszöge pedig $n2\pi$. Mivel a kúppalástit kiterítése izometria, a körív ugyanolyan hosszú, mint az eredeti összecsavart kúpfelületi kör kerülete volt:

$$n2\pi\rho = 2\pi\rho \sin \varepsilon$$

$$n = \sin \varepsilon$$

A perspektív kúpvetületekben tehát az n sugárhajlás szemléletes jelentése a kúp félnyílásszögének szinusza.



X.2. ábra. Perspektív kúpvetületek elve

Legyen szokás szerint a fókuszpont a gömb középpontjától fR távolságra, míg a kúp csúcsát helyezzük a fókuszponttól cR távolságra! A piros

X. Általános torzulású kúpvetületek

kapoccsal jelzett távolság és a ρ átfogójú derékszögű háromszög függőleges befogója ($\rho \cos \varepsilon$) együtt éppen cR -et ad ki, amelyből a kapoccsal kiemelt távolság magától értetődően $cR - \rho \cos \varepsilon$. A két piros átfogóhoz tartozó derékszögű háromszög hasonló, oldalaik aránya egymással megegyezik:

$$\frac{\rho \sin \varepsilon}{R \sin \beta} = \frac{cR - \rho \cos \varepsilon}{R(f + \cos \beta)}$$

$$\left[\frac{\sin \varepsilon}{R \sin \beta} + \frac{\cos \varepsilon}{R(f + \cos \beta)} \right] \rho = \frac{c}{f + \cos \beta}$$

$$\frac{f \sin \varepsilon + \sin \varepsilon \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \beta}{R \sin \beta (f + \cos \beta)} \rho = \frac{c}{f + \cos \beta}$$

$$\rho = \frac{cR \sin \beta}{f \sin \varepsilon + \sin(\varepsilon + \beta)}$$

A perspektív kúpvetületek még a perspektív hengervetületeknél is ritkábbak. Ennek oka, hogy általános torzulásúak ($h \neq k$ és $hk \neq 1$), torzulásaik igen kedvezőtlenek (X.3. ábra). A perspektív kúpvetületek póluspontosak, egyetlen hasznuk, hogy érintő elhelyezésű változataik a jövő félévben a polikónikus vetületek szerkesztésének alapját fogják biztosítani.[†]

Tekintsük a X.4. ábrát! A derékszögű háromszög két hegyesszöge egymásnak pótszögei, ezért $\varepsilon = 90^\circ - \beta_n$. Továbbá β_n tangensét fölírva az érintő szélesség ρ_n sugara is számítható:

$$\rho_n = R \operatorname{tg} \beta_n$$

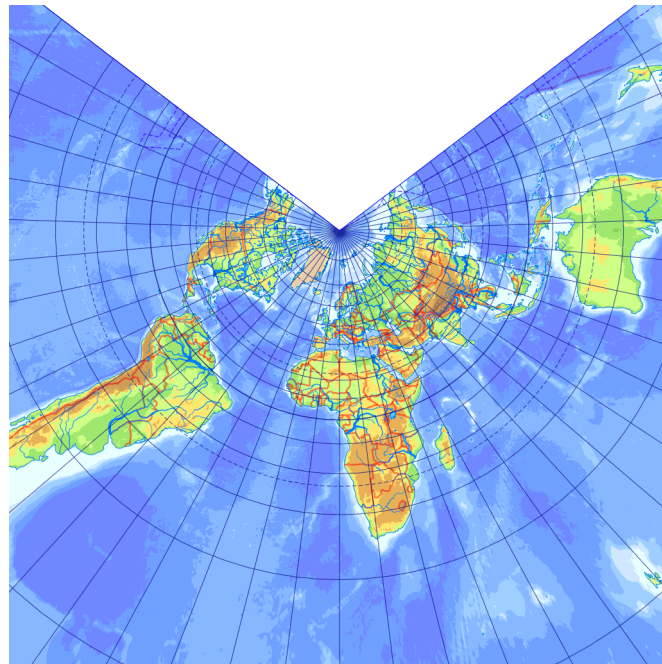
$$n = \sin \varepsilon = \cos \beta_n$$

A fokhálózat menti hossztorzulások felírása után belátható, hogy az érintő paralelkörön $h = k = 1$, azaz az érintő szélesség torzulásmentes.^{**} Meglepő módon azt fogjuk tapasztalni, hogy ez a három tulajdonság az egy paralelkörben hossztartó nemperspektív kúpvetületeknél is visszaköszön.

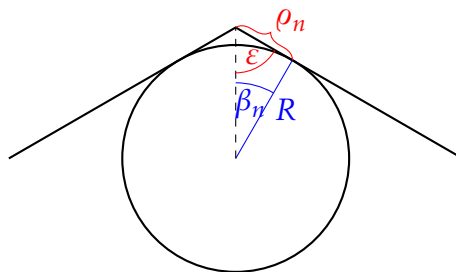
* Kivéve az $f = -1$ esetet.

† A valódi hengervetületekhez hasonlóan a valódi kúpvetületek között is találunk kváziperspektív vetületeket. Ezekben a vetítési középpont azon a félegyenesen található, amely merőleges a kúp alkotójára és átmegy a gömb középpontján. A gömb átellenes pontjából vetíthetünk például a sztereografikus vetülethez hasonló módon, míg végtelen távoból párhuzamos vetítésugarakkal az ortografikus vetületre emlékeztetve. (Ez utóbbi nem azonos a paralelkörben hossztartó kúpvetülettel, mert a párhuzamos vetítésugarak ezúttal nem függőlegesek, hanem ferdék!) A kváziperspektív kúpvetületek pólusvonalasak, speciális torzulású nincsen közöttük, ezért gyakorlati hasznuk ezeknek a vetületeknek sincs.

** Ez nem triviális állítás, metsző perspektív kúpvetületeknél a metsző szélességekre nem is igaz.



X.3. ábra. Perspektív kúpvetület



X.4. ábra. Érintő perspektív kúpvetület

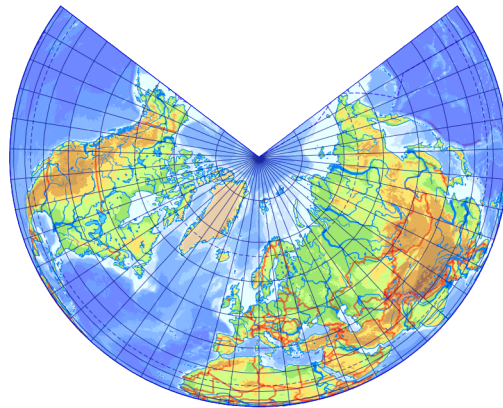
X.3. Parallelkörben hossztartó kúpvetület

Helyezzük a vetítés középpontját végtelen távol, azaz legyenek vetítő-sugarak párhuzamos függőleges egyenesek! Ekkor $f \rightarrow \infty$ és $c \rightarrow \infty$. A sugárfüggvény nevezőjében a végtelen nagy számhoz hiába adunk $\sin(\varepsilon + \beta)$ -t, az elhanyagolható. Mivel f és c egyformán végtelen, lehet velük egyszerűsíteni. A kúp függőleges elhelyezése a párhuzamos vetítés miatt nem változtatja a vetület képét, ezért az általánosság föladása nélkül érintő elhelyezésűnek tekinthetjük. Ekkor alkalmazva a $\sin \varepsilon = \cos \beta_n$ összefüg-

gést:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{R \sin \beta}{\cos \beta_n} \\ n &= \cos \beta_n \\ h &= \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_n} \\ k &= \frac{\rho n}{R \sin \beta} = \frac{R \sin \beta \cos \beta_n}{\cos \beta_n R \sin \beta} = 1\end{aligned}$$

Mivel $k = 1$, a vetület paralelkörben hossztartó. Félgömbnél nagyobb terület ábrázolására alkalmatlan. Az elméleti érdekességen felül gyakorlati haszna nincs (X.5. ábra).



X.5. ábra. Parallelkörben hossztartó kúpvetület

X.4. DE L'ISLE vetülete

A nemperspektív kúpvetületek közül a meridiánban hossztartó ($h = 1$) kúpvetület levezetése egyszerű:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} &= 1 \\ \int d\rho &= R \int d\beta \\ \rho &= R\widehat{\beta} + Rd\end{aligned}$$

A d integrációs konstans a pólusvonal sugarát jellemzi, és a két paraméter $(n; d)$ egy vagy két hossztartó paralelkört enged meg. Legyen β_1 és β_2

hossztartó! Erre a két parallelkörre a $k = 1$ egyenletet fölírva:

$$\frac{R(\widehat{\beta}_{1,2} + d)n}{R \sin \beta_{1,2}} = 1$$

Azaz

$$\begin{aligned} n(\widehat{\beta}_1 + d) &= \sin \beta_1 \\ n(\widehat{\beta}_2 + d) &= \sin \beta_2 \end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$\begin{aligned} n(\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2) &= \sin \beta_1 - \sin \beta_2 \\ n &= \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta_2}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2} \end{aligned}$$

A két egyenletet egymással elosztva:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\beta}_1 + d}{\widehat{\beta}_2 + d} &= \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \\ (\widehat{\beta}_1 + d) \sin \beta_2 &= (\widehat{\beta}_2 + d) \sin \beta_1 \\ \widehat{\beta}_1 \sin \beta_2 - \widehat{\beta}_2 \sin \beta_1 &= d(\sin \beta_1 - \sin \beta_2) \\ d &= \frac{\widehat{\beta}_1 \sin \beta_2 - \widehat{\beta}_2 \sin \beta_1}{\sin \beta_1 - \sin \beta_2} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a hossztartó szélességeken $k = 1$, míg mindenütt $h = 1$, azaz a hossztartó szélességek egyúttal torzulásmentes normálparallelkörök ($h = k = 1$). A további szélességeken:

$$k = \frac{\rho n}{R \sin \beta} = \frac{(\widehat{\beta} + d)n}{\sin \beta}$$

Fönti képletbe $\beta = 0$ helyettesítés mellett megkapjuk, hogy a torzulás a pólusban végtelen. Kivétel, ha $d = 0$ (a vetület póluspontos), mert ekkor $\widehat{\beta}/\sin \beta$ típusú határértéket kapunk, amely 1-hez tart, így $k = n$. A déli pólusban ($\beta = 180^\circ$) a kifejezés szintén végtelenbe divergál, tehát valahol k -nak szükségszerűen minimuma van, és a pólusok felé növekszik. Ha két hossztartó parallelkörünk van, akkor ebből következően közöttük $k < 1$, míg tőlük kifelé $k > 1$.

X. Általános torzulású kúpvetületek

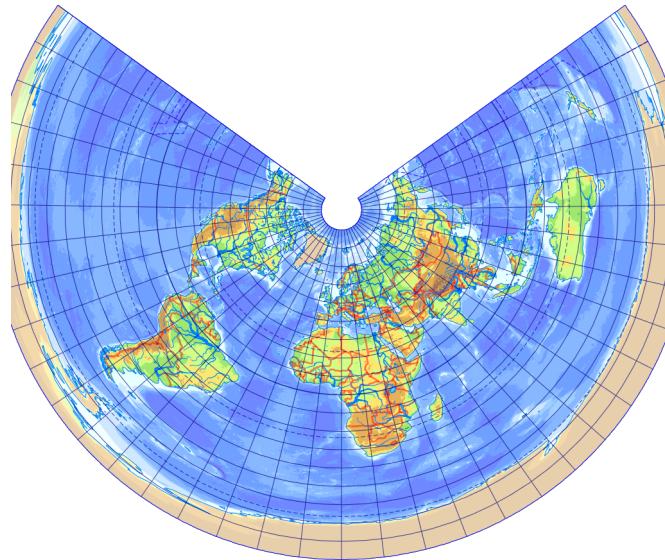
A leképezést DE L'ISLE vetületének nevezzük (X.6. ábra), bár nem ő volt az első alkalmazója. Ez a leképezés szélességi kör mentén fekvő területre a legkedvezőbb torzulású vetületek közé tartozik (torzulási izovonalai a szélességi körök mentén futnak), ennél kedvezőbb torzulású kúpvetületet a számítások bonyolultsága miatt nem éri meg alkalmazni. A vetület a meridiánok egyenletes osztásközéről ismerhető fel. Leginkább közepes szélességeken fekvő területekre alkalmazzák, de elméletileg semmi akadály, hogy a két hossztartó paralelkör különböző féltekén legyen. A hossztartó paralelköröket úgy érdemes fölvenni, hogy azok inkább a terület széleire, mint a közepébe essenek közel.

A vetület speciális eseteit kapjuk $\beta_{1,2}$ különleges megválasztásával. Ha $\beta_2 = 0$, azaz a pólusban vesszük föl, akkor az egyenletekbe visszahelyettesítve:

$$n = \frac{\sin \beta_1 - 0}{\widehat{\beta}_1 - 0} = \frac{\sin \beta_1}{\widehat{\beta}_1}$$

$$d = \frac{\widehat{\beta}_1 \cdot 0 - 0 \cdot \sin \beta_1}{\sin \beta_1 - 0} = 0$$

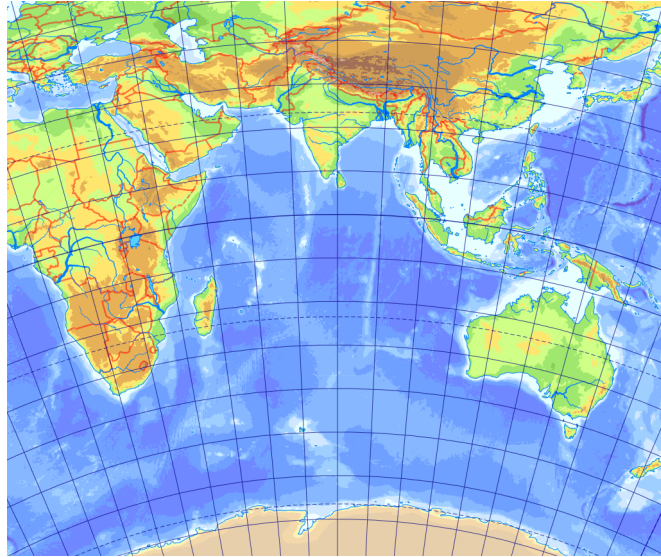
Így tehát póluspontos kúpvetületet kapunk. Érdekes módon ezzel egy időben a pólus nem lesz ettől torzulásmentes: bár $h = 1$, de $k = n$ adódott a póluspontban. Az ebből adódó szögtorzulás szabad szemmel látszik: a meridiánok nem a valós szögeket zárják be a póluspontban.



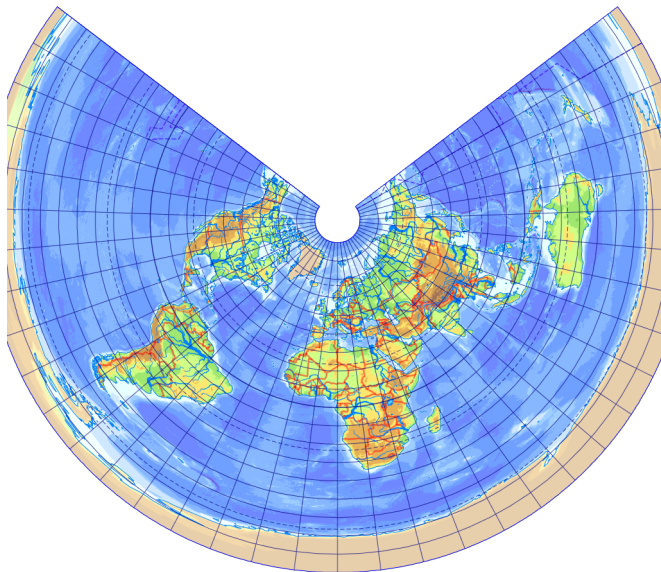
a) DE L'ISLE-vetület

X.6. ábra. Meridiánban hossztartó kúpvetületek

X. Általános torzulású kúpvetületek



b) *DE L'ISLE*-vetület az Indiai-óceánra



c) *PTOLEMAIOSZ I.* vetülete

X.6. ábra. (folytatás)

X. Általános torzulású kúpvetületek

Vizsgáljuk meg azt a változatot, ahol a két hossztartó paralelkör egybeesik ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_n$). Mivel a közvetlen behelyettesítés o/o alakú osztásokra vezet, ezért csak β_2 helyére írunk β_n -t, β_1 helyére átmenetileg $\beta_n + \Delta\beta$ -t helyettesítünk, majd $\Delta\beta$ -val nullához tartunk, és alkalmazzuk a L'HÔPITAL-szabályt:

$$n = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta_n + \Delta\beta) - \sin \beta_n}{(\widehat{\beta_n + \Delta\beta}) - \widehat{\beta_n}} = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta_n + \Delta\beta)}{1} = \cos \beta_n$$

$$d = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{(\widehat{\beta_n + \Delta\beta}) \sin \beta_n - \widehat{\beta_n} \sin(\beta_n + \Delta\beta)}{\sin(\beta_n + \Delta\beta) - \sin \beta_n} =$$

$$= \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta_n - \widehat{\beta_n} \cos(\beta_n + \Delta\beta)}{\cos(\beta_n + \Delta\beta)} = \operatorname{tg} \beta_n - \widehat{\beta_n}$$

Előbbi képletekből látszik, hogy az érintő perspektív kúpvetületekhez hasonlóan a hossztartó szélesség sugara éppen $R \operatorname{tg} \beta_n$ és a sugárhajlás is $\cos \beta_n$. Ezt a leképezést PTOLEMAIOSZ I. vetületének^{*} hívjuk.

Ha mindkét hossztartó paralelkörrel a pólusba tartunk ($\beta_n = 0$), akkor a fenti képletekből $n = 1$ és $d = 0$, azaz $\rho = R\widehat{\beta}$ adódik, tehát POSTEL síkvetületét kapjuk, amelyben a pólus már valóban torzulásmentes.

Izgalmas megvizsgálni a $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ esetet. Ekkor $n = 0$ adódik, azaz a meridiánok képei párhuzamosak. Emellett (mivel d nevezője nulla, míg számlálója nem nulla) $d \rightarrow \infty$, azaz a paralelkörök végtelen sugarúak, tehát párhuzamos egyenesek. Végző soron a meridiánban hossztartó valódi hengervetületet kaptuk meg. Ez mutatja, hogy a kúpvetületek átmenetet képeznek a sík- és hengervetületek között.

^{*} A térképtudományt megalapozó II. században írt *Geografika* című művében találkozunk ezzel a vetülettel.

Tizenegyedik előadás

Speciális torzulású kúpvetületek

XI.1. ALBERS vetülete

Először a területtartó ($hk = 1$) kúpvetületet számítjuk. Az integrációs konstans legyen $R^2/n + R^2 d/2n$ alakú!

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \frac{\rho n}{R \sin \beta} &= 1 \\ \int \rho d\rho &= \frac{R^2}{n} \int \sin \beta d\beta \\ \frac{\rho^2}{2} &= -\frac{R^2}{n} \cos \beta + \frac{R^2}{n} + \frac{R^2 d}{2n} \\ \rho^2 &= \frac{R^2}{n} \left(-2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{2d}{2} \right) \\ \rho &= \frac{R}{\sqrt{n}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + d}\end{aligned}$$

A d konstans a pólusvonal sugarát határozza meg, hiszen $\beta = 0$ helyettesítés esetén $\rho = R\sqrt{d/n}$. n és d megfelelő beállítással egy vagy két tetszőlegesen választott szélességi kör mentén teszi lehetővé a hossztartást*. Legyen a két hossztartó szélességünk β_1 és β_2 ! Ezeken a szélességeken $k = 1$, tehát $k^2 = 1$. ρ^2 képletét nem a végleges megoldásból, hanem a fönti levezetés harmadik sorából veszem.

$$\begin{aligned}\frac{\rho^2 n^2}{R^2 \sin^2 \beta_{1,2}} &= 1 \\ 2 \left(-\frac{R^2}{n} \cos \beta_{1,2} + \frac{R^2}{n} + \frac{R^2 d}{2n} \right) n^2 &= R^2 \sin^2 \beta_{1,2}\end{aligned}$$

* A szakirodalom a két parallelkörben hossztartó kúpvetületeket gyakran metsző vagy süllyesztett kúpvetületnek hívja, és gyönyörű ábrákat találunk a gömböt két helyen metsző kúpról. Ez igen szemléletes magyarázat, csak egy hibája van: nem igaz. Az ilyen kúpvetületeket kúppalásttá összezsavarva véletlenül sem oda fognak esni a torzulásmentes szélességek, ahol a kúp metszi a gömböt.

XI. Speciális torzulású kúpvetületek

Azaz R^2 -tel való egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned}n(2 - 2 \cos \beta_1 + d) &= \sin^2 \beta_1 \\n(2 - 2 \cos \beta_2 + d) &= \sin^2 \beta_2\end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$\begin{aligned}n(2 \cos \beta_2 - 2 \cos \beta_1) &= \sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_2 \\n &= \frac{1 - \cos^2 \beta_1 - 1 + \cos^2 \beta_2}{2(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)} = \\&= \frac{(\cos \beta_2 + \cos \beta_1)(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)}{2(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)} = \frac{\cos \beta_1 + \cos \beta_2}{2}\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer első egyenlete:

$$\begin{aligned}n(2 - 2 \cos \beta_1) + nd &= \sin^2 \beta_1 \\nd &= \sin^2 \beta_1 - \frac{2(1 - \cos \beta_1)(\cos \beta_1 + \cos \beta_2)}{2}\end{aligned}$$

Mielőtt tovább számolnánk, vegyük észre, hogy:

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Így már könnyen kijön a végeredmény:

$$\begin{aligned}d &= \frac{\sin^2 \beta_1 - (1 - \cos \beta_1)(\cos \beta_1 + \cos \beta_2)}{n} = \\&= \frac{\sin^2 \beta_1 - (1 - \cos \beta_1)\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta_2}{2}\right)}{n} = \\&= \frac{\sin^2 \beta_1 - 2\left(1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2}\right)\left(1 - \sin^2 \frac{\beta_1}{2} - \sin^2 \frac{\beta_2}{2}\right)}{n} = \\&= \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} - 4 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta_1}{2} - \sin^2 \frac{\beta_2}{2}\right)}{n} = \\&= \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta_1}{2} - \cos^2 \frac{\beta_1}{2} + \sin^2 \frac{\beta_2}{2}\right)}{n} = \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2}}{n}\end{aligned}$$

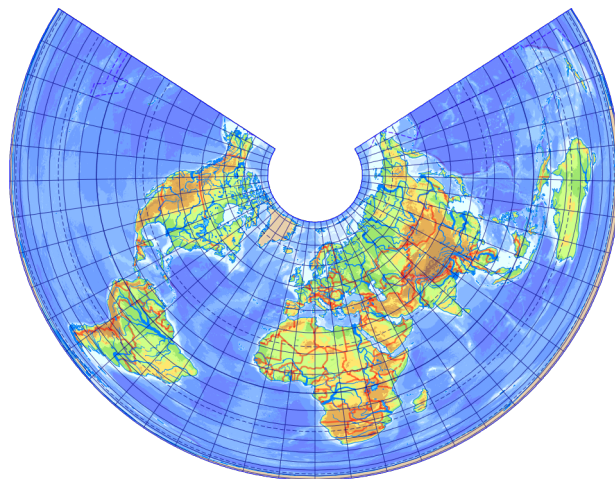
XI. Speciális torzulású kúpvetületek

Ezt a leképezést ALBERS kúpvetületének (XI.1. ábra) nevezzük. Bár már 1805-ben publikálta a vetületet, egészen a XX. század közepéig alig találkozzunk vele. Népszerűsége jelenleg felívelőben van, különösen az USA-ban kedvelik. Vizsgáljuk meg a torzulásokat!

$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{\frac{4 \cdot 2}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{2\sqrt{n} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + d}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{n} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + d}}$$

$$k = \frac{\rho n}{R \sin \beta} = \frac{\sqrt{n}}{\sin \beta} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + d}$$

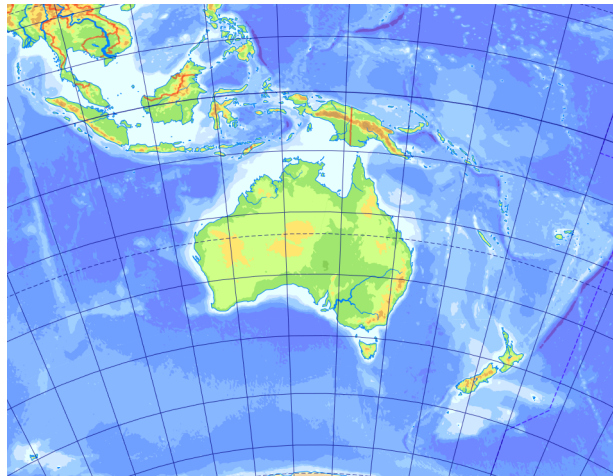
A két hossztartó paralelkör ezúttal is normálparalel, mert itt $k = 1$ és a területtartás okán $h = 1/k = 1$. A pólusokban h számlálója és k nevezője nulla, ezért előbbi nullához, utóbbi végtelenhez tart. Ismét kivétel a $d = 0$ eset, mert ekkor $2 \sin \beta/2$ -vel lehet egyszerűsíteni, így az északi pólusban $h = 1/\sqrt{n}$ és $k = \sqrt{n}$ adódik. Ettől a póluspontos esettől eltekintve belátható, hogy mivel a pólusokban k végtelen nagy, és a vetületnek két normálparalelköre van, ezért a normálparalelköröktől kifelé $h < 1$ és $k > 1$, tehát a vetület a kelet–nyugati irányban nyújt. Ezzel szemben a két normálparalel között $h > 1$ és $k < 1$, tehát itt a nyújtás észak–dél irányú. Ez segít a vetület fölismerésében: a térkép közepén a szélességi körök ritkábban osztják a hosszúsági köröket, mint a térkép aljánál és tetejénél.



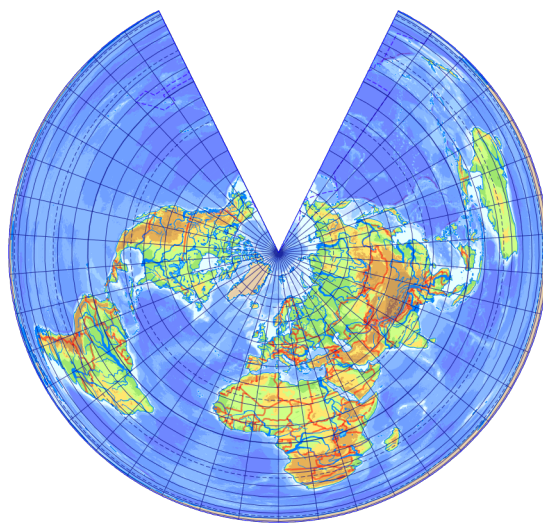
a) ALBERS-vetület

XI.1. ábra. Területtartó kúpvetületek

XI. Speciális torzulású kúpvetületek



b) *ALBERS-vetület Ausztráliára*



c) *LAMBERT-kúpvetület*

XI.1. ábra. *(folytatás)*

XI. Speciális torzulású kúpvetületek

Ezúttal is érdekesek lesznek a speciális esetek. Ha $\beta_2 = 0$, azaz a pólusban van, akkor:

$$n = \frac{\cos \beta_1 + 1}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\beta_1}{2} - \sin^2 \frac{\beta_1}{2} + \sin^2 \frac{\beta_1}{2} + \cos^2 \frac{\beta_1}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\beta_1}{2}$$

$$d = \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cdot 0}{n} = 0$$

Ezt a póluspontos ($d = 0$) területtartó kúpvetületet LAMBERT kúpvetületének nevezzük, és már 1772 óta ismert. Várakozásunkkal ellentétben nincs torzulásmentesség a póluspontban, mert $h = 1/\sqrt{n}$ és $k = \sqrt{n}$, tehát szögtorzulás van jelen. Ez logikus, hiszen a meridiánok képei nem tudnak valós szögükkel a pólusba érkezni.

Készítsünk most olyan pólusvonalas területtartó kúpvetületet, amelynek csak egyetlen hossztartó paralelköre van! Ez egyszerűen kivitelezhető a $\beta_1 = \beta_2 = \beta_n$ helyettesítéssel, ezúttal határátmenetet sem kell számolni:

$$n = \frac{\cos \beta_n + \cos \beta_n}{2} = \cos \beta_n$$

$$d = \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_n}{2} \sin^2 \frac{\beta_n}{2}}{n} = \frac{4 \sin^4 \frac{\beta_n}{2}}{\cos \beta_n}$$

Visszahelyettesítéssel és kellő mennyiségű trigonometrikus azonosság alkalmazásával belátható, hogy a normálparalelkör sugara ezúttal is már egyre kevésbé meglepő módon $R \operatorname{tg} \beta_n$ lett.

Ha mindkét normálparalelt a pólusba helyezzük ($\beta_n = 0$), akkor a fenti képletek eredménye $n = 1$ és $d = 0$, vagyis LAMBERT síkvetületét kapjuk. Ha $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$, akkor $n = 0$ és $d \rightarrow \infty$ adódik, így a területtartó hengervetületek családjába kapunk határátmenetet.

XI.2. LAMBERT–GAUSS-vetület

Már csak a szögtartó változat ($h = k$) maradt hátra. A levezetés során az integrációs konstans $\ln d + \ln R$ lesz.

$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{\rho n}{R \sin \beta}$$

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = n \int \frac{1}{\sin \beta} d\beta$$

$$\ln \rho = n \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \ln d + \ln R$$

$$\rho = d R \operatorname{tg}^n \frac{\beta}{2}$$

XI. Speciális torzulású kúpvetületek

A d paraméter ezúttal kicsinyítés-nagyítást jelöl, a vetület mindenképp póluspontos.* A déli pólus képe a végtelenben van. Ezúttal is két hossztartó szélességet lehet beállítani n és d megfelelő megválasztásával. Legyen β_1 és β_2 hossztartó! Itt legyen $k = 1$! Ebből:

$$\frac{\rho n}{R \sin \beta_{1,2}} = 1$$

$$ndR \operatorname{tg}^n \frac{\beta_{1,2}}{2} = R \sin \beta_{1,2}$$

Így tehát:

$$nd \operatorname{tg}^n \frac{\beta_1}{2} = \sin \beta_1$$

$$nd \operatorname{tg}^n \frac{\beta_2}{2} = \sin \beta_2$$

A két egyenletet egymással elosztva:

$$\frac{\operatorname{tg}^n \frac{\beta_1}{2}}{\operatorname{tg}^n \frac{\beta_2}{2}} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$$

$$n \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right) = \ln \sin \beta_1 - \ln \sin \beta_2$$

$$n = \frac{\ln \sin \beta_1 - \ln \sin \beta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}}$$

d nem hozható ilyen szép alakra, de a két egyenlet bármelyikéből kifejezhető:

$$d = \frac{\sin \beta_1}{n \operatorname{tg}^n \frac{\beta_1}{2}} = \frac{\sin \beta_2}{n \operatorname{tg}^n \frac{\beta_2}{2}}$$

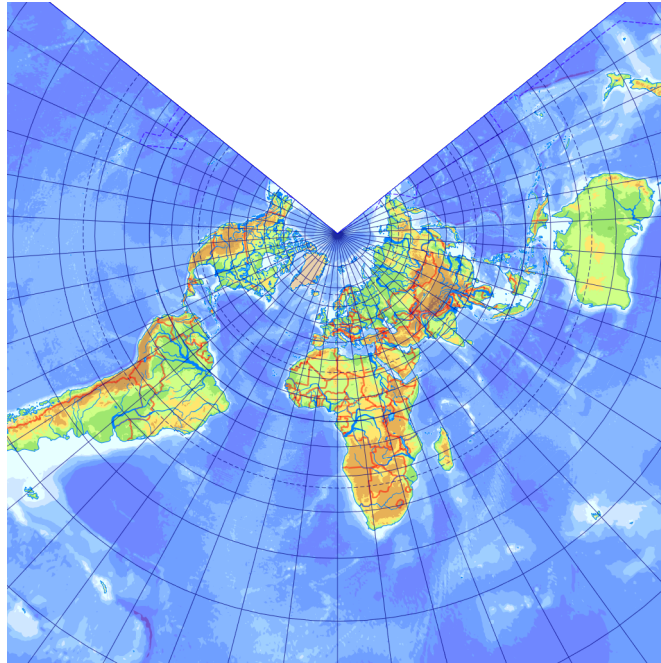
A leképezés neve LAMBERT–GAUSS-kúpvetület (XI.2. ábra), LAMBERT többi vetületéhez hasonlóan ez is 1772-ben jelent meg. Mivel eleinte kevés figyelmet kapott, szerzősége sokáig ismeretlen maradt, több vetülettanász, köztük GAUSS is megalkotta tőle függetlenül. Hogyan alakulnak a vetület torzulásai?

$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{dn \operatorname{tg}^{n-1} \frac{\beta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{nd}{2 \sin^{1-n} \frac{\beta}{2} \cos^{1+n} \frac{\beta}{2}}$$

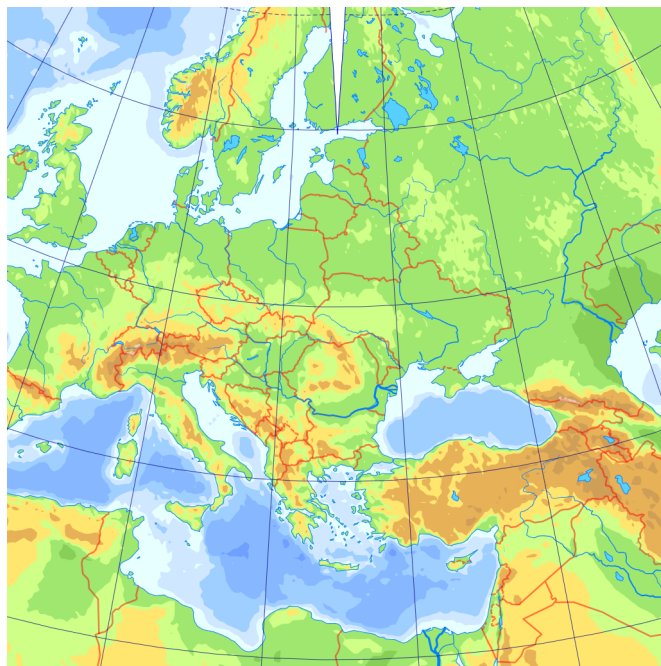
$$k = \frac{\rho n}{R \sin \beta} = \frac{nd \operatorname{tg}^n \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{nd}{2 \sin^{1-n} \frac{\beta}{2} \cos^{1+n} \frac{\beta}{2}}$$

* Pólusvonalas szögtartó vetület általában sem létezik, hacsak a végtelen távolba képezett pólust nem tekintjük pólusvonalnak.

XI. Speciális torzulású kúpvetületek



a) *LAMBERT-GAUSS-vetület*



b) *Křovák-vetület*

XI.2. ábra. Szögtartó kúpvetületek

Érdekesség, hogy az Északi-sarkon a leképezés nem szögtartó, hiszen a hosszúsági körök nem valós szögekben találkoznak.* Látszik a képletből, hogy mindkét pólusban $h = k \rightarrow \infty$, azaz a torzulások végtelen nagyok. Mivel a két pólus között véges nagyságúak, valahol minimuma van a két hossztartó parallelkör között. Így a két hossztartó szélesség között $h = k < 1$, tőlük távolodva $h = k > 1$. Ez segít a vetület felismerésében: a térkép közepén a szélességi körök képei a hosszúsági körök képeit sűrűbben osztják, mint a térkép északi és déli szélénél. A hossztartó szélességek most is normálparallelkörök: ha $k = 1$, akkor $h = k = 1$.

Mi történik, ha $\beta_1 = \beta_2 = \beta_n$? Az osztás így n képletében nem végezhető el, így újfent a $\beta_1 = \beta_n + \Delta\beta$ trükkhöz nyúlunk, ahogy $\Delta\beta \rightarrow 0$. Ismét L'HÔPITAL-szabállyal számíthatjuk ki a határértéket!

$$\begin{aligned} n &= \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\ln \sin(\beta_n + \Delta\beta) - \ln \sin \beta_n}{\ln \operatorname{tg} \frac{\beta_n + \Delta\beta}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2}} = \\ &= \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(\beta_n + \Delta\beta)}{\sin(\beta_n + \Delta\beta)}}{\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta_n + \Delta\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta_n + \Delta\beta}{2}}} = \frac{\operatorname{ctg} \beta_n}{\frac{1}{2 \sin \frac{\beta_n}{2} \cos \frac{\beta_n}{2}}} = \cos \beta_n \end{aligned}$$

Továbbra is érvényes, hogy:

$$d = \frac{\sin \beta_n}{n \operatorname{tg}^n \frac{\beta_n}{2}}$$

Ha már egyszer $n = \cos \beta_n$, akkor az is igaz, hogy a normálparallelkör sugara $R \operatorname{tg} \beta_n$? Ha visszahelyettesítünk a sugárfüggvénybe, akkor valóban ez fog kijönni.

Mivel d csak egy átméretezés, ezért bármelyik két parallelkörben hossztartó változat megkapható az azonos sugárhajlású egy parallelkörben hossztartó vetület kicsinyítésével. Ezért a térinformatikai gyakorlatban előfordul,

* A szögtartó vetületek érdekes tulajdonsága a *szingularitás*. A komplex számok analíziséből ismert, hogy egy leképezés akkor és csak akkor szögtartó, ha az őt leíró $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (komplex) függvény differenciálható. Azonban a vetületekben szükségszerűen jelennek meg szakadások, így függvényünk itt nem folytonos, tehát differenciálható sem lehet. Ezért a leképezés a vetületi szakadások végpontjain (ettől függetlenül néha máshol is, de ekkor is csak izolált pontokban) mindenképp szinguláris, nem differenciálható. A szögtartó vetületek háromféle szingularitást mutatnak:

A pont képe lehet a végtelenben, a szögtartás ilyenkor nem értelmezhető (például a Déli-sark a sztereografikus vetületben). Lehet, hogy a pontban a torzulások végtelen nagyok ($l \rightarrow \infty$ vagy igen ritkán $l = 0$), a szögtartás ebben az egy pontban elvész (lásd az Északi-sark a most tárgyalt vetületben). Ritka eset, hogy a pontba tartó egyik vonal törés nélkül kettéágazik, ilyenkor a szögtartás megmarad (a IX.1. ábrára lapozva a GAUSS-KRÜGER-vetület képen talál olyan pontokat, ahol az Egyenlítő képe elágazik).

hogy nem a két hossztartó szélességgel, hanem egy szélességgel és egy kicsinyítési tényezővel paraméterezzük a vetületet.

A szögtartó kúpvetület előszeretettel alkalmazza a nemzetközi repülés, mert szögtartása mellett a 3000 km-nél rövidebb ortodrómákat közel egyenes vonalakként jeleníti meg. A *World Aeronautical Chart* (WAC) is ennek ellipszoidi változatát alkalmazza WGS84 dátumra, de a legtöbb légi navigációs térkép ebben a vetületben készül Magyarországon is. Több külföldi országban, különösen a francia kultúrkörben, topográfiai térképek vetületének is használják. Közepes szélességeken, szélességi kör mentén elnyúló területekre érdemes használni, mert torzulási izovonalai körívek.

Csehországban és Szlovákiában kettős leképezéssel ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazzák még ezt a vetületet Křovák-vetület néven. Ennek oka, hogy a korabeli Csehszlovákia (a mai Csehország, Szlovákia és Kárpátalja) ívelt alakú volt. Olyan vetületet kerestek, amely ezt az alakzatot követő torzulási izovonalakkal rendelkezik. Így esett erre a vetületre a választás. Mivel a terület nem szélességi kör mentén fekszik, hanem elfordulva, fokhálózat-elforgatásra van szükség. Ezt a szokásos módon, kettős leképezéssel oldották meg. A BESSEL-ellipszoidról szögtartó gömbvetületet alkalmazunk, majd a fokhálózatot elforgatjuk úgy, hogy a segédpólus Helsinki közelébe essék. A szögtartó kúpvetületet egy β_n segéd szélességgel és egy arányos kicsinyítéssel (pontos számértékek az alapszakos jegyzetben) jellemezzük, így az ország területén a torzulások a geodéziai követelményeknek majdnem mindenütt megfelelnek. Hasonló vetületet alkalmaztak nemzeti atlaszukban a kifli alakú Japán ábrázolására.

Mi történik, ha az egyik normálparalelkörrel a pólusba tartok ($\beta_2 \rightarrow 0$)? Ekkor a nulla logaritmusainak hányadosát legyőzendő, β_2 -vel mint független változóval a L'HÔPITAL szabályt ismételjük:

$$n = \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \frac{\ln \sin \beta_1 - \ln \sin \beta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}} = \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \frac{-\frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}}{-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2}}} = \lim_{\beta_2 \rightarrow 0} \cos \beta_2 = 1$$

A korábbi tapasztalatokkal ellentétben nem póluspontos kúpvetületet kaptunk (hiszen a szögtartó kúpvetület eddig is póluspontos volt), hanem elég volt az egyik normálparalelkört a pólusba helyezni, hogy síkvetületet ($n = 1$) kapjunk. De nem így a jogos? Hiszen a területtartó és a meridiánban hossztartó síkvetülettel ellentétben a sztereografikus vetületnek választhatunk egy normálparalelkört, ahol torzulásmentesség volt. Így ha a kúpvetület egyik normálparalelkörét a pólusba helyezem, a másik paralelkör lesz a sztereografikus vetület metsző szélessége. A pólusban értelemszerűen ilyenkor helyreáll a szögtartás, de a területtartás elvész, mert a sztereografikus vetület csak a normálparalelkörén torzulásmentes.

A másik határátmenet a $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$, amely már egyszerű behelyettesítéssel $n = 0$ -ra, azaz a MERCATOR-vetületre vezet.

XI.3. Az ellipszoid kúpvetületei

A valódi kúpvetületek fokhálózat menti torzulásai ellipszoid alapfelületen a következőképp alakulnak:

$$h = -\frac{1}{M(\Phi)} \frac{d\rho}{d\Phi}$$

$$k = \frac{\rho n}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

A meridiánban hossztartó kúpvetület a $h = 1$ egyenlet megoldásából származik (d egy integrációs konstans):

$$\rho = d + \int_{90^\circ}^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

A területtartó kúpvetülethez a $hk = 1$ egyenletet kell megoldanunk:

$$\rho = a \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{n}} \sqrt{d - \frac{\sin \Phi}{1-e^2 \sin^2 \Phi} - \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin \Phi}{1-e \sin \Phi}}$$

A szögtartó kúpvetületet a $h = k$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\rho = d \operatorname{tg}^n \left(45^\circ - \frac{\Phi}{2} \right) \left(\frac{1+e \sin \Phi}{1-e \sin \Phi} \right)^{ne/2}$$

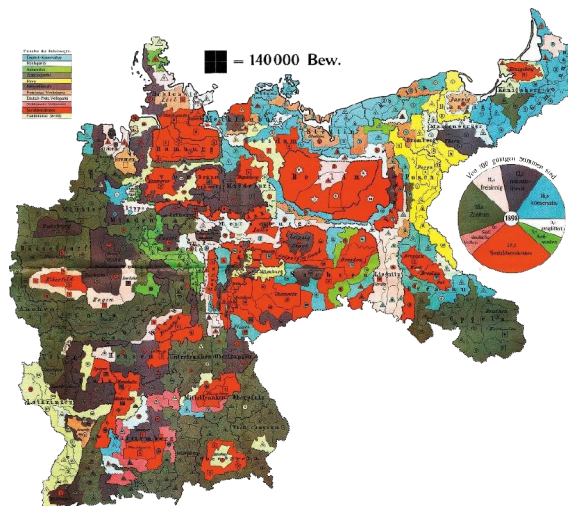
A konstansok kifejezése a két normálparalelkörből hosszadalmas képletekre vezet, de az egy hossztartó szélességgel rendelkező változotoknál a gömbhöz hasonlóan $n = \sin \Phi_n$, és a normálszélesség sugara is $N(\Phi_n) \operatorname{ctg} \Phi_n$.

Tizenkettedik előadás

Alkalmazott vetülettan

XII.1. Lehet a torzulás hasznos?

Egészen eddig azért küzdöttünk, hogy a vetületek torzulásait kordában tartsuk. Azonban vannak esetek, amikor a vetületi torzulás éppen előnyünkre szolgál. A XII.1. ábrán látható egy ilyen térkép. Ez egy régi németországi választás eredményét mutatja be. Ha térképünk nem tartalmazna torzulást, akkor alig lehetne leolvasni, hogy a nyertes a pirossal jelölt párt volt, mivel jellemzően csak néhány nagyobb várost (Berlin, Hamburg és a szász iparvárosok) nyertek meg. Ha a térképszerkesztő csekély torzulásokkal mutatná be a területet, akkor úgy nézne ki, mintha a vidéki szavazókat megmozgató kekizöld párt nyert volna fölényesen. A térképszerkesztő ezt helyesen kompenzálta azzal, hogy a választókerületeket nem valós területük szerint, hanem népességük szerint ábrázolta.



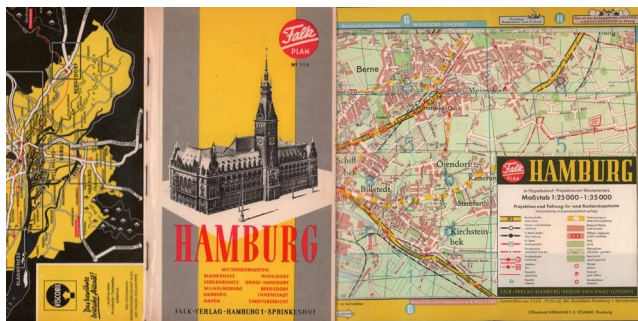
XII.1. ábra. Példa torzított kartogramra

Az ilyen ábrázolásokat *torzított kartogram*nak nevezzük. Ezek tág értelemben véve a vetületek egy speciális fajtájának tekinthetők. A torzítást végezhetjük valamilyen mennyiségi mutató szerint, de előfordul, hogy például

egy adott pontból vett utazási idő szerint választjuk meg az objektumok középponttól vett távolságát. Speciális torzított kartogram a metrótérkép, ahol a térképi távolság az átutazott állomások számától függ. A klasszikus, mennyiségi adatok szerint torzított kartogramok létrehozására számos szoftver létezik, például a ScapeToad.

XII.2. Fókuszált vetületek

Nagy városokban gyakran előfordul, hogy a város közepén nagyon sűrűn helyezkednek el az utcák és az érdekes helyek (piktogramok), így az adatsűrűség túl nagy, míg a külvárosban kevesebb ábrázolandó tereptárgy jut egységnyi területre. E miatt más méretarányt érdemes alkalmazni a város közepén, mint a külső kerületekben. Erre a problémára kíván megoldást nyújtani a FALK térképész cég várostérképein alkalmazott *hiperboloid vetület*. Nevét onnan kapta, hogy az eredeti kilométerhálózati vonalak hiperbolaágakként jelennek meg. Ezen felül arról is fölismerhetők, hogy a méretarány intervallumként van föltüntetve (XII.2. ábra). Azokat a vetületeket, ahol a középpontban tudatosan megemljük a hossztorzulást, *fókuszált vetületeknek* nevezzük.



XII.2. ábra. Várostérkép hiperboloid vetületben

A leképezés matematikája üzleti titok, de KADMON izraeli térképész igen hasonló (talán tökéletesen ugyanilyen) térképhez jutott a következő gondolatmenettel: Legyen a koordináta-rendszer középpontja a városközpontban, ahol a hossztorzulás l_0 ! Ettől ρ_k távolságra $l_k < l_0$ hossztorzulást szeretnénk. Erre a két pontra lineáris illesztéssel:

$$l = \frac{l_k - l_0}{\rho_k} \rho + l_0$$

Másfelől l a kicsi új hossz osztva a régi hosszal:

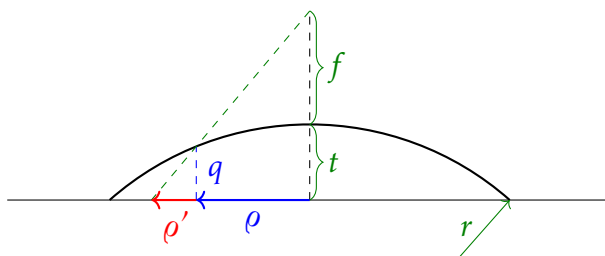
$$l = \frac{d\rho'}{d\rho}$$

$$\frac{d\rho'}{d\rho} = \frac{l_k - l_o}{\rho_k} \rho + l_o$$

$$\int d\rho' = \int \frac{l_k - l_o}{\rho_k} \rho + l_o d\rho$$

$$\rho' = \frac{l_k - l_o}{2\rho_k} \rho^2 + l_o \rho$$

Ezzel a módszerrel a méretarány folytonosan változik. SIKLÓSI javasolt egy olyan módszert, ahol a térkép közepét egy lencsével fölnagyítjuk, miközben a széleit változatlanul hagyjuk. Ez akkor előnyös, ha a külső kerületeket nem akarjuk torzítani.



XII.3. ábra. Fókuszált vetület készítése lencsével

A XII.3. ábrán látható r sugarú kör középpontja $r - t$ távolságra van a vetület síkjától. Így a kör egyenlete:

$$(q + r - t)^2 + \rho^2 = r^2$$

$$q = \sqrt{r^2 - \rho^2} - r + t$$

Az ábrán látható két hasonló háromszög oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{\rho'}{f + t} = \frac{\rho' - \rho}{q}$$

$$\rho' \left(\sqrt{r^2 - \rho^2} - r + t \right) = (f + t)\rho' - (f + t)\rho$$

$$\rho' \left(f - \sqrt{r^2 - \rho^2} + r \right) = (f + t)\rho$$

$$\rho' = \frac{(f + t)\rho}{f + r - \sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

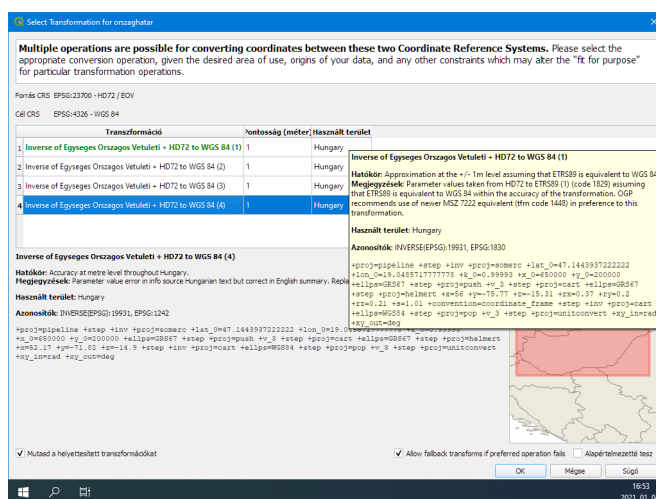
Ez az átalakítás érintetlenül hagyja a térképnek azokat a részeit, amelyek nem esnek a lencse alá.

XII.3. Vetületek és térinformatika

Egy térinformatikai csomagban egy vetület alkalmazásakor mindig szükséges az alapfelület és a leképezés egyértelmű megadása. Ennek gyors azonosítására szolgál az *EPSG-szám*, amely mögött egy adatbázisban tárolják a vetület fajtáját, paramétereit és az alapfelületet annak elhelyezésével. Néhány fontos EPSG-szám:

- 4326 ♦ WGS84 dátum, földrajzi koordináták
- 3857 ♦ Web Mercator / WGS84 dátum
- 23700 ♦ EOVS / HD72 dátum
- 32633 / 32634 ♦ UTM 33 / 34 zóna / WGS84 dátum

A QGIS alkalmazásban ha egy adott vetületet először alkalmazunk, egy párbeszédablakot dob föl, hogy az adatbázisban szereplők közül melyik transzformációt válasszuk. Ha a paramétersor három paramétert tartalmaz, akkor MOLOGYENSKIJ, ha hét paramétert látunk, akkor a pontosabb BURŠA–WOLF-transzformációt fogja alkalmazni (I.3. fejezet). Előfordul, hogy egy adott dátumhoz több, nagy mértékben eltérő paraméterkészlet is rendelkezésre áll, ilyenkor általában az történik, hogy vízszintes értelemben ezek között a különbség elenyésző, azonban függőleges értelemben jelentős eltérések lesznek az eredményben. Ha 3D adatokat alakítunk át, különösen körültekintően kell eljárunk (lásd még a D. függelékét)!



XII.4. ábra. Transzformáció beállítása QGIS-ben

Példaként a XII.4. ábrán látható az EOVS esete. Az egyes számú (buborékban fölugró) transzformáció hét paraméteres, azonban a leírás szerint pontatlansága miatt nem javasolt alkalmazni. A kijelölt négyes számú (főablakban olvasható) transzformáció három paraméteres.

Ha egy térképvetületet a térinformatikai szoftverben nem találunk meg, jellemzően lehetőség van új vetület megadására. Míg a GlobalMapperben ez egy egyszerű párbeszédablak kitöltését jelenti, a többi szoftverben ez a WKT-formátum használatával lehetséges. Példaként nézzük meg az EOV definícióját az ArcGIS szoftverből:

```
PROJCS["HD72_EOV",
  GEOGCS["GCS_HD72",
    DATUM["D_Hungarian_1972",
      SPHEROID["GRS_1967",6378160,298.247167427],
      TOWGS84[52.17,-71.82,-14.9,0,0,0,0]],
    PRIMEM["Greenwich",0],
    UNIT["Degree",0.017453292519943295]],
  PROJECTION["Hotine_Oblique_Mercator_Azimuth_Center"],
  PARAMETER["latitude_of_center",47.14439372222222],
  PARAMETER["longitude_of_center",19.04857177777778],
  PARAMETER["azimuth",90],
  PARAMETER["scale_factor",0.99993],
  PARAMETER["false_easting",650000],
  PARAMETER["false_northing",200000],
  UNIT["Meter",1],
  AXIS["Y",EAST],
  AXIS["X",NORTH]]
```

Látható, hogy az ArcGIS a HD72 dátumot a TOWGS84 beállításban a MOLOGYENSKIJ-féle három paraméteres alakban származtatja az IUGG67-es ellipszoid alapján. A leképezést HOTINE vetületével (IX.5. fejezet) közelíti meg megfelelő paraméterezéssel. A WKT-formátum előnye, hogy precízen megadhatjuk a leképezés módját, ugyanakkor terjengős. A nyílt forrású programokban lehetőség van a tömörebb PROJ.4 formátum használatára is, amelyben kevesebb lehetőség van a vetület precíz definiálására, de ez a térinformatikai pontosságot általában nem veszélyezteti. Példaként álljon itt az EOV definíciója a QGIS szerint:

```
+proj=somerc +lat_0=47.1443937222222
+lon_0=19.04857177777778 +k_0=0.99993 +x_0=650000
+y_0=200000 +ellps=GRS67 +towgs84=52.684,-71.194,-13.975,
-0.312,-0.1063,-0.3729,1.0191 +units=m +no_defs
```

A towgs84 ezúttal hét paramétert tartalmaz, így BURŠA–WOLF-transzformációt használ.* A somerc a *Swiss Oblique MERCATOR*, azaz ROSENMUND vetületének (IX.5. fejezet) rövidítése. Néhány vetület PROJ.4-es rövidítése:

* Korrekciós rácsot (I.3. fejezet) a +nadgrids paraméterrel lehetne beállítani.

- aea** ♦ ALBERS-vetület (*Albers Equal Area*)
aeqd ♦ POSTEL-vetület (*Azimuthal EQUiDiſtant*)
eqdc ♦ DE L'ISLE-vetület (*EQUiDiſtant Conic*)
laea ♦ LAMBERT síkvetülete (*LAMBERT Azimuthal Equal Area*)
lcc ♦ LAMBERT–GAUSS-vetület (*LAMBERT Conformal Conic*)
longlat ♦ Nincs vetület, földrajzi fókálózat
tmerc ♦ GAUSS–KRÜGER-vetület (*Transverse MERCATOR*)

Fönti ismereteinkkel georeferáljunk egy szelvényt példaként a budapesti katonai sztereografikus rendszerben! Sajnos ezt a vetületet a QGIS nem támogatja, nekünk kell megtanítani. A leképezés hasonlít az Amersfoort-vetületre (VI.4. fejezet), melynek kódja *sterea*. Alapfelület a BESSEL-ellipszoid, ezen alapul a HD1863 lokális dátum, melynek elhelyezését TIMÁR kiszámította három és hét paraméter használatával is. Mi az utóbbi paraméterkészletet alkalmazzuk, mert az pontosabb eredményt ad. A Gellérthegy kezdőpont szélessége és hosszúsága a szakirodalomban föllelhető, az eltolás 500 km. Ebből a szükséges definíció PROJ.4-formátumban:

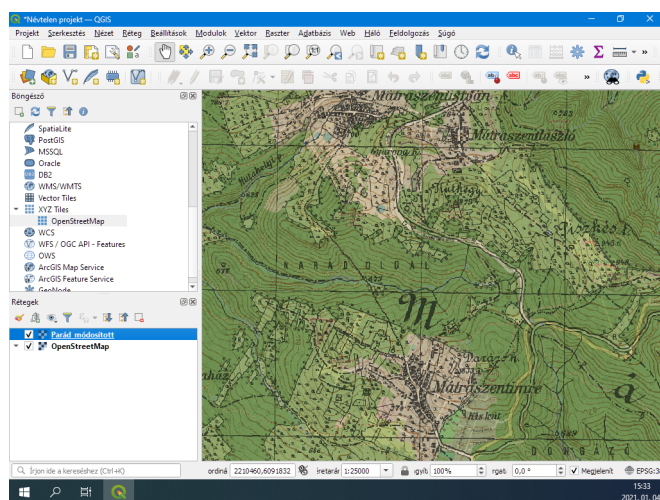
```
+proj=sterea +lat_0=47.4860018439082
+lon_0=19.0491441390302 +k=1 +x_0=500000 +y_0=500000
+ellps=bessel +towgs84=595.75,121.09,515.50,8.2270,
-1.5193,5.5971,-2.6729 +units=m +no_defs
```

Ezt beírva a QGIS egyéni vetület párbeszédablakába, a georeferálás elvégezhető (XII.5. ábra). A példán egy budapesti katonai sztereografikus szelvényt transzformáltunk át a Web Mercator vetületbe, hogy összevethessük az OpenStreetMap adatbázissal. Mivel a pontosabban kimért belterületi részek vízszintes helyzete megegyezik a két térképen, az utak eltérő futása a topográfiai felmérés pontatlanságának és rajzi hibának tudható be. Georeferálásunk tehát elérte a kívánt térinformatikai pontosságot.

XII.4. Georeferálás

Egy térkép georeferálásánál a térinformatikai szoftver az illesztőpontok kijelölését követően rendszerint megkérdezi, hogy milyen módszerrel számítsa a többi pont vetületi koordinátáit. A módszerek elnevezése sajnos nem intuitív. Jelöljük $x; y$ -nal a kép pixelkoordinátáit és $x'; y'$ -vel a megfelelő vetületi koordinátákat!

A *térinformatikában* lineárisnak nevezett módszer nem mintavételezi újra a képet, hanem csak beleírja a térbeli felbontást. Ez az $x' = ax + b$ és $y' = cy + d$ egyenleteknek felel meg. Ez csak akkor ad elfogadható eredményt, ha a térkép nincs elfordulva, így csak digitális (nem szkennelt) térképekre jó.



XII.5. ábra. OSM és régi topográfiai térkép összehasonlítása

Két illesztőpontot igényel. Szkenelt térképeknél a térképlap rendszerint elfordul, ezt figyelembe kell vennünk. Erre való a *HELMERT-transzformáció*:

$$\begin{aligned}x' &= px + qy + c \\y' &= -qx + py + d\end{aligned}$$

Itt c és d az eltolás, és ha az elforgatás szöge δ , a nagyítás pedig s -szeres, akkor $p = s \cos \delta$ és $q = s \sin \delta$. Ez a módszer is legalább két illesztőpontot igényel. Ez egy hasonlóság, ezért megőrzi a térképi szögeket és egyeneseket.

Ha például egy régi térképlap papírja szálirányban más megnyúlást szenvedett, mint rá merőlegesen, akkor a hasonlóság sem ad jó eredményt. Különböző irányokban másképp nyújt a *matematikában* lineárisnak nevezett transzformáció, amelyet a térinformatikában Affine néven találunk. Három illesztőpontot igényel, nem szögtartó, de az egyenesek párhuzamosságát megőrzi:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + a_2y + a_0 \\y' &= b_1x + b_2y + b_0\end{aligned}$$

Légifényképeknél fordul elő, hogy a kamera szöge ferdén áll, ezt korrigálja a *projektív transzformáció*. A GlobalMapperből hiányzik, de a többi program ismeri. Ez is megőrzi az egyeneseket, de a szögek és a párhuzamosság elvesznek. A legalább négy illesztőpontot igénylő módszer képletei:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{a_1x + a_2y + a_0}{c_1x + c_2y + 1} \\y' &= \frac{b_1x + b_2y + b_0}{c_1x + c_2y + 1}\end{aligned}$$

XII. Alkalmazott vetülettan

Ha a georeferált térkép vetülete semmilyen módon nem határozható meg, lehetőség van a koordináták becslésére magasabb fokszámú polinomokkal. Részletes leírás az alapszakos jegyzet tizenkettedik előadásában található.

A. függelék

Angol–magyar szószedet

Az angol nyelvű térinformatikai szoftverek vetületi beállításaihoz érdemes megismerni a félév során tanult szakkifejezések angol megfelelőit. Álljon itt egy rövid gyűjtemény a leggyakoribb fogalmakból!

- ALBERS equal-area** ♦ ALBERS-vetület
- Angular distortion** ♦ Szögtorzulás
- Areal scale** ♦ Területtorzulás
- Azimuthal equidistant** ♦ POSTEL-vetület
- Azimuthal projection** ♦ Valódi síkvetület
- Cartesian coordinate** ♦ Derékszögű koordináta
- Central meridian (mid-meridian)** ♦ Középmeridián
- Colatitude** ♦ Pólustávolság
- Conformal** ♦ Szögtartó
- Conic projection** ♦ Valódi kúpvetület
- Cylindrical projection** ♦ Valódi hengervetület
- Datum** ♦ Geodéziai dátum
- Ellipsoid of revolution** ♦ Forgási ellipszoid
- Equal-area (equivalent)** ♦ Területtartó
- Equidistant** ♦ Meridiánban hossztartó
- Equidistant conic** ♦ DE L'ISLE-vetület
- False easting** ♦ Eltolás (*vízszintes irányban*)
- False northing** ♦ Eltolás (*függőleges irányban*)
- First eccentricity** ♦ Első excentricitás
- Geographic coordinate (geodetic coordinate)** ♦ Földrajzi koordináta
- Geoid height** ♦ Geoidunduláció
- Gnomonic** ♦ Gnomonikus
- HELMERT transform** ♦ BURŠA–WOLF-transzformáció (*de néha tényleg a HELMERT-transzformációt jelöli!*)
- Inverse flattening** ♦ Lapultság reciproka
- LAMBERT azimuthal equal-area** ♦ LAMBERT-síkvetület
- LAMBERT conformal conic** ♦ LAMBERT–GAUSS-vetület
- Latitude** ♦ Szélesség
- Linear scale** ♦ Hossztorzulás

Longitude ♦ Hosszúság
MERCATOR projection ♦ MERCATOR-vetület
MOLODENSKY transform ♦ MOLOGYENSKIJ-transzformáció
Oblique ♦ Ferdetengelyű
Orthographic ♦ Ortografikus
Plate Carrée ♦ Négyzetes hengervetület
Prime meridian ♦ Kezdőmeridián
Projected coordinate ♦ Térképi koordináta
Pseudo Mercator ♦ Web Mercator
Radius ♦ Sugár
Reference frame ♦ Alapfelület
Scale factor ♦ Kicsinyítési tényező (*szögtartó vetületekben*)
Secant ♦ Metsző
Semi-major axis ♦ Nagyféltengely
Semi-minor axis ♦ Kisféltengely
Sphere ♦ Gömb
Standard parallel ♦ Normálparallelkör
Stereographic ♦ Sztereografikus
Tangent ♦ Érintő
Transverse ♦ Transzverzális
Transverse MERCATOR ♦ GAUSS–KRÜGER-vetület
True-scale ♦ Torzulásmentes
Vertical deflection ♦ Függővonal-elhajlás
Vertical perspective ♦ Perspektív síkvetület
Zone ♦ Zóna (*GAUSS–KRÜGER, UTM*)

B. függelék

Alternatív bizonyítás TISSOT tételéhez

A jegyzetben ismertetett geometriai bizonyítással szemben egy algebrai bizonyítást is adok, mert a modern differenciálgeometriai szemlélethez ez a nézőpont jobban illeszkedik. TISSOT tételét ezúttal csak forgásfelület alapfelületre és sík képfelületre bizonyítjuk be.* Vegyünk először egy tetszőleges alapfelületi pontban egy $\Delta p; \Delta m$ derékszögű koordináta-rendszert a forgásfelület érintősíkján úgy, hogy a tengelyek a forgásfelület parallelköreinek és meridiánjainak irányába essenek! Mivel csak a pont végtelen kis környezetét vizsgáljuk, a forgásfelület és az érintősík közti eltérést elhanyagolhatjuk. Egy igen közeli pont koordinátái $(\Delta p; \Delta m)$. Ezt a forgásfelületi koordinátákkal becslülve (a végtelen kis távolságok és a felület paraméterezésének differenciálhatósága miatt lineáris közelítéssel élhetünk):

$$\Delta p = \frac{dp}{d\lambda} \Delta \lambda$$
$$\Delta m = \frac{dm}{d\varphi} \Delta \varphi$$

Ebből:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta p}{\frac{dp}{d\lambda}}$$
$$\Delta \varphi = \frac{\Delta m}{\frac{dm}{d\varphi}}$$

A II.1. ábrán látható, hogy a vetület síkján $\Delta x = \Delta m'_x + \Delta p'_x$ és $\Delta y = \Delta m'_y + \Delta p'_y$, azaz ezek helyére is behelyettesítve a rájuk kapott lineáris

* Az általános, nem forgásfelületre vonatkozó bizonyítás ún. metrikus tenzorok szorzatának vizsgálatával lehetséges.

B. Alternatív bizonyítás Tissot tételéhez

közelítéseket (feltételezve a vetület I.2. fejezetben jelzett differenciálhatóságát):

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \Delta \lambda$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Delta \lambda$$

Azaz:

$$\Delta x = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{dm}{d\varphi}} \Delta m + \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{dp}{d\lambda}} \Delta p$$

$$\Delta y = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{dm}{d\varphi}} \Delta m + \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{dp}{d\lambda}} \Delta p$$

A forgásfelületi $\Delta p; \Delta m$ és a síkbeli $\Delta x; \Delta y$ koordináta-rendszerek közötti transzformáció tehát az előbbi két egyenlet mátrixos alakjával tökéletesen leírható:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} / \frac{dp}{d\lambda} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} / \frac{dm}{d\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} / \frac{dp}{d\lambda} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} / \frac{dm}{d\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta m \end{pmatrix}$$

Tegyük föl, hogy a fenti transzformáció fölbontható egy ν szögű elforgatás, egy a -szoros vízszintes és b -szeres függőleges irányú merőleges affinitás, majd egy újabb ν szögű elforgatás egymásutánjára! A három transzformáció egymás után mátrixok szorzataként fölírva:

$$\begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}$$

A szorzásokat elvégezve a transzformáció mátrixa:

$$\begin{pmatrix} a \cos \nu \cos \nu - b \sin \nu \sin \nu & a \sin \nu \cos \nu + b \cos \nu \sin \nu \\ -a \cos \nu \sin \nu - b \sin \nu \cos \nu & -a \sin \nu \sin \nu + b \cos \nu \cos \nu \end{pmatrix}$$

B. Alternatív bizonyítás Tissot tételéhez

A fenti mátrix feltételezésünk szerint ugyanazt a transzformációt kell leírja, mint az eredeti mátrix, azaz mind a négy elemük megegyezik:

$$\begin{aligned} a \cos v \cos v - b \sin v \sin v &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \bigg/ \frac{dp}{d\lambda} \\ a \sin v \cos v + b \cos v \sin v &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dm}{d\varphi} \\ -a \cos v \sin v - b \sin v \cos v &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} \bigg/ \frac{dp}{d\lambda} \\ -a \sin v \sin v + b \cos v \cos v &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dm}{d\varphi} \end{aligned}$$

Egy négy egyenletből álló nemlineáris egyenletrendszert kaptunk négy ismeretlennel ($a; b; v; v$). Vegyük észre, hogy a fenti egyenletrendszer azt mutatja (már ha találunk legalább egy valós megoldást), hogy minden differenciálható vetület egy tetszőleges pont végtelenül kicsi környezetében fölfogható egy lokális affin transzformációnak, azaz a valós megoldás létezése bizonyítaná Tissot tételét.

Érdekességképp említem, hogy általában minden mátrix fölbontható egy forgatómátrix, egy átlómátrix és egy másik forgatómátrix szorzatára; ezt a mátrix szinguláris érték szerinti felbontásának nevezzük. Az átlómátrix elemeit (vagyis konkrét példánkban az a és b minimális és maximális hossztorzulásokat) a transzformációs mátrix szinguláris értékeinek nevezzük.

A négy egyenlet mindegyikét emeljük négyzetre, és adjuk össze! A bal oldalak négyzetösszege:

$$\begin{aligned} &a^2 \cos^2 v \cos^2 v + b^2 \sin^2 v \sin^2 v - 2ab \cos v \cos v \sin v \sin v + \\ &+ a^2 \sin^2 v \cos^2 v + b^2 \cos^2 v \sin^2 v + 2ab \sin v \cos v \cos v \sin v + \\ &+ a^2 \cos^2 v \sin^2 v + b^2 \sin^2 v \cos^2 v + 2ab \cos v \sin v \sin v \cos v + \\ &+ a^2 \sin^2 v \sin^2 v + b^2 \cos^2 v \cos^2 v - 2ab \sin v \sin v \cos v \cos v \end{aligned}$$

A pirossal jelzett kétszeres szorzatok kiejtik egymást. A maradék tagokat szorzattá alakítva a kifejezés így alakul:

$$(a^2 + b^2)(\sin^2 v + \cos^2 v)(\sin^2 v + \cos^2 v) = a^2 + b^2$$

Tehát az ismeretlenek száma kettőre csökkent:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \bigg/ \frac{dp}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dm}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \bigg/ \frac{dp}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \bigg/ \frac{dm}{d\varphi} \right)^2$$

B. Alternatív bizonyítás Tissot tételéhez

Vegyük észre, hogy ez az egyenlet a geometriai levezetés $a^2 + b^2 = h^2 + k^2$ egyenletével ekvivalens, hiszen a kék és zöld kifejezések éppen a fokhálózat menti torzulások képleteit adják.

Most vegyük az eredeti négyismeretlenes egyenletrendszer, és vonjuk ki az első és negyedik egyenlet szorzatából a második és a harmadik egyenlet szorzatát, azaz számítsuk ki a transzformációs mátrix determinánsát! Először ismét csak a bal oldalakkal foglalkozunk.

$$\begin{aligned} & -a^2 \cos v \cos v \sin v \sin v - b^2 \sin v \sin v \cos v \cos v + ab \sin^2 v \sin^2 v + \\ & + ab \cos^2 v \cos^2 v + a^2 \sin v \cos v \sin v \cos v + b^2 \cos v \sin v \cos v \sin v + \\ & + ab \sin^2 v \cos^2 v + ab \cos^2 v \sin^2 v \end{aligned}$$

A piros tagok megint kiejtik egymást, a maradék tagokat szorzattá alakítjuk:

$$ab(\sin^2 v + \cos^2 v)(\sin^2 v + \cos^2 v) = ab$$

Tehát jobb oldali mátrix determinánsával egyenlővé téve:

$$ab = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{dp}{d\lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{dm}{d\varphi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{dp}{d\lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{dm}{d\varphi}$$

Ez az egyenlet a geometriai levezetés $ab = \tau = hk \sin \vartheta$ egyenletével ekvivalens, mert a jobb oldal a τ -ra kapott egyik képlettel megegyezik. Ez azt jelenti, hogy egy leképezés területtorzulása az őt leíró mátrix determinánsával egyezik meg.

Most már két egyenletünk és két ismeretlenünk maradt talpon, vagyis a geometriai levezetésből is kapott $a^2 + b^2 = h^2 + k^2$ és $ab = 2hk \sin \vartheta$, amelyeket korábban a III.3. fejezetben megoldottunk. Így tehát az algebrai levezetéssel is ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a geometriaival. Az algebrai levezetésből azonban még azt is megtudtuk, hogy:

- Minden vetület leírható lokálisan egy 2×2 -es mátrixszal.
- A vetület területtorzulása a transzformációt leíró mátrix determinánsa.
- A vetület hossztorulásainak szélsőértékei a mátrix szinguláris értékei.

Az újabb vetülettani kutatások már gyakran ebben a felfogásban tárgyalják a torzulásokat, mert bonyolult alapfelületek esetén néha ez a szemlélet ad kezelhetőbb képleteket.

Az a -ra és b -re kapott megoldásokat az eredeti egyenletrendszerbe visszahelyettesítve v és ν is kifejezhető, amelyek fontos geometriai jelentéssel bírnak: v , az első forgatás szöge azt mutatja meg, hogy az alapfelületen az első vetületi főirány mekkora szöget zár be a szélességi körökkel. ν , a második elforgatás azt mutatja meg, hogy a térképen az első vetületi főirány és a vízszintes koordinátatengely mekkora szöget zár be, azaz ez alapján tudjuk megfelelő irányban térképre szerkeszteni a torzulási ellipsziót.

C. függelék

Inverz vetületi egyenletek számítása

Térinformatikai alkalmazásoknál gyakran van szükség inverz vetületi egyenletek számítására. A normális elhelyezésű vetületeknél általában a függvények egyszerűen megfordíthatók, de ferdetengelyű vetületeket nehéz invertálni. Ezért most két példán, a sztereografikus vetület és az EOVI inverzén mutatom be a szükséges fogásokat. *Mivel a magyar topográfiai szokás a jegyzetben használt matematikai konvenciókkal ellentétben a függőleges tengelyt jelöli x -szel és a vízszinteset y -nal, ezért a képletek gyakorlati alkalmazásához az x és y jelöléseket meg kell fordítani!*

Az **érintő sztereografikus** vetületben a sugárfüggvény négyzete:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = \rho^2 &= 4R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta^*}{2} = 4R^2 \frac{2 \sin^2 \frac{\beta^*}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta^*}{2}} = 4R^2 \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta^*}{2}\right)}{1 + \left(2 \cos^2 \frac{\beta^*}{2} - 1\right)} = \\&= 4R^2 \frac{1 - \left(\cos^2 \frac{\beta^*}{2} - \sin^2 \frac{\beta^*}{2}\right)}{1 + \left(\cos^2 \frac{\beta^*}{2} - \sin^2 \frac{\beta^*}{2}\right)} = 4R^2 \frac{1 - \cos \beta^*}{1 + \cos \beta^*} = 4R^2 \frac{1 - \sin \varphi^*}{1 + \sin \varphi^*}\end{aligned}$$

Vezessük be a t segédváltozót!

$$t = \frac{x^2 + y^2}{4R^2}$$

Ekkor a fenti egyenletbe $\sin \varphi^*$ helyére megfelelő ferdetengelyű képletet helyettesítjük a [IV.3.](#) fejezetből.

$$t = \frac{1 - \sin \varphi \sin \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

$$\begin{aligned}t + t \sin \varphi \sin \varphi_0 + t \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) &= \\&= 1 - \sin \varphi \sin \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)\end{aligned}$$

C. Inverz vetületi egyenletek számítása

$$\begin{aligned}\cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)(t \cos \varphi_0 + \cos \varphi_0) &= 1 - \sin \varphi \sin \varphi_0 - t - t \sin \varphi \sin \varphi_0 \\ \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) &= \frac{1 - t - (1 + t) \sin \varphi \sin \varphi_0}{(1 + t) \cos \varphi_0}\end{aligned}$$

Ezt írjuk be az V.5. fejezetben kiszámolt y egyenletbe, így λ szerencsésen kiesik.

$$\begin{aligned}y &= -2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \frac{1-t-(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)\cos \varphi_0}}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \frac{1-t-(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)\cos \varphi_0}} = \\ &= -2R \frac{\frac{(1+t)\sin \varphi \cos^2 \varphi_0 - (1-t)\sin \varphi_0 + (1+t)\sin \varphi \sin^2 \varphi_0}{(1+t)\cos \varphi_0}}{\frac{(1+t) + (1+t)\sin \varphi_0 \sin \varphi + (1-t) - (1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)}} = \\ &= -2R \frac{(1+t)\sin \varphi - (1-t)\sin \varphi_0}{2 \cos \varphi_0}\end{aligned}$$

Ebből φ már egyszerűen kifejezhető:

$$\begin{aligned}y \cos \varphi_0 &= -R(1+t)\sin \varphi + R(1-t)\sin \varphi_0 \\ R(1+t)\sin \varphi &= R(1-t)\sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0 \\ \varphi &= \arcsin \frac{R(1-t)\sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0}{R(1+t)}\end{aligned}$$

Az x vetületi egyenlet számlálójában $\sin \Delta \lambda$ szerepel, így a $\cos \varphi \cos \Delta \lambda$ -ra kapott képlet csak akkor helyettesíthető vissza, ha alkalmazzuk a $\sin \Delta \lambda = \operatorname{tg} \Delta \lambda \cos \Delta \lambda$ átalakítást. Ez után a számlálóban $\operatorname{tg} \Delta \lambda$ megmarad, ennek kifejezésére törekszünk.

$$\begin{aligned}x &= -2R \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) \frac{1-t-(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)\cos \varphi_0}}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \frac{1-t-(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)\cos \varphi_0}} = \\ &= -2R \frac{\frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)[(1-t) - (1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0]}{(1+t)\cos \varphi_0}}{\frac{(1+t) + (1+t)\sin \varphi_0 \sin \varphi + (1-t) - (1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}{(1+t)}} = \\ &= -2R \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)[(1-t) - (1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0]}{2 \cos \varphi_0}\end{aligned}$$

Rendezzük át!

$$\begin{aligned}x \cos \varphi_0 &= -\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)[R(1-t) - R(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0] \\ \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) &= \frac{-x \cos \varphi_0}{R(1-t) - R(1+t)\sin \varphi \sin \varphi_0}\end{aligned}$$

C. Inverz vetületi egyenletek számítása

A piros kifejezésre van egy képletünk a hasáb tetején, a második sorban! Ha ezt behelyettesítem, akkor $\sin \varphi$ kiesik az egyenletből, és λ végre egyértelműen kifejezhető:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) &= \frac{-x \cos \varphi_0}{R(1-t) - R(1-t) \sin^2 \varphi_0 + y \cos \varphi_0 \sin \varphi_0} \\ \lambda - \lambda_0 &= \operatorname{arctg} \frac{-x \cos \varphi_0}{R(1-t)(1 - \sin^2 \varphi_0) + y \cos \varphi_0 \sin \varphi_0} \\ \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{-x}{R(1-t) \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0} + \lambda_0\end{aligned}$$

Itt az idő, hogy kiszámítsuk az **EOV** inverzét is! A ferdetengelyű **MERCATOR**-vetület egyenleteit a **VIII.2.** fejezetben találjuk, itt átrendezve közlöm.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{x}{cR} &= \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_k - \cos \lambda \cos \varphi_k} \\ e^{\frac{2y}{cR}} &= \frac{1 + \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda}{1 - \sin \varphi \cos \varphi_k + \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda}\end{aligned}$$

Legyen t és z a következő segédváltozó:

$$\begin{aligned}t &= e^{\frac{2y}{cR}} \\ z &= \operatorname{tg} \frac{x}{cR}\end{aligned}$$

Akkor az alsó egyenlet átrendezve:

$$\begin{aligned}t - t \sin \varphi \cos \varphi_k + t \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda &= 1 + \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda (t \sin \varphi_k + \sin \varphi_k) &= 1 + \sin \varphi \cos \varphi_k - t + t \sin \varphi \cos \varphi_k \\ \cos \lambda &= \frac{1 - t + (1 + t) \sin \varphi \cos \varphi_k}{(1 + t) \sin \varphi_k \cos \varphi}\end{aligned}$$

Ezt helyettesítsük vissza a másik egyenletbe!

$$\begin{aligned}\frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_k - \cos \varphi_k \frac{1-t+(1+t) \sin \varphi \cos \varphi_k}{(1+t) \cos \varphi \sin \varphi_k}} &= z \\ \sin \lambda &= z \frac{(1+t) \sin \varphi \sin^2 \varphi_k + (1-t) \cos \varphi_k + (1+t) \sin \varphi \cos^2 \varphi_k}{(1+t) \sin \varphi_k \cos \varphi} = \\ &= z \frac{(1+t) \sin \varphi + (1-t) \cos \varphi_k}{(1+t) \sin \varphi_k \cos \varphi}\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda = 1$, azaz:

$$\left[z \frac{(1+t) \sin \varphi + (1-t) \cos \varphi_k}{(1+t) \sin \varphi_k \cos \varphi} \right]^2 + \left[\frac{1-t+(1+t) \sin \varphi \cos \varphi_k}{(1+t) \sin \varphi_k \cos \varphi} \right]^2 = 1$$

C. Inverz vetületi egyenletek számítása

$$\begin{aligned}
 & (1+t)^2 \sin^2 \varphi (z^2 + \cos^2 \varphi_k) + (1-t)^2 (z^2 \cos^2 \varphi_k + 1) + \\
 & \quad + 2(1-t)(1+t) \sin \varphi \cos \varphi_k (z^2 + 1) = (1+t)^2 \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi \\
 & (1+t)^2 \sin^2 \varphi (z^2 + \cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) + 2(1-t)(1+t) \sin \varphi \cos \varphi_k (z^2 + 1) + \\
 & \quad + (1-t)^2 (z^2 \cos^2 \varphi_k + 1) - (1+t)^2 \sin^2 \varphi_k = 0
 \end{aligned}$$

Ez egy $\sin \varphi$ -ben másodfokú egyenlet. A kilométeres képletek ellen leosztunk a főegyütthatóval.

$$\sin^2 \varphi + 2 \frac{1-t}{1+t} \cos \varphi_k \sin \varphi + \frac{(1-t)^2 (z^2 \cos^2 \varphi_k + 1) - (1+t)^2 \sin^2 \varphi_k}{(1+t)^2 (1+z^2)} = 0$$

És akkor a másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi &= -\frac{1-t}{1+t} \cos \varphi_k \pm \\
 & \pm \sqrt{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 \cos^2 \varphi_k - \frac{(1-t)^2 (z^2 \cos^2 \varphi_k + 1) - (1+t)^2 \sin^2 \varphi_k}{(1+t)^2 (1+z^2)}} = \\
 &= \frac{(t-1) \cos \varphi_k}{1+t} \pm \sqrt{\frac{(1-t)^2 (\cos^2 \varphi_k + z^2 \cos^2 \varphi_k - z^2 \cos^2 \varphi_k - 1) + (1+t)^2 \sin^2 \varphi_k}{(1+t)^2 (1+z^2)}} = \\
 &= \frac{(t-1) \cos \varphi_k}{1+t} \pm \sqrt{\frac{[-(1-t)^2 + (1+t)^2] \sin^2 \varphi_k}{(1+t)^2 (1+z^2)}} = \\
 &= \frac{(t-1) \cos \varphi_k}{1+t} \pm \frac{\sin \varphi_k}{1+t} \sqrt{\frac{4t}{1+z^2}}
 \end{aligned}$$

Tapasztalat szerint a \pm előjel + lesz, ha $|x/cR| < \pi/2$, azaz a kezdőpont körüli félgömbön, az ennél távolabbi pontokra – értendő. Tehát a végeredmény:

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{(t-1) \cos \varphi_k}{t+1} \pm \frac{2 \sin \varphi_k}{1+t} \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right]$$

C. Inverz vetületi egyenletek számítása

Miután a szélességet ismerjük, jöjjön a hosszúság! Tudjuk, hogy $\operatorname{tg} \lambda = \sin \lambda / \cos \lambda$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \frac{z(1+t) \sin \varphi + z(1-t) \cos \varphi_k}{1-t + (1+t) \sin \varphi \cos \varphi_k} = \\ &= \frac{z(t-1) \cos \varphi_k \pm 2z \sin \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} + z(1-t) \cos \varphi_k}{1-t + (t-1) \cos^2 \varphi_k \pm 2 \sin \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \cos \varphi_k} = \\ &= \frac{\pm 2z \sin \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{(1-t)(1 - \cos^2 \varphi_k) \pm 2 \sin \varphi_k \cos \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}} \end{aligned}$$

Azaz a végeredmény:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\pm 2z \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{(1-t) \sin \varphi_k \pm 2 \cos \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}$$

Így tehát a vetület inverzét megkaptuk. \pm továbbra is + a kezdőponttól 90° távolságig, míg - a távolabbiakra.

D. függelék

Magassági dátumok

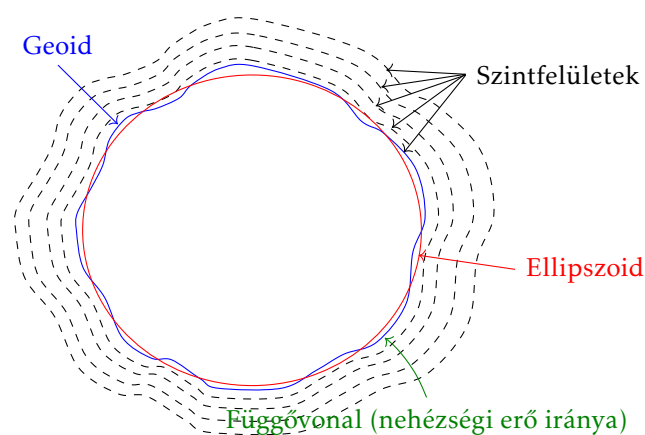
A térinformatikában egyre nagyobb a háromdimenziós téradatok jelentősége. Ezért újabban már nem minden esetben kielégítő, ha adataink csupán vízszintes értelemben illeszkednek. Így bár a magasságmérés és a magassági koordináta-rendszerek nem tartoznak a vetülettan tárgykörébe, a vetület és a geodéziai dátum mellett a magassági adatok vonatkozási felületének megadása is egyre fontosabbá válik. Ennek megértését szolgálja ez a függelék.

A Föld alakját a magasság mérésekor csak a műholdas helymeghatározás esetén szoktuk ellipszoidnak tekinteni. Ennek oka, hogy egyrészt földi mérésekkel az ellipszoid feletti magasság nehezen mérhető, másrészt kevésbé hasznos, hiszen a földi ellipszoid akár száz méter távolságban is húzódhat a tengerszinttől. E miatt az ellipszoid feletti magasságok alkalmazása téves következtetésekhez vezethet például árvízvédelmi alkalmazások esetén. Így kedvezőbb a magasságot a tengerszinthez képest mérni.

A tengerszintet a tengerparton elhelyezett vízmércén mérjük. Az időjárás, apály és dagály hatását kiküszöbölendő a tenger szintjét több éven keresztül följegyezzük. A mért adatok átlaga a vízmércén mért *középtengerszint*.

A nyugalomban lévő tenger vízszintje mindenütt merőleges a helyi nehézségi erőre, a vízszint mentén a helyzeti energia állandó. Az olyan felületeket, amelyek mentén a helyzeti energia nem változik, és mindenütt merőlegesek az erőterre, *potenciálfelületnek* vagy *szintfelületnek* nevezzük. A szintfelületek egymást soha nem keresztezik, azonban egymástól vett távolságuk nem állandó: Mivel a nehézségi gyorsulás a pólusoknál nagyobb, mint az Egyenlítőnél (a centrifugális erő hatása miatt), ezért ugyanannyi munkával (ugyanannyi helyzeti energiát nyerve) kisebb magasságkülönbséget érünk el a pólusoknál, mint az Egyenlítőnél. Ez azt mutatja, hogy a szintfelületek a pólusok közelében sűrűbben helyezkednek el. Azt a szintfelületet, amely a vízmércén mért közepes tengerszinten halad keresztül, *geoid* néven ismerjük, és a Föld alakjaként tekintjük a magasságmérések során (D.1. ábra). *Függővonalnak* hívjuk azt a görbét, amelynek érintője minden pontban a nehézségi erő irányába mutat.

A tenger szintjét a víz hőmérséklete, sótartalma és az áramlási viszonyok egyaránt befolyásolják. Ezért az adott vízmércéhez rögzített geoid csak

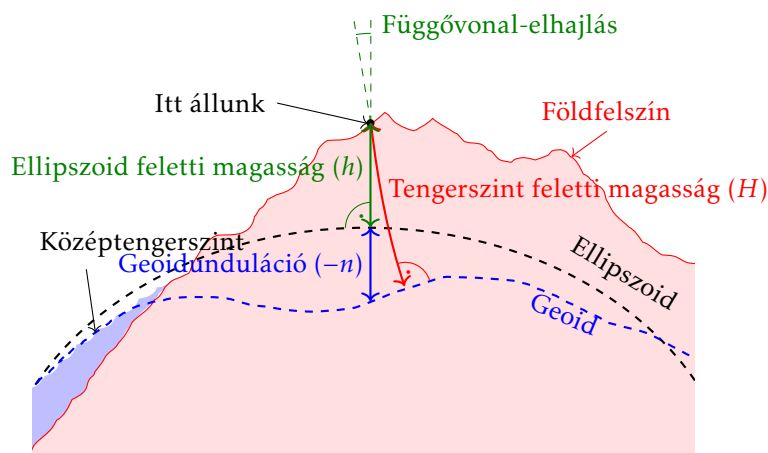


D.1. ábra. A Föld alakjának és nehézségi erőterének kapcsolata

közelítően követi a középtengerszintet az óceán más pontjain. Ezért a különböző vízmércékhez illesztett szintfelületek egymással nem esnek egybe, azonban magasságkülönbségük az egy métert nem haladja meg. Magyarországon a '60-as évekig a trieszti (adriai magasság), azóta a kronštadti (balti magasság) vízmércét tekintjük kiindulópontnak. Az EU-ban amszterdami magasságot használnak, ha az államok közötti egységes rendszerre van szükség. Az adriai magasságok 67,5 cm-rel, az amszterdami magasságok 14 cm-rel nagyobbak a balti magasságoknál.

A geoid és a pontunk között a függővonal mentén mért távolság a H -val jelölt *tengerszint feletti magasság*. A geoid és az ellipszoid között az ellipszoid normálisa mentén mért távolság az n *geoidunduláció*. A geoidunduláció pozitív, ha a geoid az ellipszoid fölött halad (így Európa legtöbb részén), negatív, ha alatta fut (mint a D.2. ábrán), értéke általában ± 100 m között van. A h *ellipszoid feletti magasságot* szintén az ellipszoid normálisa mentén mérjük. Az ellipszoid normálisa és a pontunkon áthalaladó függővonal között bezárt szög a *függővonal-elhajlás*.*

* A függővonal-elhajlás a vízszintes helymeghatározásban is fontos. Az *asztronómiai szélesség* a helyi vízszintes és a Föld forgástengelye (Sarkcsillag) között mért szög, míg a *geodéziai szélesség* az ellipszoid normálisa és az Egyenlítő síkja között mért szög. A két szélesség nem egyezik meg, mert bár az Egyenlítő síkja merőleges a forgástengelyre, a helyi vízszintes és az ellipszoid normálisa éppen a függővonal-elhajlás okán nem pontosan merőleges. A szögekülönbség így éppen a függővonal-elhajlás észak–déli komponense. Hasonlóan, mivel az *asztronómiai hosszúságot* is a helyi vízszinteshez képest tudjuk meghatározni, ennek a *geodéziai hosszúságtól* vett eltérése a függővonal-elhajlás kelet–nyugati komponense. Látszik, hogy az I.3. fejezetben a vízszintes mérésekhez használt lokális dátumokat miért a függővonal-elhajlás és nem a geoidunduláció minimalizálásával illesztettük a geoidhoz.



D.2. ábra. Tengerszint és ellipszoid feletti magasságok

Az ábra alapján leolvasható, hogy a műholdas helymeghatározásban számított (lásd alapszakos jegyzet) ellipszoid feletti magasságból a geoidunduláció ismeretében a tengerszint feletti magasság jól becsülhető:

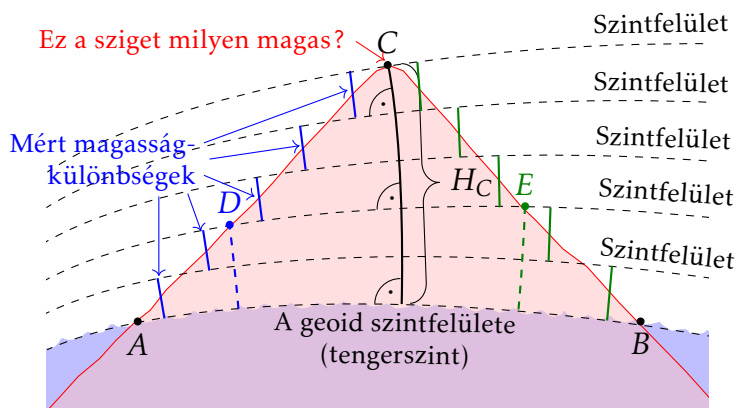
$$H \approx h - n$$

Pontos egyenlőség a függővonal-elhajlás miatt nem áll fenn, azonban az eltérés általában nem vagy alig haladja meg az egy millimétert, így a gyakorlatban ezt nem kell figyelembe vennünk (hiszen a geoidundulációt ritkán ismerjük ennyire pontosan).

Ha egy zárt görbe mentén körbehaladunk és a magasságkülönbségeket összeadjuk, akkor azt várjuk, hogy 0-at kapunk, hiszen ugyanabba a pontba értünk vissza. Tehát az lenne az intuitív, ha $\oint dH = 0$ bármely zárt görbe mentén. Ez az állítás azt jelentené (ahogyan ezt a józan ész is várná), hogy a mért magasságkülönbségek összege két adott pont között független az útvonaltól. A valóság ennél sokkal bonyolultabb.

A D.3. ábrán próbáljuk meg meghatározni a sziget C-vel jelölt csúcsának H_C magasságát! A hegy méretei miatt ezt nem tudjuk egy lépésben elvégezni, az meg nyilvánvaló, hogy a mérés kedvéért nem fogunk a függővonal mentén a geoidig leásni. A kék léces brigád az A pontból egyenesen halad fölfelé a C pontba, míg a zöld léces előbb körbesétál a tengerparton a B pontba (közben nem észlel magasságkülönbséget, így B magasságát is nullának veszi), majd innen szinteznek föl a C pontba. Az ábráról leolvasható, hogy a zöld brigád összességében nagyobb magasságot mért a C pontig, ráadásul (még ha semmi mérési hibát nem ejtettek volna, akkor is) egyikük mért magasságkülönbségeinek összege sem azonos a C pont magasságával!

Természetesen a jelenség csak igen nagy távolságoknál (országos felméréseknél) jelentős, azonban a pontok magasságát a különböző útvonalon végzett szintezések alapján nehéz szabatosan megmérni.



D.3. ábra. A magasságmérés meglepő tulajdonságai

Mindemellett láthatjuk, hogy a D és E pontok azonos szintfelületen helyezkednek el. Ez azt jelenti, hogy ez a két pont lehet akár egy tó két partján, hiszen egymáshoz képest vízszintesen helyezkednek el. Mégis az E pont tengerszint feletti magassága nagyobb, mint a D ponté, azaz a víz tud a D pontból az E pontba *magasabbra* folyni! Ezt a Föld egyenetlen gravitációs mezeje okozza: az E pontban a szintfelületek ritkábban helyezkednek el. Egy Balaton méretű hegyvidéki tó vízszintjének különböző pontjai közt mért magasságkülönbség akár fél méter is lehet! Ez árvíz esetén már kellemetlen meglepetéseket okozhat!

Ezért nagy kiterjedésű (országos) felméréseknél érdekesebb az egységnyi tömegre jutó helyzeti energia (*potenciál*) különbségét mérni. A K potenciálkülönbség valóban független a mérés útvonalától, azonban a mérések során mindig mérni kell a ΔH_i magasságkülönbség mellett a g_i helyi nehézségi gyorsulást.

$$K = \sum_i g_i \Delta H_i$$

A mért potenciálkülönbségből magasságot így kaphatunk:

$$H = \frac{K}{\bar{g}}$$

\bar{g} itt a függővonal menti átlagos nehézségi gyorsulás, azonban ennek méréséhez ismét nem fogunk leásni a hegy belsejébe. A tengerszint feletti

magasság hagyományos, geometriai definíciója (a szakirodalomban *ortométeres magasság*) esetén ezt megkíséreljük modellezni (külföldön gyakran ezt alkalmazzák), míg a *normálmagasság* esetén \bar{g} becslésekor egyszerűsítünk, a Földet ellipszoid alakúnak és egyenletes tömegeloszlásúnak tételezzük föl. A *dinamikai magasság* az azonos szintfelületen lévő pontokhoz azonos magasságot rendel, így fizikai értelmezése van. Ekkor \bar{g} értékét a helytől függetlenül egységesnek választjuk meg. Az ebből fakadó eltérések deciméter körüliek, összetévesztésük csak mérnöki precizitás igénye esetén problémás. Ezzel szemben a geoidunduláció akár 100 m is lehet, így az ellipszoid feletti magasságokat semmiképp se keverjük a tengerszint felettiakkal!

Egy térinformatikai szoftverben a magassági koordináták megadásakor tehát figyeljünk azok fajtájára (ellipszoid vagy tengerszint feletti, utóbbi esetben melyik fajta) és alapfelületére (melyik ellipszoid, melyik tengerszint)! Magyarország magassági alappontjai a kronstadti vízmércétől számított normálmagasságokat rögzítik. A magassági alappontok hálózatát *magassági dátumnak* nevezzük. Két ország magassági dátumai között az átszámítás centiméteres pontosság kívánalma esetén egyszerű eltolással is történhet. Figyelembe kell vennünk ugyanakkor, hogy a kéregmozgások miatt a magassági jegyek idővel elmozdulnak, így még az azonos tengerszintet használó országok magassági dátumai között is adódhat évtizedek múltán pár centiméteres eltérés. Az ellipszoid és tengerszint feletti magasságok közötti átszámításhoz szükséges szoftverünknek egy geoidmodell is megadni, hogy a geoidunduláció számítható legyen.