Pozitív operátorok rendezett struktúrái

Tarcsay Zsigmond

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Eötvös Loránd University, Department of Applied Analysis and Computational Mathematics

TKP, 2022. május 26-27.

Szimmetrikus és pozitív (szemidefinit) mátrixok struktúrái

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($A \geq 0$), ha minden sajátértéke ≥ 0

$$\iff \langle Ax, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Szimmetrikus és pozitív (szemidefinit) mátrixok struktúrái

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($A \geq 0$), ha minden sajátértéke ≥ 0

$$\iff \langle Ax, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Természetes rendezés

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok,

$$A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0.$$

Szimmetrikus és pozitív (szemidefinit) mátrixok struktúrái

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($A \geq 0$), ha minden sajátértéke ≥ 0

$$\iff \langle Ax, x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Természetes rendezés

$A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixok,

$$A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0.$$

Általánosabb (nem véges dimenziós) struktúra: $B(\mathcal{H})_+$

$\mathcal{H}$ - (komplex) Hilbert-tér A folytonos lineáris operátor

- pozitív ($A \geq 0$), $\overset{def}{\iff}$ $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ ($x \in \mathcal{H}$),

Szimmetrikus és pozitív (szemidefinit) mátrixok struktúrái

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($A \geq 0$), ha minden sajátértéke ≥ 0

$$\iff \langle Ax, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Természetes rendezés

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok,

$$A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0.$$

Általánosabb (nem véges dimenziós) struktúra: $B(\mathcal{H})_+$

$\mathcal{H}$ - (komplex) Hilbert-tér A folytonos lineáris operátor

- pozitív ($A \geq 0$), $\overset{def}{\iff}$ $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ($x \in \mathcal{H}$),
- $A, B \in B(\mathcal{H})$ önadjungáltak, $A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0$,

Szimmetrikus és pozitív (szemidefinit) mátrixok struktúrái

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($A \geq 0$), ha minden sajátértéke ≥ 0

$$\iff \langle Ax, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Természetes rendezés

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok,

$$A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0.$$

Általánosabb (nem véges dimenziós) struktúra: $B(\mathcal{H})_+$

$\mathcal{H}$ - (komplex) Hilbert-tér A folytonos lineáris operátor

- pozitív ($A \geq 0$), $\overset{def}{\iff}$ $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ($x \in \mathcal{H}$),
- $A, B \in B(\mathcal{H})$ önadjungáltak, $A \leq B \overset{def}{\iff} B - A \geq 0$,
- $B(\mathcal{H})_+ := \{A \in B(\mathcal{H}) : A \geq 0\}$.

A $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezett struktúra

1. Probléma: $\wedge$ és $\vee$ létezése

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén mikor létezik az $A \wedge B$ és $A \vee B$?

A $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezett struktúra

1. Probléma: $\wedge$ és $\vee$ létezése

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén mikor létezik az $A \wedge B$ és $A \vee B$?

Ha $A \leq B$ vagy $B \leq A$, akkor nyilván. Más eset?

A $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezett struktúra

1. Probléma: $\wedge$ és $\vee$ létezése

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén mikor létezik az $A \wedge B$ és $A \vee B$?

Ha $A \leq B$ vagy $B \leq A$, akkor nyilván. Más eset?

2. Probléma: $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezés automorfizmusai?

Hogyan írhatók le a $\Phi : B(\mathcal{H})_+ \to B(\mathcal{H})_+$ rendezésmegőrző bijekciók?

$$A \leq B \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(A) \leq \Phi(B) \qquad (\forall A, B \geq 0)$$

A $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezett struktúra

1. Probléma: $\wedge$ és $\vee$ létezése

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén mikor létezik az $A \wedge B$ és $A \vee B$?

Ha $A \leq B$ vagy $B \leq A$, akkor nyilván. Más eset?

2. Probléma: $(B(\mathcal{H})_+, \leq)$ rendezés automorfizmusai?

Hogyan írhatók le a $\Phi : B(\mathcal{H})_+ \to B(\mathcal{H})_+$ rendezésmegőrző bijekciók?

$$A \leq B \quad \iff \quad \Phi(A) \leq \Phi(B) \qquad (\forall A, B \geq 0)$$

Ha $T \in B(\mathcal{H})$ izomorfizmus, akkor

$$\Phi(A) = T^* A T$$

ilyen. Van-e más?

Válaszok: Ando, Kadison és Molnár tételei

Kadison és Ando tételei

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén

- $\exists A \vee B \iff A \leq B$ vagy $B \leq A$ (R. Kadison)

Válaszok: Ando, Kadison és Molnár tételei

Kadison és Ando tételei

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén

- $\exists A \vee B \iff A \leq B$ vagy $B \leq A$ (R. Kadison)
- $\exists A \wedge B \iff A_{abs} \leq B_{abs}$ vagy $B_{abs} \leq A_{abs}$, ahol A_{abs}, B_{abs} az A, B egymásra nézve vett abszolút folytonos részei (T. Ando)

Válaszok: Ando, Kadison és Molnár tételei

Kadison és Ando tételei

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén

- $\exists A \vee B \iff A \leq B$ vagy $B \leq A$ (R. Kadison)
- $\exists A \wedge B \iff A_{abs} \leq B_{abs}$ vagy $B_{abs} \leq A_{abs}$, ahol A_{abs}, B_{abs} az A, B egymásra nézve vett abszolút folytonos részei (T. Ando)

Molnár tétele

Ha $\dim \mathcal{H} \geq 2$, akkor bármely $\phi : B(\mathcal{H})_+ \to B(\mathcal{H})_+$ rendezés tartó bijekció, előáll

$$\phi(A) = TAT^*, \qquad A \in B(\mathcal{H})_+$$

alakban valamely $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris/ konjugáltan lineáris izomorfizmus mellett

Válaszok: Ando, Kadison és Molnár tételei

Kadison és Ando tételei

Adott $A, B \in B(\mathcal{H})_+$ esetén

- $\exists A \vee B \iff A \leq B$ vagy $B \leq A$ (R. Kadison)
- $\exists A \wedge B \iff A_{abs} \leq B_{abs}$ vagy $B_{abs} \leq A_{abs}$, ahol A_{abs}, B_{abs} az A, B egymásra nézve vett abszolút folytonos részei (T. Ando)

Molnár tétele

Ha $\dim \mathcal{H} \geq 2$, akkor bármely $\phi : B(\mathcal{H})_+ \to B(\mathcal{H})_+$ rendezés tartó bijekció, előáll

$$\phi(A) = TAT^*, \qquad A \in B(\mathcal{H})_+$$

alakban valamely $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris/ konjugáltan lineáris izomorfizmus mellett

Megjegyzés: A feltételek között nem szerepel sem ϕ folytonossága, sem linearitása: ez automatikusan következik.

Általánosítás: duális párok

Észrevétel: pozitivitás csak a dualitástól függ

$x \leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle$

Általánosítás: duális párok

Észrevétel: pozitivitás csak a dualitástól függ

$x \leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \rightsquigarrow$ "$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$" $\leftrightarrow$ "$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$"

$$A \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Ax)(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{H})$$

Általánosítás: duális párok

Észrevétel: pozitivitás csak a dualitástól függ

$x \leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \rightsquigarrow "A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}" \leftrightarrow "A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*"$

$$A \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Ax)(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{H})$$

Pozitív operátor általánosítása

X, Y vektorterek, $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times X \to \mathbb{C}$ anti-dualitás függvény (i.e. szeparáló és szeszkvi-lineáris). Az $A : X \to Y$ lineáris transzformáció *pozitív*, ha $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ $(x \in X)$.

Általánosítás: duális párok

Észrevétel: pozitivitás csak a dualitástól függ

$x \leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \rightsquigarrow$ "$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$" $\leftrightarrow$ "$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$"

$$A \geq 0 \qquad \iff \qquad (Ax)(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{H})$$

Pozitív operátor általánosítása

X, Y vektorterek, $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times X \to \mathbb{C}$ anti-dualitás függvény (i.e. szeparáló és szeszkvi-lineáris). Az $A : X \to Y$ lineáris transzformáció *pozitív*, ha $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ $(x \in X)$.

Példák

Hilbert-terek, Banach-terek, vektorterek, C*-algebrák,...

Az $(\mathscr{L}(X, Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X, Y)_+$

- $\mathscr{L}(X, Y)_+ \coloneqq \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,

Az $(\mathscr{L}(X, Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X, Y)_+$

- $\mathscr{L}(X, Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Az $(\mathscr{L}(X, Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X, Y)_+$

- $\mathscr{L}(X, Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Korábban vizsgált problémák

- $AX = B$ egyenletek megoldhatósága

Az $(\mathscr{L}(X, Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X, Y)_+$

- $\mathscr{L}(X, Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Korábban vizsgált problémák

- $AX = B$ egyenletek megoldhatósága
- pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Az $(\mathscr{L}(X,Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X,Y)_+$

- $\mathscr{L}(X,Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Korábban vizsgált problémák

- $AX = B$ egyenletek megoldhatósága
- pozitív kiterjeszthetőség kérdése
- A, B Lebesgue-típusú felbonthatósága

Az $(\mathscr{L}(X, Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X, Y)_+$

- $\mathscr{L}(X, Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Korábban vizsgált problémák

- $AX = B$ egyenletek megoldhatósága
- pozitív kiterjeszthetőség kérdése
- A, B Lebesgue-típusú felbonthatósága

Az utóbbi pár hónapban vizsgált kérdések

- hálóműveletek létezése $\mathscr{L}(X, Y)_+$-ban,

Az $(\mathscr{L}(X,Y)_+, \leq)$ rendezett halmaz

$\mathscr{L}(X,Y)_+$

- $\mathscr{L}(X,Y)_+ := \{A : X \to Y : A \geq 0\}$,
- $A \leq B \iff B - A \geq 0$.

Korábban vizsgált problémák

- $AX = B$ egyenletek megoldhatósága
- pozitív kiterjeszthetőség kérdése
- A, B Lebesgue-típusú felbonthatósága

Az utóbbi pár hónapban vizsgált kérdések

- hálóműveletek létezése $\mathscr{L}(X,Y)_+$-ban,
- $\mathscr{L}(X,Y)_+$ rendezés izomorfizmusai

$A \vee B$

Kadison tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes,
$A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$.

$A \vee B$

Kadison tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes, $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$. Ekvivalensek:

(i) létezik $A \vee B$,

(ii) $A \leq B$ vagy $B \leq A$.

$A \vee B$

Kadison tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes,
$A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$. Ekvivalensek:

(i) létezik $A \vee B$,

(ii) $A \leq B$ vagy $B \leq A$.

Megjegyzések

- Kadison eredeti bizonyítása erősen használja a Hilbert-tér struktúrát (spektráltétel...)

$A \vee B$

Kadison tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes,
$A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$. Ekvivalensek:

(i) létezik $A \vee B$,

(ii) $A \leq B$ vagy $B \leq A$.

Megjegyzések

- Kadison eredeti bizonyítása erősen használja a Hilbert-tér struktúrát (spektráltétel...)
- az általunk adott bizonyítás rövidebb és egyszerűbb

$A \wedge B$

Lebesgue-felbontás pozitív operátorokra (T.Zs.)

$A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$, akkor egyértelműen létezik $B_{abs}, B_{sing} \in \mathscr{L}(X, Y)_+$, hogy

- $B = B_{abs} + B_{sing}$,
- $B_{sing} \wedge A = 0$,
- $B_{abs} \ll A$, azaz $B_{abs} = \lim B_n$, ahol $0 \leq B_n \leq B_{n+1} \leq \alpha_{n+1} A$,
- ha $C \leq B$ és $C \ll A$, akkor $C \leq B_{abs}$

Ando tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes, $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+$. Ekvivalensek:

(i) létezik $A \wedge B$,

(ii) $A_{abs} \leq B_{abs}$ vagy $B_{abs} \leq A_{abs}$.

$\mathscr{L}(X, Y)_+$ rendezés izomorfizmusai

Molnár tétel általánosítása

(X, Y) duális pár, Y gyengén sorozat-teljes, $\phi : \mathscr{L}(X, Y)_+ \to \mathscr{L}(X, Y)_+$ rendezéstartó bijekció, azaz

$$A \leq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi(A) \leq \phi(B), \qquad (\forall A, B \in \mathscr{L}(X, Y)_+).$$

Ekkor létezik egy $T : Y \to Y$ gyengén folytonos lineáris vagy konjugáltan lineáris homeomorfizmus, hogy

$$\phi(A) = TAT^*, \qquad A \in \mathscr{L}(X, Y)_+.$$

Irodalomjegyzék

1. T. Ando, Problem of infimum in the positive cone, *Math. Appl*, 478 (1999), 1–12.
2. L. Molnár, Order-automorphisms of the set of bounded observables, *J. Math. Phys.*, 42 (2001), 5904-5909.
3. T. Zs., Titkos Tamás, Operators on anti-dual pairs: Generalised Krein-von Neumann extension, *Math. Nachrichten*, 294(9) (2021), 1821-1838.
4. T. Zs., Supremum and infimum of positive operator on anti-dual pairs, *kézirat*, 2022.
5. T. Zs., Order preserving maps of positive operators on anti-dual pairs, *kézirat*, 2022.

Köszönöm a figyelmet!