

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

**Walsh-függvények, általánosításuk és
alkalmazásuk differenciálegyenletek
megoldásában**

HABILITÁCIÓS TÉZISEK

Dr. Toledo Rodolfo Calixto



BUDAPEST, 2021. SZEPTEMBER 1.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
1.1. A Walsh–Paley-rendszer	3
1.2. A Walsh–Fourier-sor 2^n -edik részletösszege	5
1.3. A diadikus csoport és általánosításai	6
2. A Walsh–Fejér-magok L^1-beli normája	9
2.1. A $\ K_n\ _1$ sorozat előállítása	9
2.2. A $\ K_n\ _1$ sorozat tulajdonságai	11
3. Normakonvergenca reprezentatív szorzatrendszereken	13
3.1. A Fourier-sorok L^p -normakonvergenciájáról	13
3.2. A Dirichlet-magok maximális értéke	15
3.3. Cesàro közepek L^1 -normakonvergenciája	16
4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek numerikus megoldása Walsh-függvényekkel	17
4.1. Előzetes eredmények	17
4.2. Az általános probléma és a fő eredmények	19
4.3. A numerikus megoldás együtthatóinak előállítása	21
4.4. A numerikus megoldás előállítása iterációval	23
4.5. Teszteredmények kiértékelése	25
5. Az oktatáshoz kapcsolódó publikációk	27
Hivatkozások	28

1. Bevezetés

Jelen tézisek összefoglalják a szerző 2005-ben megszerzett PhD-fokozata után elért legfontosabb tudományos eredményeit, illetve felsorolják a szerző által, az oktatáshoz kifejlesztett és már megjelent tananyagait.

Az elvégzett tudományos munka a diadikus harmonikus analízis elméletéhez kapcsolódik. Ez a tudományterület lokálisan konstans rendszerfüggvényeken alapuló Fourier-analízissel foglalkozik. Ilyenek a Walsh-függvényekből álló függvényrendszerek, amelyek csak az 1 és a -1 értékeket vehetik fel. Ez a tulajdonság lehetővé teszi széleskörű alkalmazásukat a digitális technika világában. Ennek szemszögéből a lokálisan konstans ortonormált rendszerek olyan szerepet töltenek be, mint a klasszikus trigonometrikus rendszer az analóg technikában. Az approximációelmélet ma az egyik legismertebb és legnépszerűbb kutatási téma, amelynek fontos része a Walsh-függvények és általánosításáiból álló operátorok konvergenciája.

A tézisek felépítése a következő. A bevezetés további részében a Walsh–Paley-rendszerhez kapcsolódó legfontosabb fogalmakat és eredményeket ismertetjük, illetve megmutatjuk, hogy tudjuk ezt a rendszert másképpen reprezentálni és általánosítani az absztrakt harmonikus analízis elmélet keretében. A bevezetést követően három fejezetben tárgyaljuk a szerző önálló, vagy társszerzővel elért tudományos eredményeit:

- a 2. fejezetben a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájára adunk egy iterációs formulát, amivel több érdekes tulajdonságot tudunk igazolni. Ezek közül kiemelnénk azt, hogy sikerült pontosan meghatározni ezen értékek szuprémumát. Ez az eredmény eddig nem volt ismert. A fejezet összefoglalja a [48] cikkben megjelent eredményeket.
- a 3. fejezetben a Walsh–Paley-rendszernek, sőt a Vilenkin-rendszereknek egy olyan általánosításán mutatunk Fourier-analízisbeli eredményeket, ami a nem-kommutatív absztrakt harmonikus analízis témakörébe tartozik. Döntően normakonvergencia-kérdésekkel foglalkozunk az ún. reprezentatív szorzatrendszerekhez kapcsolódó operátorok esetében, mint a Fourier-sor n -edik részletösszege és a (C, α) közepek. Ezen kívül a Dirichlet-magok egyéb tulajdonságait is vizsgáljuk. Itt alapvetően összefoglaljuk a [15, 18, 46, 47] cikkekben megjelent eredményeket.
- a 4. fejezetben a Walsh-függvények egyik alkalmazását mutatjuk be, amelyet a szerző Gát Györggyel együtt dolgozott ki. Ezzel elsőrendű lineáris, nem álladó együtthatós differenciál-egyenletrendszerekhez tartozó kezdeti érték problémákat oldunk meg numerikusan. Itt alapvetően összefoglaljuk a [20, 21, 49] cikkekben megjelent eredményeket.

Végül az 5. fejezet felsorolja a szerző által megjelentetett, ISBN számmal ellátott tananyagait.

1.1. A Walsh–Paley-rendszer

1922-ban Rademacher [33] olyan ortonormált rendszert adott meg, amelynek függvényei csak az 1 és a -1 értékeket veszik fel. Ezt a rendszert úgy kaphatjuk meg, ha az

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \end{cases}$$

függvényt 1 periodicitással kiterjesztjük az \mathbb{R} valós számegyenesre, és vele értelmezzük az

$$r_k(x) := r(2^k x) \quad (k \in \mathbb{N}, x \in [0, 1])$$

függvényeket, ahol \mathbb{N} jelöli a nem negatív egész számok halmazát. Ezt nevezzük a $[0, 1[$ halmazon értelmezett *Rademacher-rendszernek*, ennek elemeit *Rademacher-függvényeknek* mondjuk. Azonban ez a rendszer nem teljes az $L^2([0, 1])$ függvények terében¹.

Egy évvel később Walsh, aki valószínűleg még nem ismerte Rademacher eredményét, egy szintén csak az 1 és a -1 értékeket felvevő ortonormált rendszert vezetett be, ami már teljes volt (lásd [51]). A Walsh által bevezetett függvényrendszer n -edik tagja a trigonometrikus rendszer n -edik tagjához hasonlóan éppen n -szer vált előjelet. Kapcsolatát a Rademacher-rendszerrel Paley [31] fedezte fel 1932-ben, aki azt igazolta, hogy a rendszer függvényei, az ún. *Walsh-függvények*, felírhatók Rademacher-függvények véges szorzataiként. Ezzel együtt egy új rendezését adta meg a Walsh-függvényeknek, amelyet *Walsh–Paley-rendszer* néven ismerünk. Ehhez felhasználta a természetes számok kettes számrendszerben történő

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k \quad (n_k = 0 \text{ vagy } n_k = 1)$$

előállítását. Az (n_0, n_1, \dots) sorozatot az n *diadikus kifejtésének* hívjuk. Segítségével értelmezzük a Walsh–Paley-rendszer függvényeit a következőképpen

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}).$$

A Walsh-függvényeknek van még egy másik gyakran vizsgált rendezése, az ún. *Walsh–Kaczmarz-rendszer*, amelyet Šneider [40] vezetett be 1948-ban.

A Rademacher-függvényeknek adhatunk egy „praktikusabb” előállítást. Tekintsük az $x \in [0, 1[$ számok diadikus tört alakjában szereplő

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}}$$

sort. Ha x diadikusan racionális, azaz ha x felírható $p/2^m$ alakban (valamilyen p természetes számmal), akkor azt az előállítást választjuk, amelynek a tagjai valamennyien nullák egy index után. Az (x_0, x_1, \dots) sorozatot az x *diadikus kifejtésének* hívjuk. Nem nehéz igazolni, hogy

$$r_k(x) = (-1)^{x_k} \quad (x \in [0, 1], k \in \mathbb{N}).$$

¹Adott (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér esetén jelölje $L^p(X)$ azokat az $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ mérhető komplex függvényeket, amelyekre $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$ teljesül, ahol $1 \leq p < \infty$. Ha mást nem mondunk, akkor a Lebesgue- vagy a Haar-mértéket feltételezzük.

Ennek következtében

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} x_k n_k} \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}).$$

A Fourier-analízis egyik alapvető kérdése az, hogy egy függvény Fourier-együtthatóiból milyen információt kaphatunk a függvény egyes tulajdonságairól. Ilyen kérdés például az, hogy a Fourier-együtthatókból elkészített operátorokból (ez lehet pl. a Fourier-sor, vagy a Fourier-sor részletösszegeiből készített szummáció) előállíthatók-e a függvény értékei majdnem minden pontban és ez milyen gyorsasággal lehetséges.

Egy $f \in L^1([0, 1[)$ függvény *Walsh–Fourier-együtthatóját* a következő módon értelmezzük:

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) w_k(x) dx \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ezekből elkészíthető a függvény

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) w_k(x) \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N})$$

Walsh–Fourier-sorának n -edik részletösszege, illetve a függvény

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i f(x) \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}^+, \sigma_0 f = 0).$$

n -edik Walsh–Fejér-közepe. Ha $f \in L^p([0, 1[)$, ahol $1 < p < \infty$, akkor $S_n f$ tart az f függvényhez L^p -normában n tart végtelen esetén. Szintén érvényes a trigonometrikus rendszerre kimondott Carleson–Hunt-tétel megfelelője, amely az előző feltételek mellett $S_n f$ majdnem mindenütti konvergenciáját is garantálja (lásd [37]). A Carleson–Hunt-tétel a XX. század egyik legnagyobb hatású matematikai eredménye. Az is igaz még, hogy ha $f \in L^p([0, 1[)$, ahol $1 \leq p < \infty$, akkor $\sigma_n f$ tart az f függvényhez majdnem mindenütt és L^p -normában n tart végtelen esetén (lásd [37]).

A fenti konvergencia-eredményekben fontos szerepet játszanak az operátorok magfüggvényei. Az *n -edik Dirichlet-féle magfüggvény* az első n darab Walsh–Paley-függvény összege, azaz

$$D_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x) \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}).$$

Az *n -edik Walsh–Fejér-féle magfüggvény* az első n darab Dirichlet-féle magfüggvény számtani átlaga, azaz

$$K_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i(x) \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}^+).$$

A magfüggvények azért fontosak az operátorok konvergenciájában, mert csak a rendszer függvényeitől függnek, és diadikus konvolúcióval

$$S_n f(x) := \int_0^1 f(t) D_n(x \dot{+} t) dt, \quad \text{illetve} \quad \sigma_n f(x) := \int_0^1 f(t) K_n(x \dot{+} t) dt$$

minden $x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Itt $\dot{+}$ a diadikus összeadást jelöli, azaz ha x és y diadikus kifejtése rendre (x_0, x_1, \dots) és (y_0, y_1, \dots) , akkor

$$x \dot{+} y := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^{k+1}}.$$

Fontos megemlíteni Schipp Ferenc (lásd [35] és [37]) és Gát György (lásd [11] és [12]) munkáit a Walsh–Fejér-magok, valamint a Cesàro-szummációk vizsgálatában.

A szerző részletesen foglalkozott a Walsh-Fejér-magok L^1 -beli normájának vizsgálatával. Az itt elért eredményeit a 2. fejezetben találjuk. További eredményeket ért el Walsh–Paley-rendszerre vonatkozó operátorok konvergenciájában. [23]-ban Ushangi Goginavával együtt vizsgálta az $S_n f$ konvergenciáját bizonyos feltételeket teljesítő pontokban, ha f egy általánosított korlátos fluktuáció függvény, nevezetesen, ha f eleme a $BO(p(n) \uparrow \infty)$ térnek. Másrészt, [2]-ben István Blahotával és Giorgi Tephnadzéval együtt a (C, α) -közepék maximál operátorához kapcsolódó operátor (H_p, L_p) típusúságát igazolta, ha $0 < p < 1/(1 + \alpha)$.

1.2. A Walsh–Fourier-sor 2^n -edik részletösszege

Az egyik jelentős különbség a Walsh-Paley és a trigonometrikus rendszer között az, hogy minden integrálható függvény Walsh-Fourier sorának van olyan részsorozata, ami majdnem mindenütt és L^1 -normában tart a függvényhez. Sőt, ha a függvény folytonosan kiterjeszthető a $[0, 1]$ zárt intervallumra, akkor a konvergencia egyenletes. Ez az egyik ok, ami miatt gyakran találkozunk ezzel a részsorozattal az alkalmazásokban.

Az említett részsorozat az

$$S_{2^n} f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \widehat{f}(k) w_k(x) \quad (x \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}).$$

Ahhoz, hogy le tudjuk írni a tulajdonságait szükségünk van a diadikus intervallumokra. Ezek az alábbi típusú intervallumok:

$$I_k(i) := \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k} \right] \quad (i = 0, 1, \dots, 2^k - 1, k \in \mathbb{N}), \quad I_k := I_k(0).$$

A következő eredményt Paley-lemmaként ismerjük:

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & (x \in I_n) \\ 0 & (x \in [0, 1[\setminus I_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$S_{2^n} f(x) = 2^n \int_{I_n(x)} f(y) dy \quad (x \in [0, 1]),$$

ahol $I_n(x)$ azt a diadikus intervallumot jelöli, amely tartalmazza az x értéket. Az előbbi összefüggés leegyszerűsíti a Walsh–Fourier-sor 2^n -edik részletösszegének vizsgálatát, és vele igazolhatjuk a már említett konvergencia-állításokat.

A 2^n -edik Walsh–Fejér-féle magfüggvényre is tudunk egy, a Paley-lemmához hasonló állítást igazolni, nevezetesen:

$$K_{2^k}(x) = \begin{cases} \frac{2^k+1}{2} & (x \in I_k) \\ 2^{j-1} & (x \in I_k(2^{k-j-1}), j = 0, 1, \dots, k-1) \\ 0 & (\text{a } [0, 1[\text{ többi pontjában}). \end{cases}$$

Ezt Yano [52] bizonyította be először. Fine [10]-ben egy egyszerűbb bizonyítást adott erre az állításra a

$$K_{2^k}(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} \right) D_{2^k}(x) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^k 2^{j-k} D_{2^k}(x \dot{+} 2^{-j}) \quad (x \in [0, 1])$$

formula bizonyításával, amely a diadikus derivált fogalmának bevezetésével is igazolható (lásd [37]).

Szoros kapcsolat van egy függvény Walsh–Fourier-sorának 2^n -edik részletösszege és diadikus folytonossági modulusa között. Ha egy függvény folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, akkor *diadikus folytonossági modulusát* a következő módon értelmezzük:

$$\omega_n f := \sup \{ |f(x+h) - f(x)| : x \in [0, 1[, 0 \leq h < 2^{-n} \}.$$

Ismert, hogy $\omega_n f$ tart nullához, ha $n \rightarrow \infty$. Igazolható (lásd [37]), hogy

$$|S_{2^n} f(x) - f(x)| \leq \omega_n f \quad (x \in [0, 1]).$$

Másrészt, egy integrálható f függvény L^1 -beli *diadikus folytonossági modulusát* a következő módon értelmezzük:

$$\omega_n^{(1)} f := \sup \left\{ \int_0^1 |f(x+h) - f(x)| dx : x \in [0, 1[, 0 \leq h < 2^{-n} \right\}.$$

$\omega_n^{(1)} f$ szintén nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$. Megmutatható (lásd [37]), hogy

$$\int_0^1 |S_{2^n} f(x) - f(x)| dx \leq \omega_n^{(1)} f.$$

1.3. A diadikus csoport és általánosításai

A Fourier-analízis modern megközelítésénél az ortonormált rendszereket lokálisan kompakt csoportokon értelmezzük, ezért a Walsh-sorok tanulmányozását úgy is érdemes végezni, hogy a Walsh-függvényeket a diadikus csoport karaktereinek tekintjük. A diadikus csoportot a következő módon definiáljuk. Legyen \mathbb{Z}_2 a másodrendű ciklikus csoport, azaz a $\{0, 1\}$ kételemű halmaz modulo 2 összeadással és diszkrét topológiával. Itt a normált Haar mérték az, amely minden egyelemű halmazhoz az $1/2$ mértéket rendeli. A G *diadikus csoport* azonos \mathbb{Z}_2 csoportok teljes direkt szorzata, amelyet szorzat topológiával és szorzat mértékkel látunk el. Ez a μ mérték a normált Haar mértéke lesz a G csoportnak. G műveletének jelölésére a $+$ szimbólumot használjuk. G elemei olyan $x = (x_0, x_1, \dots)$ sorozatok, amelyeknek minden tagja 0 vagy 1. Az $I_0(x) := G$,

$$I_n(x) := \{y \in G : y_i = x_i, \text{ ha } 0 \leq i < n\} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}^+)$$

ún. *diadikus intervallumok* bázist alkotnak G topológiájában.

A *karakterek* olyan $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvények, amire

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{és} \quad |f(x)| = 1 \quad (x, y \in G)$$

teljesül. Könnyen igazolható, hogy a diadikus csoport karakterei olyan valós értékű függvények, amelyek csak a $+1$ és a -1 értékeket vehetik fel (lásd [37]). 1949-ben Fine [9] észrevette a kapcsolatot a diadikus csoport és a $[0, 1[$ intervallum struktúrája között. Ebben a G karakterei megfelelnek a Walsh-függvényeknek, a μ Haar mérték megfelel a Lebesgue mértéknek, és az $x = (x_0, x_1, \dots)$ G -beli nullsorozatok megfelelnek a diadikus racionális számoknak.

Fine valószínűleg nem ismerte Vilenkin eredményeit, aki 1947-ben (lásd [50]) bevezette a később róla elnevezett rendszereket. A diadikus csoport a legegyszerűbb, de nem triviális modell a véges csoportok teljes direkt szorzatára, de Vilenkin véges, nem feltétlenül másodrendű ciklikus csoportokkal dolgozott. Az egyes \mathbb{Z}_{m_k} ($k \in \mathbb{N}$) ciklikus csoportokat diszkrét topológiával és a normált Haar mértékkel látta el, azaz minden egyelemű halmaz mértéke $1/m_k$. A G ún. *Vilenkin-csoport* tehát a \mathbb{Z}_{m_k} csoportok teljes direkt szorzata, amely szorzat topológiával és szorzat mértékkel rendelkezik. G elemei nem mások, mint az $x = (x_0, x_1, \dots)$ sorozatok, amelyeknek minden tagja $0 \leq x_k < m_k$ egész szám.

A Vilenkin-csoportok karaktereinek megadása előtt értelmezzük az

$$r_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{m_k}\right) \quad (x \in G_m, k \in \mathbb{N}, i := \sqrt{-1})$$

általánosított Rademacher-függvényeket. Látható, hogy $m_k = 2$ esetén éppen az eredeti Rademacher-függvényeket kapjuk. A Vilenkin-csoportok karaktereinek megadásához értelmezzük az $M_0 := 1$, $M_{n+1} := m_n M_n$ ($n \in \mathbb{N}$) általánosított hatványokat. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen felírható

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k \quad (n_k = 0, 1, \dots, m_k - 1)$$

alakban. A G Vilenkin-csoport karaktereit a

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (x \in G)$$

módon írhatjuk, amelyet *Vilenkin-rendszernek* hívunk, ami egy teljes ortonormált rendszer $L^2(G)$ -ben.

A \mathbb{Z}_{m_k} ciklikus csoportok rendjével egy $m = (m_0, m_1, \dots)$ sorozatot képzünk. Látható, hogy a Walsh–Paley-rendszert kapjuk, ha m az azonosan 2 sorozat. A Vilenkin–Fourier-sorok konvergenciájának természetét nagyban befolyásolja az m sorozat korlátossága. Ha m korlátos, akkor bizonyos hasonlósággal alkalmazhatók a Walsh–Paley-rendszerrel szokásos módszerek. Pl. igazolható, hogy minden $L^p(G)$ -beli függvény Fourier-sorának n -edik részletösszege a függvényhez konvergál majdnem mindenütt, ha $1 < p < \infty$. Nem korlátos m sorozat esetén ez a kérdés még nyitott. Ezért nagy jelentősége van annak az eredménynek, amely Young [53], Schipp [36] és Simon [39] egymástól függetlenül ért el, miszerint az m korlátosságától függetlenül minden $L^p(G)$ -beli függvény Fourier-sorának n -edik részletösszege a függvényhez konvergál L^p -normában, ha $1 < p < \infty$.

A Vilenkin-csoportoknak egy természetes, de nem egyszerű általánosítását kapjuk, ha a benne szereplő \mathbb{Z}_{m_k} ciklus csoportokat tetszőleges m_k -rendű véges (nem szükségszerűen kommutatív) csoportokra cseréljük, de a topológia és a mérték konstrukciójában nem változtatunk. Ekkor G egy kompakt, teljesen széteső csoport lesz, ami kétoldali eltolás invariáns, normált Haar-mértékkel rendelkezik. A nagy különbség az, hogy itt a karakterek már nem elegendők egy teljes ortonormált rendszer kiépítésére. Ehhez az absztrakt harmonikus analízis által kijelölt utat kell követnünk (lásd [25]).

Jelölje Σ_k a G_{m_k} csoport duálisát, azaz G_{m_k} azon folytonos irreducibilis unitér reprezentációit, amelyek nem ekvivalensek egymással. Ha $\sigma \in \Sigma_k$, akkor jelölje d_σ a σ reprezentációs tér dimenzióját, valamint legyen $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ ennek rögzített, de tetszőleges ortonormált bázisa. Az

$$u_{i,j}^{(\sigma)}(x) := \langle U_x^{(\sigma)} \zeta_i, \zeta_j \rangle \quad (i, j \in \{1, \dots, d_\sigma\}, x \in G_{m_k})$$

függvényeket az $U^{(\sigma)}$ reprezentáció $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{d_\sigma}\}$ bázisra vonatkozó koordinátafüggvényeinek nevezzük. Minden $\sigma \in \Sigma_k$ -hoz d_σ^2 számú koordinátafüggvény tartozik. Az összes koordinátafüggvények száma m_k . Legyen $\{\varphi_k^s : 0 \leq s < m_k\}$ a G_{m_k} csoport összes normalizált koordinátafüggvényének egy rendszere. Feltesszük, hogy φ_k^0 mindig az azonosan 1 karakter. Így minden $0 \leq s < m_k$ esetén létezik $\sigma \in \Sigma_k$, $(i, j \in \{1, \dots, d_\sigma\})$ úgy, hogy

$$\varphi_k^s(x) = \sqrt{d_\sigma} u_{i,j}^{(\sigma)}(x) \quad (x \in G_{m_k}).$$

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
φ^0	1	1	1	1	1	1
φ^1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
φ^3	1	-1	-1	-1	1	1
φ^4	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$
φ^5	0	0	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

1. táblázat. Az S_3 szimmetrikus csoport egy lehetséges rendszere

A normalizált koordinátafüggvények veszik át az általánosított Rademacher függvények szerepét. Azonban, ahogyan a fenti táblázatból látható, ezek a függvények más tulajdonságokkal rendelkeznek, pl. értékei nem feltétlenül 1 abszolút értékűek. A velük készített

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{n_k}(x_k) \quad (x \in G)$$

szorzatrendszert *reprezentatív szorzatrendszernek* nevezzük. A Weyl–Peter-tételből következik, hogy a ψ rendszer ortonormált és teljes $L^2(G)$ -n. Azonban nem kommutatív esetben ez a rendszer nem egyenletesen korlátos is lehet, és felveszi a 0 értéket, ami miatt a Vilenkin-rendszereknél alkalmazott technikák nehezen használhatók.

Reprezentatív szorzatrendszerekkel a szerző Gát Györggyel együtt intenzíven foglalkozott. [13]-ban sikerült általánosítani a Vilenkin-rendszerekre vonatkozó két ismert eredményt, nevezetesen azt, hogy minden integrálható függvény Fourier-sorának M_n -edik részletösszege a függvényhez konvergál majdnem mindenütt és L^1 -normában, illetve ha az m sorozat korlátos, akkor minden $L^p(G)$ -beli függvény Fejér-közepei a függvényhez konvergálnak L^p -normában, ha $1 \leq p < \infty$. Ez utóbbi eredmény érdekességét növeli, hogy később sikerült igazolni, hogy vannak korlátos m sorozattal rendelkező reprezentatív szorzatrendszerek, ahol csak $p = 2$ esetén lehet hasonló állítást kimondani a függvény Fourier-sorának n -edik részletösszegére (lásd a 3. fejezetet). Gát György [11] azt is igazolta, hogy minden integrálható függvény Fejér-közepei a függvényhez konvergálnak majdnem mindenütt, ha az m sorozat korlátos.

A szerzőnek több önálló eredménye jelent meg ezen a területen (lásd [42, 43, 44, 45, 46, 47]), és Gát Györggyel közösen (lásd [13, 14, 15, 16, 18, 19]). Ezen eredmények egyik része a szerző PhD értekezését képezték, de a 3. fejezetben szereplő eredmények ezután születtek.

2. A Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normája

A fejezetben kiemelt állítások a szerző önálló eredményei, amelyek az alábbi cikkben jelentek meg.

- [48] R. Toledo, On the boundedness of the L^1 -norm of Walsh-Fejér kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 457(1):153–178, 2018.

2.1. A $\|K_n\|_1$ sorozat előállítása

Az ortonormált rendszerekhez tartozó magfüggvények L^1 -beli normája fontos szerepet játszik az ortogonális sorok konvergenciájában. Ezt jól mutatja a Kolmogorov–Seliverstov–Plessner-tétel általánosítása (lásd [26, 27, 28, 32]), amely egy elegendő feltételt szab ortogonális sorok majdnem mindenütti konvergenciájához a Dirichlet-féle magfüggvények L^1 -beli normájához (az ún. Lebesgue-függvényekhez) kapcsolódó tulajdonság alapján.

Több neves matematikus foglalkozott magfüggvények L^1 -beli normájának vizsgálatával. Fontos kiemelni Fejér és Szegő eredményeit a klasszikus trigonometrikus rendszerre, ez utóbbi például (lásd [41]) egy explicit formulát adott a *Lebesgue-konstansokra*, azaz a Dirichlet-magfüggvények L^1 -normájára. Nevezetesen azt igazolta, hogy

$$L_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k(2n+1) - 1} \right).$$

A Walsh–Paley-rendszer esetén Fine adta meg az

$$L_n := \int_0^1 |D_n(x)| dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lebesgue-konstansok legfontosabb tulajdonságait (lásd [9]). Igazolta az

$$L_0 = 0, \quad L_n = L_m + 1 - \frac{m}{2^k} \quad (n = 2^k + m, \ 0 \leq m < 2^k, \ k \in \mathbb{N})$$

rekurzív formulát, amiből olyan tulajdonságok következnek, mint $L_{2n} = L_n$ ($n \in \mathbb{N}$), vagy $L_n = O(\log n)$, ha $n \rightarrow \infty$. Fontos megemlíteni az [1] és [30] cikkek eredményeit, ahol a szerzők éles alsó és felső becsléseket adtak a Lebesgue-konstansokra.

A magfüggvények és operátorok rekurzív előállítása nem ritka jelenség a Walsh–Paley-rendszer esetén. A Dirichlet-féle magfüggvényekre a következő rekurzió adható:

$$D_0(x) = 0, \quad D_n(x) = D_{2^k}(x) + \omega_{2^k}(x)D_m(x) \quad (n = 2^k + m, \ 0 \leq m < 2^k, \ k \in \mathbb{N})$$

minden $x \in [0, 1[$ esetén. A Fejér-féle magfüggvényeket is rekurzív módon kaphatjuk meg a

$$K_0(x) := 0, \quad nK_n(x) = 2^k K_{2^k}(x) + mD_{2^k}(x) + \omega_{2^k}(x)mK_m(x) \quad (x \in [0, 1[)$$

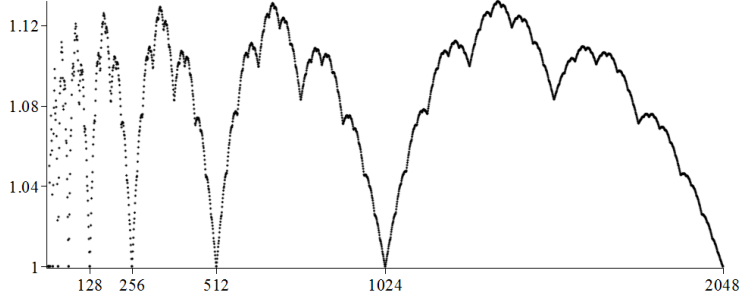
formulával, ahol $n = 2^k + m$ és $0 \leq m < 2^k$ (lásd [9]). A rekurzióban szereplő D_{2^k} és K_{2^k} magfüggvények explicit módon előállíthatók (lásd az 1.2. részt).

Az előzőek szerint jó ötletnek tűnik egy rekurzív előállítást keresni a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájára, és ennek a segítségével érdekes, eddig nem ismert tulajdonságokat keresni. Ez nem lenne feladat a trigonometrikus rendszer esetében, hiszen ott a

Fejér-magok L^1 -beli normája minden n -re megegyezik. Más a helyzet a Walsh–Paley-rendszer-nél. Itt a [48] cikk megjelenéséig csak annyit tudtunk, hogy a

$$\|K_n\|_1 = \int_0^1 |K_n(x)| dx \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájából álló sorozat korlátos, és $\|K_n\|_1 \leq 2$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén (lásd [37]). A következő ábrán láthatjuk a $\|K_n\|_1$ sorozat elemeinek értékét $n = 2048$ -ig.



1. ábra. A $\|K_n\|_1$ sorozat értékei $n = 2048$ -ig

A [48] cikkben sikerült a keresett rekurziót megtalálni. Ez bizonyos hasonlóságot mutat a Lebesgue-konstansokra adott rekurzióval. Először bevezetjük a következő jelölést. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$n'_j := \sum_{i=0}^j n_i 2^i \quad (j \in \mathbb{N}),$$

ahol (n_0, n_1, n_2, \dots) az n szám diadikus kifejtése. Más szavakkal $n'_j = n \bmod 2^{j+1}$. A rekurziós formulát a következő tételben látjuk.

2.1.1. Tétel (Toledo). *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és n olyan pozitív egész szám, amire az teljesül, hogy $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Ekkor a következő előállítás érvényes a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájára:*

$$n\|K_n\|_1 = n + n'_{k-1}\|K_{n'_{k-1}}\|_1 - \frac{\Gamma_n}{2^{k+1}},$$

ahol

$$\Gamma_n := 2n'_{k-1}(n'_{k-1} + 1) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(n_j 2^j (2^j - 1) + (1 - 2n_j) n'_{j-1} (n'_{j-1} + 1) \right). \quad (1)$$

A tétel bizonyításakor kaptunk egy nem kevésbé fontos állítást, nevezetesen azt, hogy $\|K_n\|_1 \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Ezt már a $\|K_n\|_1$ sorozat elemeinek ábrázolásából lehetett sejteni.

Vannak olyan helyzetek, ahol előnyösebb az $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$ jelölés alkalmazása, ahol $k_0 < k_1 < \dots < k_s$ nem negatív egész számok. Ebben az esetben az

$$n'_{k_i} = \sum_{r=0}^i 2^{k_r} \quad (i = 0, 1, \dots, s).$$

jelöléssel át lehet írni az előző tételben szereplő rekurziót a következő módon.

2.1.2. Tétel (Toledo). *Legyen $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$, ahol $k_0 < k_1 < \dots < k_s$ nem negatív egész számok. Ekkor*

$$n\|K_n\|_1 = n + n'_{k_{s-1}}\|K_{n'_{k_{s-1}}}\|_1 - \frac{\Gamma_n}{2^{k_s+1}},$$

ahol

$$\Gamma_n = n'_{k_{s-1}}(3n'_{k_{s-1}} + 2) + \sum_{i=0}^{s-1} \left(4^{k_i} + (k_{i+1} - k_i - 2)n'_{k_i}(n'_{k_i} + 1) \right).$$

Innen a rekurzió alkalmazásával a következő explicit formulát kapjuk:

$$n\|K_n\|_1 = \sum_{i=0}^s n'_{k_i} - \sum_{i=0}^s \frac{\Gamma_{n'_{k_i}}}{2^{k_i+1}}, \quad (2)$$

ahol $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$.

2.2. A $\|K_n\|_1$ sorozat tulajdonságai

Az előző tételekben szereplő előállításokkal szeretnénk megvizsgálni a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájának néhány tulajdonságát. Praktikus alkalmazhatóságukat az igazolja, hogy elemi számításokkal és egyszerű becslésekkel az (1) és a (2) formulákból rögtön megkapjuk a

$$\|K_n\|_1 \leq \frac{5}{4} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

becslést, ami jobb, mint az eddig ismert $\|K_n\|_1 \leq 2$ felső becslés (lásd [48]).

A Lebesgue-konstansoknál tudjuk, hogy $L_{2n} = L_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ez nem igaz a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normája esetén. Ugyanakkor a 2.1.1. Tétel és a 2.1.2. Tétel segítségével sikerült igazolni a következő tulajdonságot.

2.2.1. Tétel (Toledo). *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$\|K_n\|_1 \leq \|K_{2n}\|_1$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Továbbá az alábbi meglepő egyenlőséget is sikerült belátnunk:

2.2.2. Tétel (Toledo). *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ha $n, m \geq 2^k$ két olyan pozitív egész szám, amire igaz, hogy $n + m = 3 \cdot 2^k - 1$ teljesül, akkor*

$$n\|K_n\|_1 - m\|K_m\|_1 = n - m.$$

Az előző egyenlőség alkalmazásával, a már bebizonyított $\|K_n\|_1 \leq 5/4$ tulajdonság segítségével igazolhatjuk a következő tételt.

2.2.3. Tétel (Toledo). *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq 2^k$ két olyan pozitív egész szám, amire igaz, hogy $n + m = 3 \cdot 2^k - 1$ teljesül. Tegyük fel még, hogy $n < m$.*

1. *Ha $N = n + 2^{k+2} + \dots + 2^{k+2r}$ és $M = m + 2^{k+2} + \dots + 2^{k+2r}$, akkor*

$$\|K_N\|_1 \geq \|K_M\|_1$$

minden $r \in \mathbb{N}$ esetén. Továbbá az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$\|K_N\|_1 = \|K_M\|_1 = 1.$$

2. *Ha $N = n - 2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^{k+2r+1}$ és $M = m - 2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^{k+2r+1}$, akkor*

$$\|K_N\|_1 < \|K_M\|_1$$

minden $r \in \mathbb{N}$ esetén.

A 2.2.1. Tétel és a 2.2.3. Tétel segítenek megtalálni a $\|K_n\|_1$ sorozat legnagyobb értékét az $1 \leq n < 2^{k+1}$ szakaszban. Pontosabban legyen $n^*(k)$ az az index, amely kisebb, mint 2^{k+1} , és

$$\|K_{n^*(k)}\|_1 = \max\{\|K_n\|_1 : 1 \leq n < 2^{k+1}\}$$

teljesül. Ekkor az említett tételek segítségével azt kapjuk, hogy $n^*(k)$ diadikus kifejtése olyan, hogy a benne szereplő 1 és 0 komponensek felváltják egymást. Ezenkívül a $\|K_{n^*(k)}\|_1$ értékét is sikerült kiszámolni.

2.2.4. Tétel (Toledo). *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor*

1. *Ha k páratlan szám, akkor $n^*(k) = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^k$ és*

$$\|K_{n^*(k)}\|_1 = \frac{17}{15} - \frac{s+1}{4^{s+1}-1} + \frac{1}{5 \cdot 4^s},$$

ahol $s = \frac{k}{2}$.

2. *Ha k páros szám, akkor $n^*(k) = 2^1 + 2^3 + \dots + 2^k$ és*

$$\|K_{n^*(k)}\|_1 = \frac{17}{15} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{4^{s+1}-1} + \frac{1}{30 \cdot 4^s},$$

ahol $s = \frac{k-1}{2}$.

Mivel a 2.2.1. Tétel miatt a $\|K_{n^*(k)}\|_1$ sorozat monoton növekvő, így a Walsh–Fejér-magok L^1 -beli normájának szuprémuma ennek a sorozatnak a határértéke, ha $k \rightarrow \infty$. Ezt a határértéket nem nehéz a 2.2.4. Tétel alapján kiszámolni, amiből megkapjuk a végső eredményünket.

2.2.5. Tétel (Toledo).

$$\sup\{\|K_n\|_1 : n \in \mathbf{P}\} = \frac{17}{15}.$$

3. Normakonvergencia reprezentatív szorzatrendszeren

3.1. A Fourier-sorok L^p -normakonvergenciájáról

Ebben a részben olyan tételek szerepelnek, amelyek részben a szerző önálló, részben pedig Gát Györggyel közös eredményei. Ezek az alábbi cikkekben jelentek meg.

- [46] R. Toledo, Negative results concerning Fourier series on the complete product of S_3 . JIPAM. Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics, 9(4):7, 2008. Art. 99.
- [18] G. Gát és R. Toledo, Convergence in L^p -norm of Fourier series on the complete product of quaternion groups with bounded orders, Acta Mathematica Sinica, English Series, 30(9), 1566-1578, 2014.

A bevezetésben a Vilenkin-rendszerek általánosításaként adtuk meg a ψ_n reprezentatív szorzatrendszerek értelmezését. Említettük, hogy az m sorozat nem korlátossága megnehezíti az eredmények igazolásában alkalmazott technikákat. Reprezentatív szorzatrendszerek esetében olyan nehézségek is felléphetnek, mint az, hogy a rendszer nem egyenletesen korlátos is lehet, és felveszi a 0 értéket még korlátos m sorozat mellett is. Ezentúl, ha az m sorozat korlátos, akkor azt fogjuk mondani, hogy a G csoport korlátos. [13]-ban sikerült igazolni, hogy minden $L^p(G)$ -beli függvény Fejér-közepei a függvényhez konvergálnak L^p -normában, ha $1 \leq p < \infty$. Viszont az

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k \psi_k \quad (n \in \mathbb{N}^+), \quad \text{ahol} \quad \widehat{f}_k := \int_{G_m} f \overline{\psi_k} d\mu \quad (k \in \mathbb{N}),$$

Fourier-sor n -edik részletösszegéről csak annyit lehetett tudni, hogy a megfelelő állítás $p = 2$ -re igaz, de $p = 1$ -re nem igaz (lásd [43]). A szerző PhD értekezésében igazolta, hogy ha a G csoport korlátos és a

$$\Psi_k := \max_{n < M_k} \|\psi_n\|_1 \|\psi_n\|_\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

sorozat nem korlátos, akkor van olyan $1 < p < 2$, hogy az S_n operátor nem (p, p) típusú, és így van olyan $f \in L^p(G)$, hogy $S_n f$ nem tart f -hez L^p -normában.

Fontos megjegyezni, hogy nem kommutatív esetben ψ_n nem csak karakterek szorzatából állhat, és így Ψ_k nem biztos, hogy az azonosan 1 sorozat. A legegyszerűbb eset, amikor G az S_3 csoport teljes direkt szorzata az 1. táblázatban szereplő rendszerrel. Nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben

$$\Psi_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \rightarrow \infty, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty.$$

De az is előfordulhat, hogy G nem kommutatív és mégis $\Psi_k = 1$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Vegyük például a

$$\mathcal{Q}_m := \{[a, b] : a^{2m} = e, b^2 = a^m, bab^{-1} = a^{2m-1}\}$$

$4m$ -ed rendű általánosított kvaternió csoportot, ahol $m > 1$. Minden ilyen csoportnak van olyan normalizált koordinátafüggvényekből álló rendszere, hogy a velük elkészített reprezentatív szorzatrendszerhez tartozó Ψ_k sorozat azonosan 1. Ekkor azt mondjuk, hogy a rendszer *monomiális*. Ilyen látható a 2. táblázatban \mathcal{Q}_2 esetében.

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
φ^0	1	1	1	1	1	1	1	1
φ^1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
φ^2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
φ^3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
φ^4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}i$	0	0	0	0
φ^5	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}i$	0	0	0	0
φ^6	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}i$
φ^7	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}i$

2. táblázat. Az \mathcal{Q}_2 kvaternió csoporton értelmezett monomiális rendszer

[46]-ban a szerző folytatta az $S_n f$ normakonvergenciájának tanulmányozását. Ehhez a következő módon általánosította a Ψ_k sorozatot:

$$\Psi_k(p) := \max_{n < M_k} \|\psi_n\|_p \|\psi_n\|_q \quad \left(p \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, k \in \mathbb{N} \right),$$

ahol $q = \infty$, ha $p = 1$, és így $\Psi_k = \Psi_k(1)$. Sikertült fix k értékek mellett megállapítani a $\Psi_k(p)$ kifejezés monotonitását, mint p függvénye, és ezzel igazolni a következő állítást.

3.1.1. Tétel (Toledo). *Tegyük fel, hogy G korlátos, $1 < p < 2$, és $1/p + 1/q = 1$. Ha a $\Psi_k(p)$ sorozat nem korlátos, akkor az S_n operátor nem (p, p) , sem (q, q) típusú.*

Ebből a tételből a következő állítás igazolható.

3.1.2. Tétel (Toledo). *Tegyük fel, hogy G ugyanannak a véges csoportnak a teljes direkt szorzata, és minden előfordulása azonos normalizált koordinátafüggvényekkel rendelkezik, továbbá $1 < p < \infty$. Ha a Ψ_k sorozat nem korlátos, akkor az S_n operátor akkor és csak akkor (p, p) típusú, ha $p = 2$.*

Ez azt jelenti, hogy ha G az \mathcal{S}_3 csoport teljes direkt szorzata az 1. táblázatban szereplő rendszerrel, akkor minden $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ esetén létezik $f \in L^p(G)$, hogy $S_n f$ nem tart f -hez L^p -normában.

De mi történik, ha monomiális reprezentatív szorzatrendszerrel van szó? A kérdést [18]-ban tanulmányoztuk általánosított kvaternió csoportok teljes direkt szorzata esetén. Ebben az esetben sikerült pozitív eredményeket elérni, igaz egy speciális rendezést követeltük meg a koordinátafüggvényektől. Az alkalmazott módszer azon alapszik, hogy igazolták az S_n operátor gyengén $(1, 1)$ típusúságát.

3.1.3. Tétel (Gát–Toledo). *Legyen G általánosított kvaternió csoportok teljes direkt szorzata monomiális normalizált koordinátafüggvényekkel, ahol a karakterek elől állnak. Ha a G csoport korlátos, akkor minden $f \in L^p(G)$ -beli függvény esetén $S_n f$ az f függvényhez konvergál L^p -normában, ha $1 < p < \infty$.*

Ez azt jelenti, hogy ha G az \mathcal{Q}_2 csoport teljes direkt szorzata a 2. táblázatban szereplő rendszerrel, akkor minden $f \in L^p(G)$ -beli függvény esetén $S_n f$ az f függvényhez konvergál L^p -normában, ha $1 < p < \infty$.

3.2. A Dirichlet-magok maximális értéke

Az ebben a részben kiemelt állítások a szerző önálló eredményei, amelyek az alábbi cikkben jelentek meg.

- [47] R. Toledo, On the maximal value of Dirichlet kernels with respect to representative product systems, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 82, 431-447, 2010.

Tudjuk, hogy milyen fontos szerepük van a

$$D_n(x, y) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \overline{\psi_k}(y) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

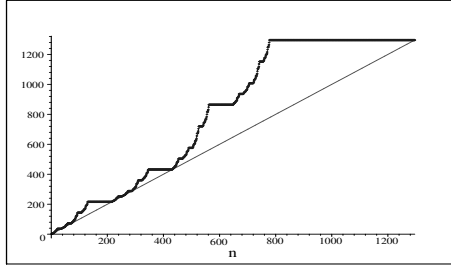
Dirichlet-féle magfüggvényeknek az S_n operátor konvergenciakérdéseiben. [13]-ban többek között sikerült olyan tulajdonságokat igazolni, mint a Paley-lemma megfelelője, azaz minden reprezentatív szorzatrendszer esetén, ha $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in G$, akkor

$$D_{M_n}(x, y) = \begin{cases} M_n & (x \in I_n(y)) \\ 0 & (x \notin I_n(y)). \end{cases}$$

Egy másik fontos tulajdonság a

$$D_n := \sup_{x, y \in G} |D_n(x, y)| \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dirichlet-magok maximális értékének viselkedése. Vilenkin-rendszerekre $D_n = n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Nem ez a helyzet általános reprezentatív szorzatrendszerek esetén, pl. ha G az \mathcal{S}_3 csoport teljes direkt szorzata az 1. táblázatban szereplő rendszerrel, akkor a 2. ábrán a 3.2.1. Tételben kimondott viselkedés látható (lásd [47]).



2. ábra. D_n ($n \leq 6^4$) az \mathcal{S}_3 csoportok teljes direkt szorzatán

3.2.1. Tétel (Toledo). D_n monoton növekvő sorozat. Másrészt, ha $A := \max\{k \in \mathbb{N} : n_k \neq 0\}$, akkor

$$n \leq D_n \leq M_{A+1} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Továbbá, [47]-ben sikerült pontosan megadni azokat az n indexeket, ahol $D_n = n$ teljesül általános reprezentatív szorzatrendszerek esetén. Másrészt a szerző vizsgálta a D_n/n hányados korlátosságát, és sikerült ezt visszavezetnie az egyes koordinátacsoportokra.

3.2.2. Tétel (Toledo). Legyen G a G_k véges csoportok teljes direkt szorzata. Ekkor a $\sup\{D_n/n : n \in \mathbb{N}^+\} < \infty$ akkor és csak akkor, ha

$$\sup \left\{ \frac{\sum_{s=0}^{r-1} |\varphi_k^s(x_k)|^2}{r} : k \in \mathbb{N}, 0 < r \leq m_k, x_k \in G_k \right\} < \infty.$$

3.3. Cesàro közepek L^1 -normakonvergenciája

A fejezet harmadik részében szereplő kiemelt állítások a szerző Gát Györggyel közös eredményei, amelyek az alábbi cikkben jelentek meg.

- [15] G. Gát és R. Toledo, On the converge in L^1 -norm of Cesàro means with respect to representative product systems, Acta Mathematica Hungarica, 123(1-2): 103-120, 2009.

Az α -rendű Cesàro közepek, vagy egyszerűen (C, α) közepek a

$$\sigma_n^\alpha f := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_k f, \quad \text{ahol} \quad A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

összefüggéssel értelmezett operátorok. A $(C, 0)$ közepek éppen a függvény Fourier-sorának n -edik részletösszegei, amikről [43]-ban sikerült igazolni, hogy nem $(1, 1)$ típusú operátorok. Ezzel szemben, a $(C, 1)$ közepek a függvény Fejér-közepeit adják, amiről [13]-ban igazoltuk, hogy $(1, 1)$ típusú operátorok, ha a G csoport korlátos. Érdekes tehát megvizsgálni a (C, α) közepek $(1, 1)$ típusúságát, ha $0 < \alpha < 1$, ami [15]-ben meg is történt.

Az 1. részben láttuk, hogy a

$$\Psi_k := \max_{n < M_k} \|\psi_n\|_1 \|\psi_n\|_\infty = \prod_{i=0}^{k-1} \max_{s < m_i} \|\varphi_i^s\|_1 \|\varphi_i^s\|_\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

sorozat fontos szerepet játszik a Fourier-sorok normakonvergenciájában. Most az

$$\alpha_0 := \limsup_{k \rightarrow \infty} \log_{m_k} \left(\max_{0 \leq s < m_k} \|\varphi_k^s\|_1 \|\varphi_k^s\|_\infty \right)$$

és

$$\alpha_1 := \liminf_{k \rightarrow \infty} \log_{m_k} \left(\max_{0 \leq s < m_k} \|\varphi_k^s\|_1 \|\varphi_k^s\|_\infty \right)$$

értékek segítenek a (C, α) közepekre vonatkozó kérdés vizsgálatában. Nem nehéz igazolni, hogy $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_0 < 1/2$. [15]-ben a következő eredményeket igazoltuk.

3.3.1. Tétel (Gát–Toledo). *Ha a G csoport korlátos és $\alpha_0 < \alpha < 1$, akkor a σ_n^α operátor $(1, 1)$ típusú.*

3.3.2. Tétel (Gát–Toledo). *Ha a G csoport korlátos és $0 < \alpha < \alpha_1$, akkor a σ_n^α operátor nem $(1, 1)$ típusú.*

Ennél több is igaz, hiszen a 3.3.1. Tétel feltételei mellett a σ_n^α operátor (p, p) típusú lesz minden $1 < p < \infty$ esetén, és így bármely $f \in L^p(G)$ függvényre $\sigma_n^\alpha f \rightarrow f$ L^p -normában (n tart végtelen). Ha a G csoport monomiális, akkor $\alpha_0 = 0$. Ezért ebből a tételből következik az alábbi állítás.

3.3.1. Következmény (Gát–Toledo). *Ha a G csoport korlátos és monomiális, akkor minden $f \in L^p(G)$ esetén $\sigma_n^\alpha f \rightarrow f$ L^p -normában (n tart végtelen), ha $1 < p < \infty$.*

Fontos megjegyezni, hogy a kérdés nyitott, ha $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek numerikus megoldása Walsh-függvényekkel

A fejezetben kiemelt állítások a szerző önálló vagy Gát Györggyel együtt elért eredményei, amelyek az alábbi cikkekben jelentek meg.

- [20] G. Gát és R. Toledo, Estimating the error of the numerical solution of linear differential equations with constant coefficients via Walsh polynomials. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 31(2): 309–330, 2015.
- [21] G. Gát és R. Toledo, Numerical solution of linear differential equations by Walsh polynomials approach. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 57(2): 217–254, 2020.
- [49] R. Toledo, Solving systems of linear differential equations by Walsh polynomials approach, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Computatorica* (megjelenés alatt), 53, 2021.

4.1. Előzetes eredmények

A Walsh-függvényeket széles körben alkalmazzák a digitális világban. Ennek fő oka, hogy olyan ortonormált rendszert alkotnak, amely csak két értéket vehet fel. Ezt felismerve a 70-es években több kutató kezdett intenzíven foglalkozni a Walsh-függvények alkalmazásaival, pl. a távközlésben és a jelfeldolgozásban (lásd pl. [22, 34]). Corrington [7] volt az első, aki olyan módszert fejlesztett ki, amivel magasabb rendű lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték problémákat lehetett megoldani Walsh-függvények segítségével. Corrington módszere eléggé komplikált volt, sok tisztázatlan részletet hagyott maga után és jelentős mennyiségű számítást igényelt.

1975-ben C. F. Chen és C. H. Hsiao továbbfejlesztették Corrington-módszerét úgy, hogy az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre adtak egy Walsh-függvényeken alapuló megoldást. Módszerük jóval egyszerűbb, könnyebben implementálható, és gyorsan előállítható mátrixokkal dolgozik. Chen és Hsiao módszere lényegesen különbözik Corrington módszerétől. Fokozatos közelítések helyett a kezdeti érték probléma pontos megoldását (és nem a deriváltját!) olyan Walsh-polinomokkal közelíti, amelyeknek együtthatóit egy lineáris egyenletrendszerből tudjuk előállítani. Azonban a módszert kizárólag állandó együtthatós esetekre dolgozták ki.

Abban az évben Chen és Hsiao több cikket is írt, ezekben megmutatták a módszerük működését különféle gyakorlati problémák megoldásában (lásd [3, 4, 5, 6]). A módszer szintén adaptálható elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenletek megoldására kétdimenziós Walsh-Fourier-sorok alkalmazásával (lásd [38]).

Chen és Hsiao módszerének alapötlete, hogy diszkretizálják a problémával ekvivalens integrálegyenletet úgy, hogy minden benne szereplő függvényt a Walsh-Fourier-sorának 2^n -edik részletösszegével helyettesítik, még a benne szereplő integrálfüggvényt is. A pontos megoldást egy Walsh-polinommal helyettesítik. Ezzel egy lineáris egyenletrendszert kapnak, amelynek ismeretlenei a Walsh-polinom együtthatói lesznek. Ez a Walsh-polinom közelítő megoldása lesz a probléma pontos megoldásának.

Azonban Chen és Hsiao nem foglalkoztak a numerikus megoldás elemzésével. Nem nézték meg, hogy a javasolt numerikus megoldás létezik-e, vagy megfelelő módon tart-e

a probléma pontos megoldásához. Másrészt a megfelelő pontosság eléréséhez egy nagyon nagy méretű, $m2^n$ darab egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol m a probléma egyenleteinek száma és 2^n a numerikus megoldásban szereplő Walsh-függvények száma. Ráadásul az egyenletrendszer megoldása után fel kell építeni a Walsh-polinomot a kapott együtthatóiból, ami szintén idő- és számításigényes művelet. Ez volt az oka annak, hogy a szerző Gát Györggyel együtt elkezdett foglalkozni a módszer matematikai elemzésével (lásd [17, 20]). Először a legegyszerűbb esettel foglalkoztunk, azaz a

$$y' + ay = q(x), \quad y(0) = \eta,$$

kezdeti érték feladattal, ahol $a, \eta \in \mathbb{R}$ konstansok és $q: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és integrálható függvény. Azt igazoltuk, hogy csak abban az esetben nem létezik numerikus megoldás, ha $2^{n+1} = -a$ teljesül, ami legfeljebb egy adott n értéknél fordulhat elő. Hibabecslés megadása mellett sikerült igazolnunk, hogy a numerikus megoldások egyenletesen tartanak a probléma pontos megoldásához, ha $n \rightarrow \infty$. Továbbá sikerült egy gyors iterációs eljárást kifejleszteni, ami közvetlenül a Walsh-polinom értékeit állítja elő anélkül, hogy egyenletrendszereket kellene megoldani.

Ezután sor került a nem állandó együtthatós kezdeti érték problémák tanulmányozására, és sikerült általánosítani az állandó együtthatós problémáknál elért eredményeket. Azt láttuk be, hogy legfeljebb véges sok n érték mellett nem tudunk numerikus megoldást előállítani. Ugyanígy sikerült egyenletes konvergenciát igazolni, és egy iterációs eljárást konstruálni. Ezek az eredmények a [21] cikkben jelentek meg.

Fontos megjegyezni, hogy próbáltuk a problémát minél általánosabb feltételek mellett tárgyalni. Ez abban nyilvánul meg, hogy a benne szereplő függvények nem feltétlenül folytonosak a $[0, 1]$ zárt intervallumon. A feltétel az volt, hogy a függvények folytonosak legyenek a $[0, 1[$ intervallumon és Lebesgue-integrálhatók. Ilyen feltételek mellett azért lehetett sikereket elérni, mert a módszer integrálfüggvényekkel dolgozik, amik már folytonosak lesznek a $[0, 1]$ zárt intervallumon. Továbbá nem a pontos megoldás deriváltjára adtunk lépcsős függvényekkel történő közelítést, mint más hasonló módszerek esetében (lásd pl. [29]), hanem magára a pontos megoldásra.

Azonban, ha részletesen elemezzük a javasolt módszert, akkor azt látjuk, hogy a folytonosság inkább a kezdeti érték probléma pontos megoldásának a létezéséhez kellett. Ez a felismerés oda vezetett, hogy a szerző ki tudta terjeszteni a módszert egy jóval általánosabb probléma megoldására.

Tudjuk, hogy ha I egy intervallum és f egy folytonos vektorértékű függvény, akkor az

$$y' = f(x, y), \quad y(\xi) = \eta \quad (x \in I)$$

kezdeti érték feladat ekvivalens az

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(x, y(x)) dx \quad (x \in I)$$

integrálegyenlettel. Ha f nem folytonos az első változójában (x), de folytonos a második változójában (y), akkor több szerző úgy értelmezi, hogy a kezdeti érték feladat megoldása a hozzá tartozó integrálegyenlet megoldása legyen, ha ez utóbbi megoldható. Éppen ez történik lineáris differenciálegyenlet-rendszerek esetében, ha a benne szereplő függvények integrálhatók az I minden zárt részintervallumán, hiszen ekkor az integrálegyenletnek van egyértelmű folytonos megoldása a teljes I intervallumon (lásd [8]). Ezentúl erre a megoldásra fogunk Walsh-polinom alakú közelítő megoldást keresni. A nem folytonos jobboldallal rendelkező differenciálegyenleteknek számos alkalmazási területe van.

4.2. Az általános probléma és a fő eredmények

Tekintsük a következő általános elsőrendű lineáris differenciál-egyenletrendszerre vonatkozó

$$y' + P(x)y = q(x), \quad y(\xi) = \eta, \quad (3)$$

kezdeti érték problémát a $[0, 1]$ intervallumon, ahol $\xi \in [0, 1[$, a $P(x)$ mátrix elemei a

$$p_{k,l}, : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (k, l = 1, 2, \dots, m)$$

integrálható függvények, a $q(x)$ vektor elemei a

$$q_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

integrálható függvények, illetve az η vektor elemei az $\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_m$ számok és $y(x)$ az $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ megoldásokból álló vektor.

A folytonosság szükséges ahhoz, hogy a (3) problémának mindig legyen differenciálható megoldása. De nem ezt az utat fogjuk követni. A $P(x)$ mátrixban és a $q(x)$ vektorban szereplő függvények integrálhatósága garantálja, hogy az

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x (q(t) - P(t)y(t)) dt \quad (x \in [0, 1]) \quad (4)$$

vektor-integrálegyenletnek egyetlen megoldása legyen a $[0, 1]$ intervallumon, ami folytonos függvény. Ezt a megoldást fogjuk Walsh-polinomokkal megközelíteni, nevezetesen a megoldás minden y_k komponensére konstruálunk egy

$$y_k^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_{k,i}^{(n)} w_i(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m, x \in [0, 1]) \quad (5)$$

alakú függvényt, ahol w_i a Walsh-Paley-rendszer i -edik függvénye.

Erre a célra a következő módon fogjuk diszkrétizálni a (4) integrálegyenletet. Legyen n egy pozitív egész szám. Először értelmezzük az alábbi mátrixot és oszlopvektorokat:

$$S_{2^n} p(x) = (S_{2^n} p_{i,j}(x))_{i,j=1}^m, \quad \bar{y}_n(x) = (y_i^{(n)}(x))_{i=1}^m, \quad S_{2^n} q(x) = (S_{2^n} q_i(x))_{i=1}^m,$$

ahol általában $S_{2^n} g(x)$ nem más, mint az g függvény Walsh-Fourier-sorának 2^n -edik részletösszege az $x \in [0, 1[$ pontban. Vegyük észre, hogy a fenti mátrix és a vektorok állandók az $1/2^n$ hosszúságú diadikus intervallumokon. Az integrálegyenletben az $y(x)$, $P(x)$ és $q(x)$ mátrixokat rendre a $\bar{y}_n(x)$, $S_{2^n} p(x)$ és $S_{2^n} q(x)$ mátrixokkal fogjuk helyettesíteni. De ez nem minden, az integrálfüggvényt is diszkrétizálni fogjuk, erre a Walsh-Fourier-sorának 2^n -edik részletösszegét vesszük (lásd [49]).

A leírt módon azt a $\bar{y}_n(x)$ Walsh-polinomokból álló vektort keressük, ami kielégíti az

$$\bar{y}_n(x) = \eta + S_{2^n} \left(\int_{\xi}^{\cdot} (S_{2^n} q(t) - S_{2^n} p(t) \bar{y}_n(t)) dt \right) (x) \quad (x \in [0, 1]). \quad (6)$$

diszkrétizált integrálegyenletet. Vegyük észre, hogy (6) ekvivalens az

$$y_k^{(n)}(x) = \eta_k + S_{2^n} \left(\int_{\xi}^{\cdot} \left(S_{2^n} q_k(t) - \sum_{l=1}^m S_{2^n} p_{k,l}(t) y_l^{(n)}(t) \right) dt \right) (x) \quad (7)$$

egyenletrendszerrel, ahol $k = 1, 2, \dots, m$. Azt mondjuk, hogy \bar{y}_n a (4) vektor integrálegyenlet numerikus megoldása.

A következő két eredmény [49]-ben jelent meg differenciál-egyenletrendszerekre, és általánosítja a szerző Gát Györggyel együtt elért, [21]-ben megjelent eredményeit egy egyenletből álló problémák esetén.

4.2.1. Tétel (Toledo). *Legyenek $p_{k,l}, q_k$ a $[0, 1]$ intervallumon integrálható függvények minden $k, l = 1, 2, \dots, m$ esetén. Ekkor véges sok n értéktől eltekintve egyetlen olyan \bar{y}_n Walsh-polinomokat tartalmazó vektor létezik, amely kielégíti a (6) diszkrétizált integrál-egyenletet.*

Más szavakkal a (4) vektor-integrálegyenletnek véges sok n értéktől eltekintve van egyértelmű numerikus megoldása.

4.2.2. Tétel (Toledo). *Legyenek $p_{k,l}, q_k$ a $[0, 1]$ intervallumon integrálható függvények minden $k, l = 1, 2, \dots, m$ esetén. Ekkor \bar{y}_n egyenletesen tart a (4) vektor integrálegyenlet pontos megoldásához a $[0, 1[$ intervallumon.*

Az előbbi \bar{y}_n kiterjeszthető az $x = 1$ pontra a baloldali határértékével. Mivel az y megoldás folytonos függvény, így a 4.2.2. Tétel garantálja \bar{y}_n egyenletes konvergenciáját a $[0, 1]$ zárt intervallumon.

A 4.2.2. Tétel bizonyítása összetett, közel 10 oldalas. Benne a következő hibabecslés olvasható:

$$\|y(x) - \bar{y}_n(x)\| \leq \omega_n y + 2M_n e^2 \int_0^1 \|P(t)\| dx$$

véges sok n értéktől eltekintve, ahol

$$M_n := \omega_n^{(1)} q + \|y\|_\infty \omega_n^{(1)} P + 2m L_n \omega_n y,$$

$$L_n := \max_{\substack{0 \leq i < 2^n \\ 1 \leq k, l \leq m}} \left\{ \frac{1}{2^n} \left| S_{2^n} p_{k,l} \left(\frac{i}{2^n} \right) \right| \right\},$$

valamint

$$\|A\| = \|(a_{k,l})_{l,k=1}^m\| := \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{l=1}^m |a_{k,l}| \right\}.$$

A fenti mátrixnormával értelmezhető a diadikus folytonossági modulus függvényekből álló mátrixok esetében. Nevezetesen, legyen $P(x)$ olyan mátrix, amelynek minden k -adik sorában és l -edik oszlopában a

$$p_{k,l} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

folytonos függvény áll, és $\Omega_n P$ az $\omega_n p_{k,l}$ diadikus folytonossági modulusokból álló mátrix. Ekkor $P(x)$ diadikus folytonossági modulusát az

$$\omega_n P := \|\Omega_n P\|$$

összefüggéssel értelmezzük. Hasonlóan tudjuk egy integrálható függvényekből álló $P(x)$ mátrix L^1 -beli diadikus folytonossági modulusát értelmezni. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$\|S_{2^n} P(x) - P(x)\| \leq \omega_n P \quad \text{és} \quad \left\| \int_0^1 |S_{2^n} P(x) - P(x)| dx \right\| \leq \omega_n^{(1)} P.$$

Fontos megjegyezni, hogy itt egy mátrix abszolút értéke a mátrix elemeinek abszolút értékéből álló mátrixot jelenti. Az előbb leírtak érvényesek oszlopmátrixokra is.

4.3. A numerikus megoldás együtthatóinak előállítása

Mielőtt rátérünk a módszer ismertetésére, szükségünk lesz két új fogalom bevezetésére. Egy $2^n \times 2^n$ -es A mátrixot *diadikusan cirkulánsnak* nevezünk, ha az $a_{i,j}$ elemeit az $a_0, a_1, \dots, a_{2^n-1}$ számok generálják az alábbi módon

$$a_{i,j} = a_{i \oplus j} \quad (i, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1), \quad \text{ahol} \quad i \oplus j := \sum_{k=0}^{\infty} |i_k - j_k| 2^k$$

az i és j nemnegatív egész szám diadikus összege (lásd [24]). Ebben (i_0, i_1, \dots) és (j_0, j_1, \dots) rendre i és j diadikus kifejtése. [21]-ben Gát Györggyel igazoltuk a diadikusan cirkuláns mátrixok elemi tulajdonságait.

4.3.1. Tétel (Gát–Toledo). *Legyen A és B rendre az*

$$a(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j w_j(x) \quad \text{és} \quad b(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j w_j(x)$$

Walsh-polinom együtthatói által generált diadikusan cirkuláns mátrixok, és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Ekkor az azonos típusú diadikusan cirkuláns mátrixok kommutatív algebrát alkotnak. Továbbá

- $\alpha A + \beta B$ az $\alpha a(x) + \beta b(x)$ Walsh-polinom együtthatói által generált diadikusan cirkuláns mátrix.
- AB az $a(x)b(x)$ Walsh-polinom együtthatói által generált diadikusan cirkuláns mátrix, és ezért $AB = BA$.
- $\det A = \prod_{k=0}^{2^n-1} a(\frac{k}{2^n})$.

Egy másik fogalom a *háromszögfüggvények* fogalma, amik a Walsh–Paley-rendszer tagjainak integrálfüggvényei, azaz

$$J_k(x) := \int_0^x w_k(t) dt \quad (k \in \mathbf{N}, 0 \leq x < 1).$$

A háromszögfüggvények $\hat{J}_{k,j}$ Walsh–Fourier-együtthatóival felírhatjuk a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{J}_{k,j} w_j(x)$$

Walsh–Fourier-sort. Ezeknek a $\hat{J}_{k,j}$ együtthatóknak az értéke gyakran nulla. Pontos kiszámításuk [20]-ban található a Fine-formula alapján (lásd [9]). Minden $n \in \mathbf{N}$ esetén jelölje $\hat{J}^{(n)}$ azt a mátrixot, amelynek elemei $\hat{J}_{k,j}$, ahol $k, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Az ilyen mátrixok iterációval könnyen előállíthatók, hiszen

$$\hat{J}^{(0)} = \left(\frac{1}{2} \right), \quad \hat{J}^{(n)} = \left(\frac{\hat{J}^{(n-1)}}{\frac{1}{2^{n+1}} J_{2^{n-1}}} \mid \frac{-\frac{1}{2^{n+1}} J_{2^{n-1}}}{0_{2^{n-1}}} \right) \quad (n > 0).$$

Kapcsolatukat a cirkuláns mátrixokkal [21]-ben igazoltuk, amelynek fontos szerepe van a 4.2.1. Tétel megfelelőjének a bizonyításában.

4.3.2. Tétel (Gát–Toledo). Legyen A és B rendre az

$$a(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j w_j(x) \quad \text{és} \quad b(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j w_j(x).$$

Walsh-polinomok együtthatói által generált diadikusan cirkuláns mátrix. Ekkor

$$\det(A + \widehat{J}^{(n)\top} B) = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(a\left(\frac{i}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} b\left(\frac{i}{2^n}\right) \right).$$

Mivel a kezdeti érték tetszőleges $0 \leq \xi < 1$ pontban lehet, ezért a $\widehat{J}^{(n)}$ mátrixhoz hasonlóan értelmezzük a $\widehat{J}_\xi^{(n)}$ mátrixot az

$$\int_\xi^x w_i(t) dt \quad (i \in \mathbb{N}, 0 \leq x < 1)$$

integrálfüggvények Walsh–Fourier-együtthatóik segítségével. A $\widehat{J}_\xi^{(n)}$ mátrix csak az első oszlopában különbözik a $\widehat{J}^{(n)}$ mátrixtól. Az ebben az oszlopban lévő i -edik eleméből ki kell vonni az $w_i(\xi)(\xi - \xi^{(n)})$ értéket, ahol $\xi^{(n)}$ a ξ értékhez legközelebb eső $p/2^n$ alakú diadikus racionális szám.

A numerikus megoldás együtthatóit előállító lineáris egyenletrendszer leírásához szükséges a következő jelölések bevezetése: legyen $n \in \mathbb{N}^+$ egy rögzített szám, továbbá

$$\mathbf{c}_k := (c_{k,0}^{(n)}, c_{k,1}^{(n)}, \dots, c_{k,2^n-1}^{(n)})^\top \quad \text{és} \quad \mathbf{w}(x) := (w_0(x), w_1(x), \dots, w_{2^n-1}(x))^\top.$$

Ekkor $y_k^{(n)}(x) = \mathbf{w}(x)^\top \mathbf{c}_k$. Legyenek továbbá $\widehat{\mathbf{p}}_{k,1}$ és $\widehat{\mathbf{q}}_k$ rendre a $p_{k,l}$ és q_k függvények Walsh–Fourier-együtthatóiból álló vektorok, azaz a vektorok i -edik komponense

$$\widehat{\mathbf{p}}_{k,1}_i := \int_0^1 p_{k,l}(t) w_i(t) dt \quad \text{és} \quad \widehat{\mathbf{q}}_k_i := \int_0^1 q_k(t) w_i(t) dt.$$

Ekkor

$$S_{2^n} p_{k,l}(x) = \mathbf{w}(x)^\top \widehat{\mathbf{p}}_{k,1} \quad \text{és} \quad S_{2^n} q_k(x) = \mathbf{w}(x)^\top \widehat{\mathbf{q}}_k.$$

A $\widehat{\mathbf{p}}_{k,1}$ vektorokkal elkészíthető a

$$\widehat{P}_{k,l} := \left(\widehat{\mathbf{p}}_{k,1}_{i \oplus j} \right)_{i,j=0}^{2^n-1}$$

mátrix, ami az $S_{2^n} p_{k,l}(x)$ Walsh-polinom által generált diadikusan cirkuláns mátrix. Legyen még $\mathbf{e}_0 := (1, 0, \dots, 0)^\top$. Ekkor $\eta_k = \mathbf{w}(x)^\top \eta_k \mathbf{e}_0$, hiszen $w_0(x) = 1$ minden $x \in [0, 1[$ esetén.

Ha az előbbi mátrixjelölésekhez hozzávesszük a $\widehat{J}_\xi := \widehat{J}_\xi^{(n)}$ mátrixot, akkor a (7) diszkrétizált integrálegyenletek a következő módon írhatók (lásd [49]):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x)^\top \mathbf{c}_k &= \eta_k + S_{2^n} \left(\int_\xi^x \left(\mathbf{w}(t)^\top \widehat{\mathbf{q}}_k - \sum_{l=1}^m \mathbf{w}(t)^\top \widehat{\mathbf{p}}_{k,l} \mathbf{w}(t)^\top \mathbf{c}_l \right) dt \right) (x) = \\ &= \mathbf{w}(x)^\top \left(\eta_k \mathbf{e}_0 + \widehat{J}_\xi^\top \left(\widehat{\mathbf{q}}_k - \sum_{l=1}^m \widehat{P}_{k,l} \mathbf{c}_l \right) \right). \end{aligned}$$

Ennek mindkét oldala egy-egy Walsh-polinom. A megfelelő együtthatók egyenlőségéből a

$$\mathbf{c}_k + \sum_{l=1}^m \widehat{J}_\xi^\top \widehat{P}_{k,l} \mathbf{c}_l = \eta_k \mathbf{e}_0 + \widehat{J}_\xi^\top \widehat{\mathbf{q}}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

$m2^n$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelynek ismeretlenei $c_{k,i}^{(n)}$, ahol $k = 1, 2, \dots, m$ és $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, azaz az (5) numerikus megoldás együtthatói.

4.4. A numerikus megoldás előállítása iterációval

Az iteráció alapja annak felismerése, hogy az

$$y_k^{(n)}(x) = \eta_k + S_{2^n} \left(\int_{\xi}^{\cdot} \left(S_{2^n} q_k(t) - \sum_{l=1}^m S_{2^n} p_{k,l}(t) y_l^{(n)}(t) \right) dt \right) (x)$$

diszkretizált integrálegyenletek olyanok, hogy az integrálban szereplő függvények állandók a $1/2^n$ hosszúságú diadikus intervallumokon. [49]-ben sikerült pontosan meghatározni az ilyen függvények integrálfüggvényei Walsh–Fourier-sorának 2^n -edik részletösszegeinek értékeit. Ebből a következő iterációt kaptuk.

Legyen i^* az az egész szám, amire

$$\frac{i^*}{2^n} \leq \xi < \frac{i^* + 1}{2^n} \quad \text{teljesül, és jelölje} \quad d_n(\xi) := i^* - 2^n \xi + \frac{1}{2}.$$

Ekkor

- Ha $i = i^*$, akkor

$$\left(\mathcal{J} + \frac{d_n(\xi)}{2^n} S_{2^n} p \left(\frac{i^*}{2^n} \right) \right) \bar{y}_n \left(\frac{i^*}{2^n} \right) = \eta + \frac{d_n(\xi)}{2^n} S_{2^n} q \left(\frac{i^*}{2^n} \right).$$

- Ha $i > i^*$ akkor

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{J} + \frac{1}{2^{n+1}} S_{2^n} p \left(\frac{i}{2^n} \right) \right) \bar{y}_n \left(\frac{i}{2^n} \right) &= \eta + \frac{d_n(\xi) + \frac{1}{2}}{2^n} \left(S_{2^n} q \left(\frac{i^*}{2^n} \right) - S_{2^n} p \left(\frac{i^*}{2^n} \right) \bar{y}_n \left(\frac{i^*}{2^n} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2^n} \sum_{j=i^*+1}^{i-1} \left(S_{2^n} q \left(\frac{j}{2^n} \right) - S_{2^n} p \left(\frac{j}{2^n} \right) \bar{y}_n \left(\frac{j}{2^n} \right) \right) + \frac{1}{2^{n+1}} S_{2^n} q \left(\frac{i}{2^n} \right). \end{aligned}$$

- Ha $i < i^*$ akkor

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{J} - \frac{1}{2^{n+1}} S_{2^n} p \left(\frac{i}{2^n} \right) \right) \bar{y}_n \left(\frac{i}{2^n} \right) &= \eta + \frac{d_n(\xi) - \frac{1}{2}}{2^n} \left(S_{2^n} q \left(\frac{i^*}{2^n} \right) - S_{2^n} p \left(\frac{i^*}{2^n} \right) \bar{y}_n \left(\frac{i^*}{2^n} \right) \right) - \\ &- \frac{1}{2^n} \sum_{j=i+1}^{i^*-1} \left(S_{2^n} q \left(\frac{j}{2^n} \right) - S_{2^n} p \left(\frac{j}{2^n} \right) \bar{y}_n \left(\frac{j}{2^n} \right) \right) - \frac{1}{2^{n+1}} S_{2^n} q \left(\frac{i}{2^n} \right). \end{aligned}$$

ahol \mathcal{J} az $m \times m$ -es egységmátrix. Az iteráció minden lépésében egy m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer oldunk meg. A kezdő lépésben kiszámítjuk a numerikus megoldásvektor értékét abban a diadikus intervallumban, ahol a ξ található. Ennek segítségével kiszámítjuk a tőle jobbra eső diadikus intervallumhoz tartozó értéket, és így tovább az utolsó $[1 - 1/2^n, 1[$ intervallumig. Ezután visszafelé megyünk a ξ -nél kisebb intervallumokhoz tartozó értékek kiszámítására.

A fenti eljárást a szerző Matlab-ban implementálta. Az következő kódban szereplő függvény előállítja az \bar{y}_n numerikus megoldás értékeit az $1/2^n$ hosszúságú diadikus intervallumokon, és ezeket az $yNum$ mátrixban adja vissza. Az intervallumok kezdőpontjai az x vektorba kerülnek.


```

1 function [x,yNum]=odeLinWalsh(n,PNumF,qNumF,xi,eta,atol,rtol)
2 % Solving linear initial value problems using Walsh functions
3 % by the iterative method
4
5 % Input variables
6 % n: it sets the dimension of the solution
7 % PNumF: matrix of coefficients (function handle)
8 % qNumF: vector of free terms (function handle)
9 % xi: initial point
10 % eta: exact values at the initial point
11 % atol: absolute tolerance used only for numerical integration
12 % rtol: relative tolerance used only for numerical integration
13
14 % Auxiliary variables
15 dim = 2^n; % dimension of the solution
16 m = length(eta); % number of equations
17 iStart = floor(xi*dim)+1; % index of the initial point
18 dev = iStart-dim*xi; % dev = d_n(xi)-1/2
19 Id = eye(m); % identity matrix of size m
20
21 % Output variables
22 yNum = zeros(m,dim); % values of the numerical solution
23 x = 0:1/dim:1-1/dim; % left endpoints of diadic intervals
24
25 % Computation of the integral means
26 FSp = cell(1,dim);
27 FSq = cell(1,dim);
28 for i = 1:dim
29     FSp{i} = integral(PNumF,(i-1)/dim,i/dim,'ArrayValued',true,...
30                     'AbsTol',atol,'RelTol',rtol);
31     FSq{i} = integral(qNumF,(i-1)/dim,i/dim,'ArrayValued',true,...
32                     'AbsTol',atol,'RelTol',rtol);
33 end
34
35 % Value at the starting index
36 A = Id+(dev-1/2)*FSp{iStart};
37 b = eta+(dev-1/2)*FSq{iStart};
38 yNum(:,iStart) = linsolve(A,b);
39
40 % Forward computations
41 szum = eta+dev*(FSq{iStart}-FSp{iStart}*yNum(:,iStart));
42 for k = iStart+1:dim
43     A = Id+1/2*FSp{k};
44     b = szum+1/2*FSq{k};
45     yNum(:,k) = linsolve(A,b);
46     szum = szum+FSq{k}-FSp{k}*yNum(:,k);
47 end
48
49 % Backward computations
50 szum = eta+(dev-1)*(FSq{iStart}-FSp{iStart}*yNum(:,iStart));
51 for k = iStart-1:-1:1
52     A = Id-1/2*FSp{k};
53     b = szum-1/2*FSq{k};
54     yNum(:,k) = linsolve(A,b);
55     szum = szum-FSq{k}+FSp{k}*yNum(:,k);
56 end
57 end

```

4.5. Teszteredmények kiértékelése

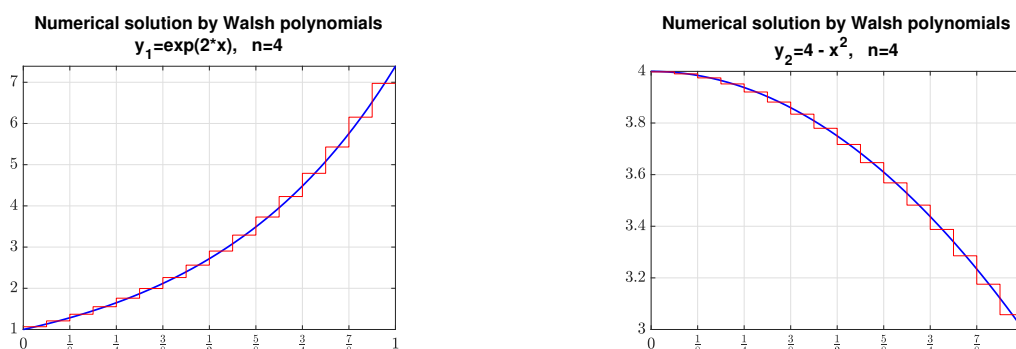
A szerző az implementált algoritmust tesztelte több feladat esetében. Nézzük például az

$$\begin{aligned} y_1' - 2y_1 + \frac{1}{x+2}y_2 &= 2-x, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' + xy_1 - \frac{2}{x-2}y_2 &= xe^{2x} + 4, & y_2(0) &= 4 \end{aligned} \quad (9)$$

kezdeti érték problémát a $[0, 1]$ intervallumon, aminek a megoldása

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = 4 - x^2.$$

A következő ábra illusztrálja a kapott futtatási eredményeket $n = 4$ esetén.



3. ábra. A (9) probléma numerikus megoldása $n = 4$ esetén

A szerző több n értékre is lefuttatta az eljárást, és azt tapasztalta, hogy a pontosság majdnem megfelelődik, ha az n értéke eggyel nő. A numerikus megoldást szolgáló Walsh-polinomok nem hasonlítanak a többi klasszikus módszerrel történő közelítéshez, ezek törtvonalakkal dolgoznak. Ezért a kapott megoldás módosításra került, megtartva az egyes intervallumok felezőpontjában vett értékeket, mint alappontok, lineáris interpoláció segítségével. Ha a kezdeti érték nullánál van, akkor ezt még hozzáadom az alappontokhoz. Az így módosított megoldás jelentősen növeli a pontosságot, mint az alábbi táblázatban látható. Ráadásul, ha több n értéket nézünk, akkor a pontosság majdnem a negyedére csökken, ha az n értéke eggyel nő (lásd [49]).

Módszerek	$[0, \frac{1}{8}[$	$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$	$[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}[$	$[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}[$	$[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[$	$[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[$	$[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}[$	$[\frac{7}{8}, 1[$
y_1 eredeti	7.58e-02	9.78e-02	1.26e-01	1.63e-01	2.10e-01	2.72e-01	3.51e-01	4.53e-01
y_1 módosított	5.50e-03	7.63e-03	1.05e-02	1.44e-02	1.97e-02	2.69e-02	3.65e-02	4.26e-02
y_2 eredeti	5.97e-03	1.39e-02	2.18e-02	2.95e-02	3.71e-02	4.55e-02	5.43e-02	6.37e-02
y_2 módosított	1.88e-03	1.81e-03	1.70e-03	1.78e-03	2.10e-03	2.75e-03	3.87e-03	4.73e-03

3. táblázat. Maximál differencia az egyes intervallumokon $n = 4$ -re

[49]-ben egy gyors összehasonlítást találunk több klasszikus módszerrel, és az látható, hogy a módosított megoldás pontossága a középpont módszeréhez mérhető.

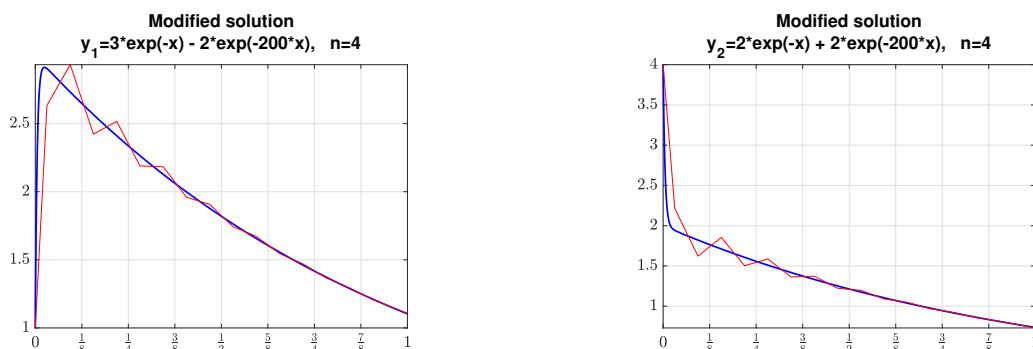
Az eljárás „stiff” feladatoknál is tesztelésre kerültek. Nézzük például az

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{806}{10}y_1 - \frac{1194}{10}y_2 &= 0, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' - \frac{707}{10}y_1 - \frac{1204}{10}y_2 &= 0, & y_2(0) &= 4 \end{aligned} \quad (10)$$

kezdeti érték problémát a $[0, 1]$ intervallumon. Ennek a megoldása:

$$y_1(x) = 3e^{-x} - 2e^{-200x}, \quad y_2(x) = 2e^{-x} + 2e^{-200x}.$$

A következő ábra illusztrálja a módosított megoldáshoz kapott futtatási eredményeket $n = 4$ esetén.



4. ábra. A (10) probléma numerikus megoldása $n = 4$ esetén

A kapott numerikus megoldás nem olyan pontos a 0 pont környezetében, de pl. ilyen lépéstávolságnál a klasszikus Runge–Kutta-módszer nem alkalmazható ennél a feladatnál. Jó közelítést a módosított másodrendű Rosenbrock-formulával lehet elérni.

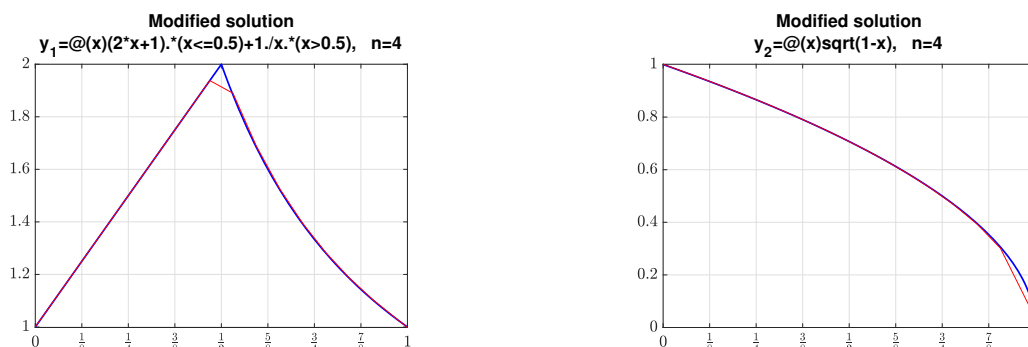
Az eljárás nem folytonos együtthatófüggvényeknél is tesztelésre került. Nézzük például az

$$\begin{aligned} y_1' + xy_1 + \sqrt{1-x}y_2 &= \begin{cases} 2x^2 + 3 & (x \leq \frac{1}{2}) \\ 2 - x - \frac{1}{x^2} & (x > \frac{1}{2}) \end{cases}, & y_1(\frac{3}{4}) &= \frac{4}{3}, \\ y_2' + \left(\begin{cases} \frac{1}{2x+1} & (x \leq \frac{1}{2}) \\ x & (x > \frac{1}{2}) \end{cases} \right) y_1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}y_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & y_2(\frac{3}{4}) &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

kezdeti érték problémát a $[0, 1]$ intervallumon. Itt már találunk nem folytonos és nem korlátos függvényeket is. A pontos megoldás

$$y_1(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{x} & (x > \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad y_2(x) = \sqrt{1-x}.$$

A következő ábra illusztrálja a módosított megoldáshoz kapott futtatási eredményeket $n = 4$ esetén.

5. ábra. A (11) probléma numerikus megoldása $n = 4$ esetén

5. Az oktatáshoz kapcsolódó publikációk

- [1] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, szerzői kiadás, 2016. ISBN 978-963-12-6081-6
<http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok>
- [2] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, szerzői kiadás, 2017. ISBN 978-963-12-8481-2
http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok
- [3] Toledo Rodolfo: *Valós függvények*, elektronikus tananyag, Nyíregyházi Egyetem, 2018. ISBN 978-615-6032-05-8
http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_fv
- [4] Toledo Rodolfo: *Számsorozatok és tulajdonságai*, elektronikus tananyag, Nyíregyházi Egyetem, 2018. ISBN 978-615-6032-06-5
<http://bit.ly/toledo-tananyag-sorozatok-tulajd>
- [5] Toledo Rodolfo: *Határértékszámítás*, elektronikus tananyag, Nyíregyházi Egyetem, 2018. ISBN 978-615-6032-07-2
<http://bit.ly/toledo-tananyag-hatarszam>
- [6] Toledo Rodolfo: *Folytonos függvények*, elektronikus tananyag, Nyíregyházi Egyetem, 2019. ISBN 978-615-6032-09-6
http://bit.ly/toledo-tananyag-folytonos_fv
- [7] Toledo Rodolfo: *Egyváltozós függvények deriváltja*, elektronikus tananyag, Nyíregyházi Egyetem, 2019. ISBN 978-615-6032-10-2
<http://bit.ly/toledo-tananyag-derivalt>

Fontos megjegyezni, hogy a szerző Szili Lászlóval együtt kidolgozta az Analízis I. című kurzus teljes anyagát az ELTE Informatikai Karán tanuló programtervező informatikus szakos hallgatóknak. Az összes kidolgozott előadás és gyakorlat a <http://rodolfotoledo.progterv.hu/an1-2021-I> oldalon szabadon hozzáférhető.

Hivatkozások

- [1] S. V. Astashkin and E. M. Semenov. Lebesgue constants of the Walsh system and Banach limits. *Sib. Math. J.*, 57(3):398–410, 2016.
- [2] I. Blahota, G. Tephnadze, and R. Toledo. Strong convergence theorem of Cesàro means with respect to the Walsh system. *Tohoku Math. J. (2)*, 67(4):573–584, 2015.
- [3] C. F. Chen and C. H. Hsiao. A Walsh series direct method for solving variational problems. *Journal of the Franklin Institute*, 300(4):265–280, 1975.
- [4] C. F. Chen and C. H. Hsiao. Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(5):596–603, October 1975.
- [5] C. F. Chen and C. H. Hsiao. Time-domain synthesis via Walsh functions. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 122:565–570(5), May 1975.
- [6] C. F. Chen and C. H. Hsiao. Walsh series analysis in optimal control. *International Journal of Control*, 21(6):881–897, 1975.
- [7] M. Corrington. Solution of differential and integral equations with Walsh functions. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 20(5):470–476, 1973.
- [8] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers Group, 1988.
- [9] N. J. Fine. On the Walsh functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65:372–414, 1949.
- [10] N. J. Fine. Cesàro summability of Walsh-Fourier series. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 41:588–591, 1955.
- [11] G. Gát. On the Fejér kernel functions with respect to the Walsh-Paley system. *Acta Acad. Paedagog. Agriensis, Sect. Mat. (N.S.)*, 24:105–110, 1997.
- [12] G. Gát. On $(C, 1)$ summability for Vilenkin-like systems. *Stud. Math.*, 144(2):101–120, 2001.
- [13] G. Gát and R. Toledo. L^p -norm convergence of series in compact, totally disconnected groups. *Anal. Math.*, 22(1):13–24, 1996.
- [14] G. Gát and R. Toledo. Fourier coefficients and absolute convergence on compact totally disconnected groups. *Math. Pannonica*, 10(2):223–233, 1999.
- [15] G. Gát and R. Toledo. On the convergence in L^1 -norm of Cesàro means with respect to representative product systems. *Acta Math. Hung.*, 123(1-2):103–120, 2009.
- [16] G. Gát and R. Toledo. Approximation on compact totally disconnect groups. In Jorge Bustamante Gonzáles et al, editor, *Tópicos de Teoría de la Aproximación*, volume 4, pages 49–93. Benemerita Universidad Autónoma de Puebla, Mexico, 2012.
- [17] G. Gát and R. Toledo. A numerical method for solving linear differential equations via Walsh functions. In *Advances in Information Science and Applications*, volume 2, pages 334–339. Proceedings of the 18th International Conference on Computers (part of CSCC 2014), Santorini Island, Greece, July 17-21, 2014, 2014.
- [18] G. Gát and R. Toledo. Convergence in L^p -norm of Fourier series on the complete product of quaternion groups with bounded orders. *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 30(9):1566–1578, 2014.
- [19] G. Gát and R. Toledo. Calculus on Walsh and Vilenkin groups. In *Dyadic Walsh Analysis from 1924 Onwards Walsh-Gibbs-Butzer Dyadic Differentiation in Science Volume 2 Extensions and Generalizations: A Monograph Based on Articles of the Founding Authors, Reproduced in Full*, volume 13, pages 145–156. Atlantis Press, Paris, 2015.

- [20] G. Gát and R. Toledo. Estimating the error of the numerical solution of linear differential equations with constant coefficients via Walsh polynomials. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 31(2):309–330, 2015.
- [21] G. Gát and R. Toledo. Numerical solution of linear differential equations by Walsh polynomials approach. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 57(2):217–254, 2020.
- [22] J. E. Gibbs and H. A. Gebbie. Application of Walsh Functions to Transform Spectroscopy. *Nature*, 224:1012–1013, 1969.
- [23] U. Goginava and R. Toledo. Convergence of Walsh-Fourier series of a class $BO(p(n) \uparrow \infty)$. *Georgian Math. J.*, 14(4):643–650, 2007.
- [24] M. N. Gulamhusein. Simple matrix-theory proof of the discrete dyadic convolution theorem. *Electronics Letters*, 9(10):238–239, 1973.
- [25] E. Hewitt and K. A. Ross. Abstract harmonic analysis. Vol. II: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact abelian groups. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. viii, 771 p., 1970.
- [26] S. Kaczmarz. Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux. *Stud. Math.*, 1:87–121, 1929.
- [27] A. N. Kolmogorov and G. A. Seliverstov. Sur la convergence des séries de Fourier. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 178:303–306, 1924.
- [28] A. N. Kolmogorov and G. A. Seliverstov. Sur la convergence des séries de Fourier. *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser.*, 3:307–310, 1926.
- [29] D. S. Lukomskii, S. F. Lukomskii, and P. A. Terekhin. Solution of Cauchy problem for equation first order via Haar functions. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 16:151–159, 2016.
- [30] Yu. V. Malykhin, S. A. Telyakovskii, and N. N. Kholshchevnikova. Integrability of the sum of absolute values of blocks of the Fourier-Walsh series for functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 290:306–317, 2015.
- [31] R. E. A. C. Paley. A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 34:241–279, 1932.
- [32] A. Plessner. Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 155:15–25, 1925.
- [33] H. Rademacher. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Mathematische Annalen*, 87:112–138, 1922.
- [34] G. P. Rao. *Piecewise constant orthogonal functions and their application to systems and control.*, volume 55. Springer, Cham, 1983.
- [35] F. Schipp. Über gewissen Maximaloperatoren. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sec. Math.*, 18:189–195, 1975.
- [36] F. Schipp. On L^p -norm convergence of series with respect to product systems. *Anal. Math.*, 2:49–64, 1976.
- [37] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon. *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis.* Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.
- [38] Yen-Ping Shih and Joung-Yi Han. Double Walsh series solution of first-order partial differential equations. *International Journal of Systems Science*, 9(5):569–578, 1978.
- [39] P. Simon. Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 27:329–341, 1976.
- [40] A. A. Šneider. On series of Walsh functions with monotonic coefficients. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 12(2):179–192, 1948.

- [41] G. Szegő. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Z.*, 9: 163–166, 1921.
- [42] R. Toledo. Recent developments on approximation theory on CTD groups. In *Topics in algebra, analysis and geometry. Proceedings of the Gyula Strommer national memorial conference, Balatonfüred, Hungary, May 1–5, 1999*, pages 177–184. Budapest: BPR Kiadó, 2000.
- [43] R. Toledo. On the convergence of Fourier series in CTD groups. In *Functions, series, operators. Alexits memorial conference in honor of the 100th anniversary of the birth of Professor George Alexits (1899–1978), Budapest, Hungary, August 9–13, 1999*, pages 403–415. Budapest: János Bolyai Mathematical Society, 2002.
- [44] R. Toledo. Representation of product systems on the interval $[0, 1]$. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 19: 43–50, 2003.
- [45] R. Toledo. Approximation by representative functions on the complete product of \mathcal{S}_3 . *Facta Universitatis. Series electronics and energetics*, 21: 327–337, 2008.
- [46] R. Toledo. Negative results concerning Fourier series on the complete product of \mathcal{S}_3 . *JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(4): 7 pp., 2008.
- [47] R. Toledo. On the maximal value of Dirichlet kernels with respect to representative product systems. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* 82, pages 431–447, 2010.
- [48] R. Toledo. On the boundedness of the L^1 -norm of Walsh-Fejér kernels. *J. Math. Anal. Appl.*, 457(1): 153–178, 2018.
- [49] R. Toledo. Solving systems of linear differential equations by Walsh polynomials approach. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. (accepted for publication)*, 53, 2021.
- [50] N. Vilenkin. On a class of complete orthonormal systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 11: 363–400, 1947.
- [51] J. L. Walsh. A closed set of normal orthogonal functions. *American Journal of Mathematics*, 45(1): 5–24, 1923.
- [52] Sh. Yano. On approximation by Walsh functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2: 962–967, 1951.
- [53] Wo-Sang Young. Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series. *Trans. Am. Math. Soc.*, 218: 311–320, 1976.