

- 0/6 :

$$\begin{aligned} &< \\ \mu(V) &= \inf \{ \mu(V) : V \text{ nyílt}, A \subset V \} \\ &> \\ \mu(V) &= \sup \{ \mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subset V \} \end{aligned}$$

- 0/9 :

<

$$\int_A \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x) = \int_B \langle f(x), \mathbf{n}(x, A) \rangle d\chi^{n-1}(x)$$

>

$$\int_A \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x) = \int_B \langle f(x), \mathbf{n}(x, A) \rangle d\chi^{n-1}(x)$$

- 16/7 :

<

halmazok, akkor indukcióval

$$\mu(T \cap (\cup_{i=1}^j A_i)) = \sum_{i=1}^j \mu(T \cap A_i).$$

>

halmazok, akkor indukcióval

$$(2) \quad \mu(T \cap (\cup_{i=1}^j A_i)) = \sum_{i=1}^j \mu(T \cap A_i).$$

- 16/-9 :

<

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(B_j), \quad \text{ahol } B_j = \bigcup_{i=1}^j A_i.$$

Ha indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^j \mu(A_i),$$

akkor határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk. De $B_{j+1} \cap A_{j+1} = A_{j+1}$, $B_{j+1} \setminus A_{j+1} = B_j$, innen

$$\mu(B_{j+1}) = \mu(A_{j+1}) + \mu(B_j).$$

2

>

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^j A_i).$$

Mivel (2) miatt

$$\mu(\cup_{i=1}^j A_i) = \sum_{i=1}^j \mu(A_i),$$

határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk.

- $24/-4$:

<

mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

- * **1.3.16. Feladat [19].** Legyen μ olyan véges Radon-mérték az X teljes metrikus

>

de pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

- * **1.3.16. Feladat [19].** Legyen μ olyan nem nulla véges Radon-mérték az X teljes metrikus

- $30/-1$:

<

de nem Borel-halmaz.

>

de nem Borel-halmaz.

- * **2.1.24. Feladat [15].** Adjunk meg olyan részhalmazát $[0, 1]$ -nek, amelynek Lebesgue külső mértéke 1, de a racionális számok feletti lineáris burka nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmazt.

- $33/4$:

<

- 2.2.8. Feladat [9].** Legyen $\{x_n\}$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és

>

- 2.2.8. Feladat [9].** Legyen x_n a racionális számok egy sorozatba rendezése, és

- $41/-9$:

<

$$\mu_U(C_1 \cap C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

>

$$\mu_U(C_1 \cup C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

- 42/4 :

<

A szorzattér azon φ függvényei, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt

>

A szorzattér azon φ elemei, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt

- 42/15 :

<

és a jobb oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes induk

>

és a bal oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes induk-

- 47/18 :

<

$(f|B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

>

$(f|B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

→ **3.1.13. Feladat [10]**. Adjunk meg olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényt, amelynek semmilyen 1 mértékű $A \subset [0, 1]$ halmazra vett megszorítása sem folytonos.

- 52/-0 :

<

>

* **3.2.21. Definíció.** Az X topologikus teret az Y topologikus térbe képező függvény *Baire-függvény*, ha benne van az összes olyan függvényosztályban, amely tartalmazza a folytonos függvényeket és nem vezet ki belőle a pontonkénti határérték képzése. Nyilván a Baire-függvények mind Borel-függvények. Legyen $\mathcal{B}_0(X; Y)$ az X -et Y -ba képező folytonos függvények osztálya, és minden $\alpha > 0$ rendszámra $\mathcal{B}_\alpha(X; Y)$ az összes olyan függvények osztálya, amelyek előállnak valamely $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(X; Y)$, $\beta_n < \alpha$ függvényt sorozat pontonkénti határértékeként.

* **3.2.22. Feladat [6]**. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{B}_\alpha(X; Y)$ osztályok egyesítése az összes α megszámlálható rendszámra a Baire-függvények osztálya, így ha α nem megszámlálható rendszám, akkor $\mathcal{B}_\alpha(X; Y)$ a Baire-függvények osztálya.

* **3.2.23. Feladat [9]**. Legyenek f_1, f_2, \dots, f_n valós értékű Baire-függvények az X topologikus téren, és $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Baire-függvény. Mutassuk meg, hogy

$$x \mapsto g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

is Baire-függvény.

* **3.2.24. Feladat [13]**. Mutassuk meg, hogy ha X metrikus tér, akkor az X -et \mathbb{R} -be képező Baire-függvények osztálya megegyezik a Borel-függvények osztályával.

* **3.2.25. Feladat [16].** Mutassuk meg, hogy \mathbb{R} helyett egy Y szeparábilis metrikus térbe képező függvények osztályára az előző feladat állítása pontosan akkor marad érvényben, ha Y minden véges részhalmaza minden $\varepsilon > 0$ -ra benne van \mathbb{R} egy folytonos képének az ε -környezetében.

* **3.2.26. Feladat [20].** Mutassuk meg, hogy minden α megszámlálható rendszámra

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \setminus \cup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

- 54/–6 :

<

alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha

>

alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha

- 57/–3 :

<

(5) ha $f \leq g$ és $\int f d\mu > -\infty$ vagy $\int g d\mu < \infty$, akkor $\int f \leq \int g$;

>

(5) ha $f \leq g$ és $\int f d\mu > -\infty$ vagy $\int g d\mu < \infty$, akkor $\int f d\mu \leq \int g d\mu$;

- 60/9 :

<

Igaz-e a megfordítás?

>

Igaz-e a megfordítás?

→ **4.2.11.1. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy σ -véges halmazon kívül nulla.

- 61/2 :

<

beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \leq \int |f|$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j \bar{f}_j(x) \leq |y| |f(x)|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int \bar{f}_j \leq |y| \int |f|.$$

>

beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \leq \int |f|$. Feltéhetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j f_j(x) \leq |y| |f(x)|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int f_j \leq |y| \int |f|.$$

- 61/−12 :
<

$$S(s) = \sum_{j=1}^n y_j \mu X(s = y_j).$$

Nyilván $S(s_n) \leq S(|s_n|) = \int |s_n|$. Az X -en majdnem mindenütt értelmezett Y -beli értékű mérhető függvényt

>

$$S(s) = \sum_{j=1}^n \mu X(s = y_j) y_j.$$

Nyilván $|S(s)| \leq S(|s|) = \int |s|$. Az X -en majdnem mindenütt értelmezett Y -beli értékű mérhető függvényt

- 62/−14 :
<

4.3.5. Majoráns kritérium. Ha f majdnem mindenütt értelmezett, mérhető

>

4.3.5. Majoráns kritérium. Ha f majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű mérhető

- 62/−4 :
<

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, a

>

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, az f_n -ek és az f értékészlete egy szeparábilis altérben marad, és a

- 66/−11 :
<

és mi a határértékük:

>

és mi a határértékük (x_n -ben n nem nulla elem van):

- 66/−1 :

<

hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0, 1]$ -en, akkor a tartalmazás valódi.

>

hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0, 1]$ -en, akkor a tartalmazás valódi, és $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu) \neq \bigcap_{1 \leq p < \infty} \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$.

→ **4.4.12.1. Feladat [9]**. Vizsgáljuk meg mérhető függvények pontonkénti, egyenletesen, \mathbb{L}^2 -normában, majdnem mindenütt és mértékben való konvergenciája között a kapcsolatot.

- 67/11 :

<

* **4.4.18. Feladat [9]**. Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén esetén $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$

>

* **4.4.18. Feladat [9]**. Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$

- 69/−13 :

<

$$A_k(x) = m_i, \quad \text{ha } x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k),$$

$$F_k(x) = M_i, \quad \text{ha } x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k)$$

>

$$A_k(x) = m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha } x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k),$$

$$F_k(x) = M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha } x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k)$$

- 69/−2 :

<

$1/k < \delta$ és $x \in (x_i, x_{i+1})$ valamely $1 \leq i \leq n_k - 1$ -re, akkor $(x_i, x_{i+1}] \subset (x - \delta, x + \delta)$, így

>

$1/k < \delta$ és $x \in (x_{i-1}, x_i)$ valamely $1 \leq i \leq n_k$ -ra, akkor $[x_{i-1}, x_i] \subset (x - \delta, x + \delta)$, így

- 70/−11 :

<

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

→ **4.5.6. Feladat [2]**. Határozzuk meg $[0, 1]$ -en a racionális számok karakterisztikus függvényének Riemann- és Lebesgue-integrálját.

>

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

- 71/-1 :

<

nem mindenütt folytonos függvénnel?

>

nem mindenütt folytonos függvénnel?

* **4.5.16. Feladat [10].** Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, $0 < c < \lambda(A)$. Mutassuk meg, hogy ha f integrálja az A tetszőleges c mértékű részhalmazán 0, akkor f majdnem mindenütt nulla.

* **4.5.17. Feladat [11].** Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, amelynek integrálja 0. Mutassuk meg, hogy $0 \leq c \leq \lambda(A)$ esetén van olyan $B \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $\lambda(B) = c$ és a B -n az integrál szintén nulla.

- 75/14 :

<

egy σ -véges mértéktér, λ a Lebesgue-mérték \mathbb{R} -en, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény, és

>

egy mértéktér, λ a Lebesgue-mérték \mathbb{R} -en, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény, és

- 79/10 :

<

hogy $\lambda^n(\tau(B)) = c_\tau \lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \in \mathbb{R}^n$ -re is

>

hogy $\lambda^n(\tau(B)) = c_\tau \lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \subset \mathbb{R}^n$ -re is

- 80/-1 :

<

$\lambda(B)\lambda(C) > 0$.

>

$\lambda(B)\lambda(C) > 0$.

* **5.2.12. Feladat [18].** Konstruáljunk olyan valós függvényt, amely grafikonjának bármely egységnyezetbe eső része 1 külső mértékű halmaz.

- 81/-4 :

<

Létezik továbbá egy olyan φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

>

Létezik továbbá egy olyan X -en értelmezett φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

- 81/−2 :

<

A φ függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik

>

A φ függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik X -en értelmezett

- 91/6 :

<

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelő feltételek mellett —

>

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelő feltételek mellett —

- 116/2 :

<

8.3.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon *abszolút*

>

8.3.1. Definíció. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egy $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *abszolút*

- 116/6 :

<

8.3.2. Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút folytonos egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor f teleinek?

>

8.3.2. Tétel. Ha egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút folytonos, akkor f

- 118/−9 :

<

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$

>

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$

- 160/5 :

<

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq M \text{dist}(x, y)$$

>

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq M \text{dist}(x, y)$$

- 161/−12 :
<
homeomorf
>
homeomorf

11.1.15.1. Feladat [5]. Van-e olyan, nyílt intervallummal homeomorf térgörbe, amely értékkészletének lezártja az egész tér?

- 161/−1 :
<
kategóriájú
>
kategóriájú

* **11.1.20.1. Feladat [12].** Konstruáljunk a számegeyenesen olyan egymással homeomorf A és B halmazokat, amelyekre A első, B második kategóriájú.

- 162/9 :
<
függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.
>
függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

* **11.1.24. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvény deriváltjának folytonossági helyei mindenütt sűrűek (a, b) -ben.

- 162/−3 :
<

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 1, 2, \dots ; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n \right\}.$$

>

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 0, 1, 2, \dots ; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n \right\}.$$

- 166/20 :

<

A következő tétel az egység felbontásának Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

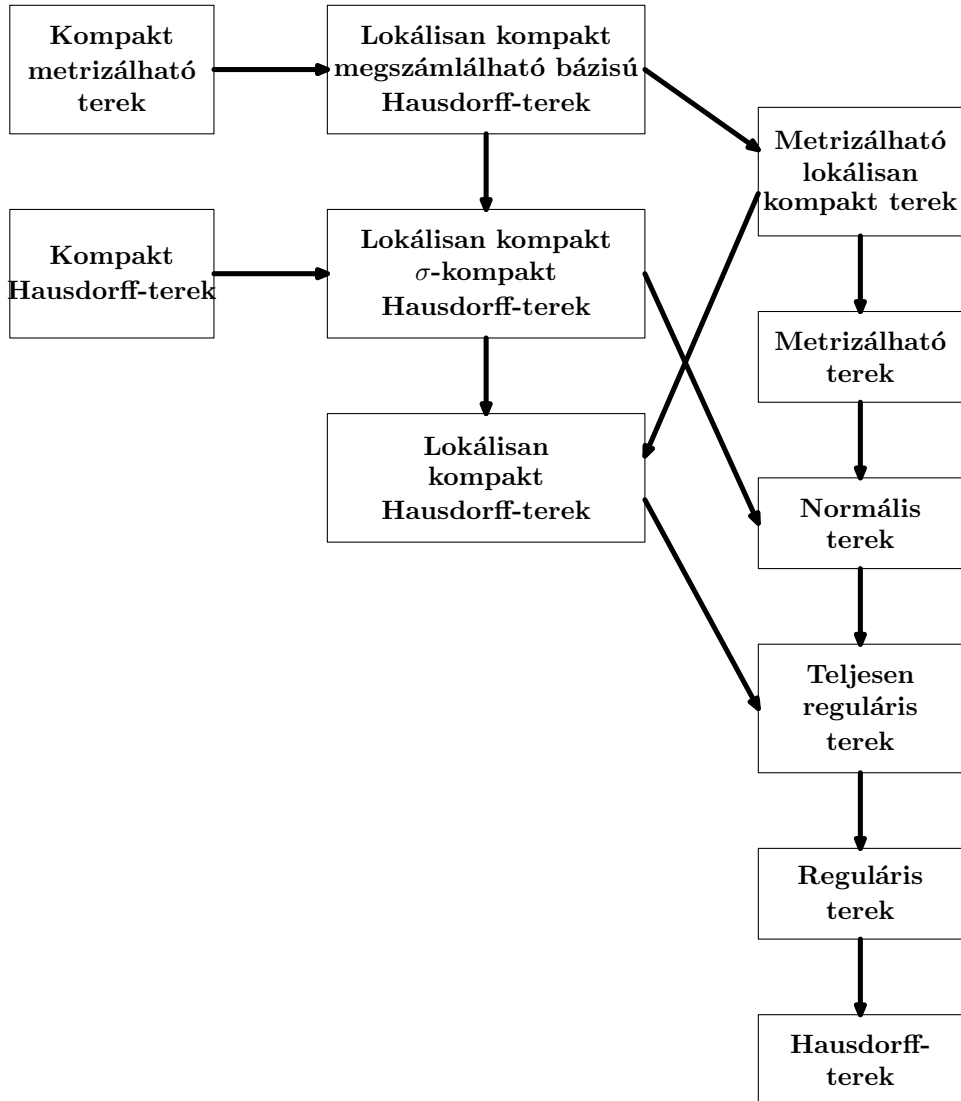
>

A következő tétel az egység felbontásának lokálisan kompakt Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

- 167/14 :
<
Az egységelem bármely W környezetét tartalmazza az egységelem olyan V környezete.
>
Az egységelem bármely U környezetét tartalmazza az egységelem olyan V környezete.

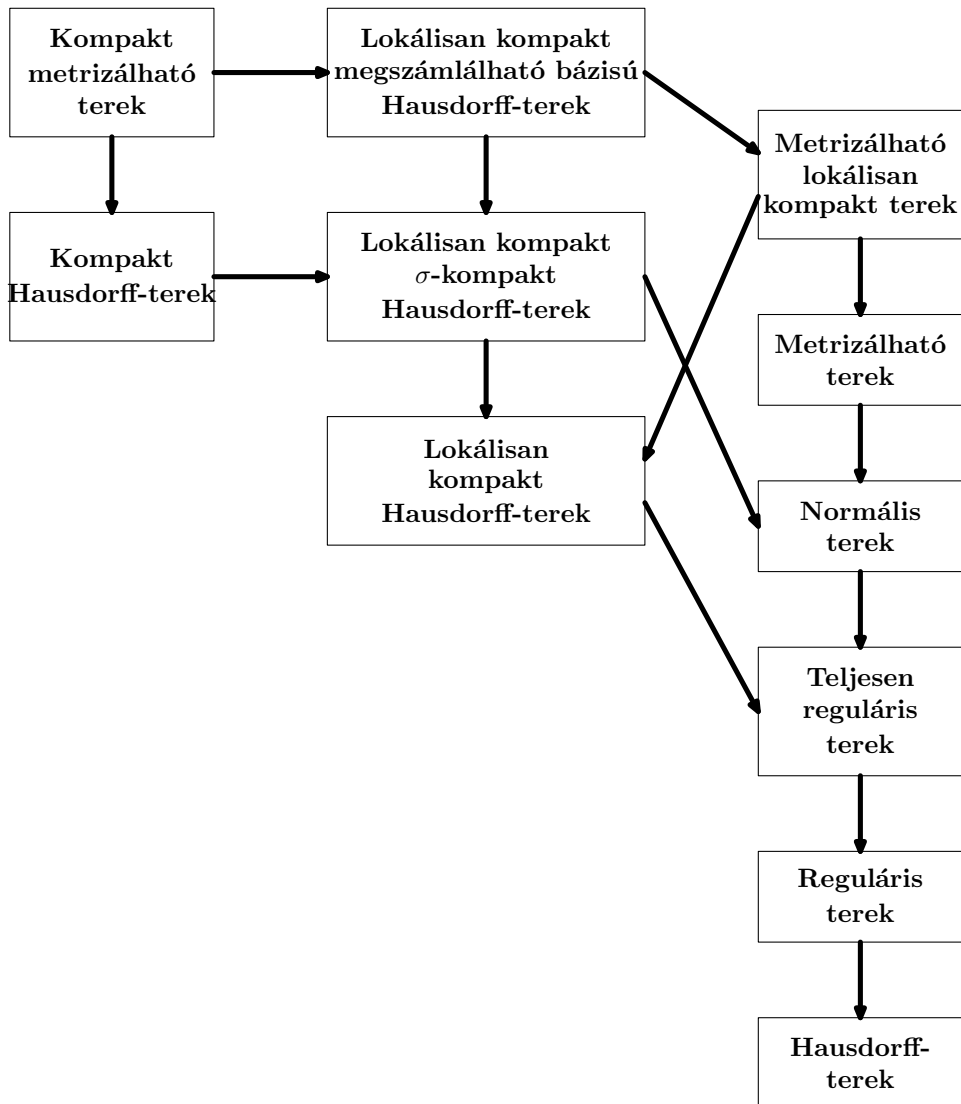
<

Összefüggések a topologikus terek fontosabb fajtái között.



>

Összefüggések a topologikus terek fontosabb fajtái között.



- 175/14 :
 - <
 - (6) $|f(x) - g(x)| \leq (2/3)^i$, ha $x \in F$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
 - >
 - (6) $|f(x) - g_i(x)| \leq (2/3)^i$, ha $x \in F$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
- 177/6 :
 - <
 - pedig X^* -ot írunk; X^* -ot az X konjugált terének nevezzük.
 - >
 - pedig X^* -ot írunk; X^* -ot az X konjugált terének vagy duális terének nevezzük.
- 183/-16 :
 - <
 - [29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
 - >
 - [29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- 184/-1 :
 - <
 - [50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis I-IV*. Springer-Verlag, New York, 1990.
 - >
 - [50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its applications I-IV*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- 194/15 :
 - <
 - Peano, Giuseppe (1887-1956)
 - >
 - Peano, Giuseppe (1858-1932)