

# ZÁRÓVIZSGA TÉTELEK

## ELTE IK Programtervező informatikus MSc szak Modellalkotó informatikus szakirány

A záróvizsgán a hallgató két tételt kap. Egyiket a szakirányon kötelező két blokk (M0 és M1) tárgyainak tételei közül. A Tanulmányi Osztályon, a záróvizsgára való jelentkezéskor a hallgató, az általa elvégzett, választható szakirányos blokkok (M2, M3, M4, M5 blokk) közül 2 blokkot megjelöl. A másik tételt ezen két blokk tételeiből kapja.

### Kötelező blokkok kérdései: M0 és M1 blokkok

#### 1. Szimbolikus számítások.

Foglalja össze a szimbolikus algebrai rendszerek főbb jellegzetességeit, típusait, konkrét implementációikat is megnevezve.

#### 2. Számítási modellek.

Soros (Turing-gép, RAM, Mealy-automata, Moore-automata, Rabin-Scott-automata, logikai hálózat, MMIX), párhuzamos (PRAM, EREW, CREW, ERCW, CRCW, hálózati modellek, BSP, LogP, QSM) és osztott (szinkron hálózatok, aszinkronrendszerek b/k automatája, aszinkron rendszerek környezeti modellje, aszinkron hálózatok küld/fogad és üzenetszóró modellje, részben szinkron rendszerek időzített automatája) modellek.

#### 3. Vázolja a mérték-integrálmélet egy felépítési módját.

A *Caratheodory*-tétel köré csoportosítva beszéljen a mérték-kiterjesztésről. A mértékből, ill. a mérhető függvényekből kiindulva vezesse be az integrál fogalmát. Térjen ki az integrálmélet alaptételeire (*Beppo Levi*-, *Lebesgue*-, *Fubini*-, *Radon-Nikodym*-tétel). Speciális esetként beszéljen a *Lebesgue*-mértékről, ill. *Lebesgue*-integrálról.

#### 4. Lineáris operátorok az alkalmazott matematikában.

A *Fourier*-részletösszegek, a *Lagrange*-interpoláció, a kvadratúrák, a szummációk kapcsán ismertesse a korlátos lineáris operátorok terét. Operátorsorozatok erős konvergenciájából kiindulva beszéljen a *Banach-Steinhaus*-tétel néhány következményéről (*Fejér*-, *Pólya-Sztyeklov*-, *Stieltjes*-, *Toeplitz*-tétel). A normált tér duálisának a bevezetése után vázolja a *Hahn-Banach*-tételt és néhány következményét, a *Hilbert*-terekkel kapcsolatos *Riesz*-reprezentációs tételt. Értelmezze lineáris operátorok nyíltságát, leképezések zártságát, és beszéljen a *Banach*-féle inverz-tételről, a zárt gráf-tételről, ill. ezek kapcsolatáról.

## 5. Vázolja a stabilitáselmélet problémáját, alapfogalmait és a vizsgálati módszereket.

Közönséges differenciálegyenlet-rendszer esetén a kezdetiérték-probléma megoldásának függése a kezdeti feltételektől: a *Peano*-egyenlőtlenség, a differenciálegyenlet-rendszer karakterisztikus függvényének értelmezése és tulajdonságai. Ismertesse az autonóm differenciálegyenlet-rendszer fogalmát és a megoldások alapvető tulajdonságait. Sorolja fel a stabilitáselméleti alapfogalmait: egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitása, stabilitása, instabilitása. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek egyensúlyi helyzetének stabilitása. Nem-lineáris autonóm differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitásvizsgálata *Ljapunov*-módszereivel (első, második, linearizálás).

## 6. Polinomok nemnegativitása.

Az  $n$ -változós  $d$ -edfokú nemnegatív polinomok milyen  $n$  és  $d$  paraméter esetén lesznek garantáltan négyzetösszegek? Példa négyzetösszegeként elő nem álló nemnegatív polinomra. A *Gram*-mátrix-módszer. Hogyan lehet a problémát átfogalmazni szemidefinit programozási (*SDP*) feladattá? Mi az *SDP* primál és duál feladatának a standard alakja? A gyenge dualitási tétel bizonyítása. Egy tetszőleges belső pontos algoritmus működésének a vázlata, és egy kisméretű illusztratív feladat bemutatása.)

## 7. Rejtjelezés.

A klasszikus és a nyilvános kulcsú titkosítás; folyamrejtjel, blokkos rejtjel; az RSA és paramétereinek választása, az ALGamal rendszer.

## 8. Ismertesse a *Fourier*-analízis és szintézis elméletének az alapjait.

A periodikus, az aperiodikus és a diszkrét *Fourier*-transzformációkon keresztül mutassa be a *Fourier*-transzformáció tulajdonságait. Hogyan lehetséges az előbbi modellek egységes tárgyalásmódja normált csoportok segítségével? Vázolja a *Fourier*-sorok pontonkénti konvergenciájával kapcsolatos alapvető eredményeket. A normabeli konvergenciával kapcsolatosan térjen ki a  $C_{2\pi}$ ,  $L_{2\pi}$  esetre és a szummációs módszerekre. Beszéljen a *Hilbert*-térbeli ortonormált rendszerek tulajdonságairól, példákat is bemutatva.

## 9. Algoritmusok hatékonysága.

Soros és párhuzamos algoritmusok osztályozása hatékonyság szerint (példákkal).

### Választható blokkok kérdései: M2, M3, M4 és M5 blokkok.

#### M2 blokk: Jel- és képfeldolgozói alapismeretek

##### 1. A számítógépes grafika matematikai alapjai.

Paraméteres görbék, természetes paraméterezés, görbületi középpont, görbületi sugár, kísérő triéder, *Frenet*-formulák, görbék ábrázolása. Felületek paraméterezése, *Meusnier*-tétele, főgörbület.

## **2. Ismertesse a Fourier-analízis eredményeinek, módszereinek alkalmazási lehetőségeit az informatika és a matematika különböző területein.**

A fizikai alkalmazások szempontjából beszéljen a parciális differenciál-egyenletekre vezető problémák (pl. rezgő húr, hővezetés) megoldásáról. Az informatikai alkalmazásokkal kapcsolatosan elsősorban a határozatlansági relációkra, a Shannon-féle mintavételezési tételre, a periodizációs operátorra és tulajdonságaira, a szummáció és a szűrők, ablakfüggvények közötti kapcsolatra térjen ki. Ismertessen gyors Fourier-transzformációkat és azok alkalmazásait.

## **3. Vázzon az approximációelmélet alapvető kérdéseit normált terekben.**

A legjobb approximáció problémaköre: a legjobban közelítő elem létezése és egyértelműsége normált-, Banach- és Hilbert- terekben. Az approximáció nagyságrendjére vonatkozó becslések. Approximáció trigonometrikus polinomokkal. Pozitív operátorok. Weierstrass approximációs tételei, a Stone-Weierstrass-tétel. A Harsiladze-Lozinszkij-tétel.

## **4. Transzformációk az alkalmazott matematikában.**

Multirezolúciós analízis, waveletek konstruálása, kompakt tartójú waveletek, wavelet sorok konvergenciája, Gábor-transzformált, Gábor-framek  $L_2$ -ben, Gábor-framek létezése, a Gábor- frame operátor reprezentációja.

## **5. Ismertesse a jel- és képfeldolgozás alapvető lépéseit, az ott felmerülő problémákat és azok kezelhetőségét.**

Beszéljen a mintavételezésről, kvantálásról, az ablakfüggvényekről, a szűrő konstrukciókról. Ismertesse a hang és a képtömörítés lehetőségeit. Mutasson be néhány képfeldolgozási eljárást pl. éldetektálással, szegmentációval kapcsolatban.

### **M3 blokk: Matematikai modellezés**

#### **1. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása.**

1. Implicit Euler-módszer és elemzése: képlete, a képlethiba, konzisztencia, 0-stabilitása, konvergencia, A-stabilitása, alkalmazása merev rendszerekre.

#### **2. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása.**

A  $-u''(x) + d(x) u(x) = f(x)$ ,  $0 < x < 1$   $u(0)=a$  és  $u(1)=b$  peremérték feladat numerikus megoldása. Véges differencia módszer, képlethiba, konzisztencia, stabilitás, konvergencia. Végeselem módszer megvalósítása kalapfüggvényekkel, a tridiagonális egyenletrendszerek megoldása.

#### **3. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása.**

A kétdimenziós Poisson-egyenlet diszkretizációja véges differenciákkal, ill. Courant-elemekkel: képlethiba, konzisztencia, stabilitás, konvergencia.

#### **4. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása.**

A variációs feladat megoldhatósága, unicitása és stabilitása. A többrácsos módszer. Diszkrétizációból származó ritkamátrixú lineáris rendszerek, simító iterációk, restriktciók, interpolációk; sima és teljes módszer, művelet- és tárigény.

#### **5. Approximációs feladatok algoritmusai.**

*Csebisev*-polinomok tulajdonságai, alkalmazásuk az interpolációban és a kvadratúrában. *Csebisev*-sorfejtés, a részletösszeg kiszámítása. Polinom együtthatójú differenciálegyenletek megoldása *Clenshaw* módszerével.

### **M4 blokk: Algebrai módszerek az informatikában**

#### **1. Véges testek alkalmazásokhoz.**

Körösztási test és körösztási polinom; DFT és FFT.

#### **2. Algebrai kódoláselmélet.**

Lineáris és ciklikus kódok; a Reed-Solomon kód és az alternáns kód, valamint ezek dekódolása.

#### **3. Fraktálok.**

Különböző topologikus- és fraktáldimenziók szemléltetése egy szabadon választott példán keresztül. (Lefedési- és induktív dimenziók fogalma, önhasonlóság, doboz- és Hausdorff-dimenzió, ezek egymással való kapcsolata)

#### **4. Komputeralgebrai algoritmusok.**

Az integrálás problémája és a Risch-algoritmus.

#### **5. Algebrai geometriai számítások.**

Elliptikus görbék és prímalgoritmusok (Weierstrass egyenletek, elliptikus görbe definíciója, művelet elliptikus görbén, csoport törvény, véges/végtelen pont, elliptikus görbék (mod  $n$ ), az elliptikus görbés prímfaktorizáció elméleti alapjai, az elliptikus görbés prímtesztelés elméleti alapjai).

### **M5 blokk: Párhuzamos és osztott rendszerek**

#### **1. Nagy hatékonyságú számítások.**

Tomasulo-algoritmus és alkalmazása többszörös kibocsátású processzorokban.

#### **2. A lineáris algebra párhuzamos algoritmusai.**

Ismertesse a párhuzamos gépi architektúrák *Flynn*-féle osztályozását. A párhuzamos lineáris algebrai algoritmusok között mi a *BLAS* csomag célja, melyek annak a szintjei? Speciálisan, elosztott memóriájú rendszereknél ismertesse a *Gaxpy*-algoritmust gyűrűn.

### **3. Szimulációs módszerek.**

Lineáris egyenletrendszerek megoldása. A Laplace-egyenlet.

### **4. Párhuzamos algoritmusok.**

A konszenzus univerzalitása. Konszenzusszám fogalma, általános adatszerkezet párhuzamos megvalósítása konszenzussal mint primitívvel kizárásmentes (lock-free) és várakozásmentes (wait-free) módon.