Operátor- és mátrixegyenletek: megoldhatóság, extremalitás, egyértelműség

Tarcsay Zsigmond
ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

TKP Workshop, 2022.01.13-14.

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás
- szimmetrikus (önadjungált) megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás
- szimmetrikus (önadjungált) megoldás
- egyértelmű pozitív/szimmetrikus megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás
- szimmetrikus (önadjungált) megoldás
- egyértelmű pozitív/szimmetrikus megoldás
- a fentiek között extremális megoldások

Korlátos pozitív szemi-definit megoldás létezése

Probléma

$TX = S$ pozitív szemi-definit megoldhatósága, azaz:

$$\exists ? X = X^* \geq 0, \quad TX = S$$

Korlátos pozitív szemi-definit megoldás létezése

Probléma

$TX = S$ pozitív szemi-definit megoldhatósága, azaz:

$$\exists ? X = X^* \geq 0, \quad TX = S$$

Megközelítés

A megoldások az

$$X_0 : T^* x \mapsto S^* x$$

leképezés kiterjesztései között keresendők.

Pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Megjegyzés: A kérdés alacsony dimenzióban sem triviális: $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (vagy $X = \mathbb{C}^2$), $\mathcal{D} = \mathbb{R} \oplus \{0\}$ (vagy $\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$), $A_0(x, 0) = (0, x)$.

$$\langle A_0(v, 0), (v, 0) \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_0 \geq 0.$$

Pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Megjegyzés: A kérdés alacsony dimenzióban sem triviális: $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (vagy $X = \mathbb{C}^2$), $\mathcal{D} = \mathbb{R} \oplus \{0\}$ (vagy $\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$), $A_0(x, 0) = (0, x)$.

$$\langle A_0(v, 0), (v, 0) \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_0 \geq 0.$$

$$A_0 \quad \overset{A_0 \subseteq A}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{bmatrix} \overset{A = A^*}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = -1 < 0$, vagyis nem létezik $A = A^* \geq 0, A \supset A_0$.

Pozitív kiterjeszthetőség

Pozitív kiterjeszthetőség karakterizációja

Egy $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definit transzformációvá akkor, és csak akkor, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Pozitív kiterjeszthetőség

Pozitív kiterjeszthetőség karakterizációja

Egy $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definit transzformációvá akkor, és csak akkor, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. A pozitív kiterjesztés csak $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben egyértelmű.

Pozitív kiterjeszthetőség

Pozitív kiterjeszthetőség karakterizációja

Egy $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definit transzformációvá akkor, és csak akkor, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. A pozitív kiterjesztés csak $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben egyértelmű.
2. Van legkisebb megoldás.

Pozitív kiterjeszthetőség

Pozitív kiterjeszthetőség karakterizációja

Egy $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definit transzformációvá akkor, és csak akkor, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. A pozitív kiterjesztés csak $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben egyértelmű.
2. Van legkisebb megoldás.
3. Adott $A_0 \leq B$ mellett van legnagyobb olyan A_{max} megoldás, hogy $A_{max} \leq B$.

Pozitív kiterjeszthetőség

Pozitív kiterjeszthetőség karakterizációja

Egy $A_0 : \mathcal{X} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definit transzformációvá akkor, és csak akkor, ha létezik $\alpha > 0$, hogy

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. A pozitív kiterjesztés csak $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben egyértelmű.
2. Van legkisebb megoldás.
3. Adott $A_0 \leq B$ mellett van legnagyobb olyan A_{max} megoldás, hogy $A_{max} \leq B$.
4. Adott $\gamma \geq \alpha$ mellett van legnagyobb A_γ megoldás, hogy $\|A_\gamma\| = \gamma$

Alkalmazás: operátoregyenletek pozitív megoldhatósága

Pozitív szemi-definit megoldás létezése

Adott S, T mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor létezik pozitív szemi-definit X megoldása, ha létezik $\alpha > 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TS^*$.

Alkalmazás: operátoregyenletek pozitív megoldhatósága

Pozitív szemi-definit megoldás létezése

Adott S, T mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor létezik pozitív szemi-definit X megoldása, ha létezik $\alpha > 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TS^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. A megoldás akkor, és csak akkor egyértelmű, ha $\ker T = \{0\}$.

Alkalmazás: operátoregyenletek pozitív megoldhatósága

Pozitív szemi-definit megoldás létezése

Adott S, T mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor létezik pozitív szemi-definit X megoldása, ha létezik $\alpha > 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TS^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. A megoldás akkor, és csak akkor egyértelmű, ha $\ker T = \{0\}$.
2. Ha van pozitív szemi-definit megoldás, akkor van legkisebb megoldás.

Alkalmazás: operátoregyenletek pozitív megoldhatósága

Pozitív szemi-definit megoldás létezése

Adott S, T mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor létezik pozitív szemi-definit X megoldása, ha létezik $\alpha > 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TS^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. A megoldás akkor, és csak akkor egyértelmű, ha $\ker T = \{0\}$.
2. Ha van pozitív szemi-definit megoldás, akkor van legkisebb megoldás.
3. Adott $\gamma \geq \alpha$ mellett az $\|X\| = \gamma$ megoldások között létezik legnagyobb.

Szimmetrikus megoldások

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $TX = S$ egyenletnek mikor létezik szimmetrikus megoldása?

$$\exists ?\, X = X^*, TX = S$$

Szimmetrikus megoldások

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $TX = S$ egyenletnek mikor létezik szimmetrikus megoldása?

$$\exists ?\, X = X^*, TX = S$$

Megközelítés

Hasonlóan a pozitív esethez: a probléma ekvivalens az

$$X_0 : T^* x \mapsto S^* x$$

leképezés folytonos szimmetrikus kiterjeszthetőségével

Szimmetrikus megoldás létezése

Szimmetrikus megoldás létezése

Adott S, T lineáris transzformációk mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor van folytonos szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és létezik $\alpha \geq 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TT^*$.

Szimmetrikus megoldás létezése

Szimmetrikus megoldás létezése

Adott S, T lineáris transzformációk mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor van folytonos szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és létezik $\alpha \geq 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TT^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. Egyértelmáség pontosan akkor van, ha $\ker T = \{0\}$.

Szimmetrikus megoldás létezése

Szimmetrikus megoldás létezése

Adott S, T lineáris transzformációk mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor van folytonos szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és létezik $\alpha \geq 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TT^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. Egyértelmáség pontosan akkor van, ha $\ker T = \{0\}$.
2. Adott $\gamma \geq \alpha$ mellett az $\|X\| = \gamma$ megoldások között van legkisebb ($X_{\min}$) és legnagyobb ($X_{\max}$)

Szimmetrikus megoldás létezése

Szimmetrikus megoldás létezése

Adott S, T lineáris transzformációk mellett a

$$TX = S$$

egyenletnek akkor, és csak akkor van folytonos szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és létezik $\alpha \geq 0$, hogy $SS^* \leq \alpha TT^*$.

Extremális megoldások és egyértelműség

1. Egyértelmáség pontosan akkor van, ha $\ker T = \{0\}$.
2. Adott $\gamma \geq \alpha$ mellett az $\|X\| = \gamma$ megoldások között van legkisebb ($X_{\min}$) és legnagyobb ($X_{\max}$)
3. Ennél több is igaz:

$$\{X = X^*, TX = S, \|X\| = \gamma\} = \{X = X^*, X_{\min} \leq X \leq X_{\max}\}.$$

Nemkorlátos operátoregyenletek

Motiváció

A közönséges, és parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Nemkorlátos operátoregyenletek

Motiváció

A közönséges, és parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Probléma

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris transzformációk esetén keressük

$$TX = S$$

(nem feltétlenül folytonos) X megoldásait.

Nemkorlátos operátoregyenletek

Motiváció

A közönséges, és parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Probléma

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris transzformációk esetén keressük

$$TX = S$$

(nem feltétlenül folytonos) X megoldásait.

Kérdések

- (folytonos) megoldás létezése
- önadjungált/pozitív önadjungált megoldás
- extremális megoldások
- egyértelműség

Legrövidebb hosszú megoldás létezése

Folytonos és nem folytonos megoldás létezése

- Adott S, T (nemkorlátos) operátorok esetén $TX = S$ akkor és csak akkor megoldható, ha $Im(S) \subseteq Im(T)$.

Legrövidebb hosszú megoldás létezése

Folytonos és nem folytonos megoldás létezése

- Adott S, T (nemkorlátos) operátorok esetén $TX = S$ akkor és csak akkor megoldható, ha $Im(S) \subseteq Im(T)$.
- Létezik minimális hosszú ($X_{\min}$) megoldás: ha X megoldás, akkor minden x-re $\|X_{\min}x\| \leq \|Xx\|$.

Legrövidebb hosszú megoldás létezése

Folytonos és nem folytonos megoldás létezése

- Adott S, T (nemkorlátos) operátorok esetén $TX = S$ akkor és csak akkor megoldható, ha $Im(S) \subseteq Im(T)$.
- Létezik minimális hosszú ($X_{\min}$) megoldás: ha X megoldás, akkor minden x-re $\|X_{\min}x\| \leq \|Xx\|$.
- Folytonos megoldás akkor és csak akkor létezik, ha valamely $\alpha > 0$ mellett $\|S^*x\| \leq \alpha\|T^*x\|$.

Legrövidebb hosszú megoldás létezése

Folytonos és nem folytonos megoldás létezése

- Adott S, T (nemkorlátos) operátorok esetén $TX = S$ akkor és csak akkor megoldható, ha $Im(S) \subseteq Im(T)$.
- Létezik minimális hosszú ($X_{\min}$) megoldás: ha X megoldás, akkor minden x-re $\|X_{\min}x\| \leq \|Xx\|$.
- Folytonos megoldás akkor és csak akkor létezik, ha valamely $\alpha > 0$ mellett $\|S^*x\| \leq \alpha\|T^*x\|$.
- Egyértelműség $\ker T = \{0\}$ esetén.

Pozitív kiterjeszthetőség

Észrevétel

A (pozitív) önadjungált megoldhatóság problémája a folytonos esethez hasonlóan átfogalmazható egy kiterjeszthetőségi kérdéssé.

Pozitív kiterjeszthetőség

Észrevétel

A (pozitív) önadjungált megoldhatóság problémája a folytonos esethez hasonlóan átfogalmazható egy kiterjeszthetőségi kérdéssé.

Pozitív önadjungált kiterjeszthetőség

Egy adott $A_0 : \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor mikor terjeszthető ki (nem feltétlenül korlátos) pozitív önadjungált operátorrá?

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Előzmények

- A pozitív önadjungált kiterjeszthetőség problémája klasszikus kérdés (Krein, Neumann, Friedrichs).

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Előzmények

- A pozitív önadjungált kiterjeszthetőség problémája klasszikus kérdés (Krein, Neumann, Friedrichs).
- Ezek mind csak a $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$ esetben alkalmazhatók. (Ok: a differenciáloperátorok általában valamilyen Szoboljev-tér sima függvényeiből álló alterén értelmezettek)

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Előzmények

- A pozitív önadjungált kiterjeszthetőség problémája klasszikus kérdés (Krein, Neumann, Friedrichs).
- Ezek mind csak a $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$ esetben alkalmazhatók. (Ok: a differenciáloperátorok általában valamilyen Szoboljev-tér sima függvényeiből álló alterén értelmezettek)
- Probléma: az operátoregyenlet megoldhatóságában előkerülő operátor csak nagyon ritkán lesz sűrűn értelmezett

Pozitív önadjungált kiterjesztések

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése

Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ operátor esetén ekvivalensek

(i) A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése,

Pozitív önadjungált kiterjesztések

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése

Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ operátor esetén ekvivalensek

(i) A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése,

(ii) $\mathcal{D}_*^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_* := \{k \in \mathcal{H} \,:\, \sup\{|\langle A_0 g, k\rangle| \,:\, g \in \mathcal{D}, \langle A_0 g, g\rangle \leq 1\} < +\infty\}$$

Pozitív önadjungált kiterjesztések

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése

Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ operátor esetén ekvivalensek

(i) A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése,

(ii) $\mathcal{D}_*^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_* := \{k \in \mathcal{H} \,:\, \sup\{|\langle A_0 g, k\rangle| \,:\, g \in \mathcal{D}, \langle A_0 g, g\rangle \leq 1\} < +\infty\}$$

(iii) Ha $\langle A_0 x_n, x_n\rangle \to 0$ és $A_0 x_n \to y$, akkor $y = 0$.

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos önadjungált operátorok rendezése

Ha A, B pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (I+B)^{-1} \leq (I+A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos önadjungált operátorok rendezése

Ha A, B pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (I+B)^{-1} \leq (I+A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztése.

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos önadjungált operátorok rendezése

Ha A, B pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (I+B)^{-1} \leq (I+A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztése.
2. Legnagyobb kiterjesztés akkor és csak akkor van, ha $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$.

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos önadjungált operátorok rendezése

Ha A, B pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (I+B)^{-1} \leq (I+A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0-nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztése.
2. Legnagyobb kiterjesztés akkor és csak akkor van, ha $\mathcal{D}^{\perp} = \{0\}$.
3. $\{A \geq 0, A = A^*, A \supset A_0\} = \{A \geq 0, A = A^*, A_{\min} \leq A \leq A_{\max}\}$.

Egyértelműség

Egy elemi szükséges feltétel

Ha A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése létezik, akkor biztosan $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$.

Egyértelműség

Egy elemi szükséges feltétel

Ha A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése létezik, akkor biztosan $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$. Ez viszont nem elégséges feltétel.

Egyértelműség karakterizációja

Feltéve, hogy $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$, a következők ekvivalensek:

(i) A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése van,

Egyértelműség

Egy elemi szükséges feltétel

Ha A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése létezik, akkor biztosan $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$. Ez viszont nem elégséges feltétel.

Egyértelműség karakterizációja

Feltéve, hogy $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$, a következők ekvivalensek:

(i) A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése van,

(ii) $\mathcal{D}_{**} = \mathcal{D}_*$, ahol

$$D_{**} = \{x : x_n \to x, \langle A_0(x_n - x_m), x_n - x_m \rangle \to 0\},$$

Egyértelműség

Egy elemi szükséges feltétel

Ha A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése létezik, akkor biztosan $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$. Ez viszont nem elégséges feltétel.

Egyértelműség karakterizációja

Feltéve, hogy $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$, a következők ekvivalensek:

(i) A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése van,

(ii) $\mathcal{D}_{**} = \mathcal{D}_*$, ahol

$$D_{**} = \{x : x_n \to x, \langle A_0(x_n - x_m), x_n - x_m \rangle \to 0\},$$

(iii) $\ker(I + A_0^*) \cap \mathcal{D}_* = \{0\}$,

Egyértelműség

Egy elemi szükséges feltétel

Ha A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése létezik, akkor biztosan $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$. Ez viszont nem elégséges feltétel.

Egyértelműség karakterizációja

Feltéve, hogy $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$, a következők ekvivalensek:

(i) A_0-nak egyetlen pozitív önadjungált kiterjesztése van,

(ii) $\mathcal{D}_{**} = \mathcal{D}_*$, ahol

$$D_{**} = \{x : x_n \to x, \langle A_0(x_n - x_m), x_n - x_m \rangle \to 0\},$$

(iii) $\ker(I + A_0^*) \cap \mathcal{D}_* = \{0\}$,

(iv) bármely $0 \neq y \in \ker(I + A_0^*)$ mellett

$$\sup \quad |\langle x, y \rangle| = +\infty.$$

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ esetén ekvivalensek:

(i) $XT = S$ egyenletnek van pozitív önadjungált $X = X^* \geq 0$ megoldása,

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ esetén ekvivalensek:

(i) $XT = S$ egyenletnek van pozitív önadjungált $X = X^* \geq 0$ megoldása,

(ii) minden x-re $\langle Sx, Tx \rangle \geq 0$ és $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} \colon |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x)\}.$$

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ esetén ekvivalensek:

(i) $XT = S$ egyenletnek van pozitív önadjungált $X = X^* \geq 0$ megoldása,

(ii) minden x-re $\langle Sx, Tx \rangle \geq 0$ és $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} \colon |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x)\}.$$

Extremális megoldások, egyértelműség

1. Minimális megoldás mindig létezik.

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ esetén ekvivalensek:

(i) $XT = S$ egyenletnek van pozitív önadjungált $X = X^* \geq 0$ megoldása,

(ii) minden x-re $\langle Sx, Tx \rangle \geq 0$ és $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} \colon |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x)\}.$$

Extremális megoldások, egyértelműség

1. Minimális megoldás mindig létezik.
2. Maximális megoldás akkor és csak akkor van, ha $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$.

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} T$ esetén ekvivalensek:

(i) $XT = S$ egyenletnek van pozitív önadjungált $X = X^* \geq 0$ megoldása,

(ii) minden x-re $\langle Sx, Tx \rangle \geq 0$ és $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$, ahol

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} \colon |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x)\}.$$

Extremális megoldások, egyértelműség

1. Minimális megoldás mindig létezik.
2. Maximális megoldás akkor és csak akkor van, ha $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$.
3. Egyértelműség pontosan akkor, ha $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$ és $\mathcal{D}_{T,S} = \mathcal{F}_{T,S}$, ahol

$$\mathcal{F}_{T,S} = \{v \colon \exists Tx_n \to v, \langle S(x_n - x_m), T(x_n - x_m) \to 0 \rangle\}.$$

Referenciák

Referenciák:

1. Zs. Tarcsay and T. Titkos, Operators on anti-dual pairs: Generalized Krein-von Neumann extension, Mathematische Nachrichten 294 (9), 1821-1838.
2. Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, On the Krein-von Neumann extension of positive operators, Acta Wasaensia 462, 165-178.
3. Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, Extreme positive self-adjoint extensions and some uniqueness criteria (előkészületben)
4. Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, Commutation properties of the Krein-Neumann and Friedrichs extensions (előkészületben)
5. Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, Extensions of non-densely defined symmetric operators (előkészületben)

Köszönöm a figyelmet!