2022. január 13.

TKP workshop
Halmazok kicsi Fourier tartóval

Somlai Gábor

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Irányok halmaza

- Vesszük a p elemű test feletti 2 dimenziós affin síkot $AG(2, p)$.
- Veszünk egy p elemű halmazt. Szőnyi általánosította kisebb halmazokra.
- Megnézzük, hány irányt határoz meg a síkon egy p elemű ponthalmaz, ami azt jelenti, hogy veszünk két különböző pontot, és megnézzük, a különbség vektornak mekkora a meredeksége, azaz melyik pontot határozza meg a projektív egyenesen.
- Esetleg kisebb halmazokra is megnézhetjük az irányok halmazát. Nagyobbra nincs sok értelme, mert az összes irány előáll.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Eredmények

- Rédei és Megyesi belátta, hogy egy p elemű halmaz vagy egy egyenest alkot vagy legalább $\frac{p+3}{2}$ irányt meghatároz.
- Ezt be lehet látni lacunary , azaz hiányos polinomokkal. Az eredmény fontosságát mutatja, hogy ezt belátta Dress, Klin és Muzychuk is, akik ezt Burnside tételének (p fokú tranzitív permutációcsoportok leírása) egy alternatív bizonyítására használták.
- Lovász és Schrijver leírta azokat a halmazokat, amik pontosan $\frac{p+3}{2}$ irányt határoznak meg. Ilyenből affin trafó eredjéig 1 darab van.
- Ez az $f(x) = x^{\frac{p+1}{2}}$ függvény grafikonja.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Eredmények

- Rédei és Megyesi belátta, hogy egy p elemű halmaz vagy egy egyenest alkot vagy legalább $\frac{p+3}{2}$ irányt meghatároz.
- Ezt be lehet látni lacunary , azaz hiányos polinomokkal. Az eredmény fontosságát mutatja, hogy ezt belátta Dress, Klin és Muzychuk is, akik ezt Burnside tételének (p fokú tranzitív permutációcsoportok leírása) egy alternatív bizonyítására használták.
- Lovász és Schrijver leírta azokat a halmazokat, amik pontosan $\frac{p+3}{2}$ irányt határoznak meg. Ilyenből affin trafó eredjéig 1 darab van.
- Ez az $f(x) = x^{\frac{p+1}{2}}$ függvény grafikonja.
- Gács belátta, hogy $\frac{p+5}{2}$ és $2\frac{p-1}{3}$ között se lehet a meghatározott irányok száma.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Általánosítás

- Az eddigiekben p elemű ponthalmazokat néztünk, illetve Szőnyi eredménye is csak ennél kisebb halmazokra vonatkozik.
- Abban az esetben, ha egy p elemű halmaz nem határoz meg egy irányt, akkor egy párhuzamos egyenes család minden elemével 1 elemű a metszete.

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Általánosítás

- Az eddigiekben p elemű ponthalmazokat néztünk, illetve Szőnyi eredménye is csak ennél kisebb halmazokra vonatkozik.
- Abban az esetben, ha egy p elemű halmaz nem határoz meg egy irányt, akkor egy párhuzamos egyenes család minden elemével 1 elemű a metszete.
- Ilyenkor az egyenesekre merőleges nem nulla vektorokhoz tartozó reprezentációk a halmaz karakterisztikus függvényének Fourier transzformáltjának a gyökei.
- A gyököket ismét a projektív egyenesen érdemes elképzelni, hisz racionális értékű függvények Fourier gyökei nem nulla konstans szorzóra nézve invariáns halmazt alkotnak.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Általánosítás

- Az eddigiekben p elemű ponthalmazokat néztünk, illetve Szőnyi eredménye is csak ennél kisebb halmazokra vonatkozik.
- Abban az esetben, ha egy p elemű halmaz nem határoz meg egy irányt, akkor egy párhuzamos egyenes család minden elemével 1 elemű a metszete.
- Ilyenkor az egyenesekre merőleges nem nulla vektorokhoz tartozó reprezentációk a halmaz karakterisztikus függvényének Fourier transzformáltjának a gyökei.
- A gyököket ismét a projektív egyenesen érdemes elképzelni, hisz racionális értékű függvények Fourier gyökei nem nulla konstans szorzóra nézve invariáns halmazt alkotnak.
- A projektív egyenes azon pontjainak halmazát, amikhez tartozó reprezentációk nem tűnnek el hívjuk a halmaz Fourier tratójának, a többi a gyökeinek.
- A teljes halmaznak minden pont gyöke, míg egy egyenesnek 1 kivétellel minden pont gyöke.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROJECT FINANCED FROM THE NRDI FUND

Ghidelli eredménye és sejtése

Theorem (Ghidelli)

$|S| = kp$ $(1 \leq k \leq p,\ k \in \mathbb{Z})$ részhalmaza $AG(2,p)$-nek. Ekkor S vagy párhuzamos egyenesek uniója vagy legalább $\lceil \frac{p+k+2}{k+1} \rceil$ speciális irányt meghatároz.

- Ghidelli azt sejtette, hogy a nevezőbe lehet egy konstanst írni.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Ghidelli eredménye és sejtése

Theorem (Ghidelli)

$|S| = kp$ $(1 \leq k \leq p,\ k \in \mathbb{Z})$ részhalmaza $AG(2,p)$-nek. Ekkor S vagy párhuzamos egyenesek uniója vagy legalább $\lceil \frac{p+k+2}{k+1} \rceil$ speciális irányt meghatároz.

- Ghidelli azt sejtette, hogy a nevezőbe lehet egy konstanst írni.

Tétel (Kiss, Somlai)

Legyen $k = \frac{p-1}{2}$. Ekkor van pontosan 3 speciális iránnyal rendelkező halmaz $AG(2,p)$-ben, aminek kp eleme van.

Sőt, azt is beláttuk, hogy affint trafó erejéig pontosan 2 ilyen halmaz van, amik egymás komplementerei, és a kisebbik Ghidelli tételének élességét mutatja $d = 3$ esetben.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Ghidelli eredménye és sejtése

Theorem (Ghidelli)

$|S| = kp$ $(1 \leq k \leq p,\ k \in \mathbb{Z})$ részhalmaza $AG(2,p)$-nek. Ekkor S vagy párhuzamos egyenesek uniója vagy legalább $\lceil \frac{p+k+2}{k+1} \rceil$ speciális irányt meghatároz.

- Ghidelli azt sejtette, hogy a nevezőbe lehet egy konstanst írni.

Tétel (Kiss, Somlai)

Legyen $k = \frac{p-1}{2}$. Ekkor van pontosan 3 speciális iránnyal rendelkező halmaz $AG(2,p)$-ben, aminek kp eleme van.

Sőt, azt is beláttuk, hogy affint trafó erejéig pontosan 2 ilyen halmaz van, amik egymás komplementerei, és a kisebbik Ghidelli tételének élességét mutatja $d = 3$ esetben.

Tétel (Kiss, Somlai)

Ha $S \subseteq AG(2,p)$-nek pontosan d speciális iránya van, akkor minden irányba a vetület mint multihalmaz, azaz egy $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{N}$ függvény egy legfeljebb $d-2$-edfokú polinom.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Egyenesek összege

Tétel

Egy d speciális iránnyal rendelkező halmaz karakterisztikus függvénye előállítható a megfelelő d irányba mutató egyenesek súlyozott összegeként (ahol minden irányba nem konstansak a súlyok).

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Egyenesek összege

Tétel

Egy d speciális iránnyal rendelkező halmaz karakterisztikus függvénye előállítható a megfelelő d irányba mutató egyenesek súlyozott összegeként (ahol minden irányba nem konstansak a súlyok).

Következmény

Nincs 2 speciális iránnyal rendelkező halmaz

Ez nem a mi eredményünk, mert megjelenik egy Fallon, Mayeli, Villano cikkben is, ahol a bizonyítás Fourier analízis (pedig amúgy triviális).

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Sporadikus esetek

- $p = 3, 5, 7, 11$ esetében megadható olyan kis méretű halmaz, ami egyenlőséggel teljesíti Ghidelli eredményét 4 speciális irányra.
- p=13 esetében ilyet már nem sikerült találni, azaz (itt még) nem (volt) ismert, hogy van-e 52 elemű halmaz 4 speciális iránnyal, csak 65 elemű.

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Új eredmények

Következmény

Legyen d egy rögzített pozitív egész. Ekkor elég nagy prímre a halmaz mérete elég közel van $\frac{p^2}{2}$-höz.

Ez lényegében a jól ismert Weyl összegek becsléseinek elemi módszereinek használata, azaz annak, hogy egy k-adfokú $m \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra $\exp(\frac{2\pi i}{p} m)$ értékek az egységkörön kb. egyenletesen oszlanak el.

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Új eredmények

Következmény

Legyen d egy rögzített pozitív egész. Ekkor elég nagy prímre a halmaz mérete elég közel van $\frac{p^2}{2}$-höz.

Ez lényegében a jól ismert Weyl összegek becsléseinek elemi módszereinek használata, azaz annak, hogy egy k-adfokú $m \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra $\exp(\frac{2\pi i}{p} m)$ értékek az egységkörön kb. egyenletesen oszlanak el.
Már ez mutatja, hogy Ghidelli eredménye se éles (eltekintve a $d = 3$ esettől). Továbbá a számítógépes számolások azt mutatják, hogy a sporadikus eredmények az összes prímet, de nem az összes olyan halmazt megadják, ahol Ghidelli becslése éles.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Új eredmények

Következmény

Legyen d egy rögzített pozitív egész. Ekkor elég nagy prímre a halmaz mérete elég közel van $\frac{p^2}{2}$-höz.

Ez lényegében a jól ismert Weyl összegek becsléseinek elemi módszereinek használata, azaz annak, hogy egy k-adfokú $m \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra $\exp(\frac{2\pi i}{p} m)$ értékek az egységkörön kb. egyenletesen oszlanak el.
Már ez mutatja, hogy Ghidelli eredménye se éles (eltekintve a $d = 3$ esettől). Továbbá a számítógépes számolások azt mutatják, hogy a sporadikus eredmények az összes prímet, de nem az összes olyan halmazt megadják, ahol Ghidelli becslése éles.

Tétel

Rögzített $d \geq 4$ esetén elég nagy p prímre nincs pontosan d speciális iránnyal rendelkező halmaz.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

- Egyenesek összegeként próbáljuk előállítani a halmazunkat.
- A módszer azon az észrevételen múlik, hogy ügyes diszkrepancia becslések alkalmazásával feltehető, hogy néhány független irányban megadott súlyfüggvény lineáris függvényeivel megadható a halmaz, ami így egy lineáris problémához vezet.
- Végül meg kell oldani a lineáris problémát, ahol a bázisként adott függvények nem lineárisak.
- Végül az unicitás eredményt használni 3 irányra.

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Egyéb eredmény

Tétel

$\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$ illetve $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_n$ CI csoport, ahol p, q prím, n négyzetmentes.

JCT(A)-be küldtük be. Közös munka Grigory Ryabovval, Kovács Istvánnal, Mikhail Muzychukkal és Pálfy Péter Pállal.

National Research, Development and Innovation Office Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Köszönöm a figyelmet!

National Research, Development and Innovation Office
Hungary

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND