Európai opciók árazása adaptív diszkretizáló módszerekkel

Fekete Imre

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Matematikai Intézet

Tématerületi Kiválósági Program Workshop
Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

2022. január 13.

National Research, Development and Innovation Office
Hungary

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Európai plain vanilla opciók

Európai típusú opció az opció tulajdonosa kizárólag egy előre meghatározott időpontban élhet opciós jogával miszerint, hogy lehívja az opciót vagy sem

Vételi (call) opció jogot (de nem kötelezettséget) biztosít az opció tulajdonosának, hogy egy adott időben vagy adott időig megvásárolja az opció tárgyát egy meghatározott árfolyamon

Eladási (put) opció jogot biztosít arra, hogy egy meghatározott áron adjon el egy eszközt

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Európai opciós pozíciók fajtái

Long Call

$$\max(S_T - K, 0)$$

Short Call

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

Long Put

$$\max(K - S_T, 0)$$

Short Put

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE HUNGARY
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Black–Scholes modell

Az s részvényárfolyam mozgására a modell

$$\mathrm{d}s = \mu s \mathrm{d}t + \sigma s \mathrm{d}g$$

ahol μ és σ konstansok, g **a Wiener-folyamat**

Feltevések

- a részvény ára Ito-folyamatot követ
- kockázatmentes kamatláb
- nincs osztalék és arbitrázs
- a kereskedés folyamatos
- nincs tranzakciós költség és adó

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Determinisztikus alak

$$\partial_t u(s,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} u(s,t) + rs\partial_s u(s,t) - ru(s,t)$$

ahol

- $u(s,t)$ az opció értéke, ahol s a részvény árfolyama

- σ a *volatilitás*

  a részvényárfolyam változékonysága egy adott időintervallum alatt

- r a *kockázatmentes kamatláb*

  $\approx$ kockázatmentes hozamú befektetéseket biztosítanak

National Research, Development and Innovation Office Hungary

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Feltételek

Kezdeti érték

$$u(s,0) = \Phi(s) = \begin{cases} \max(s-K,0) & \text{(call)} \\ \max(K-s,0) & \text{(put)} \end{cases}$$

Peremérték

$$u(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{(call)} \\ e^{-rt}K & \text{(put)} \end{cases}$$

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Térbeli diszkretizáció

Nem-egyenletes rács

$$\varphi : [\xi_{\min}, \xi_{\max}] \to [S_{\min}, S_{\max}], \text{ hogy } \varphi(\xi_{\min}) = S_{\min} \text{ és } \varphi(\xi_{\max}) = S_{\max}$$

- szigorúan monoton növő
- számunkra érdekes helyen (pl. K-nál) kellően sima

$$s_i = \varphi(\xi_i), \text{ hogy } \xi_i = \xi_{\min} + i\Delta\xi, \ \Delta\xi = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{m}, \qquad i = 0, \ldots, m$$

$$h_i = s_i - s_{i-1} \quad 1 \leq i \leq m$$

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Térbeli diszkretizáció

Sima nem-egyenletes rács

$$C_0\Delta\xi \leq h_i \leq C_1\Delta\xi \text{ és } |h_{i+1} - h_i| \leq C_2(\Delta\xi)^2$$

Példa

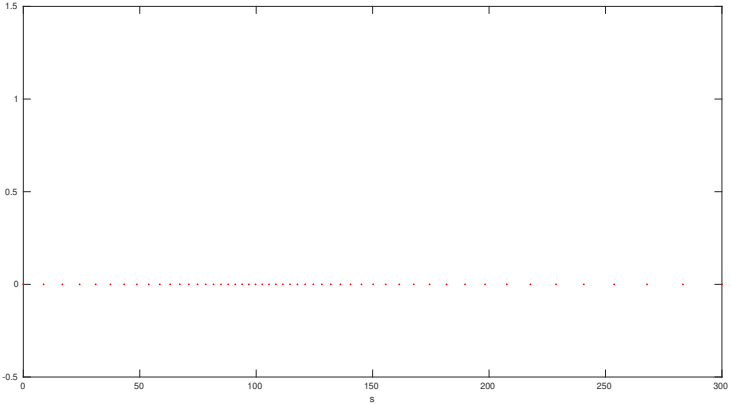
$$\varphi(\xi) = K + L\sinh(\xi) \qquad (L > 0,\ \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max})$$

és

$$\xi_{\min} = sinh^{-1}((S_{\min} - K)/L) \text{ és } \xi_{\max} = sinh^{-1}((S_{\max} - K)/L)$$

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Példa: $K = 100$, $L = K/3$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = 3K$



National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Véges differenciahányados formulák

Retrográd

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_i) - f(s_{i-1})}{h_i} \qquad 0 < i \leq m$$

Haladó

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_{i+1}) - f(s_i)}{h_{i+1}} \qquad 0 \leq i < m$$

Centrális A

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_{i+1}) - f(s_{i-1})}{h_i + h_{i+1}} \qquad 0 < i < m$$

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Véges differenciahányados formulák

Centrális B

$$f'(s_i) \approx \omega_{i,-1} f(s_{i-1}) + \omega_{i,0} f(s_i) + \omega_{i,1} f(s_{i+1}) \qquad 0 < i \leq m$$

ahol

$$\omega_{i,-1} = \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad \omega_{i,0} = \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}}, \quad \omega_{i,1} = \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}$$

Centrális

$$f''(s_i) \approx \omega_{i,-1} f(s_{i-1}) + \omega_{i,0} f(s_i) + \omega_{i,1} f(s_{i+1}) \qquad 0 < i \leq m$$

ahol

$$\omega_{i,-1} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad \omega_{i,0} = \frac{-2}{h_i h_{i+1}}, \quad \omega_{i,1} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}$$

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Nem sima kezdeti érték

$$\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{s_{i-\frac{1}{2}}}^{s_{i+\frac{1}{2}}}\Phi(s)\mathrm{d}s$$

ahol

$$s_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(s_{i-1}+s_i),\ \ s_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(s_i+s_{i+1}),\ \ h_{i+\frac{1}{2}}=s_{i+\frac{1}{2}}-s_{i-\frac{1}{2}}$$

Cella átlagolás avagy **Simító technika**

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Set-up

$$K = 100, \;\; T = 1, \;\; r = 0.05, \;\; \sigma = 0.25$$

$$(S_{\min}, S_{\max}) = (0, 3K) \quad 0 \le t \le T$$

$$u(0,t) = 0 \text{ és } u(S_{\max}, t) = S_{\max} - e^{-rt}K$$

$$u(s,0) = \Phi(s) = \max(s - K, 0) \quad 0 < s < S_{\max}$$

Térbeli diszkretizációs hiba

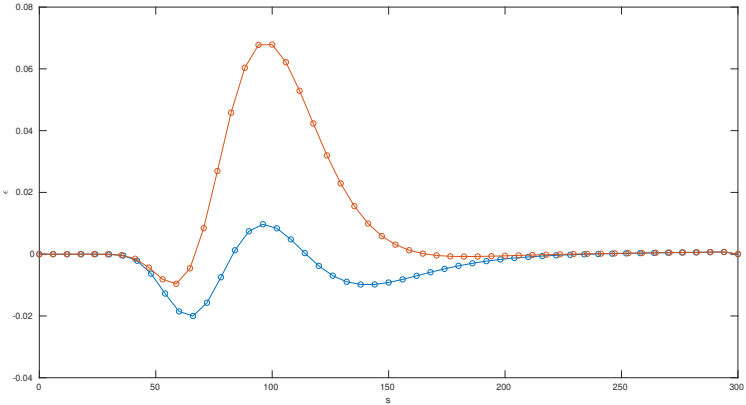
$$\epsilon(m) = (\epsilon_i(m))_{i=0}^{m} \text{ hogy } \epsilon_i(m) = u(s_i, T) - U_i(T) \quad 0 \le i \le m$$

Norma

$$e(m) = \max\{|\epsilon_i(m)| : 0 \le i \le m\}$$

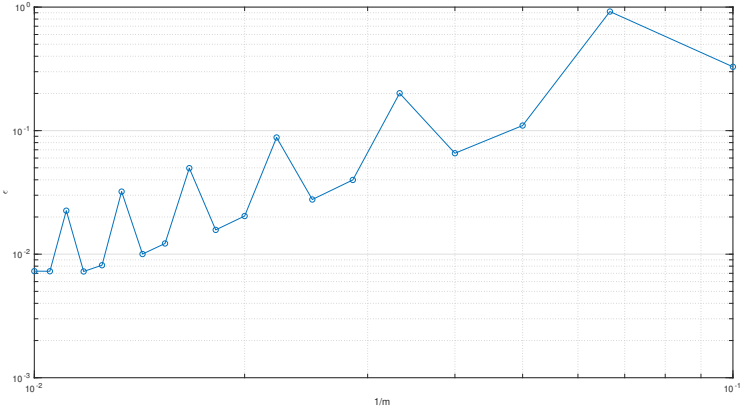
NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE HUNGARY
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Kísérletek - 1. Egyenletes rács, Centrális formulák, Nincs cella átlagolás



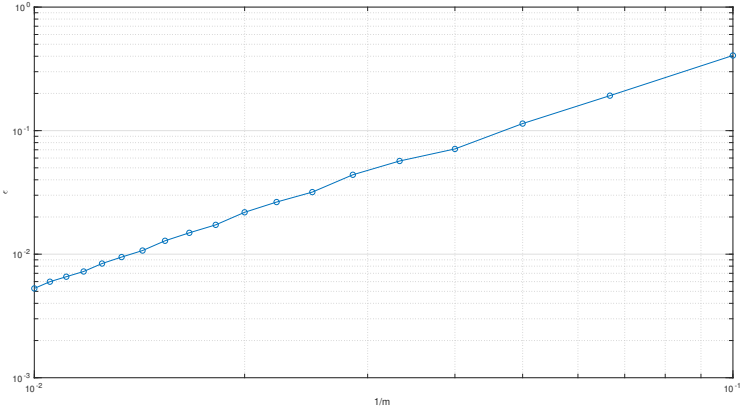
AM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND
NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

Kísérletek - 2. Egyenletes rács, Centrális formulák, Nincs cella átlagolás



AM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND
National Research, Development and Innovation Office
Hungary

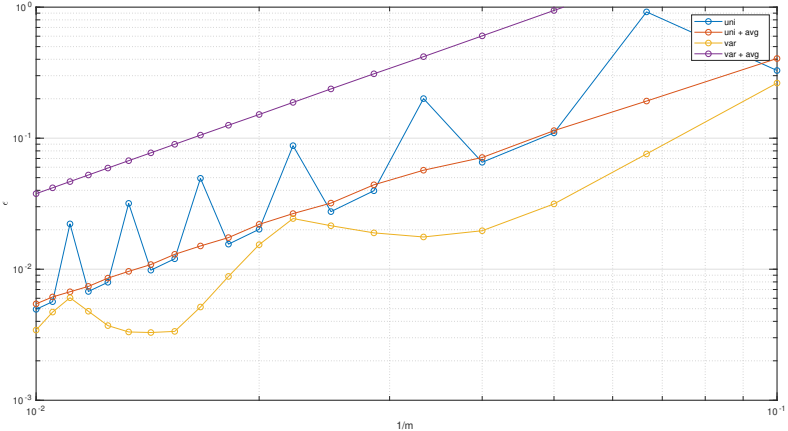
Kísérletek - 3. Egyenletes rács, Centrális formulák, Cella átlagolás



AM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND
NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

Kísérletek - 4.

Kombinációk



National Research, Development and Innovation Office
Hungary
Financed from the NRDI fund

Időbeli diszkretizáció

Szemidiszkrét alak

$$U'(t) = F(t, U(t)), \quad U(0) = U_0$$

$$U_n = U_{n-1} + (1-\theta)\Delta t F(t_{n-1}, U_{n-1}) + \theta \Delta t F(t_n, U_n) \quad n = 1, \dots, N$$

Black–Scholes esetén peremmel

$$(I - \theta \Delta t A) U_n = (I - (1-\theta)\Delta t A) U_{n-1} + (1-\theta)\Delta t g(t_{n-1}) + \theta \Delta t g(t_n)$$

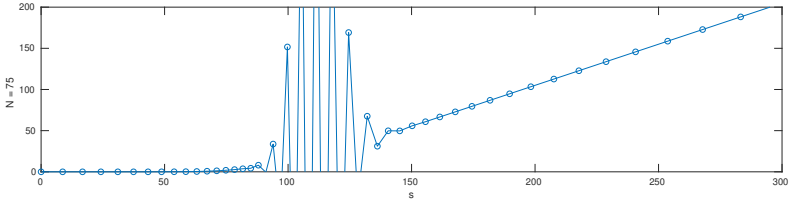
ahol

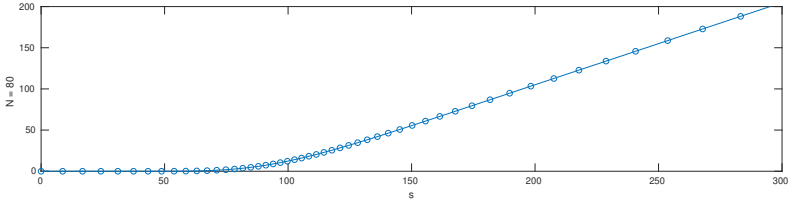
- $\theta = 0$: explicit Euler
- $\theta = 0.5$: Crank–Nicolson
- $\theta = 1$: implicit Euler

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Kísérlet

Explicit Euler





National Research, Development and Innovation Office
Hungary
THE NRDI FUND

Implicit módszerek - Problémák és javaslat

$1/2 \leq \theta \leq 1$ A-stabil módszerek, csak $\theta = 1$ (implicit Euler) esetén L-stabil

Elvárt rend A Crank–Nicolson csak elsőrendű. Ok: nem L-stabil, így a magas frekvenciájú tagokat nem csillapítja

Feloldás: Rannacher csillapítás
Lépjünk először 2μ lépésnyit egy alacsonyabb rendű $(\mu - 1, \mu)$ Padé sémával a magasabbrendű Padé (μ, μ) séma esetén. Rannacher igazolta, hogy ekkor a diffúziós egyenlet esetén az optimális konvergencia rend visszaállítható

Ezért ez a technika itt 2 lépést jelent implicit Eulerrel Crank–Nicolson esetén

National Research, Development and Innovation Office
Hungary
PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

A mi javaslatunk

Crank–Nicolson Gustaf-féle adaptív technikával Szabályozó lehet H211PI vagy PI3333

Irodalmi motivációk

Forsyth (2002)

Hairer–Wanner adaptív technika

Ikonen (2009)

$$\Delta t^{(k+1)} = \left[\left(\frac{k+1}{l} \right)^2 - \left(\frac{k}{l} \right)^2 \right] T$$

Reisinger (2014)

Időbeli változó csere: $\tilde{t} = \sqrt{t}$. Ekkor

$$t_n = \left(\frac{n}{N} \right)^2$$

National Research, Development and Innovation Office Hungary

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

További projekt állapotok

SSP projekt

Beküldve: 2021. április (17 oldal) → 2021. december: ,,Minor revision" (24 oldal)

RKM projekt

Beküldve: 2021. október (17 oldal)

Richardson LTM projekt

Folyamatban

Lóczi Lajos előadás

National Research, Development and Innovation Office
Hungary

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Köszönöm a figyelmet!

Az ED_18-1-2019-0030 szerződésszámú projekt (Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások tématerület) a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program finanszírozásában valósult meg.

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND