Dinamikus árazási sémák

Bérczi Kristóf

MTA-ELTE Lendület Matroidelméleti Kutatócsoport
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
Operációkutatási Tanszék, ELTE

Társszerzők: Bérczi-Kovács Erika, Szögi Evelin, Naonori Kakimura, Yusuke Kobayashi.

TKP Workshop, 2022

Áttekintés

Kombinatorikus piacok

- Walrasi egyensúly
- Dinamikus árazások

Multi-demand piacok

Matroid rang kiértékelések

Kombinatorikus piacok

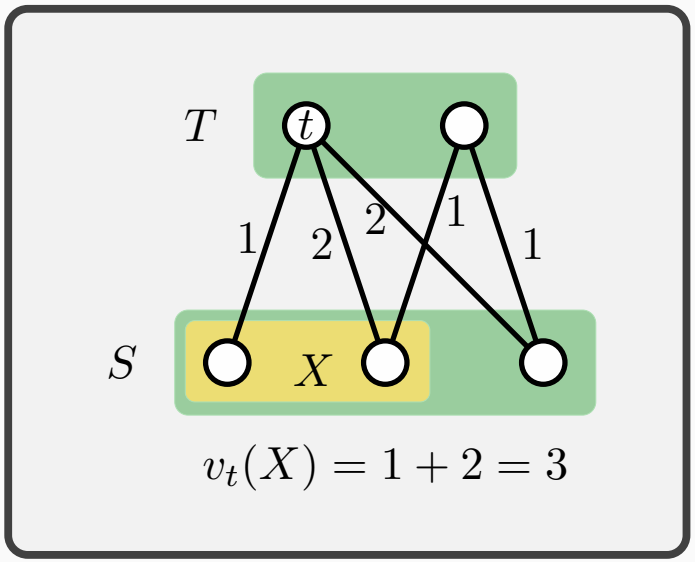
Piaci modell

Egy kombinatorikus piac tárgyak egy S és vásárlók egy T halmazából áll.

Minden $t \in T$ vásárló rendelkezik egy $v_t : 2^S \to \mathbb{R}$ **kiértékelési függvénnyel**.

Példák:

- $v_t(X) = \sum_{s \in X} v_t(s)$,
- $v_t(X) = \max_{s \in X}\{v_t(s)\}$,
- $v_t(X) = 1$ if $X \cap Z_t \neq \emptyset$ és 0 egyébként.



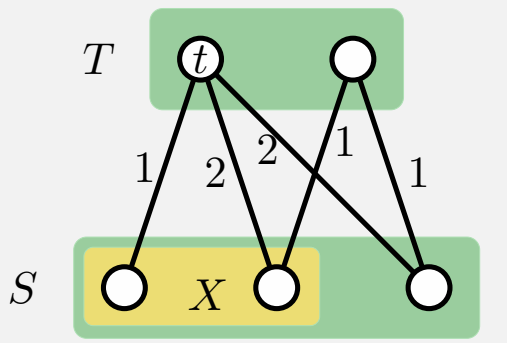
Piaci modell

Egy kombinatorikus piac tárgyak egy S és vásárlók egy T halmazából áll.

Minden $t \in T$ vásárló rendelkezik egy $v_t : 2^S \to \mathbb{R}$ **kiértékelési függvénnyel**.

Példák:

- $v_t(X) = \sum_{s \in X} v_t(s)$,
- $v_t(X) = \max_{s \in X}\{v_t(s)\}$,
- $v_t(X) = 1$ if $X \cap Z_t \neq \emptyset$ és 0 egyébként.



$v_t(X) = \max\{1, 2\} = 2$

Szociális haszon

A tárgyak egy $\{S_t\}_{t \in T}$ allokációjához tartozó **szociális haszon**:

$$\sum_{t \in T} v_t(S_t).$$

Cél: A tárgyak egy olyan allokációjának a meghatározása, melyre a szociális haszon a lehető legnagyobb.

$\Rightarrow$ Egy ilyen partíció hatékonyan megkereshető természetes feltételek mellett.

Példa: Vickery-Clarke-Groves (VCG) aukció.

Kérdés: Elérhető a szociális optimum egyszerűbb mechanizmusokkal?

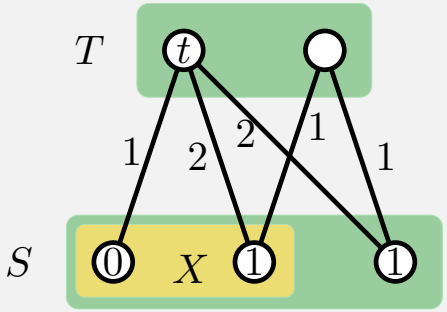
Árazási sémák

Emlékeztető: Egy $t \in T$ vásárlóhoz tartozó kiértékelési függvény: $v_t : 2^S \to \mathbb{R}$.

Egy **árazási sémában** az eladó minden termék árát beállítja valamilyen $p(s)$ értékre.

$\Rightarrow$ Egy vásárló **haszna** termékek egy $X \subseteq S$ részhalmazára:

$$u_t(X) := v_t(X) - p(X).$$



$v_t(X) = 1 + 2 = 3$
$u_t(X) = 3 - 1 = 2$

Walrasi egyensúly

Cél: Az árak beállítása úgy, hogy létezzen allokáció, melyre

- minden termék elkel, és
- minden vásárló olyan halmazt kap, mely maximalizálja a hasznát.

$\Rightarrow$ Egy ilyen árazás-allokáció párt **walrasi egyensúlynak** nevezünk.

Léon Walras. Éléments d'économie politique pure, ou, Théorie de la richesse sociale. F. Rouge, 1896.

Megjegyzés: Egy walrasi egyensúly automatikusan maximalizálja a szociális hasznot.

Problémák

Poz.: Walrasi egyensúly létezik természetes megkötések mellett.

- Gross substitutes kiértékelések (Kelso, Crawford, '82).
- Ez a feltétel szükséges is (Gul, Stacchetti, '99).

Neg.: A walrasi egyensúly önmagában nem elegendő a piac irányításához. Ennek oka, hogy a termékek különböző részhalmazai között döntetlenek lehetnek, és ezeket szisztematikusan kell feloldani egy <u>központi koordinátor</u> által.

- A döntetlenek elkerülhetetlenek (Hsu et al., '16).
- Statikus árazással nem adható algoritmus, mely biztosan az optimum legalább 2/3-nál jobb eredményt adna (Cohen-Addad et al., '16).

Dinamikus árazási sémák

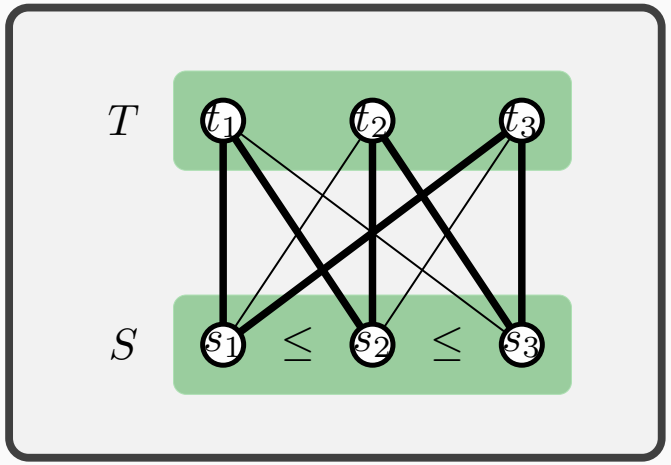
Megoldás

Változtassuk az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- a kiértékelési függvények előre ismertek,
- a vásárlók egy előre nem ismert sorrendben érkeznek.

Az árakat átállíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Az árakat oly módon mozgassuk, hogy a vásárlók érkezési sorrendjétől függetlenül elérjük az optimális szociális hasznot.

Dinamikus árazási sémák

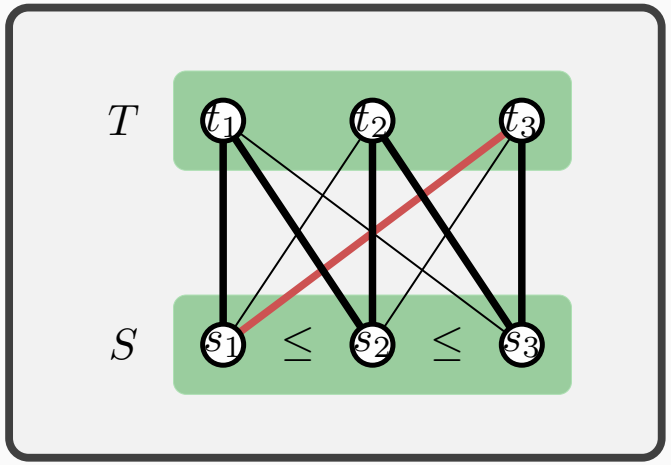
Megoldás

Változtassuk az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- a kiértékelési függvények előre ismertek,
- a vásárlók egy előre nem ismert sorrendben érkeznek.

Az árakat átállíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Az árakat oly módon mozgassuk, hogy a vásárlók érkezési sorrendjétől függetlenül elérjük az optimális szociális hasznot.

Dinamikus árazási sémák

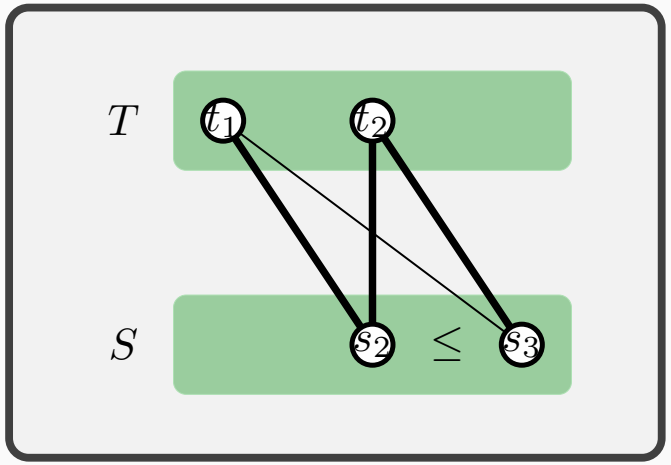
Megoldás

Változtassuk az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- a kiértékelési függvények előre ismertek,
- a vásárlók egy előre nem ismert sorrendben érkeznek.

Az árakat átállíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Az árakat oly módon mozgassuk, hogy a vásárlók érkezési sorrendjétől függetlenül elérjük az optimális szociális hasznot.

Dinamikus árazási sémák

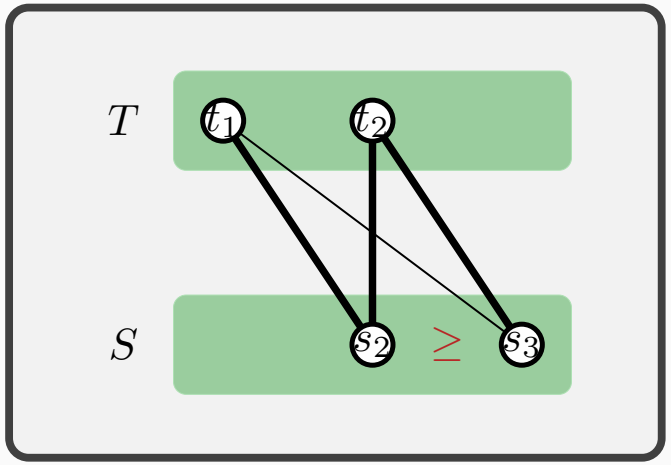
Megoldás

Változtassuk az árakat dinamikusan.

Feltesszük, hogy

- a kiértékelési függvények előre ismertek,
- a vásárlók egy előre nem ismert sorrendben érkeznek.

Az árakat átállíthatjuk két vásárló érkezése között.



Cél: Az árakat oly módon mozgassuk, hogy a vásárlók érkezési sorrendjétől függetlenül elérjük az optimális szociális hasznot.

Multi-demand piacok

Multi-demand kiértékelések

Tegyük fel, hogy $v_t : S \to \mathbb{R}_+$ minden termékhez egy adott értéket rendel, és $b(t)$ a vásárló által venni kívánt tárgyak maximális száma. Ekkor

$$v_t(X) = \max\{v_t(X') : \ X' \subseteq X, |X'| \leqslant b(t)\}$$

úgynevezett **multi-demand** kiértékelés.

Példák:

- $b \equiv 1 \Rightarrow$ **unit-demand** vagy **párosítási** piac
- $b \equiv 2 \Rightarrow$ **bi-demand** piac

Korábbi eredmények:

- Unit-demand piacok (Cohen-Addad et al., '16)
- Multi-demand piacok legfeljebb három vásárlóra (Berger et al., '20)

Bi-demand piacok

B, Bérczi-Kovács, Szögi, '21

Minden bi-demand piacra létezik optimális dinamikus árazási stratégia, melyet polinom időben meghatározhatunk.

Megjegyzés: Érvényes súlyozott matroid rangfüggvényekre, ahol minden matroid rangja legfeljebb 2.

Matroid rang kiértékelések

Matroidok

Matroid alatt egy $M = (S, \mathcal{I})$ párt értünk, ahol $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ teljesíti az úgynevezett **függetlenségi axiómákat**:

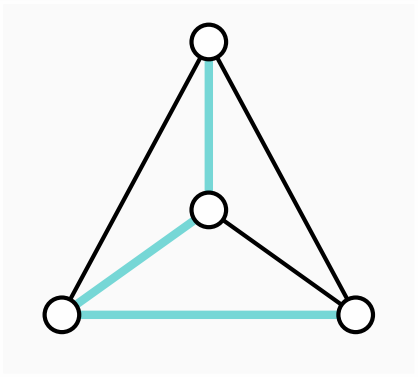
(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$,

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in X - Y$ s.t. $X + e \in \mathcal{I}$.

Megjegyzés: **Hassler Whitney** (1935) és **Takeo Nakasawa** (1935).

Példák:



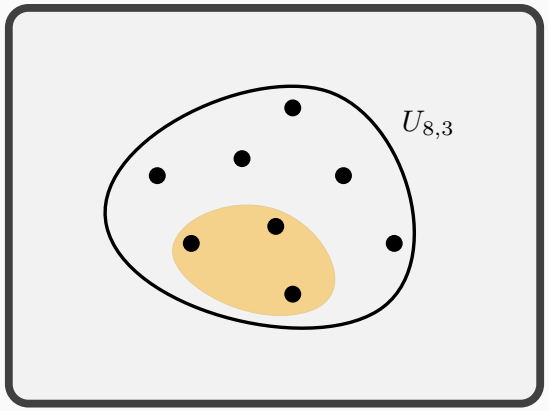
Grafikus matroid

2	0	3	1	1
3	0	3	0	3
1	1	2	0	2
0	2	3	1	1
0	2	4	2	0

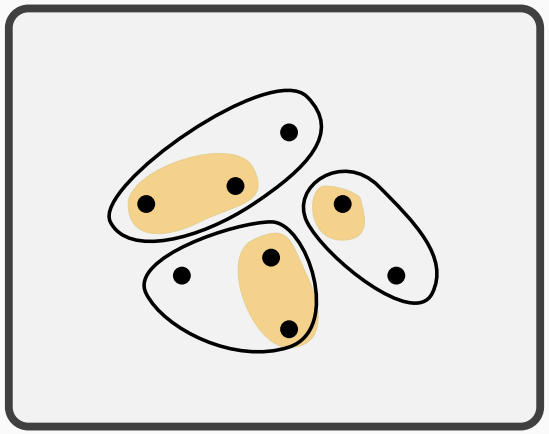
Lineáris matroid

További példák

Uniform matroid: $I \subseteq S$ független $\Leftrightarrow |I| \leqslant r$.



Partíciós matroid: $B \subseteq S$ bázis $\Leftrightarrow |I \cap S_i| \leqslant r_i$ for $i = 1, \ldots, k$.



Bázisok és rang

Egy tartalmazásra nézve maximális független halmazt **bázisnak** nevezünk.

- Feszítő fák gráfokban.
- Véges vektorhalmazok bázisai

Megjegyzés: Bármely két bázis mérete megegyezik (lsd. *dimenzió tétel* algebrában).

Egy X halmaz **rangja**

$$r(X) = \max\{|I| : \ I \subseteq X \text{ független}\}.$$

Adott $w : S \to \mathbb{R}$ súlyozás esetén az X halmaz **súlyozott rangja**

$$r_w(X) = \max\{w(I) : \ I \subseteq X \text{ független}\}.$$

Megfigyelés: Multi-demand kiértékelés

$$v_t(X) = \max\{v_t(X') : \ X' \subseteq X, |X'| \leqslant b(t)\}.$$

$\Rightarrow$ Ez pontosan a $b(t)$ rangú uniform matroid súlyozott rangfüggvénye.

Eredmények

B, Kakimura, Kobayashi, '20

Megfelelő árazás létezése két vásárló esetén, ha:

1. Az egyik matroid partíciós (a másik tetszőleges).
2. Mindkét matroid *strongly base orderable*.
   - sokat vizsgált osztály erős strukturális tulajdonságokkal
   - tartalmazza a transzverzális, lamináris matroidokat, gammoidokat

Megjegyzés:

- A bizonyítás mindkét esetben egy megfelelően definiált irányított gráf aciklikusságán múlik.
- A súlyozott eset visszavezethető a súlyozatlanra Frank *weight splitting* tételén keresztül.

Összefoglaló

Kutatás:

- Két cikk elfogadásra került a SIDMA folyóirathoz.
  - Piacok árazása matroid kiértékelések esetén.
  - Matroidok metszetének listaszínezése.
- Egy cikk elfogadásra került a SICOMP folyóirathoz.
  - Horn függvények minimális reprezentációjának approximációja.
- Egy cikk elfogadásra került a DM folyóirathoz.
  - Bináris matroidok színezése.
- Multi-visit TSP cikk: benyújtva TALG-hoz.
- Inverz párosítás és fenyő problémák: benyújtva DAM-hoz.
- Korlátozott matroid orákulum algoritmusok: benyújtva IPL-hez.

Egyéb:

- Lendület I. pályázat elindítása (állások, honlap, eszközbeszerzés).
- MTA Vendégkutatói Program (Karthekeyan Chandrasekaran, University of Illinois).