Programtervező matematikus

ANALÍZIS

szigorlati tematika

1. **Halmazok, relációk, függvények**

   A halmaz fogalma, műveletek halmazokkal. Rendezett pár, *Descartes*-szorzat. Reláció, függvény. Kép, őskép. Invertálható leképezések. Összetett függvény. Algebrai műveletek függvényekkel. Rendezés, ekvivalencia. A valós számok axiómái. *Peano*-axiómák. Alsó és felső határ. Nevezetes egyenlőtlenségek (háromszög-, *Bernoulli-,* számtani-mértani-közép-egyenlőtlenség).

2. **Metrikus terek topológiája**

   Metrikus-, normált-, euklideszi-terek. Példák. Terek *Descartes*- szorzata. Környezet, belső pont, nyílt halmaz. Torlódási pont, zárt halmaz. Nyílt (zárt) halmazok uniója, metszete. A *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség. Összefüggő metrikus terek és halmazok. Kompaktság metrikus terekben. A korlátosság és a zártság szerepe. Kompaktság $\mathbf{K}^n$ -ben.

3. **Sorozatok**

   Konvergens sorozatok metrikus terekben. Részsorozat. *Cauchy*- kritérium, a teljesség fogalma. *Banach*-tér, *Hilbert*-tér. Példák. A kompakt (zárt) halmazok és a torlódási pontok jellemzése sorozatokkal. Konvergencia $\mathbf{K}^n$ -ben, a koordináta-sorozatok szerepe. A *Bolzano-Weierstrass*-féle kiválasztási tétel. Műveletek konvergens sorozatokkal. Monoton sorozatok. Konvergencia-kritériumok. A limsup, liminf fogalma és kapcsolata a konvergenciával. Egyenletes konvergencia.

4. **Végtelen sorok**

   A végtelen numerikus sor fogalma és konvergenciája. *Cauchy*-kritérium, a generáló sorozat szerepe. Pozitív tagú sorok, abszolút konvergencia, összehasonlító kritériumok. Átrendezések, sorok zárójelezése. *Leibniz*-típusú sorok. Gyök- és hányados- kritérium. Számok p-adikus tört-előállítása. Műveletek sorokkal. Sorok szorzása (téglányszorzat, *Cauchy*-szorzat, *Mertens*-tétel). A hatványsor fogalma. *Cauchy-Hadamard*- tétel. Összegfüggvény, példák (exp, sin, cos, sh, ch). Hatványsorok összege, szorzata, a középpont eltolása.

5. **Függvények határértéke és folytonossága**

   Metrikus terek közötti leképezések határértéke és folytonossága. Ekvivalens definíciók. Átviteli elvek. A folytonosság jellemzése nyílt halmazok segítségével. Egyenletes folytonosság. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai: *Heine*-tétel, *Weierstrass*-tétel (szélsőértékek), az inverz függvény folytonossága. Összefüggő halmaz folytonos képe is összefüggő. *Bolzano*-tétel, *Darboux*-tulajdonság. Kontrakció, fixpont-tétel. Vektor-vektor függvények határértéke és folytonossága. A koordináta-függvények szerepe. Műveletek és határérték (folytonosság). Hatványsorok összegfüggvényének a folytonossága. Az exponenciális-, logaritmus-, hatvány-függvény értelmezése és folytonossága. Jobb és bal oldali határérték és folytonosság. Monoton függvény határértéke. Szakadási helyek.

6. **Differenciálhatóság I.**

   Vektor-vektor függvények deriválhatósága. Deriválhatóság és folytonosság. Műveletek differenciálható függvényekkel. Az összetett függvény deriváltja. A koordináta-függvények szerepe, *Jacobi*-mátrix, gradiens, parciális derivált. Iránymenti derivált. A differenciálhatóság és a parciális differenciálhatóság kapcsolata. A *Jacobi*-mátrix kiszámítása. Az inverz függvény differenciálhatósága és deriváltja. Az arcus és az area függvények. Többször differenciálható függvények. A *Young*-tétel. Az egyváltozós valós függvények esete. A különbségi hányados függvény szerepe. Differenciálási szabályok. Hatványsor összegfüggvényének a deriváltja. A binomiális sor.

7. **Differenciálhatóság II.**

A differenciálszámítás középérték-tételei: *Rolle-, Cauchy-, Lagrange*-tétel. A többváltozós függvényekre vonatkozó *Lagrange*-féle középérték-tétel. A derivált *Darboux*-tulajdonsága. A *Taylor*-sor fogalma. A többváltozós függvényekre vonatkozó *Taylor*-formula (*Lagrange*- és *Peano*-maradékkal). Az egyváltozós eset. Az elemi függvények deriváltjai. Az implicit és az inverz függvény tétele. Paraméteres integrál. *Cauchy-Riemann*-egyenletek.

8. **Függvényvizsgálat**

Monotonitás, lokális monotonitás. Konvexitás, lokális konvexitás. Inflexió. Szükséges, elégséges feltételek differenciálható és többször differenciálható függvények esetén. A *L′Hospital*-szabály. A kvadratikus alak fogalma és tulajdonságai (alsó-felső becslések; definit, indefinit, szemidefinit alak, *Sylvester*-kritérium). Többváltozós függvények lokális szélsőértékei. Szükséges, elégséges feltételek differenciálható és kétszer differenciálható függvények esetén. Az egyváltozós eset. Feltételes szélsőérték (szükséges, ill. elégséges feltétel).

9. **A Riemann-integrál**

A többszörös integrál fogalma (felosztás, közelítő összegek, alsó-felső összegek, *Darboux*-integrálok). Linearitás, monotonitás (műveleti szabályok). A folytonosság és az integrálhatóság kapcsolata. A *Lebesgue*-kritérium. Szukcesszív integrálás. Normál tartományon értelmezett folytonos függvény integrálható, az integrál kiszámítása. Integráltranszformáció, polár- és hengerkoordináták. Az egyváltozós eset: monoton függvény integrálhatósága, integrálható függvények szorzata, hányadosa. Az intervallum szerinti additivitás. A *Riemann*-integrálhatóság és az integrál viszonya a függvény véges sok helyen való megváltoztatásához. A *Newton-Leibniz*-formula. Parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel. Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága. Határozatlan integrál, primitív függvény. Improprius integrál. A *Taylor*-formula integrál-maradékkal. Terület, ívhossz, térfogat, felszín (forgásfelület).

10. **Vonalintegrál**

Sima út, szakaszonként sima út. Utak egyesítése, ellentett út. Tartományok jellemzése sima utakkal. A vonalintegrál fogalma. Linearitás. Integrálás egyesített és ellentett úton. Az integrál becslése, ívhossz és kiszámítása. Primitív függvény, *Newton-Leibniz*-formula. Zárt utakra vett integrálok és a primitív függvény kapcsolata. Integrálfüggvény. Csillagtartományon értelmezett függvény primitív függvénye. Erőterek, rotáció, potenciál. Komplex függvények vonalintegrálja, kapcsolat a valós vonalintegrálokkal. A *Cauchy*-féle alaptétel speciális esete.

11. **Differenciálegyenletek I.**

A *Cauchy*-feladat, példák. Egzisztencia, unicitás. Teljes megoldás. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek, a megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere. Állandó együtthatós rendszer alapmátrixa. Az $n = 2$ eset vizsgálata. Egzakt és szeparábilis differenciálegyenletek. Rakéta emelkedési ideje, radioaktív bomlás (felezési idő).

12. **Differenciálegyenletek II.**

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere. Állandó együtthatós egyenletek megoldása. Kvázi-polinom jobb oldal. Kényszerrezgés, rezonancia.

4. félévi vizsgatételek

1. Az implicit függvény-tétel (a bizonyítás vázlata).
2. Az inverz függvény-tétel (a bizonyítás vázlata).
3. Feltételes szélsőérték: szükséges, ill. elégséges feltétel (a szükséges feltétel bizonyítása).
4. A sima út fogalma; ellentett út, utak egyesítése. Összefüggő halmazok jellemzése sima utakkal.
5. A vonalintegrál értelmezése és tulajdonságai (linearitás; utak szerinti additivitás; ellentett úton való integrálás; úthossz és az integrál becslése az út hosszának a segítségével).
6. Többváltozós vektorfüggvények primitív függvényei. *Newton-Leibniz*-formula vonalintegrálokra. A zárt utakra vett integrál és a primitív függvény kapcsolata.
7. Csillagtartományon értelmezett függvény primitív függvényeinek az előállítása. Fizikai analógiák: erőtér, munka, potenciál (konzervatív erőtér).
8. Komplex függvények vonalintegrálja (visszavezetés a valós esetre). A *Cauchy-Riemann*-egyenletek. A *Cauchy*-féle alaptétel speciális esete.
9. A többszörös integrál fogalma. Az oszcillációs összegek szerepe. A folytonosság és az integrálhatóság kapcsolata.
10. Az integrál kiszámítása *Darboux*-integrálok integráljaként. Szukcesszív integrálás.
11. Az integrálhatóság kiterjesztése nem intervallumon értelmezett többváltozós függvényekre, normál tartományok. *Lebesgue*-kritérium, normál tartományon értelmezett folytonos függvény integrálható, az integrál kiszámítása (bizonyítás nélkül).
12. Integráltranszformáció (bizonyítás nélkül), a tétel gyakorlati alkalmazása: polár-és hengerkoordináták.
13. A differenciálegyenlet (rendszer) fogalma, példák (rakéta emelkedési ideje, radioaktív bomlás, csillapított rezgőmozgás). Kezdeti érték probléma (*Cauchy*-feladat). Az egzakt egyenlet és megoldása. Szeparábilis egyenlet, a rakéta emelkedési idejének a kiszámítása.
14. Lineáris differenciálegyenletek megoldása. Az állandók variálásának a módszere. A radioaktív bomlás felezési idejének a meghatározása.
15. A k.é.p. megoldásának az egyértelműsége. A *Lipschitz*-feltétel. *Peano*-lemma, unicitási tétel.
16. A *Picard-Lindelöf*-féle egzisztencia-tétel (a fixpont-tétel alkalmazása).
17. A lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata: homogén, inhomogén rendszerek. A megoldáshalmaz szerkezete. Alaprendszer, alapmátrix. Az állandók variálásának a módszere.
18. Alapmátrix előállítása állandó együtthatós, diagonalizálható mátrix esetén. Az $n = 2$ eset vizsgálata tetszőleges, állandó együtthatós mátrixra.
19. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet. Az átviteli elv. A megoldáshalmaz szerkezete. Az állandók variálásának a módszere.
20. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása (a karakterisztikus polinom szerepe).

21 Állandó együtthatós magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet kvázi-polinom jobb oldal esetén. A csillapítás nélküli kényszerrezgés vizsgálata, rezonancia.