

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: Pálfi József vezérigazgató
Raktári szám: 42580
Felelős főszerkesztő: Palojtay Mária
Felelős szerkesztő: Balassa Zsófia
Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 17,88 (A/5) ív
Első kiadás, 2002

A szedés az $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával készült.

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

Járai Antal

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Felsőoktatási tankönyv

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Felsőoktatási Tankönyv- és Szakkönyv-támogatási program keretében jelent meg.

A könyv bírálói

FRIDLI SÁNDOR

egyetemi docens

a matematikatudomány kandidátusa, habil.

GILÁNYI ATTILA

egyetemi docens

PhD., habil.

© Járai Antal, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2002

ISBN 963 19 3273 7

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, utánközlése, illetve sokszorosítása a Kiadó engedélye nélkül tilos!

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	7
1. MÉRTÉKTEREK, MÉRTÉKEK	11
1.1. Mértékterek	11
1.2. Mértékek konstruálása, külső mértékek	14
1.3. Mérték és topológia	20
2. PÉLDÁK MÉRTÉKEKRE	25
2.1. A Lebesgue-mérték a számegeyenesen	25
2.2. Lebesgue–Stieltjes-mértékek a számegeyenesen	31
2.3. Lebesgue–Stieltjes-mértékek az euklideszi téren	33
2.4. A Hausdorff-mérték	37
2.5. A Haar-mérték létezése	41
3. MÉRHETŐ FÜGGVÉNYEK	43
3.1. A mérhető függvények fogalma	43
3.2. Mérhető függvények sorozatai	48
4. AZ INTEGRÁL	54
4.1. Nemnegatív mérhető függvények integrálja	54
4.2. Integrálható függvények	58
4.3. Vektorértékű függvények integrálja	61
4.4. L^p -terek	64
4.5. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata	69
5. MÉRTÉKEK SZORZATA	73
5.1. A Fubini-tétel	73
5.2. A Lebesgue-mérték az euklideszi téren	77
6. MÉRTÉKEK DERIVÁLTJA	82
6.1. A Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel	82
6.2. Komplex mértékek	85
6.3. L^p duális tere	92

7. MÉRTÉKEK ÉS LINEÁRIS FUNKCIONÁLOK	95
7.1. Monoton lineáris funkcionálok	95
7.2. A Haar-mérték egyértelműsége	98
7.3. Folytonos lineáris funkcionálok	100
7.4. Korlátos változású függvények	103
8. A DIFFERENCIÁLÁS ÉS INTEGRÁLÁS KAPCSOLATA	110
8.1. Lefedési tételek	110
8.2. Mértékek lokális deriváltja	113
8.3. Abszolút folytonos függvények	117
9. HELYETTESÍTÉSES ÉS PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS	121
9.1. Parciális integrálás	121
9.2. Helyettesítéses integrálás egyváltozós függvényekre	124
9.3. Helyettesítéses integrálás többváltozós függvényekre	130
10. FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ	143
10.1. Függvények konvolúciója	144
10.2. Függvények Fourier-transzformációja	149
10.3. Mértékek Fourier-transzformációja	154
11. FÜGGELÉK	159
11.1. Topológiai alapfogalmak	159
11.2. Topologikus terek fajtái	163
11.3. Normált terek	172
IRODALOM	183
MUTATÓ	186

BEVEZETÉS

A mérték fogalma egyidős a matematikával: a matematika alapjait a hosszúság-, terület- és térfogatmérések hívták életre. Később a különböző mértékek, a hosszúság, terület, térfogat, ívhossz és felszín fogalmát, legalábbis bizonyos egyszerűbb alakzatokra, a görög matematikusok pontosan definiálták. Arkhimédész görbe vonalakkal határolt síkidomok (például parabolaszegmens) területét és görbült felületű testek (például gömb, henger) felszínét definiálta és határozta meg, lényegében integrálszámítás segítségével.

A mérték fogalma szoros kapcsolatban áll az integrál fogalmával. Minden integrál-fogalom lényegében a következőképpen épül fel: az integrációs tartományt kis részekre osztjuk, majd minden kis rész mértékét megszorozzuk az integrálandó függvénynek ezen a részen felvett értékeit közelítő értékkel, és az így nyert szorzatok összegének vesszük a határértékét, miközben a beosztás valamilyen értelemben „finomodik”.

A geometriai és analízisbeli alkalmazásokon kívül a valószínűségi számítás is a mérték-elméleten alapszik. A valószínűség tulajdonképpen egy eseményeken értelmezett mérték.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen természetes feltételeknek kell egy halmaz bizonyos részhalmazain értelmezett halmazfüggvénynek eleget tennie, hogy mértéknek nevezhessük. Három természetes feltétel a következő:

- (1) bármely halmaz mértéke nemnegatív valós szám, esetleg $+\infty$;
- (2) ha az \mathcal{A} véges halmazrendszer lefedi az A halmazt (azaz az \mathcal{A} -beli halmazok egyesítése tartalmazza A -t), akkor az A mértéke nem lehet nagyobb, mint az \mathcal{A} -beli halmazok mértékeinek összege;
- (3) véges sok, páronként diszjunkt halmaz egyesítésének a mértéke a mértékek összege.

Ezen három elengedhetetlen feltételen kívül kívánatos még, hogy minél több halmaznak legyen mértéke, a mérhető halmazok köréből ne vezessenek ki az egyszerű halmazműveletek, és hogy a mérhető halmazok lehetőleg szoros kapcsolatban legyenek a topológiával, ha van az alaphalmazon topológia.

A sokszögek területének, illetve a poliéderek térfogatának egyszerű fogalmát először Giuseppe Peano olasz és Camille Jordan francia matematikusok terjesztették ki a sík, illetve a tér részhalmazainak egy nagyobb osztályára (Peano–Jordan-mérték). Ennek alapfogalata, példaként a síkban elmondva, a következő: egy síkbeli korlátos halmaz

mértéke legyen az őt lefedő, véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos alsó korlátja, belső mértéke pedig a benne fekvő, véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos felső korlátja. Ha e két szám egyenlő, akkor a halmazt mérhetőnek, a belső és külső mérték közös értékét pedig a halmaz mértékének nevezzük.

Ez a mértékfogalom egyszerű, de több célra, elsősorban az integrálás céljára nem teljesen megfelelő. Később a mértékfogalmat René Baire és Émile Borel francia matematikusok továbbfejlesztették, de a döntő lépést Henry Leon Lebesgue, a párizsi egyetem tanára tette meg az 1900-as évek elején. Lebesgue ismert mértékű halmazokkal való véges lefedések helyett megszámlálható sok ismert mértékű halmazzal való lefedéseket vizsgált. A számegegyenesen és az euklideszi terekben egy, a Peano–Jordan-mértéknél jóval általánosabb és kényelmesebben kezelhető mértéket vezetett be, amit később róla Lebesgue-mértéknek neveztek el, valamint bevezette a Lebesgue-integrál fogalmát, és bebizonyított sok fontos, ezekre a fogalmakra vonatkozó tételt. A Lebesgue-mérték eleget tesz az előzőekben kirótt feltételeknek, sőt, a (2) és (3) feltételekben a „véges” szó a „megszámlálható” szóval helyettesíthető.

Az évek során egyre nyilvánvalóbbakká váltak az új mérték- és integrálfogalom előnyei: a jóval nagyobb általánosság, az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, az integrál- és differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Az új elmélet új lendületet adott a Fourier-sorok elméletének, megvetette a modern valós függvénytan alapjait, és a funkcionálanalízis egyik alapkövévé vált. A Lebesgue-féle elméletet az elsők között alkalmazta Riesz Frigyes a funkcionálanalízis alapjait megteremtő munkáiban. A Haar Alfréd által 1933-ban bevezetett Lebesgue-típusú mérték, az úgynevezett Haar-mérték alapvető jelentőségű a topologikus csoportok elméletében. A modern geometria egyes fejezetei elképzelhetetlenek a Lebesgue-féle mértékelmélet nélkül. A valószínűségszámítás alapjait Andrej Nyikolajevics Kolmogorov a mértékelmélet segítségével adta meg, ezzel a valószínűségszámítás a mértékelmélet egyik legfontosabb felhasználási területévé vált.

Ezen könyv célja kettős: egyrészt tartalmazza a matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók számára a II. évben tartott előadások anyagát, másrészt igyekszik összefoglalni mindazokat az ismereteket, amelyeket a többi tárgy felhasznál. A kettős célnak megfelelően a könyv két lépésben történő tanulmányozását javasoljuk. Először a csillaggal jelzett részek kihagyhatók. Ezeket, mivel nem alsóbb éves hallgatóknak szólnak, tömörebben fogalmazzuk. Mivel még a törzsanyagot tartalmazó rész is meglehetősen tömör, nem ajánlatos a témakörrel először ismerkedőknek a könyvet előadás helyett használni: az előadó nagyon sokat segíthet a nehezebb részek részletes és szemléletes magyarázatával. A könyv feladatokat is tartalmaz, ezek elsősorban a törzsanyaghoz kapcsolódnak. A feladatoknál megadott számok a megoldáshoz szükséges időről adnak tájékoztatást: eggyel nagyobb szám kétszer annyi időt jelent. Persze, minden ilyen skála nagyon relatív. A nagyon fontos feladatokat \rightarrow jelzi.

Könnyen előfordulhat, hogy a tárgy előadója még az első lépésként javasolt anyagot is túl mélynek találja, és egyszerűbb tárgyalásmódot szeretne választani. Ilyen esetben a következőket javasoljuk:

Elsősorban azzal egyszerűsíthetjük az anyagot, hogy általános topologikus terek helyett metrikus tereket használunk, esetleg csak \mathbb{R}^n -et. A Radon-mérték fogalmának el-

hagyása inkább csak szükségtelen ismétlésekhez vezet. Ezt csak akkor ajánljuk, ha csak az egydimenziós Lebesgue-mértékkel kívánunk foglalkozni.

Másodsorban, ha nem kívánunk abszolút folytonos függvényekkel foglalkozni, a Newton–Leibniz-formula, a helyettesítéses és parciális integrálás szabálya megfogalmazható lokálisan Lipschitz-, Lipschitz- vagy megszámlálható sok pont kivételével differenciálható folytonos függvényekre is.

Végül egyszerűsíti, de nem rövidíti a mérhető függvények tárgyalását, ha csak bővített valós értékű függvényekre szorítkozunk. Ekkor az $X(f > a)$ típusú nívóhalmazok mérhetőségével definiálhatjuk a függvények mérhetőségét. A \mathbb{C} -, \mathbb{R}^n -, \mathbb{C}^n -beli értékű függvények ekkor a koordinátafüggvényekre való hivatkozással tárgyalhatók. Sajnos, ez a felépítés nem elég általános, és például nem illik bele a helyettesítéses és parciális integrálással foglalkozó rész néhány, a valószínűségi számításban fontos szerepet játszó tétele.

A könyvet függetlenül egészíti ki, amely a felhasznált, főleg topológiai ismeretek tömör összefoglalása. Minden felhasznált fogalom definíciójának helye megtalálható a mutatóban. Csak felhasznált, de nem definiált fogalmaknál egy magyar nyelvű irodalmi hivatkozást is megadtunk, ami halmazelméleti fogalmak esetén Halmos és Sigler [13], lineáris algebrai fogalmak esetén Halmos [14], algebrai fogalmak esetén Fried [9] és analízis esetén Rudin [40] könyve.

Az általánosan szokásos jelöléseket használjuk. A nullát is természetes számnak tekintjük, így az egész számok halmaza $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$; a pozitív természetes számok halmazát \mathbb{N}^+ jelöli. Az összes, X valamely részhalmazát Y -ba képező függvények osztályát $X \rightarrow Y$ jelöli. Így $f \in X \rightarrow Y$ azt jelenti, hogy f az X valamely részhalmazát Y -ba képező függvény, míg $f : X \rightarrow Y$ azt jelenti, hogy f az egész X -en értelmezett Y -beli értékű függvény. Növekvő, illetve csökkenő sorozat konvergenciájára az $x_n \uparrow x$, illetve $x_n \downarrow x$ jelölést alkalmazzuk. Szorzatokra a \prod jelölést használjuk. A differenciálás operátorára néha d/dx vagy más hasonló jelölést használunk.

Az irodalomjegyzék segítségével lehet azoknak, akik más felépítésekkel vagy nagyobb anyaggal kívánnak megismerkedni. Egyszerű bevezetést ad a tanár szakos hallgatók igényeihez szabott Daróczy [5] jegyzet. Magyar nyelven elsősorban a jóval nagyobb anyagot felölelő Laczkovich [26] jegyzetet, illetve Szőkefalvi-Nagy [45] könyvet, Halmos [15] híres könyvét, a tengerszéli idegen nyelvű irodalomból pedig Federer [8] munkáját ajánljuk.

A könyv első változata (jegyzetként) 1985-ben készült el és 1988-ban és 1992-ben is megjelent. A jelen kiadás némileg kibővült és feladatokat is tartalmaz. Mindkét változat elkészítésében sok támogatást, hasznos tanácsot kaptam kollégáimtól, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Analízis Tanszéke dolgozóitól, közülük is elsősorban Daróczy Zoltántól és Szabó Györgytől, a jegyzet lektoraitól, valamint Székelyhidi Lászlótól. Segítségüket nagyon köszönöm. Ugyancsak köszönettel tartozom számos kollégának jelenlegi munkahelyemen, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, különösen Czách Lászlónak, Schipp Ferencnek és Simon Péternek. Köszönöm könyvem lektorainak, Fridli Sándornak és Gilányi Attilának alapos, kritikus és lelkiismeretes lektori munkájukat.

Köszönöm feleségemnek és gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték, hogy könyv-írással töltöttem számos hétvégét és szünidőt. A szedés az $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával készült.

Végezetül köszönöm a Nemzeti Tankönyvkiadónak, hogy vállalta könyvem megjelenését, különösen Palojtay Mária főszerkesztő, Balassa Zsófia felelős szerkesztő és Görög Istvánné műszaki szerkesztő segítőkészségét. Köszönetem fejezem ki a Felsőoktatási Tankönyvpályázatok Kuratóriumának a könyv kiadásához nyújtott támogatásáért.

Budapest, 2002. március 8.

Járai Antal

A jelen elektronikus kiadás a Nemzeti Tankönyvkiadónál megjelent könyv alapján készült, lényegében csak a megtalált hibák kijavításával.

Budapest, 2021. október 23.

Járai Antal

1. MÉRTÉKTEREK, MÉRTÉKEK

Ebben a fejezetben a mértékeket és a mértéktereket tárgyaljuk. Ezek a fogalmak természetesen eleget tesznek a bevezetésben megszabott feltételeknek. Foglalkozunk a mértékterek egyszerű tulajdonságaival és azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehet mértékteret konstruálni. Konkrét mértékterek megismerésére a következő fejezetben kerül sor.

1.1. Mértékterek

1.1.1. Bővített valós számok összege. Emlékeztetünk arra, hogy a *bővített valós számok* halmazán az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt értjük, ahol \mathbb{R} a valós számok halmaza, $-\infty$ és $+\infty$ pedig szimbólumok ($+\infty$ helyett általában ∞ -t írunk), a nyilvánvaló természetes rendezéssel, a rendezésből származó topológiával és az algebrai műveletekkel, amelyeket akkor definiálunk, ha ez folytonosan lehetséges. (Például $\infty + \infty = \infty$, $x \cdot \infty = \infty$, ha $x > 0$, de $\infty - \infty$ és $0 \cdot \infty$ nincs definiálva.) Néhányszor $0 \cdot \infty$ -t célszerű 0 -nak definiálni. Ha ezt a megállapodást használjuk, jelezni fogjuk.

Ha I egy halmaz, és c_i nemnegatív bővített valós szám minden $i \in I$ -re, akkor

$$\sum_{i \in I} c_i$$

a következőképpen van definiálva: 0 , ha I üres halmaz, a nyilvánvaló módon, ha I véges, és a $\sum_{i \in I^*} c_i$ összegek pontos felső korlátjaként, ahol I^* befutja I véges részhalmazait, ha I tetszőleges. Megjegyezzük, hogy ha $I \subset \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{i \in I} c_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} c_i, \quad \text{ahol } I_n = \{i : i \in I, i \leq n\}.$$

Ha a c_i -k tetszőleges bővített valós számok, akkor a

$$\sum_{i \in I} c_i = \sum_{\substack{i \in I \\ c_i > 0}} c_i - \sum_{\substack{i \in I \\ c_i < 0}} (-c_i)$$

összefüggéssel definiáljuk összegüket, ha a jobb oldalon a kivonás elvégezhető (azaz nem $\infty - \infty$ alakú).

A bevezetésben említett elvek szerint kívánatos, hogy a mérhető halmazok köréből ne vezessenek ki a szokásos halmazműveletek. Ilyen halmazrendszerre vonatkozik az alábbi definíció:

1.1.2. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak egy \mathcal{A} rendszerét σ -algebrának nevezzük X -en, az (X, \mathcal{A}) párt pedig *mérhető tér*nek, ha teljesülnek a következő feltételek:

- (1) $X \in \mathcal{A}$;
- (2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (3) ha $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ha nem okozhat félreértést, akkor \mathcal{A} elemeit egyszerűen *mérhető halmazoknak* nevezzük. Nyilván $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$.

A következő definícióra épül az egész mértékelmélet.

1.1.3. Definíció. Az (X, \mathcal{A}, μ) hármast *mértéktér*nek, μ -t pedig *mérték*nek nevezzük X -en, ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ pedig egy \mathcal{A} -n értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) ha $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) és az A_i halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-additivitás}).$$

Ha $A \in \mathcal{A}$, a $\mu(A)$ számot az A halmaz *mértékének* nevezzük. Megjegyezzük, hogy *diszjunkt* halmazrendszer alatt mindig páronként diszjunkt halmazok rendszerét értjük.

1.1.4. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, és \mathcal{A} az X összes részhalmazából álló σ -algebra. Ha $A \in \mathcal{A}$, legyen $\mu(A)$ az A elemeinek száma (∞ , ha A nem véges). Ekkor μ mérték, a *számláló mérték*.

Ennél a triviális példánál érdekesebb példákat a következő fejezetben fogunk mutatni.

1.1.5. Definíció. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. A mértékteret *végesnek* nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$. Ha még az is teljesül, hogy $\mu(X) = 1$, akkor a mértékteret *valószínűségi mértéktér*nek, a mértékteret pedig *valószínűségi mérték*nek nevezzük. Egy $A \subset X$ halmazt σ -végesnek nevezzük, ha lefedhető megszámlálható sok véges mértékű mérhető halmazzal. A *mértékteret* (vagy a *mértékteret*) σ -végesnek nevezzük, ha az X halmaz σ -véges. A *mértékteret* (vagy a *mértékteret*) *teljesnek* nevezzük, ha bármely mérhető és nulla mértékű halmaznak minden részhalmaza is mérhető.

1.1.6. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér. Ekkor \mathcal{A} -ból nem vezet ki a különbség-, valamint a megszámlálható unió- és metszetképzés.

Bizonyítás.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

miatt \mathcal{A} -ból nem vezet ki a véges unióképzés. A

$$\bigcap_i A_i = X \setminus \left(\bigcup_i (X \setminus A_i) \right)$$

összefüggés szerint \mathcal{A} zárt a megszámlálható metszetképzésre. Végül

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B).$$

1.1.7. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Ekkor

- (1) mérhető halmazok véges, páronként diszjunkt rendszerére

$$\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad (\text{additivitás});$$

- (2) ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonitás); ha még $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

- (3) mérhető halmazok bármely megszámlálható rendszerére

$$\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-szubadditivitás});$$

- (4) mérhető halmazok bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ sorozatára

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i);$$

- (5) mérhető halmazok egy szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ sorozatára, ha $\mu(A_1) < \infty$, akkor

$$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

A (4) és (5) tulajdonságokat szokás a mérték folytonosságának nevezni.

Bizonyítás. (1) közvetlenül következik az 1.1.3. definícióból, $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$ választással. (2) azon múlik, hogy A és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig B . (3) bizonyításához azt kell észrevenni, hogy $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus (\cup_{j < i} A_j)$, ha $i > 1$ jelöléssel $\cup_i A_i = \cup_i B_i$ és a B_i -k diszjunktak. (4) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a B_i -k diszjunktak, így

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{i=1}^n B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

- (5)-öt megkapjuk, ha (2)-t és (4)-et alkalmazzuk a $B_i = A_i \setminus A_i$ halmazokra.

1.1.8. Definíció. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, és $Y \in \mathcal{A}$. Ha

$$\mathcal{A}_Y = \{A : A \in \mathcal{A}, A \subset Y\}$$

és $\mu_Y = \mu|_{\mathcal{A}_Y}$, akkor $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ nyilvánvalóan mértéktér. Ezt a mértéktérrel az (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér Y -hoz tartozó alterének nevezzük. Könnyű látni, hogy az alter teljes, ha (X, \mathcal{A}, μ) teljes volt.

→ **1.1.9. Feladat [6].** Adjuk meg egy háromelemű halmazon az összes σ -algebrát.

→ **1.1.10. Feladat [7].** Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is σ -véges mértéktérre.

1.1.11. Feladat [8]. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy

$$d(A, B) = \mu(A \Delta B), \quad \text{ha } A, B \in \mathcal{A}$$

eltérés \mathcal{A} -n.

1.1.12. Feladat [9]. Legyen X tetszőleges halmaz, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ tetszőleges függvény, \mathcal{A} az X összes részhalmazainak osztálya, és legyen $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$, ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér.

1.1.13. Feladat [12]. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n mérhető halmazok egy valószínűségi mértéktérben. Mutassuk meg, hogy ha a tér minden pontja legalább p halmazban benne van, akkor van olyan halmaz, amelynek mértéke legalább p/n .

1.2. Mértékek konstruálása, külső mértékek

Az előző pontban bevezettük a mértéktér fogalmát. Természetes kérdés, hogy hogyan lehet mértéktérrel konstruálni? Az 1.2.3. tételben megmutatjuk, hogy mértéktérrel könnyen kaphatunk úgynevezett külső mértékből. Hogyan kaphatunk külső mértéket? Gyakran előfordul, hogy már van bizonyos „előzetes mérték” fogalmunk egyszerű halmazokra (például, ha a síkbeli halmazokra akarunk területfogalmat bevezetni, a téglalapoknak már tudjuk, hogy mi a területe), vagy legalább valami becsléssel rendelkezünk az egyszerű halmazok „mértékére” vonatkozóan (például, ha térbeli, görbült felületdarab felszínét akarjuk definiálni, akkor tudjuk, hogy „elég kicsi” és így már „alig görbült” felületdarab felszíne, ha „nem nagyon hosszúka”, akkor körülbelül az átmérője négyzetével arányos), és olyan külső mértéket, majd mértéket keresünk, amely ezzel az „előzetes mértékkel”, illetve becsléssel egybevág. Erre adnak lehetőséget az ebben a pontban tárgyalt tételek.

1.2.1. Definíció. Legyen X egy halmaz és legyen μ az X részhalmazainak egy \mathcal{H} rendszerén értelmezett nemnegatív bővített valószínűségi függvény. A μ halmazfüggvényt σ -szubadditívnek nevezzük, ha bármely olyan $A \in \mathcal{H}$ halmaz és \mathcal{H} -beli halmazokból álló $A_i, i \in I$ megszámlálható halmazrendszer esetén, amelyre $A \subset \cup_{i \in I} A_i$, teljesül, hogy

$\mu(A) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i)$. *Külső mérték* alatt egy olyan nemnegatív bővített valós értékű σ -szubadditív halmazfüggvényt értünk, amely egy X halmaz összes részhalmazán van értelmezve.

A definíciót üres, illetve egyelemű I indexhalmazra alkalmazva kapjuk, hogy ha μ külső mérték X -en, akkor $\mu(\emptyset) = 0$, és ha $A \subset B \subset X$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$.

A külső mérték azon halmazok esetében hasznos, amelyeken additív, azaz amelyek közül két diszjunkt halmazt kiválasztva, azok egyesítésének külső mértéke a külső mértékek összege. Ilyen halmazok egy rendszerét jelöli ki a következő definíció, amely az additivitást csak arra az egyszerű esetre követeli meg, amikor egy T halmazt egy A halmazzal két részre, $T \cap A$ -ra és $T \setminus A$ -ra „szétvágunk”.

1.2.2. Definíció (Carathéodory). Legyen μ külső mérték X -en. Az A halmazt μ -mérhetőnek nevezzük, ha $A \subset X$ és

$$(1) \quad \mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \text{minden } T \subset X\text{-re.}$$

A definíciót röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy az A halmaz μ -mérhető, ha „minden halmazt jól vág ketté”. Mivel (1)-ben $\mu(T)$ sohasem lehet nagyobb, mint a jobb oldali összeg, (1) a következő feltétellel ekvivalens:

$$(2) \quad \mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A), \quad \text{ha } T \subset X \text{ és } \mu(T) < \infty.$$

1.2.3. Tétel. Legyen μ külső mérték X -en. Ekkor a μ -mérhető halmazok \mathcal{A} rendszere σ -algebra és μ megszorítása \mathcal{A} -ra teljes mérték.

Ezt a mértéket a μ -ből származó mértéknek nevezzük. Általában, nem teljesen korrekt módon, ezt is μ -vel jelöljük.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha A μ -mérhető, akkor

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \text{minden } T \subset X\text{-re,}$$

de $T \cap (X \setminus A) = T \setminus A$ és $T \setminus (X \setminus A) = T \cap A$ miatt ez azt jelenti, hogy $X \setminus A$ is μ -mérhető. Ha most A és B μ -mérhetőek, akkor

$$(1) \quad \begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \\ &= \mu(T \cap A) + \mu((T \setminus A) \cap B) + \mu((T \setminus A) \setminus B) \\ &\geq \mu(T \cap (A \cup B)) + \mu(T \setminus (A \cup B)), \end{aligned}$$

ha $T \subset X$, így $A \cup B$ μ -mérhető. Ebből indukcióval kapjuk, hogy \mathcal{A} zárt a véges unió- és metszetképzésre.

Megmutatjuk, hogy \mathcal{A} zárt a megszámlálható unióképzésre. Az eddig bizonyítottak és az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup (A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) \cup \dots$$

összefüggés szerint elég megszámlálható végtelen sok diszjunkt μ -mérhető halmaz uniójáról megmutatni, hogy μ -mérhető. Vegyük észre, hogy (1)-ben egyenlőség áll, és így (1)-ből következik, hogy ha A, B diszjunktak és $T \subset A \cup B$, akkor

$$\mu(T \cap (A \cup B)) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap B),$$

az általános $T \subset X$ eset pedig erre visszavezethető. Ha A_1, A_2, \dots diszjunkt μ -mérhető halmazok, akkor indukciónal

$$(2) \quad \mu(T \cap (\cup_{i=1}^j A_i)) = \sum_{i=1}^j \mu(T \cap A_i).$$

Innen

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap (\cup_{i=1}^j A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^j A_i)) \\ &\geq \sum_{i=1}^j \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)), \end{aligned}$$

amiből $j \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

és a külső mérték σ -szubadditivitása miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

azaz az $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz μ -mérhető.

Most megmutatjuk, hogy ha A_1, A_2, A_3, \dots diszjunkt μ -mérhető halmazok, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Vegyük észre, hogy minden j természetes számra

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^j A_i).$$

Mivel (2) miatt

$$\mu(\cup_{i=1}^j A_i) = \sum_{i=1}^j \mu(A_i),$$

határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk.

Végül, ha $\mu(A) = 0$, akkor $T \cap A \subset A$ miatt $\mu(T \cap A) = 0$, így $T \supset T \setminus A$ miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \setminus A) = \mu(T \setminus A) + \mu(T \cap A),$$

azaz az A halmaz μ -mérhető, amiből következik a teljesség.

1.2.4. Tétel. Legyen X egy halmaz, és ν az X részhalmazainak egy \mathcal{H} rendszerén értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény. Ha $B \subset X$, akkor legyen $\mu(B)$ az összes olyan $\sum_{i \in I} \nu(A_i)$ összegek pontos alsó korlátja, amelyekre I megszámlálható, $A_i \in \mathcal{H}$, ha $i \in I$ és $B \subset \cup_{i \in I} A_i$. (Emlékeztetünk rá, hogy $\sum_{i \in \emptyset} \nu(A_i) = 0$ és $\inf \emptyset = \infty$.) Ekkor μ külső mérték X -en, és $\mu(A) \leq \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{H}$.

μ -t a ν -höz tartozó külső mértéknek nevezzük.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy a μ halmazfüggvény σ -szubadditív, azaz ha J megszámlálható, $B, B_j \subset X$ és $B \subset \cup_{j \in J} B_j$, akkor

$$\mu(B) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j).$$

Ha a jobb oldalon álló összeg ∞ , akkor az egyenlőtlenség teljesül. Tegyük fel, hogy a jobb oldalon álló összeg véges, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Nyilván feltehetjük, hogy $J \subset \mathbb{N}$. Ekkor $\mu(B_j)$ definíciója miatt minden $j \in J$ -re van olyan I_j megszámlálható halmaz és olyan $A_{i,j} \in \mathcal{H}$, $i \in I_j$ megszámlálható halmazrendszer, hogy

$$B_j \subset \bigcup_{i \in I_j} A_{i,j} \quad \text{és} \quad \sum_{i \in I_j} \nu(A_{i,j}) \leq \mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ebből, mivel

$$B \subset \bigcup_{j \in J} B_j \subset \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} A_{i,j},$$

kapjuk, hogy

$$\mu(B) \leq \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \nu(A_{i,j}) \leq \sum_{j \in J} \left(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j) + 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, az egyenlőtlenségnek ε nélkül is fenn kell állnia.

Az, hogy $\mu(A) \leq \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{H}$, nyilvánvaló.

Ezzel a konstrukcióval kapcsolatban két kérdés merül fel. Az első, hogy μ mikor lesz kiterjesztése ν -nek, azaz, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy $\mu(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$ -ra? Erre rögtön választ ad a következő tétel:

1.2.5. Tétel. Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, μ pontosan akkor kiterjesztése ν -nek, ha az σ -szubadditív.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyításához egyrészt ha $A \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(A) \leq \nu(A)$, másrészt viszont a ν σ -szubadditivitása miatt minden $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in I$ megszámlálható halmazrendszerre, amely lefedi A -t, teljesül, hogy $\nu(A) \leq \sum_{i \in I} \nu(A_i)$. Így $\nu(A)$ alsó korlátja az ilyen összegeknek, azaz $\nu(A) \leq \mu(A)$.

A másik kérdés, hogy milyen feltételek mellett lesznek a \mathcal{H} -beli halmazok mind μ -mérhetőek? Erre ad választ a következő tétel:

1.2.6. Tétel. Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor μ -mérhető, ha

$$(1) \quad \nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \text{minden } A \in \mathcal{H}\text{-ra, amelyre } \nu(A) < \infty.$$

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló $\mu(A) \leq \nu(A)$ miatt. Az elégségesség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy ha $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$, akkor

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in I$ olyan megszámlálható halmazrendszer, amelyre

$$T \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{és} \quad \mu(T) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \nu(A_i).$$

Ekkor

$$\mu(T) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \nu(A_i) \geq \sum_{i \in I} \mu(A_i \cap B) + \sum_{i \in I} \mu(A_i \setminus B) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

1.2.7. Definíció. Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, azt mondjuk, hogy ν *premérték*, ha

- (1) σ -szubadditív;
- (2) $\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$ minden $A, B \in \mathcal{H}$ -ra.

Megjegyezzük, hogy ha a \mathcal{H} halmazosztály speciális tulajdonságokkal rendelkezik, például zárt a metszet- és különbségképzésre, akkor a fenti két feltétel más, ekvivalens feltételekkel helyettesíthető.

1.2.8. Következmény. 1.2.4. jelöléseivel, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz μ -mérhető legyen $\mu(A) = \nu(A)$ mértékkal, az, hogy ν *premérték* legyen.

1.2.9. Megjegyzés. Ha (X, \mathcal{B}, ν) egy mértéktér és a fenti konstrukciót alkalmazzuk ν -re, akkor a kapott μ külső mértékre nézve mérhető halmazok osztályát \mathcal{A} -val jelölve, (X, \mathcal{A}, μ) teljes mértéktér, amelyre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(B) = \nu(B)$, ha $B \in \mathcal{B}$. Ezt a mértékteret az (X, \mathcal{B}, ν) *mértéktér természetes kiterjesztésének* nevezzük. Ennek létezése mutatja, hogy nem jelentené az általánosság lényeges megszorítását, ha tetszőleges mértékterek helyett csak teljes mértékterekkel vagy csak külső mértékekkel dolgoznánk. Ráadásul külső mértékekkel dolgozni kényelmesebb is lenne. Hogy mégsem ezt tesszük, annak oka az, hogy ez ma még nem terjedt el általánosan.

1.2.10. Feladat [5]. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mu(A)$ legyen 0, ha A üres, X egyéb részhalmazaira pedig legyen 1. Mutassuk meg, hogy μ külső mérték, és keressük meg a μ -mérhető halmazokat.

1.2.11. Feladat [6]. Igazoljuk, hogy ha μ külső mérték, $B \subset A$, a B halmaz mérhető és $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, akkor A is mérhető.

1.2.12. Feladat [8]. Legyen μ külső mérték X -en, $Y \subset X$ és $(\mu \lfloor Y)(A) = \mu(Y \cap A)$, ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy $\mu \lfloor Y$ külső mérték X -en.

1.2.13. Feladat [8]. Legyen μ külső mérték X -en, $f : X \rightarrow Y$ egy tetszőleges függvény és $(f_{\#}\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$, ha $B \subset Y$. Mutassuk meg, hogy $f_{\#}\mu$ külső mérték Y -on.

1.2.14. Feladat [15]. Legyen μ külső mérték X -en. Azt mondjuk, hogy B a μ -burka A -nak, ha $A \subset B \subset X$, a B halmaz μ -mérhető és $\mu(T \cap A) = \mu(T \cap B)$ minden μ -mérhető T halmazra. A μ külső mértéket *regulárisnak* nevezzük, ha minden $A \subset X$ -hez van olyan B mérhető halmaz, amelyre $A \subset B$ és $\mu(A) = \mu(B)$. Igazoljuk, hogy ha μ reguláris külső mérték, akkor

(1) ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i);$$

(2) ha $\mu(A) < \infty$, akkor A -nak van μ -burka;

(3) ha az $A \cap B$ halmaz μ -mérhető és $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) < \infty$, akkor az A és B halmazok μ -mérhetőek;

(4) ha $f : X \rightarrow Y$ egy függvény, $\mu(X) < \infty$ és a C halmaz $f_{\#}\mu$ -mérhető, akkor az $f^{-1}(C)$ halmaz μ -mérhető;

(5) ha $\mu(S) < \infty$, akkor egy halmaz pontosan akkor $\mu \lfloor S$ -mérhető, ha előáll $(B \cap S) \cup C$ alakban, ahol B μ -mérhető és $C \subset X \setminus S$.

Végül mutassuk meg, hogy

(6) ha μ nem reguláris, akkor az (1)–(5) állítások egyike sem feltétlenül teljesül.

1.2.15. Feladat [12]. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy a μ -höz tartozó külső mérték

$$\mu^*(B) = \inf \{ \mu(A) : B \subset A, A \in \mathcal{A} \},$$

ha $B \subset X$. Emellett néha használatos a μ -höz tartozó *belső mérték*, amelynek $B \subset X$ esetén

$$\mu_*(B) = \sup \{ \mu(A) : A \subset B, A \in \mathcal{A} \}$$

a definíciója. Igazoljuk, hogy

(1) ha $A \subset B$, akkor $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$;

(2) minden $A \subset X$ -re $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$;

(3) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\mu_*(A) = \mu^*(A)$;

(4) ha $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$, akkor az A halmaz μ^* -mérhető;

(5) ha A_1, A_2, \dots páronként diszjunkt halmazok, akkor $\mu_*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n)$;

(6) ha A_1, A_2, \dots páronként diszjunkt \mathcal{A} -beli halmazok, $B_n \subset A_n$, akkor

$$\mu_*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(B_n) \quad \text{és} \quad \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

→ **1.2.16. Feladat** [7]. Az X halmaz részhalmazainak egy \mathcal{H} rendszerét *félgyűrűnek* nevezzük, ha $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$ és léteznek $C_i, i = 1, 2, \dots$ diszjunkt elemei \mathcal{H} -nak, hogy $A \setminus B = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Tegyük fel, hogy \mathcal{H} félgyűrű, $\nu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -szubadditív, és ha a $C_i \in \mathcal{H}, i = 1, 2, \dots, n$ halmazok diszjunktak, részei az $A \in \mathcal{H}$ halmaznak, akkor $\sum_{i=1}^n \nu(C_i) \leq \nu(A)$. Mutassuk meg, hogy ekkor ν premérték.

1.2.17. Feladat [12]. Legyen ν külső mérték X -en, \mathcal{H} az X részhalmazainak egy rendszere, amelyre $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$. Legyen μ a $\nu|_{\mathcal{H}}$ halmazfüggvényhez tartozó külső mérték, és tegyük fel, hogy \mathcal{H} minden eleme ν -mérhető és μ -mérhető is. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz μ -mérhető és lefedhető megszámlálható sok \mathcal{H} -beli véges mértékű mérhető halmazzal, akkor az A halmaz ν -mérhető is, és $\nu(A) = \mu(A)$.

1.2.18. Feladat [11]. Legfeljebb háromelemű X halmazon adott ellenpéldákkal mutassuk meg, hogy az előző feladat feltételei közül egyik sem hagyható el.

1.3. Mérték és topológia

Igen sok esetben olyan mértékteret vizsgálunk, amelynek alaphalmaza egyben topologikus tér is. Ilyen esetekben fontos szerepet játszik a mérték és a topológia kapcsolata. Az egyik legegyszerűbb kapcsolat az, ha a nyílt halmazok mérhetőek. A nyílt halmazok mérhetőségéből igen sok, „az analízis eszközeivel definiálható” halmaz mérhetősége következik.

1.3.1. Definíció. Legyen X egy halmaz, és \mathcal{E} az X részhalmazainak egy rendszere. Az összes, \mathcal{E} -t tartalmazó σ -algebrák metszetét (amely nyilvánvalóan maga is σ -algebra X -en) az \mathcal{E} által generált σ -algebrának nevezzük. Ha (X, \mathcal{T}) topologikus tér, a \mathcal{T} által generált σ -algebra elemeit az X tér *Borel-halmazainak* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha μ mérték X -en, és X nyílt részhalmazai mérhetőek, akkor X összes Borel-halmaza is mérhető.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad a nyílt halmazok mérhetőségére.

* **1.3.2. Tétel.** Legyen μ külső mérték az X metrikus téren. Az X Borel-halmazai akkor és csak akkor mérhetőek, ha X bármely két A, B nem üres, diszjunkt, pozitív távolságú részhalmazára

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, mert az \bar{A} halmaz mérhetőségéből $T = A \cup B$ -re

$$\mu(A \cup B) = \mu(T) = \mu(T \cap \bar{A}) + \mu(T \setminus \bar{A}) = \mu(A) + \mu(B).$$

Az elegendőség bizonyításához legyen U nyílt, valódi részhalmaza X -nek, $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$. Legyen

$$A_n = \{x : x \in T \cap U, \text{dist}(x, X \setminus U) \geq 1/n\},$$

és legyen $D_1 = A_1, D_n = A_n \setminus A_{n-1}$, ha $n > 1$. Ha I pozitív egészek egy véges halmaza, amelynek elemei vagy mind páratlanok, vagy mind párosak, akkor

$$\mu(\cup_{i \in I} D_i) = \sum_{i \in I} \mu(D_i).$$

Ezt I elemeinek száma szerinti teljes indukcióval haladva bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy ez a szám nagyobb, mint 1 és legyen k az I legnagyobb eleme. Mivel D_k és $\cup_{i \in I \setminus \{k\}} D_i$ távolsága pozitív,

$$\mu(\cup_{i \in I} D_i) = \mu(D_k) + \mu(\cup_{i \in I \setminus \{k\}} D_i),$$

ami éppen az indukciós lépés $I \setminus \{k\}$ -ről I -re. Ebből

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} D_{2i}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_{2i})$$

és

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} D_{2i-1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_{2i-1}),$$

azaz

$$\infty > 2\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i).$$

Így minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon > \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(D_i) \geq \mu(T \cap U \setminus A_n),$$

hiszen $A_n \cup (\cup_{i=n+1}^{\infty} D_i) = T \cap U$, amiből $\text{dist}(A_n, T \setminus U) \geq 1/n$ miatt

$$\begin{aligned} \mu(T \cap U) + \mu(T \setminus U) &\leq \mu(T \cap U \setminus A_n) + \mu(A_n) + \mu(T \setminus U) \\ &\leq \varepsilon + \mu((T \setminus U) \cup A_n) \leq \varepsilon + \mu(T). \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy U mérhető.

A következő definíció igen szoros kapcsolatot fejez ki a mérték és a topológia között.

1.3.3. Definíció. A μ mértéket *Radon-mérték*nek nevezzük X -en, ha X Hausdorff-tér, és a következő feltételek teljesülnek:

(1) ha V nyílt részhalmaza X -nek, akkor V mérhető, és

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt, } K \subset V\} \quad (\text{belső regularitás});$$

(2) ha A mérhető részhalmaza X -nek, akkor

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V \text{ nyílt, } A \subset V\} \quad (\text{külső regularitás});$$

(3) ha K kompakt részhalmaza X -nek, akkor $\mu(K) < \infty$.

Vegyük észre, hogy az (1) és (2) feltételek mellett (3) azzal ekvivalens, hogy minden pontnak van olyan környezete, amely mérhető és a mértéke véges. Valóban, ha minden pontnak van véges mértékű környezete, akkor egy kompakt halmazt lefedve véges sok véges mértékű nyílt halmazzal, kapjuk, hogy véges mértékű. Megfordítva, ha a kompakt halmazok mértéke véges, akkor az egyelemű halmazokra alkalmazva (2)-t, kapjuk, hogy minden pontnak van véges mértékű nyílt környezete.

1.3.4. Approximációs tétel. Ha μ Radon-mérték X -en, A mérhető, $\mu(A) < \infty$ és $\varepsilon > 0$, akkor A tartalmaz olyan C kompakt halmazt, amelyre $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Válasszunk olyan V és W nyílt halmazokat, amelyekre $A \subset V$, $\mu(V \setminus A) < \varepsilon/2$, $V \setminus A \subset W$, $\mu(W) < \varepsilon/2$, és válasszunk olyan $K \subset V$ kompakt halmazt, amelyre $\mu(V \setminus K) < \varepsilon/2$. Ekkor $C = K \setminus W$ kompakt részhalmaza $V \setminus W \subset A$ -nak, és

$$\mu(A \setminus C) \leq \mu(V \setminus K) + \mu(W) < \varepsilon.$$

* **1.3.5. Tétel.** Ha μ egy σ -véges Radon-mérték X -en, A pedig egy μ -mérhető halmaz, akkor létezik olyan σ -kompakt K és \mathcal{G}_δ -tulajdonságú V halmaz, hogy

$$K \subset A \subset V \quad \text{és} \quad \mu(V \setminus K) = 0.$$

Bizonyítás. Válasszunk egy $\varepsilon_n \downarrow 0$ sorozatot és olyan A_1, A_2, A_3, \dots véges mértékű mérhető halmazokat, amelyeknek egyesítése X . Minden n -re és k -ra léteznek olyan $K_{n,k}$ kompakt és $V_{n,k}$ nyílt halmazok, amelyekre

$$K_{n,k} \subset A \cap A_k \subset V_{n,k} \quad \text{és} \quad \mu(V_{n,k} \setminus K_{n,k}) < \frac{\varepsilon_n}{2^k}.$$

Legyen $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}$ és $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n,k}$. Ekkor a K halmaz σ -kompakt, V pedig \mathcal{G}_σ -halmaz, $K \subset A \subset V$ és minden n -re

$$\mu(V \setminus K) \leq \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n,k}\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_{n,k} \setminus K_{n,k}) = \varepsilon_n.$$

Érdekes és fontos tény, hogy ha az X tér topológiája „elég szép”, akkor a μ mértékre kirótt jóval enyhébb feltételekből is következik, hogy μ Radon-mérték.

* **1.3.6. Tétel.** Legyen X olyan Hausdorff-tér, amelyben minden nyílt halmaz σ -kompakt, \mathcal{B} az X Borel-halmazainak σ -algebrája, μ mérték \mathcal{B} -n, és tegyük fel, hogy minden kompakt halmaz mértéke véges. Ekkor μ Radon-mérték.

Bizonyítás. Tekintsük a $V \mapsto \mu(V)$, ha V nyílt részhalmaza X -nek halmazfüggvényt. Megmutatjuk, hogy ez a halmazfüggvény premérték. Jelöljük ν -vel a hozzá tartozó külső mértéket. A μ mérték σ -szubadditivitásából következik, hogy μ és ν megegyeznek a nyílt halmazokon. Legyenek V és W nyílt halmazok, és tegyük fel, hogy $\mu(W) < \infty$. Válasszunk olyan, kompakt halmazokból álló $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ sorozatot, amelyre $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. A mérték folytonossága miatt

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, K \text{ kompakt}\}.$$

Mivel $W \setminus V = \bigcap_{i=1}^{\infty} (W \setminus K_i)$, ugyancsak a mérték folytonossága miatt

$$\mu(W \setminus V) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(W \setminus K_i).$$

Ebből

$$\mu(W) = \mu(W \cap V) + \mu(W \setminus V) = \nu(W \cap V) + \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(W \setminus K_i) \geq \nu(W \cap V) + \nu(W \setminus V),$$

azaz a nyílt halmazok ν -mérhetőek, tehát a Borel-halmazok is. Legyen B tetszőleges Borel-halmaz, és válasszunk egy kompakt halmazokból álló sorozatot úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = X$ teljesüljön. Legyen $\varepsilon > 0$. A ν definíciója miatt minden i -re van olyan V_i nyílt halmaz, hogy

$$\mu(V_i) = \nu(V_i) < \nu(B \cap K_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad \text{és} \quad B \cap K_i \subset V_i.$$

Ebből $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ -re

$$\nu(V \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i \setminus (B \cap K_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alkalmazva ezt $X \setminus B$ -re is, egy olyan W nyílt halmazt kapunk, amelyre $\nu(W \setminus (X \setminus B)) \leq \varepsilon/2$ és $X \setminus B \subset W$. Az $X \setminus W = F$ jelöléssel F zárt halmaz, $F \subset B$ és $\nu(B \setminus F) \leq \varepsilon/2$. Ebből $\nu(V \setminus F) \leq \varepsilon$. Mivel ν és μ megegyeznek a nyílt halmazokon, $\mu(V \setminus F) \leq \varepsilon$ és így

$$\mu(V \setminus B) \leq \mu(V \setminus F) < \varepsilon,$$

amiből

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : B \subset V, V \text{ nyílt}\}$$

minden B Borel-halmazra, így μ Radon-mérték.

→ **1.3.7. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy \mathbb{R} -ben az alábbi halmazosztályok mindegyikére a generált σ -algebra a Borel-halmazok osztálya: nyílt intervallumok, kompakt intervallumok, racionális végpontú nyílt intervallumok, racionális végpontú kompakt intervallumok, $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{Q}$ alakú intervallumok. Adjunk hasonló példákat $\overline{\mathbb{R}}$ -ban, \mathbb{C} -ben, \mathbb{K}^n -ben és más topologikus terekben.

1.3.8. Feladat [12]. A síkon adjunk meg olyan konvex halmazt, amely nem Borel-halmaz.

* **1.3.9. Feladat [18].** Igazoljuk, hogy megszámlálható bázisú topologikus térben legfeljebb kontinuum sok Borel-halmaz van.

* **1.3.10. Feladat [20].** Bizonyítsuk be, hogy teljes szeparábilis metrikus térben minden Borel-halmaz vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.

→ **1.3.11. Feladat [6].** Mikor lesz a számláló mérték Radon-mérték egy X Hausdorff-téren?

1.3.12. Feladat [6]. Legyen X Hausdorff-tér, x_n az X elemeiből álló sorozat és a_n egy nemnegatív tagú konvergens sor. Ha $A \subset X$, legyen $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} a_n$. Mutassuk meg, hogy μ Radon-mérték.

→ **1.3.13. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy Radon-mérték természetes kiterjesztése is Radon-mérték.

1.3.14. Feladat [9]. Legyen $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezése az X lokálisan kompakt Hausdorff-térnek az Y lokálisan kompakt Hausdorff-térbe. Tegyük fel, hogy $f^{-1}(K)$ kompakt bármely K kompakt részhalmazára Y -nak, az X tér σ -kompakt, μ pedig Radon-mérték X -en. Legyen $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, ha az $f^{-1}(B)$ halmaz μ -mérhető. Bizonyítsuk be, hogy ν Radon-mérték Y -on.

* **1.3.15. Feladat [17].** Legyen μ olyan Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Mutassuk meg, hogy ha A egy véges de pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

* **1.3.16. Feladat [19].** Legyen μ olyan nem nulla véges Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Igazoljuk, hogy létezik kontinuum sok diszjunkt részhalmaza X -nek úgy, hogy egyiknek a komplementere sem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt.

2. PÉLDÁK MÉRTÉKEKRE

2.1. A Lebesgue-mérték a számegeyenesen

Ebben a pontban az előző fejezetben ismertetett módszer és az ott bebizonyított tételek segítségével bevezetjük a számegeyenesen a Lebesgue-mértéket.

2.1.1. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum $\nu(A)$ hosszán a $b - a$ számot értjük, ahol a az A alsó, b pedig az A felső végpontja (A lehet nyílt, zárt vagy félig nyílt). Az 1.2.4. tétel szerint ν -höz tartozó külső mértéket *Lebesgue külső mérték*nek nevezzük és a továbbiakban mindig λ -val jelöljük. A λ -mérhető halmazokat *Lebesgue-mérhető*eknek nevezzük, és osztályukat \mathcal{L} -el jelöljük, λ megszorítását \mathcal{L} -re *Lebesgue-mérték*nek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ -val jelöljük.

2.1.2. Tétel. *A korlátos intervallumok Lebesgue-mérhetőek és mértékük a hosszukkal egyenlő.*

Bizonyítás. A 2.1.1. definíció jelöléseivel, az 1.2. paragrafus eredményei szerint azt kell megmutatnunk, hogy ν premérték. Annak bizonyításához, hogy

$$\nu(A) \geq \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B),$$

ha A és B korlátos intervallumok, vegyük észre, hogy $A \cap B$ vagy üres, vagy intervallum, $A \setminus B$ pedig vagy üres, vagy intervallum, vagy két diszjunkt intervallum egyesítése. Így a fenti egyenlőtlenség arra a trivialisra redukálódik, hogy ha A -t legfeljebb három részintervallumra bontjuk, akkor azok összhossza éppen A hossza.

A szubadditivitás bizonyításához legyen I megszámlálható halmaz, és legyenek $A, A_i, i \in I$ korlátos intervallumok. Tegyük fel, hogy $A \subset \cup_{i \in I} A_i$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy $B = [a, b] \subset A$ zárt intervallumot, amelyre $\nu(A) \leq \nu(B) + \varepsilon$, továbbá, feltéve, hogy $I \subset \mathbb{N}$, válasszunk minden $i \in I$ -hez egy $B_i = (a_i, b_i) \supset A_i$ nyílt intervallumot, amelyre $\nu(B_i) \leq \nu(A_i) + \varepsilon/2^i$. Mivel a B_i nyílt halmazok lefedik a B kompakt halmazt, van olyan I^* véges részhalmaza I -nek, amelyre $B \subset \cup_{i \in I^*} B_i$. Válasszunk olyan i_1 -et, amelyre $a_{i_1} < a < b_{i_1}$, és teljes indukcióval válasszunk ki egy olyan $I^{**} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I^*$ halmazt, amelyre $a_{i_{j+1}} < b_{i_j}$, ha $j = 1, 2, \dots, n-1$ és $b_{i_n} > b$,

például legyen $i_{j+1} = \min\{i \in I^* : a_i < b_{i_j} < b_i\}$, ha $b_{i_j} \leq b$. Ekkor

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \nu(B) + \varepsilon = \varepsilon + (b - a) < \varepsilon + (b_{i_n} - a_{i_1}) \\ &= \varepsilon + (b_{i_n} - a_{i_n}) + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{i_{j+1}} - a_{i_j}) \\ &< \varepsilon + \sum_{j=1}^n (b_{i_j} - a_{i_j}) = \varepsilon + \sum_{i \in I^{**}} \nu(B_i) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i \in I} \left(\nu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leq 3\varepsilon + \sum_{i \in I} \nu(A_i). \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

2.1.3. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $g(x) = ax + b$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re. Ekkor minden $A \subset \mathbb{R}$ -re $\lambda(g(A)) = |a|\lambda(A)$, és ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy intervallumok képe is intervallum, és egyszerű számolás mutatja, hogy intervallumokra teljesül az állítás. Ha $a = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $a \neq 0$ és $A \subset \mathbb{R}$. Ha I megszámlálható, az A_i -k pedig intervallumok minden $i \in I$ -re, továbbá $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, akkor

$$g(A) \subset \bigcup_{i \in I} g(A_i),$$

amiből

$$\lambda(g(A)) \leq \sum_{i \in I} \lambda(g(A_i)) = |a| \sum_{i \in I} \lambda(A_i).$$

Ezt felhasználva a λ külső mérték definíciója szerint $\lambda(g(A)) \leq |a|\lambda(A)$. Alkalmazva ezt g helyett g^{-1} -re, A helyett pedig $g(A)$ -ra, azt kapjuk, hogy

$$\lambda(A) = \lambda(g^{-1}(g(A))) \leq \frac{1}{|a|} \lambda(g(A)),$$

azaz

$$\lambda(g(A)) \geq |a|\lambda(A).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az. Tetszőleges $T \subset \mathbb{R}$ -re

$$\begin{aligned} \lambda(T \cap g(A)) + \lambda(T \setminus g(A)) &= |a|\lambda(g^{-1}(T) \cap A) + |a|\lambda(g^{-1}(T) \setminus A) \\ &= |a|\lambda(g^{-1}(T)) = \lambda(T). \end{aligned}$$

A következő tételben a Lebesgue-mérték és a topológia kapcsolatával foglalkozunk.

2.1.4. Tétel. *A λ mérték Radon-mérték \mathbb{R} -en, és minden $A \subset \mathbb{R}$ -re*

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(V) : A \subset V, V \text{ nyílt} \}.$$

Bizonyítás. Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R} -nek. Mivel V előáll a benne lévő racionális végpontú intervallumok megszámlálható uniójaként, és az intervallumok mérhetőek, V mérhető. Mivel \mathbb{R} minden nyílt részhalmaza σ -kompakt, létezik kompakt halmazoknak olyan $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \dots$ sorozata, amelyre $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = V$. A mérték folytonossága szerint

$$\lambda(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = \sup_n \lambda(K_n).$$

Az nyilvánvaló, hogy ha K kompakt, akkor $\lambda(K) < \infty$, mivel kompakt halmaz korlátos intervallumba foglalható. Végül meg kell mutatnunk, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}$ halmazra

$$\lambda(A) = \inf \{ \lambda(V) : V \text{ nyílt}, A \subset V \}.$$

A külső mérték monotonitása miatt $\lambda(A)$ nem nagyobb, mint a jobb oldal. Ha $\lambda(A)$ végtelen, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $\lambda(A)$ véges, és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $A_i, i \in I$ megszámlálható intervallumrendszer, hogy I pozitív egész számokból áll, $A \subset \cup_{i \in I} A_i$ és $\lambda(A) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \lambda(A_i)$. Választva minden i -re egy V_i nyílt intervallumot, amelyre $\lambda(V_i) \leq \lambda(A_i) + \varepsilon/2^i$ és $A_i \subset V_i$, a $V = \cup_{i \in I} V_i$ halmaz nyílt, tartalmazza A -t, valamint

$$\lambda(V) \leq \sum_{i \in I} \lambda(V_i) \leq \sum_{i \in I} \lambda(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \lambda(A) + 2\varepsilon.$$

Mivel az egyelemű halmazok zárt intervallumok, és hosszuk nulla, mérhetőek, és mértékük nulla. Ebből a σ -additivitás alapján \mathbb{R} minden megszámlálható részhalmaza Lebesgue-mérhető, és mértéke nulla. Önként adódik a kérdés, hogy nagyobb számosságú halmazok lehetnek-e nulla mértékűek? Erre ad választ a következő érdekes konstrukció.

2.1.5. A Cantor-féle triadikus halmaz. Az alábbiakban egy $C \subset \mathbb{R}$ halmazt konstruálunk, amely kontinuum számosságú, Lebesgue-mértéke nulla, kompakt, sehol sem sűrű, és nincs izolált pontja.

Legyen $C_0 = [0, 1]$ és hagyjuk el C_0 -ból a középső $1/3$ -ad hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó halmazt jelölje C_1 . Ez két $1/3$ -ad hosszúságú zárt intervallumból áll. Hagyjuk el ezek mindegyikéből a középső $1/9$ hosszúságú nyílt intervallumot, és a visszamaradó halmazt jelöljük C_2 -vel. Teljes indukcióval folytatva az eljárást, n lépés után egy C_n zárt halmazt kapunk, amely 2^n darab $1/3^n$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallumból áll. Ezek mindegyikének közepéből kivéve egy-egy $1/3^{n+1}$ hosszúságú nyílt intervallumot, kapjuk a C_{n+1} halmazt. Legyen $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Annak bizonyításához, hogy C kontinuum számosságú, vegyük észre, hogy egy $x \in [0, 1]$ valós szám pontosan akkor van benne C_n -ben, ha van olyan

$$0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_{n+1} \dots$$

alakú triadikus törtbe fejtése, amelyben x_i vagy 0, vagy 2, ha $1 \leq i \leq n$. Ez azt jelenti, hogy C pontosan azon x valós számokból áll, amelyek triadikus törtbe fejthetők úgy, hogy egyetlen helyen sem áll egyes. Nyilván C minden eleme pontosan egyféleképpen fejthető így triadikus törtbe. Ha most

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \in C,$$

akkor legyen $y_i = x_i/2$, ha $i = 1, 2, \dots$ és $f(x) = y \in [0, 1]$ az a valós szám, amelynek

$$0, y_1 y_2 y_3 \dots$$

egy diadikus kifejtése. Nyilván az f függvény C -t az egész $[0, 1]$ -re képezi le. Így C számossága legalább kontinuum. Mivel $C \subset \mathbb{R}$, számossága nem lehet nagyobb kontinuumnál, így kontinuum számosságú. Az, hogy $\lambda(C) = 0$, abból következik, hogy

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

minden n -re. Nyilván C korlátos halmaz, és mivel zárt halmazok metszete, zárt is, tehát kompakt. Nem tartalmazhat pozitív hosszúságú nyílt intervallumot, mivel nulla mértékű. Ez azt jelenti, hogy C sehol sem sűrű.

Annak bizonyításához, hogy C -nek nincs izolált pontja, megjegyezzük, hogy ha egy pont valamely n -re a C_n -et alkotó intervallumok valamelyikének végpontja, akkor a C_{n+1} -et alkotó intervallumok végpontjai között is előfordul, így teljes indukcióval kapjuk, hogy minden C_i -ben benne van, tehát C -ben is. Legyen most $x \in C$ és $\varepsilon > 0$. Választva olyan n -et, amelyre $1/3^n < \varepsilon$, a C_n -et alkotó zárt intervallumok közül az x -et tartalmazó intervallum valamelyik végpontja olyan x -től különböző eleme C -nek, amely ε -nál közelebb van x -hez.

Mivel a Cantor-halmaz kontinuum számosságú, ugyanannyi részhalmaza van, mint \mathbb{R} -nek. Mivel nulla mértékű, minden részhalmaza is mérhető, így ugyanannyi Lebesgue-mérhető halmaz van, mint ahány részhalmaza \mathbb{R} -nek. Felmerül a kérdés, hogy ha ilyen sok mérhető halmaz van, van-e egyáltalán nem mérhető halmaz? Az alábbiakban ilyen, nem Lebesgue-mérhető halmazra ismertetünk egy, Zermelo német matematikustól származó példát.

2.1.6. Nem mérhető halmaz létezése. A konstrukcióban felhasználjuk a halmazelmélet kiválasztási axiómáját: nem üres, páronként diszjunkt halmazok bármely rendszeréhez van olyan halmaz, amely mindegyikből pontosan egy elemet tartalmaz.

Legyen $I = [-1, 1]$ és vezessük be az I elemei között az $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$ ekvivalenciarelációt. Az I ekvivalenciaosztályai páronként diszjunkt, nem üres halmazokból álló rendszert alkotnak, így a kiválasztási axióma szerint van olyan A halmaz, amelyik minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Megmutatjuk, hogy A nem lehet mérhető. Rendezzük egy r_1, r_2, r_3, \dots sorozatba a $[-2, 2]$ -beli racionális számokat, és legyen

$$A_k = \{x + r_k : x \in A\}.$$

Ekkor $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, hiszen ha $y \in I$, akkor van olyan $x \in I$, hogy $x \in A$ és $x \sim y$. Nyilván $|y - x| \leq 2$ és $y - x$ racionalitása miatt $y - x = r_k$ valamilyen k természetes számra, így

$$y = x + (y - x) = x + r_k \in A_k.$$

Felhasználva a 2.1.3. tételt, $\lambda(A_k) = \lambda(A)$ minden k -ra, így a

$$2 = \lambda(I) \leq \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$$

összefüggésből következik, hogy $\lambda(A) > 0$.

Másrészt nyilván $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-3, 3]$, és ha $k \neq j$, akkor $A_k \cap A_j = \emptyset$, hiszen $y \in A_k \cap A_j$ -ből az következne, hogy y előáll $x_j + r_j$ és $x_k + r_k$ alakban is, ahol x_j és x_k az A különböző pontjai, ami pedig $x_j - x_k = r_k - r_j$ racionalitása miatt lehetetlen, hiszen A minden ekvivalenciaosztályból csak egy elemet tartalmaz. Így ha A mérhető lenne, akkor 2.1.3. felhasználásával azt kapnánk, hogy az A_k -k is mérhetőek ugyanazzal a mértékkel, amiből a

$$6 = \lambda([-3, 3]) \geq \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$$

egyenlőtlenség szerint $\lambda(A) = 0$ következne. Ez ellentmondás.

→ **2.1.7. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy \mathbb{R} minden nulla Lebesgue-mértékű zárt részhalmaza sehol sem sűrű.

2.1.8. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy $[0, 1]$ minden egy Lebesgue külső mértékű részhalmaza sűrű $[0, 1]$ -ben.

2.1.9. Feladat [9]. Bizonyítsuk be, hogy azon $[0, 1]$ -beli valós számok, amelyeknek van olyan tizedestört alakja, amelyben nem szerepel hetes, sehol sem sűrű, perfekt, nulla Lebesgue-mértékű halmazt alkotnak.

2.1.10. Feladat [8]. Jelölje C a Cantor-halmazt, és legyen

$$A = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} a + (b - a)C.$$

Mutassuk meg, hogy $\lambda(A) = 0$, az A halmaz első kategóriájú, nulla Lebesgue-mértékű, és \mathbb{R} minden pontja kondenzációs pontja A -nak.

2.1.11. Feladat [14]. Legyen $a_n > 0$, és tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Igazoljuk, hogy létezik páronként diszjunkt nyílt intervallumok olyan $I_n \subset [0, 1]$ sorozata, hogy $\lambda(I_n) = a_n$ és $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ sehol sem sűrű perfekt részhalmaza \mathbb{R} -nek.

2.1.12. Feladat [12]. Legyen $F \subset \mathbb{R}$ nem üres perfekt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy F tartalmaz nem üres, perfekt, nulla Lebesgue-mértékű részhalmazt.

2.1.13. Feladat [10]. Adott $0 < \varepsilon \leq 1$ -hez adjunk meg $[0, 1]$ -nek perfekt, sehol sem sűrű, $1 - \varepsilon$ Lebesgue-mértékű részhalmazát.

2.1.14. Feladat [8]. Adjunk meg $[0, 1]$ -ben 1 Lebesgue-mértékű, első kategóriájú részhalmazt.

2.1.15. Feladat [8]. Van-e a számegyenesnek nulla Lebesgue-mértékű, második kategóriájú részhalmaza?

2.1.16. Feladat [14]. Igaz-e, hogy \mathbb{R} minden nulla Lebesgue-mértékű A részhalmazához van olyan B nulla Lebesgue-mértékű \mathcal{F}_σ -halmaz, amely tartalmazza A -t?

* **2.1.17. Feladat: Steinhaus tétele [15].** Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor $A - A$ tartalmazza a 0 egy környezetét. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhetőek és pozitív mértékűek, akkor $A + B$ belseje nem üres. Igaz-e ez, ha B nem mérhető, de a külső mértéke pozitív?

2.1.18. Feladat [10]. Igazoljuk, hogy $C - C = [-1, 1]$, ha C a Cantor-halmaz.

2.1.19. Feladat [7]. Legyen A pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pontja, amelyek különbsége racionális.

* **2.1.20. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ -re tartalmaz n -tagú számtani sorozatot.

2.1.21. Feladat [12]. Legyen ξ irracionális szám, $X_0 = 2\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$, $X_1 = X_0 + 1$, és $X = X_0 \cup X_1$. Igazoljuk, hogy X_0 és X sűrű részcsoportjai \mathbb{R} -nek. Legyen A olyan halmaz, amely minden X szerinti mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, és legyen $N = A + X_0$. Bizonyítsuk be, hogy $N - N$ nem tartalmaz X_1 -beli pontot, X_1 sűrű \mathbb{R} -ben, $\mathbb{R} \setminus N = N + 1$ és N nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

2.1.22. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelynek pozitív a Lebesgue külső mértéke, tartalmaz olyan B halmazt, amelyre sem B , sem $A \setminus B$ nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

2.1.23. Feladat [10]. Legyen A zárt, sehol sem sűrű részhalmaza $[0, 1]$ -nek, és $f(x) = \lambda([0, x] \setminus A) / \lambda([0, 1] \setminus A)$, ha $x \in [0, 1]$. Igazoljuk, hogy f a $[0, 1]$ intervallumot önmagára képezi le, szigorúan monoton növekedő, folytonos, az inverze is folytonos, $\lambda(f(A)) = 0$, valamint ha $B \subset A$ nem Lebesgue-mérhető, akkor $f(B)$ Lebesgue-mérhető, de nem Borel-halmaz.

2.1.24. Feladat [15]. Adjunk meg olyan részhalmazát $[0, 1]$ -nek, amelynek Lebesgue külső mértéke 1, de a racionális számok feletti lineáris burka nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmazt.

2.2. Lebesgue–Stieltjes-mértékek a számegeyenesen

Ebben a pontban a Lebesgue-mérték általánosításaként bevezetjük az úgynevezett Lebesgue–Stieltjes-mértékeket. Ezek a mértékek fontos szerepet játszanak a valószínűségszámításban.

2.2.1. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény. Tekintsük azon (nyílt, zárt vagy félig nyílt) intervallumok osztályát, amelyeknek az a, b végpontjai g -nek folytonossági pontjai, és legyen ν_g az a halmazfüggvény, amely egy ilyen intervallumhoz a $g(b) - g(a)$ számot rendeli. Legyen λ_g a ν_g -hez tartozó külső mérték \mathbb{R} -en, \mathcal{L}_g pedig a λ_g -mérhető halmazok osztálya. A λ_g halmazfüggvényt a g -hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes külső mértéknek* nevezzük, λ_g megszorítását \mathcal{L}_g -re pedig a g -hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes-mértéknek*, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ_g -vel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy a Lebesgue-mérték speciális esete a Lebesgue–Stieltjes-mértéknek: akkor kapjuk, ha $g(x) = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

2.2.2. Tétel. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ és $[a, b]$ intervallumok λ_g -mérhetőek, és

$$\begin{aligned}\lambda_g(a, b) &= g(b-) - g(a+), \\ \lambda_g(a, b] &= g(b+) - g(a+), \\ \lambda_g[a, b) &= g(b-) - g(a-), \\ \lambda_g[a, b] &= g(b+) - g(a-).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az, hogy ν_g premérték \mathbb{R} -en, hasonlóan látható be, mint a Lebesgue-mérték esetében. Ebből következnek a fenti egyenlőségek arra az esetre, ha a és b a g -nek folytonossági pontjai. Most legyen a és b tetszőleges, és legyenek $a_n \downarrow a$, $b_n \uparrow b$ olyan sorozatok, amelyekre a_n és b_n a g -nek folytonossági pontjai. Ekkor

$$\lambda_g(a, b) = \lambda_g(\cup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_g(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(b_n) - g(a_n)) = g(b-) - g(a+),$$

amivel beláttuk az első összefüggést. A többi összefüggés hasonlóan bizonyítható.

2.2.3. Tétel. A λ_g mérték Radon-mérték \mathbb{R} -en, és minden A részhalmazára \mathbb{R} -nek

$$\lambda_g(A) = \inf \{ \lambda_g(V) : A \subset V, V \text{ nyílt} \}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a Lebesgue-mérték esetében.

* **2.2.4. Definíció.** Egy $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *normalizáltnak* nevezünk, ha balról folytonos és $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, $f(x-)$ létezik minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és $c \in \mathbb{C}$, akkor a

$$g(x) = f(x-) + c, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}$$

függvény balról folytonos. Valóban, ha $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $y < x$, hogy $|f(t) - f(x-)| < \varepsilon$, ha $t \in (y, x)$. Mivel $f(t-)$ az $f(s)$, $y < s < t$ számok torlódási pontja,

$$|f(t-) - f(x-)| = |g(t) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ha még $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{C}$ is létezik, akkor $c = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ választással g normalizált függvény. Valóban, ha $x_n \rightarrow -\infty$ és y_n -et úgy választjuk, hogy $x_n - 1/n < y_n < x_n$ és $|f(x_n) - f(y_n)| < 1/n$ teljesüljön, akkor $y_n \rightarrow -\infty$ és $g(x_n) - c - f(y_n) \rightarrow 0$, amiből $g(x_n) \rightarrow c + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Ezt a g függvényt az f normalizáltjának nevezzük.

* **2.2.5. Tétel.** Legyen μ egy véges teljes Radon-mérték \mathbb{R} -en és legyen $g(x) = \mu(-\infty, x)$. Ekkor

- (1) g monoton növekedő normalizált függvény;
- (2) g pontosan akkor folytonos egy $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$;
- (3) $\lambda_g = \mu$.

Megfordítva, legyen f egy monoton növekedő korlátos függvény és legyen g az f normalizáltja. Ekkor

- (4) $\lambda_f = \lambda_g$;
- (5) $g(x) = \lambda_f(-\infty, x)$.

Bizonyítás. (1) és (2) a mérték monotonitásából és folytonosságából következik. Mivel $\mu[x, y) = g(y) - g(x)$, a μ és a λ_g mértékek egybeesnek a balról zárt, jobbról nyílt intervallumokon. Ha $x < x_n < y$, $x_n \downarrow x$, akkor

$$\mu(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu[x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_g[x_n, y) = \lambda_g(x, y),$$

így μ és λ_g egybeesnek a nyílt intervallumokon. A nyílt halmazok struktúratétele szerint μ és λ_g egybeesnek \mathbb{R} nyílt részhalmazain. Mivel mindkettő Radon-mérték, ugyanez teljesül minden Borel-halmazra. Ha az A halmaz μ -mérhető, akkor léteznek olyan B és C Borel-halmazok, hogy $C \subset A \subset B$ és $\mu(B \setminus C) = 0$. A λ_g teljessége miatt $A \setminus C \subset B \setminus C$ is λ_g -mérhető, így A is λ_g -mérhető és

$$\lambda_g(A) = \lambda_g(C) + \lambda_g(A \setminus C) = \lambda_g(C) = \mu(C) = \mu(C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A).$$

Hasonlóan adódik, hogy ha az A halmaz λ_g -mérhető, akkor μ -mérhető is és $\mu(A) = \lambda_g(A)$.

A megfordításhoz, mivel f monoton, minden pontban létezik a bal oldali határértéke, így f korlátossága miatt g értelmezve van és monoton növekedő. A 2.2.1. definíció szerint f -hez tartozó ν_f és g -hez tartozó ν_g premértékek megegyeznek, így $\lambda_f = \lambda_g$. Felhasználva, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ és g balról folytonos, 2.2.2.-ből és a mérték folytonosságából kapjuk (5)-öt.

* **2.2.6. Megjegyzés.** Az előző tétel kiterjeszhető arra az esetre is, amikor μ nem véges teljes Radon-mérték. Ekkor g -t a következőképpen definiálhatjuk:

$$g(x) = \begin{cases} \mu[0, x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -\mu[x, 0), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ feltétel helyett $g(0) = 0$ fog teljesülni, az f korlátossága nem szükséges, és (5)-ben

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_f[0, x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -\lambda_f[x, 0), & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

egyébként a tétel és bizonyítása érvényben marad. A valószínűségszámításban és más alkalmazásokban 2.2.5. eredeti alakját szokás használni.

→ **2.2.7. Feladat [7].** Határozzuk meg a λ_Θ Lebesgue–Stieltjes-mértéket és a mérhető halmazokat, ha Θ a Heaviside-függvény: $\Theta(x)$ nulla, ha $x \leq 0$ és egy, ha $x > 0$. (A λ_Θ mérték a *Dirac-mérték*.)

2.2.8. Feladat [9]. Legyen x_n a racionális számok egy sorozatba rendezése, és legyen $g(x) = \sum_{x_n < x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy g szigorúan monoton növekedő, balról folytonos, minden irracionális pontban folytonos és egyetlen racionális pontban sem folytonos. Határozzuk meg a λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket és a mérhető halmazokat.

2.2.9. Feladat [8]. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, λ_g a hozzá tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték. Igazoljuk, hogy $\lambda_g\{x\} = 0$ pontosan akkor, ha g folytonos az x pontban. Bizonyítsuk be, hogy van olyan sűrű \mathcal{G}_δ -halmaz, amelynek λ_g -mértéke nulla.

2.3. Lebesgue–Stieltjes-mértékek az euklideszi téren

* **2.3.1. Motiváció.** A valószínűségszámításban fontos szerepet játszik a következő probléma: Minden $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ -re ismerjük annak $g(x)$ valószínűségét, hogy egy adott valószínűségi változó értéke az

$$(1) \quad \{y : y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, y_i < x_i, \text{ ha } i = 1, 2, \dots, n\}$$

halmazba esik. Meghatározandó annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó egy adott Borel-halmazba esik.

Ez a probléma úgy fogható fel, hogy adott egy halmazfüggvény az (1) alakú halmazokon, és ez kiterjesztendő a Borel-halmazokon is értelmezett mértékké. Adott $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ esetén írjuk azt, hogy $a \leq b$, ha $a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és írjuk azt, hogy $a < b$, ha $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Vezessük be az

$$(2) \quad [a, b) = \{x : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_i \leq x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

jelölést, és az analóg (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$ jelöléseket, ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$. Ezeket a halmazokat n -dimenziós intervallumoknak nevezzük. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és

$$(3) \quad \Delta_{[a_k, b_k)}^{(k)} g(x) = g(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

ha $a_k \leq b_k$ valós számok. Ez a k -adik változótól már nem függő érték nyilván annak valószínűségét jelenti, hogy az adott valószínűségi változó az

$$\{y : y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, y_1 < x_1, \dots, y_{k-1} < x_{k-1}, a_k \leq y_k < b_k, \dots, y_n < x_n\}$$

halmazba esik. Hasonlóan, annak valószínűségét, hogy az adott valószínűségi változó az n -dimenziós $[a, b)$ balról zárt intervallumba essen, az x -től már nem függő

$$\Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2)}^{(2)} \dots \Delta_{[a_n, b_n)}^{(n)} g$$

érték adja. Az n -dimenziós balról zárt intervallumok osztályáról aztán az így kapott premértéket a szokásos módon terjeszthetjük ki egy σ -algebrára. Ezzel foglalkozunk a következő definícióban és tételben.

* **2.3.2. Definíció.** Legyen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. A 2.3.1. pont jelöléseivel tegyük fel, hogy

- (1) g minden változójában balról folytonos;
- (2) minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a \leq b$ esetén

$$\nu_g^n[a, b] = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g$$

nemnegatív.

A ν_g^n -hez tartozó külső mértéket λ_g^n -vel, a λ_g^n -mérhető halmazok osztályát \mathcal{L}_g^n -vel jelöljük. A λ_g^n külső mértéket a g -hez tartozó n -dimenziós Lebesgue–Stieltjes külső mértéknek nevezzük, megszorítását \mathcal{L}_g^n -re pedig a g -hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mértéknek, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ_g^n -vel jelöljük.

* **2.3.3. Tétel.** Az előző definíció jelöléseivel, minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$ esetén az $[a, b]$ intervallum λ_g^n -mérhető és

$$\lambda_g^n[a, b] = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g.$$

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy ν_g^n premérték. Ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$ és $a_1 \leq c_1 \leq b_1$, akkor

$$\begin{aligned} \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g &= \Delta_{[a_1, c_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g \\ &\quad + \Delta_{[c_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g. \end{aligned}$$

Ugyanez az összefüggés igaz akkor is, ha az $[a, b]$ intervallumot bármely másik $[a_k, b_k]$ oldalának két részre bontásával osztjuk két intervallumra. Ebből indukcióval következik, hogy a ν_g^n függvény additív az $[a, b]$ bármely olyan véges sok diszjunkt, balról zárt intervallumra való felbontására, amely úgy áll elő, hogy az oldalakat véges sok balról zárt intervallumra bontjuk.

Legyen I és J két tetszőleges n -dimenziós balról zárt intervallum. Ekkor $K_1 = I \cap J$ is n -dimenziós balról zárt intervallum, $I \setminus J$ pedig előállítható véges sok n -dimenziós K_2, K_3, \dots, K_m balról zárt intervallum diszjunkt uniójaként: ezeket úgy kapjuk, hogy I oldalait legfeljebb három részre vágjuk. Így

$$\begin{aligned} \nu_g^n(I) &= \sum_{i=1}^m \nu_g^n(K_i) = \nu_g^n(I \cap J) + \sum_{i=2}^m \nu_g^n(K_i) \\ &\geq \lambda_g^n(I \cap J) + \lambda_g^n(I \setminus J). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az n -dimenziós balról zárt intervallumok λ_g^n -mérhetőek.

Megmutatjuk, hogy a ν_g^n halmazfüggvény σ -szubadditív. Tegyük fel, hogy $I = [a, b]$ és $I_k = [a_k, b_k]$, $k \in K \subset \mathbb{N}$ egy n -dimenziós balról zárt intervallumokból álló megszámlálható rendszer, továbbá $I \subset \cup_{k \in K} I_k$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\eta \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor,

amelynek minden koordinátája pozitív. Mivel g minden változójában balról folytonos, minden $k \in K$ -ra található olyan $\eta_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelynek minden koordinátája pozitív és amelyre

$$\nu_g^n[a_k - \eta_k, b_k] \leq \nu_g^n[a_k, b_k] + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Az $(a_k - \eta_k, b_k)$ nyílt intervallumok lefedik az $[a, b - \eta]$ kompakt intervallumot, így kiválasztható egy $K^* \subset K$ véges halmaz, amelyre

$$[a, b - \eta] \subset \bigcup_{k \in K^*} [a_k - \eta_k, b_k].$$

Tekintsük az

$$[a, b - \eta] \cap \left([a_k - \eta_k, b_k] \setminus \left(\bigcup_{j < k, j \in K^*} [a_j - \eta_j, b_j] \right) \right),$$

$k \in K^*$ diszjunkt halmazokat. Ezek mindegyike előáll véges sok diszjunkt $I_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, m_k$ balról zárt intervallum egyesítéseként. Így

$$[a, b - \eta] = \bigcup_{k \in K^*} \bigcup_{j=1}^{m_k} I_{k,j},$$

és

$$\nu_g^n[a, b - \eta] = \sum_{k \in K^*} \sum_{j=1}^{m_k} \nu_g^n(I_{k,j}) \leq \sum_{k \in K^*} \nu_g^n[a_k - \eta_k, b_k] \leq \sum_{k \in K} \nu_g^n(I_k) + 2\varepsilon.$$

Ebből $\eta_i \downarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ határátmenettel

$$\nu_g^n(I) \leq \sum_{k \in K} \nu_g^n(I_k) + 2\varepsilon,$$

amiből a ν_g^n halmazfüggvény σ -szubadditivitását kapjuk.

2.3.4. Megjegyzés. Az n -dimenziós Lebesgue–Stieltjes-mértékek speciális eseteként megkapható az n -dimenziós Lebesgue-mérték is, ha $g(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Mi az n -dimenziós Lebesgue-mértéket másként, a mértékterek szorzatánál fogjuk definiálni.

2.3.5. Tétel. A λ_g^n mérték Radon-mérték \mathbb{R}^n -en és minden $A \subset \mathbb{R}^n$ -re

$$\lambda_g^n(A) = \inf \{ \lambda_g^n(V) : A \subset V, V \text{ nyílt} \}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a számegegyenesen a Lebesgue-mérték esetében.

* **2.3.6. Tétel.** Legyen μ véges, teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en és $x \in \mathbb{R}^n$ -re

$$g(x) = \mu \{ y : y \in \mathbb{R}^n, y_i < x_i, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Ekkor

- (1) g minden változójában monoton növekedő és balról folytonos;
 (2) ha $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és $i = 1, 2, \dots, n$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0;$$

- (3) ha $[a, b]$ egy balról zárt intervallum \mathbb{R}^n -ben, akkor

$$\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g \geq 0;$$

- (4) $\lambda_g^n = \mu$.

Megfordítva, ha g egy, az (1)–(3) feltételeknek eleget tevő függvény, akkor

- (5) $g(x) = \lambda_g^n \{y : y \in \mathbb{R}^n, y_i < x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Bizonyítás. Az (1)–(3) tulajdonságok g definíciójából és a mérték folytonosságából következnek. Mivel az $[a, b]$ intervallum λ_g^n -mértéke és μ -mértéke is

$$\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} g,$$

μ és λ_g^n egybeesnek az n -dimenziós balról zárt intervallumokon. Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, és V_i az összes olyan V -beli n -dimenziós balról zárt intervallumok diszjunkt megszámlálható uniója, amelyek minden csúcspontjának minden koordinátája $k/2^i$ alakú, ahol k egész szám, és amelyeknek minden oldala $1/2^i$ hosszúságú. Nyilván $\mu(V_i) = \lambda_g^n(V_i)$, $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$, $\cup_{i=1}^{\infty} V_i = V$ és így

$$\mu(V) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(V_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_g^n(V_i) = \lambda_g^n(V),$$

azaz μ és λ_g^n megegyeznek a nyílt halmazokon. Innen, hasonlóan, mint az egydimenziós esetben, kapjuk, hogy

$$\mu = \lambda_g^n.$$

- (5) bizonyításához legyen $x, z \in \mathbb{R}^n$, $z \leq x$. A mérték folytonossága miatt indukcióval kapjuk, hogy az $\{y : y \in \mathbb{R}^n, y_i < x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ halmaz λ_g^n -mértéke

- (6)
$$\lim_{z_1 \downarrow -\infty} \lim_{z_2 \downarrow -\infty} \cdots \lim_{z_n \downarrow -\infty} \Delta_{[z_1, x_1]}^{(1)} \Delta_{[z_2, x_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[z_n, x_n]}^{(n)} g.$$

Vegyük észre, hogy

$$\Delta_{[z_1, x_1]}^{(1)} \Delta_{[z_2, x_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[z_n, x_n]}^{(n)} g$$

$\pm g(u_1, u_2, \dots, u_n)$ alakú tagok összege, ahol minden u_i vagy x_i -vel, vagy z_i -vel egyezik meg. Ezt felhasználva, g -nek az (1)-ben szereplő határérték-tulajdonsága miatt (6)-ban az összes tag nullához tart, kivéve $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -et, amiből kapjuk az állítást.

* **2.3.7. Megjegyzés.** A tétel, hasonlóan az egydimenziós esethez, kiterjeszhető nem véges teljes Radon-mértékekre is.

2.4. A Hausdorff-mérték

Az alábbiakban megkonstruálandó mérték rendkívül nagy geometriai jelentőséggel bír.

2.4.1. Definíció. Legyen $m \geq 0$ egy rögzített valós szám és legyen

$$\alpha(m) = \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(1 + m/2)}.$$

(Itt Γ a gammafüggvény, azaz $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, ha $x > 0$.) Nyilván $\alpha(m) > 0$. Később meg fogjuk mutatni, hogy ha m pozitív egész szám, akkor $\alpha(m)$ az m -dimenziós egységgömb Lebesgue-mértéke. Legyen X egy metrikus tér, és X minden nem üres A részhalmazára legyen

$$\nu^m(A) = \frac{\alpha(m)}{2^m} (\text{diam}(A))^m,$$

ahol $0^0 = 1$. Jelölje $\delta > 0$ esetén ν_δ^m a ν^m leszűkítését a δ -nál nem nagyobb átmérőjű halmazokra, χ_δ^m pedig a ν_δ^m -hez tartozó külső mértéket. Nyilván $\chi_\delta^m(A) \geq \chi_\sigma^m(A)$, ha $0 < \delta < \sigma < \infty$. Végül legyen

$$\chi^m(A) = \sup_{\delta > 0} \chi_\delta^m(A).$$

A $\nu^m(A)$ definíciójában szereplő konstans biztosítja, hogy $\nu^m(A)$ éppen a $\text{diam}(A)$ átmérőjű m -dimenziós gömb térfogatával egyezik meg, minden pozitív egész számra. Ez a konstans azért szükséges, mert a „legtakarékosabb” lefedés éppen gömbökből készíthető.

2.4.2. Tétel. Az előző definíció jelöléseivel χ^m külső mérték X -en.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy I megszámlálható, $B, B_i, i \in I$ részhalmazai X -nek, és $B \subset \cup_{i \in I} B_i$. Ekkor minden $\delta > 0$ -ra

$$\chi_\delta^m(B) \leq \sum_{i \in I} \chi_\delta^m(B_i).$$

A jobb oldalon $\delta > 0$ -ra tagonként szuprémumot véve,

$$\chi_\delta^m(B) \leq \sum_{i \in I} \chi^m(B_i),$$

amiből a bal oldalon is szuprémumot véve, kapjuk az állítást.

2.4.3. Definíció. Az előző tétel jelöléseivel a χ^m -mérhető halmazok osztályát \mathcal{H}^m -mel jelöljük, χ^m -et pedig m -dimenziós Hausdorff külső mértéknek nevezzük, χ^m megszorítását \mathcal{H}^m -re m -dimenziós Hausdorff-mértéknek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is χ^m -mel jelöljük.

2.4.4. Megjegyzések. (1) A χ^0 mérték a számláló mérték, azaz $\chi^0(A)$ az A elemeinek száma, ha A véges és ∞ , ha A nem véges.

(2) Ha $0 \leq m < n < \infty$ és $\chi^m(A) < \infty$, akkor $\chi^n(A) = 0$. Ennek bizonyításához vegyük észre, hogy ha $\text{diam}(A) \leq \delta$, akkor

$$\nu^n(A) \leq \delta^{n-m} \frac{\Gamma(1+m/2)\Gamma(1/2)^{n-m}}{\Gamma(1+n/2)2^{n-m}} \nu^m(A),$$

így egy lefedésre összegezve, $\delta \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk az állítást.

(3) Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor $\lambda(A) = \chi^1(A)$. Valóban, definíció szerint $\lambda(A) \leq \chi_\delta^1(A)$, ha $0 < \delta < \infty$. Mivel A minden megszámlálható sok intervallumból álló lefedése helyettesíthető egy olyan, δ -nál rövidebb intervallumokból álló lefedéssel, amelynek összhossza ugyanaz, $\chi_\delta^1(A) \leq \lambda(A)$, amiből $\chi^1(A) = \lambda(A)$.

Mint a későbbiekben majd megmutatjuk, ha $0 \leq m \leq n$, akkor \mathbb{R}^n -ben χ^m a természetes m -dimenziós mérték. Így \mathbb{R}^3 -ban χ^0 a pontok száma, χ^1 az ívhossz, χ^2 a felszín, χ^3 pedig a térfogat. Ez adja a Hausdorff-mérték óriási geometriai jelentőségét.

2.4.5. Tétel. A 2.4.1. definíció jelöléseivel X Borel-halmazai χ^m -mérhetőek.

* **Bizonyítás.** Legyen B és C két nem üres részhalmaza X -nek, amelyek távolsága pozitív, és legyen δ kisebb, mint a távolságuk. Ekkor

$$(1) \quad \chi_\delta^m(B \cup C) \geq \chi_\delta^m(B) + \chi_\delta^m(C),$$

mivel $B \cup C$ bármely A_i , $i \in I$ megszámlálható lefedésére nem üres, δ -nál nem nagyobb átmérőjű halmazokkal

$$\{A_i : i \in I, A_i \cap B \neq \emptyset\},$$

illetve

$$\{A_i : i \in I, A_i \cap C \neq \emptyset\}$$

diszjunkt megszámlálható halmazrendszerek, amelyek lefedik B -t, illetve C -t. Először (1) bal, majd jobb oldalán véve szuprémumot, kapjuk, hogy

$$\chi^m(B \cup C) \geq \chi^m(B) + \chi^m(C).$$

Ez 1.3.2. szerint azt jelenti, hogy minden Borel-halmaz χ^m -mérhető.

* **2.4.6. Tétel.** A 2.4.1. definíció jelöléseivel minden $m \geq 0$ -hoz és $A \subset X$ -hez van olyan $G \supset A$ halmaz, amely \mathcal{G}_δ -halmaz, és amelyre

$$\chi^m(A) = \chi^m(G).$$

Bizonyítás. Ha $\chi^m(A) = \infty$, legyen $G = X$. Egyébként legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$, és válasszunk olyan $A \subset \cup_{i \in I} A_i$ megszámlálható lefedést, amelyre

$$\sum_{i \in I} \nu^m(A_i) \leq \chi_{1/k}^m(A) + \frac{1}{l}$$

és

$$\text{diam}(A_i) \leq \frac{1}{k}, \quad \text{ha } i \in I.$$

Fedjük le az A_i -ket olyan V_i nyílt halmazokkal, hogy átmérőik csak annyira növekedjenek, hogy

$$\sum_{i \in I} \nu^m(V_i) \leq \chi_{1/k}^m(A) + \frac{2}{l}$$

és

$$\text{diam}(V_i) \leq \frac{2}{k}, \quad \text{ha } i \in I$$

teljesüljön. Ebből, a V_i halmazok egyesítését $V_{k,l}$ -lél jelölve, $V_{k,l} \supset A$ és

$$\chi_{2/k}^m(V_{k,l}) \leq \chi_{1/k}^m(A) + \frac{2}{l} \leq \chi^m(A) + \frac{2}{l}.$$

Innen a $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} V_{k,l}$ halmaz \mathcal{G}_δ -halmaz, $A \subset G$ és

$$\chi_{2/k}^m(G) \leq \chi^m(A) + \frac{2}{l},$$

így $k, l \rightarrow \infty$ határátmenettel $\chi^m(G) = \chi^m(A)$.

* **2.4.7. Lemma.** *Legyenek X és Y metrikus terek, $A \subset X$, $g : A \rightarrow Y$ egy Lipschitz-függvény, $m \geq 0$. Ekkor*

$$\chi^m(g(A)) \leq (\text{Lip } g)^m \chi^m(A).$$

Bizonyítás. A $\text{Lip}(g) = 0$ eset triviális. Egyébként 2.4.1. jelöléseivel legyen $\alpha = \text{Lip } g$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, és A_i , $i \in I$ egy megszámlálható sok δ/α -nál nem nagyobb átmérőjű X -beli halmazokból álló lefedése A -nak, amelyre

$$\sum_{i \in I} \nu_{\delta/\alpha}^m(A_i) \leq \chi_{\delta/\alpha}^m(A) + \varepsilon \leq \chi^m(A) + \varepsilon.$$

Ekkor $\text{diam}(g(A_i)) \leq \alpha \text{diam}(A_i) \leq \delta$, így

$$\chi_\delta^m(g(A)) \leq \sum_{i \in I} \nu_\delta^m(g(A_i)) \leq \sum_{i \in I} \alpha^m \nu_{\delta/\alpha}^m(A_i) \leq \alpha^m (\chi^m(A) + \varepsilon).$$

Előbb $\delta > 0$ -ra szuprémumot, majd $\varepsilon \downarrow 0$ határértéket véve,

$$\chi^m(g(A)) \leq \alpha^m \chi^m(A).$$

2.4.8. Következmény. *Ha A és B (esetleg különböző metrikus terekben lévő) izometrikus halmazok, akkor $\chi^m(A) = \chi^m(B)$ minden $m \geq 0$ -ra.*

* **Bizonyítás.** Ha g izometria, akkor $\text{Lip}(g) = \text{Lip}(g^{-1}) = 1$.

2.4.9. Definíció. A Hausdorff-mérték felhasználható arra is, hogy az X metrikus tér egy A részhalmazának a *Hausdorff-dimenzióját* definiáljuk. Legyen

$$\dim(A) = \sup\{m : m \geq 0, \chi^m(A) > 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy a dimenzió nem csak egész lehet, a törtdimenziós halmazok a *fraktálok*.

2.4.10. Feladat [6]. Az előző definíció jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha A nem üres, akkor $\dim(A) = \inf\{m \geq 0 : \chi^m(A) = 0\}$, és ha A nem véges, akkor $\dim(A) = \sup\{m \geq 0 : \chi^m(A) = \infty\}$.

2.4.11. Feladat [6]. Igazoljuk, hogy ha X és Y metrikus terek, $f : X \rightarrow Y$ Hölder-folytonos C Hölder-konstanssal és $0 \leq \alpha \leq 1$ kitevővel, azaz minden $x, y \in X$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) \leq Cd_X(x, y)^\alpha$, továbbá $A \subset X$ és $m \geq 0$, akkor

$$\chi^m(f(A)) \leq C^m \frac{\Gamma(1/2)^{m(1-\alpha)} \Gamma(1 + m\alpha/2)}{2^{m(1-\alpha)} \Gamma(1 + m/2)} \chi^{m\alpha}(A).$$

2.4.12. Feladat [7]. Adjunk meg $[0, 1]$ -ben olyan kontinuum számosságú halmazt, amelynek Hausdorff-dimenziója 0.

* **2.4.13. Feladat [14].** Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\ln 2 / \ln 3$. (Lásd Laczkovich [26], 100. o.)

* **2.4.14. Feladat [15].** Legyen X teljes metrikus tér, az $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, s$ leképezések pedig kontrakciók. Igazoljuk, hogy ekkor egyetlen olyan K nem üres kompakt halmaz létezik, amelyre $K = \cup_{i=1}^s f_i(K)$.

* **2.4.15. Feladat [9].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha valamely $m \in \mathbb{R}$ -re $\sum_{i=1}^s (\text{Lip}(f_i))^m = 1$, akkor $\chi^m(K) < \infty$.

* **2.4.16. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, bizonyítsuk be, hogy ha az f_i függvények hasonlóságok, és az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, akkor $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [26], 107. o.)

* **2.4.17. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha $X = \mathbb{R}^n$, és nem tudjuk, hogy az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, csak azt, hogy van olyan G nem üres korlátos nyílt halmaz, amelyre az $f_i(G)$ halmazok diszjunkt részhalmazai G -nek, akkor is $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [26], 109. o.)

2.4.18. Feladat: Sierpiński-szőnyeg [6]. Az előző feladatok segítségével sok halmaz Hausdorff-dimenziója könnyen meghatározható. Határozzuk meg az alábbi leképezésekhez tartozó kompakt halmaz Hausdorff-dimenzióját: $f_{i,j}(x, y) = (x/3 + i/3, y/3 + j/3)$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, de nem mindkettő 2.

2.5. A Haar-mérték létezése

Az alábbiakban megkonstruálandó mérték alapvető fontosságú a topologikus csoportok elméletében.

* **2.5.1. Definíció.** Legyen G egy csoport, \mathcal{A} a G részhalmazainak egy σ -algebrája, μ pedig egy mérték az \mathcal{A} -beli halmazokon. Azt mondjuk, hogy μ *bal [jobb] invariáns mérték*, ha minden $x \in G$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén $xA \in \mathcal{A}$ [$Ax \in \mathcal{A}$] és $\mu(xA) = \mu(A)$ [$\mu(Ax) = \mu(A)$]. Ha G Hausdorff-csoport, akkor egy *bal [jobb] Haar-mérték* alatt egy olyan bal [jobb] invariáns Radon-mértéket értünk, amely megegyezik saját természetes kiterjesztésével, és amelyre minden nem üres nyílt halmaz mértéke pozitív.

* **2.5.2. Tétel: Haar-mérték létezése.** Minden lokálisan kompakt Hausdorff-csoporton létezik bal [jobb] Haar-mérték.

Bizonyítás. Csak a bal Haar-mérték konstrukciójával foglalkozunk, a jobb Haar-mérték konstrukciója analóg. Legyen G a topologikus csoport. Ha $A, B \subset G$, akkor legyen

$$A : B = \inf \{n : \text{léteznek } x_i \in G \text{ elemek, hogy } A \subset \cup_{i=1}^n x_i B\}.$$

Rögzítsünk egy C_0 nem üres belsejű kompakt halmazt, és minden C kompakt halmazra és nem üres belsejű U halmazra képezzük a

$$\mu_U(C) = \frac{C : U}{C_0 : U}$$

Haar-féle hányadosokat. A számláló durván méri, hogy C hányszor nagyobb, mint U , a $C_0 : U$ -val való osztás pedig kiküszöböli az U „alakjából” eredő hibát, C_0 -hoz mint „egységhez” történő viszonyítással. A μ_U halmazfüggvény nemnegatív valós értékű, végesen szubadditív (azaz ha $C \subset \cup_{k=1}^n C_k$, akkor $\mu_U(C) \leq \sum_{k=1}^n \mu_U(C_k)$), bal invariáns, $\mu_U(C_0) = 1$ minden U -ra, továbbá μ_U „majdnem additív”: ha $(C_1 U^{-1}) \cap (C_2 U^{-1}) = \emptyset$, akkor nincs olyan $x \in G$, amelyre $C_1 \cap (xU)$ és $C_2 \cap (xU)$ egyike sem üres, így

$$\mu_U(C_1 \cup C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

A $C : U \leq (C : C_0)(C_0 : U)$ becslésből látszik, hogy $0 \leq \mu_U(C) \leq C : C_0 < \infty$ minden U -ra. A csoport egységelemére összehúzza U -t határértéket akarunk képezni, és ehhez Tyihonov tételét (a 11.2.12. tételt) használjuk fel. Ha U az egységelem egy környezete, tekintsük a $\prod_C [0, C : C_0]$ szorzattérben (a $[0, C : C_0]$ zárt intervallumok szorzata G összes C kompakt részhalmazára veendő) az

$$M(U) = \{\mu_V : \emptyset \neq V \subset U, V \text{ nyílt}\}$$

halmazt. Az $M(U)$ halmazok centrált rendszert alkotnak, így lezártjaik metszete nem üres. Legyen μ_0 ennek egy eleme. Ekkor μ_0 egy olyan függvény a kompakt halmazokon, amelyre $0 \leq \mu_0(C) \leq C : C_0 < \infty$. Megmutatjuk, hogy μ_0 additív. Ha C_1 és C_2 diszjunkt

kompakt halmazok, akkor 11.2.19. szerint van olyan U környezete az egységelemnek, hogy $C_1U^{-1} \cap C_2U^{-1} = \emptyset$. Ebből minden $\emptyset \neq V \subset U$ nyílt halmazra

$$\mu_V(C_1 \cup C_2) = \mu_V(C_1) + \mu_V(C_2).$$

A szorzattér azon φ elemei, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt alkotnak, és ennek része $M(U)$, tehát a lezártja is, amiből μ_0 ennek a halmaznak eleme. Hasonlóan adódik, hogy μ_0 szubadditív, bal invariáns, és $\mu_0(C_0) = 1$.

Legyen

$$\mu(U) = \sup\{\mu_0(C) : C \text{ kompakt, } C \subset U\},$$

ha U nyílt halmaz. Nyilván μ bal invariáns. Megmutatjuk, hogy a μ nemnegatív bővített valós értékű halmazfüggvény σ -szubadditív. Ha U_1 és U_2 nyílt halmazok, és $C \subset U \subset U_1 \cup U_2$ kompakt halmaz, akkor $C \setminus U_1$ és $C \setminus U_2$ diszjunkt kompakt halmazok, így léteznek V_1 és V_2 diszjunkt, nyílt halmazok, amelyekre $C \setminus U_1 \subset V_1$ és $C \setminus U_2 \subset V_2$. Legyen $C_1 = C \setminus V_1 \subset U_1$ és $C_2 = C \setminus V_2 \subset U_2$. Ekkor $C = C_1 \cup C_2$,

$$\mu_0(C) \leq \mu_0(C_1) + \mu_0(C_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2),$$

és a bal oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes indukcióval kapjuk a véges szubadditivitást. Ha $C \subset U \subset \cup_i U_i$, akkor mindig kiválasztható egy véges részlefedése C -nek, így a szubadditivitásból $\mu_0(C) \leq \sum_i \mu(U_i)$, amiből szuprémumot véve adódik a σ -szubadditivitás. Képezzük a μ -höz tartozó külső mértéket. A μ halmazfüggvény σ -szubadditivitása miatt ez kiterjesztése μ -nek, jelölje ezt is μ . Nyilván μ bal invariáns, és

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ nyílt}\}$$

minden $A \subset G$ -re. Megmutatjuk, hogy a nyílt halmazok mérhetőek. Azt kell belátnunk, hogy

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A),$$

ha T, A nyílt halmazok és $\mu(T) < \infty$. Az A -t $T \cap A$ -val helyettesítve, $A \subset T$ feltehető, ekkor $\mu(T \cap A)$ helyett $\mu(A)$ írható, így elég belátnunk, hogy $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mu(T \setminus A) \leq \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon.$$

Válasszunk egy $C \subset A$ kompakt halmazt, amelyre $\mu_0(C) > \mu(A) - \varepsilon$. A $V = T \setminus C$ jelöléssel, $T \setminus A \subset V$ miatt, elég belátnunk, hogy

$$\mu(V) \leq \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon.$$

Ha ez nem teljesülne, akkor létezne olyan $D \subset V$ kompakt halmaz, amelyre $\mu_0(D) > \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon$. De

$$\mu_0(C \cup D) = \mu_0(C) + \mu_0(D) > \mu(T) - \mu(A) + \mu_0(C) + \varepsilon > \mu(T),$$

ami ellentmondás.

Nyilván $\mu(C^\circ) \leq \mu_0(C) \leq \mu(C)$. A bal oldali egyenlőtlenséget felhasználva, kapjuk, hogy a kompakt halmazokon μ véges, a jobb oldalt felhasználva pedig, hogy egy nyílt halmaz mértéke a benne lévő kompaktak mértékeinek szuprémuma. Végül, a C_0 halmazra alkalmazva az egyenlőtlenséget, az adódik, hogy $\mu(C_0)$ pozitív. Ebből minden nyílt halmaz mértéke pozitív, mert véges sok eltoltja lefedi C_0 -t.

3. MÉRHEŐ FÜGGVÉNYEK

3.1. A mérhető függvények fogalma

3.1.1. Majdnem mindenütt. Legyen X egy halmaz. Ha P egy pontbeli tulajdonság (azaz $P(x)$ igaz vagy hamis lehet: $x \mapsto P(x)$ egy logikai függvény), akkor használni fogjuk az

$$X(P) = \{x : x \in X, P(x) \text{ értelmezve van és igaz}\}$$

jelölést. Például, ha f és g valós értékű függvények, akkor $X(f > g)$ az

$$\{x : x \in X, x \in \text{dmn } f, x \in \text{dmn } g, f(x) > g(x)\}$$

halmazt jelenti.

Ha (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér, akkor gyakran mondjuk, hogy egy P pontbeli tulajdonság μ -majdnem mindenütt teljesül az $A \subset X$ halmazon. Ez azt jelenti, hogy A azon pontjainak halmaza, ahol P nem igaz, vagy nincs értelmezve, azaz az $A \setminus A(P)$ halmaz μ -mérhető és mértéke 0. Például $f = g$ μ -majdnem mindenütt azt jelenti, hogy az

$$\{x : x \in X, x \notin \text{dmn } f \text{ vagy } x \notin \text{dmn } g \text{ vagy } f(x) \neq g(x)\}$$

halmaz μ -mérhető és mértéke nulla. Mint majd látni fogjuk, számos konvergenciatételnél a nulla mértékű halmazok nem játszanak szerepet, így „mindenütt” helyett gyakran „majdnem mindenütt” írható.

3.1.2. Lemma. Ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, Y halmaz, f pedig X egy mérhető részhalmazán értelmezett függvény Y -beli értékekkel, akkor az

$$\{E : E \subset Y, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

halmazrendszer Y részhalmazainak egy σ -algebrája.

Bizonyítás. $f^{-1}(Y) = A$ jelöléssel $A \in \mathcal{A}$ és az

$$f^{-1}(Y \setminus E) = A \setminus f^{-1}(E),$$

valamint az

$$f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i)$$

összefüggésből következik az állítás.

3.1.3. Definíció. Tegyük fel, hogy (X, \mathcal{A}) és (Y, \mathcal{B}) mérhető terek. Egy $f \in X \rightarrow Y$, azaz X valamely részhalmazát Y -ba képező f függvényt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhetőnek vagy röviden mérhetőnek nevezünk, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}$ -re. Megjegyezzük, hogy $\text{dmn } f = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$.

A leggyakoribb eset az, amikor Y topologikus tér. Ilyenkor f -et \mathcal{A} -mérhetőnek vagy rövidebben mérhetőnek nevezzük, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden B Borel-halmazára Y -nak. Sokszor, ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, akkor \mathcal{A} -mérhető helyett μ -mérhetőt mondunk.

Ha X is topologikus tér, akkor f -et Borel-függvénynek nevezzük, ha $f^{-1}(B)$ Borel-halmaz X -ben minden B Borel-halmazára Y -nak.

Az előző lemma mutatja, hogy Y Borel-halmazainak rendszere helyett más halmazrendszert is választhattunk volna, például az f függvény pontosan akkor mérhető, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \subset Y$ nyílt halmazra, és pontosan akkor Borel-függvény, ha $f^{-1}(B)$ Borel-halmaz X -ben minden $B \subset Y$ nyílt halmazra. Speciálisan, X egy Borel-halmazán értelmezett és ott folytonos függvény Borel-függvény.

A definíciót az motiválja, hogy a mértékelmélet eszközeivel egy függvény akkor kezelhető, ha a képtér sok részhalmazára azon pontok halmaza, amelyek képe ebben az adott halmazban van, kezelhető a mértékelmélet eszközeivel. Például gyakran szükségünk lesz $X(f < a) = f^{-1}[-\infty, a)$, $X(f \leq a) = f^{-1}[-\infty, a]$ stb. típusú, úgynevezett „*nívóhalmazok*” mérhetőségére.

Az alábbi lemma lehetővé teszi, hogy mérhető függvényekből mérhető függvényeket rakjunk össze.

3.1.4. Lemma. Ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, Y topologikus tér, X az A_i mérhető halmazok megszámlálható uniója, és minden i -re az f függvény az A_i halmazon egy $f_i \in X \rightarrow Y$ mérhető függvénnel egyezik meg, akkor f mérhető.

Bizonyítás. Nyilván $f^{-1}(V) = \cup_i (f^{-1}(V) \cap A_i)$, de $f^{-1}(V) \cap A_i = f_i^{-1}(V) \cap A_i$ mérhető, ha $V \subset Y$ nyílt.

3.1.5. Következmény. Ha egy teljes mértéktéren egy függvény majdnem mindeütt egyenlő egy mérhető függvénnel, akkor mérhető.

3.1.6. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, és Y topologikus tér. Legyen $f \in X \rightarrow Y$ egy függvény.

- (1) Ha az f függvény \mathcal{A} -mérhető, Z topologikus tér és $g \in Y \rightarrow Z$ Borel-függvény, akkor $g \circ f$ is \mathcal{A} -mérhető.
- (2) Ha Y az Y_1, Y_2, \dots megszámlálható bázisú topologikus terek szorzata, akkor f pontosan akkor \mathcal{A} -mérhető, ha az $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ összefüggéssel definiált f_i koordinátafüggvények \mathcal{A} -mérhetőek minden i -re.

Bizonyítás. (1) igaz, mivel ha C Borel-halmaz Z -ben, akkor $g^{-1}(C)$ Borel-halmaz Y -ban, és így $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$.

(2) egyik fele következik abból, hogy a

$$p_i(y_1, y_2, \dots) = y_i, \quad \text{ha } y \in Y$$

összefüggéssel definiált projekciók folytonosak, tehát Borel-függvények, amiből $f_i = p_i \circ f$ mérhető. Másrészt, ha \mathcal{V}_i megszámlálható bázisa Y_i -nek ($i = 1, 2, \dots$), akkor a

$$\mathcal{V} = \{V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \dots : n \in \mathbb{N}, V_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

halmazrendszer megszámlálható bázisa Y topológiájának. Ha az f_i függvények mérhetőek és $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \dots \in \mathcal{V}$, akkor

$$f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \dots \cap f_n^{-1}(V_n) \cap f_{n+1}^{-1}(Y_{n+1}) \cap \dots$$

mérhető, így, lévén

$$\{E : E \subset Y, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

σ -algebra, a \mathcal{V} -beli halmazok megszámlálható egyesítéseként előáll nyílt halmazok f általi teljes inverz képe is mérhető, azaz f mérhető.

3.1.7. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, f és g bővített valós értékű mérhető függvények és $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor a cf , $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f + g$, fg függvények mérhetőek.

Bizonyítás. Az első három állítás következik 3.1.6.(1)-ből, hiszen az $y \mapsto cy$, $y \mapsto |y|$, $y \mapsto 1/y$ függvények Borel-függvények $\overline{\mathbb{R}}$ -en. A $\max\{f, g\}$, $f + g$ és fg mérhetősége abból következik, hogy 3.1.6.(2) szerint az

$$x \mapsto (f(x), g(x)), \quad \text{ha } x \in \text{dmn } f \cap \text{dmn } g$$

függvény mérhető, az $(y_1, y_2) \mapsto \max\{y_1, y_2\}$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$, illetve $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ függvények pedig Borel-függvények $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ -en, így az $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ és az $x \mapsto f(x)g(x)$ összetett függvények is mérhetőek.

* **3.1.8. Tétel.** Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, Y szeparábilis normált tér \mathbb{K} felett, f mérhető függvény \mathbb{K} -beli értékekkel, g, h pedig mérhető függvények Y -beli értékekkel. Ekkor fg és $g + h$ mérhetőek.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyítása használható.

A következő tétel bővített valós értékű függvényekkel foglalkozik.

3.1.9. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, és f az X egy mérhető részhalmazán értelmezett, bővített valós értékű függvény, S pedig sűrű részhalmaza $\overline{\mathbb{R}}$ -nak. A következő feltételek ekvivalensek:

- (1) az f függvény \mathcal{A} -mérhető;
- (2) $X(f > a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$ -re;
- (3) $X(f < a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$ -re;
- (4) $X(f \geq a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$ -re;
- (5) $X(f \leq a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$ -re.

Továbbá, ha a fenti feltételek fennállnak, akkor

(6) $X(f = a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$ -re.

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy ha A az f értelmezési tartománya, akkor $X(f > a) = A \setminus X(f \leq a)$, illetve $X(f \leq a) = A \setminus X(f > a)$ miatt (2) és (5) ekvivalensek. Hasonlóan (3) és (4) is ekvivalensek. Mivel $X(f > a) = f^{-1}((a, \infty])$ és $(a, \infty]$ nyílt $\overline{\mathbb{R}}$ -ban, (1)-ből következik (2). Megfordítva, ha (2) teljesül, akkor a

$$\mathcal{B} = \{E : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

halmazrendszer $\overline{\mathbb{R}}$ részhalmazainak olyan σ -algebrája, amely az $(a, \infty]$, $a \in S$ alakú halmazokat tartalmazza. De ha $a, a_n, b, b_n \in S$, $a < b$ és $a_n \uparrow a$, $b_n \uparrow b$, akkor $(a, b] = (a, \infty] \setminus (b, \infty]$, $(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty} (a, b_n]$ és $[-\infty, a) = \overline{\mathbb{R}} \setminus \cap_{n=1}^{\infty} (a_n, \infty]$, így \mathcal{B} minden $[-\infty, a)$, $(a, \infty]$, (a, b) , $a, b \in S$ intervallumot tartalmaz. Ha választunk S -nek egy megszámlálható sűrű részhalmazát, és ezen intervallumok közül csak azokat tekintjük, amelyeknek a, b végpontjai ebbe a megszámlálható halmazba esnek, megszámlálható bázisát kapjuk $\overline{\mathbb{R}}$ topológiájának. Ebből következik, hogy minden nyílt halmaz benne van \mathcal{B} -ben, azaz f mérhető. Hasonlóan látható be, hogy (1) és (3) ekvivalensek. Végül $X(f = a) = X(f \geq a) \cap X(f \leq a)$.

Ha egy függvény egy Radon-mértékkel ellátott teret képez le folytonosan egy másik topologikus térbe, akkor a folytonosság és a mérhetőség definíciójának összevetésével azonnal látható, hogy a függvény mérhető. Triviális ellenpéldák mutatják, hogy a megfordítás nem igaz. A következő tétel azonban mégis azt mutatja, hogy a mérhetőség nem áll nagyon messze a folytonosságtól.

3.1.10. Luzin-tétel. Legyen μ Radon-mérték X -en, Y megszámlálható bázisú topologikus tér, A véges mértékű mérhető részhalmaza X -nek, f pedig az A részhalmazon értelmezett mérhető függvény Y -beli értékekkel. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan K kompakt részhalmaza X -nek, hogy $K \subset A$, $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ és $f|_K$ folytonos.

Bizonyítás. Oxtoby [34] könyvének bizonyítását használjuk. Az approximációs tétel szerint van olyan C kompakt részhalmaza A -nak, hogy $\mu(A \setminus C) < \varepsilon/2$. Legyen V_1, V_2, V_3, \dots egy megszámlálható bázisa Y -nak. Mivel az $f^{-1}(V_i) \subset A$ halmazok μ -mérhetőek, választhatunk olyan G_i nyílt és K_i kompakt halmazokat, amelyekre

$$K_i \subset f^{-1}(V_i) \subset G_i \quad \text{és} \quad \mu(G_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Legyen $G = \cup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus K_i)$ és $K = C \setminus G$. Nyilván K kompakt részhalmaza A -nak és

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

Jelölje g az f megszorítását K -ra. Mivel

$$g^{-1}(V_i) = f^{-1}(V_i) \cap K = G_i \cap K,$$

g folytonos K -n mint altéren.

* **3.1.11. Következmény.** Ha az előző tételben $Y = \mathbb{R}$ és X lokálisan kompakt, akkor Tietze kiterjesztési tétele (11.3.15.) szerint $f \upharpoonright K$ kiterjeszthető a folytonosság megtartásával egy g kompakt tartójú, az egész X -en értelmezett függvénnyé, és erre a függvényre $\mu A(f \neq g) < \varepsilon$.

* **3.1.12. Tétel.** Ha μ Radon-mérték X -en, Y megszámlálható bázisú topologikus tér, f az X egy mérhető és σ -véges A részhalmazán értelmezett mérhető függvény Y -beli értékekkel, akkor van olyan $B \subset A$ Borel-halmaz, amelyre $\mu(A \setminus B) = 0$ és $f \upharpoonright B$ Borel-függvény.

Bizonyítás. Legyen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ahol $\mu(A_n) < \infty$, és válasszunk minden n -re olyan $K_{n,k} \subset A_n$ kompakt halmazokat, amelyekre $f \upharpoonright K_{n,k}$ folytonos és $\mu(A_n \setminus K_{n,k}) < 1/k$. Legyen $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}$. Ekkor

$$\mu(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}) \leq \mu(A_n \setminus K_{n,k}) \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

és

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}) = 0.$$

Ha V nyílt részhalmaza Y -nak, akkor

$$(f \upharpoonright B)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (f^{-1}(V) \cap K_{n,k}).$$

Mivel $f^{-1}(V) \cap K_{n,k} = (f \upharpoonright K_{n,k})^{-1}(V)$ nyílt a $K_{n,k}$ altérben, és így Borel-halmaz, $(f \upharpoonright B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

→ **3.1.13. 3.1.13. Feladat [10].** Adjunk meg olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényt, amelynek semmilyen 1 mértékű $A \subset [0, 1]$ halmazra vett megszorítása sem folytonos.

3.2. Mérhető függvények sorozatai

3.2.1. Tétel. *Ha (X, \mathcal{A}) mérhető tér, Y metrikus tér, $f, f_n : X \rightarrow Y$, az f_n függvények mérhetőek, és $f_n(x) \rightarrow f(x)$ minden $x \in X$ -re, akkor f is mérhető.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha V nyílt részhalmaza Y -nak, akkor

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}\{y : \text{dist}(y, Y \setminus V) > 1/j\}.$$

Ebből már következik a bizonyítandó állítás, mivel $y \mapsto \text{dist}(y, A)$ folytonos függvény, így az $\{y : \text{dist}(y, Y \setminus V) > 1/j\}$ halmazok nyíltak, amiből a jobb oldalon mérhető halmaz áll.

Legyen $x \in f^{-1}(V)$, azaz tegyük fel, hogy $f(x) \in V$. Mivel V nyílt, van olyan j , hogy $\mathbb{U}(f(x), 2/j) \subset V$. Mivel $f_k(x) \rightarrow f(x)$, van olyan n , hogy $k \geq n$ esetén $f(x)$ és $f_k(x)$ távolsága kisebb, mint $1/j$. Ekkor $\text{dist}(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j$, amiből x eleme a jobb oldalnak. Megfordítva, ha x eleme a jobb oldalnak, akkor van olyan j és n , hogy $k \geq n$ esetén $\text{dist}(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j$. Határátmenettel azt kapjuk, hogy $\text{dist}(f(x), Y \setminus V) \geq 1/j$, amiből $f(x) \in V$.

3.2.2. Tétel. *Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, és legyenek $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \dots$ mérhető függvények. Ekkor az alábbi összefüggésekkel definiált függvények mérhetőek:*

- (1) $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$, ha $x \in X$;
- (2) $(\inf_n f_n)(x) = \inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$, ha $x \in X$;
- (3) $(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x)$, ha $x \in X$;
- (4) $(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x)$, ha $x \in X$.

Bizonyítás. (1) a minden $a \in \mathbb{R}$ -re fennálló

$$X(\sup_n f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n > a)$$

összefüggésből következik. (2) hasonlóan mutatható meg. (3) és (4) az (1)-ből és a (2)-ből következik.

3.2.3. Következmény. *Legyen (X, \mathcal{A}, μ) teljes mértéktér, $f, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \dots$ függvények. Ha az f_n függvények mérhetőek, és az f_n függvény sorozat majdnem mindenütt konvergál az f függvényhez, akkor f is mérhető.*

Bizonyítás. Az f függvény majdnem mindenütt egyenlő a $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ mérhető függvényvel.

3.2.4. Mértékben való konvergencia. A mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia mellett a mértékben való konvergencia játszik fontos szerepet. Például mindkét konvergencia igen fontos a valószínűségszámításban.

Legyen (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér. Jelölje $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$ az $X \rightarrow Y$ -beli μ -majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztályát. Ha $f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$, akkor 3.1.6. szerint $x \mapsto (f(x), g(x))$ és így $x \mapsto d(f(x), g(x))$ is mérhető. Ha $f, f_n \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$, akkor azt mondjuk, hogy f_n mértékben konvergál f -hez, ha minden $\sigma > 0$ -ra $\mu X(d(f_n, f) > \sigma) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

* **3.2.5. Megjegyzés.** Megmutatjuk, hogy a mértékben való konvergencia metrikából, pontosabban eltérésből származtatható. Legyen

$$d_0(f, g) = \inf \left\{ \varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}, \mu X(d(f, g) > \varepsilon) \leq \varepsilon \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$(1) \quad \mu X(d(f, g) > d_0(f, g)) \leq d_0(f, g),$$

azaz a $d_0(f, g)$ definíciójában a jobb oldalon szereplő halmaz tartalmazza a pontos alsó korlátját. Legyen $\varepsilon = d_0(f, g)$ és válasszunk olyan $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon$ sorozatot, amelyre

$$\mu X(d(f, g) > \varepsilon_n) \leq \varepsilon_n.$$

Az $X(d(f, g) > \varepsilon_n)$ halmzsorozat monoton növekedő és egyesítése $X(d(f, g) > \varepsilon)$, így a mérték folytonossága miatt

$$\mu X(d(f, g) > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu X(d(f, g) > \varepsilon_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

ami a bizonyítandó állítás.

Megmutatjuk, hogy d_0 eltérés $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$ -n. Nyilvánvaló, hogy nemnegatív és szimmetrikus. A háromszög-egyenlőtlenség a nyilvánvaló

$$X(d(f, h) > d_0(f, g) + d_0(g, h)) \subset X(d(f, g) > d_0(f, g)) \cup X(d(g, h) > d_0(g, h))$$

tartalmazásból és (1)-ből következik. (1)-ből az is következik, hogy $d_0(f, g) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = g$ majdnem mindenütt.

Végül belátjuk, hogy $d_0(f_n, f) \rightarrow 0$ ekvivalens a mértékben való konvergenciával. Valóban, ha f_n mértékben konvergál f -hez, akkor minden $\sigma > 0$ -hoz van olyan N , hogy ha $n \geq N$, akkor $\mu X(d(f_n, f) > \sigma) \leq \sigma$, azaz $d_0(f_n, f) \leq \sigma$. Megfordítva, ha $n \geq N$ esetén $d_0(f_n, f) \leq \min\{\varepsilon, \sigma\}$, akkor (1) szerint

$$\mu X(d(f_n, f) > \sigma) \leq \mu X(d(f_n, f) > \min\{\varepsilon, \sigma\}) \leq \min\{\varepsilon, \sigma\} \leq \varepsilon.$$

3.2.6. Jegorov tétele. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) véges mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, $f, f_n : X \rightarrow Y$ ($n = 1, 2, \dots$) mérhető függvények. Ha az f_n függvénsorozat

majdnem mindenütt konvergál f -hez, akkor minden $\delta > 0$ -hoz van olyan A mérhető részhalmaza X -nek, hogy $\mu(X \setminus A) < \delta$ és az A halmazon a konvergencia egyenletes, azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{minden } x \in A\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Legyen

$$A_{i,j} = \bigcup_{n=j}^{\infty} X(d(f_n, f) \geq 1/i),$$

ha i és j pozitív egészek. Az $A_{i,j}$ halmazok mérhetőek. Vegyük észre, hogy bármely rögzített i esetén, ha egy $x \in X$ -re $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, akkor $x \notin A_{i,j}$ valamely j -re, így $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$, amiből $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}) = 0$. Így a mérték folytonossága miatt minden i -re $\mu(A_{i,j}) \rightarrow 0$, ha $j \rightarrow \infty$. Válasszunk minden i -hez egy olyan j_i -t, amelyre $\mu(A_{i,j_i}) < \delta/2^i$, és álljon A az X összes olyan pontjaiból, amelyek nincsenek benne egyetlen A_{i,j_i} -ben sem. Ekkor

$$\mu(X \setminus A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j_i}) < \delta.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $1/i < \varepsilon$, akkor bármely $x \in A$ -ra $x \notin A_{i,j_i}$ miatt

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{i} < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq j_i.$$

A következő két tételben a mértékben való és a majdnem mindenütti konvergencia kapcsolatával foglalkozunk.

3.2.7. Lebesgue tétele. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) véges mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, $f, f_n : X \rightarrow Y$ ($n = 1, 2, \dots$) mérhető függvények. Ha az f_n függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál f -hez, akkor f_n mértékben is konvergál f -hez.

Bizonyítás. Jegorov tétele szerint, minden $\varepsilon, \sigma > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$\mu X(d(f_n, f) > \sigma) \leq \varepsilon.$$

3.2.8. Riesz-féle kiválasztási tétel. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, f, f_n ($n = 1, 2, \dots$) mérhető függvények. Ha f_n mértékben konvergál f -hez, akkor f_n -nek van olyan f_{n_k} részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergál f -hez.

Bizonyítás. Válasszunk teljes indukcióval olyan $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ természetes számokat, amelyekre $\mu X(d(f_{n_k}, f) > 1/k) \leq 1/2^k$ teljesül $k = 1, 2, 3, \dots$ -ra. Legyen

$$A_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} X(d(f_{n_k}, f) > 1/k),$$

ha $i = 1, 2, 3, \dots$, és $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor

$$\mu(A_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu_X(d(f_{n_k}, f) > 1/k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}},$$

és $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, valamint $\mu(A_1) \leq 1 < \infty$ miatt

$$0 \leq \mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0.$$

Ezek után elég megmutatnunk, hogy ha $x \in X \setminus A$, akkor $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$. Valóban, ha $x \in X \setminus A$, akkor van olyan i , hogy $x \notin A_i$, azaz $k \geq i$ -re

$$d(f_{n_k}(x), f(x)) \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0,$$

amint $k \rightarrow \infty$.

3.2.9. Definíció. Legyenek X és Y halmazok. Az $f : X \rightarrow Y$ függvényt egyszerű függvénynek nevezzük, ha értékkészlete véges.

A következő lemma fontos technikai segédeszköz.

3.2.10. Approximációs lemma nemnegatív függvényekre. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény. Ekkor létezik olyan $s_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív mérhető egyszerű függvényekből álló $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ sorozat, amely pontonként konvergál f -hez.

Bizonyítás. Legyen r_n egy olyan pozitív tagú számsorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$, legyen $s_0(x) \equiv 0$, legyen továbbá indukcióval

$$A_n = X(f \geq r_n + s_{n-1}) \quad \text{és} \quad s_n = s_{n-1} + r_n \xi_{A_n},$$

ahol ξ_{A_n} az A_n karakterisztikus függvénye. Ha $f(x) = \infty$, akkor $x \in A_n$ minden n -re, és így $s_n(x) = \sum_{i=1}^n r_i \rightarrow \infty = f(x)$. Ha $0 \leq f(x) < \infty$, akkor végtelen sok olyan n van, amelyre $x \notin A_n$, és minden ilyen n -re $r_n > f(x) - s_{n-1}(x) \geq 0$.

Az előző lemma könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, amikor f értékei $\overline{\mathbb{K}}$ -ban vagy \mathbb{K}^n -ben vannak; a monotonitás helyébe az kerül, hogy $|s_n|$ monoton növekedő, és nem nagyobb, mint $|f|$. Az alábbi tétel további általánosításnak tekinthető.

* **3.2.11. Approximációs lemma.** Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, és $f : X \rightarrow Y$ mérhető függvény. Ekkor léteznek olyan $s_n : X \rightarrow Y$ egyszerű mérhető függvények, hogy $s_n \rightarrow f$ az X minden pontjában. Ha $(Y, |\cdot|)$ szeparábilis normált tér, akkor s_n választható úgy, hogy $|s_n| \leq |f|$ teljesüljön minden n -re.

Bizonyítás. Legyen $V_i, i = 0, 1, 2, \dots$ egy megszámlálható bázisa Y -nak, és $y_i \in \overline{V_i}$ minden i -re. Indukcióval, legyen $s_0(x) \equiv y_0$ és $n > 0$ esetén

$$s_n(x) = \begin{cases} y_n, & \text{ha } x \in f^{-1}(V_n) \text{ és } d(y_n, f(x)) < d(s_{n-1}(x), f(x)); \\ s_{n-1}(x) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha x az f értelmezési tartományába tartozik, és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan n , hogy $f(x) \in V_n \subset \mathbb{U}(f(x), \varepsilon)$. Most $k \geq n$ esetén $d(s_k(x), f(x)) \leq d(y_n, f(x)) \leq \varepsilon$.

Ha Y szeparábilis normált tér, akkor legyen $c_0 = 0$, válasszuk a V_n -eket $\mathbb{U}(c_n, r_n)$ nyílt gömböknek, legyen $y_n = 0$, ha $|c_n| \leq r_n$, és legyen $y_n = ((|c_n| - r_n)/|c_n|)c_n$, ha $|c_n| > r_n$.

* **3.2.12. Megjegyzés.** Mint látható, fontos tételek csak akkor érvényesek, ha az értékkészlet szeparábilis. Ez nyilván enyhíthető úgy, hogy a szereplő függvények értékei egy-egy szeparábilis altérben legyenek. Ha tehát (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, (Y, d) metrikus tér, legyen $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$ azon $f \in X \rightarrow Y$ μ -majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztálya, amelyekre $\text{rng } f$ szeparábilis; d_0 definíciója értelmes marad erre az általánosabb esetre is, és tulajdonságai is változatlanok. Ha a mértéktér teljes, akkor azt is elég lenne feltenni, hogy f értékei μ -majdnem mindenütt valamely $Z \subset Y$ (az f -től függő) szeparábilis altérben vannak. A gyakorlatban ennek a feltételnek a teljesülése általában könnyen belátható.

→ **3.2.13. Feladat [7].** Legyenek az f_n függvények $[0, 1]$ -en a következőképpen definiálva: ha $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$, akkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [j/2^k, (j+1)/2^k], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f_n mértékben tart az azonosan nulla függvényhez, de $f_n(x)$ egyetlenegy $x \in [0, 1]$ -re sem konvergens.

* **3.2.14. Feladat [13].** A Riesz-féle kiválasztási tétel jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha Y teljes és $\sum_{n=1}^{\infty} d_0(f_{n+1}, f_n) < \infty$, akkor van olyan f mérhető függvény, amelyre $d_0(f_n, f) \rightarrow 0$ és $f_n \rightarrow f$ majdnem mindenütt. Vezessük le ebből, hogy minden Cauchy-sorozatnak van olyan részsorozata, amely konvergens és majdnem mindenütt is konvergens, speciálisan d_0 teljes.

→ **3.2.15. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a nemnegatív függvényekre vonatkozó approximációs lemmában a függvény korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.

3.2.16. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha az f_n valós értékű függvények mérhetőek, akkor azon pontok halmaza, ahol a függvény-sorozatnak létezik a határértéke, mérhető.

3.2.17. Feladat [9]. Keressünk olyan $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényekből álló függvény-sorozatot és olyan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre f_n pontonként konvergál f -hez, de a konvergencia egyetlen részintervallumon sem egyenletes.

3.2.18. Feladat [6]. Adjunk meg olyan folytonos $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló függvény-sorozatot, amely minden pontban monoton csökkenően az azonosan nulla függvényhez konvergál, de Lebesgue-mértékben nem.

3.2.19. Feladat [10]. Igazoljuk, hogy egy véges mértéktéren mérhető valós értékű függvények egy sorozata pontosan akkor konvergál mértékben egy f mérhető valós értékű függvényhez, ha minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely majdnem mindenütt f -hez konvergál.

3.2.20. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy a $[0, 1]$ -en értelmezett, valós értékű Lebesgue-mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia nem származtatható topológiából.

4. AZ INTEGRÁL

Az integrál „Riemann-összegekkel” való definiálásának gondolata legalább Arkhimédészig nyúlik vissza. Riemann érdeme az volt, hogy szükséges és elégséges feltételt talált az integrálhatóságra: ezt ma, némileg átfogalmazva, a „Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma” néven emlegetjük. Az így kialakult „Riemann-integrál” továbbfejlesztését elsősorban az integrál és a határérték felcserélésével kapcsolatos problémák kényszerítették ki. Lebesgue 1901-ben egy nemnegatív valós függvény integrálját a görbe alatti terület síkbeli Lebesgue-mértékeként definiálta, tetszőleges valós függvény integrálját pedig a pozitív és negatív rész segítségével. Lebesgue eredeti gondolata lényegében azzal ekvivalens, hogy nem az értelmezési tartományt osztjuk fel, hanem az értékkészletet. Eljárása nem érzékeny a szakadásokra és gyors oszcillációkra, viszont intervallumnál bonyolultabb halmazok hosszának (mértékének) ismeretére is szükség van. Az új integrálfogalom segítségével definiálta Riesz Frigyes az L^p -tereket.

A mértéktér általános fogalmának kialakulásával együtt általánosították a Lebesgue-féle integrálfogalmat is. Az így kialakult fogalmat ma egyszerűen integrálnak nevezzük, a Lebesgue-integrál elnevezést a Lebesgue-mérték szerinti integrálra tartva fenn.

4.1. Nemnegatív mérhető függvények integrálja

Nemnegatív függvények esetén legegyszerűbb alsó közelítésekkel dolgozni. Minden nemnegatív mérhető függvénynek tulajdonítható integrál.

4.1.1. Definíció. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és f nemnegatív, bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Az f

$$\int f d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f(x) d\mu(x)$$

módon jelölt *integrálján* az összes

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i)$$

alakú *integrálközelítő összegek* pontos felső korlátját értjük, ahol A_1, A_2, \dots, A_n diszjunkt mérhető részhalmazai X -nek, y_1, y_2, \dots, y_n nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq y_i$ minden $x \in A_i$ -re ($i = 1, 2, \dots, n$) (itt $0 \cdot \infty = 0$). Megjegyezzük, hogy ez a szuprérum nyilván ugyanaz marad, ha $f(x) \geq y_i$ csupán majdnem minden $x \in A_i$ -re teljesül ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ha A mérhető részhalmaza X -nek, akkor az f függvény

$$\int_A f d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_A f(x) d\mu(x)$$

A halmaz feletti integrálját az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként értelmezzük.

→ **4.1.2. Feladat [6].** Az $f(0) = 0$, $f(x) = 1 + \sin(1/x)$, ha $0 < |x| \leq 1$ függvény esetén, 8 egyenlő részre osztva az értelmezési tartományt, illetve az értékkészletet, ábrázoljuk a Riemann-féle és a Lebesgue-féle alsó összegeknek megfelelő halmazokat.

4.1.3. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f és g pedig nemnegatív bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények, $\alpha \geq 0$ valós szám. Ekkor

- (1) ha $f \leq g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ (monotonitás);
- (2) ha $f = g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f d\mu = \int g d\mu$;
- (3) $\alpha \mu X(f \geq \alpha) \leq \int f d\mu$ (Csebisev-egyenlőtlenség; itt $0 \cdot \infty = 0$);
- (4) ha $\int f d\mu < \infty$, akkor f majdnem mindenütt véges;
- (5) ha $\int f d\mu = 0$, akkor f majdnem mindenütt nulla;
- (6) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ (pozitív homogenitás; itt $0 \cdot \infty = 0$);
- (7) ha f egyszerű függvény, értékkészlete y_1, y_2, \dots, y_n , akkor

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu X(f = y_i)$$

(itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Bizonyítás. (1) az előző definícióban tett megjegyzés felhasználásával triviális. (2) az (1)-ből következik. A Csebisev-egyenlőtlenség $y_1 = \alpha$, $A_1 = X(f \geq \alpha)$ választással a definícióból következik. (4)-et úgy kapjuk, hogy $\alpha \in \mathbb{N}$ -re, (5)-öt pedig, hogy $1/\alpha \in \mathbb{N}$ -re alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, vegyük észre, hogy ha $x \in A_i$ esetén $f(x) \geq y_i$, akkor $\alpha f(x) \geq \alpha y_i$, amiből bármely integrálközelítő összegre

$$\alpha \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) \leq \int \alpha f d\mu.$$

Innen

$$\alpha \int f d\mu \leq \int \alpha f d\mu.$$

Ugyanezt felírva $1/\alpha$ -ra és αf -re, kapjuk az állítást. (7) bizonyításához, az integrál definíciója szerint

$$\int f d\mu \geq \sum_{i=1}^n y_i \mu X(f = y_i).$$

Ha most A_1, A_2, \dots, A_m diszjunkt mérhető halmazok, y'_1, y'_2, \dots, y'_m nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq y'_j$ minden $x \in A_j$ -re, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m y'_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y'_j \mu(A_j \cap X(f = y_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i \mu(A_j \cap X(f = y_i)) \leq \sum_{i=1}^n y_i \mu X(f = y_i), \end{aligned}$$

amiből

$$\int f d\mu \leq \sum_{i=1}^n y_i \mu X(f = y_i).$$

4.1.4. Fatou-lemma. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, és $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, $n = 1, 2, \dots$ mérhető függvények, akkor

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x).$$

Bizonyítás. Legyenek A_1, \dots, A_m diszjunkt mérhető halmazok, y_1, \dots, y_m pozitív valós számok úgy, hogy $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq y_i$ teljesüljön minden $x \in A_i$ -re, ($i = 1, 2, \dots, m$) és legyen $0 < t < 1$. Tekintsük minden i -re az

$$A_{i,n} = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_i(f_j > ty_i)$$

növekvő halmzsorozatot. Mivel ha $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq y_i$, akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy $f_j(x) > ty_i$ minden $j \geq n$ -re, $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i,n}$. Így a mérték folytonossága miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i).$$

Mivel

$$\int_X f_n d\mu \geq \sum_{i=1}^m ty_i \mu(A_{i,n}),$$

mindkét oldal alsó határértékét véve,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq t \sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i).$$

Most $t \uparrow 1$ -et, majd a jobb oldalon felső határt véve, kapjuk az állítást.

4.1.5. Levi tétele (vagy Beppo Levi tétele). Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, $n = 1, 2, \dots$ mérhető függvények úgy, hogy $f_n \leq f_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x).$$

Bizonyítás. A Fatou-lemmából következik a nagyobb vagy egyenlő, 4.1.3.(1)-ből pedig a kisebb vagy egyenlő.

4.1.6. Tétel. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, I megszámlálható halmaz, és minden $i \in I$ -re $f_i : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény, akkor

$$\sum_{i \in I} \int_X f_i d\mu = \int_X \sum_{i \in I} f_i(x) d\mu(x).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f és g egyszerű függvények, x_1, \dots, x_n , illetve y_1, \dots, y_m értékészlettel. Ha $f + g$ értékészlete z_1, \dots, z_ℓ , akkor

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \sum_{k=1}^{\ell} z_k \mu(X(f + g = z_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{x_i + y_j = z_k} (x_i + y_j) \mu(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \mu(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_j \mu(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mu(X(f = x_i)) + \sum_{j=1}^m y_j \mu(X(g = y_j)) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Most legyenek f és g tetszőleges nemnegatív, bővített valós értékű mérhető függvények. Ekkor az approximációs lemma szerint választhatunk olyan r_n és s_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ egyszerű függvényekből álló sorozatokat, hogy $r_n \uparrow f$ és $s_n \uparrow g$. Nyilván $(r_n + s_n) \uparrow (f + g)$, így Beppo Levi tétele szerint

$$\int (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (r_n + s_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int r_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Végül az általános esetben feltehetjük, hogy $I \subset \mathbb{N}$. Az eddig bizonyítottakat és Beppo Levi tételét alkalmazva,

$$\int \sum_{i \in I} f_i(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{\substack{i \leq n \\ i \in I}} f_i(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{i \leq n \\ i \in I}} \int f_i d\mu = \sum_{i \in I} \int f_i d\mu.$$

→ **4.1.7. Feladat [7].** Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelyre a Fatou-lemmában éles egyenlőtlenség teljesül. Lehet-e a függvénysorozat egyenletesen konvergens? Lehet-e a függvénysorozat korlátos, ha a mértéktér véges?

→ **4.1.8. Feladat** [7]. Mutassuk meg, hogy Levi tétele nem marad igaz, ha kisebb vagy egyenlő helyett nagyobb vagy egyenlő szerepel.

4.1.9. Feladat [10]. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) véges mértéktér, (Y, d_Y) szeparábilis metrikus tér. Igazoljuk, hogy a mérhető Y -beli értékű függvények között a

$$d(f, g) = \int \frac{d_Y(f, g)}{1 + d_Y(f, g)} d\mu$$

összefüggés egy eltérést ad meg, és a megfelelő konvergencia a mértékben való konvergencia.

4.2. Integrálható függvények

4.2.1. Definíció. Egy tetszőleges halmazon értelmezett, bővített valós értékű f függvény f^+ pozitív, illetve f^- negatív részét definiáljuk az

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\} \end{aligned}$$

összefüggésekkel, ha f értelmezve van az x pontban. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, egy bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény *integrálját* az

$$\int f = \int f d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a jobb oldalon álló különbségnek nem mind a két tagja ∞ . Ha $\int f d\mu$ véges, akkor f -et *integrálhatónak* vagy *szummábilisnek* nevezzük. A „létezik az integrál” és az „integrálható” fogalmak között hasonló kapcsolat van, mint a „létezik a határérték” és a „konvergens” fogalmak között. Az első esetben végtelen is megengedett, a második esetben nem. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az A halmaz feletti $\int_A f d\mu$ integrált az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

4.2.2. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f és g pedig bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények. Ekkor

- (1) ha $f = g$ majdnem mindenütt, és $\int f d\mu$ létezik, akkor $\int f d\mu = \int g d\mu$;
- (2) f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, és $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$;
- (3) ha $\int f d\mu$ létezik és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ (homogenitás; itt $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$);
- (4) ha $\int f d\mu + \int g d\mu$ értelmezve van, akkor $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (additivitás);
- (5) ha $f \leq g$ és $\int f d\mu > -\infty$ vagy $\int g d\mu < \infty$, akkor $\int f d\mu \leq \int g d\mu$;
- (6) ha $|f| \leq g$ majdnem mindenütt és g integrálható, akkor f is integrálható (majoráns kritérium).

Bizonyítás. (1) abból következik, hogy $f^+ = g^+$ és $f^- = g^-$ majdnem mindenütt. (2) következik abból, hogy $|f| = f^+ + f^-$. (3) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ és $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, így (3) a definícióból következik. Az $\alpha < 0$ eset erre az esetre vezethető vissza a $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ összefüggések felhasználásával. (5) az $f^+ \leq g^+$ és $f^- \geq g^-$ egyenlőtlenségek következménye. (6) $\int f d\mu$ definíciójából triviális. Végül ha $\int f d\mu + \int g d\mu \in \mathbb{R}$, akkor (4) a majdnem mindenütt fennálló

$$(7) \quad (f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

összefüggés átrendezésével adódó

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

összefüggés mindkét oldalának integrálásával, majd visszarendezésével adódik. Ha

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \infty,$$

akkor $f > -\infty$ és $g > -\infty$ majdnem mindenütt, és a (7) összefüggésből

$$(f + g)^+ + f^- + g^- \geq f^+ + g^+$$

majdnem mindenütt, így $\int (f + g)^+ d\mu = \infty$, a majdnem mindenütt fennálló

$$(f + g)^- \leq f^- + g^-$$

egyenlőtlenségből viszont $\int (f + g)^- d\mu < \infty$. Hasonlóan kezelhető az $\int f d\mu + \int g d\mu = -\infty$ eset is.

4.2.3. Lebesgue majorált konvergencia tétele. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f, f_1, f_2, f_3, \dots bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények, g pedig nemnegatív bővített valós értékű integrálható függvény. Ha $|f_n| \leq g$ majdnem mindenütt ($n = 1, 2, \dots$), és $f_n \rightarrow f$ majdnem mindenütt, akkor

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu,$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon megváltoztatva a $g, f, f_1, f_2, f_3, \dots$ függvényeket, feltehetjük, hogy $f_n \rightarrow f$ mindenütt, és $|f_n| \leq g$ mindenütt. Alkalmazva a Fatou-lemmát a nemnegatív függvényekből álló $2g - |f_n - f|$ függvénysorozatra, amely pontonként $2g$ -hez konvergál, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int 2g d\mu - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \geq 0. \end{aligned}$$

4.2.4. Lemma. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, $A \in \mathcal{A}$ és f egy bővített valós értékű függvény. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \text{ és } x \in \text{dmn } f, \\ 0, & \text{ha } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_A f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az f függvény pontosan akkor μ_A -mérhető, ha a g függvény μ -mérhető. Az állítás nyilvánvaló, ha f nemnegatív egyszerű függvény, Beppo Levi tételéből következik, ha f nemnegatív függvény, és a 4.2.1. definícióból, ha f tetszőleges.

4.2.5. Az integrál σ -additivitása. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f olyan bővített valós értékű függvény, amelynek integrálja létezik, és A_1, A_2, A_3, \dots diszjunkt mérhető halmazok egy sorozata, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Bizonyítás. Nemnegatív f -re 4.1.6. szerint

$$\int_X f \xi_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f \xi_{A_i} \, d\mu.$$

Ez viszont az előző segédétel szerint éppen (1)-et jelenti. Tetszőleges f -re a 4.2.1. definícióból kapjuk az állítást.

4.2.6. Az integrál abszolút folytonossága. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f pedig bővített valós értékű integrálható függvény és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon, \quad \text{ha } A \in \mathcal{A} \text{ és } \mu(A) < \delta.$$

Bizonyítás. Mivel $f_n = \min\{|f|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ nemnegatív függvények monoton növekedő sorozata, amely pontonként $|f|$ -hez konvergál, Beppo Levi tétele szerint választhatunk olyan n természetes számot, amelyre

$$\int (|f| - f_n) \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_A (|f| - f_n) \, d\mu + \int_A f_n \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + n\mu(A).$$

Az állítás $\delta = \varepsilon/(2n)$ választással nyilván fennáll.

→ **4.2.7. Feladat [3].** Számítsuk ki egy függvény Dirac-mérték szerinti integrálját.

→ **4.2.8. Feladat [5].** Számítsuk ki egy függvény számláló mérték szerinti integrálját.

4.2.9. Feladat [9]. Számítsuk ki $\int_X f d\mu$ -t, ha $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha : X \rightarrow [0, \infty]$ és $\mu(A) = \sum_{x \in A} \alpha(x)$, ha $A \subset X$.

4.2.10. Feladat [6]. Igazoljuk, hogy ha egy integrálható bővített valós értékű f függvényre $\int_A f = 0$ minden mérhető A halmazra, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

→ **4.2.11. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy valós értékű függvények körében egy korlátos és mérhető függvénynek minden integrálható függvénnyel való szorzata integrálható. Igaz-e a megfordítás?

4.2.12. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy σ -véges halmazon kívül nulla.

4.2.13. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy Lebesgue majorált konvergencia tételének állítása igaz marad, ha majdnem mindenütti konvergencia helyett mértékben való konvergenciát tételezünk fel.

4.3. Vektorértékű függvények integrálja

Gyakran nem csak valós, hanem komplex, \mathbb{R}^n vagy \mathbb{C}^n -beli értékű függvények integráljára van szükségünk. Az alábbiakban vázoljuk, hogy hogyan definiálható az integrál ezekben az esetekben a koordinátafüggvények segítségével. Ez az egyszerű megközelítés nem használható, ha az értékkészlet nem véges dimenziós. Ezért az alábbiakban egy csak a nemnegatív függvények integráljára támaszkodó általánosabb megközelítést is tárgyalunk. Az 4.2.2.–4.2.6. tételek lényegében érvényben maradnak, és a legtöbb, valós értékű függvények integráljára érvényes tétel egyszerűen átvihető vektorértékű függvényekre is.

4.3.1. Komplex és euklideszi térbeli értékű függvények integrálja. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, f pedig az X -en majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Komplex értékű f függvény *integrálját* akkor definiáljuk, ha $\Re f$ és $\Im f$ integrálhatóak, az

$$\int f = \int \Re f + i \int \Im f$$

összefüggéssel. Egy \mathbb{K}^n -beli értékű $f = (f_1, \dots, f_n)$ függvény *integrálját* pedig akkor definiáljuk, ha az f_i koordinátafüggvények integrálhatóak, az

$$\int f d\mu = \left(\int f_1 d\mu, \dots, \int f_n d\mu \right)$$

összefüggéssel. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az A halmaz feletti $\int_A f d\mu$ integrált az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

A 4.2.2.–4.2.6. tételek, és számos, később tárgyalandó tétel is — értelemszerű módosításokkal — komplex és euklideszi térbeli értékű függvényekre is érvényben marad, és könnyen következik a definícióból. Például f akkor és csak akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, mert $|f_j| \leq |f| \leq \sum_{j=1}^n |f_j|$. Némi külön megfontolást igényel \mathbb{K}^n -beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \leq \int |f|$. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j \bar{f}_j(x) \leq |y| |f(x)|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int f_j \leq |y| \int |f|.$$

Ebből adódik az állítás.

4.3.2. Megjegyzés. Integrálokra vonatkozó tételek bizonyításának általános módja a következő *approximációs eljárás*: Az állítást belátjuk mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire, ebből azonnal következik egyszerű függvényekre. Ezután Beppo Levi tételét használva nemnegatív függvényekre térünk át, majd az integrál definíciójának megfelelően haladunk tovább. Ezzel a módszerrel a tételek általában átvihetők vektorértékű függvényekre is.

* **4.3.3. Banach-térbeli értékű függvények integrálja.** Sokkal általánosabban, definiálhatjuk Banach-térbeli értékű mérhető függvény integrálját. Vegyük észre, hogy egy f nemnegatív mérhető függvény integrálját lényegében mint az összes $0 \leq s \leq f$ egyszerű mérhető függvények integráljainak felső határát definiáltuk. A felső határt határértékre cseréljük: ha (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér, Y egy Banach-tér, jelölje \mathcal{I} azon $s : X \rightarrow Y$ mérhető egyszerű függvények osztályát, amelyek egy véges mértékű halmazon kívül nullák. Az integrált ezen függvények segítségével definiáljuk. Ha $s \in \mathcal{I}$, és s nem nulla értékei y_1, \dots, y_n , akkor legyen

$$S(s) = \sum_{j=1}^n \mu X(s = y_j) y_j.$$

Nyilván $|S(s)| \leq S(|s|) = \int |s|$. Az X -en majdnem mindenütt értelmezett Y -beli értékű mérhető függvényt *integrálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $s_n \in \mathcal{I}$ függvényt sorozat, amely majdnem mindenütt f -hez konvergál, és amelyre $\int |f - s_n| \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. (Az $|f - s_n|$ függvény mérhető, mert véges sok $|f - c|$ alakú függvényből rakható össze.) Vegyük észre, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n)$ határérték létezik, mert

$$|S(s_n) - S(s_m)| \leq \int |s_n - s_m| \leq \int |f - s_n| + \int |f - s_m|.$$

Továbbá a határérték nem függ az s_n sorozat választásától, mert vehetjük a két sorozat tagjait felváltva. Valós értékű integrálható függvényhez létezik ilyen s_n sorozat: válasszuk

s_n -et úgy, hogy $s_n^+ \uparrow f^+$ és $s_n^- \uparrow f^-$ teljesüljön, ekkor $|f - s_n| = f^+ - s_n^+ + f^- - s_n^-$, amiből

$$\int |f - s_n| = \int f^+ - \int s_n^+ + \int f^- - \int s_n^- \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nyilván erre a sorozatra $S(s_n) \rightarrow \int f$. Ha figyelembe vesszük, hogy $\int |f| \leq \int |f - s_n| + \int |s_n| < \infty$, látjuk, hogy az integrálhatóság itteni definíciója valós értékű függvényekre visszaadja a régit. Tehát a valós értékű függvényekre definiált integrálfogalom kiterjesztését kapjuk, ha egy tetszőleges Banach-térbeli értékű integrálható f függvény integrálját az

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} S(s_n)$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az A halmaz feletti $\int_A f d\mu$ integrált az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

* **4.3.4. Az integrál tulajdonságai.** Az előző definíció jelöléseivel,

- (1) ha $f \in \mathcal{I}$, akkor f integrálható és $\int f d\mu = S(f)$;
- (2) ha α, β skalárok, f és g integrálható függvények, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható, és $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$ (linearitás);
- (3) ha f integrálható, g mérhető, és $f = g$ majdnem mindenütt, akkor g is integrálható és $\int f d\mu = \int g d\mu$;
- (4) ha f integrálható, akkor $|f|$ is, és $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$;
- (5) ha $f = (f_1, \dots, f_n)$, akkor f pontosan akkor integrálható, ha minden f_j integrálható, és $\int f d\mu = (\int f_1 d\mu, \dots, \int f_n d\mu)$.
- (6) ha f integrálható, akkor van olyan szeparábilis altere Y -nak, hogy f értékei majdnem mindenütt ebben az altérben vannak.

Bizonyítás. (1) és (3) triviálisak. (2) az \mathcal{I} elemeire hasonló gondolatmenettel látható be, mint amit a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitásáról szóló tétel bizonyításának elején használtunk, (4) és (5) pedig \mathcal{I} elemeire triviálisak. Innen az általános eset határátmenettel következik. (6) teljesül, mert az s_n -ek értékészletei lineáris burkának a lezártja szeparábilis altér.

* **4.3.5. Majoráns kritérium.** Ha f majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű mérhető függvény, amelynek értékei majdnem mindenütt egy szeparábilis altérben vannak, g pedig nemnegatív integrálható függvény egy mértéktéren, és $|f| \leq g$ majdnem mindenütt, akkor f integrálható.

A tételt a következő tétellel együtt bizonyítjuk.

* **4.3.6. Lebesgue majorált konvergencia tétele.** Ha f_1, f_2, \dots majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű integrálható függvények az (X, \mathcal{A}, μ) teljes mértéktéren, g nemnegatív integrálható függvény, $|f_n| \leq g$ majdnem mindenütt minden n -re és $f_n \rightarrow f$ majdnem mindenütt, akkor $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ és $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Ha a mértéktér nem lenne teljes, f és $f_n - f$ mérhetőségét is fel kellene tenni.

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, az f_n -ek és az f értékészlete egy szeparábilis altérben marad, és a $2g - |f_n - f|$ nemnegatív mérhető függvénysorozat pontonként a $2g$ függvényhez konvergál. A Fatou-lemma szerint

$$0 \geq \int 2g d\mu - \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \geq 0.$$

Ha most az approximációs lemmát felhasználva, egy egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot választunk, amely mindenütt konvergál f -hez, és amelyre $|s_n| \leq |f| \leq g$, akkor f_n helyett s_n -re alkalmazva az eddig bizonyítottakat, azt kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |s_n - f| = 0$. Ez azt jelenti, hogy a majoráns kritérium teljesül. Ezek szerint f_n és f integrálhatóak. Mivel

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu,$$

a bizonyítás kész.

4.4. \mathbb{L}^p -terek

4.4.1. Definíció. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Ha f egy majdnem mindenütt értelmezett, μ -mérhető, \mathbb{K} -beli értékű függvény, és $1 \leq p < \infty$, legyen

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (\text{itt } \infty^{1/p} = \infty).$$

Legyen továbbá

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ r : r \geq 0, \mu X(|f| > r) = 0 \right\}.$$

Megjegyezzük, hogy μ -majdnem mindenütt $|f| \leq \|f\|_\infty$. Jelölje $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ azon \mathbb{K} -beli értékű μ -mérhető f függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$. Ha egyértelmű, hogy milyen értékű függvényeket és milyen mértéket tekintünk, akkor az \mathbb{L}^p jelölést használjuk.

4.4.2. Minkowski-egyenlőtlenség. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és $1 \leq p \leq \infty$. Ha $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ mérhetőek, akkor

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. Ha a jobb oldal ∞ , akkor nincs mit bizonyítani. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexitása miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}y + \frac{v}{u+v}z \right)^p \leq \frac{u}{u+v}y^p + \frac{v}{u+v}z^p,$$

ha $u, v, y, z \geq 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = |f(x)|/\|f\|_p$, $z = |g(x)|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int (|f| + |g|)^p d\mu \leq 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség.

4.4.3. Hölder-egyenlőtlenség. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), és $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ mérhetőek, akkor

$$\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Bizonyítás. A $p = 1$ és $p = \infty$ esetek triviálisak. Feltehetjük, hogy a jobb oldal nem nulla, de véges. Az

$$F = \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p, \quad G = \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q,$$

$\alpha = 1/p$, $\beta = 1 - \alpha = 1/q$ jelölésekkel $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $F \geq 0$, $G \geq 0$. Mivel $-\ln$ konvex függvény, ha $u, v > 0$, akkor

$$\ln(\alpha u + \beta v) \geq \alpha \ln u + \beta \ln v,$$

amiből

$$\alpha u + \beta v \geq u^\alpha v^\beta,$$

így

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int |f||g| d\mu &= \int (F^\alpha G^\beta) d\mu \leq \int (\alpha F + \beta G) d\mu \\ &= \alpha \int F d\mu + \beta \int G d\mu = 1. \end{aligned}$$

4.4.4. Megjegyzés. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, $1 \leq p \leq \infty$ és $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, akkor az $\|f\|_p = 0$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha f μ -majdnem mindenütt nulla. Ez azt jelenti, hogy $\|\cdot\|_p$ általában nem norma $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -n. Ezen a következőképpen segíthetünk: Vezessük be $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -n a következő ekvivalenciarelációt: $f_1 \sim f_2$, ha f_1 és f_2 μ -majdnem mindenütt egyenlőek. Ekkor $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -t ekvivalenciaosztályokra bonthatjuk. Az ekvivalenciaosztályok halmazát is $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -vel szokás jelölni. Ez nem okoz félreértést, mivel a szövegösszefüggésből mindig kiderül, hogy melyik értelmezésre gondolunk. Ha $f_1 \sim f_2$ és $g_1 \sim g_2$, akkor $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, $cf_1 \sim cf_2$ és $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$, ezért az ekvivalenciaosztályokon értelmezhető az összeadás, a skalárral való szorzás és a $\|\cdot\|_p$ függvény, és a Minkowski-egyenlőtlenség szerint ezekkel $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ lineáris normált tér. Ha $p = 2$ és $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$, akkor a $4f\bar{g} = (f + \bar{g})^2 - (f - \bar{g})^2$ összefüggés (vagy a Hölder-egyenlőtlenség) szerint $f\bar{g}$ integrálható és az $\langle f, g \rangle = \int f\bar{g} d\mu$ összefüggéssel definiálva az f és g függvények belső szorzatát, $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ belső szorzat tér. A belső szorzatból éppen a $\|\cdot\|_2$ norma származik.

4.4.5. Riesz–Fischer-tétel. Ha (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és $1 \leq p \leq \infty$, akkor $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ teljes.

Bizonyítás. Legyen f_n , $n = 1, 2, \dots$ egy Cauchy-sorozat $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -ben. Válasszunk ki teljes indukcióval egy olyan természetes számokból álló $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ sorozatot, amelyre

$$\|f_s - f_t\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad \text{ha } s, t \geq n_k.$$

Legyen

$$g_k = |f_{n_2} - f_{n_1}| + \dots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

és $g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$. Megmutatjuk, hogy $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$. Nyilván

$$\|g_k\|_p = \left\| |f_{n_2} - f_{n_1}| + \dots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 1.$$

Ebből $p = \infty$ esetén következik, hogy $|g| \leq 1$ majdnem mindenütt, azaz $\|g\|_{\infty} \leq 1$. Ha $1 \leq p < \infty$, akkor Beppo Levi tétele szerint

$$\int g^p d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^p d\mu \leq 1,$$

így $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$. Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

sor μ -majdnem minden x -re konvergens. Ezekben a pontokban az

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

sorozat is konvergens. Legyen $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$. Ekkor f majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény, és ha $m \geq n_l$ és $k \geq l$, akkor

$$\|f_{n_k} - f_m\|_p < \frac{1}{2^l}.$$

Most $1 \leq p < \infty$ esetén a Fatou-lemma szerint

$$\int |f - f_m|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \frac{1}{2^{pl}},$$

így $f - f_m \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, tehát $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ és $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_m\|_p = 0$. Ugyanez adódik $p = \infty$ esetén közvetlen határátmenettel.

* **4.4.6. Tétel.** Legyen μ Radon-mérték az X lokálisan kompakt Hausdorff-téren és $1 \leq p < \infty$. Ekkor $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -ben a $\|\cdot\|_p$ normára nézve.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$. Az approximációs lemma felhasználásával olyan egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot kaphatunk, amely majdnem mindenütt konvergál f -hez és amelyre $|s_n| \leq |f|$ ($n = 1, 2, \dots$). Az $|f - s_n|^p$ sorozatra alkalmazva Lebesgue

majorált konvergencia tételét kapjuk, hogy $\|f - s_n\|_p \rightarrow 0$. Így egy adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $s \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ egyszerű függvény, amelyre $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

Legyenek rng s nem 0 értékei y_1, y_2, \dots, y_n , $A_j = s^{-1}\{y_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $A = \cup_{j=1}^n A_j$ és $M = \sup\{|y_j| : j = 1, 2, \dots, n\}$. Nyilván $\mu(A) < \infty$. Egy tetszőleges $\delta > 0$ -hoz választhatunk olyan V nyílt halmazt, amelyre $A \subset V$ és $\mu(V \setminus A) < \delta$, valamint olyan K_j , $j = 1, 2, \dots, n$ kompakt halmazokat, amelyekre $K_j \subset A_j$ és $\mu(A_j \setminus K_j) < \delta$. Legyen $K = \cup_{j=1}^n K_j$. Az Urizon-lemma szerint minden j -re létezik olyan $g_j : X \rightarrow [0, 1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amely K_j -n 1, az $F_j = (X \setminus V) \cup (K \setminus K_j)$ -n pedig 0. Legyen $g = \sum_{j=1}^n g_j y_j$. Ekkor g folytonos, és

$$\int_X |s - g|^p d\mu = \int_{V \setminus K} |s - g|^p d\mu \leq \mu(V \setminus K) ((n+1)M)^p \leq (n+1)\delta((n+1)M)^p.$$

Ebből $\|s - g\|_p < \varepsilon$, ha δ elég kicsi, így

$$\|f - g\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < 2\varepsilon.$$

* **4.4.7. Megjegyzés.** Észrevehetjük, hogy a 4.4.1.–4.4.6. definíciók és tételek nem az f , hanem az $|f|$ függvény tulajdonságain múlnak, így ezeket minden nehézség nélkül átvihetjük \mathbb{K}^n , sőt bármilyen valós vagy komplex szeparábilis Banach-térbeli értékű mérhető függvényekre is, az abszolút érték helyett mindenütt normát használva. A további általánosítás akadályja, hogy ha az Y Banach-tér nem szeparábilis, akkor nem biztos, hogy két mérhető függvény összege mérhető, de tekinthetünk $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$ -beli függvényeket. Ha $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér, az $(f, g) \mapsto \int \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x)$ belső szorzattal az $\mathbb{L}_Y^2(\mu)$ tér Hilbert-tér.

→ **4.4.8. Feladat:** \mathbb{L}^p -normák \mathbb{K}^n -en [8]. Legyen $X = \{1, 2, \dots, n\}$ és μ a számláló mérték. Vizsgáljuk meg az \mathbb{L}^p -tereket ebben az esetben. Vázzoljuk $n = 2$ esetén az egységgömböt.

→ **4.4.9. Feladat** [11]. Ha $X = \mathbb{N}$ és μ a számláló mérték, $\mathbb{L}^p(\mu)$ a hagyományosan \mathbb{L}^p -vel jelölt tér. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e az \mathbb{L}^p terekben, és mi a határértékük (x_n -ben n nem nulla elem van):

- (1) $x_n = (1, 2, \dots, n, 0, 0, \dots)$;
- (2) $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$;
- (3) $x_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$;
- (4) $x_n = (1/n^\alpha, 1/n^\alpha, \dots, 1/n^\alpha, 0, 0, \dots)$.

4.4.10. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy \mathbb{L}^∞ nem szeparábilis.

4.4.11. Feladat [8]. Zárt alteret alkotnak-e \mathbb{L}^∞ -ben a konvergens, illetve a nullsorozatok?

→ **4.4.12. Feladat** [9]. Bizonyítsuk be, hogy egy μ véges mérték esetén $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) \subset \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$, ha $1 \leq q < p \leq \infty$, és $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$, ha f mérhető függvény. Igazoljuk, hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0, 1]$ -en, akkor a tartalmazás valódi, és $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu) \neq \cap_{1 \leq p < \infty} \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$.

→ **4.4.13. Feladat [9]**. Vizsgáljuk meg mérhető függvények pontonkénti, egyenletesen, \mathbb{L}^2 -normában, majdnem mindenütt és mértékben való konvergenciája között a kapcsolatot.

→ **4.4.14. Feladat [8]**. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{I}^q \subset \mathbb{I}^p$, ha $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

→ **4.4.15. Feladat [9]**. Igazoljuk, hogy $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\lambda^n) \not\subset \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\lambda^n)$, ha $p \neq q$.

4.4.16. Feladat [8]. Adjunk példát $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\lambda)$ -ban olyan korlátos sorozatra, amely nem konvergens, de majdnem mindenütt nullához tart.

* **4.4.17. Feladat [7]**. Bizonyítsuk be, hogy $1 < p < \infty$ esetén a Hölder-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor teljesül egyenlőség, ha van olyan $c \geq 0$, hogy μ -majdnem minden x -re $|f(x)|^p = c|g(x)|^q$ vagy μ -majdnem minden x -re $c|f(x)|^p = |g(x)|^q$. Mikor teljesül egyenlőség a $p = 1$ esetben?

* **4.4.18. Feladat [9]**. Mutassuk meg, hogy $1 < p < \infty$ esetén $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ szigorúan normált, de $p = 1$ és $p = \infty$ esetén általában nem.

* **4.4.19. Feladat [9]**. Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ normája általában nem származik belső szorzatból.

* **4.4.20. Feladat [11]**. Egy (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér bázisán egy olyan $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszert értünk, amelyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz és $A \in \mathcal{A}$ -hoz van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ terek pontosan akkor szeparábilisak, ha a mértéktérnek létezik megszámlálható bázisa.

* **4.4.21. Feladat [11]**. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *m-rektifikálhatónak* nevezünk, ha χ^m -mérhető, és χ^m -majdnem része megszámlálható sok $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény értékkészlete uniójának. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -terek ($1 \leq p < \infty$) szeparábilisak, ha a μ mérték a Lebesgue-mérték vagy a χ^m Hausdorff-mérték egy *m-rektifikálható* halmazon.

* **4.4.22. Feladat [12]**. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és tegyük fel, hogy $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu) = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu) = \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^\infty(\mu)$ véges dimenziós.

* **4.4.23. Feladat [14]**. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér, és f valós értékű mérhető függvény. Bizonyítsuk be, hogy a

$$P = \{p : 1 \leq p < \infty, \|f\|_p < \infty\}$$

halmaz intervallum; a $p \mapsto \|f\|_p$ leképezése \overline{P} -nak \mathbb{R} -ba folytonos; az

$$U = \{u : 1 \leq 1/u < \infty, 0 < \|f\|_{1/u} < \infty\}$$

halmaz is intervallum; az $u \mapsto \ln \|f\|_{1/u}$ leképezése U -nak \mathbb{R} -be konvex.

* **4.4.24. Feladat [10].** Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és (Y, d) metrikus tér. Mutassuk meg, hogy ha $1 \leq p < \infty$, akkor

$$d_p(f, g) = \left(\int d(f(x), g(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad \text{ha } f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

eltérés. Igazoljuk, hogy

$$d_\infty(f, g) = \inf \{ r : r \geq 0, \mu X(d(f, g) > r) = 0 \}, \quad \text{ha } f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

is eltérés. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < 1$, akkor

$$(f, g) \mapsto \left(\int d(f(x), g(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

általában nem eltérés, de

$$d_p(f, g) = \int d(f(x), g(x))^p d\mu(x), \quad \text{ha } f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

eltérés. Ha Y normált tér, azon $f \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$ függvények osztályát, amelyekre $d_p(f, 0) < \infty$, jelölje $\mathbb{L}_Y^p(\mu)$. Mutassuk meg, hogy az $f \mapsto d_p(f, 0)$ leképezés általában nem norma.

4.5. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata

4.5.1. Definíció. A Lebesgue-mérték szerinti integrált *Lebesgue-integrálnak*, a Lebesgue–Stieltjes-mérték szerinti integrált pedig *Lebesgue–Stieltjes-integrálnak* nevezzük. Ha egy egydimenziós intervallum felett integrálunk, amelynek végpontjai a és b , $a \leq b$, továbbá a végpontoknak az intervallumba való beletartozása lényegtelen vagy egyértelmű, akkor az intervallum feletti integrált $\int_a^b f d\mu$ -vel is jelöljük. Az $a > b$ esetben $\int_a^b f d\mu = -\int_b^a f d\mu$.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon Riemann-integrálható függvény mindig Lebesgue-integrálható is és a két integrál megegyezik. (A megfordítás nem igaz, például $\xi_{\mathbb{Q}}$, a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye egyetlen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ intervallumon sem Riemann-integrálható, de Lebesgue-integrálható, mert majdnem mindenütt nulla.) Mellékeredményként nyerjük a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériumát.

4.5.2. Definíció. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, $x \in [a, b]$, $\delta > 0$ és legyen

$$m_\delta(x) = \inf \{ f(y) : y \in [a, b], |x - y| < \delta \};$$

$$M_\delta(x) = \sup \{ f(y) : y \in [a, b], |x - y| < \delta \}.$$

Nyilvánvaló, hogy $m_\delta(x) \leq f(x) \leq M_\delta(x)$, és hogy a δ csökkentésével $m_\delta(x)$ csak nőhet, $M_\delta(x)$ pedig csak csökkenhet, így léteznek a

$$m(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} m_\delta(x) \quad \text{és} \quad M(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} M_\delta(x)$$

határértékek, továbbá

$$m_\delta(x) \leq m(x) \leq f(x) \leq M(x) \leq M_\delta(x)$$

minden $x \in [a, b]$ -re és $\delta > 0$ -ra. Az így definiált m és M függvényeket az f alsó, illetve felső *Baire-féle függvényeinek* nevezzük.

4.5.3. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel f pontosan akkor folytonos egy $x \in [a, b]$ pontban, ha $m(x) = M(x)$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos az x pontban, akkor adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $y \in [a, b]$ és $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, amiből $M_\delta(x) - m_\delta(x) \leq 2\varepsilon$, tehát $m(x) = M(x)$. Megfordítva, ha $m(x) = f(x) = M(x)$, akkor van olyan δ_1 és δ_2 , hogy $M_{\delta_1}(x) - M(x) < \varepsilon$ és $m(x) - m_{\delta_2}(x) < \varepsilon$. Ebből $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ -re $y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

4.5.4. Tétel. *Egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, ha λ -majdnem minden $x \in [a, b]$ pontban folytonos, továbbá, ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor létezik az $[a, b]$ feletti Lebesgue-integrálja is, és a két integrál megegyezik.*

Bizonyítás. Rudin [40] jelöléseit használva válasszunk az $[a, b]$ beosztásainak egy olyan P_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ sorozatát, amelyre P_{k+1} finomítása P_k -nak, P_k szomszédos osztópontjainak távolsága kisebb, mint $1/k$, továbbá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(P_k, f) = \int_a^b f dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F(P_k, f) = \int_a^b f dx.$$

Ha $P_k = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_k}\}$, ahol $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n_k} = b$, akkor definiáljuk az A_k és F_k egyszerű függvényeket $(a, b]$ -n az

$$A_k(x) = m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k),$$

$$F_k(x) = M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k)$$

összefüggéssel. Ekkor

$$A(P_k, f) = \int_a^b A_k(x) d\lambda(x), \quad F(P_k, f) = \int_a^b F_k(x) d\lambda(x),$$

és

$$A_k(x) \leq A_{k+1}(x) \leq f(x) \leq F_{k+1}(x) \leq F_k(x),$$

ha $x \in (a, b]$ és $k = 1, 2, \dots$. Mivel ha $x \in [a, b] \setminus P_k$ és $(x - \delta, x + \delta) \subset (x_i, x_{i+1}]$, akkor

$$A_k(x) = m_i \leq m_\delta(x) \leq m(x) \leq M(x) \leq M_\delta(x) \leq M_i = F_k(x),$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k(x) \leq m(x) \leq M(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x),$$

ha $x \in [a, b] \setminus \cup_{k=1}^{\infty} P_k$, azaz λ -majdnem minden elemére $[a, b]$ -nek. Másrészt, ha $\delta > 0$, $1/k < \delta$ és $x \in (x_{i-1}, x_i)$ valamely $1 \leq i \leq n_k$ -ra, akkor $[x_{i-1}, x_i] \subset (x - \delta, x + \delta)$, így

$$m_\delta(x) \leq m_i = A_k(x) \leq F_k(x) = M_i \leq M_\delta(x),$$

amiből

$$m(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) \leq M(x),$$

ha $x \in (a, b]$. Ez azt jelenti, hogy az A_k , illetve F_k függvénysorozatok λ -majdnem minden $x \in [a, b]$ -re konvergálnak a m , illetve M függvényekhez. Így m és M az $[a, b]$ -n λ -mérhetőek, és Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint

$$\int_a^b f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b A_k d\lambda = \int_a^b m d\lambda, \quad \int_a^b f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b F_k d\lambda = \int_a^b M d\lambda.$$

Ebből

$$\int_a^b (M - m) d\lambda = \int_a^b f dx - \int_a^b f dx,$$

amiből felhasználva a $m \leq f \leq M$ egyenlőtlenséget és az előző tételt, kapjuk az állítást.

Hasonló állítás igaz Riemann–Stieltjes-integrálokra is, ha a Riemann–Stieltjes-integrált Szőkefalvi-Nagy [45] könyve szerint, tetszőleges integrálközelítő összegek segítségével definiáljuk, de nem igaz, ha alsó és felső integrálközelítő összegek segítségével, Rudin [40] könyvét követve definiáljuk; lásd Rudin [40] könyvében a 148. oldalon a 3. feladatot.

4.5.5. Tétel. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, a, b a g -nek folytonossági pontjai, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Az $\int_a^b f dg$ Riemann–Stieltjes-integrál (Szőkefalvi-Nagy [45] könyve szerinti értelemben) pontosan akkor létezik, ha λ_g -majdnem minden $x \in [a, b]$ pontban f folytonos. Ekkor létezik az $\int_a^b f d\lambda_g$ Lebesgue–Stieltjes-integrál is, és a két integrál megegyezik.

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a Riemann-integrál esetében.

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

→ **4.5.6. Feladat** [4]. Mennyi $\int_0^{2\pi} e^{ix} d\lambda(x)$?

→ **4.5.7. Feladat [6]**. Számítsuk ki az $\int_0^1 x^\alpha d\lambda(x)$ és $\int_1^\infty x^\alpha d\lambda(x)$ integrálokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.5.8. Feladat [8]. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelyre $\int_0^x f d\lambda = 0$ minden $x \in [0, 1]$ -re. Mutassuk meg, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

4.5.9. Feladat [5]. Mutassuk meg, hogy egy zárt intervallumon Riemann-integrálható függvény esetén az integrál mint a felső határ függvénye majdnem mindenütt differenciálható.

→ **4.5.10. Feladat [8]**. Adjunk példát olyan $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amelyre $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 f(x) d\lambda(x)$ véges, de f a $(0, 1]$ -en nem Lebesgue-integrálható.

4.5.11. Feladat [10]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $\int_0^1 x^\alpha \sin x^\beta d\lambda(x)$ Lebesgue-integrál, és mikor létezik a $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \sin x^\beta d\lambda(x)$ határérték?

→ **4.5.12. Feladat [5]**. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely λ -majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, de sehol sem folytonos.

→ **4.5.13. Feladat [5]**. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely λ -majdnem mindenütt folytonos, de nincs olyan folytonos függvény, amellyel λ -majdnem mindenütt egyenlő.

* **4.5.14. Feladat [13]**. Igaz-e, hogy egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény majdnem mindenütt egyenlő egy majdnem mindenütt folytonos függvénnyel?

* **4.5.15. 4.5.16. Feladat [10]**. Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, $0 < c < \lambda(A)$. Mutassuk meg, hogy ha f integrálja az A tetszőleges c mértékű részhalmazán 0, akkor f majdnem mindenütt nulla.

* **4.5.16. 4.5.17. Feladat [11]**. Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, amelynek integrálja 0. Mutassuk meg, hogy $0 \leq c \leq \lambda(A)$ esetén van olyan $B \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $\lambda(B) = c$ és a B -n az integrál szintén nulla.

5. MÉRTÉKEK SZORZATA

5.1. A Fubini-tétel

5.1.1. Definíció. Legyenek (X, \mathcal{A}, μ) és (Y, \mathcal{B}, ν) mértékterek. Jelölje $\mu \otimes \nu$ az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ halmazfüggvényhez (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$) tartozó külső mértéket $X \times Y$ -on. A $\mu \otimes \nu$ -mérhető halmazok osztályát $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -vel fogjuk jelölni, $\mu \otimes \nu$ megszorítását erre a halmazrendszerre a μ és ν mértékek szorzatának nevezzük és (nem teljesen korrekt módon) ezt is $\mu \otimes \nu$ -vel jelöljük.

5.1.2. Fubini tétele. Legyenek (X, \mathcal{A}, μ) és (Y, \mathcal{B}, ν) teljes mértékterek. Ekkor

- (1) ha A μ -mérhető, B pedig ν -mérhető halmaz, akkor az $A \times B$ halmaz $\mu \otimes \nu$ -mérhető és

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad (\text{itt } 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0).$$

Ha f egy olyan bővített valós értékű függvény, amelynek $\mu \otimes \nu$ -integrálja létezik, és f egy σ -véges halmazon kívül eltűnik, akkor

- (2) az $x \mapsto f(x, y)$ függvény μ -integrálja létezik ν -majdnem minden $y \in Y$ -ra;
(3) az $y \mapsto f(x, y)$ függvény ν -integrálja létezik μ -majdnem minden $x \in X$ -re;
(4) az $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ függvény ν -integrálja létezik;
(5) az $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ függvény μ -integrálja létezik;

$$(6) \quad \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \\ = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Bizonyítás. Jelölje \mathcal{F} az olyan $S \subset X \times Y$ halmazok osztályát, amelyeknek ξ_S karakterisztikus függvényére a

$$\varrho(S) = \int_Y \int_X \xi_S(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

kétszeres integrál értelmezve van. Kétszer alkalmazva a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitását, illetve Lebesgue majorált konvergencia tételét, kapjuk, hogy

(7) ha S_1, S_2, S_3, \dots diszjunkt elemei \mathcal{F} -nek, akkor

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j);$$

(8) ha $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \dots$ egy \mathcal{F} -beli sorozat, és $\varrho(S_1) < \infty$, akkor

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(S_j) = \varrho(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j).$$

Tekintsük a

$$\mathcal{P}_0 = \{A \times B : A \text{ } \mu\text{-mérhető, } B \text{ } \nu\text{-mérhető}\},$$

$$\mathcal{P}_1 = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_0\},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_1\}$$

halmazrendszereket, és vegyük észre, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$, akkor $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Innen $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$ és $C \times D \in \mathcal{P}_0$, akkor $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0$ és

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup ((A \cap C) \times (B \setminus D))$$

két diszjunkt \mathcal{P}_0 -beli halmaz uniója. Ebből következik, hogy \mathcal{P}_1 minden tagja előállítható diszjunkt \mathcal{P}_0 -beli halmazok uniójaként. Így $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$. Két \mathcal{P}_1 -beli halmaz metszete is \mathcal{P}_1 -ben van. Így \mathcal{P}_2 minden eleme \mathcal{P}_1 -beli halmazok csökkenő sorozatának a metszete.

Megmutatjuk, hogy bármely $S \subset X \times Y$ -ra

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \inf \{ \varrho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1 \},$$

és van olyan W halmaz, hogy

$$S \subset W \in \mathcal{P}_2 \quad \text{és} \quad (\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) = \varrho(W).$$

Először is, ha $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, A_3 \times B_3, \dots$ a \mathcal{P}_0 osztályban vannak, és

$$S \subset V = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j,$$

akkor

$$\xi_V \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{A_j \times B_j},$$

amiből

$$\varrho(V) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j),$$

továbbá egyenlőség teljesül, ha az $A_j \times B_j$ halmazok diszjunktak. Másodszor, a

$$(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$$

esetben, választhatunk $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ halmazokat úgy, hogy $S \subset V_j \in \mathcal{P}_1$ és

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho(V_j)$$

teljesüljön. Végül, legyen $W = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, ha $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$, ha pedig $(\mu \otimes \nu)(S) = \infty$, akkor legyen $W = X \times Y$.

(1) bizonyításához tegyük fel, hogy $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Mivel

$$\mu(A)\nu(B) = \varrho(A \times B) \leq \varrho(V)$$

minden $A \times B \subset V \in \mathcal{P}_1$ -re, kapjuk, hogy $\mu(A)\nu(B) \leq (\mu \otimes \nu)(A \times B)$. A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Továbbá, ha $T \subset X \times Y$, akkor $T \subset U \in \mathcal{P}_1$ -ből $U \cap (A \times B)$ és $U \setminus (A \times B)$ diszjunkt \mathcal{P}_1 -beli halmazok, így

$$\begin{aligned} & (\mu \otimes \nu)(T \cap (A \times B)) + (\mu \otimes \nu)(T \setminus (A \times B)) \\ & \leq \varrho(U \cap (A \times B)) + \varrho(U \setminus (A \times B)) = \varrho(U), \end{aligned}$$

amiből U -ra alsó határt véve az $A \times B$ halmaz $\mu \otimes \nu$ -mérhetősége adódik. (1)-ből következik, hogy \mathcal{P}_2 minden eleme $\mu \otimes \nu$ -mérhető. Ha most $(\mu \otimes \nu)(S) = 0$, akkor S benne van valamely $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $\varrho(W) = 0$, innen μ és ν teljessége miatt $\varrho(S) = 0$.

Ha $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$ és az S halmaz $\mu \otimes \nu$ -mérhető, akkor S benne van egy $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $(\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) = \varrho(W)$, innen $(\mu \otimes \nu)(W \setminus S) = 0$. Így $\varrho(W \setminus S) = 0$,

$$\mu\{x : (x, y) \in S\} = \mu\{x : (x, y) \in W\}$$

teljesül ν -majdnem minden $y \in Y$ -ra. Ez azt jelenti, hogy

$$\varrho(S) = \varrho(W) = (\mu \otimes \nu)(S),$$

azaz (2), (4) és (6) első egyenlősége teljesül S karakterisztikus függvényére. Ugyanez teljesül, ha S tetszőleges σ -véges $\mu \otimes \nu$ -mérhető halmaz. (3), (5) és (6) második fele μ és ν szerepének felcserélésével kapható a σ -véges $\mu \otimes \nu$ -mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire. Végül az approximációs lemma és Beppo Levi tétele alapján kapjuk a tételt nemnegatív, az integrál definíciója alapján pedig tetszőleges függvényekre.

5.1.3. Definíció. Ha $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ mértékterek, $i = 1, 2, \dots, n$, akkor teljes indukcióval definiáljuk a

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$$

külső mértéket $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ -en. Legyen továbbá

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n.$$

A $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ külső mérték leszűkítését $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ -re *szorzatmérték*nek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) szintén $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ -nel jelöljük. Ha $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \dots = \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ és $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$, akkor μ^n -et és \mathcal{A}^n -et írunk.

→ **5.1.4. Feladat [7].** Legyen λ a Lebesgue-mérték, μ pedig a számláló mérték $[0, 1]$ -en. Mutassuk meg, hogy a $\delta(x, y) = 1$, ha $x = y$, $\delta(x, y) = 0$, ha $x \neq y$ összefüggéssel definiált Kronecker-delta $\mu \otimes \lambda$ -mérhető, és határozzuk meg a Fubini-tételben szereplő integrálokat. Miért nem mond ellent az eredmény a Fubini-tételnek?

5.1.5. Feladat [10]. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y), \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x),$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| d\lambda(x) d\lambda(y), \quad \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| d\lambda(y) d\lambda(x)$$

integrálokat, ha

- (1) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$;
- (2) $f(x, y) = 1/(x - 1/2)^3$, ha $0 < y < |x - 1/2|$ és 0 egyébként;
- (3) $f(x, y) = (x - y)/(x^2 + y^2)^{3/2}$;
- (4) $f(x, y) = 1/(1 - xy)^p$, ahol $p > 0$.

5.1.6. Feladat: az integrál mint görbe alatti terület [10]. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) egy σ -véges mértéktér, λ a Lebesgue-mérték \mathbb{R} -en, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény, és

$$T_* = \{(x, t) : (x, t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \leq t < f(x)\},$$

$$T^* = \{(x, t) : (x, t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Igazoljuk, hogy a T_* és T^* halmazok $\mu \otimes \lambda$ -mérhetőek, és

$$(\mu \otimes \lambda)(T_*) = (\mu \otimes \lambda)(T^*) = \int_X f d\mu.$$

(Lebesgue eredetileg a nemnegatív valós értékű függvények Lebesgue-integrálját görbe alatti területként definiálta.)

* **5.1.7. Feladat: a nagy számok gyenge törvénye [13].** Legyenek $(X_\gamma, \mathcal{A}_\gamma, \mu_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ valószínűségi mértékterek. Az

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \mapsto \prod_{i=1}^n \mu_{\gamma_i}(A_{\gamma_i}),$$

$n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \Gamma$ páronként különböző indexek, $A_{\gamma_i} \in \mathcal{A}_{\gamma_i}$, ha $i = 1, \dots, n$ és $A_\gamma = X_\gamma$, ha $\gamma \neq \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ összefüggéssel értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ külső mértéket $\prod_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma$ -val jelöljük, az erre nézve mérhető halmazok osztályát pedig $\prod_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ -val. A μ megszorítását a μ -mérhető halmazok osztályára a μ_γ mértékek szorzatának nevezük. Legyen $\Gamma = \mathbb{N}$, $X_n = \{-1, 1\}$, \mathcal{A}_n az X_n összes részhalmazainak osztálya, μ_n pedig a számláló mérték $1/2$ -szerese, ha $n \in \mathbb{N}$. Legyen $f_n(x) = x_n$, ha $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Bizonyítsuk be, hogy az f_n mérhető függvénysorozat mértékben az azonosan nulla függvényhez tart.

* **5.1.8. Probléma [?].** Igaz-e, hogy ha μ külső mérték X -en, ν pedig külső mérték Y -on, akkor az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$ leképezés σ -szubadditív $X \times Y$ részhalmazain?

5.2. A Lebesgue-mérték az euklideszi téren

5.2.1. Definíció. A λ^n n -dimenziós Lebesgue külső mértéket \mathbb{R}^n -en mint a

$$\lambda^n = \lambda \otimes \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$$

n -tényezős szorzatot definiáljuk. Az n -dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok osztályát \mathcal{L}^n -nel jelöljük. A λ^n külső mérték megszorítását \mathcal{L}^n -re n -dimenziós Lebesgue-mértéknek nevezzük, és szintén λ^n -nel jelöljük.

5.2.2. Tétel. A λ^n szorzatmérték Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, továbbá

$$(1) \quad \lambda^n(S) = \inf \{ \lambda^n(V) : V \text{ nyílt}, S \subset V \} \quad \text{minden } S \subset \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Bizonyítás. A Fubini-tételt ismételten alkalmazva kapjuk, hogy az

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

alakú n -dimenziós nyílt intervallumok mérhetőek. Mivel azok az n -dimenziós nyílt intervallumok, amelyekre minden a_i és b_i racionális, megszámlálható bázisát alkotják \mathbb{R}^n topológiájának, \mathbb{R}^n minden nyílt részhalmaza mérhető.

A kompakt halmazok mértéke véges, mivel intervallumba foglalható. Mivel \mathbb{R}^n minden nyílt részhalmaza σ -kompakt, tetszőleges V nyílt halmazhoz létezik kompakt halmazok egy $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ sorozata, amelyre $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = V$. Így a mérték folytonosságából

$$\lambda^n(V) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda^n(K_i) \leq \sup \{ \lambda^n(K) : K \subset V, K \text{ kompakt} \}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Végül n szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk (1)-et. Legyen $\varepsilon > 0$, és tegyük fel, hogy $n - 1$ -re már tudjuk az állítást. Nyilván feltehetjük, hogy $\lambda^n(S) < \infty$. Válasszunk egy olyan

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$$

lefedést, amelyre az A_i halmaz λ^{n-1} -mérhető, a B_i halmaz λ -mérhető, ha $i = 1, 2, \dots$, továbbá $\lambda^{n-1}(A_i) < \infty$, $\lambda(B_i) < \infty$, és

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(A_i) \lambda(B_i) \leq \lambda^n(S) + \varepsilon.$$

Választva minden i -re olyan V_i és W_i nyílt halmazokat, amelyekre $A_i \subset V_i$, $B_i \subset W_i$ és

$$\lambda^{n-1}(V_i) \lambda(W_i) \leq \lambda^{n-1}(A_i) \lambda(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

az $U = \cup_{i=1}^{\infty} (V_i \times W_i)$ nyílt halmazra $S \subset U$ és

$$\lambda^n(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(V_i) \lambda(W_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda^{n-1}(A_i) \lambda(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leq \lambda^n(S) + 2\varepsilon.$$

* **5.2.3. Lemma.** Legyenek a_1, \dots, a_n és b_1, \dots, b_n valós számok, τ pedig a

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \dots, a_nx_n + b_n), \quad \text{ha } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel adott affin transzformációja \mathbb{R}^n -nek önmagába, és legyen

$$J\tau = |a_1 a_2 \cdots a_n|.$$

Ekkor

$$\lambda^n(\tau(S)) = J\tau \cdot \lambda^n(S) \quad \text{minden } S \subset \mathbb{R}^n\text{-re,}$$

továbbá ha S mérhető, akkor $\tau(S)$ is mérhető.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A 2.1.3. tételben $n = 1$ -re már igazoltuk az állítást. Legyen $n > 1$ és tegyük fel, hogy $n - 1$ -re igaz az állítás, legyen továbbá $S \subset \mathbb{R}^n$ és

$$\tau^* : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (a_1x_1 + b_1, \dots, a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1}), \quad \text{ha } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\tau' : x_n \mapsto a_nx_n + b_n, \quad \text{ha } x_n \in \mathbb{R}.$$

Ha $S \subset \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$, ahol $A_i \in \mathcal{L}^{n-1}$ és $B_i \in \mathcal{L}$, akkor

$$\tau(S) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau(A_i \times B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\tau^*(A_i) \times \tau'(B_i)),$$

amiből

$$\lambda^n(\tau(S)) \leq |a_1 a_2 \cdots a_{n-1}| |a_n| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(A_i) \lambda(B_i),$$

és így

$$\lambda^n(\tau(S)) \leq J\tau \cdot \lambda^n(S).$$

Ha valamelyik a_i nulla, akkor készen is vagyunk. Ha nem, akkor τ^{-1} -re alkalmazva az eddigieket, kapjuk a másik irányú egyenlőtlenséget. A $\tau(S)$ halmaz mérhetősege a

$$\begin{aligned} \lambda^n(T \cap \tau(S)) + \lambda^n(T \setminus \tau(S)) &= J\tau \cdot \lambda^n(\tau^{-1}(T) \cap S) + J\tau \cdot \lambda^n(\tau^{-1}(T) \setminus S) \\ &= J\tau \cdot \lambda^n(\tau^{-1}(T)) = \lambda^n(T) \end{aligned}$$

összefüggésből következik.

* **5.2.4. Tétel.** Legyen μ egy Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, és legyen \mathcal{A} a μ értelmezési tartománya. Tegyük fel, hogy μ eltolásinvariáns, azaz

$$A + b \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mu(A + b) = \mu(A) \quad \text{minden} \quad A \in \mathcal{A}, b \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Ekkor van olyan $c \geq 0$ konstans, hogy

$$\mu(A) = c\lambda^n(A) \quad \text{minden} \quad A \in \mathcal{A}\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az 5.2.2. tétel bizonyításában, kapjuk, hogy $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ minden Borel-halmaza $\mu \times \lambda^n$ -mérhető. Legyen K egy rögzített, nem üres, kompakt lezártú nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek, V pedig tetszőleges nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek. Felhasználva, hogy az

$$\{(x, y) : y \in K, x + y \in V\} \quad \text{és} \quad \{(x, y) : y \in V, y - x \in K\}$$

halmazok nyílt halmazok, a Fubini-tétel és az előző lemma szerint

$$\begin{aligned} \lambda^n(V)\mu(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(x) d\lambda^n(x) \xi_K(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_{V-y}(x) d\lambda^n(x) \xi_K(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_{V-x}(y) \xi_K(y) d\mu(y) d\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(y) \xi_{K+x}(y) d\mu(y) d\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(y) \int_{\mathbb{R}^n} \xi_{y-K}(x) d\lambda^n(x) d\mu(y) = \mu(V)\lambda^n(K). \end{aligned}$$

Ebből $c = \mu(K)/\lambda^n(K)$ jelöléssel $\mu(V) = c\lambda^n(V)$ minden nyílt részhalmazára \mathbb{R}^n -nek. Egy adott $A \in \mathcal{A}$ halmazt tartalmazó nyílt halmazokra alsó határt véve ugyanez teljesül minden A -ra.

5.2.5. Tétel. Legyen $\tau : x \mapsto A(x) + b$ egy affin transzformációja \mathbb{R}^n -nek önmagába, ahol $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $b \in \mathbb{R}^n$. Legyen

$$J\tau = |\det A|.$$

Ekkor

$$\lambda^n(\tau(S)) = J\tau \cdot \lambda^n(S) \quad \text{minden} \quad S \subset \mathbb{R}^n\text{-re,}$$

továbbá ha az S halmaz λ^n -mérhető, akkor $\tau(S)$ is az.

* **Bizonyítás.** Nyilván feltehetjük, hogy $J\tau \neq 0$, azaz, hogy τ invertálható, mert egyébként τ képtere nullmértékű. Ha τ invertálható, akkor τ homeomorf leképezése \mathbb{R}^n -nek \mathbb{R}^n -re. Legyen

$$\mu(S) = \lambda^n(\tau(S)), \quad \text{ha} \quad S \subset \mathbb{R}^n.$$

Ekkor

$$(1) \quad \inf \{ \mu(V) : V \text{ nyílt}, S \subset V \} = \inf \{ \lambda^n(\tau(V)) : \tau(V) \text{ nyílt}, \tau(S) \subset \tau(V) \} \\ = \lambda^n(\tau(S)) = \mu(S).$$

Tekintsük μ leszűkítését a Borel-halmazokra. Ez Radon-mérték: könnyen látható, hogy mérték és a kompakt halmazok mértéke véges, a nyílt halmazokkal kívülről való approximálhatóságot már láttuk, és

$$\sup \{ \mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subset V \} = \sup \{ \lambda^n(\tau(K)) : \tau(K) \text{ kompakt}, \tau(K) \subset \tau(V) \} \\ = \lambda^n(\tau(V)) = \mu(V)$$

minden V nyílt részhalmazára \mathbb{R}^n -nek. Így az előző tétel szerint van olyan c_τ konstans, hogy $\lambda^n(\tau(B)) = c_\tau \lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \subset \mathbb{R}^n$ -re is teljesül. Ha

$$\tau_1(x_1, \dots, x_n) = (a_1 x_1 + b, \dots, a_n x_n + b_n),$$

akkor az 5.2.3. lemma szerint $c_{\tau_1} = J\tau_1$. Ha τ_2 ortogonális lineáris transzformáció, akkor $c_{\tau_2} = 1$, mivel τ_2 az $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\} = \mathbb{B}(0, 1)$ gömböt önmagára képezi le. Mivel minden τ invertálható affin transzformáció előáll $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ alakban, és $c_\tau = c_{\tau_1} c_{\tau_2}$, a tételt bebizonyítottuk.

* **5.2.6. Tétel.** Az \mathbb{R}^n tér bármely r sugarú gömbjének λ^n -mértéke

$$r^n \alpha(n).$$

Bizonyítás. Az 5.2.3. lemma szerint

$$\lambda^n(\mathbb{B}(a, r)) = r^n \lambda^n(\mathbb{B}(0, 1))$$

bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ és $r \geq 0$ -ra, ahol $\mathbb{B}(a, r)$ az a középpontú, r sugarú zárt gömböt jelöli.

Indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$. A Fubini-tétel szerint, felhasználva a Γ -függvény ismert tulajdonságai (lásd Rudin [40], 201–204. oldal), valamint a Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolatát, $n \geq 2$ esetén

$$\int_{[-1,1]} \lambda^{n-1} \{y : |y| \leq (1-t^2)^{1/2}\} d\lambda(t) = \alpha(n-1) \int_{[-1,1]} (1-t^2)^{(n-1)/2} d\lambda(t) \\ = 2\alpha(n-1) \int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt = 2\alpha(n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \\ = \frac{\Gamma(1/2)^{n-1} \Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+1)/2)} = \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} = \alpha(n).$$

Nyílt gömbökre a bizonyítás hasonló.

→ **5.2.7. Feladat [6]**. Fogalmazzuk meg pontosan, és igazoljuk a *Cavalieri-elvet*.

→ **5.2.8. Feladat [8]**. Bizonyítsuk be, hogy λ^n és λ^m szorzata λ^{n+m} .

5.2.9. Feladat [10]. Jelölje \mathcal{B} az \mathbb{R} Borel-halmazainak osztályát. Keressünk olyan $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazt, amely az $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}\}$, illetve $\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\}$ halmazosztályok által generált σ -algebrák közül az elsőben nincs benne, de a másodikban igen. Keressünk olyan $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazt, amelyre $\lambda^2(S) = 0$, de a fenti σ -algebrákban nincs benne.

* **5.2.10. Feladat [11]**. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{R}^n bármely konvex részhalmaza Lebesgue-mérhető.

* **5.2.11. Feladat [14]**. Adjunk példát olyan $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$ Borel-halmazra, amelyre $\lambda^2(A) = 1$, de A nem tartalmaz $B \times C$ alakú halmazt, amelyre $B, C \in \mathcal{L}$ és $\lambda(B)\lambda(C) > 0$.

* **5.2.12. 5.2.12. Feladat [18]**. Konstruáljunk olyan valós függvényt, amely grafikonjának bármely egységnégyzetbe eső része 1 külső mértékű halmaz.

6. MÉRTÉKEK DERIVÁLTJA

6.1. A Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel

A 4.2.5. tétel szerint, ha (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér és φ egy nemnegatív, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény, akkor a $\nu(A) = \int_A \varphi d\mu$, ha $A \in \mathcal{A}$ összefüggéssel definiált függvény mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren. Az nyilvánvaló, hogy ha $\mu(A) = 0$ valamely $A \in \mathcal{A}$ -ra, akkor $\nu(A) = 0$. A valószínűségszámításban és az analízisben fontos szerepet játszik a fenti állítás — bizonyos feltételek mellett fennálló — megfordítása.

6.1.1. Definíció. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ és ν pedig ezen a mérhető téren értelmezett mértékek. Azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ -re nézve, ha bármely $A \in \mathcal{A}$ -ra, amelyre $\mu(A) = 0$, teljesül, hogy $\nu(A) = 0$. Jelölése: $\nu \ll \mu$. Azt mondjuk, hogy μ és ν *szingulárisak egymásra*, ha van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(A) = 0$ és $\nu(X \setminus A) = 0$. Jelölése: $\nu \perp \mu$.

Nyilván egy adott (X, \mathcal{A}) mérhető téren értelmezett mértékek körében \ll reflexív és tranzitív, \perp pedig szimmetrikus reláció. Egyszerű példa szinguláris mértékekre a Lebesgue-mérték és a Dirac-mérték \mathbb{R} -en.

6.1.2. Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel. Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ és ν pedig σ -véges mértékek (X, \mathcal{A}) -n. Ekkor létezik pontosan egy olyan (X, \mathcal{A}) -n értelmezett ν_a és ν_s mértékekből álló pár, hogy

$$(1) \quad \nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A) \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra};$$

$$(2) \quad \nu_a \ll \mu \quad \text{és} \quad \nu_s \perp \mu.$$

Létezik továbbá egy olyan X -en értelmezett φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

$$(3) \quad \nu_a(A) = \int_A \varphi d\mu \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}.$$

A φ függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik X -en értelmezett nemnegatív mérhető függvény, amelyre (3) fennáll, akkor a két függvény

μ -majdnem mindenütt egyenlő. Ha $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$(4) \quad \int_X f \, d\nu_a = \int_X f \varphi \, d\mu.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy μ és ν véges mértékek. Legyen $\kappa(A) = \mu(A) + \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ekkor κ is mérték (X, \mathcal{A}) -n, továbbá

$$\int f \, d\kappa = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu,$$

ha valamelyik oldal definiálva van. Az utóbbi állítás mérhető, egyszerű függvényekre nyilvánvaló, nemnegatív mérhető függvényekre Beppo Levi tételéből, tetszőlegesen pedig az integrál definíciójából következik.

A bizonyítás kulcsa Riesz reprezentációs tételének alkalmazása a (valós) $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa)$ tér folytonos lineáris funkcionáljaira. Ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa)$, akkor

$$\left| \int f \, d\nu \right| \leq \int |f| \, d\nu \leq \int |f| \, d\kappa \leq \kappa(X)^{1/2} \left(\int |f|^2 \, d\kappa \right)^{1/2},$$

így az $f \mapsto \int f \, d\nu$ funkcionál folytonos lineáris funkcionál $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa)$ -n. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint van olyan $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa)$, hogy

$$(5) \quad \int f \, d\nu = \int f g \, d\kappa = \int f g \, d\nu + \int f g \, d\mu,$$

ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa)$. Legyen $f = \xi_A$ valamely $A \in \mathcal{A}$ -ra. Ekkor az előző egyenlőség bal oldala $\nu(A)$, és mivel $0 \leq \nu(A) \leq \kappa(A)$,

$$0 \leq \int_A g \, d\kappa \leq \kappa(A).$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{A}$ -ra fennáll, κ -majdnem minden $x \in X$ -re $0 \leq g(x) \leq 1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez minden $x \in X$ -re teljesül. (5)-öt átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad \int_X (1 - g) f \, d\nu = \int_X f g \, d\mu, \quad \text{ha } f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\kappa).$$

Legyen $B = X(g = 1)$, és legyen $\nu_a(A) = \nu(A \setminus B)$, $\nu_s(A) = \nu(A \cap B)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ha f a B karakterisztikus függvénye (6)-ban, akkor látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Nyilván $\nu_s(X \setminus B) = 0$, így $\mu \perp \nu_s$. Mivel g korlátos, (6) akkor is teljesül, ha f -et $(1 + g + \dots + g^n)\xi_A$ -val helyettesítjük, $A \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ -re. Így azt kapjuk, hogy

$$(7) \quad \int_A (1 - g^{n+1}) \, d\nu = \int_A g(1 + g + \dots + g^n) \, d\mu.$$

A B minden pontjában $g(x) = 1$, és így $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Az $X \setminus B$ minden pontjában $g^{n+1}(x) \rightarrow 0$ monoton csökkenve. Így a bal oldal $\nu(A \setminus B) = \nu_a(A)$ -hoz tart monoton növekedve. A jobb oldalon szereplő függvény egy nemnegatív mérhető φ függvényhez tart monoton növekedve, maga az integrál pedig $\int_A \varphi d\mu$ -höz. Ezzel beláttuk (3)-at. (3)-ból következik, hogy $\nu_a \ll \mu$.

Most térjünk át az általános eset bizonyítására. Válasszunk egy olyan C_n , $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt \mathcal{A} -beli halmazokból álló sorozatot, amelyre $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$, $\mu(C_n) < \infty$ és $\nu(C_n) < \infty$ minden n -re. A ν_{C_n} és μ_{C_n} mértékekre alkalmazva a tétel eddig bizonyított részét, a $\nu_{C_n,a}$ és $\nu_{C_n,s}$ mértékeket és φ_n függvényeket kapjuk. Legyen

$$\nu_a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,a}(A \cap C_n) \quad \text{és} \quad \nu_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,s}(A \cap C_n),$$

ha $A \in \mathcal{A}$, és legyen $\varphi(x) = \varphi_n(x)$, ha $x \in C_n$ és $\varphi_n(x)$ definiálva van. Ekkor az (1), (2) és (3) összefüggések teljesülnek.

A $\nu = \nu_a + \nu_s$ felbontás unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B) = 0$ és $\nu_s(X \setminus B) = 0$, továbbá hogy $\nu'_a + \nu'_s = \nu$, $\nu'_a \ll \mu$, és $B' \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B') = 0$ és $\nu'_s(X \setminus B') = 0$. Ekkor bármely \mathcal{A} -beli $D \subset B \cup B'$ halmazra $\mu(D) = 0$, és így ν_a és ν'_a abszolút folytonossága miatt $\nu(D) = \nu_s(D) = \nu'_s(D)$. Ha $D \subset X \setminus (B \cup B')$, akkor $\nu_s(D) = \nu'_s(D) = 0$ teljesül. Így

$$\begin{aligned} \nu_s(A) &= \nu_s(A \cap (B \cup B')) + \nu_s(A \setminus (B \cup B')) \\ &= \nu'_s(A \cap (B \cup B')) + \nu'_s(A \setminus (B \cup B')) = \nu'_s(A), \end{aligned}$$

ha $A \in \mathcal{A}$. Ebből már adódik, hogy $\nu_a(A) = \nu'_a(A)$. Így $\nu_a = \nu'_a$ és $\nu_s = \nu'_s$.

A φ unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\nu_a(A) = \int_A \tilde{\varphi} d\mu$$

minden $A \in \mathcal{A}$ -ra. Ekkor az $X(\varphi > \tilde{\varphi})$ halmazra

$$0 = \int_{X(\varphi > \tilde{\varphi})} (\varphi - \tilde{\varphi}) d\mu,$$

amiből $\mu X(\varphi > \tilde{\varphi}) = 0$. Hasonlóan $\mu X(\varphi < \tilde{\varphi}) = 0$, így a két függvény μ -majdnem mindenütt egyenlő.

Végül (4) a szokásos módon kapható: nyilvánvaló egyszerű függvényekre, Beppo Levi tételéből adódik nemnegatív, az integrál definíciójából pedig tetszőleges függvényekre.

6.1.3. Megjegyzés. Az előző tételben szereplő ν_a , ν_s párt a ν mérték μ -re vonatkozó *Lebesgue-felbontásának* nevezzük, a tétel ennek létezésére és egyértelműségére vonatkozó részét pedig *Lebesgue felbontási tételének*. A tétel második fele, amely a ν_a mérték integrálként való előállításával foglalkozik, a *Radon–Nikodym-tétel*. A φ függvényt szokás ν_a -nak a μ -re vonatkozó *Radon–Nikodym-deriváltjának* nevezni, és $\frac{d\nu_a}{d\mu}$ -vel jelölni. Mint láttuk, φ nem egyértelmű, csak μ -majdnem mindenütt meghatározott.

6.1.4. Láncszabály. Legyenek μ , ν és κ σ -véges mértékek az (X, \mathcal{A}) mérhető téren úgy, hogy $\nu \ll \mu$ és $\kappa \ll \nu$. Ekkor $\kappa \ll \mu$ és

$$\frac{d\kappa}{d\mu} = \frac{d\kappa}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} \quad \mu\text{-majdnem mindenütt.}$$

Bizonyítás. Bármely $A \in \mathcal{A}$ -ra

$$\kappa(A) = \int_A \frac{d\kappa}{d\nu} d\nu = \int_A \frac{d\kappa}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

6.1.5. Feladat [9]. Vezessük le Lebesgue felbontási tételét a Radon–Nikodym-tételből.

6.2. Komplex mértékek

Ha (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér és φ egy integrálható függvény, akkor a

$$\nu(A) = \int_A \varphi d\mu$$

összefüggéssel definiált halmazfüggvény a 4.2.5. tétel szerint σ -additív \mathcal{A} -n, de attól függően, hogy φ valós, komplex vagy vektorértékű, ν is valós, komplex vagy vektorértékű. Erdemesnek látszik ennek alapján valós, komplex vagy vektorértékű σ -additív halmazfüggvényekkel foglalkozni. Mi csak a valós és komplex értékű esetet vizsgáljuk meg részletesen, de a tételek könnyen általánosíthatók \mathbb{K}^n -beli értékű mértékekre is, ha koordinátákat használunk. Általános Banach-térbeli értékű mértékek iránt érdeklődőknek Dunford és Schwartz [7], illetve Bourbaki [4] könyvének tanulmányozását ajánljuk. Ha φ bővített valós értékű, nem integrálható, de létezik az integrálja, akkor ν a $-\infty$ és ∞ értékeket is felveheti. Az ilyen, úgynevezett előjeles mértékek tárgyalását lásd Laczkovich [26] jegyzetében vagy Halmos [15] könyvében.

* **6.2.1. Definíció.** Legyen (X, \mathcal{A}) egy mérhető tér. Azt mondjuk, hogy μ egy *komplex mérték* \mathcal{A} -n, ha $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ és

$$(1) \quad \mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (\sigma\text{-additivitás})$$

diszjunkt \mathcal{A} -beli halmazok bármely A_k , $k = 1, 2, \dots$ sorozatára. Ha μ csak valós értékeket vesz fel, akkor *valós mérték*nek nevezzük.

Világos, hogy egy adott (X, \mathcal{A}) mérhető téren értelmezett valós, illetve komplex mértékek a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával vektorteret alkotnak \mathbb{R} , illetve \mathbb{C} felett.

Mivel az (1) egyenlet bal oldala nem függ az A_k halmazok sorrendjétől, a jobb oldalon álló számsor összege sem függhet a sorrendtől. Ebből következik, hogy a jobb oldalon álló sornak abszolút konvergensenek kell lennie.

* **6.2.2. Definíció.** Ha μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, akkor a

$$\mu_r(A) = \Re\mu(A), \quad \text{ha } A \in \mathcal{A},$$

illetve

$$\mu_i(A) = \Im\mu(A), \quad \text{ha } A \in \mathcal{A}$$

összefüggésekkel definiált valós mértékeket μ valós, illetve képzetes részének nevezzük. Nyilván $\mu = \mu_r + i\mu_i$.

* **6.2.3. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, és ha $A \in \mathcal{A}$, definiáljuk a $|\mu|(A)$ számot mint az összes

$$\sum_{k=1}^n |\mu(A_k)|$$

alakú összegek pontos felső korlátját, ahol A_1, A_2, \dots, A_n páronként diszjunkt, mérhető halmazok, amelyek egyesítése A . Az így értelmezett $|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ függvényt a μ teljes változásának nevezzük. Vegyük észre, hogy a pontos felső korlát ugyanaz marad, ha csak azt tesszük fel, hogy A_1, A_2, \dots, A_n páronként diszjunkt, mérhető részhalmazai A -nak.

* **6.2.4. Tétel.** Legyenek μ és ν komplex mértékek az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, és $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$(1) \quad |c\mu| = |c||\mu|$$

és

$$(2) \quad |\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **6.2.5. Tétel.** Ha μ komplex mérték (X, \mathcal{A}) -n, akkor $|\mu|$ véges mérték (X, \mathcal{A}) -n.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy $|\mu|$ mérték. A σ -additivitás miatt $\mu(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\emptyset)$, amiből $\mu(\emptyset) = 0$. Innen $|\mu|(\emptyset) = 0$. Megmutatjuk, hogy $|\mu|$ is σ -additív. Legyen A_j , $j = 1, 2, \dots$ egy \mathcal{A} -beli páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ és $t < |\mu|(A)$. Válasszunk \mathcal{A} -beli páronként diszjunkt E_1, \dots, E_n halmazokat, amelyekre $\cup_{k=1}^n E_k = A$, úgy, hogy

$$t < \sum_{k=1}^n |\mu(E_k)|$$

teljesüljön. Ekkor

$$\begin{aligned} t &< \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_j) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_k \cap A_j)| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n |\mu(E_k \cap A_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j). \end{aligned}$$

Mivel t tetszőleges volt, kapjuk, hogy

$$|\mu|(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j).$$

Ha $|\mu|(A) = \infty$, akkor a fordított egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ha $|\mu|(A) < \infty$, legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk minden j -re egy olyan \mathcal{A} -beli páronként diszjunkt halmazokból álló $E_{j,1}, \dots, E_{j,n_j}$ halmazrendszert, amelyre $\cup_{k=1}^{n_j} E_{j,k} = A_j$ és

$$\sum_{k=1}^{n_j} |\mu(E_{j,k})| \geq |\mu|(A_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ekkor bármely m pozitív egész számra

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |\mu|(A_j) &\leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_{k=1}^{n_j} |\mu(E_{j,k})| \right) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} |\mu(E_{j,k})| + |\mu(\cup_{j=m+1}^{\infty} A_j)| \\ &\leq \varepsilon + |\mu|(A). \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt,

$$\sum_{j=1}^m |\mu|(A_j) \leq |\mu|(A),$$

amiből

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j) \leq |\mu|(A).$$

Ezzel beláttuk, hogy $|\mu|$ mérték.

Második lépésként megmutatjuk, hogy $|\mu|$ véges mérték. A 6.2.4. tétel szerint $|\mu|(X) \leq |\mu_r|(X) + |\mu_i|(X)$, így elég valós mértékekre belátni az állítást. Először megmutatjuk, hogy ha $E \in \mathcal{A}$ és $|\mu|(E) = \infty$, akkor E előáll két diszjunkt mérhető A, B halmaz egyesítéseként, amelyekre $|\mu(A)| > 1$ és $|\mu(B)| = \infty$. Valóban, válasszunk E -nek egy olyan E_1, E_2, \dots, E_n páronként diszjunkt \mathcal{A} -beli halmazokból álló felbontását, amelyre

$$\sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| > 2 + 2|\mu(E)|.$$

Legyen A azon E_k -k uniója, amelyekre $\mu(E_k) > 0$, és B azon E_k -k uniója, amelyekre $\mu(E_k) \leq 0$. Ekkor kiszámolható, hogy $|\mu(A)| > 1$, $|\mu(B)| > 1$ és $|\mu|$ nem lehet A -n és B -n is véges. Szükség szerint esetleg megcseréljük A és B szerepét.

Ha most $|\mu|(X) = \infty$, akkor teljes indukcióval definiálhatunk egy olyan \mathcal{A} -beli halmazokból álló A_n , $n = 1, 2, \dots$ és B_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozatot, hogy $A_n \cap B_n = \emptyset$, $|\mu(A_n)| > 1$, $|\mu|(B_n) = \infty$ és $A_{n+1} \cup B_{n+1} = B_n$ minden n -re. Ha $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

kell teljesülnön, de a jobb oldali sor nem konvergens, mivel $\mu(A_n)$ nem tart nullához.

* **6.2.6. Definíció.** Legyen μ valós mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, és

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Ekkor a μ^+ , μ^- véges mértékekből álló párt a μ *Hahn-féle felbontásának* nevezzük. Nyilván $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

* **6.2.7. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren. A μ_r^+ , μ_r^- , μ_i^+ , μ_i^- véges mértékekből álló négyest a μ *Jordan-felbontásának* nevezzük. Világos, hogy $\mu = \mu_r^+ - \mu_r^- + i\mu_i^+ - i\mu_i^-$, amit gyakran írunk $\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \mu_j$ alakban is.

* **6.2.8. Tétel.** Ha μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, és $\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \mu_j$ a μ *Jordan-felbontása*, akkor

- (1) $\mu_j \leq |\mu|$, ha $j = 0, 1, 2, 3$;
- (2) $|\mu| \leq \sum_{j=0}^3 \mu_j$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **6.2.9. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, f pedig bővített valós, komplex vagy Banach-térbeli értékű függvény. Az f -et μ -*integrálhatónak* nevezzük, ha $|\mu|$ -integrálható. Az f függvény μ *integrálját* egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz felett az

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \int_A f d\mu_j$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol $\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \mu_j$ a μ *Jordan-felbontása*. Megjegyezzük, hogy a jobb oldalon álló integrálok létezése a szokásos módon (egyszerű függvények, Beppo Levi tétele, az integrál definíciója) következik 6.2.8.(1)-ből.

* **6.2.10. Tétel.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, f és g pedig integrálható, \mathbb{R} , \mathbb{C} vagy Banach-térbeli értékű függvények. Ha c valós, illetve komplex konstans, akkor $f + g$ és cf is integrálhatóak és

- (1) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;
- (2) $\int (cf) d\mu = c \int f d\mu$.

Bizonyítás. Egyszerű, a definíció alapján végzett számolás.

* **6.2.11. Definíció.** Legyenek μ és ν komplex mértékek az (X, \mathcal{A}) mérhető téren. A μ -t teljesnek nevezzük, ha $|\mu|$ teljes. A μ -t komplex Radon-mértéknek nevezzük, ha $|\mu|$ Radon-mérték. Azt mondjuk, hogy ν abszolút folytonos μ -re vonatkozóan, ha $|\nu|$ abszolút folytonos $|\mu|$ -re vonatkozóan. Azt mondjuk, hogy μ és ν szingulárisak egymásra, ha $|\mu|$ és $|\nu|$ szingulárisak egymásra. A $\nu \ll \mu$ és $\nu \perp \mu$ jelöléseket is használjuk.

* **6.2.12. A Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel komplex mértékre.** Legyen (X, \mathcal{A}, μ) egy σ -véges mértéktér, ν pedig komplex mérték (X, \mathcal{A}) -n. Ekkor létezik egyetlen olyan (X, \mathcal{A}) -n értelmezett ν_a és ν_s komplex mértékekből álló pár, amelyre

$$(1) \quad \nu = \nu_a + \nu_s;$$

$$(2) \quad |\nu_a| \ll \mu \text{ és } |\nu_s| \perp \mu.$$

Létezik továbbá egy $\varphi \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ függvény, amelyre

$$(3) \quad \nu_a(A) = \int_A \varphi d\mu \text{ bármely } A \in \mathcal{A}\text{-ra.}$$

A φ függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi} \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ egy másik függvény, amelyre (3) fennáll, akkor a két függvény μ -majdnem mindenütt egyenlő. Továbbá

$$(4) \quad \int_X f d\nu_a = \int_X f \varphi d\mu \text{ bármely } \nu_a\text{-integrálható } f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ függvényre;}$$

$$(5) \quad |\nu_a|(A) = \int_A |\varphi| d\mu \text{ bármely } A \in \mathcal{A}\text{-ra.}$$

A φ függvényt $\frac{d\nu_a}{d\mu}$ -vel is jelöljük, és a ν_a mérték μ szerinti Radon–Nikodym-deriváltjának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $\nu = \sum_{j=0}^3 i^j \nu_j$ a ν Jordan-felbontása, és alkalmazzuk a ν_j mértékekre a 6.1.2. tételt. Legyen

$$\nu_a = \sum_{j=0}^3 i^j \nu_{j,a} \quad \text{és} \quad \nu_s = \sum_{j=0}^3 i^j \nu_{j,s}.$$

(1) és (2) egyszerű számolással adódnak. Az unicitás ugyanúgy kapható meg, mint 6.1.2.-ben. Legyen

$$\varphi = \sum_{j=0}^3 i^j \varphi_j, \quad \text{ahol} \quad \nu_{j,a}(A) = \int_A \varphi_j d\mu.$$

Ekkor 6.1.2.(3) és 6.1.2.(4) szerint teljesül (3) és (4). A φ egyértelműsége hasonlóan látható be, mint 6.1.2.-ben. Végül, (5) bizonyításához legyen $A \in \mathcal{A}$ rögzített, és A_1, A_2, \dots, A_n diszjunkt \mathcal{A} -beli halmazokból álló sorozat, amelyre $\cup_{k=1}^n A_k = A$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^n |\nu_a(A_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{A_k} \varphi d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{A_k} |\varphi| d\mu = \int_A |\varphi| d\mu,$$

amiből

$$|\nu_a|(A) \leq \int_A |\varphi| d\mu.$$

Legyen $g = \xi_A \operatorname{sgn} \bar{\varphi}$. Választva olyan egyszerű függvényekből álló s_j függvénysorozatot, amely pontonként g -hez konvergál, és amelyre $|s_j| \leq |\xi_A \operatorname{sgn} \bar{\varphi}| \leq 1$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint

$$\int_A |\varphi| d\mu = \int_X \varphi \xi_A \operatorname{sgn} \bar{\varphi} d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \varphi s_j d\mu.$$

Másrészt minden s_j függvény $\sum_{k=1}^n c_k \xi_{A_k}$ alakú, ahol A_1, \dots, A_n az A egy mérhető, diszjunkt halmazokra való felosztása, és $|c_k| \leq 1$ minden k -ra. Így

$$\left| \int_X \varphi s_j d\mu \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \int_{A_k} \varphi d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{A_k} \varphi d\mu \right| = \sum_{k=1}^n |\nu_a(A_k)| \leq |\nu_a|(A).$$

Összevetve a két előző összefüggést kapjuk, hogy

$$\int_A |\varphi| d\mu \leq |\nu_a|(A).$$

* **6.2.13. Következmény.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren. Ekkor van olyan mérhető $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, hogy

- (1) $|\varphi(x)| = 1$ minden $x \in X$ -re;
- (2) $\mu(A) = \int_A \varphi d|\mu|$ minden $A \in \mathcal{A}$ -ra;
- (3) $\int_X f d\mu = \int_X f \varphi d|\mu|$ minden $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(|\mu|)$ -re;
- (4) $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d|\mu|$ minden $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(|\mu|)$ -re.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt μ -re és $|\mu|$ -re. (1)-et 6.2.12.(5)-ből kapjuk. (4) a (3)-ból következik.

* **6.2.14. Definíció.** Ha ν komplex mérték az (X, \mathcal{B}) mérhető téren, $(X, \mathcal{B}, |\nu|)$ természetes kiterjesztése (X, \mathcal{A}, κ) és $h = d\nu/d|\nu|$, akkor a $\mu(A) = \int_A h d\kappa$ összefüggéssel definiált komplex mértéket ν természetes kiterjesztésének nevezzük. Nyilván $|\mu| = \kappa$.

* **6.2.15. Hahn-féle felbontási tétel.** Legyen μ valós mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren. Ekkor $\mu^+ \perp \mu^-$.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\frac{d\mu}{d|\mu|} = h$, ahol $|h| = 1$. Mivel μ valós, h is valós majdnem mindenütt. Legyen $B = X(h = -1)$. Mivel

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

$$\mu^+(B) = \frac{1}{2} \int_B (1 + h) d|\mu| = 0$$

és

$$\mu^-(X \setminus B) = \frac{1}{2} \int_{X \setminus B} (1 - h) d|\mu| = 0.$$

* **6.2.16. Tétel.** Legyenek μ és ν komplex mértékek az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, és $c \in \mathbb{C}$. Ha egy \mathbb{R}, \mathbb{C} vagy Banach-térbeli értékű f függvény μ -integrálható, akkor $c\mu$ -integrálható is, és

$$(1) \quad \int f d(c\mu) = c \int f d\mu.$$

Ha az f függvény ν -integrálható is, akkor $\mu + \nu$ -integrálható, és

$$(2) \quad \int f d(\mu + \nu) = \int f d\mu + \int f d\nu.$$

Bizonyítás. Ha f egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor nyilván fennállnak az (1) és (2) összefüggések. Az integrál definíciójából kapjuk, hogy (1) és (2) akkor is fennállnak, ha f egyszerű függvény. Végül, választva olyan egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot, amely pontonként f -hez konvergál, és amelyre $|s_n| \leq |f|$, $n = 1, 2, \dots$, Lebesgue majorált konvergencia tétele és a 6.2.13.(4) felhasználásával

$$\begin{aligned} \left| \int (f - s_n) d(c\mu) \right| &\leq \int |f - s_n| d|c\mu| \rightarrow 0, \\ \left| c \int (f - s_n) d\mu \right| &\leq |c| \int |f - s_n| d|\mu| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

amiből

$$\int f d(c\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d(c\mu) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = c \int f d\mu.$$

Hasonlóan kapjuk (2)-t.

* **6.2.17. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az (X, \mathcal{A}) mérhető téren, ν pedig komplex mérték az (Y, \mathcal{B}) mérhető téren. Legyen

$$\varphi_\mu = \frac{d\mu}{d|\mu|}, \quad \varphi_\nu = \frac{d\nu}{d|\nu|}.$$

A μ és ν szorzatát a

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \int_S \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(y) d(|\mu| \otimes |\nu|)(x, y)$$

összefüggéssel definiáljuk azon S halmazokra, amelyek $|\mu| \otimes |\nu|$ -mérhetőek.

* **6.2.18. Feladat [5].** Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, μ komplex mérték (X, \mathcal{A}) -n, f komplex értékű μ -integrálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\nu(A) = \int_A f d\mu$, ha $A \in \mathcal{A}$ összefüggéssel definiált komplex mérték abszolút folytonos μ -re vonatkozóan.

* **6.2.19. Feladat [7].** Legyen (X, \mathcal{A}) mérhető tér, ν és μ komplex mértékek (X, \mathcal{A}) -n, $\nu = \sum_{j=0}^3 i^j \nu_j$ a ν Jordan-felbontása. Igazoljuk, hogy az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (1) $\nu \ll \mu$;
- (2) $\nu_j \ll \mu$, ha $j = 0, 1, 2, 3$;
- (3) bármely $A \in \mathcal{A}$ halmazra, ha $|\mu|(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$.

6.3. \mathbb{L}^p duális tere

* **6.3.1. Megjegyzés.** A Hölder-egyenlőtlenség szerint, ha (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér, $1 \leq p \leq \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), akkor bármely $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ -re az

$$F(f) = \int fg d\mu, \quad \text{ha } f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$$

összefüggéssel definiált funkcionál (amely nyilvánvalóan lineáris) korlátos és $\|F\| \leq \|g\|_q$. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelő feltételek mellett — egyenlőség áll és $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ minden korlátos lineáris funkcionálja előáll ilyen alakban.

* **6.3.2. Lemma.** Legyen (X, \mathcal{A}, μ) véges mértéktér, $1 \leq p < \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$). Ekkor tetszőleges $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ mérhető függvényre

$$\|g\|_q \leq \sup_f \frac{|\int fg d\mu|}{\|f\|_p},$$

ahol a felső határ az összes nem nulla $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -beli korlátos mérhető függvényre veendő.

Bizonyítás. Ha valamely g függvényre az egyenlőtlenség nem állna fenn, akkor $|g|$ -re és $f \operatorname{sgn} g$ -re (itt $\operatorname{sgn} 0 = 1$) sem állna fenn, így elég nemnegatív g -re bizonyítani az állítást. Ekkor azonban $|\int fg d\mu| \leq \int |f|g d\mu$ miatt a jobb oldali felső határ nem változik, ha csak nemnegatív f függvényeket tekintünk. Egyszerű függvények monoton növekedő sorozatával közelítve g -t kapjuk, hogy ha az egyenlőtlenség nem áll fenn, akkor van olyan g nemnegatív egyszerű függvény is, amelyre szintén nem áll fenn, így elég az egyenlőtlenséget erre az esetre bizonyítani. Ha $1 < p < \infty$, legyen $f = g^{q-1}$. Ekkor $f^p = g^q$, így $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p}$ és $\int fg d\mu = \int g^q = \|g\|_q^q$, ahonnan $\int fg d\mu \geq \|g\|_q \|f\|_p$. Ha $p = 1$, legyen s a jobb oldali felső határ. Ha $A = X$ ($g > s$) pozitív mértékű, akkor legyen $f = \xi_A$. Nyilván $\|f\|_1 = \mu(A)$, és $\int fg = \int_A g > s\mu(A) = s\|f\|_1$, ami ellentmondás.

* **6.3.3. Riesz reprezentációs tétele.** Legyen (X, \mathcal{A}, μ) egy mértéktér, $1 \leq p < \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$). Ha $1 < p < \infty$, akkor bármely $F : \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionálhoz egy és csak egy olyan $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ létezik, amelyre

$$F(f) = \int fg d\mu, \quad \text{ha } f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu).$$

Fennáll továbbá $\|F\| = \|g\|_q$. Ha a mértéktér σ -véges, akkor $p = 1$ esetén is teljesül az állítás.

A tételt sokszor röviden úgy fogalmazzuk, hogy \mathbb{L}^p duálisa \mathbb{L}^q .

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy a mértéktér véges. Legyen $\nu(A) = F(\xi_A)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Megmutatjuk, hogy ν valós, illetve komplex mérték. Ha A_n diszjunkt, mérhető halmazok egy sorozata, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor

$$\|\xi_A - \xi_{\cup_{k=1}^n A_k}\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \right)^{1/p} \rightarrow 0,$$

és így

$$\nu(A) = F(\xi_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Nyilvánvaló, hogy $\nu \ll \mu$, így alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt, mely szerint létezik egy μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ függvény, amelyre

$$F(\xi_A) = \nu(A) = \int_A g d\mu = \int \xi_A g d\mu.$$

Innen azonnal következik, hogy $F(f) = \int fg d\mu$ akkor is fennáll, ha f mérhető egyszerű függvény. Az approximációs lemmát és Lebesgue majorált konvergencia tételét alkalmazva, az is következik, hogy ez akkor is fennáll, ha f korlátos mérhető függvény. A 6.3.2. lemma szerint $\|g\|_q \leq \|F\|$. Mivel a korlátos mérhető függvények sűrűek $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -ben, kapjuk, hogy $F(f) = \int fg d\mu$ minden $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -re teljesül.

Ha most μ tetszőleges mérték és $A \in \mathcal{A}$ véges mértékű halmaz, akkor az eddig bizonyítottakat alkalmazhatjuk az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altérre és az F funkcionál A -n kívül eltűnő függvényekre vett megszorítására. A kapott g_A függvényt tekinthetjük olyan X -en értelmezett $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ -beli függvénynek, amely A -n kívül nulla. Az egyértelműség miatt, ha $B \in \mathcal{A}$, akkor $g_A|_{(A \cap B)} = g_B|_{(A \cap B)}$ majdnem mindenütt.

Az $1 < p < \infty$ esetben legyen

$$s = \sup\{\|g_A\|_q : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} \leq \|F\|,$$

és válasszunk olyan $A_n \in \mathcal{A}$ halmzsorozatot, amelyre $\|g_{A_n}\|_q \rightarrow s$. Feltehetjük, hogy az A_n halmzsorozat bővülő. A g_{A_n} függvénsorozat majdnem mindenütt konvergál egy $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ függvényhez, amely az $A_{\infty} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmazon kívül eltűnik, és amelyre $\|g\|_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_q = s$.

Megmutatjuk, hogy ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$, akkor $F(f) = \int fg d\mu$. Először is vegyük észre, hogy ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, $A_{\infty} \cap A = \emptyset$, akkor $g_A = 0$ majdnem mindenütt, mert egyébként elég nagy n -re $\|g_{A_n \cup A}\|_q^q = \|g_{A_n}\|_q^q + \|g_A\|_q^q > s$ teljesülne. Ha most f majdnem mindenütt nulla A_{∞} -en, akkor $|f|^p$ -re alkalmazva a Csebisev-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $B_n = X(|f| > 1/n)$ véges mértékű. Mivel B_n bővülő halmzsorozat és f nulla a $B_{\infty} = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ halmazon kívül, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\|f - f|_{B_n}\|_p \rightarrow 0$. Innen F folytonossága miatt $F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(f|_{B_n}) = 0$. Ha f majdnem mindenütt nulla A_{∞} -en kívül, akkor Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\|f - f|_{A_n}\|_p \rightarrow 0$. Innen F folytonossága és a Hölder-egyenlőtlenség miatt

$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(f|_{A_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f g_{A_n} d\mu = \int f g d\mu$. Végül, ha f tetszőleges, akkor $F(f) = F(f\xi_{A_\infty}) + F(f\xi_{X \setminus A_\infty}) = \int f g d\mu$.

Tegyük fel, hogy $\tilde{g} \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^q(\mu)$ egy másik függvény, amellyel $F(f) = \int f \tilde{g} d\mu$ teljesül minden $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ -re. Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség szerint a $B_n = X(|\tilde{g}| > 1/n)$ halmazok véges mértékűek, ezeken $\tilde{g} = g$ majdnem mindenütt. Ugyanez teljesül az A_n halmazokon. Az $\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$ halmaz komplementerén mindkét függvény nulla.

A $p = 1$ esetben válasszuk a véges mértékű mérhető halmazokból álló és bővülő A_n sorozatot úgy, hogy egyesítése X legyen. A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $F(f) = \int f g d\mu$. A g egyértelműsége azonnal adódik a g_{A_n} függvények egyértelműségéből.

* **6.3.4. Feladat [11]**. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A, \mu(B) < \infty\}$$

(σ -véges mértékterekre ez a feltétel teljesül), $1 \leq p \leq \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), akkor tetszőleges $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ mérhető függvényre

$$\|g\|_q = \sup\{|\int f g d\mu| : f \in \mathbb{L}^p, \|f\|_p \leq 1\}.$$

* **6.3.5. Feladat [7]**. Az 6.3.1. megjegyzés jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha $p = 1$, akkor $\|F\| = \|g\|_q$ nem feltétlenül teljesül.

* **6.3.6. Feladat [15]**. Mutassuk meg, hogy a 6.3.3. tétel állítása $p = \infty$ esetén nem teljesül, még akkor sem, ha a mértéktér véges.

* **6.3.7. Feladat [19]**. Igazoljuk, hogy van olyan (X, \mathcal{A}, μ) mértéktér és $F : \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál, amelyhez nincs olyan μ -mérhető g függvény, hogy $F(f) = \int f g d\mu$ minden $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ -re.

7. MÉRTÉKEK ÉS LINEÁRIS FUNKCIONÁLOK

7.1. Monoton lineáris funkcionálok

* **7.1.1. Motiváció.** Legyen μ Radon-mérték X -en. Ekkor az

$$F : f \mapsto \int f d\mu$$

megfeleltetés minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ -hez hozzárendel egy komplex számot. Az integrál tulajdonságaiból következik, hogy F lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ -en, továbbá F rendelkezik még egy fontos tulajdonsággal: ha f és g valós értékű függvények és $f \geq g$, akkor $F(f) \geq F(g)$, amit úgy fogunk kifejezni, hogy F *monoton lineáris funkcionál*. Igen fontos tény, hogy ennek az egyszerű állításnak teljesül a megfordítása.

* **7.1.2. Riesz-féle reprezentációs tétel.** Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, és $F : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ monoton lineáris funkcionál. Ekkor létezik egy olyan μ Radon-mérték X -en, amely megegyezik a saját természetes kiterjesztésével, és amelyre

$$(1) \quad F(f) = \int f d\mu \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\text{-re.}$$

Ha κ egy másik Radon-mérték, amelyre szintén teljesül (1), akkor μ a κ természetes kiterjesztése.

Bizonyítás. Legyen

$$\nu(V) = \sup\{F(f) : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X), 0 \leq f \leq 1 \text{ és } \text{spt}(f) \subset V\},$$

ha V nyílt részhalmaza X -nek, és μ a ν -höz tartozó külső mérték. Megmutatjuk, hogy ν premérték a nyílt halmazokon. Tegyük fel, hogy $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$, ahol $V, V_i, i = 1, 2, \dots$ nyílt halmazok, és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \leq f \leq 1$ és $\text{spt}(f) \subset V$. Mivel $\text{spt}(f)$ kompakt, van olyan n , hogy $\text{spt}(f) \subset \cup_{i=1}^n V_i$. Az egység felbontására vonatkozó 11.2.15. tétel szerint léteznek olyan g_1, g_2, \dots, g_n függvények, hogy $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $0 \leq g_i \leq 1$, $\text{spt}(g_i) \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, ha $x \in \text{spt}(f)$. Ebből

$$F(f) = \sum_{i=1}^n F(g_i f) \leq \sum_{i=1}^n \nu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i).$$

A bal oldalon szuprémumot véve, kapjuk, hogy $\nu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i)$.

Ha $\varepsilon > 0$ és V, W nyílt halmazok úgy, hogy $\nu(W) < \infty$ és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \leq f \leq 1$, $\text{spt}(f) \subset V \cap W$ és $F(f) > \nu(V \cap W) - \varepsilon$, akkor ν definíciója értelmében

$$\begin{aligned} \nu(W) &\geq \sup\{F(f) + F(g) : g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X), 0 \leq g \leq 1, \text{spt}(g) \subset W \setminus \text{spt}(f)\} \\ &\geq F(f) + \nu(W \setminus \text{spt}(f)) \geq \mu(V \cap W) + \mu(W \setminus V) - \varepsilon, \end{aligned}$$

így ν premérték a nyílt halmazok osztályán. Ebből következik, hogy minden nyílt halmaz μ -mérhető és X bármely részhalmazának a külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek pontos alsó korlátja.

Legyen most K kompakt részhalmaza X -nek és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \leq f \leq 1$ és $f(x) = 1$, ha $x \in K$. Ha $0 < \alpha < 1$ és $V_{\alpha} = X(f > \alpha)$, akkor $K \subset V_{\alpha}$ és $g \leq f/\alpha$ minden olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ függvényre, amelyre $0 \leq g \leq 1$ és $\text{spt}(g) \subset V_{\alpha}$. Innen

$$\mu(K) \leq \mu(V_{\alpha}) = \nu(V_{\alpha}) \leq \sup_g F(g) \leq \frac{1}{\alpha} F(f),$$

amiből $\alpha \uparrow 1$ határátmenettel

$$(2) \quad \mu(K) \leq F(f) < \infty.$$

Végül, ha V nyílt és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $0 \leq f \leq 1$ és $\text{spt}(f) \subset V$, akkor az Uriszon-lemma 11.2.14. változatát felhasználva egy olyan W nyílt halmazt kapunk, amely tartalmazza $\text{spt}(f)$ -et, de kompakt lezártja V -ben van. Erre

$$\mu(V) \geq \mu(\overline{W}) \geq \mu(W) \geq F(f),$$

amiből

$$\mu(V) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset V, K \text{ kompakt}\}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy μ teljes Radon-mérték X -en. Nyilván μ természetes kiterjesztése önmaga.

Most megmutatjuk, hogy

$$F(f) = \int f d\mu, \quad \text{ha } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X).$$

Mivel f folytonos, nyilván μ -mérhető. Legyen $K = \text{spt}(f)$ és (a, b) egy olyan intervallum, amely tartalmazza f értékkészletét. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$$

felosztását $[a, b]$ -nek, amelyre $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ ($1 \leq i \leq n$). Legyen

$$E_i = K \cap X(y_{i-1} < f \leq y_i).$$

Válasszunk olyan V_i nyílt halmazokat, amelyekre $E_i \subset V_i$, $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n$ és

$$f(x) < y_i + \varepsilon \quad \text{minden } x \in V_i\text{-re.}$$

Az egység felbontásáról szóló 11.2.15. tétel szerint léteznek olyan $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ függvények, hogy $0 \leq g_i \leq 1$, $\text{spt}(g_i) \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, ha $x \in K$. Innen $f = \sum_{i=1}^n g_i f$ és (2) szerint

$$\mu(K) \leq F\left(\sum_{i=1}^n g_i\right) = \sum_{i=1}^n F(g_i).$$

Mivel $g_i f \leq (y_i + \varepsilon)g_i$ és mivel $y_i - \varepsilon < f(x)$, ha $x \in E_i$,

$$\begin{aligned} F(f) &= \sum_{i=1}^n F(g_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)F(g_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)F(g_i) - |a| \sum_{i=1}^n F(g_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \left(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \right) - |a|\mu(K) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \\ &\leq \int f d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon). \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk, hogy $F(f) \leq \int f d\mu$. Alkalmazva ezt $-f$ -re,

$$-F(f) = F(-f) \leq \int (-f) d\mu = - \int f d\mu,$$

ami éppen a másik irányú egyenlőtlenség. Most tetszőleges $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ -re $f = f_1 + if_2$, ahol $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ és így

$$F(f) = F(f_1) + iF(f_2) = \int f_1 d\mu + i \int f_2 d\mu = \int f d\mu.$$

Hátravan még annak igazolása, hogy ha κ egy másik Radon-mérték X -en, amelyre

$$F(f) = \int f d\kappa \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\text{-re,}$$

akkor μ a természetes kiterjesztése κ -nak. Legyen K kompakt részhalmaza X -nek, $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $K \subset V$ nyílt részhalmazt, amelyre $\kappa(V) \leq \kappa(K) + \varepsilon$. Az Uriszon-lemma szerint van olyan $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, hogy

$$0 \leq f \leq 1, \text{ spt}(f) \subset V \text{ és } f(x) = 1, \text{ ha } x \in K.$$

Innen (2) szerint

$$\mu(K) \leq \int f d\mu = F(f) = \int f d\kappa \leq \kappa(V) \leq \kappa(K) + \varepsilon,$$

és így $\mu(K) \leq \kappa(K)$. Felcserélve μ és κ szerepét, kapjuk, hogy $\mu(K) = \kappa(K)$ bármely K kompakt részhalmazára X -nek. Mivel μ és κ Radon-mértékek, megegyeznek a nyílt halmazokon is. Ha a κ -hoz tartozó külső mértéket is κ -val jelöljük, akkor

$$\kappa(A) = \inf \{ \kappa(V) : A \subset V, V \text{ nyílt} \}$$

minden $A \subset X$ -re, így $\kappa(A) = \mu(A)$ minden $A \subset X$ -re, azaz μ a κ természetes kiterjesztése.

* **7.1.3. Példa.** Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, és

$$F_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f dg \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\text{-re.}$$

Ekkor F_g monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ -en, így a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint előáll egy teljes Radon-mérték szerinti integrálként. Mivel 4.5.5. szerint

$$F_g(f) = \int f d\lambda_g \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}\text{-re,}$$

és mivel, mint könnyen ellenőrizhető, λ_g természetes kiterjesztése önmaga, az F_g -hez a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint tartozó teljes Radon-mérték éppen λ_g .

7.2. A Haar-mérték egyértelműsége

Most már eszközeink elegendőek arra hogy bebizonyítsuk, a Haar-mérték lényegében egyértelmű. Az alapgondolat a Fubini-tételt használni úgy, ahogy azt az 5.2.4. lemma bizonyításában tettük. A gondot az a technikai probléma okozza, hogy két Radon-mérték szorzata általában nem Radon-mérték. Ennek megkerülése vált lehetővé az előző pont eredményei segítségével.

* **7.2.1. Lemma.** Legyen μ Radon-mérték az X lokálisan kompakt Hausdorff-téren, ν pedig Radon-mérték az Y lokálisan kompakt Hausdorff-téren. Ekkor minden $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X \times Y)$ függvény $\mu \otimes \nu$ -mérhető.

Bizonyítás. Legyen C a h függvény tartója, $A \subset X$ és $B \subset Y$ pedig kompakt halmazok, amelyekre $C \subset A \times B$. Tekintsük az összes $(x, y) \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y)$ alakú függvények osztályát, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $g_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(Y)$, ha $k = 1, 2, \dots, n$. Mivel ezen függvények megszorításai $A \times B$ -re egy, a konjugáltképzésre zárt algebrát alkotnak, amely szétválasztja $A \times B$ pontjait és tartalmazza a konstans függvényeket, $h|_{(A \times B)}$ a Weierstrass–Stone-tétel miatt ilyen függvények egyenletes határértéke. Innen következik, hogy a h függvény $\mu \otimes \nu$ -mérhető.

* **7.2.2. Lemma.** Legyen G lokálisan kompakt Hausdorff topologikus csoport, μ egy bal Haar-mérték, ν pedig egy jobb Haar-mérték G -n. Ekkor létezik olyan pozitív, valós értékű folytonos k függvény G -n, hogy ha $f, g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$, akkor

- (1) $k(y) \int g d\nu = \int g(yx^{-1}) d\mu(x)$, ha $y \in G$;
- (2) $\int kf d\nu = \int f d\mu$.

Bizonyítás. A Fubini-tételt és az előző lemmát felhasználva,

$$\begin{aligned} \int f d\mu \int g d\nu &= \int \int f(x)g(y) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(yx)g(y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int \int f(yx)g(y) d\nu(y) d\mu(x) = \int \int f(y)g(yx^{-1}) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int f(y) \int g(yx^{-1}) d\mu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Ha rögzítünk egy nemnegatív, nem nulla $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(G)$ függvényt, az (1) összefüggés egy pozitív folytonos k függvényt definiál. Számításunk azt mutatja, hogy erre a k -ra (2) teljesül minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ -re. Azonban a k függvényt a (2) összefüggés egyértelműen jellemzi, így nem függ g választásától. Így azt kapjuk, hogy (1) minden $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ -re fennáll.

* **7.2.3. Tétel.** Legyen G lokálisan kompakt Hausdorff-csoport. Bármely két bal [jobb] Haar-mérték pozitív konstansszorosa egymásnak.

Bizonyítás. A bizonyítást bal Haar-mértékekre végezzük, jobb Haar-mértékekre hasonló. Legyenek μ_1 és μ_2 bal Haar-mértékek, ν pedig jobb Haar-mérték. Az előző lemma szerint léteznek olyan k_1, k_2 pozitív valós értékű folytonos függvények G -n, hogy $\int k_1 f d\mu_1 = \int f d\nu$ és $\int k_2 f d\mu_2 = \int f d\nu$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ -re. Ekkor $h = k_1/k_2$ pozitív valós értékű folytonos függvény, amelyre $\int f d\mu_1 = \int k_2 h f d\nu = \int h f d\mu_2$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ -re. Ha $y \in G$, akkor

$$\begin{aligned} \int h(x)f(x) d\mu_2(x) &= \int f(x) d\mu_1(x) = \int f(yx) d\mu_1(x) \\ &= \int h(x)f(yx) d\mu_2(x) = \int h(y^{-1}x)f(x) d\mu_2(x) \end{aligned}$$

minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$ -re, amiből $h(y^{-1}x) = h(x)$ minden $x \in G$ -re. Így h konstans G -n, és $\int f d\mu_1 = h \int f d\mu_2$. Innen a μ_1 mérték a μ_2 mérték h -szorosa.

7.3. Folytonos lineáris funkcionálok

* **7.3.1. Motiváció.** Legyen μ egy valós (vagy komplex) Radon-mérték X -en. Ekkor az

$$F_\mu : f \mapsto \int f d\mu$$

megfeleltetés folytonos lineáris funkcionál az egyenletes konvergencia $\| \cdot \|_u$ normájával (lásd 11.3.5.) ellátott $\mathcal{K}_\mathbb{R}(X)$ (vagy $\mathcal{K}_\mathbb{C}(X)$) téren. Valóban,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|_u |\mu|(X).$$

Itt is nagyon fontos ennek az egyszerű ténynek a megfordítása.

* **7.3.2. Riesz-féle reprezentációs tétel.** Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér és F folytonos lineáris funkcionál az egyenletes konvergencia normájával ellátott $\mathcal{K}_\mathbb{R}(X)$ (illetve $\mathcal{K}_\mathbb{C}(X)$) téren. Ekkor egy és csak egy teljes valós (illetve komplex) Radon-mérték létezik, amelyre

$$F(f) = \int f d\mu \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_\mathbb{K}(X)\text{-re.}$$

Erre a mértékre $\|F\| = |\mu|(X)$.

Bizonyítás. Legyen

$$G(f) = \sup\{|F(h)| : h \in \mathcal{K}_\mathbb{K}(X), |h| \leq f\},$$

ha $f \in \mathcal{K}_\mathbb{R}(X)$, $f \geq 0$. Nyilván $G(f) \geq 0$ minden f -re, $0 \leq f_1 \leq f_2$ esetén $G(f_2) \geq G(f_1)$ és $G(cf) = cG(f)$, ha $c \geq 0$.

Megmutatjuk, hogy

$$G(f_1 + f_2) = G(f_1) + G(f_2),$$

ha $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_\mathbb{R}(X)$, $f_1, f_2 \geq 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Léteznek olyan $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_\mathbb{K}(X)$ függvények, hogy $|h_1| \leq f_1$, $|h_2| \leq f_2$ és

$$G(f_1) \leq |F(h_1)| + \varepsilon, \quad G(f_2) \leq |F(h_2)| + \varepsilon.$$

Választva olyan α_1, α_2 egységnyi abszolút értékű komplex számokat, amelyekre

$$\alpha_1 F(h_1) = |F(h_1)| \quad \text{és} \quad \alpha_2 F(h_2) = |F(h_2)|,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(f_1) + G(f_2) &\leq |F(h_1)| + |F(h_2)| + 2\varepsilon = F(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq G(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leq G(f_1 + f_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

így $G(f_1 + f_2) \geq G(f_1) + G(f_2)$.

Válasszunk egy olyan $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ függvényt, amelyre $|h| \leq f_1 + f_2$ és legyen $V = X(f_1 + f_2 > 0)$, valamint

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)h(x)}{f_1(x) + f_2(x)}, \quad \text{ha } x \in V,$$

egyébként nulla, és

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)h(x)}{f_1(x) + f_2(x)}, \quad \text{ha } x \in V,$$

egyébként nulla. Ekkor $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$, $h_1 + h_2 = h$, $|h_1| \leq f_1$, $|h_2| \leq f_2$, és így

$$|F(h)| = |F(h_1) + F(h_2)| \leq |F(h_1)| + |F(h_2)| \leq G(f_1) + G(f_2),$$

amiből

$$G(f_1 + f_2) \leq G(f_1) + G(f_2).$$

Ha most $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, akkor legyen

$$G(f) = G(f^+) - G(f^-),$$

és ha $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, akkor legyen

$$G(f_1 + if_2) = G(f_1) + iG(f_2).$$

Egyszerű számolások mutatják, hogy G egy monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ -en, és

$$|F(f)| \leq G(|f|) \leq \|F\| \|f\|_u \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)\text{-re.}$$

Jelölje ν a 7.1.2. Riesz-féle reprezentációs tétel szerint G -hez tartozó teljes Radon-mértéket. Mivel

$$\nu(X) = \sup\{G(f) : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X), 0 \leq f \leq 1\},$$

kapjuk, hogy

$$\nu(X) \leq \|F\|.$$

Másrészt

$$|F(f)| \leq G(|f|) = \int_X |f| d\nu = \|f\|_1, \quad \text{ha } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X).$$

Így F folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ -en a $\|\cdot\|_1$ normára nézve. Mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu)$ -ben, F -nek létezik egyértelmű kiterjesztése $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu)$ -re az \mathbb{L}^1 -norma megtartásával; ezt is F -fel fogjuk jelölni. A $\mu(A) = F(\xi_A)$ definícióval valós vagy komplex mértéket kapunk, amelyre $|\mu(A)| \leq \nu(A)$, tehát $|\mu|(A) \leq \nu(A)$, ha A ν -mérhető. A 6.2.12. Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel szerint létezik olyan g függvény, amelyre $\mu(A) = \int_A g d\nu$ és $|\mu|(A) = \int_A |g| d\nu$, ha A ν -mérhető. Ebből ν -majdnem mindenütt $|g| \leq 1$. Mivel az

$f \mapsto \int f g d\nu = \int f d\mu$ és $f \mapsto F(f)$ folytonos funkcionálok egybeesnek $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu)$ egyszerű függvényein,

$$(1) \quad F(f) = \int_X f g d\nu, \quad \text{ha } f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\nu).$$

Ebből

$$\nu(X) = \int_X |g| d\nu \geq \sup\{|F(f)| : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X), \|f\|_u \leq 1\} = \|F\|,$$

tehát $\nu(X) = \|F\|$ és $|g| = 1$ ν -majdnem mindenütt. Így $|\mu| = \nu$, $g = \frac{d\mu}{d|\mu|}$ és (1) szerint $F(f) = \int f d\mu$, ha $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$.

Végül tegyük fel, hogy két olyan komplex Radon-mérték is létezik, amelyre a fenti előállítás teljesül, és jelölje κ a különbségüket a Borel-halmazokon. Ekkor $\int f d\kappa = 0$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ -re. A 6.2.13. következmény szerint van olyan h Borel-függvény, amelyre $|h| = 1$ és $\kappa(A) = \int_A h d|\kappa|$ minden A Borel-halmazra. Ekkor minden $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ -beli f_n sorozatra

$$|\kappa|(X) = \int_X (\bar{h} - f_n) h d|\kappa| \leq \int_X |\bar{h} - f_n| d|\kappa|$$

és mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(|\kappa|)$ -ban, f_n választható úgy, hogy a jobb oldali kifejezés nullához tartson. Így $|\kappa|(X) = 0$, azaz $\kappa = 0$.

* **7.3.3. Definíció.** Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Jelölje $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$ az összes X feletti teljes komplex Radon-mértékek halmazát. Ha $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$, a μ és ν összegét a következőképpen értelmezzük: Leszűkítjük μ -t és ν -t X Borel-halmazaira, ott összeadjuk őket, majd vesszük az így kapott komplex Radon-mérték természetes kiterjesztését. Az így kapott mértéket $\mu + \nu$ -vel jelöljük: ez nem okoz félreértést. Ha $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor hasonlóan értelmezzük μ konstansszorosát, az $\alpha\mu$ mértéket is; ha $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha\mu$ és μ értelmezési tartománya megegyezik. Egy $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$ mérték normáján a $|\mu|(X)$ számot értjük. Jelölése: $\|\mu\|$. Ha csak valós mértékeket tekintünk, $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(X)$ -et kapjuk.

* **7.3.4. Tétel.** $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(X)$ a 7.3.3.-ban definiált összeadással, skalárszorzással és normával $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ konjugált terével izometrikusan izomorf Banach-tér.

Bizonyítás. A 6.2.16. tétel szerint a 7.3.1.-ben szereplő $\mu \mapsto F_\mu$ leképezés additív és homogén. A 7.3.2. Riesz-féle reprezentációs tétel szerint ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű izometria is. Mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ konjugált tere Banach-tér, $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-tér.

7.4. Korlátos változású függvények

Ebben a fejezetben a monoton és korlátos változású függvények kapcsolatát, valamint a $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ lineáris funkcionáljaival és az \mathbb{R} feletti Radon-mértékekkel való összefüggéseket vizsgáljuk. A 7.1.3. példa alapján azt várjuk, hogy $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ korlátos lineáris funkcionáljait egy alkalmas függvényosztály elemei szerint vett Riemann–Stieltjes-integrálokkal sikerül azonosítani. Ezt a gondolatot dolgozzuk ki a továbbiakban.

7.4.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$ végpontokkal, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény. Az f változását a -tól b -ig a

$$\mathbb{V}_a^b f = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| : x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n, x_0, x_n \in I \right\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Ha $b < a$, akkor megállapodás szerint legyen $\mathbb{V}_a^b f = -\mathbb{V}_b^a f$. Ha $\mathbb{V}_a^b f$ véges, akkor azt mondjuk, hogy f korlátos változású I -n.

7.4.2. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ és $a < b < c$, akkor

- (1) $\mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f = \mathbb{V}_a^c f$;
- (2) $\mathbb{V}_a^c (f + g) \leq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_a^c g$;
- (3) $\mathbb{V}_a^c (\alpha f) = |\alpha| \mathbb{V}_a^c f$.

Bizonyítás. (1) bizonyításához, ha $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$, $x_0, x_n \in I$ és $x_k \leq b \leq x_{k+1}$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(b) - f(x_k)| \\ &\quad + |f(x_{k+1}) - f(b)| + \sum_{j=k+2}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &\leq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f, \end{aligned}$$

amiből

$$\mathbb{V}_a^c f \leq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f.$$

Megfordítva, az $|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ tagot kihagyva az összegzésből,

$$\mathbb{V}_a^c f \geq \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{j=k+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

amiből a jobb oldalon felső határokat véve

$$\mathbb{V}_a^c f \geq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f.$$

(2) és (3) a

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) + g(x_j) - f(x_{j-1}) - g(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|,$$

illetve a

$$\sum_{j=1}^n |\alpha f(x_j) - \alpha f(x_{j-1})| = |\alpha| \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

összefüggésekből következnek.

7.4.3. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ és $f_r = \Re f$, $f_i = \Im f$, akkor

- (1) $\mathbb{V}_a^b f \leq \mathbb{V}_a^b f_r + \mathbb{V}_a^b f_i$;
- (2) $\mathbb{V}_a^b f_r \leq \mathbb{V}_a^b f$ és $\mathbb{V}_a^b f_i \leq \mathbb{V}_a^b f$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

7.4.4. Jordan felbontási tétele. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Ekkor az

$$f_+(x) = \frac{\mathbb{V}_a^x f + f(x)}{2} \quad \text{és} \quad f_-(x) = \frac{\mathbb{V}_a^x f - f(x)}{2}, \quad \text{ha } x \in I$$

függvények monoton növekedők és $f = f_+ - f_-$. Az (f_+, f_-) párt az f Jordan-felbontásának nevezzük.

Bizonyítás. Ha $x, y \in I$, $x \leq y$, akkor a $\mathbb{V}_x^y f \geq |f(x) - f(y)|$ egyenlőtlenségből $\mathbb{V}_x^y f \geq f(y) - f(x)$, tehát

$$f_-(y) - f_-(x) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}_x^y f - f(y) + f(x)) \geq 0;$$

$\mathbb{V}_x^y f \geq f(x) - f(y)$, tehát

$$f_+(y) - f_+(x) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}_x^y f - f(x) + f(y)) \geq 0.$$

7.4.5. Megjegyzések. (1) Az f függvény sokféleképpen felbontható két monoton növekedő függvény különbségére. A lehetséges felbontások között az előző tételben szereplő felbontás „minimális”: $\mathbb{V}_a^b f_+ + \mathbb{V}_a^b f_-$ megegyezik $\mathbb{V}_a^b f$ -fel és nem nagyobb. Könnyen belátható, hogy két minimális felbontás csak konstansban különbözhet.

(2) Az f függvény pontosan akkor folytonos egy pontban, ha f_+ és f_- folytonosak. Ennek a bizonyításában csak nem triviális megmutatni, hogy ha f folytonos $x \in I$ -ben, akkor $y \mapsto \mathbb{V}_a^y f$ is folytonos x -ben. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ -t és egy olyan $\delta > 0$ -t, amelyre $x > t > x - \delta$ esetén $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$, továbbá egy olyan $y_0 < y_1 < y_2 < \dots <$

$y_{n-1} < y_n = x$ beosztást, amelyre $\mathbb{V}_a^x f - \varepsilon/2 < \sum_{j=1}^n |f(y_j) - f(y_{j-1})|$ és $y_{n-1} \geq x - \delta$. Mivel a jobb oldali összeg utolsó tagja kisebb, mint $\varepsilon/2$,

$$\mathbb{V}_a^x f - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n-1} |f(y_j) - f(y_{j-1})| \leq \mathbb{V}_a^{y_{n-1}} f.$$

Ebből $t > y_{n-1}$ esetén $\mathbb{V}_a^x f - \mathbb{V}_a^t f < \varepsilon$, azaz $y \mapsto \mathbb{V}_a^y$ balról folytonos x -ben. A jobb oldali folytonosság hasonlóan látható be.

7.4.6. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Legyen $f_r = \Re f$ és $f_i = \Im f$. Ha $f_{r,+}$ és $f_{r,-}$ az f_r függvény, $f_{i,+}$ és $f_{i,-}$ pedig az f_i függvény Jordan-felbontásai, akkor az $(f_{r,+}, f_{r,-}, f_{i,+}, f_{i,-})$ négyest az f Jordan-felbontásának nevezzük. Ezt gyakran írjuk $f = \sum_{j=0}^3 i^j f_j$ alakban.

* **7.4.7. Tétel.** Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} f < \infty$. Ekkor

- (1) az $f(x+)$ jobb oldali határérték létezik minden $-\infty \leq x < \infty$ pontban és az $f(x-)$ bal oldali határérték létezik minden $-\infty < x \leq \infty$ pontban;
- (2) f szakadási pontjainak halmaza megszámlálható;
- (3) létezik pontosan egy olyan $c \in \mathbb{C}$ és pontosan egy olyan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ normalizált függvény, hogy $f(x) = c + g(x)$ az f minden folytonossági pontjában;
- (4) $x \mapsto \mathbb{V}_{-\infty}^x g$ normalizált függvény és $\mathbb{V}_{-\infty}^x g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f$, ha $-\infty < x \leq \infty$.

Bizonyítás. (1) és (2) következik Jordan felbontási tételéből. (3)-ból f normalizáltjának létezését már beláttuk a 2.2.4. definíció megjegyzés részében. Az unicitáshoz, ha a g és $g^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ normalizált függvények

$$g(x) + c = f(x) = g^*(x) + c^*$$

az f folytonossági pontjaiban, akkor $x \rightarrow -\infty$ határértéket véve $c = c^*$, azaz $g(x) = g^*(x)$ egy sűrű részhalmazán \mathbb{R} -nek. Mivel g és g^* balról folytonosak, megegyeznek.

(4) bizonyításához, ha

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x,$$

akkor

$$\sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{j=1}^n |f(x_j - \delta) - f(x_{j-1} - \delta)| \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f,$$

amiből

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f.$$

Most legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített, és $\varepsilon > 0$. Válasszunk olyan

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$$

pontokat, amelyekre

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| > \mathbb{V}_{-\infty}^x g - \varepsilon.$$

Ha $t_0 < t_1 < \dots < t_m = x_0$, akkor

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x \geq \sum_{k=1}^m |g(t_k) - g(t_{k-1})| + \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|,$$

így a jobb oldali első összeg kisebb, mint ε . Ebből $\mathbb{V}_{-\infty}^{x_0} g \leq \varepsilon$, azaz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{V}_{-\infty}^x g = 0$. Most legyen $x_{n-1} < t < x_n$. Ekkor

$$(6) \quad \sum_{j=1}^{n-1} |g(x_j) - g(x_{j-1})| + |g(t) - g(x_{n-1})| \leq \mathbb{V}_{-\infty}^t g \leq \lim_{s \uparrow x} \mathbb{V}_{-\infty}^s g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x g.$$

Ha $t \uparrow x_n = x$, (6) bal oldala tart az (5) bal oldalához, mivel $g(x) = g(x-)$, és így

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x g - \varepsilon < \lim_{s \uparrow x} \mathbb{V}_{-\infty}^s g,$$

amiből a (6)-beli utolsó egyenlőtlenséggel együtt

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x g = \lim_{s \uparrow x} \mathbb{V}_{-\infty}^s g.$$

* **7.4.8. Riemann–Stieltjes-integrálás.** Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g$ véges. Ha $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, az f -nek g -re vonatkozó,

$$\int_a^b f dg \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x) dg(x)$$

Riemann–Stieltjes-integrálját az

$$\int_a^b f dg = \sum_{j=0}^3 i^j \left(\int_a^b \Re f dg_j + i \int_a^b \Im f dg_j \right)$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a jobb oldalon álló integrálok léteznek, ahol $g = \sum_{j=0}^3 i^j g_j$ a g Jordan-felbontása. A jobb oldalon szereplő, monoton növekedő függvények szerinti Riemann–Stieltjes-integrálokat Szőkefalvi-Nagy [45] könyve, 190. o. szerint értjük, így a 4.5.5. Lebesgue-kritérium használható.

Ha $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor bármely, az f tartóját tartalmazó $[a, b]$ kompakt intervallumra $\int_a^b f dg$ ugyanaz a szám; jelölje ezt $\int f dg$. Legyen

$$F_g(f) = \int f dg, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

A 7.4.2.–7.4.7. pontok eredményei és a monoton növekedő függvény szerinti Riemann–Stieltjes-integrálás tulajdonságai (lásd Szőkefalvi-Nagy [45]) szerint F_g korlátos lineáris funkcionál az uniform normával ellátott $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ téren. Az F_g -hez 7.3.2. szerint tartozó $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ -beli mértéket λ_g -vel jelöljük, és a g -hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mértéknek nevezzük.

* **7.4.9. Tétel.** Legyen $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ és $g(x) = \mu(-\infty, x)$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

- (1) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ normalizált függvény;
- (2) g pontosan akkor folytonos egy $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$;
- (3) $\mathbb{V}_{-\infty}^x g = |\mu|(-\infty, x)$, ha $-\infty < x \leq \infty$;
- (4) ha $\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \mu_j$ a μ Jordan-felbontása, $g = \sum_{j=0}^3 i^j g_j$ pedig a g Jordan-felbontása, akkor $\mu_j = \lambda_{g_j}$ (a Borel-halmazokon);
- (5) $\lambda_g = \mu$.

Megfordítva, legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, amelyre $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} f < \infty$, és legyen g az f normalizáltja. Ekkor

- (6) $\lambda_f = \lambda_g$;
- (7) $g(x) = \lambda_g(-\infty, x)$, ha $x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Ha $x_n \uparrow x$, $x_n, x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(-\infty, x_n) = \mu(-\infty, x_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^n \mu[x_{j-1}, x_j] = \mu(-\infty, x) = g(x),$$

azaz g balról folytonos. Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ és hogy g pontosan akkor folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$.

(3) bizonyításához, ha $x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq x$, akkor

$$\sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |\mu[x_{j-1}, x_j]| \leq |\mu|(-\infty, x),$$

így

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x g \leq |\mu|(-\infty, x),$$

tehát g korlátos változású. Jelölje ν az $x \mapsto \mathbb{V}_{-\infty}^x g$ monoton növekedő normalizált függvényhez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mértéket. Mivel

$$\mu[x, y) = g(x) - g(y), \quad \nu[x, y) = \mathbb{V}_x^y g,$$

a

$$(8) \quad |\mu(A)| \leq \nu(A)$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $A = [x, y)$. Mivel minden nyílt intervallum előállítható megszámlálható sok diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallum egyesítéseként, azt kapjuk, hogy (8) akkor is teljesül, ha A nyílt intervallum. A nyílt halmazok struktúratételét felhasználva, (8) minden nyílt halmazra teljesül, végül felhasználva, hogy μ és ν Radon-mértékek, (8) minden Borel-halmazra teljesül. Így, $|\mu|$ definíciója szerint

$$|\mu|(A) \leq \nu(A),$$

ha A Borel-halmaz. Speciálisan

$$|\mu|(-\infty, x) \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x g,$$

amivel (3)-at bebizonyítottuk.

A g függvény definíciójából g valós és képzetes részére

$$g_r(x) = \mu_r(-\infty, x) \quad \text{és} \quad g_i(x) = \mu_i(-\infty, x).$$

Alkalmazva (3)-at

$$g_{r,+}(x) + g_{r,-}(x) = \mathbb{V}_{-\infty}^x g_r = |\mu_r|(-\infty, x) = \mu_{r,+}(-\infty, x) + \mu_{r,-}(-\infty, x).$$

Hasonló egyenletek írhatók fel az imaginárius részekre is. A két egyenletet összevetve, és felhasználva 2.2.5.-öt kapjuk (4)-et.

Ha most $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor a Riemann–Stieltjes- és a Lebesgue–Stieltjes-integrál összehasonlítására vonatkozó tétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} h dg = \sum_{j=0}^3 i^j \int_{-\infty}^{\infty} h dg_j = \sum_{j=0}^3 i^j \int_{\mathbb{R}} h d\lambda_{g_j} = \int_{\mathbb{R}} h d\mu,$$

amiből Riesz reprezentációs tételének unicitás részét felhasználva (5) következik.

(6) bizonyításához, ha $\sum_{j=0}^3 i^j f_j$ az f függvény, $\sum_{j=0}^3 i^j g_j$ pedig a g függvény Jordan-felbontása, akkor valós részt véve valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal

$$f_0(x) - f_2(x) = g_0(x) - g_2(x) + c$$

az f folytonossági pontjaiban. Ezt az egyenlőséget átrendezve

$$\int_{-\infty}^{\infty} h df_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h dg_2 = \int_{\mathbb{R}} h d\lambda_{f_0+g_2} = \int_{\mathbb{R}} h d\lambda_{g_0+f_2} = \int_{-\infty}^{\infty} h dg_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h df_2$$

minden $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ -re. Hasonlóan járhatunk el a képzetes résszel is. A kapott összefüggéseket visszarendezve és kombinálva,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h dg = \int_{-\infty}^{\infty} h df, \quad \text{ha} \quad h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}),$$

amiből $\lambda_g = \lambda_f$.

(7) bizonyításához, legyen $g = \sum_{j=0}^3 i^j g_j$ a g Jordan-felbontása, és legyen $\mu = \sum_{j=0}^3 i^j \lambda_{g_j}$. Ha $x_n, x \in \mathbb{R}$, a g_j függvények folytonosak az x, x_n pontokban, $x > x_n$ és $x_n \downarrow -\infty$, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x) - g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^3 i^j (g_j(x) - g_j(x_n)) \\ &= \sum_{j=0}^3 i^j \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{g_j}[x_n, x] = \sum_{j=0}^3 i^j \lambda_{g_j}(-\infty, x) = \mu(-\infty, x). \end{aligned}$$

Mivel $g(x)$ és $\mu(-\infty, x)$ is balról folytonos, $g(x) = \mu(-\infty, x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re. (5) szerint $\lambda_g = \mu$, így (7)-et beláttuk.

- * **7.4.10. Feladat [9].** Számítsuk ki az $\int_a^b f dg$ integrált, ha
- (1) $a = 0, b = \pi, f(x) = x, g(x) = \sin x$;
 - (2) $a = -1, b = 1, f$ tetszőleges és $g(x)$ nulla, ha $x \leq 0$, egy, ha $x > 0$;
 - (3) $a = 0, b = 1, x_n, n = 1, 2, \dots$ a $(0, 1)$ racionális számainak egy sorozatba rendezése, $g(x) = \sum_{x_n < x} 1/2^n$ és f korlátos $[0, 1]$ -en.

* **7.4.11. Feladat [7].** Legyen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$, és tegyük fel, hogy $\int_a^b f_n dg$ létezik minden n -re. Mutassuk meg, hogy ha f_n egyenletesen konvergál egy f függvényhez, akkor létezik $\int_a^b f dg$ is és

$$\int_a^b f dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

* **7.4.12. Feladat [8].** Legyenek $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, mindkettő monoton növekedő és folytonos az a, b pontokban. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre a $D = \{x : g(x) = h(x) + c\}$ halmaz sűrű $[a, b]$ -ben, ha minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre $\int_a^b f dg = \int_a^b f dh$.

* **7.4.13. Feladat [6].** Legyen f a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye és $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény. Mikor létezik az $\int_a^b f dg$ integrál?

8. A DIFFERENCIÁLÁS ÉS INTEGRÁLÁS KAPCSOLATA

A 6. fejezetben megismerkedtünk a Radon–Nikodym-derivált fogalmával. Ez a mennyiség a fizikai sűrűségfogalomnak felel meg. Kifejezi, hogy egy halmaz egyik mértéke („tömege”) hogyan kapható meg egy függvénynek (a „sűrűségnek”) a halmaz felett egy másik mennyiség („térfogat”) szerint vett integráljaként. Ennek a fizikai példának az alapján azt várjuk, hogy a Radon–Nikodym-derivált másként is előállítható egy pontban: Vesszünk egy, a pontot tartalmazó halmazt, és képezzük a két mérték ezen halmazon felvett értékének hányadosát. Ha a halmazt összehúzzuk az adott pontra, akkor azt várjuk, hogy ennek a hányadosnak a határértéke a Radon–Nikodym-derivált lesz az adott pontban. Ezt a gondolatot fogjuk kidolgozni a 8.2. pontban. Eredményként a mértékek deriválásának egy olyan „lokális” elméletét nyerjük, amely ugyan nem olyan általános, mint a 6. fejezet eredményei, azonban sokkal jobban alkalmazható. A valós függvényekre való alkalmazásokkal a 8.3. pontban foglalkozunk. Mindehhez az alapot a 8.1. pont önmagukban is igen érdekes eredményei adják.

8.1. Lefedési tételek

* **8.1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy \mathcal{C} egy *lefedési reláció*, ha

$$\mathcal{C} \subset \{(x, S) : x \in S \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, akkor $\mathcal{C}(A)$ -val jelöljük az

$$\{S : (x, S) \in \mathcal{C} \text{ valamely } x \in A\text{-ra}\}$$

halmazt. Azt mondjuk, hogy \mathcal{C} *finom* az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha

$$\inf \{\text{diam}(S) : (x, S) \in \mathcal{C}\} = 0.$$

Azt mondjuk, hogy \mathcal{V} egy μ -Vitali lefedés, ha μ teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, \mathcal{V} egy lefedési reláció, minden $(x, S) \in \mathcal{V}$ -re S Borel-halmaz, \mathcal{V} finom \mathbb{R}^n minden pontjában, és a következő feltétel teljesül:

(1) ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, és \mathcal{C} finom A minden pontjában, akkor van olyan $\{S_i : i \in I\}$ megszámlálható rendszer, amely diszjunkt $\mathcal{C}(A)$ -beli halmazokból áll, és amelyre $\mu(A \setminus \cup_{i \in I} S_i) = 0$.

(Tömören: az A halmaz bármely \mathcal{V} -beli finom lefedéséből kiválasztható megszámlálható diszjunkt majdnem lefedése A -nak.)

A következő tétel egyszerű példát ad Vitali-lefedésre.

* **8.1.2. Tétel.** Legyen μ teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en és legyen $i = 1, 2, \dots$ -re \mathcal{P}_i egy megszámlálható sok diszjunkt Borel-halmazból álló lefedése \mathbb{R}^n -nek. Tegyük fel, hogy \mathcal{P}_1 minden eleme korlátos, \mathcal{P}_i minden tagja előáll \mathcal{P}_{i+1} elemeinek egyesítéseként, és

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup \{ \text{diam}(S) : S \in \mathcal{P}_i \} = 0.$$

Ekkor

$$\mathcal{V} = \{ (x, S) : x \in S \in \mathcal{P}_i \text{ valamely } i = 1, 2, \dots \text{-re} \}$$

egy μ -Vitali lefedés.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, és tekintsük a

$$\mathcal{C}(A) = \{ S : (x, S) \in \mathcal{C} \text{ valamely } x \in A \text{-ra} \}$$

halmazrendszert. Ha \mathcal{C} finom az A minden pontjában, akkor $\mathcal{C}(A)$ lefedi A -t, és így A minden pontja benne van $\mathcal{C}(A)$ egy, a tartalmazásra nézve maximális tagjában, és $\mathcal{C}(A)$ bármely két, a tartalmazásra nézve maximális tagja diszjunkt.

A következő tétel nem ilyen egyszerű és csak a Lebesgue-mértékre vonatkozik, de sokkal jobban használható.

* **8.1.3. Vitali tétele.** Ha \mathcal{V} egy lefedési reláció, S kompakt halmaz minden $(x, S) \in \mathcal{V}$ -re, \mathcal{V} finom minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, és van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy bármely $(x, S) \in \mathcal{V}$ -re S benne van egy $\mathbb{B}(x, r)$ gömbben, amelyre $\lambda^n(S) > \alpha \lambda^n(\mathbb{B}(x, r))$, akkor \mathcal{V} egy λ^n -Vitali lefedés.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, és válasszunk egy A -t tartalmazó, korlátos nyílt V halmazt. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, \mathcal{C} finom az A minden pontjában és $S \subset V$ minden $(x, S) \in \mathcal{C}$ -re. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathcal{C}(A)$ -nak van olyan $\{S_i : i \in I\}$ diszjunkt halmazokból álló megszámlálható részrendszere, amelyre $\lambda^n(A \setminus \cup_{i \in I} S_i) = 0$. Tekintsük a $\mathcal{C}(A)$ összes olyan diszjunkt halmazokból álló \mathcal{H} részrendszereinek Ω osztályát, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

(1) ha $T \in \mathcal{C}(A)$, akkor vagy minden $S \in \mathcal{H}$ -ra $T \cap S = \emptyset$, vagy pedig van olyan $S \in \mathcal{H}$, hogy $T \cap S \neq \emptyset$ és $\text{diam}(T) \leq 2 \text{diam}(S)$.

Ekkor Ω féligrendezett halmaz a tartalmazásra nézve, és ebben a féligrendezett halmazban minden lánccsal felülről korlátos. A Zorn-lemma szerint létezik \mathcal{G} maximális eleme Ω -nak. Legyen

$$\mathcal{K} = \mathcal{C}(A) \cap \{ T : T \cap \cup \mathcal{G} = \emptyset \}.$$

Ha $\mathcal{K} \neq \emptyset$, akkor kiválaszthatunk egy $W \in \mathcal{K}$ -t, amelyre

$$2 \operatorname{diam}(W) \geq \sup\{\operatorname{diam}(T) : T \in \mathcal{K}\}$$

és $\mathcal{G} \cup \{W\} \in \Omega$, ami ellentmond \mathcal{G} maximális voltának. Így $\mathcal{K} = \emptyset$, tehát \mathcal{G} rendelkezik a következő tulajdonsággal:

(2) \mathcal{G} diszjunkt halmazokból áll, és minden $T \in \mathcal{C}(A)$ -hoz van olyan $S \in \mathcal{G}$, amelyre $T \cap S \neq \emptyset$ és $\operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{diam}(S)$.

Ha $S \in \mathcal{C}(A)$, legyen

$$\hat{S} = \bigcup\{T : T \in \mathcal{C}(A), T \cap S \neq \emptyset \text{ és } \operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{diam}(S)\}.$$

A \hat{S} halmazt az S nagyításának nevezzük. Megmutatjuk, hogy van olyan $\beta > 0$, amelyre $\lambda^n(\hat{S}) < \beta \lambda^n(S)$ minden $S \in \mathcal{C}(A)$ -ra. Valóban, legyen $x \in A$, és $(x, S) \in \mathcal{C}$. Ekkor valamely $r > 0$ -ra $S \subset \mathbb{B}(x, r)$ és $\lambda^n(S) > \alpha \lambda^n(\mathbb{B}(x, r))$. Ebből $\operatorname{diam}(S) \leq 2r$ és $\hat{S} \subset \mathbb{B}(x, 5r)$. Így

$$\lambda^n(\hat{S}) \leq \lambda^n(\mathbb{B}(x, 5r)) = 5^n \lambda^n(\mathbb{B}(x, r)) \leq \frac{5^n}{\alpha} \lambda^n(S).$$

Térjünk vissza \mathcal{G} -hez. (2)-ből következik, hogy

$$(3) \quad \cup \mathcal{C}(A) \subset \cup\{\hat{S} : S \in \mathcal{G}\}.$$

Továbbá bármely \mathcal{H} véges részrendszerére \mathcal{G} -nek

$$(4) \quad A \setminus \cup \mathcal{H} \subset \cup\{\hat{S} : S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}\}.$$

Valóban, $\cup \mathcal{H}$ zárt, és mivel \mathcal{C} finom az A minden pontjában, $A \setminus \cup \mathcal{H}$ minden eleme benne van egy olyan T elemében $\mathcal{C}(A)$ -nak, amelyre $T \cap \cup \mathcal{H} = \emptyset$. Így T belemetsz valamely $S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ -ba, amelyre $\operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{diam}(S)$, innen $T \subset \hat{S}$. Mivel $\lambda^n(V) < \infty$, $S \subset V$ és $\lambda^n(S) > 0$ minden $S \in \mathcal{G}$ -re, a \mathcal{G} halmazrendszer megszámlálható, és

$$\sum_{S \in \mathcal{G}} \lambda^n(\hat{S}) \leq \beta \sum_{S \in \mathcal{G}} \lambda^n(S) \leq \beta \lambda^n(V) < \infty.$$

Ebből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan \mathcal{H} véges részrendszere \mathcal{G} -nek, amelyre

$$\sum_{S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}} \lambda^n(\hat{S}) < \varepsilon,$$

innen (4) alapján

$$\lambda^n(A \setminus \cup \mathcal{G}) \leq \lambda^n(A \setminus \cup \mathcal{H}) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, a speciális eset bizonyítását befejeztük.

Az általános eset bizonyításához legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, V_j , $j = 1, 2, \dots$ az \mathbb{R}^n egész csúcspontú, egységnyi oldalú nyílt kockáinak egy sorozatba rendezése, és $A_j = A \cap V_j$. Ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ és \mathcal{C} finom az A minden pontjában, akkor legyen

$$\mathcal{C}_j = \{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{C}, S \subset V_j\}.$$

Alkalmazzuk az első lépést \mathcal{C}_j -re, A_j -re és V_j -re. A kapott $S_{i,j}$ halmazokat egyesítve,

$$\lambda^n(A \setminus \cup_{i,j} S_{i,j}) \leq \lambda^n(A \setminus \cup_{j=1}^{\infty} V_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(A_j \setminus \cup_i S_{i,j}) = 0.$$

8.2. Mértékek lokális deriváltja

* **8.2.1. Definíció.** Legyenek μ és ν teljes Radon-mértékek \mathbb{R}^n -en, \mathcal{V} egy μ -Vitali lefedés. Ha f a $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ valamely részosztályán értelmezett bővített valós értékű függvény és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor használjuk a

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} f(S) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \{f(S) : (x, S) \in \mathcal{V}, \text{diam}(S) < \varepsilon, S \in \text{dmn } f\}$$

jelölést. $(\mathcal{V}) \liminf_{S \rightarrow x} f(S)$ hasonlóan van definiálva. Ha ez a két érték megegyezik, akkor $(\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} f(S)$ -et írunk. Végül a ν mérték μ -re vonatkozó \mathcal{V} -deriváltját a

$$(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) = (\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)}$$

összefüggéssel definiáljuk.

* **8.2.2. Lemma.** Az előző definíció jelölései mellett, tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan Borel-halmaz, amelyre $\nu(A) = 0$. Legyen

$$B = \left\{ x : x \in A, (\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0 \right\}.$$

Ekkor $\mu(A \setminus B) = 0$.

Bizonyítás. Terjesszük ki μ -t külső mértékként \mathbb{R}^n összes részhalmazára. Ha $i = 1, 2, \dots$, legyen P_i azon $x \in A$ -k halmaza, amelyekre

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} > \frac{1}{i}.$$

(Itt legyen $t/0 = \infty$, ha $0 \leq t \leq \infty$.) Rögzítsük i -t és válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t. Mivel $\nu(A) = 0$, van olyan $V \supset A$ nyílt halmaz, amelyre $\nu(V) < \varepsilon$. A

$$\mathcal{C} = \{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, S \subset V, \nu(S)/\mu(S) > 1/i\}$$

lefedési reláció finom P_i minden pontjában, így van olyan $\mathcal{C}(P_i)$ -beli megszámlálható diszjunkt $S_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots$ halmazrendszer, amelyre $\mu(P_i \setminus \cup_j S_{i,j}) = 0$. Ebből

$$\mu(P_i) \leq \mu(P_i \setminus \cup_j S_{i,j}) + \sum_j \mu(S_{i,j}) \leq i \sum_j \nu(S_{i,j}) \leq i\nu(V) < i\varepsilon,$$

ahonnan $\mu(P_i) = 0$. Mivel $A \setminus B \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_i$, azt kapjuk, hogy $\mu(A \setminus B) = 0$.

* **8.2.3. Tétel.** Legyenek μ és ν teljes Radon-mértékek \mathbb{R}^n -en, $\nu = \nu_a + \nu_s$ a ν -nek μ -re vonatkozó Lebesgue-felbontása (a Borel-halmazokon), \mathcal{V} pedig egy μ -Vitali lefedés. Ekkor

(1) $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x)$ létezik μ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re;

(2) $\nu_a(E) = \int_E (\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) d\mu(x)$ minden E Borel-halmazára \mathbb{R}^n -nek;

azaz $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}$ megegyezik a (Borel-halmazokon vett) $\frac{d\nu_a}{d\mu}$ Radon–Nikodym-deriválttal.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\nu \ll \mu$ (a Borel-halmazokon), így $\nu_a = \nu$. A Radon–Nikodym-tétel szerint van olyan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ Borel-függvény, amelyre

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

minden E Borel-halmazára \mathbb{R}^n -nek. Ha megmutatjuk, hogy μ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re $f(x) = (\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x)$, akkor készen vagyunk.

Minden r racionális számhoz legyen $A_r = \{x : x \in \mathbb{R}^n, f(x) < r\}$, és legyen

$$\kappa_r(E) = \int_{E \setminus A_r} (f(x) - r) d\mu(x), \quad \text{ha } E \text{ Borel-halmaz.}$$

Nyilván κ_r Radon-mérték. Mivel $\kappa_r(A_r) = 0$, az előző lemma szerint a

$$B_r = \left\{ x : x \in A_r, (\mathcal{V}) \frac{d\kappa_r}{d\mu}(x) = 0 \right\}$$

halmazra $\mu(A_r \setminus B_r) = 0$. Legyen $P = \cup_r (A_r \setminus B_r)$. Ekkor $\mu(P) = 0$. Legyen $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$ és válasszunk egy olyan r -et, amelyre $r > f(x)$. Ekkor $x \in A_r$ és $x \in B_r$. Mivel

$$\nu(S) - r\mu(S) = \int_S (f(y) - r) d\mu(y) \leq \kappa_r(S)$$

minden $S \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ -re, valamint

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\kappa_r(S)}{\mu(S)} = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \leq r.$$

Ez minden $r > f(x)$ racionális számra igaz, amiből

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \leq f(x).$$

Hasonlóan, a

$$\kappa_r(E) = \int_{E \cap A_r} (r - f(x)) d\mu(x)$$

Radon-mértékeket használva egy olyan Q halmazt kapunk, amelyre $\mu(Q) = 0$ és ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, akkor

$$(\mathcal{V}) \liminf_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \geq f(x).$$

Ezzel beláttuk, hogy a $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}$ és f függvények μ -majdnem mindenütt megegyeznek.

Most legyen $\nu \perp \mu$. Ekkor $\nu_a = 0$ és a 8.2.2. lemma szerint μ -majdnem mindenütt $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0$, így ekkor is teljesül a tétel állítása. Végül az általános esetben, ha $(\mathcal{V}) \frac{d\nu_a}{d\mu}(x)$ és $(\mathcal{V}) \frac{d\nu_s}{d\mu}(x)$ léteznek, akkor $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x)$ is létezik, és

$$(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu} = (\mathcal{V}) \frac{d\nu_a}{d\mu} \quad \mu\text{-majdnem mindenütt,}$$

így igaz a tétel állítása.

* **8.2.4. Megjegyzés.** Az előző tételből, ha μ teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, \mathcal{V} egy μ -Vitali lefedés és f nemnegatív integrálható függvény, akkor

$$(1) \quad (\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(y) d\mu(y) = f(x) \quad \mu\text{-majdnem minden } x \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Valóban, az előző tételt alkalmazva a

$$\nu(A) = \int_A f(y) d\mu(y), \quad \text{ha } A \text{ } \mu\text{-mérhető}$$

összefüggéssel definiált Radon-mértékre, éppen (1)-et kapjuk. A következő tételben ennek az állításnak egy erősebb formáját bizonyítjuk be.

* **8.2.5. Tétel.** Legyen μ teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, \mathcal{V} egy μ -Vitali lefedés, f pedig egy \mathbb{C}^k -beli értékű μ -mérhető függvény, amely minden kompakt halmazon integrálható. Ekkor

$$(\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0$$

μ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re.

Bizonyítás. Válasszunk egy P megszámlálható sűrű részhalmazt \mathbb{C}^k -ban. Ha $p \in P$, legyen

$$\nu_p(E) = \int_E |f(y) - p| d\mu(y), \quad \text{ha } E \text{ } \mu\text{-mérhető.}$$

Ekkor ν_p teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, így 8.2.3. szerint van olyan $X_p \subset \mathbb{R}^n$, hogy

$$(\mathcal{V}) \frac{d\nu_p}{d\mu}(x) = |f(x) - p|, \quad \text{ha } x \notin X_p,$$

és $\mu(X_p) = 0$. Legyen $X = \cup_{p \in P} X_p$. Ekkor $\mu(X) = 0$. Ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $p \in P$, hogy $|f(x) - p| < \varepsilon$, amiből $|f(y) - f(x)| < |f(y) - p| + \varepsilon$. Ebből

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq (\mathcal{V}) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(y) - p| d\mu(y) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

* **8.2.6. Definíció.** Az előző tétel feltételei mellett, azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontokat, amelyekre az előző tételben szereplő (1) összefüggés teljesül, az f függvény (μ, \mathcal{V}) Lebesgue-pontjainak nevezzük.

* **8.2.7. Definíció.** Ha μ teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, \mathcal{V} egy μ -Vitali lefedés, A egy μ -mérhető halmaz és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor a

$$(\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \cap A)}{\mu(S)}$$

határértéket az A halmaz x pontbeli (μ, \mathcal{V}) -sűrűségének nevezzük. Speciálisan, ha $\mu = \lambda^n$, és \mathcal{V} az összes zárt gömbökből áll, akkor a

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\lambda^n(A \cap \mathbb{B}(x, r))}{\lambda^n(\mathbb{B}(x, r))}$$

határértéket az A halmaz x pontbeli Lebesgue-sűrűségének nevezzük.

* **8.2.8. Lebesgue sűrűségi tétele.** Az előző definíció feltételei mellett μ -majdnem minden $x \in A$ -ra

$$(\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(A \cap S)}{\mu(S)} = 1$$

és μ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ -ra

$$(\mathcal{V}) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(A \cap S)}{\mu(S)} = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk 8.2.3.-at a $\nu(B) = \mu(A \cap B)$ mértékre.

8.3. Abszolút folytonos függvények

8.3.1. Definíció. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egy $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *abszolút folytonos függvénynek* nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely I -beli véges $u_1 < v_1 \leq u_2 < v_2 \leq \dots \leq u_n < v_n$ sorozat esetén, ha $\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^n |f(v_i) - f(u_i)| < \varepsilon$.

8.3.2. Tétel. Ha egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ abszolút folytonos, akkor f folytonos és egyenletesen folytonos I -n. Ha $a, b \in I$, akkor $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Ha f Lipschitz-függvény, akkor f abszolút folytonos.

Bizonyítás. Az első két állítás triviális. Választva $\varepsilon = 1$ -hez $\delta > 0$ -t, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{V}_c^d f \leq 1, \text{ ha } a \leq c < d \leq b \text{ és } d - c < \delta.$$

Így $[a, b]$ -t előállítva véges sok δ -nál rövidebb intervallum egyesítéseként, kapjuk, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Az utolsó állítás nyilvánvaló.

8.3.3. Lebesgue tétele monoton függvény deriváltjáról. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, λ_g a g -hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték, $\lambda_{g,a}$ és $\lambda_{g,s}$ pedig ennek a λ -ra vonatkozó Lebesgue-féle felbontása (a Borel-halmazokon). Ekkor a g függvény λ -majdnem mindenütt differenciálható és g' a $\lambda_{g,a}$ -nak λ -ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.

A tétel a valós függvénytan egyik legmeglepőbb és legfontosabb eredménye. Legfontosabb állítása, hogy egy monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható. Ennek egy másik bizonyítása található Szőkefalvi-Nagy [45] könyvében (97. o.).

* **Bizonyítás.** Legyen

$$\mathcal{V} = \{(x, S) : x \in S \subset \mathbb{R}, S \text{ kompakt intervallum és } \lambda(S) > 0\}.$$

Vitali tétele szerint \mathcal{V} egy λ -Vitali lefedés, így a 8.2.3. tétel szerint

$$(\mathcal{V}) \frac{d\lambda_g}{d\lambda}(x) \in \mathbb{R} \quad \lambda\text{-majdnem minden } x \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Rögzítve egy ilyen x pontot, és $(\mathcal{V}) \frac{d\lambda_g}{d\lambda}(x)$ -et c -vel jelölve, minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$(c - \varepsilon)(b - a) \leq \lambda_g[a, b] \leq (c + \varepsilon)(b - a),$$

ha $a \leq x \leq b$ és $0 < b - a < \delta$. Így

$$(1) \quad (c - \varepsilon)(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq (c + \varepsilon)(b - a)$$

teljesül, ha g folytonos a -ban és b -ben. Mivel $g(b) - g(a)$ monoton növekvő függvénye b -nek és monoton csökkenő függvénye a -nak, valamint g folytonossági pontjai sűrűek \mathbb{R} -ben, (1) akkor is teljesül, ha g nem folytonos a -ban vagy b -ben. Így

$$c - \varepsilon \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq c + \varepsilon, \quad \text{ha } 0 < |h| < \delta,$$

azaz $g'(x) = c$. Az állítás többi része a 8.2.3. tételből következik.

8.3.4. Tétel. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g < \infty$, és λ_g a g -hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték, $\lambda_{g,a}$ és $\lambda_{g,s}$ pedig ennek a λ -ra vonatkozó Lebesgue-féle felbontása (a Borel-halmazokon). Ekkor g λ -majdnem mindenütt differenciálható és g' a $\lambda_{g,a}$ -nak a λ -ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja, továbbá

$$\int_a^b |g'| d\lambda \leq \mathbb{V}_a^b g, \quad \text{ha} \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty.$$

* **Bizonyítás.** Legyen $g = \sum_{j=0}^3 i^j g_j$ a g Jordan-felbontása, $\lambda_{g_j,a}$ és $\lambda_{g_j,s}$ pedig a λ_{g_j} -nek λ -ra abszolút folytonos, illetve szinguláris része. Felhasználva a Lebesgue-féle felbontás egyértelműségét, egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\lambda_{g,a} = \sum_{j=0}^3 i^j \lambda_{g_j,a}, \quad \lambda_{g,s} = \sum_{j=0}^3 i^j \lambda_{g_j,s}.$$

Mivel a g_j függvények majdnem mindenütt differenciálhatóak, g is az és

$$\int_B g' d\lambda = \sum_{j=0}^3 i^j \int_B g_j' d\lambda = \sum_{j=0}^3 i^j \lambda_{g_j,a}(B) = \lambda_{g,a}(B),$$

ha B Borel-halmaz, azaz g' a $\lambda_{g,a}$ -nak λ -ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.

Az utolsó állítást elég $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetre bebizonyítani. Bevezetve az $s(x) = \mathbb{V}_{-\infty}^x g$ jelölést, s monoton növekedő függvény és így Lebesgue tételéből

$$\mathbb{V}_a^b g = s(b) - s(a) \geq \int_a^b s'(x) d\lambda(x),$$

másrészt

$$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{V}_x^{x+h} g}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} = |g'(x)|.$$

8.3.5. Newton–Leibniz-formula. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, amelyre $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g < \infty$. A következő feltételek ekvivalensek:

- (1) $g(b) - g(a) = \int_a^b g' d\lambda$ minden $-\infty < a < b < +\infty$ -re;
- (2) $\mathbb{V}_a^b g = \int_a^b |g'| d\lambda$ minden $-\infty < a < b < +\infty$ -re;
- (3) g abszolút folytonos;
- (4) $\lambda_g \ll \lambda$ (a Borel-halmazokon).

* **Bizonyítás.** (1)-ből következik (2), mivel ha $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$, akkor

$$\sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} g' d\lambda \right| \leq \int_a^b |g'| d\lambda,$$

amiből

$$\mathbb{V}_a^b g \leq \int_a^b |g'| d\lambda.$$

A másik irányú egyenlőtlenség az előző tételből következik. (2)-ből (3)-at a

$$|g(v) - g(u)| \leq \mathbb{V}_u^v g = \int_u^v |g'| d\lambda, \quad \text{ha } -\infty < u \leq v < \infty$$

egyenlőtlenség és az integrál abszolút folytonossága felhasználásával kaphatjuk meg. (3)-ból következik, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$-\infty < u_1 < v_1 \leq u_2 < v_2 \leq \dots \leq u_n < v_n < \infty$$

és $\sum_{j=1}^n (v_j - u_j) < \delta$ esetén $\sum_{j=1}^n \mathbb{V}_{u_j}^{v_j} g \leq \varepsilon$. Ebből bármely nyílt V részhalmazára \mathbb{R} -nek, ha $\lambda(V) \leq \delta$, akkor $|\lambda_g|(V) \leq \varepsilon$. Approximációval bármely B Borel-halmazára \mathbb{R} -nek, ha $\lambda(B) \leq \delta$, akkor $|\lambda_g|(B) \leq \varepsilon$, így $\lambda_g \ll \lambda$. Végül (4)-ből következik (1), mivel $\lambda_g = \lambda_{g,a}$, és az előző tétel szerint

$$\lambda_g(a, b) = g(b) - g(a) = \int_a^b g' d\lambda.$$

8.3.6. Tétel. Legyen $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$ és $g(x) = \int_{-\infty}^x f d\lambda$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g = \|f\|_1$, a g függvény abszolút folytonos \mathbb{R} -en és λ -majdnem mindenütt $g' = f$.

* **Bizonyítás.** Legyen $\mu(B) = \int_B f d\lambda$, ha B Borel-halmaz \mathbb{R} -ben. Ekkor μ komplex Radon-mérték, és $g(x) = \mu(-\infty, x)$, így $\mu = \lambda_g$ a Borel-halmazokon. Mivel μ abszolút folytonos λ -ra vonatkozóan, g abszolút folytonos az előző tétel szerint. Mivel f is, és az 8.3.4. tétel szerint g' is μ -nek a λ -ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja, λ -majdnem mindenütt megegyeznek. Végül a $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g = \|f\|_1$ összefüggést az előző tételből határértékképzéssel kapjuk.

→ **8.3.7. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi teljes változásokat:

$$\mathbb{V}_0^{50} e^x, \quad \mathbb{V}_1^2 \ln x, \quad \mathbb{V}_0^{4\pi} \cos x, \quad \mathbb{V}_{-1}^1 (x - x^3).$$

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ függvény milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ értékekre lesz $[-1, 1]$ -en korlátos változású.

* **8.3.9. Feladat [19].** Terjesszük ki az előző két tételt reflexív Banach-térbeli értékű függvényekre. (Egy X Banach-tér reflexív, ha $x \mapsto F_x$ az $(X^*)^*$ -ra képez, ahol $F_x(f) = f(x)$.)

* **8.3.10. Feladat [8].** Definiáljuk a $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^1(\lambda_{[0,1]})$ függvényt úgy, hogy $g(x)$ a $[0, x]$ karakterisztikus függvénye, ha $0 < x < 1$. Mutassuk meg, hogy g Lipschitz-függvény, de sehol sem differenciálható, sőt, még az $f \circ g$ függvények sem differenciálhatóak, ahol $f : \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^1(\lambda_{[0,1]}) \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos lineáris funkcionál.

→ **8.3.11. Feladat [8].** Jelölje C a Cantor-halmazt, és ha $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n/3^n$, $x_n \in \{0, 1\}$, akkor legyen $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$. Ha $x \in [0, 1] \setminus C$, akkor legyen $\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) : t < x, t \in C\}$. Ez a *Lebesgue-féle szinguláris függvény*. Bizonyítsuk be, hogy

- (1) φ monoton növekedő;
- (2) $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(C) = [0, 1]$;
- (3) φ folytonos.

8.3.12. Feladat: Fubini tétele monoton függvényekről [16]. Legyenek $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ monoton növekedő függvények, és tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re. Bizonyítsuk be, hogy λ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ -re $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$. (Lásd Szőkefalvi-Nagy [45].)

8.3.13. Feladat [8]. Adjunk meg olyan $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvényeket, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re, de $f'(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(0)$.

→ **8.3.14. Feladat [9].** Jelölje φ a Lebesgue-féle szinguláris függvényt, és terjesszük ki az egész \mathbb{R} -re úgy, hogy $x < 0$ -ra legyen 0, $x > 1$ -re pedig legyen 1. Legyen $a_n = j/2^k$, $b_n = (j+1)/2^k$, ha $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$. Igazoljuk, hogy

- (1) minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) = f(x) \in \mathbb{R};$$

- (2) f szigorúan monoton növekedő $[0, 1]$ -en;
- (3) f folytonos $[0, 1]$ -en;
- (4) λ -majdnem minden $x \in [0, 1]$ -re $f'(x) = 0$.

→ **8.3.15. Feladat [10].** Adjunk meg olyan nem nulla λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket \mathbb{R} -en, amely szinguláris a Lebesgue-mértékre. Választható-e g úgy, hogy folytonos legyen? Választható-e g úgy, hogy minden nem üres nyílt halmaz mértéke pozitív legyen? Választható-e g úgy, hogy mindkét feltétel teljesüljön?

→ **8.3.16. Feladat [9].** Legyen $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, ha $0 \neq x \in [-1, 1]$ és legyen $f(0) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f mindenütt differenciálható $[-1, 1]$ -en, de a deriváltja nem Lebesgue-integrálható.

* **8.3.17. Feladat [6].** Legyen X Banach-tér, $g : [a, b] \rightarrow X$ egy folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \int_a^x g(t) dt$, $a \leq x \leq b$ függvény differenciálható, és $f'(x) = g(x)$, ha $a \leq x \leq b$.

9. HELYETTESÍTÉSES ÉS PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Ebben a fejezetben a helyettesítéses és parciális integrálás legfontosabb tételeivel foglalkozunk. Mivel a mértékekről komplex mértékekre, monoton függvényekről korlátozott változású függvényekre, valós értékű függvényekről komplex és Banach-térbeli értékű függvényekre történő általánosítások az előző fejezetek eredményei alapján általában könnyen elvégezhetők, itt csak a tételek alapeseteivel foglalkozunk.

9.1. Parciális integrálás

9.1.1. A parciális integrálás tétele Lebesgue–Stieltjes-integrálokra. *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, $-\infty < a < b < \infty$, és tegyük fel, hogy f balról, g pedig jobbról folytonos. Ekkor*

$$\int_{(a,b]} f d\lambda_g + \int_{[a,b)} g d\lambda_f = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. Legyen $S = \{(x, y) : a \leq x < y \leq b\}$, és alkalmazzuk a Fubini-tételt:

$$(\lambda_f \otimes \lambda_g)(S) = \int_{(a,b]} (f(y) - f(a)) d\lambda_g(y) = \int_{(a,b]} f d\lambda_g - f(a)g(b) + f(a)g(a),$$

$$(\lambda_f \otimes \lambda_g)(S) = \int_{[a,b)} (g(b) - g(x)) d\lambda_f(x) = g(b)f(b) - g(b)f(a) - \int_{[a,b)} g d\lambda_f.$$

A két egyenlőséget kivonva egymásból, kapjuk az állítást.

9.1.2. Tétel. *Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan monoton növekedő függvény, amely minden kompakt intervallumon abszolút folytonos. Minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_g = \int_{\mathbb{R}} f g' d\lambda.$$

Bizonyítás. Lebesgue tétele szerint λ -majdnem mindenütt g' megegyezik λ_g -nek a λ -ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjával. Mivel λ -nullmértékű halmazon megváltoztatva g' -t, a jobb oldal nem változik, a Radon–Nikodym-tételből kapjuk, hogy (1) két oldala egyszerre létezik és egyenlő, ha f Borel-függvény.

Most tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Ekkor van olyan f^* Borel-függvény, amely λ_g -majdnem mindenütt egyenlő f -fel. Válasszunk egy B Borel-halmazt, amely lefedi az $\mathbb{R}(f \neq f^*)$ halmazt, és amelyre $\lambda_g(B) = 0$. Nyilván λ -majdnem minden $x \in B$ -re $g'(x) = 0$, így

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_g &= \int_B f d\lambda_g + \int_{\mathbb{R} \setminus B} f^* d\lambda_g \\ &= \int_B f g' d\lambda + \int_{\mathbb{R} \setminus B} f^* g' d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f g' d\lambda. \end{aligned}$$

Megfordítva, ha az $f g'$ függvény λ -integrálja létezik, akkor legyen B olyan Borel-halmaz, amely lefedi az $A = \mathbb{R}(g' = 0)$ halmazt, de $\lambda(B \setminus A) = 0$, továbbá $f g'$ megszorítása és g' megszorítása $\mathbb{R} \setminus B$ -re Borel-függvény. Legyen

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus B, \\ 0, & \text{ha } x \in B. \end{cases}$$

Ekkor f^* Borel-függvény, mert $\mathbb{R} \setminus B$ -n megegyezik $f g'/g'$ -vel, továbbá

$$\lambda_g(B) = \int_B g' d\lambda = 0,$$

így az f függvény λ_g -mérhető és a (2) számolás visszafelé elvégezhető.

9.1.3. A parciális integrálás tétele Lebesgue-integrálokra. Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények abszolút folytonosak $[a, b]$ -n. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és

$$\int_a^b f g' d\lambda + \int_a^b g f' d\lambda = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. Kombináljuk az előző két tételt, vagy alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát $f g$ -re.

9.1.4. Leibniz-szabály. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) teljes σ -véges mértéktér, $-\infty < a < b < \infty$, $I = [a, b]$ és $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, amelyre az $y \mapsto f(x, y)$ függvény abszolút folytonos I -n μ -majdnem minden $x \in X$ -re, és a $\frac{\partial f}{\partial y}$ függvény $\mu \otimes \lambda$ -integrálható $X \times I$ -n. Ekkor a

$$g(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

függvény abszolút folytonos I -n, és λ -majdnem minden $y \in I$ -re

$$\frac{d}{dy} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x).$$

A tétel azt mutatja, hogy igen általános feltételek mellett egy paramétertől függő függvény integrálja differenciálható a paraméter szerint, és a deriváltat a függvény paraméter szerinti parciális deriváltjának integrálásával számolhatjuk ki, azaz a differenciálás és az integrálás felcserélhetőek.

Bizonyítás. Legyen λ -majdnem minden $y \in I$ -re

$$h(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x).$$

Ekkor a Fubini-tétel szerint h az I -n λ -integrálható, és

$$\begin{aligned} \int_a^t h(y) d\lambda(y) &= \int_a^t \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x) d\lambda(y) = \int_X \int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\lambda(y) d\mu(x) \\ &= \int_X (f(x, t) - f(x, a)) d\mu(x) = g(t) - g(a). \end{aligned}$$

Ebből g abszolút folytonos I -n, és λ -majdnem minden $y \in I$ -re $g'(y) = h(y)$.

→ **9.1.5. Feladat [8].** Legyen

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \leq -1, \\ 2, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki az alábbi Lebesgue–Stieltjes-integrálokat:

- (1) $\int_{-2}^2 x d\lambda_g(x)$,
- (2) $\int_{-2}^2 x^2 d\lambda_g(x)$,
- (3) $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) d\lambda_g(x)$.

9.2. Helyettesítéses integrálás egyváltozós függvényekre

9.2.1. Definíció. Legyen μ véges mérték X -en. Egy μ -majdnem mindenütt értelmezett, μ -mérhető \mathbb{R}^n -beli értékű g függvény eloszlásfüggvényén a

$$h(x) = \mu X(g < x), \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük.

9.2.2. Tétel. Legyen (X, \mathcal{A}, μ) véges mértéktér, és g egy μ -majdnem mindenütt értelmezett μ -mérhető \mathbb{R}^n -beli értékű függvény, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy Borel-függvény. Jelölje g eloszlásfüggvényét h . Ekkor, ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, úgy létezik a másik is, és

$$\int_X f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_h^n.$$

A tétel nagyon fontos a valószínűségszámításban, mivel mutatja, hogy egy valószínűségi változó jellemzői (várható érték, szórás, momentumok stb.) kifejezhetők az eloszlásával. A leggyakrabban alkalmazott $n = 1$, $f(x) = x$ esetet könnyű szemléltetni, ha X a $[0, \mu(X)]$ intervallum a Lebesgue-mértékkel: mivel $\int g$ csak a g nívóhalmazainak mértékétől függ, de nem függ azok elhelyezkedésétől, a nívóhalmazokat jobbra eltolva, feltehetjük, hogy g monoton növekedő. Ekkor h lényegében a g inverze, és a jobb oldalon a g alatti területnek az inverz szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrállal való kifejezése áll.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{B} az \mathbb{R}^n Borel-halmazainak osztálya. Könnyű látni, hogy a $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B))$ összefüggéssel definiált halmazfüggvény mérték \mathcal{B} -n. A mérték folytonossága miatt h minden változójában balról folytonos, és ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, akkor

$$\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \cdots \Delta_{[a_n, b_n]}^{(n)} h = \mu(g^{-1}[a, b]) \geq 0,$$

azaz λ_h^n értelmezve van és megegyezik ν -vel a balról zárt, jobbról nyílt intervallumokon. Egy tetszőleges $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz legyen V_k azon diszjunkt $[u, v) \subset V$ intervallumok megszámlálható uniója, amelyekre

$$u = \left(\frac{j_1}{2^k}, \frac{j_2}{2^k}, \dots, \frac{j_n}{2^k} \right) \quad \text{és} \quad v = \left(\frac{j_1 + 1}{2^k}, \frac{j_2 + 1}{2^k}, \dots, \frac{j_n + 1}{2^k} \right)$$

valamely $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ -re. A ν és λ_h^n mértékek nyilván megegyeznek a V_k halmazokon, így a mérték folytonossága miatt a nyílt halmazokon is. Mivel az 1.3.6. tétel szerint ν is Radon-mérték, így ν és λ_h^n egybeesnek a Borel-halmazokon. Ha most $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív egyszerű Borel-függvény y_1, \dots, y_m értékekkel, akkor

$$\begin{aligned} \int_X f \circ g \, d\mu &= \sum_{i=1}^m y_i \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^n(f = y_i))) = \sum_{i=1}^m y_i \nu(\mathbb{R}^n(f = y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \lambda_h(\mathbb{R}^n(f = y_i)) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_h. \end{aligned}$$

Ebből az approximációs lemma és Beppo Levi tétele miatt kapjuk az állítást nemnegatív, végül az integrál definíciója miatt tetszőleges Borel-függvényekre.

9.2.3. Helyettesítéssel integrálás Lebesgue–Stieltjes-integrálokra. Tegyük fel, hogy $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény és $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges függvény. Ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy g homeomorfizmus, így $g(\mathbb{R})$ egy nyílt intervallum. Ha $A \subset g(\mathbb{R})$ egy intervallum, az a és b végpontjai $g(\mathbb{R})$ -ben vannak és folytonossági pontjai h -nak, akkor $g^{-1}(b)$ és $g^{-1}(a)$ folytonossági pontjai $h \circ g$ -nek és

$$h(b) - h(a) = h(g(g^{-1}(b))) - h(g(g^{-1}(a))),$$

így

$$(2) \quad \lambda_h(A) = \lambda_{h \circ g}(g^{-1}(A)).$$

Ebből a mérték folytonossága miatt következik, hogy (2) akkor is teljesül, ha $A \subset g(\mathbb{R})$ tetszőleges nyílt intervallum, sőt, akkor is, ha tetszőleges nyílt halmaz. Felhasználva, hogy λ_h és $\lambda_{h \circ g}$ Radon-mértékek, (2) minden $A \subset g(\mathbb{R})$ Borel-halmazra teljesül. Most legyen $B \subset \mathbb{R}$ egy Borel-halmaz, és f a B karakterisztikus függvénye. Ekkor (1) bal oldala $\lambda_{h \circ g}(g^{-1}(B \cap g(\mathbb{R})))$, a jobb oldala pedig $\lambda_h(B \cap g(\mathbb{R}))$, így (2) szerint f -re teljesül (1). Ebből a szokásos approximációs eljárással kapjuk, hogy minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvényre a két integrál egyszerre létezik és teljesül (1).

Most tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Ekkor létezik olyan $C \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz és $k : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvény, amelyre $\lambda_{h \circ g}(C) = 0$ és $f(g(x)) = k(x)$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Ebből $g(C) = D$ Borel-halmaz, $\lambda_h(D) = 0$ és az

$$l(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \notin g(\mathbb{R}), \\ k(g^{-1}(y)), & \text{ha } y \in g(\mathbb{R}) \end{cases}$$

függvény Borel-függvény, amelyre

$$(3) \quad l(y) = f(y), \quad \text{ha } y \in g(\mathbb{R}) \setminus D,$$

azaz $l(g(x)) = f(g(x))$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus C$ teljesül, így

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{\mathbb{R}} l \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{g(\mathbb{R})} l \, d\lambda_h = \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h.$$

Megfordítva, ha (1) jobb oldala létezik, akkor választva egy $D \subset g(\mathbb{R})$ Borel-halmazt és egy $l : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvényt úgy, hogy $\lambda_h(D) = 0$ és (3) teljesüljön, a (4) számolás visszafelé elvégezhető.

A következő célunk az, hogy bebizonyítsuk a helyettesítéses integrálás szokásos formulájának egy, a Lebesgue-integrálokra vonatkozó igen általános változatát. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára és egy definícióra.

* **9.2.4. Lemma.** *Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, λ -majdnem mindenütt differenciálható függvény, és $\alpha > 1$. Ekkor g' mérhető és léteznek E_1, E_2, \dots korlátos mérhető halmazok és c_1, c_2, \dots valós számok úgy, hogy*

- (1) $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E = \mathbb{R}(g' \neq 0)$;
- (2) $g|E_n$ kölcsönösen egyértelmű;
- (3) $\alpha^{-1}c_n \leq |g'(x)| \leq c_n\alpha$, ha $x \in E_n$;
- (4) $\alpha^{-1}c_n|x - y| \leq |g(x) - g(y)| \leq \alpha c_n|x - y|$, ha $x, y \in E_n$.

Bizonyítás. Mivel

$$g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + 1/n) - g(x)}{1/n}$$

λ -majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ -re, a g' derivált λ -mérhető. Válasszunk olyan $\varepsilon > 0$ -t, amelyre $\alpha^{-1} + \varepsilon < 1 < \alpha - \varepsilon$. Minden i természetes számra, j egész számra és r pozitív racionális számra legyen $E(r, i, j)$ azon $x \in E$ valós számok halmaza, amelyekre

- (5) $r(\alpha^{-1} + \varepsilon) \leq |g'(x)| \leq (\alpha - \varepsilon)r$;
 $|g(z) - g(x) - g'(x)(z - x)| \leq \varepsilon r|z - x|$, ha $|z - x| \in \mathbb{Q}$ és $|z - x| < 1/i$;
 $|x - j/i| \leq 1/(2i)$.

Az $E(r, i, j)$ halmazok mérhetőek, mivel megszámlálható sok mérhető halmaz metszeteként állnak elő. Továbbá, ha $x \in E(r, i, j)$, akkor (5) minden olyan $z \in \mathbb{R}$ -re teljesül, amelyre $|z - x| \leq 1/i$, mert mindkét oldal folytonosan függ z -től. Az $E(r, i, j)$ -k egyesítése nyilván E , így $c_n = r$ választással (1) és (3) teljesül. Most rögzítsük r, i, j -t. Ha $x, y \in E(r, i, j)$, akkor $|x - y| \leq 1/i$, így $|g(y) - g(x)| \leq |g'(x)(y - x)| + \varepsilon r|y - x| \leq \alpha r|y - x|$, $|g(y) - g(x)| \geq |g'(x)(y - x)| - \varepsilon r|y - x| \geq \alpha^{-1}r|y - x|$, azaz teljesül (2) és (4).

9.2.5. Definíció. Ha X és Y halmazok, egy $g : X \rightarrow Y$ függvény *multiplicitásán* azt az $N_g : Y \rightarrow [0, \infty]$ függvényt értjük, amelynek értéke egy $y \in Y$ helyen $X(g = y)$ elemeinek száma. (Ez lehet esetleg ∞ is.)

9.2.6. Helyettesítéses integrálás Lebesgue-integrálokra. *Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos függvény, A korlátos Lebesgue-mérhető részhalmaza \mathbb{R} -nek és $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy tetszőleges függvény. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$(1) \quad \int_A (f \circ g) \cdot |g'| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A} d\lambda.$$

Továbbá, ha $-\infty < a < b < \infty$ és az $y \mapsto f(y)N_{g|_{[a,b]}}(y)$ leképezés λ -integrálja létezik, akkor

$$(2) \quad \int_a^b (f \circ g) \cdot g' d\lambda = \int_{g(a)}^{g(b)} f d\lambda.$$

A tétel a helyettesítéses integrálás szokásos formulájának messzemenő általánosítása. A második formulában, ha g kölcsönösen egyértelmű, a $g(a) < g(b)$ eset az értékészlet pozitív, a másik eset az értékészlet negatív irányításának felel meg. Ha g nem kölcsönösen egyértelmű, a jobb oldal nem függ f -nek $g([a, b])$ azon pontjaiban felvett értékétől, amelyek nem esnek $g(a)$ és $g(b)$ közé. Ez azért van, mert ezeket a pontokat g „ugyanannyiszor futja be” növekedve, mint csökkenve, és így az integrálból kiesnek. Az első formula viszont irányításmentes, így ebben g' helyére a bal oldalon $|g'|$ kerül, és az egyes pontok többször történő befutását, az irány figyelembevétele nélkül az $N_{g|_A}$ multiplicitás reprezentálja.

* **Bizonyítás.** Válasszunk egy A -t tartalmazó I kompakt intervallumot. (1) bizonyításával kezdjük. A bizonyítást több lépésben végezzük.

Az első lépésben tegyük fel, hogy $B \subset A$, $\lambda(B) = 0$ és legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha

$$u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq \dots \leq u_n \leq v_n$$

I -beli számok, akkor $\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \delta$ esetén $\sum_{i=1}^n |g(v_i) - g(u_i)| \leq \varepsilon$. Fedjük le δ -nál kisebb összhosszúságú $[x_j, y_j]$, $j = 1, 2, \dots$ intervallumrendszerrel B -t. Az $[x_j, y_j]$, $j = 1, 2, \dots$, m intervallumokat kisebb intervallumokra felbontva, olyan

$$z_1 \leq w_1 \leq z_2 \leq w_2 \leq \dots \leq z_{n_m} \leq w_{n_m}$$

számokat kapunk, amelyekre

$$\bigcup_{j=1}^m [x_j, y_j] = \bigcup_{i=1}^{n_m} [z_i, w_i].$$

A $z_i \leq u_i \leq v_i \leq w_i$ -t úgy választva, hogy $|g(v_i) - g(u_i)|$ maximális legyen, azt kapjuk, hogy

$$\lambda\left(g\left(\bigcup_{j=1}^m [x_j, y_j]\right)\right) \leq \varepsilon.$$

Innen $m \rightarrow \infty$ határátmenettel $\lambda(g(B)) \leq \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, $\lambda(g(B)) = 0$.

A második lépésben tegyük fel, hogy $B \subset A$ ($g' = 0$). Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ -t és egy $V \supset B$ nyílt halmazt, amelyre $\lambda(V) < \lambda(B) + \varepsilon$. Mivel

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, [x - r, x + r]) : x \in \mathbb{R}, r > 0 \right\}$$

Vitali-lefedés, így a B -t finoman lefedő

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \left\{ (x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, S \subset V, |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon|y - x|, \text{ ha } y \in S \right\}$$

lefedési relációból kiválasztható egy (x_i, S_i) , $i = 1, 2, \dots$ diszjunkt rendszer, amelyre $\lambda(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i) = 0$. Ekkor $\lambda(g(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i)) = 0$ és $\lambda(g(S_i)) \leq \varepsilon \lambda(S_i)$. Ebből

$$\lambda(g(B)) \leq \lambda(g(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i)) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(g(S_i)) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i) \leq \varepsilon \lambda(V) \leq \varepsilon \lambda(B) + \varepsilon^2,$$

és így $\lambda(g(B)) = 0$.

A harmadik lépésben tegyük fel, hogy f egy λ -mérhető

$$B \subset \{x : x \in A, g'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0\}$$

halmaz $g(B)$ képének a karakterisztikus függvénye. Legyen $\alpha > 1$. Az előző lemma felhasználásával olyan B_1, B_2, \dots diszjunkt, mérhető, korlátos halmazokat és c_1, c_2, \dots valós számokat kaphatunk, amelyekre

$$(3) \quad \cup_{i=1}^{\infty} B_i = B;$$

$$(4) \quad g|_{B_i} \text{ kölcsönösen egyértelmű};$$

$$(5) \quad \alpha^{-1} c_i \leq |g'(x)| \leq \alpha c_i;$$

$$(6) \quad \alpha^{-1} c_i |y - x| \leq |g(y) - g(x)| \leq \alpha c_i |y - x|, \text{ ha } x, y \in B_i.$$

Mivel az 1.3.5. tétel szerint a B_i halmaz előáll egy σ -kompakt és egy nulla mértékű halmaz egyesítéseként, az első lépés alapján a $g(B_i)$ halmaz λ -mérhető. (5)-ből

$$\alpha^{-1} c_i \lambda(B_i) \leq \int_{B_i} |g'(x)| d\lambda(x) \leq \alpha c_i \lambda(B_i),$$

(6)-ból pedig, a Lipschitz-függvényekre vonatkozó 2.4.7. lemmát alkalmazva $g|_{B_i}$ -re és $(g|_{B_i})^{-1}$ -re,

$$\alpha^{-1} c_i \lambda(B_i) \leq \lambda(g(B_i)) \leq \alpha c_i \lambda(B_i).$$

Összevetve ezt a két egyenlőtlenséget,

$$\alpha^{-2} \lambda(g(B_i)) \leq \int_{B_i} |g'| d\lambda \leq \alpha^2 \lambda(g(B_i)).$$

Összegezve i -re,

$$\alpha^{-2} \int_{\mathbb{R}} N_{g|B} d\lambda \leq \int_B |g'| d\lambda \leq \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} N_{g|B} d\lambda.$$

Ebből (1)-et kapjuk, ha $\alpha \downarrow 1$.

A negyedik lépésben tegyük fel, hogy f egy $T \subset g(A)$ mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, és legyen $B = g^{-1}(T) \cap A$. Ha T Borel-halmaz, akkor $g^{-1}(T)$ is az, így B mérhető. Az eddigi lépéseket összegezve,

$$\int_A (f \circ g) \cdot |g'| d\lambda = \int_B |g'| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} N_{g|B} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A} d\lambda.$$

Ebből mindkét oldal nulla, ha $T \subset g(A)$ és $\lambda(T) = 0$, így (1) fennáll, ha T mérhető részhalmaza $g(A)$ -nak. A szokásos approximációs eljárással kapjuk, hogy (1) fennáll, ha $f|g(A)$ mérhető függvény.

Az ötödik lépésben megmutatjuk, hogy van olyan $C \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $g|C$ kölcsönösen egyértelmű és amelyre $\lambda(g(A) \setminus g(C)) = 0$. A

$$B = \{x : x \in A, g'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0\}$$

halmazhoz és egy tetszőleges $\alpha > 1$ -hez válasszunk a harmadik lépés szerint B_i halmazokat. Minden i -re válasszunk egy olyan σ -kompakt $D_i \subset B_i$ halmazt, amelyre $\lambda(B_i \setminus D_i) = 0$. Legyen $D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$, $C_i = D_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} g^{-1}(g(D_j))$, és legyen $C = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Világos, hogy a C_i halmazok Borel-halmazok, $g|C$ kölcsönösen egyértelmű, és $g(D) = g(C)$. A $B \setminus D$ halmaz nulla mértékű, és

$$g(A) \setminus g(C) \subset g(A \setminus B) \cup g(B \setminus D).$$

Innen

$$\begin{aligned} \lambda(g(A) \setminus g(C)) &\leq \lambda(g(A \setminus B)) + \lambda(g(B \setminus D)) \\ &= \int_{A \setminus B} |g'| d\lambda + \int_{B \setminus D} |g'| d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Hatodik lépésként, hogy (1) bizonyítása teljes legyen, meg kell mutatnunk, hogy ha (1) valamelyik oldala létezik, akkor $f|g(A)$ mérhető. Legyen

$$B = \{x : x \in A, g'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0\}.$$

Tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Válasszuk a C halmazt az ötödik lépés szerint. Mivel $f \circ g$ a B felett megegyezik az

$$\frac{(f \circ g) \cdot |g'|}{|g'|}$$

függvénnyel, $f \circ g|B$ mérhető. Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R} -nek. Mivel

$$W = C \cap (f \circ g)^{-1}(V)$$

mérhető, úgy, mint a harmadik lépésben, kapjuk, hogy $g(W)$ is mérhető. Mivel

$$g(W) \subset g(A) \cap f^{-1}(V) \subset g(W) \cup (g(A) \setminus g(C)),$$

az előző lépés alapján azt kapjuk, hogy $g(A) \cap f^{-1}(V)$ is mérhető, azaz $f|g(A)$ mérhető.

Ha (1) jobb oldala létezik, akkor a negyedik lépés szerint $N_{g|A}$ mérhető és majdnem mindenütt véges. Az $\{y : N_{g|A}(y) = i\}$ halmaz karakterisztikus függvényét h_i -vel jelölve,

$$f(y) = f(y)N_{g|A}(y) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i(y)}{i}$$

majdnem minden $y \in g(A)$ -ra, így $f|g(A)$ mérhető.

Utolsó lépésként (1)-ből bebizonyítjuk (2)-t. Tegyük fel, hogy $g(a) \leq g(b)$, és tekintsük az

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x : a < x < b, g'(x) > 0\}, \\ A_2 &= \{x : a < x < b, g'(x) < 0\}, \\ A_3 &= [a, b] \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

halmazokat. Alkalmazva (1)-et $f \equiv 1$ -gyel, azt kapjuk, hogy majdnem minden $y \in \mathbb{R}$ -re

$$N_{g|A_1 \cup A_2}(y) < \infty \quad \text{és} \quad N_{g|A_3}(y) = 0.$$

Ha egy $y \in \mathbb{R}$ -re ezek a feltételek teljesülnek, akkor

$$N_{g|A_1}(y) - N_{g|A_2}(y)$$

1-gyel egyenlő, ha $g(a) < y < g(b)$, és 0 egyébként. Végül, (1)-et tetszőleges olyan f -re alkalmazva, amelyre létezik az $f \cdot N_{g|A_1 \cup A_2}$ függvény λ -integrálja, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A_1} \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A_2} \, d\lambda \\ &= \int_{A_1} (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda - \int_{A_2} (f \circ g) \cdot (-g') \, d\lambda \\ &= \int_{A_1 \cup A_2} (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda = \int_a^b (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda. \end{aligned}$$

9.3. Helyettesítéses integrálás többváltozós függvényekre

Ennek a résznek a fő eredménye az úgynevezett felszínképlet. Ez magába foglalja és általánosítja mindazokat a formulákat, amelyeket az ívhossz, felszín, görbe menti és felületi integrálok kiszámítására szokás felhasználni. Levezethető belőle egy integráltranszformációs formula is. Bizonyítás nélkül ismertetünk még két eredményt: a felszínképlet duálisát, az úgynevezett kofelszínképletet, és a Gauss–Osztrogradszkij-formulát. Ezek bizonyítása — ilyen általános feltételek mellett — túl messzire vezetne.

A felszínképlet bizonyításához is nehéz út vezet. Ennek egyik fontos állomásaként először azt bizonyítjuk be, hogy \mathbb{R}^n -ben a Lebesgue-mérték és az n -dimenziós Hausdorff-mérték egybeesik.

* **9.3.1. Steiner-szimmetrizáció.** Legyen V egy $(n-1)$ -dimenziós altere \mathbb{R}^n -nek és bármely $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazhoz rendeljük hozzá S -nek a V szerinti szimmetrizáltját, azaz azt a T halmazt, amelyre minden V -re merőleges L egyenesre vagy $L \cap S = \emptyset$ és $L \cap T = \emptyset$, vagy $L \cap S \neq \emptyset$ és $L \cap T$ egy zárt szakasz, amelynek középpontja V -ben van, és amelyre $\chi^1(L \cap T) = \chi^1(L \cap S)$.

* **9.3.2. Tétel.** Az előző pont jelöléseivel, ha S kompakt konvex halmaz, akkor

- (1) $\text{diam}(T) \leq \text{diam}(S)$;
- (2) T is kompakt konvex halmaz;
- (3) $\lambda^n(S) = \lambda^n(T)$;
- (4) ha u egy, a V -re ortogonális egységvektor, és $\rho_u(x) = x - 2\langle x, u \rangle u$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ a V -re történő tükrözés, akkor $\rho_u(T) = T$;
- (5) ha $S \subset \mathbb{B}(0, r)$, akkor $T \subset \mathbb{B}(0, r)$ és

$$(\mathbb{S}(0, r) \setminus S) \cup \rho_u(\mathbb{S}(0, r) \setminus S) = \mathbb{S}(0, r) \setminus T.$$

Itt, mivel S kompakt konvex halmaz, minden V -re merőleges L egyenesre $S \cap L$, ha nem üres, akkor zárt szakasz.

Bizonyítás. A (4)-ben említett u egységvektort használva, ha $x_1, x_2 \in T$ és $x_i = \alpha_i u + v_i$, ahol $v_i \in V$ és $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), akkor léteznek olyan $\beta_i \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$y_i = (\beta_i + \alpha_i)u + v_i \in S \quad \text{és} \quad z_i = (\beta_i - \alpha_i)u + v_i \in S.$$

E között a négy pont között van kettő, amelyek távolsága nem kisebb, mint x_1 és x_2 távolsága, így kapjuk (1)-et. Hasonlóan, ha $0 \leq \gamma \leq 1$, akkor

$$y = \gamma y_1 + (1 - \gamma)y_2 \quad \text{és} \quad z = \gamma z_1 + (1 - \gamma)z_2$$

az S -ben vannak, mindketten a

$$\{\delta u + \gamma v_1 + (1 - \gamma)v_2 : \delta \in \mathbb{R}\}$$

egyenesen, és távolságuk $2 \cdot |\gamma \alpha_1 + (1 - \gamma)\alpha_2|$, így

$$x = \gamma x_1 + (1 - \gamma)x_2 = (\gamma \alpha_1 + (1 - \gamma)\alpha_2)u + \gamma v_1 + (1 - \gamma)v_2 \in T,$$

azaz T konvex.

Most tegyük fel, hogy $x_n = \alpha_n u + v_n \in T$ és $x_n \rightarrow x$. Ekkor léteznek olyan $\beta_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$y_n = (\beta_n + \alpha_n)u + v_n \in S \quad \text{és} \quad z_n = (\beta_n - \alpha_n)u + v_n \in S.$$

Alkalmas részsorozatokat választva, feltehetjük, hogy $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\beta_n \rightarrow \beta$ és $v_n \rightarrow v$. Ekkor

$$y = (\beta + \alpha)u + v \in S \quad \text{és} \quad z = (\beta - \alpha)u + v \in S,$$

így $\alpha u + v \in T$. A belső szorzat folytonossága miatt

$$\langle x, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha,$$

és

$$x - \alpha u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n u + v_n - \alpha u) = v,$$

így $x = \alpha u + v \in T$.

(3) egy alkalmas forgatás után, amely V -t az $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n = 0\}$ hipersíkba viszi, a Fubini-tételből következik. (4) és (5) nyilvánvaló számolással adódnak.

* **9.3.3. Izodiametrikus egyenlőtlenség.** Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, akkor

$$\lambda^n(A) \leq \frac{\alpha(n)}{2^n} (\text{diam}(A))^n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $0 < \alpha < \beta < \infty$ valós számok, és létezik olyan $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, amelyre

$$(1) \quad \frac{\alpha(n)}{2^n} (\text{diam}(A))^n \leq \alpha,$$

és

$$(2) \quad \lambda^n(A) \geq \beta.$$

Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $|z-x| \leq \sup_{y \in A} |y-x|$ minden $z \in \text{conv}(A)$ -ra. Ezt kétszer alkalmazva, $\text{diam}(\text{conv}(A)) = \text{diam}(A)$, így A -t konvex burkának a lezártjával helyettesítve, (1) és (2) változatlanul fennállnak. Így azon kompakt konvex halmazok \mathcal{C} rendszere, amelyekre (1) és (2) fennállnak, nem üres. Az előző tétel szerint \mathcal{C} -ből nem vezet ki a Steiner-szimmetrizáció. Megmutatjuk, hogy \mathcal{C} zárt a Hausdorff-távolságra nézve.

Mivel a 11.2.24. tétel szerint a kompakt konvex halmazok zárt alteret alkotnak, és $A \mapsto \text{diam}(A)$ folytonos a Hausdorff-távolságra nézve, csak azt kell megmutatnunk, hogy ha A egy kompakt halmaz, amelyre $\lambda^n(A) < \beta$, akkor ez teljesül a hozzá közeliekre is. Választva egy V nyílt halmazt, amelyre $\lambda^n(V) < \beta$ és $A \subset V$, az A -hoz $\text{dist}(A, \mathbb{R}^n \setminus V)$ -nél közelebb lévő halmazokra sem teljesül (2).

Legyen most

$$r = \inf \{s : T \subset \mathbb{B}(0, s) \text{ valamely } T \in \mathcal{C}\text{-re}\}.$$

Ekkor (2) miatt $r > 0$. Az $\mathcal{F}_{0,r+1} \cap \mathcal{C}$ halmazrendszer kompaktságából (lásd 11.2.24. jelöléseit), van olyan $S \in \mathcal{C}$, amelyre $S \subset \mathbb{B}(0, r)$. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{S}(0, r) \subset S$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{B}(a, \varepsilon) \cap S = \emptyset$ valamely $a \in \mathbb{S}(0, r)$ -re és $\varepsilon > 0$ -ra. Ekkor választhatunk $\mathbb{S}(0, r)$ -beli különböző $a = y_0, y_1, \dots, y_k$ pontokat úgy, hogy $\mathbb{S}(0, r) \subset \bigcup_{j=0}^k \mathbb{B}(y_j, \varepsilon)$ teljesüljön. Konstruáljuk meg az $S = T_0, T_1, \dots, T_k \in \mathcal{C}$ halmazokat úgy, hogy T_j -t a T_{j-1} -ből a $\{v : v \in \mathbb{R}^n, \langle v, u_j \rangle = 0\}$ altérre történő Steiner-szimmetrizációval kapjuk, ahol $u_j = (y_j - a)/|y_j - a|$. A 9.3.2. tétel (5) részéből következik, hogy $T_k \subset \mathbb{B}(0, r)$ és $T_k \cap \mathbb{S}(0, r) = \emptyset$. Ebből $T_k \subset \mathbb{B}(0, s)$ valamely $0 < s < r$ -re, ami ellentmond r választásának. Így $\mathbb{S}(0, r) \subset S$, amiből $S = \mathbb{B}(0, r)$. Ebből

$$\beta \leq \lambda^n(\mathbb{B}(0, r)) = \alpha(n)r^n = \frac{\alpha(n)}{2^n} (\text{diam}(\mathbb{B}(0, r)))^n \leq \alpha,$$

ami ellentmondás.

9.3.4. Tétel. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, akkor $\chi^n(A) = \lambda^n(A)$.

* **Bizonyítás.** A Hausdorff-mérték definíciójánál használt jelölésekkel, az előző tétel szerint $\lambda^n(A) \leq \nu^n(A)$, ha $A \subset \mathbb{R}^n$. Ebből a λ^n külső mérték σ -szubadditivitása miatt, $\lambda^n(A) \leq \chi_\delta^n(A)$ minden $A \subset \mathbb{R}^n$ -re és $\delta > 0$ -ra, így $\lambda^n(A) \leq \chi^n(A)$, ha $A \subset \mathbb{R}^n$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához legyen $\delta > 0$. Az 5.2.2. tétel szerint, tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan V nyílt halmaz, amelyre $A \subset V$ és $\lambda^n(V) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon$. Válasszunk olyan $j_0 \geq 1$ egész számot, amelyre $1/2^{j_0} < \delta/\sqrt{n}$ és tekintsük az összes $[a, a + e/2^j]$ balról zárt n -dimenziós kockákat, ahol $j \geq j_0$, $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ és $a = (k_1/2^j, k_2/2^j, \dots, k_n/2^j)$ valamely $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ -re. Két ilyen kocka vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat. Ha ezen kockák közül \mathcal{F} jelöli azok halmazát, amelyek részei V -nek, akkor \mathcal{F} -nek a tartalmazásra nézve maximális elemei diszjunkt, megszámlálható lefedését alkotják V -nek. A kapott lefedés bármely W elemére, ha annak r az élhossza, $\text{diam}(W) \leq r\sqrt{n} \leq \delta$, és így

$$\nu^n(W) = \alpha(n)(\text{diam}(W))^n \leq \frac{\alpha(n)}{2^n} n^{n/2} r^n \leq c\lambda^n(W),$$

ahol

$$c = \frac{\alpha(n)}{2^n} n^{n/2}.$$

Ebből $\chi_\delta^n(A) \leq c(\lambda^n(A) + \varepsilon)$, amiből

$$(2) \quad \chi^n(A) \leq c\lambda^n(A).$$

Hogy belássuk, ez az egyenlőtlenség $c = 1$ -re is teljesül, Vitali tételét alkalmazzuk a

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, \mathbb{B}(x, r)) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0 \right\}$$

lefedési relációra. E szerint a

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, x \in A, \text{diam}(S) \leq \delta, S \subset V \right\}$$

rendszerből kiválasztható olyan (x_i, S_i) , $i = 1, 2, \dots$ diszjunkt részrendszer, amelyre $\lambda^n(A \setminus \cup_i S_i) = 0$. Ebből (2) miatt $\chi_\delta^n(A \setminus \cup_i S_i) = 0$, így

$$\begin{aligned} \chi_\delta^n(A) &\leq \chi_\delta^n(A \setminus \cup_i S_i) + \chi_\delta^n(\cup_i S_i) \leq \sum_i \chi_\delta^n(S_i) \leq \sum_i \nu_\delta^n(S_i) \\ &= \sum_i \lambda^n(S_i) \leq \lambda^n(V) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon, \end{aligned}$$

amiből $\chi_\delta^n(A) \leq \lambda^n(A)$. Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

A többváltozós függvények esetén azt a szerepet, amit egy változóban az abszolút folytonos függvények játszottak, a lokálisan Lipschitz-függvények veszik át. A következő fontos tétel mutatja, hogy ezek a függvények majdnem mindenütt differenciálhatóak.

9.3.5. Rademacher tétele. Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek. Egy $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény λ^m -majdnem minden $x \in V$ pontban differenciálható, és a g' derivált λ^m -mérhető.

* **Bizonyítás.** Nyilván feltehetjük, hogy V egy korlátos nyílt gömb, g Lipschitz-függvény M Lipschitz-konstanssal és $n = 1$. Legyen e_1, e_2, \dots, e_m az \mathbb{R}^m szokásos bázisa. Ekkor a

$$(1) \quad h_{i,j}(x) = \sup \left\{ \frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{j}, t \in \mathbb{Q}, x + te_i \in V \right\}, \quad \text{ha } x \in V$$

és

$$(2) \quad k_{i,j}(x) = \inf \left\{ \frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{j}, t \in \mathbb{Q}, x + te_i \in V \right\}, \quad \text{ha } x \in V$$

összefüggésekkel definiált függvények Borel-függvények. Mivel $h_{i,j} \geq h_{i,j+1}$ és $k_{i,j} \leq k_{i,j+1}$, léteznek és Borel-függvények a

$$h_i = \lim_{j \rightarrow \infty} h_{i,j} \quad \text{és} \quad k_i = \lim_{j \rightarrow \infty} k_{i,j}$$

pontonkénti határértékek, így az

$$A_i = \{x : x \in V, -\infty < k_i(x) = h_i(x) < \infty\}$$

halmazok Borel-halmazok. A fenti függvények g folytonossága miatt semmit sem változnak, ha (1)-ben és (2)-ben \mathbb{Q} helyére \mathbb{R} -et írunk. Így az $f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ parciális derivált az A_i Borel-halmazon értelmezett Borel-függvény ($i = 1, 2, \dots, m$). Mivel g lokálisan Lipschitz, az x koordinátái közül egy kivételével mindet rögzítve, a kapott függvény lokálisan Lipschitz, így a 8.3.2. tétel szerint értelmezési tartománya kompakt intervallumain abszolút folytonos. Mivel a 8.3.4. tétel szerint abszolút folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható, $V \setminus A_i$ minden, az i -edik koordinátatengellyel párhuzamos egyenessel való metszete nulla Lebesgue-mértékű. A Fubini-tétel miatt $\lambda^m(V \setminus A_i) = 0$.

Ha $1 \leq i \leq m$, j és p pedig pozitív egész számok, legyen $B(i, j, p)$ azon $x \in A_i$ pontok halmaza, amelyekre

$$|g(x + te_i) - g(x) - tf_i(x)| \leq \frac{|t|}{j}, \quad \text{ha } 0 < |t| < \frac{1}{p}.$$

Mivel g folytonos, ezek a halmazok nem változnak, ha t csak racionális lehet. Így a $B(i, j, p)$ halmazok Borel-halmazok, $B(i, j, p) \subset B(i, j, p+1)$, és

$$A_i = \bigcup_{p=1}^{\infty} B(i, j, p) \quad \text{minden } i, j\text{-re.}$$

Legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy olyan p_1, p_2, p_3, \dots sorozatot, amelyre

$$\lambda^m(A_i \setminus B(i, j, p_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

A Luzin-tétel szerint választhatunk olyan K_i kompakt halmazokat, amelyekre $f_i|_{K_i}$ folytonos, és $\lambda^m(V \setminus K_i) < \varepsilon$. Ha most

$$H = \bigcap_{i=1}^m \left(K_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B(i, j, p_j) \right) \right),$$

akkor $\lambda^m(V \setminus H) < 2m\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy g differenciálható azon H -beli pontokban, amelyekben H sűrűsége 1.

Legyen a egy ilyen pont, j természetes szám, és legyen $0 < \delta < 1/m$. Válasszunk egy olyan kicsiny η pozitív valós számot, amelyre $\eta < 1/p_j$, $\mathbb{B}(a, \eta) \subset V$, és

$$|f_i(y) - f_i(a)| < \delta, \quad \text{ha } y \in K_i \text{ és } |y - a| \leq 2\eta,$$

továbbá

$$(3) \quad \lambda^m(\mathbb{B}(a, 2r) \setminus H) < \delta^m r^m \alpha(m), \quad \text{ha } 0 < r \leq \eta.$$

Tegyük fel, hogy $|x - a| \leq \eta$ és legyen $r = |x - a|$. Olyan v_1, v_2, \dots, v_m valós számokat választva, amelyekre $x - a = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_m e_m$, indukcióval definiáljunk olyan H -beli elemekből álló $a = x_1, x_2, \dots, x_m$ sorozatot, amelyre

$$(4) \quad |x_i + v_i e_i - x_{i+1}| \leq \delta r, \quad \text{ha } 1 \leq i \leq m.$$

Ez lehetséges, mivel az $x_i + v_i e_i$ pont távolsága a -tól

$$\begin{aligned} |x_i + v_i e_i - a| &\leq |v_1 e_1 + \dots + v_i e_i| + \sum_{k=1}^{i-1} |x_{k+1} - x_k - v_k e_k| \\ &< r + (i-1)\delta r < \frac{m+i-1}{m} r < 2r - \delta r, \end{aligned}$$

így a köré írt δr sugarú gömb teljes egészében $\mathbb{B}(a, 2r)$ -ben van. Mivel ennek a gömbnek a térfogata $\delta^m r^m \alpha(m)$, (3) miatt kell hogy tartalmazzon H -beli pontot. Vegyük észre, hogy

$$|x_m + v_m e_m - x| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |x_k + v_k e_k - x_{k+1}| \leq (m-1)\delta r$$

és

$$|g(x_i + v_i e_i) - g(x_i) - v_i f_i(x_i)| \leq \frac{|v_i|}{j}, \quad \text{ha } 1 \leq i \leq m.$$

Felhasználva, hogy g Lipschitz-függvény,

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - g(a) - \sum_{i=1}^m v_i f_i(a)\right| &\leq \sum_{i=1}^m |v_i| |f_i(x_i) - f_i(a)| + \left|g(x) - g(a) - \sum_{i=1}^m v_i f_i(x_i)\right| \\
&\leq m\delta r + |g(x) - g(x_m + v_m e_m)| + \sum_{i=1}^{m-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i + v_i e_i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^m |g(x_i + v_i e_i) - g(x_i) - v_i f_i(x_i)| \\
&\leq m\delta r + (m-1)M\delta r + (m-1)M\delta r + mr/j \\
&< rm((2M+1)\delta + 1/j) = |x-a|m((2M+1)\delta + 1/j).
\end{aligned}$$

Mivel δ és j tetszőlegesen voltak, g differenciálható a -ban. Az ε tetszőleges volt, így a g függvény λ^m -majdnem mindenütt differenciálható V -ben. Mivel a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ függvények mérhetőek, g' is mérhető.

A következő definíció a Jacobi-determináns fogalmát általánosítja.

9.3.6. Definíció. Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek. Ha a $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható egy $x \in V$ pontban és $A = g'(x)$, akkor legyen

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A^* \circ A)}, \quad \text{ha } m \leq n,$$

és

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A \circ A^*)}, \quad \text{ha } m \geq n.$$

9.3.7. Megjegyzés. Ez a jelölés összhangban van 5.2.3. és 5.2.5. jelöléseivel. Ha ugyanis $m = n$, akkor

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A^*) \det(A)} = |\det(A)|,$$

így speciálisan, ha $g(x) = A(x) + b$, ahol $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris és $b \in \mathbb{R}^n$, akkor $g'(x) = A$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re, így $Jg(x) = |\det(A)|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ -re.

Az alábbi lemma a 9.2.4. lemma többdimenziós általánosítása.

* **9.3.8. Lemma.** Ha V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek, $\alpha > 1$, $m \leq n$ és $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, akkor léteznek olyan λ^m -mérhető E_1, E_2, \dots halmazok és \mathbb{R}^m -et önmagába képező kölcsönösen egyértelmű s_1, s_2, \dots lineáris leképezések, hogy

- (1) $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = E = V (Jg \neq 0)$;
- (2) $g|E_k$ kölcsönösen egyértelmű;
- (3) $\alpha^{-m} |\det(s_k)| \leq Jg(x) \leq \alpha^m |\det(s_k)|$, ha $x \in E_k$;
- (4) $\text{Lip}((g|E_k) \circ s_k^{-1}) \leq \alpha$ és $\text{Lip}(s_k \circ (g|E_k)^{-1}) \leq \alpha$.

Bizonyítás. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ -t, amelyre $\alpha^{-1} + \varepsilon < 1 < \alpha - \varepsilon$. Tekintsük az \mathbb{R}^m -et \mathbb{R}^m -be képező invertálható lineáris leképezések terét az operátornormával, és válasszunk ebben egy S megszámlálható sűrű részhalmazt. Legyen T megszámlálható sűrű részhalmaza \mathbb{R}^m -nek. Minden $s \in S$ -re, i pozitív egész számra és $t \in T$ -re legyen $E(s, i, t)$ azon $x \in E$ pontok halmaza, amelyekre a következő feltételek teljesülnek:

$$(5) \quad \alpha^{-m} |\det(s)| \leq Jg(x) \leq \alpha^m |\det(s)|;$$

$$(6) \quad (\alpha^{-1} + \varepsilon) |s(v)| \leq |g'(x)(v)| \leq (\alpha - \varepsilon) |s(v)|, \text{ ha } v \in T;$$

$$(7) \quad |g(y) - g(x) - g'(x)(y - x)| \leq \varepsilon |s(y - x)|, \text{ ha } |y - x| \leq 1/i \text{ és } y - x \in T;$$

$$(8) \quad |x - t| \leq 1/(2i).$$

$E(s, i, t)$ mérhető, mert (6) és (7) csak megszámlálható sok feltétel teljesülését követeli meg, és g' Rademacher tétele szerint mérhető. Továbbá, ha $x \in E(s, i, t)$, akkor (6) minden $v \in \mathbb{R}^m$ -re fennáll, mivel mindkét oldal folytonosan függ v -től. Hasonlóan, (7) is fennáll minden olyan $y \in \mathbb{R}^m$ -re, amelyre $|y - x| \leq 1/i$.

Megmutatjuk, hogy az $E(s, i, t)$ halmazok lefedik E -t. Legyen $x \in E$. A 11.3.32. tétel szerint az $A = g'(x)$ lineáris leképezés előállítható $C \circ B$ alakban, ahol $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ önadjungált lineáris leképezés, $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pedig ortogonális injekció. Mivel a 11.3.33. lemma szerint $Jg(x) = |\det(B)|$, az s -et elég közel választva B -hez, teljesül (5), továbbá

$$\|s \circ B^{-1}\| < (\alpha^{-1} + \varepsilon)^{-1} \quad \text{és} \quad \|B \circ s^{-1}\| < \alpha - \varepsilon.$$

Ebből

$$|B(v)| \leq (\alpha - \varepsilon) |s(v)| \quad \text{és} \quad |s(v)| \leq (\alpha^{-1} + \varepsilon)^{-1} |B(v)|$$

minden $v \in \mathbb{R}^m$ -re. Mivel $|B(v)| = |A(v)|$ minden $v \in \mathbb{R}^m$ -re, teljesül (6). Felhasználva, hogy $|y - x| \leq \|s^{-1}\| |s(y - x)|$, a derivált definíciója miatt választhatunk olyan i -t, hogy (7) is teljesüljön. Végül válasszuk meg t -t úgy, hogy (8) teljesüljön. Ezzel megmutattuk, hogy az $E(s, i, t)$ halmazok lefedik E -t, azaz (1) teljesül.

Ha most $x, y \in E(s, i, t)$, akkor $|y - x| \leq 1/i$, így (6) és (7) miatt

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\leq |g'(x)(y - x)| + \varepsilon |s(y - x)| \leq \alpha |s(y) - s(x)|, \\ |g(y) - g(x)| &\geq |g'(x)(y - x)| - \varepsilon |s(y - x)| \geq \alpha^{-1} |s(y) - s(x)|. \end{aligned}$$

Ebből következik (2) és (4).

A következő tétel ennek a fejezetnek a fő eredménye.

* **9.3.9. Felszínképlet.** Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek, $m \leq n$ és $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor

(1) bármely λ^m -mérhető $A \subset V$ -re

$$\int_A Jg(x) d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|A}(y) d\chi^m(y);$$

(2) ha az $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényre a bal oldali integrál létezik, akkor

$$\int_V f(x) Jg(x) d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x) \right) d\chi^m(y).$$

Bizonyítás. Mivel (2) éppen (1)-re redukálódik, ha f az A karakterisztikus függvénye, (2)-t megkaphatjuk (1)-ből a szokásos approximációs eljárással. Így elég (1)-et megmutatnunk. Mivel (1) mindkét oldala σ -additív függvénye A -nak, elég (1)-et olyan $B \subset A$ halmazokra igazolni, amelyek λ^m -mérhetőek, $\lambda^m(B) < \infty$ és $g|B$ Lipschitz-függvény. Tovább osztva B -t, három esetet fogunk megvizsgálni: $\lambda^m(B) = 0$, $B \subset V(Jg \neq 0)$ és $B \subset V(Jg = 0)$. Az első esetben a 2.4.7. lemma és a 9.3.4. tétel szerint $\chi^m(g(B)) = 0$, így (1) mindkét oldala nulla. Marad tehát két eset.

Tegyük fel, hogy $B \subset V(Jg \neq 0)$. Az előző lemma szerint, ha $\alpha > 1$, akkor léteznek olyan B_1, B_2, \dots mérhető halmazok és \mathbb{R}^m -et önmagába képező kölcsönösen egyértelmű s_1, s_2, \dots lineáris leképezések, hogy

- (3) $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$;
- (4) $g|B_i$ kölcsönösen egyértelmű;
- (5) $\alpha^{-m} |\det(s_i)| \leq Jg(x) \leq \alpha^m |\det(s_i)|$, ha $x \in B_i$;
- (6) $\text{Lip}((g|B_i) \circ s_i^{-1}) \leq \alpha$ és $\text{Lip}(s_i \circ (g|B_i)^{-1}) \leq \alpha$.

Nyilván feltehetjük, hogy a B_i halmazok diszjunktak. Integrálva B_i felett (5)-ből

$$(7) \quad \alpha^{-m} |\det(s_i)| \lambda^m(B_i) \leq \int_{B_i} Jg(x) d\lambda^m(x) \leq \alpha^m |\det(s_i)| \lambda^m(B_i).$$

Mivel az 1.3.5. tétel szerint B_i előáll egy σ -kompakt halmaz és egy nulla mértékű halmaz egyesítéséeként, a $g(B_i)$ halmaz χ^m -mérhető. Továbbá $g(B_i) = ((g|B_i) \circ s_i^{-1})(s_i(B_i))$ miatt (6)-ból a 2.4.7. lemma felhasználásával

$$(8) \quad \chi^m(g(B_i)) \leq \alpha^m \chi^m(s_i(B_i)).$$

Hasonlóan $s_i(B_i) = (s_i \circ (g|B_i)^{-1})(g(B_i))$ miatt

$$(9) \quad \chi^m(s_i(B_i)) \leq \alpha^m \chi^m(g(B_i)).$$

Összevetve (8)-at és (9)-et és felhasználva a 9.3.4. és 5.2.5. tételeket, amelyek szerint

$$\chi^m(s_i(B_i)) = \lambda^m(s_i(B_i)) = |\det(s_i)| \lambda^m(B_i),$$

azt kapjuk, hogy

$$\alpha^{-m} |\det(s_i)| \lambda^m(B_i) \leq \chi^m(g(B_i)) \leq \alpha^m |\det(s_i)| \lambda^m(B_i).$$

Ebből (7)-et felhasználva, az adódik, hogy

$$\alpha^{-2m} \chi^m(g(B_i)) \leq \int_{B_i} Jg(x) d\lambda^m(x) \leq \alpha^{2m} \chi^m(g(B_i)).$$

Összegezve i -re és Beppo Levi tételét alkalmazva

$$\alpha^{-2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|B}(y) d\chi^m(y) \leq \int_B Jg(x) d\lambda^m(x) \leq \alpha^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|B}(y) d\chi^m(y).$$

Innen $\alpha \downarrow 1$ esetén kapjuk, hogy (1) teljesül B -re.

Végül tegyük fel, hogy $B \subset V(Jg = 0)$. Ha $\varepsilon > 0$, bontsuk fel g -t $p \circ q$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} q: V &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, & q(x) &= (g(x), \varepsilon x), & \text{ha } x \in V, \\ p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n, & p(y, z) &= y, & \text{ha } (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Ha $x \in B$, akkor $g'(x)$ nem kölcsönösen egyértelmű, így \mathbb{R}^m valamely L egydimenziós alterét a nullába képezi le. Ebből $c = \text{Lip}(g|B)$ jelöléssel

$$|q'(x)(v)| = \varepsilon|v|, \quad \text{ha } v \in L,$$

és

$$|q'(x)(v)| = |(g'(x)(v), \varepsilon v)| \leq (c + \varepsilon)|v|, \quad \text{ha } v \notin L.$$

Mivel $q'(x)$ nyilván kölcsönösen egyértelmű, 11.3.33. szerint

$$0 < Jq(x) \leq \varepsilon(c + \varepsilon)^{m-1}.$$

Alkalmazva az eddig bizonyítottakat és a 2.4.7. lemmát p -re és a $q(B)$ halmazra, és felhasználva, hogy $\text{Lip}(p) = 1$, azt kapjuk, hogy

$$\chi^m(g(B)) \leq \chi^m(q(B)) = \int_B Jq(x) d\lambda^m(x) \leq \varepsilon(c + \varepsilon)^{m-1} \lambda^m(B).$$

Ebből $\varepsilon \downarrow 0$ esetén $\chi^m(g(B)) = 0$. Így ebben az esetben (1) mindkét oldala nulla.

9.3.10. Integráltranszformációs formula. Ha V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy χ^m -mérhető függvény, $m \leq n$, és A egy λ^m -mérhető részhalmaza V -nek, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_A f(g(x)) Jg(x) d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) N_{g|A}(y) d\chi^m(y).$$

Ez az integrálszámítás talán leggyakrabban alkalmazott formulája görbe menti és felületi integrálok kiszámítására, helyettesítéssel integrálásra. Gyakran g kölcsönösen egyértelmű A -n. Ekkor a jobb oldal $\int_{g(A)} f(y) d\chi^m(y)$. Ha $f \equiv 1$, akkor a felszínképletet

kapjuk vissza: $m = 1, 2, 3$ esetén rendre *ív*hossz, *felszín*, illetve *térfogat* kiszámítására alkalmas formulát. Vizsgáljuk meg formulánk geometriai jelentését ebben a speciális esetben. Mivel A -t megfelelően felosztva elérhetjük, hogy egy kis részen g már nagyon jól közelíthető legyen egy affin leképezéssel, azaz egy lineáris leképezés és egy eltolás összetételével, elég azt az esetet megvizsgáljunk, amikor g affin. Mivel az eltolások, mint izometriák, nem változtatják meg a Hausdorff külső mértéket, elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor g lineáris, és így $g'(x) = g$ minden x -re. Ekkor $Jg(x)$ geometriai jelentése a $[0, 1]^m$ egységkocka képeinek χ^m -mértéke, azaz a szokásos bázisvektorok képei által kifeszített paralelepipedon χ^m -mértéke. Ha $m = n$, akkor $g'(x)^*$ és $g'(x)$ determinánsa megegyezik, így $Jg(x) = |\det g'(x)|$. Az általános esetben $g'(x)$ mátrixa nem négyzetes, és a négyzetgyökjel alatt a szokásos bázis vektorai képeinek belső szorzataiból alkotott mátrix determinánsa áll.

* **Bizonyítás.** Mivel mindkét oldal σ -additív függvénye A -nak, elég a tételt arra az esetre megmutatnunk, amikor $g|_A$ Lipschitz-függvény és $\lambda^m(A) < \infty$. Ekkor $\chi^m(g(A)) < \infty$. Az előző tétel és az 1.3.5. tétel szerint azt is feltehetjük, hogy az A halmaz σ -kompakt, így $g(A)$ Borel-halmaz, továbbá hogy $f(y) = 0$, ha $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(A)$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor az f a $g(A)$ egy χ^m -mérhető T részhalmazának a karakterisztikus függvénye. Ha T Borel-halmaz, akkor az előző tétel alkalmazható $A \cap g^{-1}(T)$ -re, és

$$\int_A (f \circ g) \cdot Jg \, d\lambda^m = \int_{A \cap g^{-1}(T)} Jg \, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|_{A \cap g^{-1}(T)}} \, d\chi^m = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot N_{g|_A} \, d\chi^m.$$

Ebből, 2.4.6. felhasználásával, mindkét oldal nulla akkor is, ha T tetszőleges részhalmaza $g(A)$ -nak, amelyre $\chi^m(T) = 0$. Ha most $T \subset g(A)$ és a T halmaz χ^m -mérhető, akkor $g(A) \setminus T$ -re alkalmazva a 2.4.6. tételt, T -t előállíthatjuk egy Borel-halmaz és egy χ^m -nullmértékű halmaz egyesítéseként, így ismét teljesül (1). Végül a szokásos approximációs eljárással kapjuk az általános esetet.

A következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, a felszínképlet duálisa.

* **9.3.11. Kofelszínképlet.** Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^m -nek, $m \geq n$ és $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor

(1) bármely λ^m -mérhető A részhalmazára V -nek

$$\int_A Jg(x) \, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi^{m-n}(A \cap g^{-1}(y)) \, d\lambda^n(y);$$

(2) ha az $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvény λ^m -mérhető, és a bal oldali integrál létezik, akkor

$$\int_V f(x) Jg(x) \, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{g^{-1}(y)} f(x) \, d\chi^{m-n}(x) \, d\lambda^n(y).$$

Az $m = n$ eset az integráltranszformációs formula. Ha g az utolsó $m - n$ koordináta elhagyásával létrejövő projekció, akkor a Fubini-tételt kapjuk. Az általános eset ezek kombinációjának tekinthető, és gyakran kényelmesebb használni, mint egy helyettesítést és a Fubini-tételt. A bizonyítás megtalálható Federer [8] könyvében, 3.2.12. tétel.

Ezen pont utolsó tételét szintén bizonyítás nélkül közöljük. Kimondásához szükségünk lesz az alábbi definícióra.

* **9.3.12. Definíció.** Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek és $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy függvény. Ha $x \in V$ és $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ differenciálható x -ben, akkor az x -beli *divergenciáján* a $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{sp} f'(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x)$ számot értjük.

A divergencia fizikai jelentésének megértéséhez tekintsünk egy

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

n -dimenziós intervallumot. Ha f folytonosan differenciálható, akkor $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ jelöléssel

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 f_1(x_1, x') dx_1 = f_1(b_1, x') - f_1(a_1, x').$$

Jelölje $\mathbf{n}(x, I)$ az \mathbb{R}^n -beli I intervallum oldallapjának egy x pontjában a kifelé mutató, az oldallapra merőleges egységvektort, $n_i(x, I)$ az $\mathbf{n}(x, I)$ vektor i -edik koordinátáját. Ennek segítségével a jobb oldal $n_1(b_1, x', I) f_1(b_1, x') + n_1(a_1, x', I) f_1(a_1, x')$ alakban írható. Mindkét oldalt integrálva x' szerint, azt kapjuk, hogy

$$\int_I \partial_1 f_1(x) dx = \int_{\partial I} n_1(x, I) f_1(x) d\chi^{n-1}(x),$$

ahol ∂I az I határát jelöli. Az integrálást az $\{x : x_1 = a_1\}$ és $\{x : x_1 = b_1\}$ oldallapokról azért terjeszthetjük ki az intervallum határára, mert a többi lapon $n_1(x)$ nulla. Hasonlóan járva el $\partial_i f_i$ -vel is, és összegezve i -re, azt kapjuk, hogy

$$\int_I \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial I} \langle f(x), \mathbf{n}(x, I) \rangle d\chi^{n-1}(x).$$

Formulánk a Gauss–Osztrogradszkij-tétel (Gauss–Green-tétel vagy divergenciátétel) speciális esete. Az igen nehezen bizonyítható optimális változatot lásd a következő pontban.

Itt $\langle f, \mathbf{n} \rangle$ az f vektormezőnek a normális irányú komponense. Ennek felületi integrálja a vektormező által jellemzett áramlásban a felületen időegység alatt átáramló mennyiség. A jobb oldal fizikai jelentése tehát a I intervallumból időegység alatt kiáramló mennyiség. Összehúзва I -t egy pontra, azt kapjuk, hogy $\operatorname{div} f$ fizikai jelentése az f vektormező forrásintenzitása.

* **9.3.13. Gauss–Osztrogradszkij-tétel.** Legyen A korlátos nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek és $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy Lipschitz-függvény. Legyen B azon \mathbb{R}^n -beli pontok halmaza, amelyekben A Lebesgue-sűrűsége nem létezik, vagy létezik, de nullától és egytől különbözik. Tegyük fel, hogy $\chi^{n-1}(B) < \infty$. Ekkor

(1) χ^{n-1} -majdnem minden $x \in B$ pontban egy és csak egy olyan \mathbb{R}^n -beli $\mathbf{n}(x, A)$ egységvektor létezik, az A külső normálisa az x pontban, amelyre az

$$\left\{ y : y \notin A, \langle y - x, \mathbf{n}(x, A) \rangle < 0 \right\} \quad \text{és} \quad \left\{ y : y \in A, \langle y - x, \mathbf{n}(x, A) \rangle > 0 \right\}$$

halmazok Lebesgue-sűrűsége x -ben nulla;

(2) az alábbi két integrál létezik és

$$\int_A \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x) = \int_B \langle f(x), \mathbf{n}(x, A) \rangle d\chi^{n-1}(x).$$

A tétel Federer [8] könyve 4.5.6, 4.5.5., 2.10.43., 4.5.11. és 3.3.13. pontjainak eredményeit kombinálva adódik.

→ **9.3.14. Feladat [5].** Számítsuk ki az integráltranszformációs formula segítségével egy ellipszis területét.

→ **9.3.15. Feladat [6].** Számítsuk ki az integráltranszformációs formula segítségével egy ellipszoid térfogatát.

→ **9.3.16. Feladat [5].** Határozzuk meg a felszínképlet segítségével a

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

csavarvonal ívhosszát.

→ **9.3.17. Feladat [7].** Számítsuk ki a gömb felszínét.

→ **9.3.18. Feladat [8].** Az $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2} d\lambda(x) d\lambda(y)$ integrált polárkoordinátákban is kiszámítva, vezessük le az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$ összefüggést.

9.3.19. Feladat [7]. Határozzuk meg egy homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva.

9.3.20. Feladat [6]. Mekkora erővel vonzza az origóban lévő m tömeget az $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$ félköríven egyenletesen eloszló M tömeg?

9.3.21. Feladat [7]. Milyen erős mágneses teret létesít az 1 m átmérőjű, kör alakú vezetõben folyó 1 A erõsségû áram a kör középpontjában?

9.3.22. Feladat [8]. Az $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$ félgömb felületén egyenletesen eloszló Q töltés milyen erővel vonzza az origóban lévő, q nagyságú, ellenkező előjelű töltést?

* **9.3.23. Feladat [18].** Legyen $V \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény. Igazoljuk, hogy f' Borel-függvény.

10. FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

A Fourier-transzformáció az integráltranszformációk körébe tartozik. Egy integráltranszformáció függvények valamely osztályának egy másik függvényosztályba való olyan $f \mapsto \hat{f}$ leképezése, amely

$$\hat{f}(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

alakban adható meg. Itt K az úgynevezett magfüggvény. A Fourier-transzformáció magfüggvénye

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\langle x, y \rangle}, \quad \text{ha } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

és az integrálás az n -dimenziós Lebesgue-mérték szerint történik. Egy integráltranszformáció jelentősége rendszerint abban van, hogy függvények közötti bonyolult műveleteket egyszerűbb műveletekbe visz át. Például a Fourier-transzformációt két függvény

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x - y) g(y) dy$$

összefüggéssel értelmezett konvolúciójára alkalmazva a két függvény Fourier-transzformáltjának a szorzatát kapjuk.

Mivel az integráltranszformációk közül a Fourier-transzformáció a legjelentősebb, és ennek a legszorosabb a kapcsolata a mértékelmélettel, itt csak a Fourier-transzformációval foglalkozunk.

10.1. Függvények konvolúciója

Ebben a részben a különböző alkalmazásokban fontos szerepet játszó konvolúcióval foglalkozunk. Különböző konstansok megjelenésének elkerülésére előnyös lesz, ha a Lebesgue-mérték helyett annak egy konstansszorosát használjuk.

* **10.1.1. Definíció.** Legyen

$$\beta^n(A) = (2\pi)^{-n/2} \lambda^n(A), \quad \text{ha } A \in \mathcal{L}^n.$$

A β^n mértéket *normalizált Lebesgue-mérték*nek nevezzük.

* **10.1.2. Definíció.** Ha f az \mathbb{R}^n valamely részalmazán értelmezett függvény és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen $\tau_x f$ és \check{f} a

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \quad \text{illetve} \quad \check{f}(y) = f(-y)$$

összefüggéssel értelmezve.

* **10.1.3. Definíció.** Legyenek f és g valós vagy komplex értékű, β^n -majdnem mindenütt értelmezett függvények. Az f és g konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) d\beta^n(y)$$

összefüggéssel értelmezzük minden olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, ahol a jobb oldali integrál létezik.

A következő tételt annak bizonyítására fogjuk használni, hogy két integrálható függvény konvolúciója létezik.

* **10.1.4. Tétel.** Legyen $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény úgy, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| d\beta^n(y) \leq c \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| d\beta^n(x) \leq c$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ -re. Ha $1 \leq p \leq \infty$ és $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\beta^n)$, akkor a

$$(T_K f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) d\beta^n(y)$$

integrál minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik, és $T_K f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\beta^n)$, továbbá $\|T_K f\|_p \leq c \|f\|_p$.

A $T_K : \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\beta^n) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\beta^n)$ folytonos lineáris operátort *integráltranszformációnak* nevezzük, K a *magfüggvény*.

Bizonyítás. A $p = \infty$ eset triviális. Ha $1 < p < \infty$, legyen $q = p/(p-1)$. A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva az $y \mapsto |K(x, y)|^{1/q}$ és $y \mapsto |K(x, y)|^{1/p} |f(y)|$ függvényekre,

$$\begin{aligned} |(T_K f)(x)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| d\beta^n(y) \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| |f(y)|^p d\beta^n(y) \right)^{1/p} \\ &\leq c^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| |f(y)|^p d\beta^n(y) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Innen a Fubini-tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(T_K f)(x)|^p d\beta^n(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} c^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| |f(y)|^p d\beta^n(y) d\beta^n(x) \\ &\leq c^{1+p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p d\beta^n(y) = c^p \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

azaz $\|T_K f\|_p \leq c \|f\|_p$.

Végül a $p = 1$ eset közvetlenül következik a Fubini-tételből.

* **10.1.5. Tétel.** Legyen $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$ és $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$. Ekkor $f * g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$, továbbá β^n -majdnem mindenütt $f * g = g * f$.

Bizonyítás. Legyen $K(x, y) = f(x - y)$ és alkalmazzuk az előző tételt $c = \|f\|_1$ értékkel. A konvolúció kommutativitása abból adódik, hogy a Lebesgue-mérték, és így a Lebesgue-integrál is eltolásinvariáns.

* **10.1.6. Tétel.** A konvolúcióval mint szorzással $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$ kommutatív Banach-algebra \mathbb{K} felett.

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan adódik, felhasználva a Fubini-tételt is, a szorzás asszociativitása. A többi tulajdonság bizonyítása egyszerű számolás.

Az $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$ algebraiban nincs egységelem: ez következik majd 10.3. eredményeiből. Lehet azonban „közelítő egységeket” találni.

* **10.1.7. Definíció.** Az integrálható függvényekből álló u_k , $k = 1, 2, \dots$ függvénysozortatot *közelítő egységnek* nevezzük, ha

- (1) $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, ha $k = 1, 2, \dots$;
- (2) $\int_{\mathbb{R}^n} u_k(x) d\beta^n(x) = 1$;
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(x) d\beta^n(x) = 0$ minden, az origót tartalmazó V nyílt halmazra.

Mutatunk egy példát közelítő egységekre.

* **10.1.8. Példa.** A L'Hospital-szabály alkalmazásával könnyen belátható, hogy az

$$f(r) = \begin{cases} e^{-1/r}, & \text{ha } r > 0, \\ 0, & \text{ha } r \geq 0 \end{cases}$$

függvény akárhányszor differenciálható, és nyilvánvalóan monoton növekedő. Legyen $g(x) = f(1 - |x|^2)$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor g akárhányszor differenciálható, továbbá $g(x) > 0$, ha $|x| < 1$, és $g(x) = 0$, ha $|x| \geq 1$. Végül legyen $u(x) = g(x) / \int_{\mathbb{R}^n} g d\beta^n$ és $u_k(x) = k^n u(kx)$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor u_k , $k = 1, 2, \dots$ egy közelítő egység, amely akárhányszor differenciálható függvényekből áll.

A közelítő egység elnevezést a 10.1.10. tétel indokolja. Bizonyításához szükségünk lesz az alábbi tételre:

* **10.1.9. Tétel.** *Ha $1 \leq p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$, akkor az $x \mapsto \tau_x f$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ függvény egyenletesen folytonos leképezése \mathbb{R}^n -nek $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ -be.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszunk egy $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Ekkor $\|\tau_x f - \tau_x g\|_p < \varepsilon/3$ bármely $x \in \mathbb{R}^n$ -re. Válasszunk egy $r > 0$ -t, amelyre $\text{spt}(g) \subset \mathbb{B}(0, r)$, és legyen $c = \beta^n(\mathbb{B}(0, r+1))$. Mivel g egyenletesen folytonos, van olyan $0 < \delta < 1$, hogy

$$\|\tau_x g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3c^{1/p}}, \quad \text{ha } |x| < \delta.$$

Felhasználva, hogy $\text{spt}(\tau_x g) \subset \mathbb{B}(0, r+1)$, ha $|x| < \delta$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x g - g|^p d\beta^n = \int_{\mathbb{B}(0, r+1)} |\tau_x g - g|^p d\beta^n \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p, \quad \text{ha } |x| < \delta,$$

$$\|\tau_x f - f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon,$$

ha $|x| < \delta$. Mivel

$$\|\tau_x f - \tau_y f\|_p = \|\tau_{x-y} f - f\|_p,$$

készen vagyunk.

* **10.1.10. Tétel.** *Legyen u_k , $k = 1, 2, \dots$ egy közelítő egység, $1 \leq p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$. Ekkor*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f * u_k - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Először vizsgáljuk a $p = 1$ esetet. Legyen $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$. Az előző tétel szerint van olyan V környezete az origónak, amelyre

$$\|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } y \in V.$$

Válasszunk egy olyan k_0 -at, amelyre

$$4\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(y) d\beta^n(y) < \varepsilon \quad \text{minden } k \geq k_0\text{-ra.}$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $k \geq k_0$ -at. Ekkor

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |(f * u_k)(x) - f(x)| d\beta^n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y)u_k(y) - f(x)u_k(y)) d\beta^n(y) \right| d\beta^n(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| d\beta^n(x) d\beta^n(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(y)| \|\tau_y f - f\|_1 d\beta^n(y) \\
&\leq \int_V u_k(y) \frac{\varepsilon}{2} d\beta^n(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(y) 2\|f\|_1 d\beta^n(y) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Az $1 < p < \infty$ eset vizsgálatához vegyük észre, hogy ha egy $h \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ függvényre $\|h\|_u \leq M$, akkor

$$\|h\|_p^p = \int |h|^p d\beta^n \leq M^{p-1} \int |h| d\beta^n = M^{p-1} \|h\|_1,$$

így $\|h\|_p \leq M^{(p-1)/p} \|h\|_1^{1/p}$.

Ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$, akkor válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon$, és egy olyan M számot, amelyre $\|g\|_u < M/2$. Ekkor $\|g * u_k\|_u \leq M/2$, és így a $g * u_k - g$ függvényre alkalmazható az előbbi észrevétel, azaz

$$\begin{aligned}
\|f * u_k - f\|_p &\leq \|f * u_k - g * u_k\|_p + \|g * u_k - g\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leq \|f - g\|_p \|u_k\|_1 + \|f - g\|_p + M^{(p-1)/p} \|g * u_k - g\|_1^{1/p} \\
&\leq 2\varepsilon + M^{(p-1)/p} \|g * u_k - g\|_1 \rightarrow 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

ha $k \rightarrow \infty$. Mivel ε tetszőleges volt, $\|f * u_k - f\|_p \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$.

A közelítő egységeket felhasználhatjuk arra, hogy „nagyon sima” függvényekkel közelítsünk integrálható függvényeket. Az ilyen „nagyon sima” függvények terei sok szempontból jobban kezelhetőek, mint $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$. Ez indokolja a következő három definíciót.

* **10.1.11. Definíció.** Ha V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek, jelölje $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(V)$ az olyan $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ függvények lineáris terét, amelyek kompakt tartójúak és akárhányszor differenciálhatóak.

* **10.1.12. Definíció.** Ha $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ egy természetes számokból álló *multiindex*, akkor legyen $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ és $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Jelölje továbbá ∂_{α} az

$$\left(\frac{1}{i} \partial_1\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \partial_n\right)^{\alpha_n}$$

differenciáloperátort, ahol ∂_j a j -edik változó szerinti parciális differenciálás operátora. Ha

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor jelölje ξ^α a

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

monomot. Ha

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \xi^\alpha$$

egy legfeljebb k -ad fokú polinom, akkor a $P(\partial)$ és $P(-\partial)$ differenciáloperátorokat a

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial_\alpha \quad \text{és} \quad P(-\partial) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial_\alpha$$

összefüggésekkel értelmezzük.

* **10.1.13. Definíció.** Legyen V nyílt részhalmaza \mathbb{R}^n -nek. Egy $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt *gyorsan csökkenőnek* nevezünk, ha akárhányszor differenciálható és $P \cdot \partial_\alpha f$ korlátos minden n -változós P polinomra és minden α multiindexre. Az ilyen f függvények terét $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(V)$ -vel jelöljük.

* **10.1.14. Tétel.** Ha $1 \leq p < \infty$, akkor $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ és $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű részhalmazai $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ -nek a $\|\cdot\|_p$ normára nézve.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, elegendő belátnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ és hogy $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ -ben. Ha $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $x \mapsto (1 + |x|^{2n})f(x)$ korlátos függvény, így elég igazolnunk, hogy a $g(x) = 1/(1 + |x|^{2n})$ függvény benne van $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ -ben. Mivel $|g|^p \leq g$, elég megmutatnunk, hogy g integrálható. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $2^k < |x| \leq 2^{k+1}$, akkor $0 \leq g(x) \leq 1/2^{2kn}$, így

$$\int_{\mathbb{B}(0, 2^{k+1}) \setminus \mathbb{B}(0, 2^k)} g(x) d\beta^n(x) \leq \frac{1}{2^{2kn}} \mathbf{a}(n) 2^{n(k+1)} (2\pi)^{-n/2}.$$

Összegezve k -ra, és felhasználva, hogy g korlátos $\mathbb{B}(0, 1)$ -n, kapjuk, hogy g integrálható.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$ -ben. Legyen $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^p(\beta^n)$, $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$.

Legyen u_k , $k = 1, 2, \dots$ a 10.1.8. példában adott közelítő egység. Mivel 10.1.10. szerint $\|g - g * u_k\|_p \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, elég nagy k -ra $\|g - g * u_k\|_p < \varepsilon/2$, azaz $\|f - g * u_k\|_p < \varepsilon$. Mivel $g, u_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, a $g * u_k$ függvény is $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ -beli. Ha igazoljuk, hogy $g * u_k$ akárhányszor differenciálható, akkor készen vagyunk. Legyen e_1, \dots, e_n az \mathbb{R}^n szokásos bázisa. Ekkor

$$\frac{(u_k * g)(x + he_j) - (u_k * g)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x - y + he_j) - u_k(x - y)}{h} g(y) d\beta^n(y).$$

Mivel $\partial_j u_k$ korlátos, a jobb oldali integrálban lévő tört korlátos, és $\partial_j u_k(x - y)$ -hoz tart, ha $h \rightarrow 0$, így Lebesgue majorált konvergencia tételét alkalmazva, $\partial_j(u_k * g) = (\partial_j u_k) * g$. Mivel $u_k * g$ minden parciális deriváltja folytonos, $u_k * g$ differenciálható. Teljes indukcióval folytatva az eljárást, kapjuk, hogy $u_k * g$ akárhányszor differenciálható.

10.2. Függvények Fourier-transzformációja

* **10.2.1. Definíció.** Minden $t \in \mathbb{R}^n$ -hez legyen \mathbf{e}_t az

$$\mathbf{e}_t(x) = e^{i\langle t, x \rangle} = e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n)}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel definiált függvény. Ezeket a függvényeket *karaktereknek* nevezzük.

* **10.2.2. Megjegyzés.** Minden $t \in \mathbb{R}^n$ -re \mathbf{e}_t eleget tesz az

$$\mathbf{e}_t(x + y) = \mathbf{e}_t(x)\mathbf{e}_t(y), \quad \text{ha } x, y \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletnek, így \mathbf{e}_t egy, az \mathbb{R}^n additív csoportját az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportjába képező homomorfizmus. Minden \mathbf{e}_t folytonos.

* **10.2.3. Definíció.** Egy $f \in \mathbb{L}_\mathbb{C}^1(\beta^n)$ függvény *Fourier-transzformáltját* az

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{e}_{-t}(x) d\beta^n(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda^n(x)$$

összefüggéssel értelmezzük.

* **10.2.4. Riemann–Lebesgue-lemma.** A *Fourier-transzformáció lineáris leképezése* $\mathbb{L}_\mathbb{C}^1(\beta^n)$ -nek $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -be, és

$$\|\hat{f}\|_u \leq \|f\|_1, \quad \text{ha } f \in \mathbb{L}_\mathbb{C}^1(\beta^n).$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy

$$|\hat{f}(t)| = \left| \int f \mathbf{e}_{-t} d\beta^n \right| \leq \int |f| |\mathbf{e}_{-t}| d\beta^n = \int |f| d\beta^n = \|f\|_1.$$

A linearitás nyilvánvaló. Mutassuk meg, hogy \hat{f} folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $g \in \mathcal{K}_\mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_1 < \varepsilon/3$. Ekkor

$$(1) \quad \begin{aligned} |\hat{g}(t + t^*) - \hat{g}(t)| &\leq \int |g| |\mathbf{e}_{-(t+t^*)} - \mathbf{e}_{-t}| d\beta^n \\ &= \int |g(x)| |e^{-i\langle t^*, x \rangle} - 1| d\beta^n(x). \end{aligned}$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos, van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\left| e^{-i\langle t^*, x \rangle} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{3\|g\|_1}, \quad \text{ha } x \in \text{spt}(g) \text{ és } |t^*| < \delta.$$

Így $|t^*| < \delta$ esetén (1) jobb oldala nem nagyobb, mint $\varepsilon/3$. Ebből

$$\begin{aligned} |\hat{f}(t + t^*) - \hat{f}(t)| &\leq |\hat{f}(t + t^*) - \hat{g}(t + t^*)| + |\hat{g}(t + t^*) - \hat{g}(t)| + |\hat{g}(t) - \hat{f}(t)| \\ &\leq 2\|f - g\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Annak bizonyítására, hogy \hat{f} eltűnik a végtelenben, vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= -e^{-i\pi} \hat{f}(t) = -e^{-i\pi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle t, x + \pi t/|t|^2 \rangle} d\beta^n(x) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \pi t/|t|^2) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x).\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}2|\hat{f}(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \pi t/|t|^2)) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \pi t/|t|^2)| d\beta^n(x).\end{aligned}$$

A 10.1.9. tétel szerint a jobb oldal nullához tart, ha $|t| \rightarrow \infty$.

* **10.2.5. Tétel.** Ha $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n)$, akkor $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

Bizonyítás. A Fubini-tételt felhasználva, minden $t \in \mathbb{R}^n$ -re

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(t) &= \int (f * g) \mathbf{e}_{-t} d\beta^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\beta^n(y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle t, y+u \rangle} d\beta^n(u) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i\langle t, y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i\langle t, u \rangle} d\beta^n(u) d\beta^n(y).\end{aligned}$$

10.2.6. Megjegyzés. Az előző két tétel azt mutatja, hogy a Fourier-transzformáció az $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n)$ algebra-izomorf folytonos leképezése $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -be. Meg lehet mutatni, hogy $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ nem minden eleme lép fel képként.

A Fourier-transzformáció fontos tulajdonsága, hogy a „sima” függvényeket „végtelenben gyorsan eltűnő” függvényekbe viszi át és viszont: a deriválást polinommal való szorzással, a polinommal való szorzást pedig deriválássá változtatja. Ezt bizonyítja a következő két tétel.

* **10.2.7. Tétel.** Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvény m -szer folytonosan differenciálható és minden $|\alpha| \leq m$ -re a $\partial_\alpha f$ parciális derivált β^n -integrálható, akkor a $t \mapsto \hat{f}(t)|t|^m$ függvény $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -ben van, és $(P(\partial)f)^\wedge = P \cdot \hat{f}$ minden, legfeljebb m -edfokú P polinomra.

Bizonyítás. Teljes indukciót használva, elég azt megmutatnunk, hogy ha $1 \leq j \leq n$, akkor

$$(1) \quad (\partial_j f)^\wedge(t) = it_j \hat{f}(t).$$

Az $x^* = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jelöléssel, $x = (x^*, x_j)$ és így a Fubini-tétel miatt majdnem minden $x^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ -re az

$$x_j \mapsto f(x^*, x_j) \quad \text{és} \quad x_j \mapsto (\partial_j f)(x^*, x_j)$$

függvények β^1 -integrálhatóak. Mivel ilyen x^* -okra

$$f(x^*, b) - f(x^*, a) = \int_a^b (\partial_j f)(x^*, x_j) d\beta^1(x_j),$$

léteznek a

$$\lim_{x_j \rightarrow -\infty} f(x^*, x_j) \quad \text{és} \quad \lim_{x_j \rightarrow \infty} f(x^*, x_j)$$

határértékek. Ezek a határértékek csak nullák lehetnek, mivel $x_j \mapsto f(x^*, x_j)$ integrálható. Így parciális integrálással minden $N > 0$ -ra

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N e^{-i\langle t, x \rangle} (\partial_j f)(x^*, x_j) d\beta^1(x_j) &= e^{-i\langle t, (x^*, N) \rangle} f(x^*, N) - e^{-i\langle t, (x^*, -N) \rangle} f(x^*, -N) \\ &\quad + it_j \int_{-N}^N e^{-i\langle t, x \rangle} f(x^*, x_j) d\beta^1(x_j), \end{aligned}$$

amiből Lebesgue majorált konvergencia tételét felhasználva határátmenettel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle t, x \rangle} (\partial_j f)(x^*, x_j) d\beta^1(x_j) = it_j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle t, x \rangle} f(x^*, x_j) d\beta^1(x_j).$$

Most a Fubini-tételt alkalmazva kapjuk (1)-et.

*** 10.2.8. Tétel.** Legyen $f \in \mathbb{L}_\mathbb{C}^1(\beta^n)$ és tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$ -re az $x \mapsto f(x)|x|^m$ függvény integrálható. Ekkor az \hat{f} Fourier-transzformált m -szer folytonosan differenciálható és minden m -nél nem magasabb fokú P polinomra $(P \cdot f)^\wedge = P(-\partial)\hat{f}$.

Bizonyítás. A $t^* = (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n)$ és $t = (t^*, t_j)$ jelölésekkel

$$\frac{\hat{f}(t^*, t_j + \varepsilon) - \hat{f}(t^*, t_j)}{-i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} \frac{e^{-ix_j\varepsilon} - 1}{-ix_j\varepsilon} d\beta^n(x).$$

Mivel $|x_j| \leq |x|$, az $x \mapsto x_j f(x)$ függvény integrálható. Felhasználva, hogy

$$y \mapsto \frac{e^{-iy} - 1}{-iy}$$

korlátos függvény \mathbb{R} -en, és 1-hez tart, ha $y \rightarrow 0$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\partial_j \hat{f}$ létezik és

$$-\frac{1}{i}(\partial_j \hat{f})(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x).$$

Ebből teljes indukcióval kapjuk az állítást.

* **10.2.9. Tétel.** Legyen $f \in \mathbb{L}_C^1(\beta^n)$ és $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

- (1) $(\tau_x f)^\wedge = \mathbf{e}_{-x} \hat{f}$;
- (2) $(\mathbf{e}_x f)^\wedge = \tau_x \hat{f}$;
- (3) ha $\alpha > 0$ és $h(x) = f(x/\alpha)$, akkor $\hat{h}(t) = \alpha^n \hat{f}(\alpha t)$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **10.2.10. Lemma.** Legyen $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\varphi \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi} = \varphi$ és $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} d\beta^n = 1$.

Bizonyítás. Az világos, hogy $\varphi \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$. Ha $x \in \mathbb{R}$ esetén $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, akkor ψ eleget tesz az $y'(x) + xy(x) = 0$ differenciálegyenletnek. A 10.2.7. és 10.2.8. tételek szerint $\hat{\psi}$ is eleget tesz ennek a differenciálegyenletnek. Így

$$\left(\frac{\hat{\psi}}{\psi}\right)'(x) = \frac{\hat{\psi}'(x)\psi(x) - \psi'(x)\hat{\psi}(x)}{\psi(x)^2} = \frac{-x\hat{\psi}(x)\psi(x) + x\psi(x)\hat{\psi}(x)}{\psi(x)^2} = 0.$$

Mivel

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} d\lambda(x) = 1 = \psi(0),$$

kapjuk, hogy $\psi = \hat{\psi}$. Mivel

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \psi(x_1)\psi(x_2) \cdots \psi(x_n), \quad \text{ha } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2) \cdots \hat{\psi}(x_n), \quad \text{ha } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy $\varphi = \hat{\varphi}$.

* **10.2.11. Inverziós tétel.** Ha $f \in \mathbb{L}_C^1(\beta^n)$ és $\hat{f} \in \mathbb{L}_C^1(\beta^n)$, akkor β^n -majdnem mindenütt $\hat{\hat{f}} = \check{f}$.

Bizonyítás. Legyen φ az előző lemmában szereplő függvény, és $\varphi_\alpha = \alpha^n \varphi(\alpha x)$, ha $\alpha > 0$. A Fubini-tételt felhasználva és φ párosságát figyelembe véve

$$\begin{aligned} (f * \varphi_\alpha)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_\alpha(y) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\alpha^n \varphi(\alpha y) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) e^{-i\langle t, y \rangle} d\beta^n(t) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i\langle t, y \rangle} d\beta^n(y) d\beta^n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle t, x-z \rangle} d\beta^n(z) d\beta^n(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \hat{f}(-t) e^{-i\langle t, x \rangle} d\beta^n(t). \end{aligned}$$

Mivel $\varphi(t/\alpha) \rightarrow 1$, amint $\alpha \rightarrow \infty$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint a jobb oldal $\hat{f}(-x)$ -hez konvergál, amint $\alpha \rightarrow \infty$. Mivel $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n)$ -ben 10.1.10. szerint $f * \varphi_\alpha \rightarrow f$, ha $\alpha \rightarrow \infty$, van olyan α_k részsorozat, amelyre a bal oldal β^n -majdnem mindenütt konvergál f -hez. Így β^n -majdnem mindenütt $f = (\hat{f})^\sim$.

* **10.2.12. Unicitási tétel.** Ha $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n)$ és $\hat{f} = \hat{g}$, akkor β^n -majdnem mindenütt $f = g$.

Bizonyítás. Mivel $(f - g)^\wedge = \hat{f} - \hat{g} = 0$, az előző tétel szerint az $f - g$ függvény β^n -majdnem mindenütt nulla.

A következő tétel \mathcal{S} -en írja le a Fourier-transzformáció viselkedését.

* **10.2.13. Tétel.** Az $f \mapsto \hat{f}$ Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -nek önmagára, és $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ minden $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -re. Továbbá ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $fg \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$, és $(fg)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$.

Bizonyítás. A 10.2.8. és 10.2.7. tételekből következik, hogy $f \mapsto \hat{f}$ az $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -et önmagába képezi. Az inverziós tételből következik, hogy

$$f = \check{\check{f}} = (\check{f})^\wedge = \hat{\hat{f}},$$

azaz a Fourier-transzformáció $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -re képez. Ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor a szorzat differenciálására vonatkozó tétel szerint $fg \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Azt már láttuk, hogy $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, kapjuk, hogy $f * g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Végül

$$(\hat{f} * \hat{g})^\wedge = \hat{\hat{f}\hat{g}} = \check{\check{f}\check{g}} = (fg)^\sim = (fg)^\wedge,$$

és így mindkét oldalra alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, $(fg)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$.

* **10.2.14. Plancherel-tétel.** Létezik egy és csak egy olyan $f \mapsto F(f)$ lineáris izometrikus leképezése $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\beta^n)$ -nek önmagára, amelyre $F(f)$ az f Fourier-transzformáltja, ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n) \cap \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\beta^n)$.

Bizonyítás. Ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$\begin{aligned} \int f \bar{g} d\beta^n &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{i\langle t, x \rangle} d\beta^n(t) d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{i\langle t, x \rangle} d\beta^n(x) d\beta^n(t) = \int \hat{f} \bar{\hat{g}} d\beta^n. \end{aligned}$$

Ebből $f \mapsto \hat{f}$ izometrikus leképezése $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -nek önmagára a $\|\cdot\|_2$ normából származó metrikára nézve. Mivel $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\beta^n)$ -ben, és egy metrikus tér egy sűrű alterén

értelmezett, teljes metrikus térbe képező egyenletesen folytonos leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki az egész téren értelmezett folytonos leképezéssé, ez a leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki egy izometriává, amelynek értékkészlete $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\beta^n)$.

Ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n) \cap \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$, akkor ugyanúgy, mint a 4.4.6. tétel bizonyításában, találhatunk olyan $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - h\|_1 < \varepsilon$ és $\|f - h\|_2 < \varepsilon$. Ha u_k a 10.1.8. példában szereplő approximatív egység, akkor, mint azt a 10.1.14. tétel bizonyításában láttuk, $u_k * h \rightarrow h$ a $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normában is, így van olyan $g \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, amire $\|f - g\|_1 < 2\varepsilon$ és $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$. Választva egy olyan $g_k \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sorozatot, amely $\|\cdot\|_1$ -ben és $\|\cdot\|_2$ -ben is f -hez konvergál, \hat{g}_k az \hat{f} -höz konvergál egyenletesen, és $F(f)$ -hez $\|\cdot\|_2$ -ben. Egy részsorozatra áttérve, kapjuk, hogy β^n -majdnem mindenütt $\hat{f} = F(f)$.

10.3. Mértékek Fourier-transzformációja

Ebben a fejezetben az \mathbb{R}^n feletti valós és komplex Radon-mértékekre általánosítjuk a Fourier-transzformációt és a konvolúciót.

* **10.3.1. Definíció.** Legyen $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz, legyen

$$\kappa(B) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

Nyilván κ egy \mathbb{K} -beli értékű mérték \mathbb{R}^n Borel-halmazain. Ennek természetes kiterjesztését μ és ν konvolúciójának nevezzük, és $\mu * \nu$ -vel jelöljük.

* **10.3.2. Tétel.** Az előző definíció jelöléseivel, $\mu * \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$, és ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(|\mu| * |\nu|)$, akkor az alábbi integrálok léteznek és

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d(\mu * \nu) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \\ (1) \qquad \qquad \qquad &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) d\nu(y) d\mu(x). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\mu * \nu$ teljes \mathbb{K} -beli értékű Radon-mérték \mathbb{R}^n -en. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz, akkor $\varphi_{\mu} = d\mu/d|\mu|$ és $\varphi_{\nu} = d\nu/d|\nu|$ jelölésekkel, $\mu \otimes \nu$ definíciója és a Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned} \kappa(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(t) d(\mu * \nu)(t) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \\ (2) \qquad \qquad \qquad &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) \varphi_{\mu}(x) \varphi_{\nu}(y) d(|\mu| \otimes |\nu|)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d\nu(y) d\mu(x). \end{aligned}$$

Ebből

$$(3) \quad |(\mu * \nu)(B)| = |\kappa(B)| \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d(|\mu| \otimes |\nu|)(x,y) = (|\mu| * |\nu|)(B)$$

minden B Borel-halmazára \mathbb{R}^n -nek. Ezt felhasználva

$$(4) \quad (|\mu * \nu|)(B) = |\kappa|(B) \leq (|\mu| * |\nu|)(B) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d(|\mu| \otimes |\nu|)(x,y)$$

minden B Borel-halmazra, és így

$$\|\mu * \nu\| = \|\kappa\| \leq \|\mu\| \|\nu\|.$$

Ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ egy egyszerű Borel-függvény, amely $|\mu| * |\nu|$ -integrálható, akkor (3)-ból következik, hogy $|\mu * \nu|$ -integrálható is, és fennáll rá (1).

Végül egy tetszőleges $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(|\mu| * |\nu|)$ függvényhez választva egy olyan egyszerű Borel-függvényekből álló $|s_n| \leq |f|$, $n = 1, 2, \dots$ sorozatot, amely $|\mu| * |\nu|$ -majdnem mindenütt f -hez konvergál, (4) felhasználásával azt kapjuk, hogy $|\mu * \nu|$ -majdnem minden $t \in \mathbb{R}^n$ -re $s_n(t) \rightarrow f(t)$ és $|\mu| \otimes |\nu|$ -majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -re $s_n(x+y) \rightarrow f(x+y)$, így Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint (1) teljesül f -re is.

* **10.3.3. Tétel.** Az $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ Banach-tér a konvolúcióval mint szorzással egységelemes kommutatív Banach-algebra \mathbb{K} felett.

Bizonyítás. Az előző tételből következik, hogy ha $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $\mu * \nu$ és $\nu * \mu$ egybeesnek a Borel-halmazokon, így azonosak. Ha még $\kappa \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, akkor a Fubini-tétel segítségével végzett számolás mutatja, hogy $(\mu * \nu) * \kappa$ és $\mu * (\nu * \kappa)$ is egybeesnek a Borel-halmazokon, így azonosak. Az $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ térben a

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \in A \subset \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } 0 \notin A \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

összefüggéssel definiált δ Dirac-mérték egységelem. A többi tulajdonság bizonyítása egyszerű.

* **10.3.4. Tétel.** Ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$, legyen

$$\kappa_f(B) = \int_B f d\beta^n,$$

ha B Borel-halmaz \mathbb{R}^n -ben. Ekkor κ_f egy \mathbb{K} -beli értékű Radon-mérték \mathbb{R}^n -en. Jelölje μ_f a κ_f természetes kiterjesztését. Ekkor az $f \mapsto \mu_f$ leképezés izometrikusan izomorf beágyazása az $\mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$ Banach-algebrának $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ -be.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy κ_f Radon-mérték. A Radon-Nikodym-tétel szerint

$$|\kappa_f|(B) = \int_B |f| d\beta^n,$$

ha B Borel-halmaz \mathbb{R}^n -ben, így $\|\kappa_f\| = \|\mu_f\| = \|f\|_1$. Az, hogy a fenti leképezés additív, nyilvánvaló. Ha $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}^1(\beta^n)$, akkor \mathbb{R}^n bármely B Borel-halmazára

$$\begin{aligned} \mu_{f*g}(B) &= \int_B (f * g)(x) d\beta^n(x) \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) d\beta^n(y) d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_B f(x-y)g(y) d\beta^n(x) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x) f(x-y)g(y) d\beta^n(x) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) f(x)g(y) d\beta^n(x) d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) d\mu_f(x) d\mu_g(y) = (\mu_f * \mu_g)(B). \end{aligned}$$

* **10.3.5. Definíció.** Legyen $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. A μ Fourier-transzformáltját a

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t} d\mu, \quad \text{ha } t \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel értelmezzük. Megjegyezzük, hogy $\hat{\mu}$ egy \mathbb{R}^n -et \mathbb{C} -be képező függvény és 10.3.4. jelöléseivel, ha $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\beta^n)$, akkor $\hat{f} = (\mu_f)^\wedge$.

Hogy a Fourier-transzformáció legfontosabb tulajdonságait megvizsgálhassuk, szükségünk lesz egy fogalomra és egy tételre.

* **10.3.6. Definíció.** Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *trigonometrikus polinomnak* nevezünk, ha előáll karakterek véges lineáris kombinációjaként. Az összes trigonometrikus polinomok lineáris terét $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ -nel jelöljük.

* **10.3.7. Tétel.** Ha μ véges teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en és $1 \leq p < \infty$, akkor $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ sűrű részhalmaza $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ -nek.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ és $0 < \varepsilon < 1$. Válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Válasszuk meg az $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pozitív számokból álló vektort úgy, hogy az

$$A = [-\pi a_1, \pi a_1] \times [-\pi a_2, \pi a_2] \times \dots \times [-\pi a_n, \pi a_n]$$

halmaz belsejében tartalmazza g tartóját, továbbá

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \frac{\varepsilon^p}{4^p(\|g\|_u + 1)^p}$$

teljesüljön. Ekkor a $h : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a

$$h(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}) = g(a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$$

összefüggés egyértelműen definiálja és h folytonos \mathbb{T}^n -en. Tekintsük az összes

$$\sum_{|\gamma|, |\delta| \leq m} c_{\gamma, \delta} z^\gamma z^{-\delta}, \quad \text{ha } z \in \mathbb{T}^n$$

alakú függvények \mathcal{H} osztályát, ahol $m \in \mathbb{N}$, γ és δ multiindexek, és $c_{\gamma, \delta} \in \mathbb{C}$. A \mathcal{H} függvényosztály $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$ egy részalgebrája, tartalmazza az azonosan 1 függvényt, szétválasztja \mathbb{T}^n pontjait, és zárt a komplex konjugált képzésére, így a 11.3.13. (komplex) Weierstrass–Stone-tétel szerint \mathcal{H} sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$ -ben az uniform normára nézve. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$k(z) = \sum_{|\gamma|, |\delta| \leq m} c_{\gamma, \delta} z^\gamma z^{-\delta}, \quad \text{ha } z \in \mathbb{T}^n$$

függvény, amelyre

$$|h(z) - k(z)| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p} + 1}, \quad \text{ha } z \in \mathbb{T}^n,$$

azaz

$$\left| g(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) - \sum_{|\gamma|, |\delta| \leq m} c_{\gamma, \delta} e^{i(\gamma_1 - \delta_1)x_1} \dots e^{i(\gamma_n - \delta_n)x_n} \right| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p} + 1}.$$

Az $a_j x_j$ helyére y_j -t írva, azt kapjuk, hogy van olyan t trigonometrikus polinom, amely a j -edik változójában $2\pi a_j$ szerint periodikus, és teljesül rá, hogy

$$|g(y) - t(y)| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p} + 1}, \quad \text{ha } y \in A.$$

Mivel t periodikus, uniform normája megegyezik abszolút értékének az \bar{A} -on felvett szuprémumával, azaz

$$\|t\|_u \leq \|g\|_u + \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p} + 1} \leq \|g\|_u + 1.$$

Ebből

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |g - t|^p d\mu &\leq \int_A \left(\frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p} + 1} \right)^p d\mu + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} (\|g\|_u + 1)^p d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{4^p} + \frac{\varepsilon^p}{4^p} \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p}. \end{aligned}$$

* **10.3.8. Tétel.** A $\mu \mapsto \hat{\mu}$ Fourier-transzformáció $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -nek $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -be való algebra-izomorf leképezése. Minden $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ -re $\hat{\mu}$ egyenletesen folytonos, és $\|\hat{\mu}\|_u \leq \|\mu\|$.

Bizonyítás. Mivel $|\hat{\mu}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e_{-t}| d|\mu| \leq \|\mu\|$, kapjuk, hogy $\|\hat{\mu}\|_u \leq \|\mu\|$. Megmutatjuk, hogy $\hat{\mu}$ egyenletesen folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt, amelyre $|\mu|(\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon/4$. Létezik olyan $\delta > 0$, amelyre

$$\left| e^{i\langle t, x \rangle} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}, \quad \text{ha } x \in K, t \in \mathbb{R}^n \text{ és } |t| < \delta.$$

Ha $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$, $|t_1 - t_2| < \delta$, akkor

$$|\hat{\mu}(t_1) - \hat{\mu}(t_2)| \leq \int_K |\mathbf{e}_{-t_1} - \mathbf{e}_{-t_2}| d|\mu| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} 2 d|\mu| < \varepsilon.$$

Legyen most $\mu, \nu \in \mathbb{M}$. A komplex mértékek szerinti integrál tulajdonságából következik, hogy $(c\mu)^\wedge = c\hat{\mu}$ és $(\mu + \nu)^\wedge = \hat{\mu} + \hat{\nu}$. Másrészt a 10.3.2. tétel szerint

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)^\wedge(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t} d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}(x)\mathbf{e}_{-t}(y) d\mu(x) d\nu(y) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(t). \end{aligned}$$

Hátravan még annak bizonyítása, hogy ha $\hat{\mu}(t) = 0$ minden $t \in \mathbb{R}^n$ -re, akkor $\mu = 0$. Valóban, ekkor $\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu = 0$ minden $g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ -re. Legyen $\varepsilon > 0$. Az előző tétel szerint a $\varphi = d\mu/d|\mu|$ függvény konjugáltjához van olyan g trigonometrikus polinom, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{\varphi} - g| d|\mu| < \varepsilon$. Ebből

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= \int_{\mathbb{R}^n} 1 d|\mu| = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}\varphi d|\mu| = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi} d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\varphi} - g) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{\varphi} - g| d|\mu| < \varepsilon. \end{aligned}$$

* **10.3.9. Definíció.** Egy $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *pozitív definitnek* nevezünk, ha

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_j \alpha_k \varphi(t_k - t_j) \geq 0,$$

valahányszor t_1, t_2, \dots, t_m különböző \mathbb{R}^n -beli elemek és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ komplex számok.

* **10.3.10. Tétel.** Ha μ véges teljes Radon-mérték \mathbb{R}^n -en, akkor $\hat{\mu}$ pozitív definit függvény.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_j \alpha_k \hat{\mu}(t_k - t_j) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_j \alpha_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}(t_j - t_k) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \bar{\alpha}_j \alpha_k e^{i(t_j, x)} e^{-i(t_k, x)} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{i(t_j, x)} \right|^2 d\mu(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyszerű állításnak a megfordítása igen fontos.

* **10.3.11. Bochner tétele.** Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ egy folytonos pozitív definit függvény. Ekkor egy és csak egy olyan μ véges teljes Radon-mérték létezik \mathbb{R}^n -en, amelyre $\hat{\mu} = \varphi$.

Mivel a bizonyítás mély funkcionálanalízisbeli eszközöket igényel, elhagyjuk. Megtalálható például Dieudonné [6] könyvében, 22.10.

11. FÜGGELÉK

11.1. Topológiai alapfogalmak

11.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy \mathcal{T} topológia az X halmazon, ha \mathcal{T} az X részhalmazaiából álló halmazrendszer, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) $X \in \mathcal{T}$;
- (2) ha $\gamma \in \Gamma$ esetén $V_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\cup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma \in \mathcal{T}$;
- (3) ha $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$, akkor $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$.

Az (X, \mathcal{T}) párt, vagy legtöbbször magát X -et, *topologikus térnek* nevezzük. A \mathcal{T} elemeit *nyílt halmazoknak* nevezzük.

11.1.2. Példák. (1) Bármely (X, d) metrikus tér egyben topologikus tér is, ha a nyílt halmazokat a szokásos módon definiáljuk: Egy $V \subset X$ halmaz tartozzon \mathcal{T} -hez, ha bármely $x \in V$ -hez van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az

$$\mathbb{U}(x, \varepsilon) = \{y : y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$$

x középpontú, ε sugarú nyílt gömb része V -nek. Ugyanazt kapjuk, ha a nyílt gömbök helyett a

$$\mathbb{B}(x, \varepsilon) = \{y : y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

x középpontú, ε sugarú zárt gömböket használjuk. Ezt a \mathcal{T} -t a *metrikából származó topológiának* nevezzük. Több különböző metrikából származhat ugyanaz a topológia. Ha valamely topologikus tér topológiája metrikából származtatható, akkor a teret *metrizálhatónak* nevezzük. Az $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ terek *szokásos topológiáján* a $d(x, y) = |x - y|$ távolságból származó topológiát értjük. Használni fogjuk az $\mathbb{S}(x, \varepsilon) = \mathbb{B}(x, \varepsilon) \setminus \mathbb{U}(x, \varepsilon)$ jelölést: $\mathbb{S}(x, \varepsilon)$ az x középpontú, ε sugarú gömbfelület. Egy $A \subset X$ halmaz *átmérője* a

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

bővített valós szám. Ha $A, B \subset X$, legyen

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

az A és B halmazok távolsága. Ha $A = \{x\}$, akkor $\text{dist}(x, B)$ -t írunk. Gyakran, ha nem kívánjuk megadni a távolságfüggvényt, két pont távolságát $\text{dist}(x, y)$ -nal jelöljük.

(2) A metrikus térnél általánosabb fogalmat kapunk, ha egy X halmazon egy $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ függvényt tekintünk, amelyre

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x), \quad \text{ha } x, y \in X; \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z), \quad \text{ha } x, y, z \in X. \end{aligned}$$

Egy ilyen függvényt *eltérésnek*, az (X, d) párt *félmetrikus térnek* nevezzük, és az X -nek a d eltérésből származó topológiája ugyanúgy definiálható, mint metrikus tér esetében.

(3) Bármely X halmaz topologikus térré tehető, ha \mathcal{T} -nek 2^X -et, az X összes részhalmazainak rendszerét választjuk. Az így kapott teret *diszkrét topologikus térnek* nevezzük. Ha $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, akkor az *indiszkrét teret* kapjuk.

(4) Ha X lineárisan rendezett a $<$ relációval, akkor X topologikus térré tehető. Az $\{x : x \in X, a < x < b\}$, $\{x : x \in X, a < x\}$, $\{x : x \in X, x < b\}$ alakú halmazokat, ahol $a, b \in X$, *nyílt intervallumoknak* nevezzük. Egy $V \subset X$ halmaz tartozzon \mathcal{T} -hez, ha minden $x \in V$ -hez van olyan I nyílt intervallum, hogy $x \in I \subset V$. Az így kapott topológiát az X *rendezéstopológiájának* nevezzük. A *bővített valós számok szokásos topológiáján* az $\overline{\mathbb{R}}$ természetes rendezéséből származó topológiát értjük.

11.1.3. Definíció. Egy X topologikus térben az E halmazt az x pont *környezetének* nevezzük, ha tartalmaz x -et tartalmazó nyílt halmazt. Ilyenkor x -et E *belső pontjának* nevezzük. Az E *belsején* az E összes belső pontjainak halmazát értjük, ezt E° -rel jelöljük. Az E halmazt *zártnak* nevezzük, ha a komplementere nyílt. Az x pontot E *torlódási pontjának* nevezzük, ha x minden környezete tartalmazza E -nek x -től különböző pontját. Ha x minden környezete E -nek megszámlálhatónál több pontját tartalmazza, akkor x -et az E *kondenzációs pontjának* nevezzük. Az E halmaz \overline{E} -sal jelölt *lezártján* E -nek és E torlódási pontjai halmazának az unióját értjük. Az E halmaz ∂E *határa* az $\overline{E} \setminus E^\circ$ halmaz. Az E egy x pontját *izolált pontnak* nevezzük, ha x nem torlódási pontja E -nek. Az E -t *perfektnek* nevezzük, ha zárt és nincs izolált pontja. Az E -t *sűrűnek* nevezzük, ha lezártja az egész X . Az E halmazt *sehol sem sűrűnek* nevezzük, ha lezártjának nincs belső pontja. Ha E előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként, akkor *első kategóriájúnak* nevezzük, egyébként pedig *második kategóriájúnak*.

Ezek a fogalmak ismertek a metrikus terek elméletében. A rájuk vonatkozó egyszerű állítások érvényben maradnak topologikus terekben is, és a bizonyítások is hasonlóak.

11.1.4. Definíció. Legyenek X és Y topologikus terek és $f : X \rightarrow Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az $x \in X$ pontban*, ha $f(x)$ minden V környezetéhez van olyan U környezete x -nek, amelyre $f(U) \subset V$. Azt mondjuk, hogy f *folytonos X -en*, ha f folytonos X minden pontjában. Egy függvény pontosan akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt. Folytonos függvények kompozíciója is folytonos.

11.1.5. Definíció. Legyenek X és Y topologikus terek és f egy X -et Y -ra képező kölcsönösen egyértelmű függvény. Ha f és f^{-1} is folytonos, akkor f -et *homeomorfizmusnak* nevezzük. Ha X és Y között létezik homeomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy X és Y *homeomorfak*.

Használni fogjuk a következő, a folytonosságnál, sőt, az egyenletes folytonosságnál is erősebb fogalmat:

11.1.6. Definíció. Legyenek X és Y metrikus terek. Egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt *Lipschitz-függvénynek* nevezünk, ha létezik olyan M valós szám, hogy

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq M \text{dist}(x, y)$$

bármely $x, y \in X$ -re. Az M -re azt mondjuk, hogy *Lipschitz-konstans* f részére. Minden Lipschitz-függvényhez létezik egy legkisebb Lipschitz-konstans, amelyet $\text{Lip}(f)$ -fel jelölünk. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan Lipschitz függvény*, ha X minden pontjának van olyan V környezete, amelyre $f|_V$ Lipschitz-függvény.

11.1.7. Definíció. Egy X topologikus tér egy A részhalmazát \mathcal{F}_σ -halmaznak nevezzük, ha előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként. Az X egy B részhalmazát \mathcal{G}_δ -halmaznak nevezzük, ha előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. A definícióból világos, hogy \mathcal{F}_σ -halmazok véges metszete és megszámlálható uniója is \mathcal{F}_σ -halmaz, valamint \mathcal{G}_δ -halmazok véges uniója és megszámlálható metszete is \mathcal{G}_δ -halmaz.

11.1.8. Tétel. *Metrikus térben minden nyílt halmaz \mathcal{F}_σ -halmaz és minden zárt halmaz \mathcal{G}_δ -halmaz.*

Bizonyítás. Ha V nyílt halmaz, akkor

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : x \in X, \text{dist}(x, X \setminus V) \geq 1/n\}.$$

Hasonlóan, ha F zárt részhalmaza X -nek, akkor

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : x \in X, \text{dist}(x, F) < 1/n\}.$$

11.1.9. Definíció. Az X topologikus tér nyílt részhalmazainak egy \mathcal{B} rendszerét a *topológia bázisának* nevezzük, ha minden nyílt halmaz előállítható \mathcal{B} -beli halmazok egyesítéseként. Nyílt halmazok egy \mathcal{S} rendszerét a *topológia szubbázisának* nevezzük, ha az \mathcal{S} -beli halmazok összes véges metszetei bázisát alkotják X topológiájának.

11.1.10. Definíció. Legyen (X, \mathcal{T}) topologikus tér és $Y \subset X$. Ekkor Y topologikus tér lesz, ha topológiának a

$$\{V \cap Y : V \in \mathcal{T}\}$$

halmazrendszert választjuk. Ezt a topológiát Y *altértopológiájának* nevezzük, Y -t pedig ezzel a topológiával X *alterének*.

Metrizálható tér minden altere metrizálható: metrikának választhatjuk az X metrikájának $Y \times Y$ -ra való megszorítását. Ezzel a metrikával Y -t az X *metrikus tér alterének* nevezzük.

Ha más nem mondunk, egy topologikus, illetve metrikus tér alterét mindig az altértopológiával, illetve az altérmetrikával látjuk el. Például az $[a, b]$, (a, b) stb. intervallumokat az \mathbb{R} , a $\mathbb{T} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ komplex egységkört a \mathbb{C} altereként metrizáljuk és topologizáljuk.

11.1.11. Definíció. Legyen X_γ , $\gamma \in \Gamma$ topologikus terek egy rendszere, és legyen $X = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Legyen \mathcal{S} az összes $\prod_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ alakú halmazok osztálya, ahol V_γ nyílt részhalmaza X_γ -nak minden $\gamma \in \Gamma$ -ra, és legfeljebb egy olyan $\gamma_0 \in \Gamma$ létezik, amelyre $V_{\gamma_0} \neq X_{\gamma_0}$. Jelölje \mathcal{B} az \mathcal{S} -beli halmazok véges metszeteként előálló halmazokat. Végül legyen \mathcal{T} az X olyan részhalmazainak osztálya, amelyek előállnak \mathcal{B} -beli halmazok egyesítéseként. Ekkor \mathcal{T} topológia X -en, amelyet az X szorzattopológiájának nevezünk, X -et pedig ezzel a topológiával az X_γ , $\gamma \in \Gamma$ terek szorzatának.

Észrevehetjük, hogy \mathcal{S} szubbázisa, \mathcal{B} pedig bázisa a szorzattopológiának, és hogy \mathcal{S} -ben pontosan a $p_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ alakú halmazok vannak, ahol V_γ tetszőleges nyílt részhalmaza X_γ -nak, $p_\gamma : (x) \mapsto x_\gamma$ pedig a γ -adik projekció.

Véges vagy megszámlálható sok metrizable tér szorzata is metrizable: ha d_i metrika X_i -n, $i = 1, 2, \dots$, akkor véges esetben a

$$\max_i d_i, \quad \sum_i d_i \quad \text{vagy} \quad \sqrt{\sum_i d_i^2}$$

metrikákat, végtelen esetben a

$$\sum_i \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i}$$

metrikát szokás választani. Látjuk, hogy a szorzattér metrikája nem egyértelmű, és még a tényezők sorrendjétől is függhet, de mindig a szorzattér topológiáját adja vissza.

→ **11.1.12. Feladat [5].** Igaz-e, hogy egy topologikus tér egy alterének minden nyílt részhalmaza nyílt az eredeti térben, és minden zárt részhalmaza zárt az eredeti térben?

→ **11.1.13. Feladat [6].** Legyen X metrikus tér, $A \subset X$. Mutassuk meg, hogy $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ Lipschitz-függvény és $\text{dist}(x, A) = 0$ pontosan akkor, ha $x \in \overline{A}$.

→ **11.1.14. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy \mathbb{R} és $(0, 1)$, illetve $\overline{\mathbb{R}}$ és $[0, 1]$ homeomorfak.

→ **11.1.15. Feladat [9].** Bizonyítsuk be, hogy az \mathbb{R} , $\overline{\mathbb{R}}$, \mathbb{C} és \mathbb{T} terek között nincs két homeomorf.

11.1.16. Feladat [5]. Van-e olyan, nyílt intervallummal homeomorf térgörbe, amely értékkészletének lezártja az egész tér?

* **11.1.17. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy teljes metrikus tér bármely nem üres perfekt részhalmaza tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt.

11.1.18. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy egy halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a komplementere tartalmaz sűrű nyílt halmazt.

11.1.19. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy egy sehol sem sűrű halmaz minden részhalmaza és véges sok sehol sem sűrű halmaz egyesítése is sehol sem sűrű.

11.1.20. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy egy első kategóriájú halmaz minden részhalmaza és megszámlálható sok első kategóriájú halmaz egyesítése is első kategóriájú.

* **11.1.21. Feladat: Baire-tétel [13].** Bizonyítsuk be, hogy teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű, azaz teljes metrikus tér második kategóriájú.

* **11.1.22. Feladat [12].** Konstruáljunk a számegegyenesen olyan egymással homeomorf A és B halmazokat, amelyekre A első, B második kategóriájú.

11.1.23. Feladat [10]. Igazoljuk, hogy \mathbb{Q} az \mathbb{R} -ben \mathcal{F}_σ -halmaz, de nem \mathcal{G}_δ -halmaz.

11.1.24. Feladat: oszcillációs függvény [9]. Legyenek X, Y metrikus terek és $f : X \rightarrow Y$. Legyen $\omega_f(x)$ a $\text{diam}(f(V))$ bővített valós számok infimuma, ahol V befutja x környezetét. Az ω_f függvényt az f oszcillációs függvényének nevezzük. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos az x pontban, ha $\omega_f(x) = 0$. Igazoljuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ -re az $\{x : x \in X, \omega_f(x) < \alpha\}$ halmaz nyílt.

11.1.25. Feladat [10]. Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvényt, amely pontosan az irracionális pontokban folytonos. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

* **11.1.26. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvény deriváltjának folytonossági helyei mindenütt sűrűek (a, b) -ben.

11.2. Topologikus terek fajtái

11.2.1. Definíció. Egy X topologikus teret *Hausdorff-térnek* nevezünk, ha bármely két különböző x, y pontja nyílt halmazzal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V diszjunkt nyílt halmazok, hogy $x \in U$ és $y \in V$. Az X Hausdorff-teret *regulárisnak* nevezük, ha bármely F zárt halmaz és rajta kívül eső x pont nyílt halmazokkal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V nyílt, diszjunkt halmazok, hogy $F \subset U$ és $x \in V$. Egy Hausdorff-teret *teljesen regulárisnak* nevezünk, ha bármely F zárt részhalmaza és rajta kívül eső x pont folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz létezik olyan $f : X \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvény, amely az F halmazon 0-t, az x pontban pedig 1-et vesz fel értéként. Végül az X Hausdorff-teret *normálisnak* nevezük, ha bármely két diszjunkt zárt E, F részhalmaza nyílt halmazzal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $E \subset U$ és $F \subset V$.

Mivel Hausdorff-térben az egyelemű halmazok zártak, minden normális tér egyben reguláris is. Ha az f függvény szétválasztja az F halmazt és az x pontot, akkor az $f^{-1}((-\infty, 1/2))$ és $f^{-1}((1/2, \infty))$ nyílt halmazok szétválasztják F -et és x -et, azaz teljesen reguláris tér egyben reguláris is. Nem világos azonban, hogy mi a kapcsolat a teljesen reguláris terek és a normális terek között, továbbá nem kapunk-e új térfajtát, ha azt követeljük meg, hogy bármely két diszjunkt zárt halmaz függvénnyel szétválasztható legyen. Mindkét kérdésre választ ad a következő tétel.

11.2.2. Uriszon-lemma. Egy X normális topologikus tér bármely két diszjunkt E, F zárt részhalmazához létezik olyan $f : X \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvény, amely 0 az E minden pontjában, és 1 az F minden pontjában.

Bizonyítás. Nyílt halmazok egy $V(r)$, $r \in R$ rendszerét fogjuk megkonstruálni, ahol R a $[0, 1]$ diadikus racionális számainak halmaza, azaz

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n \right\}.$$

Legyen $V(1) = X \setminus F$, és válasszunk egy $V(0)$ nyílt halmazt, amelyre $E \subset V(0)$ és $V(0) \subset V(1)$. Indukciót használva tegyük fel, hogy egy n -re a $V(k/2^n)$ halmazok már meg vannak választva úgy, hogy $\overline{V(k/2^n)} \subset V((k+1)/2^n)$, ha $0 \leq k < 2^n$ és minden $(2k+1)/2^{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ alakú diadikus racionális számhoz válasszunk egy $V((2k+1)/2^{n+1})$ nyílt halmazt, amelyre

$$\overline{V(k/2^n)} \subset V((2k+1)/2^{n+1}) \quad \text{és} \quad \overline{V((2k+1)/2^{n+1})} \subset V((k+1)/2^n).$$

Most legyen

$$f(x) = \inf \{1, r : r \in R, x \in V(r)\}, \quad \text{ha } x \in X.$$

Megjegyezzük, hogy metrikus térben az állítás triviális, mert

$$f(x) = \frac{\text{dist}(x, E)}{\text{dist}(x, E) + \text{dist}(x, F)}$$

választható.

11.2.3. Definíció. Legyen X topologikus tér, A Abel-csoport és $f : X \rightarrow A$ egy függvény. Az f tartóján az $\text{spt}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ halmazt értjük.

* **11.2.4. Az egység felbontása.** Legyen X egy normális tér, F zárt részhalmaza X -nek, és V_1, V_2, \dots, V_n nyílt részhalmazai X -nek úgy, hogy $F \subset \cup_{k=1}^n V_k$. Ekkor léteznek $h_k : X \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvények úgy, hogy

- (1) $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ minden $x \in F$ -re;
- (2) $\text{spt}(h_k) \subset V_k$, ha $k = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Megmutatjuk, hogy az A_1, \dots, A_n zárt halmazok megválaszthatók úgy, hogy $\cup_{k=1}^n A_k = X$ és $A_k \subset V_k$ teljesüljön. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$. Ha $n = 2$, válasszunk olyan W_1, W_2 diszjunkt nyílt halmazokat, amelyek az $X \setminus V_1$ és $X \setminus V_2$ diszjunkt zárt halmazokat elválasztják egymástól, és legyen $A_1 = X \setminus W_1$, $A_2 = X \setminus W_2$. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n-1$ -re, és legyen $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Mivel $X = (\cup_{k=1}^{n-1} V_k) \cup V_n$, léteznek A és A_n zárt halmazok, amelyekre $A \subset \cup_{k=1}^{n-1} V_k$, $A_n \subset V_n$ és $A \cup A_n = X$. Most $k = 1, 2, \dots, n-1$ -re legyen $W_k = V_k \cap A$. Az A zárt altérre alkalmazva az indukciós feltevést, olyan A_1, \dots, A_{n-1} zárt halmazokat kapunk, amelyekre $\cup_{k=1}^n A_k = X$.

Először tegyük fel, hogy $F = X$. Ekkor $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Ha az A_1, \dots, A_n halmazok az előző lépés szerint vannak meghatározva, az Urison-lemma szerint léteznek olyan $f_k :$

$X \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $f_k(A_k) = 1$ és $\text{spt}(f_k) \subset V_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Legyen

$$h_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}, \quad \text{ha } x \in X.$$

Végül, az általános esetben, legyen $V_0 = X \setminus F$ és alkalmazzuk az előző lépést. Mivel $h_0(F) = 0$,

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1, \quad \text{ha } x \in F.$$

11.2.5. Tétel. *Metrizálható tér normális.*

Bizonyítás. Ha E és F nem üres, diszjunkt zárt halmazok, akkor legyen

$$U = \{x : x \in X, \text{dist}(x, E) < \text{dist}(x, F)\},$$

$$V = \{x : x \in X, \text{dist}(x, F) < \text{dist}(x, E)\}.$$

11.2.6. Definíció. Egy topologikus teret *megszámlálható bázisúnak* nevezünk, ha van megszámlálható bázisa. Nyilvánvaló, hogy megszámlálható bázisú tér minden altere is megszámlálható bázisú. A legegyszerűbb példa megszámlálható bázisú térre \mathbb{R} a szokásos topológiával: a racionális végpontú nyílt intervallumok megszámlálható bázisát alkotják \mathbb{R} -nek.

Az \mathbb{R} topológiájának egy speciális vonása, hogy bármely nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítéseként: ez a *nyílt halmazok struktúratétele*. Bizonyításához tekintsük egy adott nyílt halmaz olyan részintervallumait, amelyeknek végpontjai már nincsenek az adott nyílt halmazban. Ezek könnyen láthatóan diszjunktak, és legfeljebb megszámlálható sok ilyen intervallum van, mert mindegyik tartalmaz racionális számot.

11.2.7. Tétel. *Megszámlálható sok megszámlálható bázisú topologikus tér szorzata is megszámlálható bázisú.*

Bizonyítás. Legyen I egy megszámlálható halmaz és minden $i \in I$ -re \mathcal{B}_i az X_i tér egy megszámlálható bázisa. Ha \mathcal{B} az összes olyan $V = \prod_{i \in I} V_i$ alakú halmazokból áll, amelyekre $V_i = X_i$ vagy $V_i \in \mathcal{B}_i$ és véges sok i kivételével az első eset áll fenn, akkor \mathcal{B} az X egy megszámlálható bázisa.

11.2.8. Tétel. *Megszámlálható bázisú tér bármely bázisából kiválasztható megszámlálható bázis.*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{B} egy tetszőleges bázisa X -nek, \mathcal{B}' pedig egy megszámlálható bázisa X -nek. Minden olyan $B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}'$ párhoz, amelyhez ez lehetséges, válasszunk ki egy $B^* \in \mathcal{B}$ halmazt, amelyre $B'_1 \subset B^* \subset B'_2$. Ha \mathcal{B}^* az így kiválasztott B^* nyílt halmazok rendszere, akkor \mathcal{B}^* megszámlálható bázisa X -nek.

11.2.9. Definíció. Egy topologikus teret *szeparábilisnak* nevezünk, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza. Megszámlálható bázisú topologikus tér mindig szeparábilis: egy bázis minden eleméből választva egy pontot, sűrű halmazt kapunk. A megfordítás általában nem igaz, de metrizable terekben igen: egy sűrű halmaz minden eleme körül véve az összes racionális sugarú nyílt gömböt, bázist kapunk.

11.2.10. Definíció. Egy topologikus teret *kompaktnak* nevezünk, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés. A topologikus tér egy *részalmazát kompaktnak* nevezzük, ha mint altér, kompakt. Egy részalmazt *σ -kompaktnak* nevezünk, ha előállítható megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítéseként. Egy *topologikus teret σ -kompaktnak* nevezünk, ha mint önmaga részhalmaza, σ -kompakt. Egy topologikus teret *lokálisan kompaktnak* nevezünk, ha minden pontjának van kompakt környezete. Az X topologikus téren értelmezett f függvényt *kompakt tartójúnak* nevezzük, ha $\text{spt}(f)$ kompakt.

Halmazok egy rendszerét *centráltnak* szokás nevezni, ha a halmazrendszerből tetszés szerint választva véges sok halmazt, azoknak van közös pontja. Komplementerekre térve át következik, hogy egy topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha benne zárt halmazok bármely centrált rendszerének van közös pontja. Könnyű látni, hogy kompakt tér zárt részhalmaza is kompakt. Megfordítva, Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt. Hasonlóan, σ -kompakt tér minden zárt részhalmaza σ -kompakt. Kompakt tér folytonos képe is kompakt. Ha f egy kompakt térnek egy Hausdorff-térbe való folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezése, akkor f homeomorfizmus. Emlékeztetünk a Heine–Borel-tételre: \mathbb{R}^n vagy \mathbb{C}^n egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Ebből következik, hogy \mathbb{R}^n és \mathbb{C}^n lokálisan kompakt terek.

* **11.2.11. Alexander tétele.** Legyen \mathcal{S} egy szubbázisa az X tér topológiájának. Az X tér pontosan akkor kompakt, ha minden \mathcal{S} -beli halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan nyílt halmazokból álló lefedés, amelyből nem választható ki véges lefedés. Tekintsük az ilyen lefedések rendszerét. Ez féligrendezett a tartalmazásra nézve, és benne minden lánc felülről korlátos, így a Zorn-lemma szerint tartalmaz egy \mathcal{V} maximális lefedést. Legyen $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. Ekkor \mathcal{W} egyetlen véges részrendszere sem fed le X -et, így \mathcal{W} nem lehet lefedése X -nek. Legyen $x \in X \setminus (\cup \mathcal{W})$ és válasszunk egy $V \in \mathcal{V}$ halmazt, amely lefedi x -et. Mivel \mathcal{S} szubbázis, léteznek S_1, \dots, S_n halmazok \mathcal{S} -ből, amelyekre $x \in \cap_{j=1}^n S_j \subset V$. Mivel $x \notin \cup \mathcal{W}$, egyetlen S_j sincs a \mathcal{V} -ben. Mivel \mathcal{V} maximális, minden j -re van egy olyan A_j halmaz, amely véges sok \mathcal{V} -beli halmaz egyesítése, és amelyre $S_j \cup A_j = X$. Innen

$$V \cup (\cup_{j=1}^n A_j) \supset (\cap_{j=1}^n S_j) \cup (\cup_{j=1}^n A_j) = X,$$

és így X előáll véges sok \mathcal{V} -beli halmaz egyesítéseként. Ez ellentmond \mathcal{V} kiválasztásának.

* **11.2.12. Tyihonov tétele.** Kompakt terek szorzata kompakt.

Bizonyítás. Legyen $X = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ a szóban forgó szorzattér és legyen \mathcal{S} ennek a 11.1.11. pontban leírt szubbázisa. Alexander tételét felhasználva, elég egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ lefedést

vizsgálni. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ -ra \mathcal{U}_γ az összes olyan $U_\gamma \subset X_\gamma$ nyílt halmazok osztálya, amelyekre $p_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{U}$, ahol p_γ a γ -adik projekció. Megmutatjuk, hogy van olyan $\eta \in \Gamma$, amelyre $\cup \mathcal{U}_\eta = X_\eta$. Valóban, ha nem ez lenne a helyzet, akkor létezne olyan $x \in X$ pont, amely nem lenne $\cup \mathcal{U}$ -ban. Mivel X_η kompakt, létezik véges sok $U_{\eta,1}, \dots, U_{\eta,n}$ halmaz \mathcal{U}_η -ban, amelyre $X_\eta = \cup_{j=1}^n U_{\eta,j}$. Nyilván $p_\eta^{-1}(U_{\eta,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$ egy véges lefedése X -nek.

Most megvizsgáljuk a kompaktság és lokális kompaktság kapcsolatát a szétválasztási tulajdonságokkal.

11.2.13. Tétel. *Kompakt Hausdorff-tér normális.*

Bizonyítás. Legyenek E és F diszjunkt zárt halmazok. Ha $x \in E$, $y \in F$, akkor léteznek $U_{x,y}$ és $V_{x,y}$ nyílt halmazok úgy, hogy $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Mivel E kompakt, minden $y \in F$ -re létezik véges sok x_1, \dots, x_n , hogy $U_y = \cup_{i=1}^n U_{x_i,y}$ lefedje E -t. Nyilván U_y a $V_y = \cap_{i=1}^n V_{x_i,y}$ halmazba nem metsz bele. Most F kompaktságát felhasználva, létezik y_1, \dots, y_m , hogy $V = \cup_{j=1}^m V_{y_j}$ lefedje F -et. Nyilván V az $U = \cap_{j=1}^m U_{y_j}$ halmazba nem metsz bele.

Lokálisan kompakt Hausdorff-tér általában nem normális, de teljesen reguláris, mert igaz az Uriszon-lemma alábbi változata.

11.2.14. Tétel. *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt részhalmaza X -nek, F egy K -tól diszjunkt zárt részhalmaza X -nek. Ekkor létezik olyan $f : X \rightarrow [0, 1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $f(K) = 1$ és $f(F) = 0$.*

Bizonyítás. Minden $x \in K$ -hoz válasszunk egy olyan V_x kompakt lezártú nyílt környezetét x -nek, amely része $X \setminus F$ -nek. Kiválasztva a V_x , $x \in K$ lefedésből egy véges részlefedést, és ennek unióját V -vel jelölve, V nyílt, lezártja kompakt, és $K \subset V \subset X \setminus F$. A \bar{V} kompakt Hausdorff-térben egy g folytonos függvénnyel szétválasztva a K és a ∂V zárt halmazokat, legyen

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \in \bar{V}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A következő tétel az egység felbontásának lokálisan kompakt Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

* **11.2.15. Tétel.** *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt részhalmaza X -nek, V_1, \dots, V_n pedig nyílt halmazok úgy, hogy $K \subset \cup_{k=1}^n V_k$. Ekkor létezik $h_k : X \rightarrow [0, 1]$ kompakt tartójú folytonos függvények úgy, hogy*

- (1) $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ minden $x \in K$ -ra;
- (2) $\text{spt}(h_k) \subset V_k$, ha $k = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Válasszunk egy V kompakt lezártú nyílt halmazt, amelyre

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset \cup_{k=1}^n V_k$$

és alkalmazzuk az egység felbontását a \bar{V} normális tér zárt részhalmazára és $V \cap V_k$ nyílt részhalmazaira, majd a kapott függvényeket terjesszük ki $X \setminus V$ -re úgy, hogy ott nullák legyenek.

11.2.16. Tétel. *Lokálisan kompakt megszámlálható bázisú Hausdorff-térben minden nyílt halmaz σ -kompakt.*

Bizonyítás. Válasszunk X -ben egy kompakt lezártú nyílt halmazokból álló megszámlálható bázist. Ha V nyílt részhalmaza X -nek, akkor

$$V = \cup \{ \overline{B} : B \in \mathcal{B}, \overline{B} \subset V \}.$$

* **11.2.17. Topologikus csoportok.** Topologikus algebrai struktúrák definiálásának alap gondolata, hogy megköveteljük a műveletek folytonosságát. Egy *topologikus csoport* egy olyan G csoport, amely egyben topologikus tér is, úgy, hogy a szorzás, azaz az $(x, y) \mapsto xy$ leképezése $G \times G$ -nek G -be, és az inverzképzés, azaz az $x \mapsto x^{-1}$ leképezése G -nek G -be folytonosak. Minden csoportelméleti és topológiai fogalmat használhatunk topologikus csoportokra is, így például beszélhetünk kommutatív, Hausdorff-, lokálisan kompakt stb. topologikus csoportokról.

A szorzás folytonossága miatt rögzített $a \in G$ esetén az $x \mapsto ax$ és $x \mapsto xa$ bal, illetve jobb eltolások is folytonosak. Mivel az inverzek is hasonló leképezések, a bal és jobb eltolások és az inverzképzés homeomorfizmusok. Ha $A, B \subset G$ és B nyílt, akkor AB és BA nyíltak, mert aB , illetve Ba alakú nyílt halmazok egyesítései. Ha A és B kompaktak, akkor AB is kompakt, mert a szorzás az $A \times B$ kompakt halmazt erre a halmazra képezi.

Az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelem olyan V környezetét, amelyre $V^2 \subset U$; valóban a szorzás folytonossága miatt léteznek olyan V_1, V_2 környezetei az egységelemnek, amelyekre $V_1 V_2 \subset U$, így $V = V_1 \cap V_2$ választható. Egy $A \subset G$ halmazt *szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A = A^{-1}$. Az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelem egy V szimmetrikus környezetét: legyen $V = U \cap U^{-1}$.

A legfontosabb példák topologikus csoportokra \mathbb{R} , \mathbb{C} és egyéb normált terek additív csoportjai, a \mathbb{T} multiplikatív csoport, egy Banach-tér vagy egy Hilbert-tér lineáris homeomorfizmusainak csoportja és ennek különböző részcsoportjai (az uniter operátorok csoportja, véges dimenzióban az egy determinánsú operátorok csoportja stb.), ezek metrizálhatók.

Topologikus csoportokkal kapcsolatban Bourbaki [3] művének II. könyve tartalmazza az alapfogalmakat.

* **11.2.18. Tétel.** *Legyen G topologikus csoport, C kompakt részhalmaza G -nek, U pedig egy C -t tartalmazó nyílt halmaz. Ekkor létezik az egységelemnek olyan V nyílt környezete, amelyre $CV \subset U$ és $VC \subset U$.*

Bizonyítás. Minden $x \in C$ -hez léteznek olyan W_x és V_x nyílt környezetei az egységelemnek, amelyekre $V_x^2 \subset W_x$ és $xW_x \subset U$. Mivel az xV_x , $x \in C$ halmazok lefedik C -t, léteznek $x_1, \dots, x_n \in C$, hogy $C \subset \cup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Innen $V = \cap_{k=1}^n V_{x_k}$ -ra

$$CV \subset \cup_{k=1}^n (x_k V_{x_k} V) \subset \cup_{k=1}^n (x_k W_{x_k}) \subset U.$$

A másik eset hasonló, és a kapott két halmaz metszetét vesszük.

* **11.2.19. Következmény.** Ha G Hausdorff topologikus csoport, C_1, C_2 diszjunkt kompakt részhalmazai G -nek, akkor van olyan U szimmetrikus nyílt környezete az egységelemnek, amelyre $(C_1U) \cap (C_2U) = \emptyset$ és $(UC_1) \cap (UC_2) = \emptyset$.

Bizonyítás. Válasszunk olyan V_1, V_2 nyílt környezeteit az egységelemnek, amelyekre $(C_1V_1) \cap C_2 = \emptyset$ és $(C_2V_2) \cap C_1 = \emptyset$. Legyen W olyan környezete az egységelemnek, amelyre $W^2 \subset V_1 \cap V_2$ és legyen $U = W \cap W^{-1}$, erre $(C_1U) \cap (C_2U) = \emptyset$. A másik eset hasonló, és a kapott két halmaz metszetét vesszük.

A továbbiakban metrikus terek kompaktságával foglalkozunk.

11.2.20. Definíció. Legyen X egy metrikus tér, és $\varepsilon > 0$. Azt mondjuk, hogy $H \subset X$ egy ε -háló X -ben, ha az $\mathbb{U}(x, \varepsilon)$, $x \in H$ gömbök rendszere lefedi X -et. Egy metrikus teret *teljesen korlátosnak* nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra tartalmaz véges ε -hálót.

11.2.21. Tétel. Ha (X, d) metrikus tér, akkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) X kompakt;
- (2) X teljes és teljesen korlátos;
- (3) bármely X -beli sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X kompakt. Ha egy x_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozatnak nem lenne konvergens részsorozata, akkor az $U_n = X \setminus \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ nyílt halmazok olyan lefedését alkotnák X -nek, amelynek nem lenne véges részlefedése.

Tegyük fel, hogy bármely X -beli sorozatnak van konvergens részsorozata. Ekkor X teljes, mivel bármely metrikus térben, ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens. Ha X nem lenne teljesen korlátos, akkor valamely $\varepsilon > 0$ -ra indukcióval kiválaszthatnánk egy olyan x_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozatot, amelyre $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, ha $i \neq j$. Ez ellentmond (3)-nak.

Végül tegyük fel, hogy X teljes és teljesen korlátos, de van olyan nyílt lefedése, amelyből nem választható ki véges részlefedés. Felhasználva, hogy X teljesen korlátos, válasszunk olyan $\mathbb{B}(x_1, 1/2)$ gömböt, amely nem fedhető le véges sok V_γ , $\gamma \in \Gamma$ -beli halmazzal. Teljes indukcióval folytatva, válasszunk olyan $\mathbb{B}(x_n, 1/2^n)$, $n = 1, 2, \dots$ gömböket, amelyek egyike sem fedhető le V_γ , $\gamma \in \Gamma$ egyetlen véges részrendszerével sem, továbbá

$$\mathbb{B}(x_{n-1}, 1/2^{n-1}) \cap \mathbb{B}(x_n, 1/2^n) \neq \emptyset.$$

Ekkor

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

így ha $n < m$, akkor

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy x_n , $n = 1, 2, \dots$ Cauchy-sorozat. Legyen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Mivel $x \in V_\eta$ valamely $\eta \in \Gamma$ -ra és V_η nyílt, elég nagy n -re $\mathbb{B}(x_n, 1/2^n) \subset V_\eta$, ami ellentmondás.

11.2.22. Definíció. Egy valós vagy komplex lineáris tér egy C részhalmazát konvexnek nevezzük, ha $x, y \in C$, $0 < \alpha < 1$ esetén $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$. Egy A halmaz $\text{conv}(A)$ konvex burkán az összes, A -t tartalmazó konvex halmazok metszetét értjük. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$\text{conv}(A) = \left\{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}^+, x_i \in A, 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

A továbbiakban egy speciális kérdéssel foglalkozunk, \mathbb{R}^n kompakt részhalmazai között értelmezzük távolságot.

11.2.23. Definíció. Jelölje \mathcal{F} az \mathbb{R}^n összes nem üres kompakt részhalmazainak osztályát. Ha $C, D \in \mathcal{F}$, értelmezzük a C és D halmazok $d(C, D)$ Hausdorff-távolságát, mint a $\sup\{\text{dist}(x, C) : x \in D\}$ és $\sup\{\text{dist}(x, D) : x \in C\}$ számok nagyobbikát.

* **11.2.24. Tétel.** Az előző definíció jelöléseivel

- (1) \mathcal{F} teljes metrikus tér d -vel;
- (2) ha $a \in \mathbb{R}^n$ és $0 < r < \infty$, akkor az $\mathcal{F}_{a,r} = \{C : C \in \mathcal{F}, C \subset \mathbb{B}(a, r)\}$ halmazok kompakta \mathcal{F} -ben;
- (3) a nem üres kompakt konvex halmazok zárt alteret alkotnak \mathcal{F} -ben;
- (4) $C \mapsto \text{diam}(C)$ folytonos függvény \mathcal{F} -en.

Bizonyítás. A metrikus tér axiómái egyszerű számolással adódnak. Ha C_i , $i = 1, 2, \dots$ egy Cauchy-sorozat \mathcal{F} -ben, akkor legyen $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} C_j}$. Megmutatjuk, hogy $d(C_i, C) \rightarrow 0$, ha $i \rightarrow \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk egy olyan i -t, amelyre $d(C_s, C_t) < \varepsilon/2$, ha $s, t \geq i$. Ha $x \in C$, akkor $x \in \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} C_j}$, így van olyan $s \geq i$, amelyre $\text{dist}(x, C_s) < \varepsilon/2$. Mivel $d(C_s, C_t) < \varepsilon/2$, ha $s, t \geq i$, $\text{dist}(x, C_t) \leq \varepsilon$, ha $t \geq i$. Ha most $x \in C_t$, akkor a $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \overline{\bigcup_{j=s}^{\infty} C_j}$ kompakta halmazok nem üresek egyetlen s -re sem. Ebből $\text{dist}(x, C) \leq \varepsilon$, ha $t \geq i$.

(2) bizonyításához, mivel $\mathcal{F}_{a,r}$ nyilván zárt részhalmaza \mathcal{F} -nek, elég megmutatnunk, hogy teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\mathbb{B}(a, r)$ kompakta részhalmaza \mathbb{R}^n -nek, így teljesen korlátos, azaz van $Z \subset \mathbb{B}(a, r)$ véges ε -háló $\mathbb{B}(a, r)$ -hez. Megmutatjuk, hogy Z összes nem üres részhalmazai ε -hálót alkotnak $\mathcal{F}_{a,r}$ -hez. Valóban, ha $C \in \mathcal{F}_{a,r}$ és $Z_C = \{z : z \in Z, \mathbb{B}(z, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset\}$, akkor $d(C, Z_C) \leq \varepsilon$.

(3) bizonyításához, legyen $C \in \mathcal{F}$ és tegyük fel, hogy nem konvex. Ekkor létezik $x, y \in C$ és $0 < \alpha < 1$, hogy $z = \alpha x + (1 - \alpha)y \notin C$. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ -t, amelyre $\mathbb{B}(z, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Ha most $D \in \mathcal{F}$, $d(C, D) < \varepsilon/3$, akkor léteznek $x', y' \in D$, amelyekre $|x - x'| < \varepsilon/3$ és $|y - y'| < \varepsilon/3$. Ha $z' = \alpha x' + (1 - \alpha)y'$, akkor $|z - z'| < \varepsilon/3$, így $\mathbb{B}(z', \varepsilon/3) \cap D \neq \emptyset$, azaz D nem konvex.

Végül, ha $C, D \in \mathcal{F}$, $d(C, D) \leq \varepsilon$, akkor

$$|x - y| \leq \text{dist}(x, D) + \text{diam}(D) + \text{dist}(y, D) \leq \text{diam}(D) + 2\varepsilon,$$

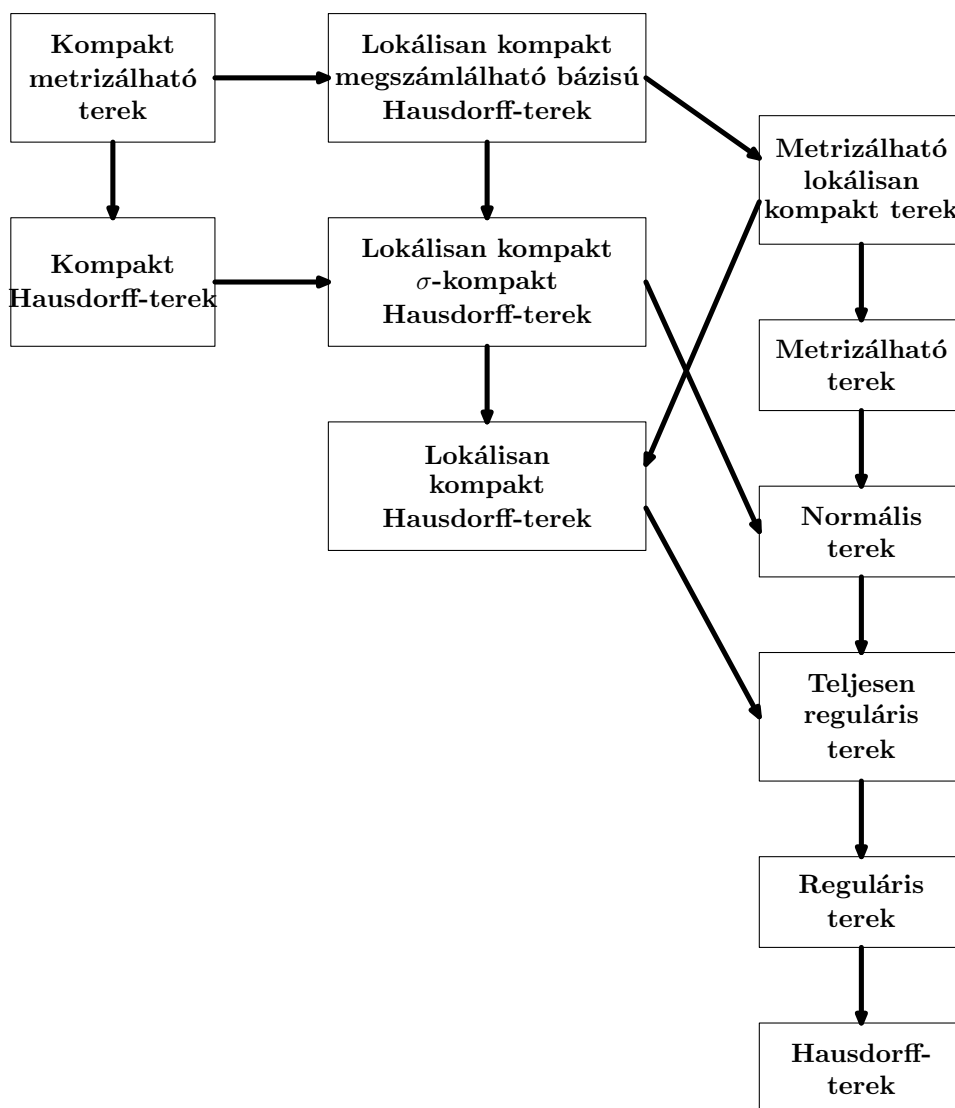
ha $x, y \in C$, amiből $\text{diam}(C) \leq \text{diam}(D) + 2\varepsilon$. A C és D szerepének felcserélésével,

$$|\text{diam}(C) - \text{diam}(D)| \leq 2\varepsilon,$$

ami (4)-et bizonyítja.

* **11.2.25. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy szeparábilis metrikus tér bármely zárt részhalmaza előáll egy megszámlálható és egy perfekt halmaz egyesítéséeként.

11.2.26. Összefüggések a topologikus terek fontosabb fajtái között.



11.3. Normált terek

Ebben a pontban normált terekkel foglalkozunk. Ahogyan a topologikus terek, illetve a metrikus terek arra alkalmasak, hogy a klasszikus analízis határértékkel és folytonossággal, illetve Cauchy-sorozatokkal és egyenletes folytonossággal kapcsolatos fogalmait és tételeit kellően általánosítva széles körben alkalmazhatóvá tegyék, a normált terek elmélete a klasszikus analízis lineáris algebrával is kapcsolatos módszereinek, a végtelen sorok, függvénysorok és sorozatok, valamint a differenciálszámítás eszközeinek széles körű alkalmazását teszi lehetővé az analízisben. Az alábbiakban csak néhány alapfogalmat érintünk. Mivel a komplex és valós esetet egyszerre szeretnénk tárgyalni, célszerű bevezetni a következő jelölést: \mathbb{K} jelenti \mathbb{R} -et vagy \mathbb{C} -t.

11.3.1. Definíció. A lineáris tér fogalmát a szokásos értelemben használjuk. Mindig \mathbb{K} feletti lineáris terekkel dolgozunk, ahol \mathbb{K} az \mathbb{R} vagy \mathbb{C} testek közül az egyiket jelenti. A felhasznált lineáris algebrai fogalmak és tételek megtalálhatók Halmos [14] könyvében. Általában nem tesszük fel, hogy a tér véges dimenziós. Ennek megfelelően *lineáris operátoron* egy olyan A leképezést értünk, amely egy \mathbb{K} feletti X lineáris teret egy ugyancsak \mathbb{K} feletti Y lineáris térbe képez le, és amelyre teljesül, hogy $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ minden $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ -ra. Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor *lineáris funkcionálról* beszélünk.

11.3.2. Definíció. Legyen X lineáris tér \mathbb{K} felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését X -nek $[0, \infty]$ -be *félnormának* nevezzük, ha

- (1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ minden $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra (*abszolút érték homogén*, itt $0 \cdot \infty = 0$);
- (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$ -re (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha még az is teljesül, hogy

- (3) $0 < \|x\| < \infty$, ha $0 \neq x \in X$,

akkor a leképezést *normának*, az $(X, \|\cdot\|)$ párt pedig *normált térnek* nevezzük \mathbb{K} felett. Megjegyezzük, hogy $\|\cdot\|$ helyett az $|\cdot|$ jelölés is szokásos. Egy félnormált térben $\{x : x \in X, \|x\| < \infty\}$ lineáris altér, és ezen az altéren a félnorma véges. Ha a félnorma véges, akkor a tér mindig normált térré tehető, ha azokat az elemeket, amelyek különbségének félnormája nulla, egy osztályba sorolva azonosítjuk. Félnormált térben $d(x, y) = \|x - y\|$ eltérés. Az így definiált eltérésre $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$) és $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, ha $x, y, z \in X$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, azaz az eltérés *abszolút érték homogén* és *eltolásinvariáns*. Ha normából indulunk ki, akkor metrikát kapunk. Így normált térben használni fogunk minden olyan fogalmat, amelyet metrikus térben vagy topologikus térben definiáltunk. Ilyenkor mindig a normából származó metrikára és az ebből a metrikából származó topológiára gondolunk.

11.3.3. Definíció. Egy normált teret *Banach-térnek* nevezünk, ha teljes. A leggyorsabb példák Banach-térre \mathbb{R} felett \mathbb{R}^n , illetve \mathbb{C} felett \mathbb{C}^n az $\|x\| = (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}$ normával.

11.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a \mathbb{K} feletti X normált tér *normált algebra* \mathbb{K} felett, ha X elemei között értelmezve van egy szorzás, X ezzel a szorzással, az összeadással

és a skalárszorzással algebra \mathbb{K} felett, továbbá $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ minden $x, y \in X$ -re. Ha X még teljes is, akkor *Banach-algebráról* beszélünk.

Fontos példák normált terekre a függvényterek. Tekinthetünk valós és komplex értékű függvényeket is: az első esetben valós, a másodikban komplex normált tereket kapunk. Az \mathbb{R} vagy \mathbb{C} indexszel jelöljük, hogy melyik esetre gondolunk. Ha a szövegösszefüggésből világos, hogy melyik esetről van szó, akkor nem tesszük ki az indexet.

11.3.5. Definíció. Legyen X egy halmaz. Legyen az $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Az összes olyan $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_u < \infty$, jelölje $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ (*korlátos függvények tere*).

11.3.6. Tétel. *Bármely X halmazra $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra a függvények pontonkénti összeadásával, szorzásával és skalárral való szorzásával, valamint a $\|\cdot\|_u$ normával.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

11.3.7. Definíció. Legyen X topologikus tér, és jelölje $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ a $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ -beli folytonos függvények halmazát (*korlátos folytonos függvények tere*).

11.3.8. Tétel. *Bármely X topologikus térre $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra a függvények pontonkénti szorzásával, összeadásával és skalárral való szorzásával, valamint a $\|\cdot\|_u$ normával.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

Valahányszor a $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$, illetve $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ terekről beszélünk, ezekre a műveletekre és erre a normára gondolunk, hacsak kifejezetten mást nem mondunk. Az ebből a normából származó konvergencia a függvények egyenletes (uniform) konvergenciája, ezért ezt a normát *uniform normának* szokás nevezni.

A következő néhány tételben $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű részhalmazaiával foglalkozunk abban a speciális esetben, amikor X kompakt Hausdorff-tér.

* **11.3.9. Definíció.** Legyenek X és Y halmazok és \mathcal{H} az X -et Y -ba képező függvények egy rendszere. Azt mondjuk, hogy \mathcal{H} *szétválasztja X pontjait*, ha bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén van olyan $h \in \mathcal{H}$ függvény, amelyre $h(x) \neq h(y)$.

* **11.3.10. Stone tétele.** *Legyen X kompakt Hausdorff-tér és \mathcal{H} olyan lineáris altere $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ -nek, amelyre*

- (1) *a konstans függvények \mathcal{H} -ban vannak;*
- (2) *ha $u \in \mathcal{H}$, akkor $|u| \in \mathcal{H}$;*
- (3) *\mathcal{H} szétválasztja X pontjait.*

Ekkor \mathcal{H} sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ -ben.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy \mathcal{H} zárt a maximum és minimum képzésére. Valóban, $\max(u, v) = (u + v + |u - v|)/2$ és $\min(u, v) = (u + v - |u - v|)/2$. Másrészt, bármilyen $x, y \in X$, $x \neq y$ -hoz és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan $u \in \mathcal{H}$ függvény,

hogy $u(x) = \alpha$ és $u(y) = \beta$. Valóban, (3) szerint létezik olyan $h \in \mathcal{H}$ függvény, amelyre $h(x) \neq h(y)$. Legyen

$$u(z) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)}, \quad \text{ha } z \in X.$$

Most legyen $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ és $\varepsilon > 0$. Minden $x, y \in X$ párhoz válasszunk egy olyan $u_{x,y} \in \mathcal{H}$ függvényt, amelyre $|f(x) - u_{x,y}(x)| < \varepsilon$ és $|f(y) - u_{x,y}(y)| < \varepsilon$. Bármely rögzített $y \in X$ -re az

$$U_{x,y} = \{z : u_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}, \quad x \in X$$

nyílt halmazok lefedik X -et, így léteznek x_1, \dots, x_n pontok, amelyekre $\cup_{i=1}^n U_{x_i,y} = X$. Legyen

$$v_y = \min(u_{x_1,y}, \dots, u_{x_n,y}) \in \mathcal{H}.$$

Ekkor $v_y(z) < f(z) + \varepsilon$ minden $z \in X$ -re és $v_y(y) > f(y) - \varepsilon$. Most a

$$V_y = \{z : v_y(z) > f(z) - \varepsilon\}, \quad y \in X$$

nyílt halmazok lefedik X -et, így léteznek y_1, \dots, y_m , hogy $\cup_{j=1}^m V_{y_j} = X$. Legyen $g = \max(v_{y_1}, \dots, v_{y_m}) \in \mathcal{H}$. Ekkor $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$, és ezt kellett bizonyítani.

* **11.3.11. Lemma.** Minden $\varepsilon > 0$ -hoz és $c > 0$ -hoz van olyan valós együtthatós p polinom, amelyre $|p(t) - |t|| \leq \varepsilon$, ha $t \in [-c, c]$.

Bizonyítás. Mivel t helyébe ct -t írhatunk, elég a $c = 1$ esetre szorítkozni. Mivel $|t| = \sqrt{t^2}$, elég megmutatni, hogy \sqrt{t} a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen approximálható polinomokkal.

Legyen $p_0(t) \equiv 0$ és indukcióval legyen

$$(1) \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n^2(t)),$$

ha $n \geq 0$. Megmutatjuk, hogy

$$(2) \quad 0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}, \quad \text{ha } t \in [0, 1],$$

amiből következik, hogy

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad \text{ha } t \in [0, 1].$$

Ha $n = 0$, akkor (2) triviális. Tegyük fel, hogy n -re teljesül (2), akkor

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t},$$

amiből $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$. Az (1) képlet szerint innen

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t)) \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{t} + p_n(t))\right),$$

ahonnan $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0$ és (2) szerint

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - p_{n+1}(t) &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

* **11.3.12. Weierstrass–Stone-tétel.** Legyen X kompakt Hausdorff-tér, és \mathcal{H} egy részalgebrája $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ -nek, amely

- (1) tartalmazza az azonosan 1 függvényt;
- (2) szétválasztja X pontjait.

Ekkor \mathcal{H} sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ -ben.

Bizonyítás. Tekintsük \mathcal{H} lezártját. Ha megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{\mathcal{H}}$ -ra $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$, akkor Stone tétele szerint készen vagyunk. Bármely $\varepsilon > 0$ -ra és $c = \|f\|_u$ -ra az előző lemma szerint választható olyan p polinom, amelyre $|p(t) - |t|| \leq \varepsilon$, ha $t \in [-c, c]$. De ekkor $\|p \circ f - |f|\|_u \leq \varepsilon$ és mivel $\overline{\mathcal{H}}$ maga is algebra, $p \circ f \in \overline{\mathcal{H}}$, azaz $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$.

A fenti tételből úgy kaphatjuk meg Weierstrass klasszikus, a folytonos függvényeknek polinomokkal való egyenletes approximálhatóságát kimondó tételét, hogy X -et \mathbb{R} egy kompakt intervallumának, \mathcal{H} -t pedig a polinomok algebrájának választjuk.

* **11.3.13. A Weierstrass–Stone-tétel komplex változata.** Legyen X kompakt Hausdorff-tér, és \mathcal{H} a $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ egy komplex részalgebrája. Tegyük fel, hogy

- (1) \mathcal{H} tartalmazza az azonosan 1 függvényt;
- (2) \mathcal{H} szétválasztja X pontjait;
- (3) ha $f \in \mathcal{H}$, akkor $\overline{f} \in \mathcal{H}$.

Ekkor \mathcal{H} sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ -ben.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Mivel $\Re f = (f + \overline{f})/2$ és $\Im f = (f - \overline{f})/2$, kapjuk, hogy \mathcal{H}_0 eleget tesz az előző tétel feltételeinek. Ebből $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}_0$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ -ben.

A folytonos függvények egyenletes konvergenciáját felhasználjuk egy fontos topológiai tétel bizonyítására.

* **11.3.14. Tietze tétele.** Legyen F az X normális topologikus tér nem üres zárt részhalmaza, és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos kiterjesztése f -nek, amelyre

$$(1) \quad \inf\{f(x) : x \in F\} = \inf\{g(x) : x \in X\}$$

és

$$(2) \quad \sup\{f(x) : x \in F\} = \sup\{g(x) : x \in X\}.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\text{rng } f \subset [-1, 1]$. Legyen

$$A_1 = f^{-1}[-1, -1/3] \quad \text{és} \quad B_1 = f^{-1}[1/3, 1].$$

Az A_1 és B_1 halmazok zárt részhalmazai X -nek, így az Uriszon-lemma szerint van olyan $h_1 : X \rightarrow [-1/3, 1/3]$ folytonos függvény, amelyre $h_1(A_1) = -1/3$ és $h_1(B_1) = 1/3$. Legyen $g_1 = h_1$. Ekkor $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$, ha $x \in F$ és $\text{dmn } g_1 \subset [-1/3, 1/3]$. Teljes indukcióval tegyük fel, hogy h_1, \dots, h_n és g_1, \dots, g_n folytonos függvényeket már megkonstruáltuk úgy, hogy

$$(3) \quad h_i : X \rightarrow [-2^{i-1}/3^i, 2^{i-1}/3^i] \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(4) \quad g_{i+1} = g_i + h_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$(5) \quad g_i : X \rightarrow [-1 + (2/3)^i, 1 - (2/3)^i] \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(6) \quad |f(x) - g_i(x)| \leq (2/3)^i, \quad \text{ha } x \in F \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tekintsük az $u_{n+1}(x) = f(x) - g_n(x)$, ha $x \in F$ függvényt, és legyen

$$A_{n+1} = u_{n+1}^{-1} \left[-\frac{2^n}{3^n}, -\frac{2^n}{3^{n+1}} \right], \quad B_{n+1} = u_{n+1}^{-1} \left[\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^n} \right].$$

Választva az Uriszon-lemma szerint egy $h_{n+1} : X \rightarrow [-2^n/3^{n+1}, 2^n/3^{n+1}]$ folytonos függvényt, amelyre

$$h_{n+1}(A_{n+1}) = -\frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad h_{n+1}(B_{n+1}) = \frac{2^n}{3^{n+1}},$$

kapjuk az indukciós feltevést $n+1$ -re. Mivel (3) és (4) szerint a g_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ -ben, g_n egyenletesen konvergál egy $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ függvényhez. (5) miatt $\text{rng } g \subset [-1, 1]$, és (6) szerint g kiterjesztése f -nek.

Vegyük észre, hogy, mivel $[-1, 1]$ homeomorf $\overline{\mathbb{R}}$ -sal, az előző lépés alkalmazható az általános esetben is, de a kapott g függvény bővített valós értékű lesz, és nem tesz eleget az (1) és (2) feltételeknek. Az utóbbin könnyen segíthetünk, ha $a = \inf\{f(x) : x \in F\} > -\infty$ esetén g helyett $\max(g, a)$ -t, $b = \sup\{f(x) : x \in F\} < \infty$ esetén pedig g helyett $\min(b, g)$ -t vesszük. Ha g nem valós értékeket is felvesz, akkor a következőt tehetjük: Legyen $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, ha $x \in F$. Az f^+ függvényre alkalmazva az eddigieket, egy $g_1^+ : X \rightarrow [0, \infty]$ folytonos kiterjesztését kapjuk f^+ -nak. Legyen $E^+ = (g_1^+)^{-1}(\infty)$. Alkalmazva az eddig bizonyítottakat arra a folytonos függvényre, amely F -en f^+ -szal, E^+ -on pedig 0-val egyezik meg, annak egy X -re való $[0, \infty]$ -beli értékű folytonos g_2^+ kiterjesztését kapjuk. A $g^+ = \min(g_1^+, g_2^+)$ függvény így olyan folytonos kiterjesztése f^+ -nak, amely már $[0, \infty)$ -beli értékű. Hasonlóan eljárva kapjuk az $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, ha $x \in F$ függvény egy $[0, \infty)$ -beli értékű g^- folytonos kiterjesztését. Most legyen $g = g^+ - g^-$.

* **11.3.15. Következmény.** Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt, nem üres részhalmaza X -nek, és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ kiterjesztése f -nek, amely kompakt tartójú folytonos függvény, és

$$\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \sup\{|g(x)| : x \in X\}.$$

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan V kompakt lezártú nyílt halmazt, amely tartalmazza K -t. Azt a függvényt, amely K -n f -fel, ∂V -n 0-val egyezik meg, terjesszük ki folytonosan a \overline{V} normális térre, majd \overline{V} -on kívül definiáljuk nullának.

11.3.16. Definíció. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Azt mondjuk, hogy egy $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ függvény *eltűnik a végtelenben*, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan K kompakt részhalmaza X -nek, hogy $|f(x)| \leq \varepsilon$, ha $x \in X \setminus K$. Az összes, X -et \mathbb{K} -ba képező, folytonos, végtelenben eltűnő függvények halmazát jelölje $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$. Az összes, X -et \mathbb{K} -ba képező folytonos, kompakt tartójú függvények halmazát jelölje $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$.

11.3.17. Tétel. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Ekkor $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra, $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ pedig sűrű normált részalgebrája $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ -nek \mathbb{K} felett a függvények pontonkénti összeadásával, szorzásával és skalárszorzásával, valamint a $\|\cdot\|_u$ normával.

Bizonyítás. $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ teljességét úgy mutathatjuk meg, hogy belátjuk, zárt altere $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ -nek. Az, hogy $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű, a 11.2.14. tétel segítségével bizonyítható. Minden szükséges lépés könnyen kitalálható, ezért nem részletezzük a bizonyítást.

Mindig, hacsak kifejezetten mást nem mondunk, a fenti tételben szereplő műveletekkel és normával ellátva használjuk a $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ és $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ tereket.

11.3.18. Definíció. A korlátos, a folytonos, a végtelenben eltűnő és a kompakt tartójú függvények terét egy Y normált térbeli értékű függvényekre is értelmezhetjük. A megfelelő jelölések: $\mathcal{B}_Y(X)$, $\mathcal{C}_Y(X)$, $\mathcal{C}_{0,Y}(X)$ és $\mathcal{K}_Y(X)$ vagy röviden \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{C}_0 és \mathcal{K} . Ha Y teljes, akkor a \mathcal{B} , \mathcal{C} és \mathcal{C}_0 terek Banach-terek. Mivel a szorzás nincs értelmezve, nem kapunk algebrát.

11.3.19. Tétel. Legyenek X és Y normált terek \mathbb{K} felett. Egy $A : X \rightarrow Y$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha az alábbi érték véges:

$$(1) \quad \|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Bizonyítás. Ha A folytonos a 0-ban, akkor egy adott $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\|x\| \leq \delta$ esetén $\|A(x)\| \leq \varepsilon$. Ha most $\|x\| \leq 1$, akkor $\|\delta x\| \leq \delta$, így $\|A(\delta x)\| \leq \varepsilon$, azaz $\|A(x)\| \leq \varepsilon/\delta$.

Megfordítva, ha A korlátos X egységgömbjén, azaz $\|x\| \leq 1$ esetén $\|A(x)\| < K$, akkor $\varepsilon > 0$ -ra $\|x - y\| \leq \varepsilon/K$ esetén

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| = \left\| \frac{\varepsilon}{K} A \left(\frac{K(x - y)}{\varepsilon} \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy ha X véges dimenziós, akkor minden lineáris operátor folytonos.

11.3.20. Definíció. Legyenek X és Y normált terek \mathbb{K} felett. Ha egy $A : X \rightarrow Y$ lineáris leképezés folytonos, akkor *folytonos lineáris operátorról* vagy *korlátos lineáris operátorról* beszélünk. Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor *folytonos lineáris funkcionált* vagy *korlátos lineáris funkcionált* mondunk. Az összes, X -et Y -ba képező folytonos lineáris operátorok halmazát $\mathcal{BL}(X, Y)$ -nal jelöljük, de $\mathcal{BL}(X, X)$ helyett csak $\mathcal{BL}(X)$ -et, $\mathcal{BL}(X, \mathbb{K})$ helyett pedig X^* -ot írunk; X^* -ot az X *konjugált terének* vagy *duális terének* nevezzük.

11.3.21. Tétel. Legyenek X és Y normált terek \mathbb{K} felett. A $\mathcal{BL}(X, Y)$ tér a függvények pontonkénti összeadásával és skalárszorzásával, valamint a 11.3.19.(1)-ben szereplő függvénnyel mint normával, normált tér \mathbb{K} felett. Ha Y Banach-tér, akkor $\mathcal{BL}(X, Y)$ is Banach-tér, így X^* Banach-tér, $\mathcal{BL}(X)$ pedig a függvények egymás utáni végrehajtásával mint szorzással, normált algebra, és ha X Banach-tér, akkor Banach-algebra.

Bizonyítás. Egyetlen lépés sem kíván különösebb ötletet, így a bizonyítást az olvasóra bízjuk.

A fenti tételben szereplő tereket, hacsak kifejezetten mást nem mondunk, mindig a fenti tételben szereplő műveletekkel és normával ellátva használjuk.

11.3.22. Definíció. Legyen H lineáris tér \mathbb{K} felett, és legyen adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezése $H \times H$ -nak \mathbb{K} -ba úgy, hogy minden $x, y, z \in H$ -ra és $\alpha \in \mathbb{K}$ -ra

- (1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (4) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (5) ha $\langle x, x \rangle = 0$, akkor $x = 0$.

Ekkor H -t *belső szorzat térnek* nevezzük \mathbb{K} felett. Az x és y elemek $\langle x, y \rangle$ *belső szorzatának* jelölésére az (x, y) , $x \bullet y$, $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$ jelek is használatosak. (1), (2) és (3)-ból a *belső szorzás* additív a második változóban is, és onnan a skalár konjugáltja emelhető ki.

11.3.23. Tétel. Ha H *belső szorzat tér* \mathbb{K} felett, akkor az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ jelöléssel

- (1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ minden $x, y \in H$ -ra

(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség) és a $\| \cdot \|$ függvénnyel H normált tér \mathbb{K} felett.

Bizonyítás.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2,$$

amiből ha $\|x\| = 0$ és $\|y\| = 0$, akkor $\alpha = \langle x, y \rangle$ helyettesítéssel $\langle x, y \rangle = 0$. Ha ez nem áll fenn, mondjuk $\|y\| \neq 0$, akkor $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$ helyettesítéssel

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség. Minden más triviális.

11.3.24. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző tétel állításainak bizonyításakor csak annak igazolásához kellett kihasználnunk a definíció (5) feltételét, hogy $\|x\| = 0$ esetén $x = 0$. Ebből következik, hogy ha az $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezés (5)-nek nem tesz eleget, akkor $x \mapsto \|x\|$ nem norma, de véges félnorma. Így $\|x - y\| = 0$ esetén az x és y elemeket ekvivalensnek tekintve, az ekvivalenciaosztályok tere lesz belső szorzat tér.

11.3.25. Definíció. A H belső szorzat teret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha (mint normált tér) teljes. A legegyszerűbb példák Hilbert-terekre az $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ belső szorzattal \mathbb{R}^n az \mathbb{R} felett és \mathbb{C}^n a \mathbb{C} felett.

11.3.26. Tétel. Legyen H Hilbert-tér, és C zárt, konvex részhalmaza H -nak. Ekkor minden $a \in H$ -hoz létezik pontosan egy olyan $c \in C$, amelyre $\|a - c\| = \text{dist}(a, C)$.

Bizonyítás. Legyen $d = \text{dist}(a, C)$ és legyen $x_n, n = 1, 2, \dots$ egy olyan C -beli sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - x_n\| = d$. Legyen $\varepsilon \geq 0, y, z \in C$ és tegyük fel, hogy $\|a - y\|^2 \leq d^2 + \varepsilon^2, \|a - z\|^2 \leq d^2 + \varepsilon^2$. Ekkor $(y + z)/2 \in C$ és

$$d^2 + \varepsilon^2 \geq \frac{\|y - a\|^2 + \|z - a\|^2}{2} = \frac{\|y + z - 2a\|^2 + \|y - z\|^2}{4} \geq d^2 + \frac{\|y - z\|^2}{4},$$

amiből $\|y - z\| \leq 2\varepsilon$. Ebből az egyenlőtlenségből kapjuk, hogy x_n Cauchy-sorozat. Most legyen $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Az egyértelműség ugyancsak a fenti egyenlőtlenségből következik.

11.3.27. Definíció. Legyen H belső szorzat tér. Ha $x, y \in H$ és $\langle x, y \rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *ortogonálisak*. Jelölése: $x \perp y$. Az $M, N \subset H$ halmazokat *ortogonálisaknak* nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M, y \in N$ -re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset H$ halmaz *ortogonális komplementerén* a H összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: M^\perp .

11.3.28. Ortogonális felbontási tétel. Legyen H egy Hilbert-tér és M egy zárt lineáris altere H -nak. Ekkor minden $x \in H$ egyértelműen felírható $x = y + z$ alakban, ahol $y \in M$ és $z \in M^\perp$.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint létezik x -et legjobban approximáló $y \in M$. Legyen $d = \|x - y\|$. Megmutatjuk, hogy $x = y + (x - y)$ a keresett felbontás, azaz $z = x - y$ ortogonális M -re. Legyen $u \neq 0$ az M tetszőleges eleme, akkor

$$\begin{aligned}d^2 &= \|x - y\|^2 \leq \|x - y + \alpha u\|^2 = \|z + \alpha u\|^2 \\ &= \langle z + \alpha u, z + \alpha u \rangle = d^2 + \alpha \langle u, z \rangle + \overline{\alpha} (\langle z, u \rangle + \alpha \|u\|^2).\end{aligned}$$

Válasszuk α -t úgy, hogy a zárójelben lévő kifejezés eltűnjön, azaz legyen

$$\alpha = -\frac{\langle z, u \rangle}{\|u\|^2}.$$

Ekkor $d^2 \leq d^2 - |\langle z, u \rangle|^2 / \|u\|^2$ adódik, ami csak $\langle z, u \rangle = 0$ esetén lehetséges.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x = y + z = y' + z'$, $(y, y' \in M, z, z' \in M^\perp)$, akkor $M \ni y - y' = z' - z \in M^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle y - y', z' - z \rangle = \langle y - y', y - y' \rangle = \|y - y'\|^2,$$

amiből $y = y'$, $z = z'$.

11.3.29. Riesz reprezentációs tétele. Legyen H Hilbert-tér és f egy folytonos lineáris funkcionál H -n. Ekkor létezik pontosan egy $v \in H$, amelyre $f(x) = \langle x, v \rangle$ bármely $x \in H$ -ra.

Bizonyítás. Legyen N az f nulltere, azaz $N = \{x : x \in H, f(x) = 0\}$. Az N zárt lineáris altere H -nak. Ha $N = H$, akkor $v = 0$ választható. Ha $N \neq H$, akkor $N^\perp \neq \{0\}$. Legyen u egy nem nulla eleme N^\perp -nek. Ekkor bármely $x \in H$ esetén $f(x)u - f(u)x \in N$, mert

$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0.$$

Így

$$0 = \langle f(x)u - f(u)x, u \rangle = f(x)\|u\|^2 - f(u)\langle x, u \rangle,$$

ahonnan $f(x)$ -et kifejezve, $v = \overline{f(u)u} / \|u\|^2$ jelöléssel kapjuk az állítást.

Az egyértelműséghez, ha $f(x) = \langle x, v \rangle = \langle x, v' \rangle$, akkor $\langle x, v - v' \rangle = 0$ mindenütt, amiből $x = v - v'$ helyettesítéssel $v = v'$.

11.3.30. Definíció. Legyenek H és K Hilbert-terek \mathbb{K} felett. Egy $A : H \rightarrow K$ folytonos lineáris operátor adjungáltján azt az $A^* : K \rightarrow H$ leképezést értjük, amelyre

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle \quad \text{minden } x \in H, y \in K\text{-ra.}$$

Az előző tétel szerint ez az összefüggés egyértelműen definiálja A^* -ot minden $y \in K$ -ra. Ha $H = K$ és $A^* = A$, akkor A -t önadjungáltnak nevezzük.

Könnyű kiszámolni, hogy A^* folytonos lineáris leképezése K -nak H -ba, $(A^*)^* = A$ és $\|A^*\| = \|A\|$. Ha L egy harmadik Hilbert-tér \mathbb{K} felett, és $B : K \rightarrow L$ is folytonos lineáris operátor, akkor $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$. Ebből következik, hogy bármely A -ra $A^* \circ A$ és $A \circ A^*$ önadjungált operátorok H -n, illetve K -n.

* **11.3.31. Definíció.** Legyenek H és K Hilbert-terek \mathbb{K} felett. Egy $A : H \rightarrow K$ folytonos lineáris leképezést ortogonális injekciónak nevezünk, ha

$$\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{minden } x, y \in H\text{-ra.}$$

Nem nehéz belátni, hogy A akkor és csak akkor ortogonális injekció, ha $A^* \circ A$ az identikus leképezése H -nak önmagára.

* **11.3.32. Tétel.** Legyenek H és K véges dimenziós Hilbert-terek \mathbb{R} felett, és $A : H \rightarrow K$ egy lineáris leképezés. Ha $\dim(H) \leq \dim(K)$, akkor létezik egy $B : H \rightarrow H$ önadjungált operátor és egy $C : H \rightarrow K$ ortogonális injekció úgy, hogy $C \circ B = A$.

Bizonyítás. Legyen $S(x, y) = \langle A(x), A(y) \rangle$, ha $x, y \in H$ és válasszunk olyan

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

ortonormált bázist H -ban, amelyre az S szimmetrikus bilineáris forma diagonális alakú, azaz $S(e_j, e_i) = 0$, ha $i \neq j$. Legyen $B(e_i) = \|A(e_i)\|e_i$, ha $1 \leq i \leq m$, és válasszunk úgy C -t, hogy $C(e_i) = A(e_i)/\|A(e_i)\|$ teljesüljön, ha $A(e_i) \neq 0$, azon H -beli vektorok alterét pedig, amelyeket A a nullába visz át, C izometrikusan képezze le az A képterére ortogonális K -beli vektorok alterébe.

* **11.3.33. Lemma.** Legyenek H és K véges dimenziós Hilbert-terek \mathbb{R} felett úgy, hogy $\dim(H) \leq \dim(K)$, legyen $A : H \rightarrow K$ egy lineáris leképezés, és $C \circ B$ az előző tételben szereplő felbontása A -nak. Ekkor a H tér bármely e_1, e_2, \dots, e_m ortonormált bázisára

$$0 \leq |\det(B)|^2 = \det(B^* \circ B) = \det(A^* \circ A) \leq \prod_{i=1}^m \|A(e_i)\|^2,$$

és az első egyenlőtlenségben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha A nem kölcsönösen egyértelmű.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $A^* \circ A = B^* \circ B$, mivel

$$(1) \quad \langle x, A^*(A(y)) \rangle = \langle A(x), A(y) \rangle = \langle B(x), B(y) \rangle = \langle x, B^*(B(y)) \rangle$$

minden $x, y \in H$ -ra. Mivel B önadjungált,

$$\det(A^* \circ A) = \det(B^* \circ B) = \det(B \circ B) = |\det(B)|^2 \geq 0.$$

Az (1)-beli első egyenlőségből az is következik, hogy $A(y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $A^*(A(y)) = 0$.

Legyen most $v_i = B(e_i)$, és bontsuk fel v_i -t $v_i = u_i + w_i$ alakban, ahol u_i a v_1, v_2, \dots, v_{i-1} vektorok lineáris kombinációja, w_i pedig ortogonális v_1, v_2, \dots, v_{i-1} -re. Ekkor

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, w_{i+1}, \dots, w_m) &= \det(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_m) \\ &\quad + \det(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, u_i, w_{i+1}, \dots, w_m). \end{aligned}$$

Mivel a jobb oldali összeg második tagja nulla, indukcióval azt kapjuk, hogy

$$|\det(B)| = \det(v_1, v_2, \dots, v_m) = \det(w_1, w_2, \dots, w_m) = \prod_{i=1}^m \|w_i\| \leq \prod_{i=1}^m \|v_i\|.$$

* **11.3.34. Feladat [9].** Ha egy X normált térben $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ esetén van olyan $c \geq 0$, hogy $x = cy$ vagy $y = cx$, akkor a normált teret szigorúan normáltnak nevezzük. Igazoljuk, hogy egy X normált térre az alábbi állítások ekvivalensek:

- (1) X szigorúan normált;
- (2) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ esetén $\|(x + y)/2\| < 1$;
- (3) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$ esetén $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < 1$.

* **11.3.35. Feladat [5].** Legyen X szigorúan normált tér, $K \subset X$ konvex halmaz. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in X$ -hez legfeljebb egy olyan $y \in K$ létezik, amelyre $\|x - y\| = d(x, K)$.

IRODALOM

- [1] Alexandrov, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [2] Berberian, S. K.: *Measure and integration*. Collien-Macmillan, New York-London, 1965.
- [3] Bourbaki, N.: *Általános topológia I-III (oroszul)*. Nauka, Moszkva, 1968, 1969, 1975.
- [4] Bourbaki, N.: *Integrálás I-III (oroszul)*. Nauka, Moszkva, 1967, 1970, 1977.
- [5] Daróczy Z.: *Mérték és integrál*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [6] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis I-IX*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971-1987.
- [7] Dunford, N. – Schwartz, J. T.: *Linear operators I-III*. Wiley-Interscience, New York-London-Sydney-Toronto, 1958-1971.
- [8] Federer, H.: *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
- [9] Fried E.: *Általános algebra*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [10] Gelbaum, B. R.: *Problems in analysis*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [11] Gelbaum, B. R. – Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis*. Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.
- [12] Gihman, J. I. – Szkorohod, A. V.: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
- [13] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet*. Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [14] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [15] Halmos P. R.: *Mértékelmélet*. Gondolat, Budapest, 1984.
- [16] Hewitt, E. – Ross, K. A.: *Abstract harmonic analysis I-II*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1963, 1970.

-
- [17] Hewitt, E. – Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.
- [18] Hille, E. – Phillips, R. S.: *Functional analysis on semi-groups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, 1957.
- [19] Kelley, J. L.: *General topology*. D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1955.
- [20] Kingman, J. F. C. – Taylor, S. J.: *Introduction to measure and probability*. University Press, Cambridge, 1966.
- [21] Kirillov, A. A.: *Elements of the theory of representations*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [22] Kirillov, A. A. – Gvisiani, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [23] Kluvánek, I. – Knowles, G.: *Vector measures and control systems*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam–Oxford, 1975.
- [24] Kolmogorov, A. N.: *A valószínűségszámítás alapfogalmai*. Gondolat, Budapest, 1982.
- [25] Kolmogorov, A. N. – Fomin, Sz. V.: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [26] Laczkovich M.: *Valós függvénytan*. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995.
- [27] Losonczi L.: *Funkcionálanalízis I*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [28] Magyar Z.: *The Lebesgue integral*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.
- [29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [30] Morgan, F.: *Geometric measure theory. A beginner's guide*. Academic Press, 1988.
- [31] Nachbin, L.: *The Haar integral*. D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1965.
- [32] Natanson, I. P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1954.
- [33] Neveu, J.: *Mathematical foundations of the calculus of probability*. Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.
- [34] Oxtoby, J. C.: *Measure and category*. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1971.
- [35] Parthasarathy, K. R.: *Probability measures on metric spaces*. Academic Press, New York–London, 1967.
- [36] Rényi A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [37] Riesz F. – Szőkefalvi-Nagy B.: *Funkcionálanalízis*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [38] Rogers, C. A.: *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [39] Royden, H. L.: *Real Analysis*. Macmillan Co., New York, 1963.
- [40] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

-
- [41] Rudin, W.: *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [42] Rudin, W.: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [43] Saks, S.: *Theory of the integral*. Warszawa, G. E. Stechert Co., New York, 1937.
- [44] Sikorski, R.: *Advanced calculus*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.
- [45] Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [46] Vlagyimirov, V. Sz.: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [47] Yosida, K.: *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.
- [48] Zaanen, A. C.: *Integration*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- [49] Zaanen, A. C.: *Linear analysis*. Groningen, Amsterdam, 1953.
- [50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its applications I–IV*. Springer-Verlag, New York, 1990.

MUTATÓ

A legfontosabb hivatkozás (általában a definíció) oldalszáma *dőlt* betűvel van szedve. A külső, azaz más könyvekre történő hivatkozások előtt szögletes zárójelben szerepel az adott könyv sorszáma az irodalomjegyzékben.

- A^* 180
- Abel-csoport [9] 95, 164
- Abel, Niels Henrik (1802–1829) 164
- $[a, b)$ [40] 41, 33
- $(a, b]$ [40] 41, 33
- (a, b) [40] 41, 33
- (a, b) (rendezett pár) [13] 31
- $[a, b]$ [40] 41, 33
- $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mérhető 44
- AB [9] 58
- abszolút érték [40] 24, 67
- abszolút érték homogén 172
- $||$ [40] 24, 86, 147, 172
- abszolút folytonos függvény 9, 117, 118, 119, 121, 122, 126, 133
- \ll 82, 85, 89, 91, 118
- abszolút folytonos komplex mérték 89, 91
- abszolút folytonos mérték 82
- abszolút folytonosság, integrálé 60
- abszolút konvergencia 85
- additív 15, 178
- additivitás 13, 58
- adjungált 180
- affin 78, 79, 140
- akárhányszor differenciálható 146, 147, 148
- Alexander, James Waddell (1888–1971) 166
- Alexander tétele 166
- Alexandrov, Pavel Szergejevics 183
- α 37, 80, 132, 133, 135
- algebra [9] 238, 98, 150, 173, 175, 177
- algebrai művelet 11
- algebra-izomorf 157
- alsó határ [40] 14
- alsó határérték [40] 65
- alsó Riemann-integrál [40] 130
- alsó Riemann-összeg [40] 129
- altér 130, 161, 162, 165, 166
- altér, mértéktéré \rightarrow mértéktér altere
- altér, metrikus téré 161
- altér, teljes 14
- altértopológia 161
- \mathcal{A} -mérhető 44
- \mathcal{A} 12
- \mathcal{A}^n 75
- analízis 82, 172
- $A(P, f)$ [40] 129, 70
- approximációs eljárás 62, 125
- approximációs lemma 51, 52, 57, 64, 66, 75, 124
- approximációs tétel 22, 46
- áramlás 141
- Arkhimédész (i. e. 287–212) 7, 54
- asszociativitás 145
- átmérő 159

- Baire-féle függvény 70
 Baire [beer], René (1864–1932) 8, 70, 163
 Baire-tétel 163
 bal Haar-mérték 41, 99
 bal invariáns 41
 bal oldali határérték [40] 103, 105
 balról folytonos 31, 33, 34, 36, 105, 121, 124
 Banach-algebra 155, 173, 177, 178
 Banach, Stefan (1892–1945) 172, 173
 Banach-tér 62, 67, 102, 119, 120, 168, 172, 177, 178
 Banach-térbeli értékű 63, 67, 85, 121
 Banach-térbeli értékű függvények integrálja 62
 bázis, mértéktéré 68
 bázis, topológiáé 161, 162
 belseje 30, 160
 belső mérték 19
 belső pont 160
 belső regularitás 22
 belső szorzat 65, 67, 68, 178, 179
 belső szorzat tér 65, 178, 179
 beosztás 70
 Beppo Levi tétele → Levi tétele
 Berberian, Sterling K. 183
 β^n 144
 bilineáris forma [14] 43, 181
 \mathcal{BL} 178
 \mathbb{B} 159
 \mathcal{B} 173, 177
 Bochner, Salomon (1899–1982) 158
 Bochner tétele 158
 Borel, Félix Edouard Justin Émile (1871–1956) 8, 166
 Borel-függvény 44, 47, 102, 114, 122, 124, 125, 134, 142
 Borel-halmaz 20, 23, 24, 30, 33, 38, 44, 79, 81, 102, 110, 111, 113, 114, 118, 124, 125, 128, 140, 154, 155
 Bourbaki, Nicolas 85, 168, 183
 bővített valós szám 11
 bővített valós számok szokásos topológiája 11, 160
 bővülő 13
 Bunyakovszkij, Viktor Jakovlevics (1804–1889) 178
 burok, konvex 170
 burok, mértékelméleti 19
 \mathbb{C} [40] 22
 Cantor-halmaz 27, 29, 30, 40, 120, 162
 Carathéodory, Constantin (1873–1950) 15
 Cauchy [kósi], Augustin (1789–1857) 178
 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség 178
 Cauchy-sorozat [40] 62, 52, 172, 179
 Cavalieri-elv 81
 Cavalieri [kavalieri], Francesco Bonaventura (1598?–1647) 81
 centrált 41, 166
 \mathbb{C}^n [14] 14
 \mathcal{C} 157, 173, 175, 177
 \mathcal{C}_0 149, 150, 177
 conv 170
 csavarvonal 142
 Csebisev-egyenlőtlenség 55, 93, 94
 Csebisev, Pafnutyin Lvovics (1821–1894) 55
 * 144, 145, 150, 154
 csökkenő sorozat konvergencia 9
 csoport 41, 149, 168
 Czách László 9
 d [40] 41, 159, 160, 170, 182
 Daróczy Zoltán 9, 183
 δ 155
 Δ 33
 derivált [40] 111, [40] 221, 110, 150
 derivált, parciális [40] 224
 Descartes-szorzat [13] 31, [13] 41
 \prod [13] 41
 \times [13] 31, 73
 det [14] 101, 79, 136, 140
 determináns [14] 101, 140, 168
 diadikus 28
 diadikus racionális 164
 diam 37, 131, 132, 159, 163, 170
 Dieudonné, Jean 158, 183

- differenciálás 9, 123
 differenciálegyenlet 152
 differenciálható 9, 72, 117, 118, 119,
 120, 136, 141
 differenciáloperátor 148
 differenciálszámítás 172
 dim [14] 23, 40, 181
 dimenzió, Hausdorff- 40
 dimenzió, vektortéré [14] 23
 Dirac-mérték 33, 61, 82, 155
 Dirac [dirák], Paul Adrien Maurice (1902–
 1984) 33
 \mathcal{D} 147, 148
 dist 159, 160, 162, 170, 179
 diszjunkt 7, 12, 13, 24, 29, 40, 60, 86,
 111
 diszkrét topologikus tér 160
 div 141, 142
 divergencia 141
 divergenciatétel 141
 dmn [13] 34, 44
 $\frac{d\nu_\alpha}{d\mu}$ 84, 89
 d_0 49, 52
 d_p 69
 duális 92, 130, 140
 duális tér 178
 Dunford, Nelson 85, 183
 d_∞ 69
- e [40] 73
 e 149, 152
 egész szám 9
 egyenes 130
 egyenletesen folytonos [40] 99, 117, 146,
 157, 161, 172
 egyenletes konvergencia 50, 52, 57, 98,
 100, 109, 173, 175, 176
 $=$ [13] 14, 65, 68, 72
 egyenlő halmazok [13] 14
 egyértelmű 98
 egyesítés [13] 40, 162
 \cup [13] 40
 egységelem 145, 155, 168, 169
 egységelemes kommutatív Banach-algebra
 155
 egység felbontása 95, 97, 164, 167
- egységgömb 37
 egységvektor 131, 141
 egyszerű függvény 51, 55, 57, 60, 62, 64,
 66, 88, 102
 ekvivalenciaosztály 65, 179
 ekvivalenciareláció [13] 34, 28, 65
 ekvivalens 179
 \sim [13] 34
 eleme [13] 13
 \in [13] 13
 ellipszis 142
 ellipszoid 142
 előjeles mérték 85
 eloszlás 124
 eloszlásfüggvény 124
 első kategóriájú 29, 30, 160, 162
 eltérés 14, 49, 58, 69, 160, 172
 eltérésből származó topológia 160
 eltolás 140, 168
 eltolásinvariáns 79, 145, 172
 eltűnik a végtelenben 177
 ε -háló 169
 értékészlet [13] 34, 51, 54, 68, 127
 értelmezési tartomány [13] 34, 54
 euklideszi tér [40] 25, 61, 62
 e^x [40] 187
 exponenciális függvény [40] 187
- $!$ 147
 Fatou-lemma 56, 57, 59, 64, 66
 Fatou [fatu], Pierre (1878–1929) 56
 Federer, Herbert 9, 140, 142, 183
 felcserélhető 123
 félgűrű 20
 féligrendezett halmaz [13] 57
 félmétrikus tér 160, 172
 félnorma 172, 179
 félnormált tér 172
 felső határ [40] 14, 62
 felső határérték [40] 65
 felső Riemann-integrál [40] 130
 felső Riemann-összeg [40] 129
 felszín 7, 14, 38, 130, 140, 142
 felszínképlet 130, 137, 139, 140
 felület 141
 felületi integrál 130, 139, 141
 felülről korlátos [13] 59

- 160
- finom 110, 111, 127
- Fischer, Ernst (1875–1959) 65
- fizikai jelentés 110, 141
- $f(A)$ [13] 42
- f' [40] 111, [40] 221
- f^{-1} [13] 44
- $f^{-1}(A)$ [13] 42
- $f \circ g \rightarrow \circ$
- $\check{f} \rightarrow \check{}$
- $f|_A$ [13] 37
- f^- 58
- $\|f\|_p \rightarrow \| \cdot \|_p$
- f^+ 58
- $\hat{f} \rightarrow \hat{}$
- $f(x)$ [13] 42
- $f : x \mapsto y$ [13] 36
- $f : X \rightarrow Y$ [13] 36
- \mathcal{F}_σ 30, 161, 163
- folytonos 11, 24, 30, 32, 33, 44, 46, 52, 68, 70, 71, 72, 99, 104, 107, 109, 117, 120, 121, 125, 126, 137, 149, 150, 158, 160, 161, 163, 164, 166, 168, 170, 172, 173, 175, 177
- folytonosan differenciálható 150, 151
- folytonos, egyenletesen [40] 99
- folytonos lineáris funkcionál 83, 100, 101, 178, 180
- folytonos lineáris operátor 144, 177, 178, 180
- folytonossági pont 31, 71, 105, 125
- Fomin, Szergej Vasziljevics 184
- forrásintenzitás 141
- Fourier [furié], Jean-Baptist Joseph de (1768–1830) 8, 156
- Fourier-transzformáció 143, 149, 150, 153, 154, 156, 157
- Fourier-transzformált 149, 153, 156
- $F(P, f)$ [40] 129, 70
- fraktál 40
- Fridli Sándor 9
- Fried Ervin 9, 183
- Fubini, Guido (1879–1943) 73, 120
- Fubini-tétel 73, 76, 77, 79, 98, 99, 121, 123, 131, 134, 140, 145, 150, 151, 152, 154, 155
- Fubini tétele monoton függvényekről 120
- függvény [13] 36, 116, 125, 126, 133, 143, 144
- függvény, Borel- 44
- függvényegyenlet 149
- függvény, karakterisztikus [13] 38
- függvény, mérhető 44
- függvény, normalizált 31
- függvénytér 172
- függvénytér 172
- függvénytér 173
- funkcionálanalízis 8, 158
- gammafüggvény [40] 201, 37
- Γ [40] 201, 37, 40, 80
- Gauss–Green-tétel 141
- Gauss, Karl Friedrich (1777–1855) 141
- Gauss–Osztrogradszkij-tétel 130, 141
- Gelbaum, Bernard R. 183
- generált σ -algebra 20, 81
- geometria 8, 37, 38, 140
- Gihman, Jozsif Iljics 183
- Gilányi Attila 9
- \mathcal{G}_δ 22, 33, 38, 161, 163
- gömb 67, 80, 111, 142
- gömbfelület 159
- gömb térfogata 37
- görbe alatti terület 76
- görbe menti integrál 130, 139
- Green [grin], Georg (1793–1841) 141
- Gvisiani, Alekszej Dzsermenovics 184
- gyorsan csökkenő 148
- Haar Alfréd (1885–1933) 8, 41
- Haar-féle hányados 41
- Haar-mérték 41, 98, 99
- Hahn-féle felbontás 88
- Hahn-féle felbontási tétel 90
- Hahn, Hans (1879–1934) 90
- halmaz [13] 13
- halmaz feletti integrál 55, 58, 61, 63, 88
- halmazfüggvény 7, 14, 33, 73, 76, 85, 124
- halmazfüggvényhez tartozó külső mérték 17

- $\{x \in A : S(x)\}$ [13] 17
 halmaz képe [13] 42
 halmaz mértéke \rightarrow mérték
 halmazok egyenlősége [13] 14
 halmazok különbsége [13] 26, 12
 halmazok távolsága 20, 38, 160
 Halmos Pál R. 9, 85, 172, 183
 háló, ε - 169
 háromszög-egyenlőtlenség 172
 hasonlóság 40
 határ 141, 160
 határérték [40] 57, 52, 54, 62, 67, 72, 151, 172
 határérték, bal oldali [40] 103
 határérték, jobb oldali [40] 103
 ∂ 160
 Hausdorff-csoport 41, 168
 Hausdorff-dimenzió 40
 Hausdorff, Felix (1868–1942) 37, 163, 170
 Hausdorff külső mérték 37, 140
 Hausdorff-mérték 37, 40, 68, 130, 132
 Hausdorff-távolság 132, 170
 Hausdorff-tér 22, 23, 163, 166
 Hausdorff topologikus csoport 169
 Heaviside-függvény 33
 Heaviside [hevizáj], Oliver (1850–1925) 33
 Heine, Eduard Heinrich (1821–1882) 166
 helyettesítés 121, 125, 126
 helyettesítéses integrálás 121, 126, 127, 139
 Hewitt, Edvin 183, 184
 Hilbert, David (1862–1943) 179
 Hilbert-tér 67, 168, 179, 180, 181
 Hille, Einar 184
 \mathcal{H}^m 37
 Hölder-egyenlőtlenség 65, 68, 92, 93, 145
 Hölder-folytonos 40
 Hölder-konstans 40
 Hölder, Otto (1859–1937) 65
 homeomorf 160, 162, 176
 homeomorfizmus 125, 160, 166, 168
 homogenitás 58
 homomorfizmus [9] 28, 149
 hossz [40] 26, 25
 || [40] 26
 hosszúság 7
 \mathcal{I} 62
 \mathfrak{S} [40] 24
 indiszkrét topologikus tér 160
 inf [40] 14, 48
 infimum \rightarrow alsó határ
 integrál 7, 8, 54, 58, 61, 63, 69, 72, 76, 83, 109, 110, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 138, 139, 140, 142, 144, 154
 integrál abszolút folytonossága 60
 integrálás 123, 143
 integrál, halmaz felett 55, 58, 61, 63, 88
 integrálható 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 85, 88, 89, 91, 115, 122, 144, 147, 148, 150, 151
 \int [40] 130, 54, 58, 61, 63
 \int_A 55, 58, 60, 61, 88
 \int_a^b 69
 \int_- [40] 130
 \int^- [40] 130
 $\int f dg$ [40] 130
 integrálközelítő összeg 55
 integráltranszformáció 143, 144
 integráltranszformációs formula 130, 139, 140
 integrál tulajdonságai 63
 intervallum [40] 41, 23, 25, 31, 33, 34, 36, 68, 69, 117, 124, 141, 161, 175
 invariáns mérték 41
 inverz 168
 inverziós tétel 152, 153
 inverz reláció [13] 44
 irányítás 127
 irracionális 30, 163
 ívhossz 7, 38, 130, 140, 142
 izodiametrikus egyenlőtlenség 132
 izolált pont 160
 izometria 140
 izometrikus 39, 102, 153, 181
 izometrikusan izomorf beágyazás 155
 izomorf 102, 150

- J 78, 79, 136, 137, 138, 139, 140
 Jacobi-determináns [40] 243, 136
 Járai Zoltán 9
 Jegorov, Dmitrij Fjodorovics (1869–1931) 49
 Jegorov tétele 49, 50
 jobb Haar-mérték 41, 89
 jobb invariáns 41
 jobb oldali határérték [40] 103, 105
 jobbról folytonos 105, 121
 jól vág ketté 15
 Jordan [zsord^hE a], Camille (1838–1922) 7, 88, 104, 105
 Jordan-felbontás 88, 89, 91, 104, 105, 106, 107, 108, 118
 Jordan felbontási tétele 104

 \mathbb{K} 172
 karakter 149, 156
 karakterisztikus függvény [13] 38, 62, 69, 109, 125, 128, 129, 140
 Kelley, John L. 184
 képzetes rész [40] 24, 86
 χ^m 37, 38, 39, 40, 132
 χ_s^m 37
 Kingman, John Frank Charles 184
 Kirillov, Alekszander Alekszandrovics 184
 \mathcal{K} 66, 100, 106, 177
 $<$ [13] 57, 33, 124
 \leq [13] 57, 33
 kiterjesztés [13] 37, 17, 33, 47, 175, 177
 kitevő 40
 kiválasztási axióma [13] 61, 28
 klasszikus analízis 172
 Kluvánék, Igor 184
 Knowles, Greg 184
 kofelszínképlet 130, 140
 kölcsönösen egyértelmű 126, 127, 136, 138, 139, 153, 160, 166, 181
 Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics (1903–1987) 8, 184
 kommutatív 145, 168
 kommutatív Banach-algebra 145, 155
 kommutatív csoport [9] 95
 kompakt 22, 23, 27, 40, 41, 46, 67, 111, 115, 166, 167, 168, 169, 170, 173, 175, 177
 kompakt Hausdorff-tér 167
 kompakt konvex halmaz 131, 132
 kompakt részhalmaz 166
 kompakt tartójú 147, 166, 177
 kompakt tartójú folytonos 67, 167, 177
 komplex 175
 komplex egységkör 161
 komplex értékű 61, 62, 121
 komplex mérték 85, 86, 88, 89, 90, 91, 93, 100, 101, 102, 121
 komplex mérték, abszolút folytonos 89, 91
 komplex mértékek szorzata 91
 komplex mérték, szinguláris 89
 komplex mérték, teljes 89
 komplex Radon-mérték 89, 102, 154, 155
 komplex szám [40] 22
 kompozíció [13] 44, 160
 kondenzációs pont 29, 160
 konjugált [40] 24
 konjugált lineáris 178
 konjugált tér 102, 178
 konstans 37
 konstans függvény 173
 konstansszoros 102
 kontinuum 24, 27, 28, 40
 kontrakció 40
 konvergál 51
 konvergencia, egyenletes 173
 konvergenciátétel 43
 konvergens 58, 66, 67
 konvergens részsorozat 50, 169
 konvex 24, 64, 65, 68, 81, 170, 179, 182
 konvex burok 132, 170
 konvolúció 143, 144, 145, 154, 155
 koordináta 140, 141
 koordinátafüggvény 44, 61
 \circ 160
 \circ [13] 44, 44
 korlátos 61, 109, 111, 126, 130, 141, 148, 166, 177
 korlátos, felülről [13] 59
 korlátos folytonos függvények tere 173

- korlátos függvény 69, 70, 72, 92, 93
 korlátos függvények tere 173
 korlátos lineáris funkcionál 92, 94, 103, 106, 119, 178
 korlátos lineáris operátor 178
 korlátos változású 103, 109, 119, 121
 környezet 22, 30, 146, 160, 161, 168, 169
 közelítő egység 145, 146, 147, 148
 Kronecker-delta 76
 Kronecker, Leopold (1823–1891) 76
 ξ_A [13] 38
 különbség, halmazoké [13] 26, 12
 \setminus [13] 26
 külső mérték 14, 15, 17, 18, 19, 20, 31, 34, 37, 73, 75, 76, 95
 külső mértékből származó mérték 15
 külső mérték, halmazfüggvényhez tartozó 17
 külső mérték, reguláris 19
 külső mértékre nézve mérhető 15
 külső normális 141
 külső regularitás 22
- Laczkovich Miklós 9, 40, 85, 184
 λ 25, 26, 27, 38
 λ_g 31, 33, 98, 106, 107, 117
 λ_g^n 34, 35
 λ^n 77, 79, 80, 81, 132
 lánc [13] 57
 láncszabály 85
 Lebesgue-felbontás 84, 114
 Lebesgue felbontási tétele 82, 84, 85
 Lebesgue-féle szinguláris függvény 120
 Lebesgue [löbög], Henry Leon (1875–1941) 8, 50, 54, 59, 63, 69, 70, 76, 82, 84, 89, 106, 116, 117, 120, 149
 Lebesgue-integrál 54, 69, 72, 76, 80, 122, 126, 145
 Lebesgue-integrálható 70, 72, 120
 Lebesgue-kritérium 54, 69, 106
 Lebesgue külső mérték 25
 Lebesgue külső mérték, n -dimenziós 77
 Lebesgue majorált konvergencia tétele 59, 61, 63, 66, 71, 73, 90, 91, 93, 148, 151, 153, 155
 Lebesgue-mérhető 25, 26, 27, 30, 81, 126
 Lebesgue-mérhető függvény 144
- Lebesgue-mérhető halmaz, n -dimenziós 77
 Lebesgue-mérték 9, 25, 26, 27, 31, 54, 68, 69, 76, 82, 111, 120, 124, 130, 144, 145
 Lebesgue-mérték, n -dimenziós 35, 37, 77
 Lebesgue-mérték, normalizált 144
 Lebesgue-pont 116
 Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel 82, 89, 101
 Lebesgue–Stieltjes-integrál 69, 71, 108, 121, 123, 124, 125
 Lebesgue–Stieltjes külső mérték 31
 Lebesgue–Stieltjes külső mérték, n -dimenziós 34
 Lebesgue–Stieltjes-mérték 31, 33, 69, 106, 117, 118, 120
 Lebesgue–Stieltjes-mérték, n -dimenziós 34, 35
 Lebesgue-sűrűség 116, 141
 Lebesgue sűrűségi tétele 116
 Lebesgue tétele 50
 Lebesgue tétele monoton függvény deriváltjáról 117
 lefedés 111, 166
 lefedési reláció 110, 111, 128, 133
 Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) 9, 118, 122
 Leibniz-szabály 122
 létezik a határérték 58
 létezik az integrál 58, 60, 73
 Levi [lévil], Beppo (1875–1961) 57
 Levi tétele 57, 58, 60, 62, 66, 75, 83, 84, 88, 124, 139
 lezárt 160
 L'Hospital-szabály [40] 117, [40] 121, 145
 lim [40] 57
 $\lim_{t \uparrow x}$ [40] 103
 $\lim_{t \downarrow x}$ [40] 103
 lim inf [40] 65, 48, 56
 lim sup [40] 65, 48
 lineáris 178
 lineáris algebra 172
 lineáris altér 172, 173
 lineárisan rendezett 160
 lineáris funkcionál 95, 103, 172

- lineáris homeomorfizmus 168
 lineáris izometria 153
 lineáris kombináció 156
 lineáris leképezés 136, 137, 138, 140,
 149, 178, 181
 lineáris operátor 172, 177
 lineáris tér [14] 13, 170, 172, 178
 lineáris transzformáció 79
 lineáris transzformáció nyoma [14] 107
 linearitás 63
 Lip 136, 161
 Lipschitz-függvény 9, 39, 68, 117, 119,
 128, 134, 138, 140, 141, 161, 162
 Lipschitz-konstans 161
 Lipschitz [lipsic], Rudolf Otto Sigismund
 (1832–1903) 9, 161
 \mathcal{L} 25, 81
 \mathcal{L}_g 31
 \mathcal{L}_g^n 34
 \mathcal{L}^n 77
 l^p 67, 68
 l^∞ 67
 L^1 68, 94, 101, 119, 145, 149, 150, 151,
 152, 153, 154, 155, 156
 L^2 67, 83, 153
 L^0 49, 52, 67, 69
 L^p 54, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 92, 144,
 145, 146, 147, 148, 156
 L^∞ 68
 logikai függvény 43
 lokális 110
 lokálisan kompakt 24, 47, 66, 95, 98, 99,
 100, 102, 166, 167, 168, 177
 lokálisan kompakt csoport 41
 lokálisan Lipschitz 9, 133, 134, 136, 137,
 139, 140, 161
 Losonczi László 184
 Luzin, Nyikoláj Nyikolajevics (1883–
 1950) 46
 Luzin-tétel 46, 135
- M 102, 106, 107, 154, 155, 156, 157
 magfüggvény 143, 144
 Magyar Zoltán 184
 majdnem minden 55, 66, 68, 70, 115,
 116, 120, 122, 141
 majdnem mindenütt 43, 44, 49, 52, 55,
 58, 63, 64, 65, 69, 71, 72, 82, 84, 85,
 89, 117, 118, 119, 145, 152, 153
 majdnem mindenütt differenciálható
 126, 133, 134
 majdnem mindenütt konvergál 48, 49,
 50, 52, 53
 majoráns kritérium 58, 63, 64
 második kategóriájú 30, 160, 163
 max [13] 59
 maximális [13] 59, 111
 maximum [13] 59, 173
 \sim 144, 153
 megszámlálható 8, 9, 12, 13, 14, 20, 24,
 27, 57, 105, 111, 115, 137, 160, 161,
 162, 163, 165, 166, 170
 megszámlálható bázis 46, 51, 68, 77,
 165, 168
 megszámlálható bázisú 24, 44, 47, 165,
 166
 megszorítás [13] 37
 mérhető 12, 15, 17, 18, 20, 22, 31, 34,
 38, 44, 46, 52, 63, 78, 126, 134, 137,
 140
 mérhető függvény 44, 45, 46, 47, 48, 49,
 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 62,
 63, 64, 65, 67, 68, 76, 82, 90, 92, 94,
 115, 124, 139, 140
 mérhető halmaz 12, 13, 20, 22, 33, 60,
 73, 76, 86, 116, 126, 136
 mérhető, külső mértékre nézve 15
 mérhető tér 12, 43, 44, 45, 48, 51, 82,
 85, 86, 88, 89, 90, 91
 merőleges 130
 mérték 7, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 33,
 41, 54, 82, 84, 85, 124
 mértékben konvergál 49, 50, 52, 61
 mértékben konvergens 50, 58, 76
 mértékek szorzata 73, 75, 76, 98
 mérték, előjeles 85
 mérték folytonossága 13, 49, 56, 77, 124,
 125
 mérték, külső mértékből származó 15
 mérték normája 102
 mérték, teljes 12

- mértéktér 11, 12, 13, 14, 19, 43, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 68, 69, 73, 75, 76, 82, 85, 89, 92, 94
 mértéktér altere 14, 55, 58, 61, 63
 mértéktér bázisa 68
 mértéktérek szorzata 35
 mérték természetes kiterjesztése 18
 mértéktér, teljes 12
 mértéktér természetes kiterjesztése 18
 mértéktér, valószínűségi 12
 mértéktér, véges 12
 mérték, valószínűségi 12
 metrika [40] 41, 49, 161, 172
 metrikából származó topológia 159
 metrikus tér [40] 41, 8, 20, 37, 39, 40, 48, 52, 69, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 169, 170, 172
 metrikus tér altere 161
 metrizable 159, 161, 162, 165, 168
 metszet [13] 40, 12, 161, 163
 \cap [13] 40
 Mikolás Miklós 184
 min [13] 59
 minimális [13] 59, 104
 minimum [13] 59, 173
 Minkowski-egyenlőtlenség 64, 65
 Minkowski, Hermann (1864–1909) 64
 $-\infty$ 11
 momentum 124
 monom 148
 monoton 103, 121
 monoton csökkenő 52
 monotonitás 13, 55
 monoton lineáris funkcionál 95, 98, 101
 monoton növekedő 32, 36, 104, 109, 117, 120, 121, 124, 125, 146
 monoton növekedő függvény 31, 33, 71, 98, 104, 106, 121
 Morgan, Frank 184
 multiindex 147, 148
 multiplicitás 126, 127
 μ^n 75
 művelet 143, 168, 173, 177, 178
 \mathbb{N} [13] 45
 Nachbin, Leopoldo 184
 nagyítás 112
 $>$ [13] 57, 33
 \geq [13] 57, 33
 nagyon sima 147
 nagy számok gyenge törvénye 76
 Natanson, Izidor Pavlovics 184
 n -dimenziós intervallum 33
 n -dimenziós Lebesgue külső mérték 77
 n -dimenziós Lebesgue-mérhető halmaz 77
 n -dimenziós Lebesgue-mérték 35, 37, 77, 143
 n -dimenziós Lebesgue–Stieltjes külső mérték 34
 n -dimenziós Lebesgue–Stieltjes-mérték 34, 35
 negatív rész 54, 58
 \neq [13] 14
 nem eleme [13] 18
 \notin [13] 18
 nem mérhető 24, 28, 30
 nemnegatív 7, 12, 14, 17, 34, 54, 55, 82, 115
 nemnegatív függvény 51, 62
 Neveu, Jaques 184
 Newton [njútn], Isaac (1643–1727) 9, 118
 Newton–Leibniz-formula 118, 122
 N_g 126, 127, 137
 Nikodym, Otto (1888–1974) 82, 84, 89
 nívóhalmaz 9, 44, 124
 norma [40] 26, 65, 67, 68, 69, 92, 100, 106, 148, 172, 177, 178
 $\| \cdot \|$ [40] 26, 92, 100, 102, 154, 172, 177, 178, 182
 normális 141, 163, 164, 165, 167, 175
 normalizált függvény 31, 32, 105, 107
 normalizáltja 32
 normalizált Lebesgue-mérték 144
 normált algebra 172, 177, 178
 normált tér 65, 69, 172, 173, 177, 178, 181, 182
 normált térbeli értékű 177
 norma, uniform \rightarrow uniform norma
 növekvő sorozat konvergens 9

- ν 25
 ν_g 31
 ν_g^n 34
 0 9, 55
 nulla mértékű 12, 27, 28, 43
 nullsorozat 67
 nulltér 180
 ν^m 37
 ν_δ^m 37
 nyílt 20, 22, 23, 27, 31, 35, 40, 41, 44, 67, 77, 95, 120, 125, 134, 136, 137, 139, 140, 141, 142, 145, 147, 148, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168
 nyílt gömb 52, 159
 nyílt halmazok struktúratétele 32, 165
 nyílt intervallum 29, 77, 125, 160, 165
 nyom, lineáris transzformációé [14] 107
- Olmsted, John M. H. 183
 ω 163
 önadjungált 137, 180, 181
 ortogonális 131, 179
 ortogonális felbontási tétel 179
 ortogonális injekció 137, 180, 181
 \perp 179
 ortogonális komplementer 179
 ortonormált bázis 181
- öskép [13] 42
 összeg, bővített valós számoké 11
 összeg, komplex Radon-mértékeké 102
 összeg, soré [40] 68
 oszcillációs függvény 163
 Osztrogradszkij, Mihail Vasziljevics (1801–1861) 141
 Oxtoby, John C. 46, 184
- paralelepipedon 140
 paraméter 123
 ∂_α 147
 parciális derivált [40] 224, 123, 134
 parciális differenciálás 148
 parciális integrálás 121, 122
 ∂_j 148
 $\partial/\partial x$ [40] 224
- páronként diszjunkt 12
 Parthasarathy, Kalyanapuram Rangachari 184
 Peano, Giuseppe (1858–1932) 7
 perfekt 29, 160, 162, 170
 Phillips, Ralph S. 184
 Plancherel, Michel (1885–1967) 153
 Plancherel-tétel 153
 $+\infty$ 11
 $\| \cdot \|_p$ 64, 65, 68, 148
 polárkoordináták 142
 polinom 148, 150, 174, 175
 pontbeli tulajdonság 43
 pontonként 173, 177, 178
 pozitív 99
 pozitív definit 158
 pozitív homogenitás 55
 pozitív rész 54, 58
 pozitív természetes szám 9
 $P(\partial)$ 148
 $P(-\partial)$ 148
 premérték 18, 20, 23, 33, 95
 \prod [13] 41, 9
 projekció [13] 41, 140, 162
- \mathbb{Q} [40] 18
- \mathbb{R} [40] 18, 11
 racionális [40] 18, 30, 33, 69, 109, 114, 126, 134, 163, 165, 166
 Rademacher, Hans Adolf (1892–1969) 134
 Rademacher tétele 134, 137
 Radon, Johann (1858–1932) 8, 82, 84, 89
 Radon-mérték 8, 22, 23, 24, 27, 31, 32, 35, 36, 41, 46, 47, 66, 77, 79, 95, 98, 100, 102, 103, 115, 124, 125, 158
 Radon-mérték, komplex 89
 Radon–Nikodym-derivált 84, 89, 90, 110, 114, 117, 118, 119, 122
 Radon–Nikodym-tétel 82, 84, 85, 93, 114, 122, 155
- \Re [40] 24
 reflexív [13] 34, 82
 reflexív Banach-tér 119

- reguláris 163
 reguláris külső mérték 19
 rektifikálható 68
 reláció inverze [13] 44
 rendezés [13] 57, [13] 58
 rendezés, teljes [13] 57
 rendezés, természetes \rightarrow természetes
 rendezés
 rendezéstopológia 11, 160
 rendezett pár [13] 31
 Rényi Alfréd 184
 részcsoport [9] 55, 30, 168
 részhalmaz [13] 17, 12, 162
 részhalmaz, kompakt 166
 részsorozat [40] 61, 50, 52
 \mathbb{R} 11, 160
 Riemann, Georg Friedrich Bernhardt
 (1826–1866) 54, 106, 149
 Riemann-integrál [40] 130, 54, 80
 Riemann-integrálható 54, 69, 70, 72
 Riemann–Lebesgue-lemma 149
 Riemann-összeg [40] 129, 54
 Riemann–Stieltjes-integrál [40] 130, 71,
 103, 106, 108
 Riesz-féle kiválasztási tétel 50, 52
 Riesz–Fischer-tétel 65
 Riesz Frigyes (1880–1956) 8, 50, 54, 65,
 92, 95, 100, 101, 102, 180, 184
 Riesz reprezentációs tétele 83, 108, 180
 Riesz reprezentációs tétele \mathcal{K} funkcionál-
 jaira 100, 102
 Riesz reprezentációs tétele \mathbb{L}^p funkcionál-
 jaira 92
 Riesz reprezentációs tétele monoton funk-
 cionálokra 95, 98, 101
 \mathbb{R}^n [14] 14, 8
 rng [13] 34, 52
 Rogers, Claude Ambrose 184
 Ross, Kenneth A. 183
 Royden, Halsey Lawrence 184
 Rudin, Walter 9, 70, 71, 80, 184, 185
 Saks, Stanislaw 185
 Schipp Ferenc 9
 Schwartz, Jacob T. 85, 183
 Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921)
 178
 sehol sem sűrű 27, 29, 30, 160, 162
 Sierpiński-szőnyeg 40
 Sierpiński, Waclaw (1882–1969) 40
 Sigler, Laurence Edward 9, 183
 Sikorski, Roman 185
 sima 150
 Simon Péter 9
 \mathcal{S} 148, 152, 153
 S 62
 \mathbb{S} 159
 sor összege [40] 68
 sorozat [40] 36, 169
 sp [14] 107, 141
 spt \rightarrow tartó
 Steiner, Jacob (1796–1863) 130
 Steiner-szimmetrizáció 130, 132
 Steinhaus, Hugo Dyonizy (1887–1972)
 30
 Steinhaus tétele 30
 Stieltjes, Thomas Jan (1856–1894) 69,
 106
 Stone [sztoun], Marshall Harvey (1903–
 1989) 173, 175
 Stone tétele 173, 175
 Stromberg, Karl R. 184
 sup [40] 14, 48
 supremum \rightarrow felső határ
 sűrű 29, 30, 33, 45, 66, 93, 101, 102,
 109, 115, 137, 148, 160, 162, 163,
 166, 173, 175, 177
 sűrűség 110, 116, 135
 Szabó György 9
 szakadási pont 105
 szakasz 130
 számláló mérték 12, 24, 38, 61, 67, 76
 számok szorzata 9
 számosság [13] 90, 27, 40
 számtani sorozat 30
 Székelyhidi László 9
 szeparábilis 52, 67, 68, 166, 170
 szeparábilis altér 52, 63

- szeparábilis metrikus tér 24, 49, 50, 51, 58
 szeparábilis normált tér 45, 51
 szétválasztási tulajdonság 167
 szétválasztható 163
 szétválasztja a pontokat 173, 175
 ξ^α 148
 σ -additív 85, 138, 140
 σ -additivitás 12, 60, 73, 85
 σ -algebra 12, 33, 43
 σ -algebra, generált 20
 σ -kompakt 22, 23, 140, 166, 168
 σ -kompakt topologikus tér 166
 σ -szubadditív 14, 15, 17, 20, 76
 σ -szubadditivitás 13
 σ -véges 12, 22, 47, 73, 76, 82, 85, 89, 92, 94
 szigorúan monoton növekedő 30, 33, 120, 125
 szigorúan normált 68, 181, 182
 szimmetrikus [13] 34, 82
 szimmetrikus bilineáris forma [14] 45, 181
 szimmetrikus környezet 168, 169
 szimmetrizált 130
 szinguláris 82, 120
 \perp 82, 89, 90
 szinguláris, komplex mérték 89
 Szkorohod, Anatolij Vlagyimirovics 183
 szokásos approximációs eljárás 138, 140
 szokásos topológia 159
 Szőkefalvi-Nagy Béla 9, 71, 106, 117, 120, 184, 185
 szórás 124
 szorzás 145, 150, 155, 168, 172, 177
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 178, 179, 180
 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 178
 \bullet 178
 (\cdot, \cdot) 178
 $(\cdot | \cdot)$ 178
 szorzat 77, 162, 166
 szorzat, Descartes [13] 31, [13] 41
 \times [13] 31, 73
 \prod [13] 41, 9, 162
 szorzat, komplex mértékeké 91
 szorzatmérték 73, 75, 76, 77, 98
 szorzat, számoké 9
 \otimes 73, 75, 76, 91, 98, 122
 szorzattopológia 162
 szubadditív 41
 szubbázis 161, 162, 166
 szűkülő 13
 \sum [40] 68, 11
 szummábilis 58
 tartalmazás [13] 14
 \subset [13] 14
 \supset [13] 14
 tartó 164
 τ_x 144, 146, 152
 távolság [40] 41, 159, 170
 távolság, halmazoké 20, 38, 160
 Taylor, S. James 184
 tehetetlenségi nyomaték 142
 teljes altér 14
 teljesen korlátos 169
 teljesen reguláris 163, 167
 teljes komplex mérték 89
 teljes mérték 12, 18, 102
 teljes mértéktér 12, 44, 48, 52, 63, 73
 teljes metrikus tér 24, 40, 52, 162, 163, 169, 170, 172, 173
 teljes normált tér 65, 179
 teljes Radon-mérték 32, 35, 36, 95, 98, 101, 110, 111, 113, 114, 115, 116, 158
 teljes rendezés [13] 57
 teljes σ -véges mértéktér 122
 teljes változás 86
 tér, euklideszi [14] 14
 térfogat 7, 38, 110, 140, 142
 tér, lineáris [14] 13
 természetes kiterjesztés 18, 24, 41, 90, 95, 98, 102, 154, 155
 természetes rendezés [40] 21, 11, 160
 természetes szám [13] 45, 147
 tér, metrikus [40] 41
 terület 7, 14, 142
 tér, unitér [14] 14
 $\hat{}$ 143, 149, 150, 152, 153, 156, 157, 158
 Tietze, Henrik Franz Friedrich (1880–1964) 47, 175
 Tietze tétele 47, 175
 \mathcal{T} 156, 159
 töltés 142

- tömeg 110, 142
topológia 7, 9, 20, 21, 26, 53, 159, 160, 161, 172
topológia, altéré 161
topológia bázisa 161, 162
topológia, eltérésből származó 160
topológia, metrikából származó 159
topológia, rendezés- 11, 160
topológia, szokásos 159
topológia, szorzat 162
topológia szubbázisa 161
topologikus algebrai struktúra 168
topologikus csoport 8, 41, 99, 168
topologikus tér 8, 20, 44, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 166, 168, 172, 173
topologikus tér, diszkrét 160
topologikus tér, indiszkrét 160
topologikus tér, σ -kompakt 166
torlódási pont 160
transzitiv [13] 34, 82
triadikus 27, 28
trigonometrikus polinom 156
tükrözés 131
Tyihonov, Andrej Nyikolájevics (1906–) 41, 166
Tyihonov tétele 41, 166
- U 159
unicitási tétel 153
uniform norma 106, 173
 $\| \cdot \|_u$ 100, 173, 177
unió [13] 40, 12, 161
 \cup [13] 40
unitér operátor 168
unitér tér [14] 14
üres halmaz [13] 19
 \emptyset [13] 19
Uriszon-lemma 67, 97, 163, 164, 167, 176
Uriszon, Pável Szamojlovics (1898–1924) 163
- V 103, 104, 105, 106, 107, 118, 119
valós függvénytan 117
valós mérték 85, 86, 88, 90, 100
valós Radon-mérték 154
valós rész [40] 24, 86
valós szám [40] 18
valószínűség 7, 33
valószínűségi mérték 12, 76
valószínűségi mértéktér 12, 14
valószínűségi változó 33, 124
valószínűségyszámítás 7, 8, 9, 31, 32, 33, 49, 82, 124
változás 103, 119
várható érték 124
véges 12, 51, 55, 58, 162, 166, 179
véges dimenziós 68, 172, 177, 181
véges mérték 67, 83, 86, 88, 92, 124
véges mértéktér 12, 49, 50, 52, 58, 93, 94
véges mértékű 20, 46
véges teljes Radon-mérték 156, 158
 ∞ 11, 58
végtelenben gyorsan eltűnő 150
végtelen sor 172
vektorértékű függvény 61, 62
vektormező 141
vektortér [14] 13, 85
vektortér dimenziója [14] 23
' [40] 111, [40] 221
 \mathcal{V} 110
 \mathcal{V} -derivált 113
 $(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}$ 113, 114
 $(\mathcal{V}) \lim$ 113, 115, 116
 $(\mathcal{V}) \liminf$ 113
 $(\mathcal{V}) \limsup$ 113
Vitali, Giuseppe (1875–1932) 110, 111
Vitali-lefedés 110, 111, 113, 114, 115, 116, 127
Vitali tétele 111, 117, 133
Vlagyimirov, Vaszilij Szergejevics 185
- Weierstrass approximációs tétele 175
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) 175
Weierstrass–Stone-tétel 98, 157, 175

(X, \mathcal{A}) 12
 (X, \mathcal{A}, μ) 12
 X^* 178
 $X(f > g)$ 43
 $x_n \downarrow x$ 9
 $x_n \uparrow x$ 9
 $X \rightarrow Y$ 9
 $X(P)$ 43

Yosida, Kôzaku 185

Zaanen, Adriaan Cornelis 185
zárt 160, 161, 162, 163, 164, 166, 167,
170, 175, 179
zárt gömb 116, 159
zárt lineáris altér 179
Zeidler, Eberhard 185
Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand (1871–
1953) 28
 \bar{z} [40] 24
 \mathbb{Z} 9
Zorn-lemma [13] 64, 111, 166

