Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Mátrix- és operátoregyenletek

Dr. Tarcsay Zsigmond

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Természettudományi Kar, Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)

zsigmond.tarcsay@ttk.elte.hu

Bevezetés

Az alkalmazott matematika számos problémája vezethető vissza egy alkalmas

$$AX = B \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságára, ahol A és B (tipikusan nagy dimenziós) mátrixok. A megoldhatóságra R. G. Douglas adott jól használható karakterizációt, azonban az alkalmazások szempontjából a megoldások között gyakran csak bizonyos speciális tulajdonságú mátrixok relevánsak.

A kutatás célja az (1) egyenlet speciális (pozitív, illetve szimmetrikus) megoldásainak, valamint a megoldásoperátorok halmazának belső struktúrájának karakterizációja volt.

Probléma

Legyen $\mathcal{H}$ véges vagy végtelen dimenziójú Hilbert-tér és tekintsük adott $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátorok mellett az (1) egyenletet.

Cél: Olyan $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operátort találni, amely megoldja az (1) egyenletet, emellett rendelkezik az alábbi tulajdonságok valamelyikével

- Folytonos és minimális normájú,
- Folytonos és pozitív,
- Folytonos és szimmetrikus,
- Nemkorlátos és pozitív,
- Nemkorlátos és önadjungált.

Publikációk

Az [1] cikk az (1) egyenlet folytonos pozitív szemidefinit megoldásait kerestük, illetve azokra adtunk konstruktív jellemzést.
A [2] cikkekben a szimmetrikus megoldások létezését vizsgáltuk.
A [3] cikkben az (1) egyenlet redukált megoldásainak struktúráját megőrző leképezéseket vizsgáltuk meg.

[1] Z. Tarcsay and T. Titkos, “Operators on anti-dual pairs: Generalized Krein-von Neumann extension,” *MATHEMATISCHE NACHRICHTEN*, pp. 1–19, 2021.

[2] ——, “Operators on anti-dual pairs: Self-adjoint extensions and the Strong Parrott theorem,” *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 63, no. 4, pp. 813–824, 2020.

[3] Z. Tarcsay, “Maps preserving the Douglas solution of operator equations,” *arXiv preprint arXiv:2102.13106*, 2021.

Douglas faktorizációs lemmája

Legyen $\mathcal{H}$ (véges vagy végtelen dimenziós) Hilbert-tér és legyen $A, B \in B(\mathcal{H})$ korlátos operátor. Az (1) egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha A és B képterére $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H} \arrow[dd, "A"] \\ \mathcal{H} \arrow[ur, "X"] \arrow[dr, "B"'] & \\ & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

X megválasztható úgy, hogy minimális normájú legyen:

$$\|X\| = \min\{\|X'\| : AX' = B\}.$$

A módszerekről

Első észrevétel, hogy (1) átfogalmazható egy kiterjeszthetőségi problémára, éspedig az

$$X_0(Ax) = Bx, \qquad X_0 : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} B$$

leképezés kiterjeszthetőségére.

Általános probléma: Adott $T_0 : \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ pozitív/szimmetrikus operátor mikor terjeszthető ki $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pozitív/önadjungált operátorrá?

A konstrukcióban az $\operatorname{Im} T_0$ alteret alkalmas skalárszorzattal $\mathcal{K}_0$ Hilbert-térré tesszük, amelyen a természetes $J : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{H}$, $J(T_0 u) = T_0 u$ beágyazás folytonos. A JJ^* operátor alkalmas feltételek mellett pozitív kiterjesztése T_0-nak, emellett JJ^* kvadratikus alakja minimális.

A fenti eljárás kiterjeszthető az euklideszi terek esetéről nem-normálható lokálisan konvex terekre. Ez az általánosítás magában foglalja többek között az ún. pozitív definit függvények (*kernelek*) esetét is.

A pozitív kiterjeszthetőség segítségével tárgyalható a szimmetrikus kiterjesztés/megoldhatóság kérdése (adott S_0 operátor helyett $\|S_0\| \pm S_0$ pozitív operátort véve). Ez a módszer folytonos szimmetrikus operátorok norma-tartó önadjungált kiterjesztéseit adja, melyek egy $[S_m, S_M]$ intervallumot alkotnak. A két extremális kiterjesztés előállítása konstruktív.

A nem-korlátos kiterjesztés kérdése hasonló faktorizációs módszerrel tárgyalható, az eljárás alkalmazható az irodalomban korábban nem tárgyalt *nem-sűrűn definiált* esetben ($\mathcal{H}_0^\perp \neq \{0\}$). Ilyen esetekben JJ^* a pozitív operátorok forma-rendezése szerinti minimális kiterjesztést adja. Maximális kiterjesztés akkor és csak akkor létezik, ha T_0 sűrűn értelmezett.

Eredmény (szakmai tartalma)

- **Pozitív megoldások.** A pozitív kiterjeszthetőség kérdésének megoldásával az (1) egyenlet pozitív megoldhatóságára teljes karakterizációt adtunk. A legkisebb megoldás előállítása konstruktív, programozható.
- **Szimmetrikus megoldások.** Az (1) egyenlet önadjungált megoldásainak leírását adtuk az önadjungált kiterjesztés problémájának tárgyalása mellett. Folytonos esetben két extremális (minimális és maximális) normatartó kiterjesztés létezik. A nem-sűrűn értelmezett szimmetrikus operátorok kiterjesztésénél a Neumann-féle Cayley-transzformációs technika nem működik. Erre a jelentősen nehezebb problémára algebrai és geometriai módszereket alkalmazva találtunk megoldást. A nemkorlátos elmélet alkalmazható olyan differenciálegyenletek megoldására, amelyek értelmezési tartománya a speciális peremfeltételek miatt nem sűrű.
- **Redukált megoldások sktruktúrája.** A [3] cikkben minimális feltevések mellett pontos leírást adtunk végtelen dimenziós tér felett az (1) alakú egyenletek redukált (optimális) megoldásainak struktúrájára. A felhasznált technikák véges dimenzióban nem működnek, így ez az eset további kutatás tárgyát képezi.

Alkalmazási területek

- Elektromos hálózatok optimalizálása (Schur komplementáció).
- Elliptikus parciális differenciálegyenletek (hővezetés).
- Nagydimenziójú egyenletrendszerek megoldása (Moore-Penrose inverz).
- Gépi tanulás (kernel-módszer).

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM