ELTE

Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Fourier analízis és gráfok Abel csoportokon

Somlai Gábor

Algebra és Számelmélet Tanszék, Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
gabor.somlai@ttk.elte.hu

Bevezetés

- Két kutatást mutat be a poszter.
- Az egyik a Fuglede sejtés, ami azt kérdezi, hogy az n dimenziós Euklideszi teret parkettázó halmazok mik? A sejtés az, hogy ezek a halmazok sok esetben egybeesnek azokkal a halmazokkal, amin értelmezett L^2 függvényeket felépíthetjük egyszerű szerkezetű függvényekből, azaz van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis.
- A másik probléma a CI csoportoké, ahol azt vizsgáljuk, hogy van-e valami speciális módszer tetszőlegesen nagy szimmetrikus gráfok, hálózatok felépítésére, ahol azt is tudjuk kontrollálni, ezek mikor ugyanazok.

Problémák

- A Fuglede sejtés 1 és 2 dimenzióban nyitott már csak. Az 1 dimenziós eset vizsgálatát lényegében sikerült a véges ciklikus csoportok esetére redukálni, azaz elég ott belátni, hogy a parkettázó halmazok épp a spektrálisak.
- A CI-csoportok vizsgálata egy régi téma, a gráfizomorfizmus probléma egy speciális esete. A kérdés az, hogy egy rögzített csoport Cayley gráfjainak izomorfia osztályait meghatározzák-e a csoport automorfizmusai. Ez egyben egy algoritmust is ad annak eldöntésére, hogy két Cayley gráf izomorf-e.

Publikációk

Megjelent és elfogadott publikációk

- Megjelent publikációk:
  - The Cayley isomorphism property for $\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_q$.
    M. Muzychuk, G. Somlai, Algebraic Combinatorics. Vol. 4, issue 2 (2021), p. 289-299.
  - On the discrete Fuglede and Pompeiu problems- G. Kiss, R.D. Malikiosis, G. Somlai, M. Vizer Analysis & PDE 13 (3), 765-788.
- Beküldött kéziratok:
  - Fuglede's conjecture holds for cyclic groups of order $pqrs$,
    Journal of the London Mathematical Society
  - Spectral sets and tiles in $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$, Analysis & PDE.

Ipari alkalmazások és együttműködések

A diszkrét Fourier analízisnek több ipari alkalmazása van. Ezekkel kapcsolatos konkrét kutatásban nem veszek részt, így ezek általános megjegyzések.

- Képelemzésben használható, aminek több különböző alkalmazása lehet.
  - orvosi: MRI, CT, ultrahang elemzés
  - katonai: Radarjelek tisztítása, kommunikációs csatornák megtalálása.
  - kommunikáció: Adatjel szűrés és tisztítás, és frekvenciák közötti konverzió.
- Adattömörítésben egy fontos eszköz, azaz multimédia tartalmak tárolásában

A Cayley gráfok minden csúcsból körülnézve ugyanolyan gráfok, így nagy hálózatok építésére, modellezésére alkalmasak, ahol a pontok szerepe nagyon hasonló.

CI csoportok

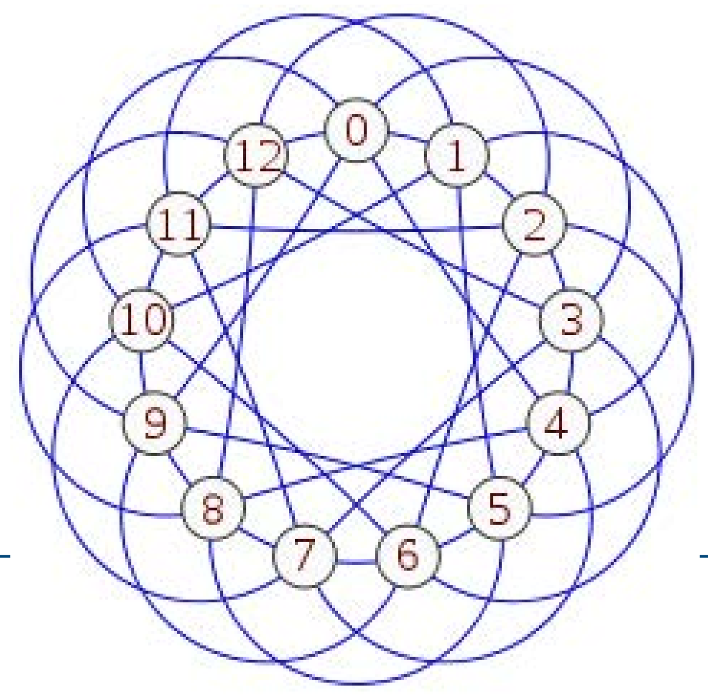
A CI csoportok problémáját először csak ciklikus gráfokra fogalmazta meg Ádám András. Azt vette észre, hogy ha a gráf n csúcsú, akkor n-hez relatív prím számmal szorozva egy másik ciklikus gráfot kapunk. Kérdés, van-e olyan ciklikus gráf n csúcson, amit nem kaphatunk meg ezzel a módszerrel egy rögzített gráfból, de azok mégis izomorfak. Ilyen párt persze már $n = 8$ esetben is lehet találni, de ott még irányított gráfokat kell vennünk.

A CI csoportok elméletének Babaihoz köthető az első fontos technikája, aki csoportelméleti kérdéssé fogalmazta át a kérdést. Később Klin és Pöschel vezette be a Schur gyűrűk használatát. Ma ezt a két technikát kombinálva érhetünk el eredményeket.

A ciklikus CI csoportok leírása Muzychukhoz köthető, és Kovács és Muzychuk sejtése, hogy relatív prím rendű elemi Abel CI csoportok direkt összege is CI csoport. Ehhez a sejtéshez járulunk hozzá azzal, hogy beláttuk, hogy $\mathbb{Z}_{pn}$ CI csoport, ha n négyzetmentes, p pedig prím. Ez általánosítása is Muzychuk eredményének csoportokról.

Egy másik friss eredmény, hogy a $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$ csoportok is CI csoportok. Ezek olyan csoportok, amikre lehet találni primitív, de nem 2-tranzitív csoportokat, amik tartalmaznak reguláris részcsoportot az eredeti Abel csoporttal. Ezek tehát nem Burnside csoportok, amik nehezebbé teszik a vizsgálatukat. Ez az első végtelen osztálya nem Burnside csoportoknak, amikre belátják, hogy CI csoportok.

Korábbi Muzychukkal közös eredmény, hogy $\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_q$ CI csoport, ahol p és q különböző prímek. A legújabb eredmények az itt kialakított Schur gyűrűs technikát kombinálják Kovács és Ryabov egy eredményével.



Fuglede sejtés

Az Euklideszi tér egy parkettázása alatt azt értem, hogy veszek egy rögzített halmazt (pozitív mértékű), és annak diszjunkt eltoltjaival lefedem a teret. Itt persze a határok között lehet kicsi (nullmértékű) metszet, és ugyanígy lehet, hogy kicsi fugára is szükségünk lesz. Azt, hogy egy halmaz spektrális, úgy lehet érteni, hogy a rajta értelmezett elég szép (négyzetesen integrálható) függvényeket elő lehet állítani exponenciális függvények végtelen súlyozott összegeként.

Fuglede sejtése az, hogy a két tulajdonság egyszerre áll fenn. Az első egy egyszerű geometriai fogalom, amit néha könnyű ellenőrizni. Könnyen látható, hogy egy háromszög nem parkettáz, ha csak eltolásokat használhatunk. Amennyiben forgatásokat és tükrözést is, akkor más a helyzet, természetesen, sőt akkor még négyszögekkel is mindig tudunk parkettázni. Ugyanez már egy körlapra nem igaz. Azt elsőre nehezebb látni, hogy ezek nem spektrálisak, nem lehet igazán jól Fourier sorfejtést csinálni ezeken a halmazokon.

A kutatás véges ciklikus csoportokra koncentrált, és sikerült belátni több korábbi eredményt is kombinálva, hogy $\mathbb{Z}_n$ csoportra igaz a Fuglede sejtés, ha n legfeljebb 4 prím szorzata. Ez közös eredmény 3 szerzővel.

A legfrissebb eredmény pedig az, hogy egy több ciklikus csoport direkt összegére is kijött, hogy igaz a sejtés. Ez nem más, mint $\mathbb{Z}_{pq}^2$. Ez utóbbi ahhoz járul hozzá, hogy a két dimenziós esetet kezeljük.

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM