ELTE

Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Adaptív numerikus időintegrátorok

Fekete Imre

Matematikai Intézet, Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
imre.fekete@ttk.elte.hu

Lokális hibabecslés és lépésköz választás adaptív lineáris többlépéses módszerekben

Cél: Robusztus adaptív módszerek alkotása és elméleti igazolás.

A klasszikus $r_n = \varphi_n h_n^q$ hibamodell még a $h_{n+1} = \left(\frac{\mathrm{TOL}}{r_n}\right)^{1/q} h_n$ szabályozóval sem ad kellően megbízható eredményt erre az integrátorcsaládra.

Az új $r_n = \varphi_n h_n^q \cdot \prod_{j=1}^{s} \rho_{n-j}^{\delta_j}$ ***szorzat alapú dinamikus hibamodellt*** a $h_{n+1} = \left(\frac{\mathrm{TOL}}{r_n}\right)^{\beta/q} h_n \cdot \prod_{j=1}^{s} \rho_{n-j}^{\alpha_j}$ alakú ***általános szabályozóval*** kombináljuk.

Előnyök:
- A negatív visszacsatolásos rendszer stabil $\beta \in (0, 2)$ esetén.
- Lineáris irányításelméleti technikák alkalmazhatóak.
- Digitális szűrők alkalmazhatóak.

Az elméleti eredményeket a klasszikus tesztfeladatokon (Lotka-Volterra, Van der Pol, Brusselator) való robusztus működés is alátámasztja.

Kollaborátorok:
- *Carmen Arévalo és Gustaf Söderlind (Lundi Egyetem, Svédország)*
- *Yiannis Hadjimichael (Weierstrass Intézet, Németország)*

Beágyazott párok erős stabilitást őrző explicit Runge–Kutta módszerekre

Cél: Beágyazott párok konstruálása optimális explicit erős stabilitást őrző Runge–Kutta módszerekre, valamint szuperszámítógépes felhasználás.

Az s-lépcsős explicit Runge–Kutta (ERK) alakja:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j \Delta t, Y_j), \quad Y_i = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t, Y_j),\ i = 1, \ldots, s.$$

Az ERK módszer erős stabilitást őrző (SSP), ha $||u_{n+1}|| \leq ||u_n||$ fennáll az $||u + \Delta t F(u)|| \leq ||u||$, $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{\mathrm{FE}}$ feltétel mellett és $\Delta t \leq \mathcal{C} \Delta t_{\mathrm{FE}}$.

Stabilitási tartományra vonatkozó optimalizálási feladat:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \left(I + \tilde{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \geq 0, \quad \left\| \tilde{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \left(I + \tilde{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|_{\infty} \leq 1, \quad \text{a megfelelő renfeltételek teljesülnek.}$$

Általános Kennedy-Carpenter típusú optimalizálási feladat:

$$\begin{aligned} \arg\min_{\tilde{w}} \quad & \|F(A, b^T, \tilde{w})\|_{\infty} \\ & \tau_k(A, \tilde{w}) = 0,\ k = 1, \ldots \\ & \tilde{w} \geq 0. \end{aligned}$$

Az optimalizálás után az ***optimális SSPERK***$(s, 2)$***, SSPERK***$(s, 3)$***, SSPERK***$(n^2, 3)$ ***és SSPERK***$(10, 4)$ ***módszerekre*** vonatkozóan:
- Nagy abszolút stabilitási tartományok
- Jó abszolút monotonicitás sugár értékek
- Jó Kennedy-Carpenter értékek

Tesztfeladatokon (lineáris advekció, Euler egyenlet) standard beágyazott párokkal szemben robusztusabb eredmények.

Kollaborátorok:
- *Sidafa Conde és John Shadid (Sandia Nemzeti Laboratórium, USA)*

Publikáció

C. Arévalo, G. Söderlind, Y. Hadjimichael, I. Fekete: Local error estimation and step size control in adaptive linear multistep methods, Numerical Algorithms, Vol. 86, pp. 537–563, 2021

I. Fekete, S. Conde, J.N. Shadid: Embedded pairs for optimal explicit strong stability preserving Runge–Kutta methods, 2021 (benyújtva)

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM