ELTE
Tématerületi Kiválósági Program
Ipar és Digitalizáció
Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Multiple-Agent Many-Visits TSP

Dr. Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék, Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
kristof.berczi@ttk.elte.hu

Bevezetés

A klasszikus *utazóügynök problémában* adott egy metrikus súlyfüggvény egy n pontú teljes gráf élein, és a cél egy minimális költségű Hamilton kör megkeresése. A probléma NP-nehéz, így nem várható hatékony algoritmus az otpimális megoldás megkeresésére. Christofides elegáns algoritmusa ugyanakkor $3/2$-approximációt szolgáltat a feladatra.

A kutatás célja ezen probléma általánosításának vizsgálata volt. Ekkor egyszeri bejárás helyett minden csúcson adott egy pozitív egész szám, mely a csúcs **meglátogatásainak számát** írja elő. Továbbá egy helyett **több ügynök** áll rendelkezésre, és a cél az összköltségek minimalizálása.

Probléma

Input: $G = (V \cup D, E)$ teljes gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ metrikus súlyfüggvény, $r : V \to \mathbb{Z}_+$ előírás.

Cél: Olyan $x \subseteq \mathbb{Z}_+^E$ vektor, melyre x tartójának minden komponense tartalmaz legalább egy D-beli pontot (depót), és $c \cdot x$ minimális.

Különböző változatok:

- Rögzített vagy szabad depók.
- Diszjunkt utak vagy nem feltétlenül.
- Egy ügynök kaphat üres utat vagy sem.

Motiváció

- Nyomtatott áramkörök fúrása, tesztelése.
- Gázturbinás motorok tervezése.
- Röntgen-kristályografia.
- Szedési sorrend meghatározása raktárakban.
- Felszállási sorrend meghatározása.
- Nyomtatási feladatok ütemezése.
- Járműflották útvonaltervezése.
- Meleghengermű feladatainak ütemezése.

Publikációk

Az [1] cikkben a probléma azon változatára adunk $3/2$-approximációs algoritmust, melyben egy ügynök van, de a csúcsokat többször kell meglátogatni.
A [2] cikk általánosítja a fenti eredményt a probléma útváltozatára, azaz amikor az ügynök útvonalának kezdő és végpontja nem feltétlenül egyezik meg.
A [3] cikkben konstans-faktor approximációs algoritmusokat adunk a több ügynökös verzió kölönböző változataira.

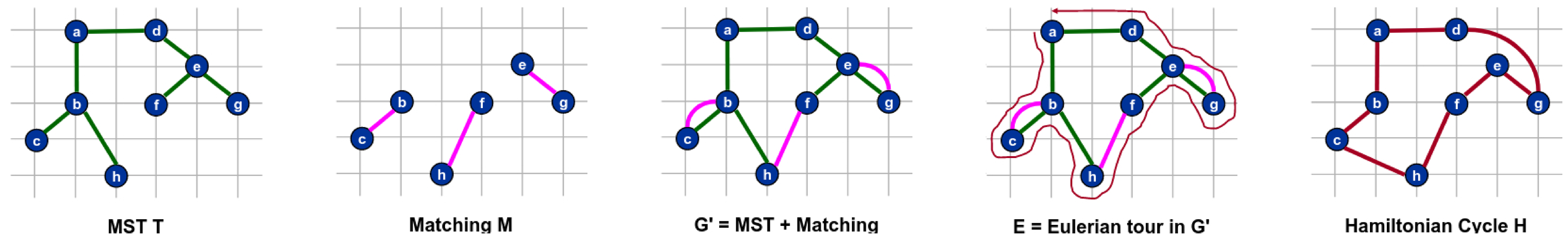
[1] K. Bérczi, A. Berger, M. Mnich, and R. Vincze, "Degree-bounded generalized polymatroids and approximating the metric many-visits TSP," *Arxiv 1911.09890*, 2019.

[2] K. Bérczi, M. Mnich, and R. Vincze, "A 3/2-approximation for the metric many-visits path TSP," *Arxiv 2007.11389*, 2020.

[3] ——, "Approximations for the multiple-agent many-visits traveling salesman problems," *In preparation*, 2021.

Christofides algoritmusa

1. $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
2. $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
3. $G' \leftarrow T$ és M uniója
4. $E \leftarrow$ Euler séta G'-ben
5. $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör



Alkalmazott technikák

Első lépésben Király, Lau és Singh fokszámkorlátos matroidokra vonatkozó iteratív kerekítési algoritmusát terjesztettük ki **általánosított polimatroidokra**. A feladat, melyet meg kellett oldanunk, a következő:

Input: $B(p, b)$ g-polimatroid, $H = (S, \mathcal{E})$ hipergráf, $m_\varepsilon : S \to \mathbb{Z}_+$ szorzó minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$-re, $f, g : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ korlátok, $c : S \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény.

Cél: $B(p, b)$ egy egész pontja, melyre $f(\varepsilon) \leq \sum_{s \in \varepsilon} m_\varepsilon(s) x(s) \leq g(\varepsilon)$ teljesül minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$-re, és $c \cdot x$ minimális.

A probléma **LP** relaxáltja a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_{s \in S} c(s)\, x(s) && \\ &\text{subject to} && p(Z) \leq x(Z) \leq b(Z) && \forall Z \subseteq S \\ & && f(\varepsilon) \leq \sum_{s \in \varepsilon} m_\varepsilon(s)\, x(s) \leq g(\varepsilon) && \forall \varepsilon \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

Iteratív kerekítési eljárás segítségével megadható az általánosított polimatroid egy olyan egész pontja, melynek költsége legfeljebb az LP optimum értéke, és a hiperélekre vonatkozó alsó és felső korlátokat legfeljebb Δ **additív hibával** teljesíti, ahol $\Delta = \max_{s \in S} \left\{ \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} m_\varepsilon(s) \right\}$.

A fenti algoritmus segítségével Christofides algoritmusának egy természetes kiterjesztését kapjuk, mely $3/2$-**approximációt** ad a Many-Visits TSP feladatra.

1. $T \leftarrow$ minimális költségű $r(V)$ élű összefüggő gráf, minden pont foka legalább $2r(v) - 1$
2. $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
3. $G' \leftarrow T$ és M uniója
4. $E \leftarrow$ Euler séta G'-ben
5. $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott séta

A probléma **útváltozatára** adott $3/2$-közelítő eljárásunk ezen polimatroidos megközelítést kombinálja Zenklusen algoritmusával, mely a klasszikus út-TSP feladatra szolgáltat hasonló megoldást.

A feladat szignifikánsan nehezebb, ha több ügynök is rendelkezésre áll. A probléma különböző verzióira más-más módszert alkalmazva sikerült konstans-approximációt adnunk.

Eredmények

- $3/2$-**approximációs algoritmus a Many-Visits TSP feladatra.** Az algoritmus Christofides klasszikus eljárásának egy természetes kiterjesztése.
  - Szubrutinként használjuk Király, Lau és Singh fokszámkorlátos matroidokra vonatkozó eredményének általánosított polimatroidokra történő kiterjesztését, mely önmagában érdekes eredmény lehet a kombinatorikus optimalizálás iránt érdeklődő kutatók számára.
- $3/2$-**approximációs algoritmus a Many-Visits Path-TSP feladatra.** A bizonyítás Zenklusen $3/2$-approximációs algoritmusát ötvözi a fent említett polimatroidos eredménnyel; a technikai részletek megfelelő összehangolása nem nyilvánvaló feladat.
- **Konstans-faktor approximáció a Multiple-Agent Many-Visits TSP feladat különböző változataira.** Nyitott kérdés marad a probléma inapproximálhatósága, így például további kutatás tárgyát képezi annak vizsgálata, hogy adható-e hatékony $3/2$-közelítő algoritmus több ügynök esetén.

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal
AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM