ELTE

Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Geometriai gráfok rekonstrukciója az élhosszak alapján

Jordán Tibor

Operációkutatási Tanszék, Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
tibor.jordan@ttk.elte.hu

Motiváció, alkalmazások

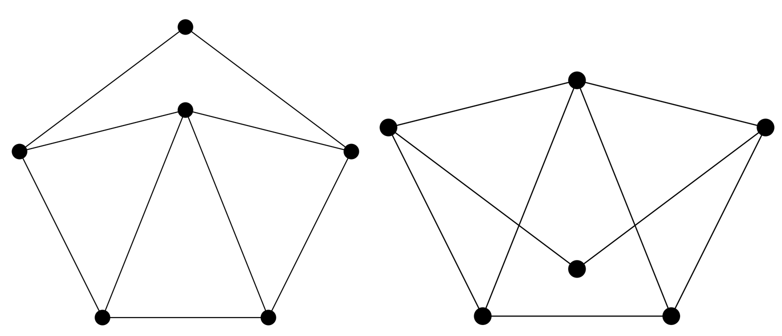
A kutatások kiindulópontja a következő probléma: néhány objektum pontos helyét vagy egymáshoz viszonyított elhelyezkedését szeretnénk meghatározni úgy, hogy ehhez bizonyos (nem feltétlenül az összes) objektumok közti páronkénti távolságok állnak rendelkezésre. Milyen adatok esetén van megoldás? Hogyan lehet algoritmikusan megtalálni? Mikor van pontosan egy megoldás? Ezek természetes, matematikai szempontból is érdekes kérdések, amelyek mérnöki, informatikai, vagy természettudományi problémákban is felmerülnek. Tipikus alkalmazási területek:

- Drótnélküli hálózatok csomópontjainak lokalizációja,
- Molekulák térbeli szerkezetének meghatározása,
- Computer aided design (CAD) algoritmusok,
- Alakzatok irányítása.

Bizonyos esetekben csak a távolságok (szám)halmaza adott. Ekkor a feladat része annak a meghatározása is, hogy ezek mely objektum párokra vonatkoznak.

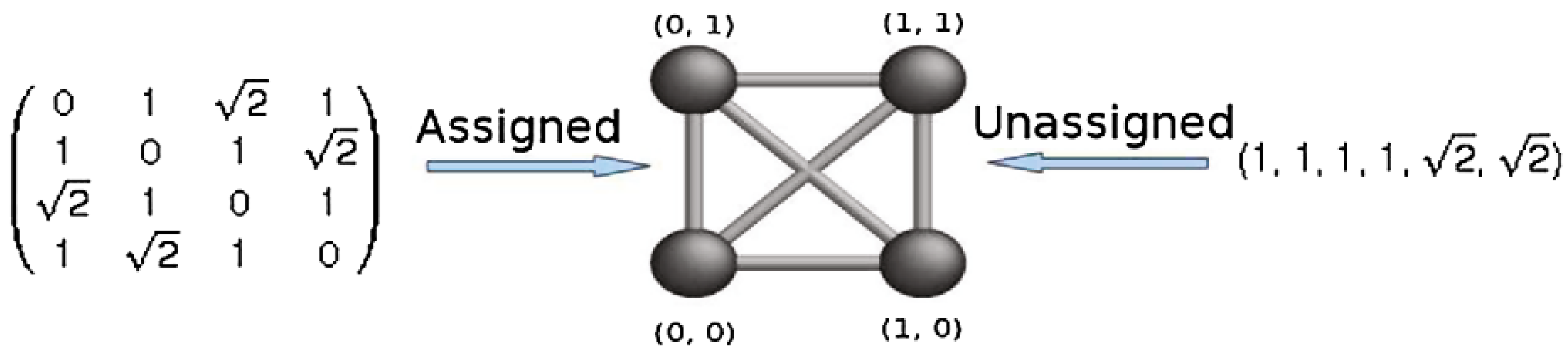
A matematikai modell

A feladat inputja egy $G = (V, E)$ gráf (melynek pontjai az objektumoknak, élei az ismert távolságoknak felelnek meg) és minden e éléhez egy pozitív $l(e)$ szám (az él hossza). A G egy d-dimenziós realizációja egy (G, p) pár, ahol p a G minden pontjához a d-dimenziós tér (tipikusan $d = 2, 3$) valamely pontját rendeli. A realizációban egy uv él hossza a $p(u)$ és $p(v)$ távolsága. A realizáció megengedett, ha benne az élhosszak megegyeznek az adott $l(e)$ számokkal. A cél egy megengedett realizáció megtalalálása (ha van ilyen) az adott d dimenziós térben. Szorosan ehhez kapcsolódó feladat annak eldöntése, hogy egy adott (G, p) realizáció egyértelmű-e, vagy van esetleg a gráfhoz és adott élhosszakhoz egy vele nem egybevágó másik megengedett realizáció is. Ha nincs másik, akkor a (G, p)-re azt mondjuk, hogy *globálisan merev*.



1. ábra. A baloldali kétdimenziós realizáció nem globálisan merev - ezt mutatja a jobboldali ábra

Az ú.n. címkézetlen esetben az input m pozitív szám (élhossz). A cél egy olyan m élű G gráfot találni, valamint egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) annak élei és az adott hosszak között úgy, hogy legyen hozzá megengedett (G, p) realizáció. Az egyértelműség kérdése itt három szinten is felmerül: mikor rekonstruálható egyértelműen a hosszakból a (i) G gráf, (ii) a G és a bijekció, vagy (iii) a G, a bijekció és a (G, p) realizáció is.



2. ábra. A feladat címkézett (assigned) és címkézetlen (unassigned) inputja, a megengedett realizációval

Publikációk

[1] D. Garamvölgyi and T. Jordán, "Global rigidity of unit ball graphs," *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 34, no. 1, pp. 212–229, 2020.

[2] T. Jordán, "A note on generic rigidity of graphs in higher dimension," *Discrete Applied Mathematics*, 2021.

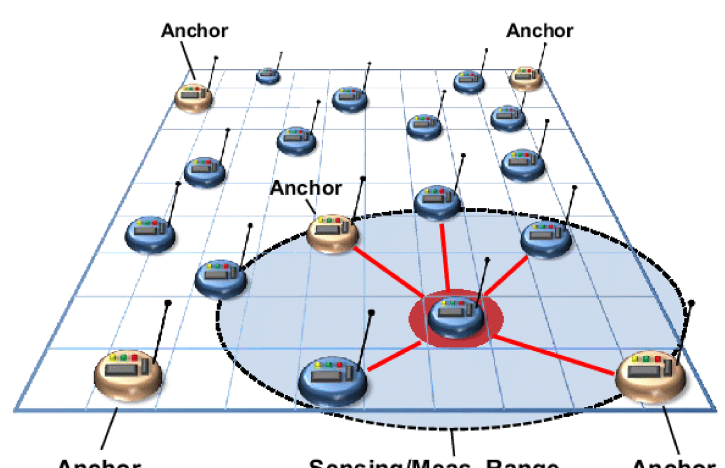
[3] ——, "Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane," *Graphs and Combinatorics*, 2021.

[4] T. Jordán, C. Poston, and R. Roach, "Extremal families of redundantly rigid graphs in three dimensions," *Europ. J. Combin., submitted*, 2020.

[5] D. Garamvölgyi, S. J. Gortler, and T. Jordán, "Globally rigid graphs are fully reconstructible," *Forum of Mathematics, Sigma, submitted*, 2021.

A lokalizációs feladat

Az alábbi ábra ezt a fent említett, tipikus alkalmazást illusztrálja. A szenzorok a hatósugarukon (sensing range) belüli többi szenzortól való távolságukat meg tudják határozni. Néhányuk helyzete rögzített (anchor) ezek pontos helyzetét ismerjük. Ezen információk alapján kell az összes szenzor helyét meghatározni.



3. ábra. Drótnélküli szenzorhálózat rögzített helyzetű elemekkel (anchor) a síkban

Nemzetközi együttműködések

- Steve Gortler (Harvard University, USA),
- Bill Jackson (University of London, UK),
- Shin-ichi Tanigawa (University of Tokyo, Japán)

Eredmények

- Bevezettük az "egységgömb globálisan merev" realizáció fogalmat, amely kifejezetten a szenzor hálózatos alkalmazásokban előforduló egyértelműségi kérdésekben hasznos és lefektettük az ilyen realizációk elméleti vizsgálatának alapjait [1].
- Egy realizáció globális merevsége csak a gráftól függ, ha a pontok kellően általános (generikus) helyzetben vannak. Ez minden d-re egy gráfosztályt definiál, melynek jellemzése – és algoritmikus tesztelhetősége – csak $d = 1$, 2-re ismert. Megmutattuk, hogy a másik extrém eset, amikor a pontszám és d különbsége kicsi (konstans), szintén kezelhető algoritmikusan [2].
- Az alkalmazásokban hasznos lehet redundánsan globálisan merev hálózatokat létrehozni, melyek többszörös pont- vagy élmeghibásodás mellett is globálisan merevek, avagy egyértelműen lokalizálhatók maradnak. Számos korábbi nyitott kérdést megválaszolva meghatároztuk az ilyen hálózatok minimális élszámát a $d = 2, 3$ esetekben [3, 4].
- A címkézetlen feladat egyértelműségi kérdését vizsgálva pontosan meghatároztuk, hogy a $d = 1, 2$ esetekben az élhosszak (és a pontszám) alapján mely esetekben lehet a gráfot és az élhosszakat (és magát a realizációt is) egyértelműen rekonstruálni.
- A korábbi eredményeket lényegesen kiterjesztve igazoltuk, hogy minden d-re a címkézetlen feladatban a pontszám ismerete nélkül, csak az élhosszak ismeretében a realizáció egyértelműen meghatározható, amennyiben az generikus és globálisan merev [5].

Az új matematikai eredmények eléréséhez a diszkrét matematika (gráfelmélet, matroidelmélet), az algebrai geometria és a kombinatorikus optimalizálás (algoritmusok) módszereit használtuk.

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM