ELTE

Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

p-adikus Galois-reprezentációk

Zábrádi Gergely

Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet,
Természettudományi Kar, Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
gergely.zabradi@ttk.elte.hu

Bevezetés

- p-adikus Galois-reprezentációk megjelennek az aritmetikai geometriában
- pl. E elliptikus görbe $\mathbb{Q}$ fölött $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ csoport hat a görbe p^n-rendű pontjainak $E[p^n] \cong \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^n)$ csoportján
- $n \to \infty \rightsquigarrow E$-hez tartozó p-adikus Galois-reprezentáció

Előzmények

Híres sejtések a témában:

- Egy E elliptikus görbe komplex L-függvényét a hozzá kapcsolódó p-adikus Galois-reprezentáción keresztül lehet definiálni: a különböző prímekhez tartozó Frobenius-helyettesítések karakterisztikus polinomjaiból Euler-szorzatként. A milleniumi Birch–Swinnerton-Dyer sejtés szerint ez az L-függvény pontosan akkor tűnik el 1-ben, ha az E görbének végtelen sok racionális pontja van. Speciálisan a Galois-reprezentáció is hordozza ezt az információt.
- A terület központi sejtése a Fontaine–Mazur sejtés, mely karakterizálja azon globális, $\mathbb{Q}_p$-együtthatós Galois-reprezentációkat, melyek geometriából származnak. A sejtés szerint ezek pontosan azon reprezentációk, melyek véges sok prímnél ágaznak el, továbbá a p helyen teljesítik a deRham tulajdonságot.

A fenti sejtések speciális eseteinek bizonyításai használják a p-adikus Langlands megfeleltetés ismert speciális eseteit:

- Colmez p-adikus Langlands-megfeleltetése egy természetes (szinte) bijekció 2-dimenziós p-adikus $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-reprezentációk, illetve $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ csoport p-adikus Banach-tér reprezentációi között.
- A megfeleltetés az ún. (φ, Γ)-modulusokon keresztül történik: ezek lényegében lineáris algebrai objektumok, leírhatók két mátrixszal (Γ egy generátorának, illetve a φ Frobeniusnak), melynek együtthatói p-adikus $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T^n$ Laurent-sorok (melyekre $(|a_n|_p)_{n\in\mathbb{Z}}$ korlátos és $\lim_{n\to-\infty} |a_n|_p = 0$).
- A kiindulópont Fontaine kategóriaekvivalenciája $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ p-adikus reprezentációi és a (φ, Γ)-modulusok kategóriája között. Colmez definiált egy funktort a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ csoport p-adikus Banach-tér reprezentációinak kategóriájából a (φ, Γ)-modulusok kategóriájába $\rightsquigarrow$ objektumok egy bizonyos osztályán bijekció

Problémák

- Mely p-adikus Galois-reprezentációk származnak geometriából?

Problémák (folyt.)

- Milyen aritmetikai információt hordoz egy geometriai Galois-reprezentáció?
- Le lehet olvasni, hogy végtelen sok racionális pont van-e?
- Vagy hogy modulo p sima-e?

Friss társszerzők

Somnath Jha (IIT Kanpur, India)
Aprameyo Pal (HRI Allahabad, India)
Annie Carter (U Hawaii, USA)
Kiran S. Kedlaya (UCSD, USA)
Giacomo Cherubini (Charles U Prague)
Han Wu (Queen Mary U London, UK)
Jishnu Ray (TATA Inst., India)
Feng Wei (Beijing Inst. Tech., Kína)
Csahók Tímea (MSc diák, ELTE/Oxford)
Kutas Péter (Birmingham/ELTE IK)

Irodalomjegyzék

[1] G. Zábrádi, “Multivariable (φ, Γ)-modules and smooth o-torsion representations,” *Selecta Math. (N.S.)*, vol. 24, no. 2, pp. 935–995, 2018.

[2] ——, “Multivariable (φ, Γ)-modules and products of Galois groups,” *Math. Res. Lett.*, vol. 25, no. 2, pp. 687–721, 2018.

[3] A. Pal and G. Zábrádi, “Cohomology and overconvergence for representations of powers of Galois groups,” *J. Inst. Math. Jussieu*, vol. 20, no. 2, pp. 361–421, 2021.

[4] T. Szamuely and G. Zábrádi, “The p-adic Hodge decomposition according to Beilinson,” in *Algebraic geometry: Salt Lake City 2015*, ser. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, vol. 97, pp. 495–572.

[5] A. Carter, K. S. Kedlaya, and G. Zábrádi, “Drinfeld’s lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ)-modules,” to appear in *Doc. Math.*

[6] J. Ray, F. Wei, and G. Zábrádi, “Multivariable (φ, Γ)-modules and representations of products of galois groups: The case of imperfect residue field,” https://arxiv.org/abs/2005.11887.

[7] G. Cherubini, H. Wu, and G. Zábrádi, “On Kuznetsov-Bykovskii’s formula of counting prime geodesics,” to appear in *Math. Zeitschrift.*

[8] T. Csahók, P. Kutas, and G. Zábrádi, “Algorithmic applications of the corestriction of central simple algebras,” https://arxiv.org/abs/2007.06981.

Eredmények

A p-adikus Galois-reprezentációkkal kapcsolatos eredményeimet elsősorban Colmez p-adikus Langlands megfeleltetésének általánosítása motiválta. Galois-csoportok direkt hatványainak reprezentációit két okból kezdtem el vizsgálni: egyrészt Breuil, Herzig és Schraen megmutatták, hogy bizonyos Shimura-varietások kohomológiáiban Galois-reprezentációk sokténytényezős tenzorszorzatai is előjönnek természetes módon, ezért megpróbáltam értelmet adni a szorzótényezőknek. Másrészt Drinfel’d és Lafforgue geometriai Langlands-megfeleltetésében is előjönnek Galois-csoportok direkt hatványai.

- Az [1] cikkben Colmez funktorát általánosítottam $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-re. A funktor értékei *többváltozós* (φ, Γ)-modulusok: tehát a mátrixok együtthatói $(n-1)$-változós p-adikus Laurent-sorok és minden változóhoz tartozik 1-1 φ és Γ is (tehát összesen $(2n-2)$ mátrix).
- A [2] cikkben belátom, hogy a fenti többváltozós (φ, Γ)-modulusok kategóriája ekvivalens a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ csoport $(n-1)$-edik direkt hatványának p-adikus reprezentációinak kategóriájával.
- A [3] cikkben megmutatjuk, hogy a többváltozós (φ, Γ)-modulusokat megadó mátrixok választhatók úgy is, hogy a bennük szereplő hatványsorok egy p-adikus körgyűrűn konvergáljanak. Ez szükséges a p-adikus Hodge-elmélettel való kapcsolathoz. Továbbá megmutatjuk, hogy a többváltozós (φ, Γ)-modulusokról hogyan lehet könnyen leolvasni a megfelelő reprezentáció csoportkohomológiáit.
- A [4] egy összefoglaló cikk a p-adikus Hodge-felbontásról. Ez lényegében a Fontaine–Mazur sejtés könnyebbik („ha geometriából jön, akkor deRham”) irányának Beilinson-féle új, derivált algebrai geometrián keresztüli bizonyítása.
- Az [5] cikkben egy új, koncepciózusabb bizonyítást adunk a [2, 3] cikkek eredményeire Scholze perfektoid tereinek segítségével.
- A [6] cikkben a [2] cikk eredményeit általánosítjuk $\mathbb{Q}_p$-ről olyan testekre, melyek maradékteste nem feltétlenül véges.

Más témájú eredmények:

- A [7] cikkem aritmetikai sokaságokon zárt prímgeodetikusok leszámlálásával foglalkozik.
- A [8] cikkben pedig centrális egyszerű algebrák explicit izomorfizmusproblémájával foglalkoztunk algoritmikus szempontból.

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM