ELTE

Tématerületi Kiválósági Program

Ipar és Digitalizáció

Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások

Klasszikus és többszörös Richardson-extrapoláció (RE)

Dr. Havasi Ágnes

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Természettudományi Kar,
Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE)
agnes.havasi@ttk.elte.hu

Bevezetés

- A Richardson-extrapoláció egy konvergenciagyorsító eljárás, amelynek klasszikus változata két különböző lépésközzel nyert numerikus megoldás lineáris kombinálásán alapul.
- Lehetséges általánosításai (kettőnél több rácshálón nyert numerikus megoldások kombinálásával):
  - ismételt Richardson-extrapoláció (Repeated Richardson Extrapolation - RRE)
  - többszörös Richardson-extrapoláció (Multiple Richardson Extrapolation - MRE).
- Célunk a Richardson-extrapoláció különböző változatainak elméleti és számítógépes vizsgálata.

Alkalmazási terület

Szoftveripar: A kutatás célja korszerű numerikus megoldó algoritmusok fejlesztése olyan feladatokra, amelyekben nagyméretű közönséges vagy parciális differenciálegyenletek nagy pontosságú és hatékony numerikus megoldására van szükség (pl. légszennyeződés-terjedési folyamatok modellezése).

Együttműködések:

- Faragó István, ELTE, BME; Teshome Bayleyegn, ELTE
- Zahari Zlatev, Aarhus University, Dánia
- Ivan Dimov, Krassimir Georgiev, Bolgár Tudományos Akadémia, Szófia, Bulgária.

Publikációk

[1] T. Bayleyegn and A. Havasi, “Multiple Richardson Extrapolation Applied to Explicit Runge–Kutta Methods.” *Advances in High Performance Computing, Springer, Cham*, pp. 262–270, 2021.

[2] ——, “Multiple Richardson Extrapolation and its Combination with the Implicit Euler Method.” *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math*, 2020 (elfogadva).

[3] T. Bayleyegn, I. Faragó, and A. Havasi, “On the Consistency Order of Runge–Kutta Methods Combined with Active Richardson Extrapolation.” *Lecture Notes in Computer Science*, 2021 (elfogadva).

Probléma

Merev közönséges differenciálegyenlet-rendszerek megoldásakor fontos szempont a numerikus módszer rögzített rácson való stabilitása. Milyen stabilitási tulajdonságokkal rendelkezik az RRE / MRE alkalmazásával kapott új módszer az alábbi mögöttes módszerek esetén:

- egyes explicit Runge–Kutta-módszerek;
- implicit Euler-módszer?

Egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerre alkalmazott numerikus módszerrel szemben alapvető elvárás a módszer konvergenciája, vagyis a numerikus megoldás konvergálása a pontos megoldáshoz a rácsháló finomításával. Milyen feltételek mellett garantálható a konvergencia, és mit mondhatunk annak rendjéről, ha klasszikus / általánosított Richardson-extrapolációt alkalmazunk?

A RE elve és általánosításai

Közönséges differenciálegyenlet (KDE)-rendszer Cauchy-feladata:

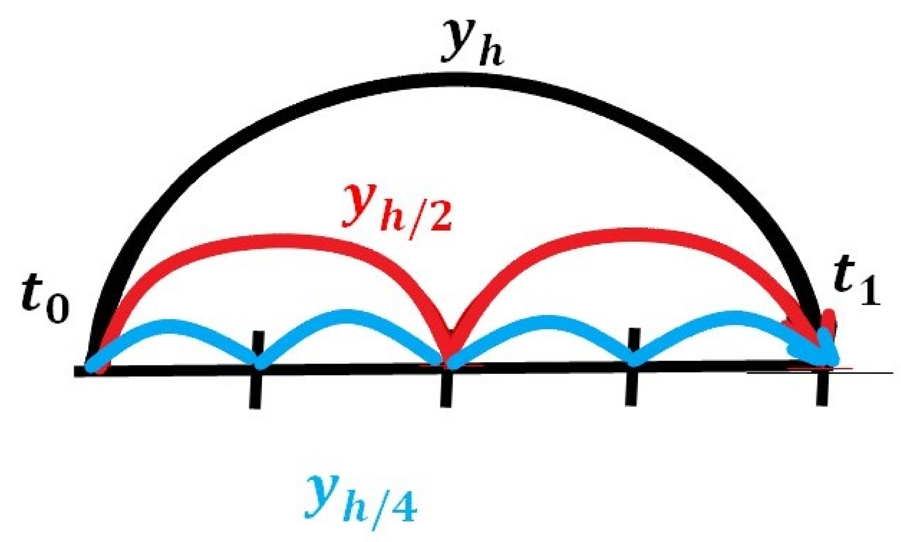
$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Klasszikus RE (CRE): Ha a h ill. $h/2$ lépésközű rácson is megoldjuk a feladatot egy p-ed rendben konvergens módszerrel, és a numerikus megoldásokat rendre $z(t_n)$ ill. $w(t_n)$ jelöli, akkor

$$y_{\mathrm{RE}}(t_n) := \frac{2^p w(t_n) - z(t_n)}{2^p - 1}. \tag{2}$$

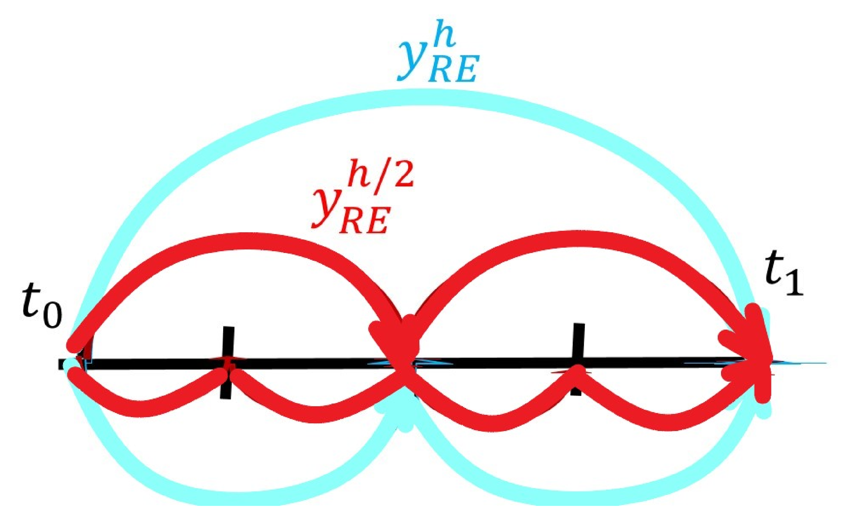
Rendje: $p+1$.
Kérdés: hogyan növelhető a pontosság?

Ismételt RE (RRE) - kettőnél több rácson nyert megoldást közvetlenül kombinálunk lineárisan:



Rendje: $p+2$, és minden ismétléssel eggyel nő.

Többszörös RE (MRE) - a kombinált megoldást ismét kombináljuk CRE-val:

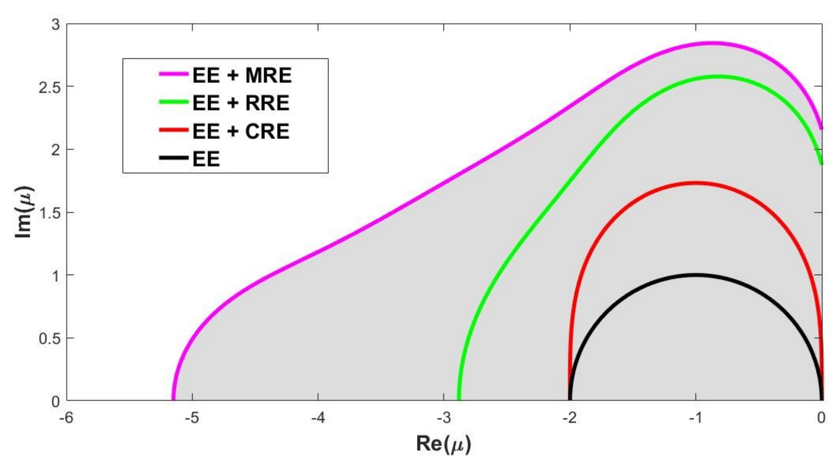


Rendje: $p+2$, és a RE minden újbóli alkalmazásával eggyel nő.

Eredmények

Az abszolút stabilitás vizsgálata

- Ha a mögöttes módszer explicit Runge–Kutta-módszer:
  - Az explicit RK (ERK) módszerek stabilitási tartománya korlátos, és ez a RE-val kombinált változataikra is igaz.
  - A klasszikus RE alkalmazása megnöveli a stabilitási tartomány méretét.
  - A többszörös RE (MRE) az összes vizsgált ERK módszer esetén nagyobb stabilitási tartománnyal rendelkezik, mint az azonos rendű RRE módszer



- Ha a mögöttes módszer az implicit Euler (IE)-módszer:
  - Ismeretes, hogy az IE és IE + CRE módszerek A-stabilak. Megmutattuk, hogy az IE + MRE módszer nem A-stabil. Mivel a stabilitási tartomány határa a képzetes tengelytől balra húzódik egy szakaszon, így stabilitási problémába ütközhetünk, ha a megoldandó feladat mátrixának (vagy Jacobi-mátrixának) tisztán képzetesek a sajátértékei. Ilyen esetben nem javasolt az IE + MRE módszer használata.

A konzisztencia és konvergencia vizsgálata:

- Korábban beláttuk, hogy explicit vagy diagonálisan implicit Runge–Kutta-módszer + CRE konvergens, ha a jobb oldali f függvény Lipschitzes. Kérdés a konvergencia rendje.
- Megmutattuk, hogy ha az alapmódszer első-, másod- vagy harmadrendben konzisztens Runge–Kutta-módszer, akkor a CRE eggyel megnöveli a konzisztencia rendjét [3].

Az Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások című projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program (TKP2020-NKA-06, Nemzeti Kihívások Alprogram) finanszírozásában valósult meg.

Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal

AZ NKFI ALAPBÓL MEGVALÓSULÓ PROGRAM