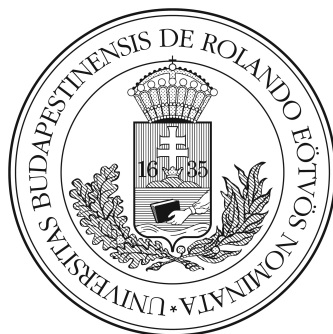


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
TÉRKÉPTUDOMÁNYI ÉS GEOINFORMATIKAI INTÉZET

DR. KERKOVITS KRISZTIÁN ANDRÁS

Bevezetés a vetülettanba és a geodéziába

Jegyzet a Földi és térképi koordináta-rendszerek előadáshoz



Budapest, 2021.

Lektorálta: DR. GYÖRFFY JÁNOS

A jegyzet az ELTE IK 2021. évi tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán
elnyert forrás felhasználásával készült.

A jegyzet szedése a \LaTeX 2_ε programban készült.

Ez a jegyzet non-profit oktatási és kutatási célokra szabadon felhasználható és terjeszthető az eredeti szerző és esetleges módosítás esetén azok egyértelmű megjelölése mellett. Minden más célú, különösen az anyagi haszonszerzéssel járó felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével lehetséges.

Tartalomjegyzék

Ajánlás	5
I. Matematikai alapismeretek fölelevenítése	6
I.1. A sík koordinátái	6
I.2. Térbeli koordináta-rendszerek	7
I.3. Műveletek vektorokkal és mátrixokkal	9
I.4. A determináns	11
I.5. Transzformációk	12
I.6. Analízis a geometriában	14
II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése	15
II.1. Mértékegységek	15
II.2. Forgásfelületek	16
II.3. A gömb	17
II.4. A forgási ellipszoid.	19
III. Bevezetés a gömbi geometriába	23
III.1. Nemeuklideszi geometriák	23
III.2. Nevezetes felületdarabok	24
III.3. A gömbháromszög	26
IV. Navigáció a gömbi geometriában	28
IV.1. Gömbháromszögtan	28
IV.2. Navigáció ortodróma mentén.	31
IV.3. Navigáció loxodróma mentén.	32
V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon	37
V.1. Meridiángörbületi sugár.	37
V.2. Harántgörbületi sugár	40
V.3. Szélesség, hosszúság és magasság a térben	41
V.4. Ellipszoidi foktrapéz felszíne	43
VI. Geodéziai alapfeladatok	45
VI.1. Geodéziai alapfeladatok síkon	45

VI.2. Geodéziai alapfeladatok gömbön.	46
VI.3. Földrajzi segédkoordináták	47
VI.4. Geodéziai alapfeladatok ellipszoidon	49
VI.5. A Föld alakját helyettesítő felületek	53
VII. Átszámítás különböző alapfelületek között	55
VII.1. A vetület fogalma	55
VII.2. Dátumtranszformációk	55
VII.3. A Föld sugara	58
VII.4. Gömbvetületek	59
VIII. Valódi síkvetületek	63
VIII.1. A vetületek osztályozása	63
VIII.2. Nemperspektív síkvetületek	64
VIII.3. Perspektív síkvetületek	66
VIII.4. Magyarországi sztereografikus vetület.	69
IX. Valódi hengervetületek	72
IX.1. Általános képletek	72
IX.2. A Web Mercator	75
IX.3. Magyarországi hengervetületek	76
X. Nemzetközi térképművek vetületei	80
X.1. Valódi kúpvetületek	80
X.2. A GAUSS–KRÜGER-vetület	83
X.3. Az UTM, az UPS és az MGRS.	87
XI. Nemzeti vetületek	90
XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között	97
XII.1. Lineáris egyenletrendszerek	97
XII.2. Átszámítás alapfelületi koordinátákkal.	98
XII.3. Átszámítás illesztőpontokkal	100
Függelékek	105
A. Gyakorlati feladatok megoldásai	105
B. Magyarországi vetületek képletei	109
C. Fontosabb matematikai összefüggések	114
D. Szögkoszinusztétel és második alapforma	118
E. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására	121

Ajánlás

Jelen jegyzet a 2020-as koronavírus-járvány karanténjának idején készült. A célközönség elsősorban a Földtudomány BSc II. éves hallgatósága, akik ezt az előadássorozatot élőben is hallgatják. Remélem, hasznos segédanyag-gá válik a vizsgára készüléskor.

A tananyag fölosztása nem tematikus logikát követ, hanem az egyszerű-től a bonyolultabb felé haladva fokozatosan egymásra épülve szerveződik. Éppen ezért az összetartozó számításoknál rengeteg visszautalás található akár jóval korábbi anyagokra is. A szövegben található kék linkek kattinthatók, ezek könnyítik a navigációt a jegyzeten belül. Tematikus szerveződésű jegyzet iránt érdeklődőnek GYÖRFFY JÁNOS Térképészet és Geoinformatika II. című tankönyvét javaslom, bár utóbbi mesterszakos szintű anyagot is tartalmaz.

A jegyzet írásánál két, egymásnak ellentmondó szempontot kellett figyelembe vennem: Egyrészt törekedtem a közérthetőségre, hiszen a jegyzet olvasói nem matematikusok lesznek, ezért a szigorú, szabatos megfogalmazást kerültem, ha az túlzottan rontotta volna a szöveg szemléltető magyarázatának érthetőségét. Másfelől a tehetségesebb hallgatók kíváncsiságát is ki szeretném elégíteni, ezért rengeteg, a témához lazán kapcsolódó érdekességet is megemlítek, melyek a téma mögötti mélyebb összefüggésekre világítanak rá. Utóbbiak többnyire lábjegyzetként, a hasábok alján olvashatók.

A jegyzetben többfelé találkozhatunk színes képletekkel. Ez a könnyebb megértést hivatott segíteni a bonyolult átalakítások során. Ha egy egyenlőségjel két oldalán azonos színű kifejezéseket látunk, akkor azok értéke megegyezik. Gyakran a törtek vagy egyenletek egyszerűsítése előtt vagy bővítését követően jelennek meg mindkét oldalon az azonos színű kifejezések az átalakítás kiemelésére. Ezért nem javasolt a jegyzet fekete-fehér nyomtatása.

Első előadás

Matematikai alapismeretek fölelevenítése

I.1. A sík koordinátái

Koordináta-rendszernek nevezzük azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek egy számpárhoz vagy -hármashoz egyértelműen hozzárendelik egy felület vagy tér valamely pontját. A sík pontjainak jellemzésére alapvetően kétféle rendszert szoktunk használni. A középiskolából ismert *derékszögű koordináta-rendszer* egy origóhoz képest két, egymásra merőleges bázisvektor lineáris kombinációjával adja meg a pont helyzetét. A két koordinátatengelyt jellemzően az x és y betűkkel szoktuk jelölni, azonban az, hogy x és y merre mutat, korántsem egyértelmű. A *matematikában szokásos koordináta-rendszer* esetén x jobbra, y fölfelé mutat, míg a számítástechnikában alkalmazott *pixel koordináta-rendszerben* a képernyő bal felső sarka az origó, x jobbra, y pedig lefelé mutat. A magyar geodéziai gyakorlatban két eltérő rendszer van használatban: az *északkeleti tájékozású rendszerben* x északra, y keletre mutat, míg a *délnyugati tájékozású rendszerben* x délre, y nyugatra áll (I.1. ábra).

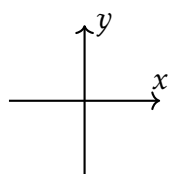
A másik gyakran alkalmazott lehetőség a *polárkoordináta-rendszer*. Ez is két számmal adja meg a pontok helyzetét. Az első, a *polártávolság* mutatja meg, hogy a pont milyen messze van az origótól, míg a második, a *polárszög* valamilyen kezdőiránnyal bezárt szöget jelöl. A derékszögű és polárkoordináták között nincs minden esetben érvényes átszámítási képlet! Érdemes mindig fölrajzolni a koordinátákat, és ennek megfelelően szögfüggvényekkel kitalálni az aktuálisan érvényes képleteket.

Az I.2. ábrán látható elhelyezésben (közös origó, x tengely irányába álló polártengely) például ezek az összefüggések adódnak a ρ polártávolság, az ω polárszög (iránya itt az óra járásával egyező) és az $x; y$ koordináták között:

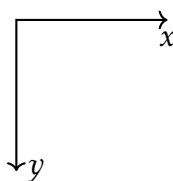
$$x = \rho \cos \omega$$

$$y = \rho \sin \omega$$

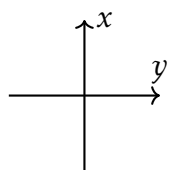
I. Matematikai alapismeretek fölelevenítése



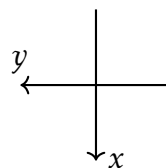
a) Matematikában szokásos



b) Számítástechnikában szokásos

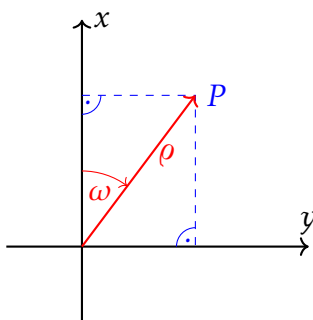


c) Északkeleti tájékozású



d) Délnyugati tájékozású

I.1. ábra. Gyakori derékszögű síkkoordináta-rendszerek



I.2. ábra. Átszámítás egy derékszögű és egy polárkoordináta-rendszer között

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

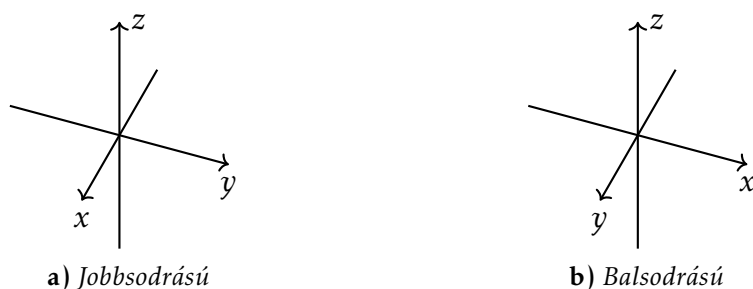
Azonban a tengelyek másféle elrendezésével vagy a polárszög ellentétes irányításával eltérő képletek adódnak!

I.2. Térbeli koordináta-rendszerek

Derékszögű koordináta-rendszer a síkbeli esethez hasonló módon térben is definiálható. A tengelyek elrendeződésétől függően beszélünk *jobbsodrású* és *balsodrású* koordináta-rendszerekről (I.3. ábra), amelyek közül mi kizárólag az előbbit fogjuk használni.*

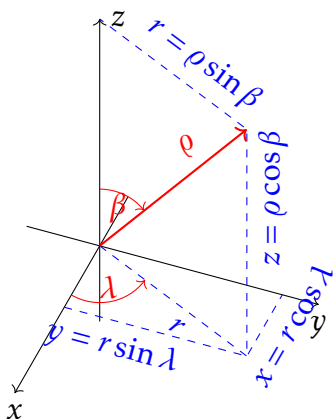
* A Föld felszínéhez rögzített rendszerekben néha az északkeleti tájékozású koordinátákat egészítjük ki a magassággal, ilyenkor balsodrású rendszert kapunk.

I. Matematikai alapismeretek fölelevenítése



I.3. ábra. Térbeli derékszögű koordináta-rendszerek

Polárkoordináták megadására a térben is lehetőség van. Ekkor, amint az az I.4. ábrán látszik, a ρ polártávolság és a z tengely pozitív felétől mért β pólustávolság mellett szükség van a λ azimutiszögre is. Ez a szög két, a z tengely által határolt félsík között mérendő, amelyek közül az egyik az x tengely pozitív felét, a másik pedig a pontot tartalmazza.



I.4. ábra. Térbeli polárkoordináta-rendszer

Az átszámítási képletek az ábrán jól leolvashatók:

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \beta \cos \lambda \\y &= \rho \sin \beta \sin \lambda \\z &= \rho \cos \beta \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \beta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\end{aligned}$$

1.3. Műveletek vektorokkal és mátrixokkal

A valós számokból álló számpárt, -hármast stb. szokás *vektornak* is nevezni. A vektorok ebben a jegyzetben hol sorvektorként $(x; y)$, hol oszlopvektorként $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lesznek jelölve, a két jelölés egymással fölcserélhető, szorzásnál praktikus konvenció a sor-oszlop sorrend használata. A vektorok megfeleltethetők a megfelelő dimenziójú derékszögű koordináta-rendszerekben értelmezett pontok koordinátáinak.

Középiskolából ismert, hogy két vektor összeadása és kivonása egyszerűen elvégezhető a tagok összevonásával:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix}$$

Szintén ismert, hogy két vektor *skaláris szorzata* megkapható egyrészt a vektorok hosszának és a közbezárt ϑ szög koszinuszának szorzataként, másrészt a vektorok koordinátáinak szorzatösszegeként is:

$$(x_a; y_a; z_a) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2} \cos \vartheta = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Ez az összefüggés gyakran hasznos a vektorok hajlásszögének kiszámításánál is.

Az előbbi példánál jelentősége van annak, hogy az első vektort sorvektorként, a másodikat oszlopvektorként jelöltem. Ha a két tényezőt fölcserélem, akkor a két vektor *diadikus szorzatáról* beszélek, melynek kiszámítását a következőképp végezzük ezúttal kétdimenziós vektorokkal:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} (x_b; y_b) = \begin{pmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{pmatrix}$$

Amelyet szemléletesen következőképp jelölhetünk:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b & y_b \\ x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{pmatrix}$$

Látszik, hogy egy új képződményt kaptunk, amely sem nem vektor, sem nem skalár, hanem valamilyen újfajta jelenség, egy számokból álló táblázat,

I. Matematikai alapismeretek fölelevenítése

amelynek elemei az eredeti vektorok koordinátái szorzótáblaszerűen összeszorozva. Az új képződményt, azaz a valós számokból fölépített táblázatot *mátrix*nak nevezzük.

A matematikai műveletek mátrixokra is értelmezhetők. Legegyszerűbb az összeadás. A vektorokhoz hasonlóan kizárólag azonos méretű mátrixok adhatók össze:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Mátrixot mátrixszal szorozni a vektorok szorzásához hasonlóan lehet: most az első mátrix adott sorában és a második adott oszlopában elhelyezkedő vektorokat kell páronként skalárisan összeszorozni, azaz elemeik szorzatát összegezni. Az előző két mátrix szorzata tehát a korábban bemutatott jelöléssel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

A mátrixok szorzásának fontos tulajdonsága, hogy a tényezők nem cserélhetők föl egymással, különben eltérő eredményt kapunk:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

Szintén megemlítendő, hogy a mátrixok szorzását csak akkor tudjuk értelmezni, ha a jobb mátrixnak annyi sora van, ahány oszlopból áll a bal mátrix. Mátrixot vektorral is szorozhatunk, amelynek módja már nem meglepő:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Azaz ha mátrixot vektorral szorzunk, az eredmény egy vektor lesz.

1.4. A determináns

A tantárgy során a későbbiekben többször szükségünk lesz a determináns fogalmának ismeretére. Azokhoz a mátrixokhoz, amelyeknek ugyanannyi sora van, mint oszlopa, hozzárendelhetünk egy *determináns*nak nevezett számot, amelyet a következő módon számíthatunk ki:

1. Készítsünk egy sakktáblát előjelekből: A bal felső sarokban lévő előjel +, a többi sakktáblaszerűen váltakozva – és +. A sakktábla mérete egyezzen meg a determináns méretével!
2. Válasszuk ki a determináns egy tetszőleges sorát vagy oszlopát!
3. A sor vagy oszlop elemein végighaladva képezzük a következő három tényező szorzatát: a sakktáblában az adott elemhez tartozó előjel; maga az adott elem; az adott elem sorát és oszlopát letakarva képzett determináns.
4. Az előző pontban megadott szorzatok összege egyenlő a determináns értékével, függetlenül a választott sortól vagy oszloptól. Mindig elég egyetlen soron vagy oszlopon végighaladni.

Példaként számítsunk ki egy 3×3 -as determinánst az első sora szerint kifejtve, majd a kapott 2×2 -es determinánsokat szintén az első soraik szerint kifejtve:

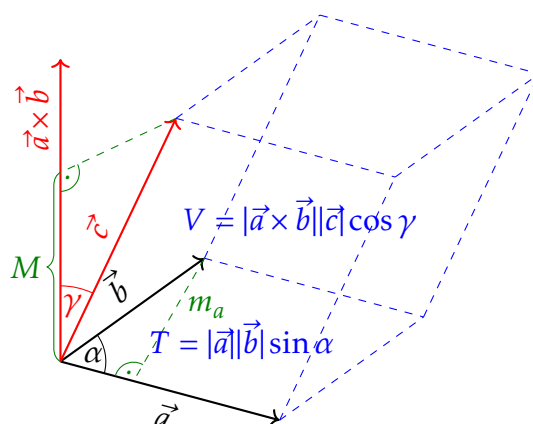
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

A determináns geometriai jelentése a terület és a térfogat fogalmához kapcsolódik. Az origóból induló \vec{a} és \vec{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területe például megegyezik az alap és a magasság szorzatával. Azonban a paralelogramma m_a magassága pedig megegyezik a b oldal hosszának és az $\vec{a}; \vec{b}$ vektorok által bezárt α szög szinuszának szorzatával (I.5. ábra). Középiskolában tanultuk, hogy ez definíció szerint az \vec{a} és \vec{b} vektorok *vektoriális szorzatának* hossza, azonban ez megegyezik a vektorokból képzett determináns értékével is:*

$$T = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

Középiskolából emlékezhetünk arra is, hogy a vektorszorzás eredményül kapott $\vec{a} \times \vec{b}$ is vektor, iránya merőleges mindkét eredeti vektorra.

* Két háromdimenziós vektor vektoriális szorzata is szemléltethető determinánssal: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$, ahol $\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z$ a megfelelő tengelyek irányában álló egységvektorok.



I.5. ábra. A paralelepipedon térfogatának számítása

Vegyünk most a térben egy harmadik \vec{c} vektort, és keressük meg az \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát! A ferde hasábok térfogata megegyezik az alapterület és a magasság szorzatával. Az alapterület az $\vec{a} \times \vec{b}$ hossza, az M magasság pedig megegyezik \vec{c} hosszának, valamint az $\vec{a} \times \vec{b}$ és a \vec{c} között mért γ szög koszinuszának szorzatával (I.5. ábra). Ez pedig együttesen nem más, mint $\vec{a} \times \vec{b}$ és \vec{c} skaláris szorzata. A paralelepipedon térfogatát kiadó vegyes szorzást a három vektor *triadikus szorzatának* nevezzük, és ez is számítható a három vektorból képzett determinánssal:

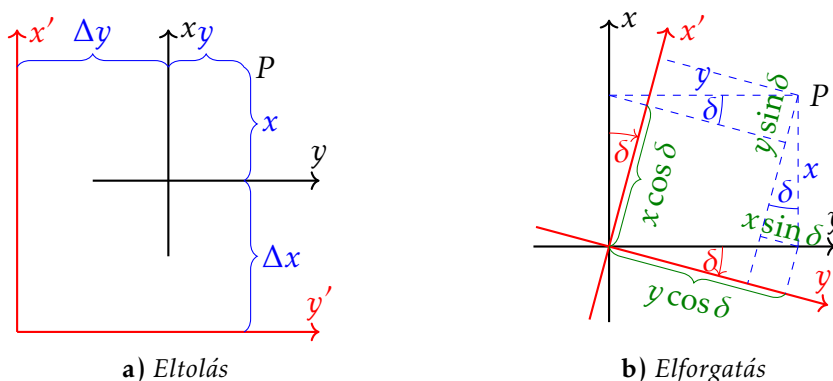
$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

I.5. Transzformációk

A térképészetben gyakran van szükség arra, hogy áttérjünk egyik koordináta-rendszerből egy másikra. A koordináta-rendszerek *eltolására* elsősorban akkor van szükség, amikor a negatív koordinátákat szeretnénk kiküszöbölni. Ennek matematikája mind két-, mind háromdimenziós esetben igen egyszerű, síkbeli esete leolvasható az I.6. ábráról.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

I. Matematikai alapismeretek fölelevenítése



I.6. ábra. Gyakori síkbeli transzformációk

Az *elforgatás* kétdimenziós esete is leolvasható; ez elsősorban akkor hasznos, ha a térképet nem északra szeretnénk tájolni:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \delta + y \sin \delta \\y' &= y \cos \delta - x \sin \delta\end{aligned}$$

Ezt a mátrix és vektor szorzására vonatkozó, újonnan megismert összefüggéssel egyszerűbben is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Az így kapott mátrixot *forgatómátrix*nak nevezzük. Fontos figyelni arra, hogy δ pozitív, ha az x tengelyt az y felé forgatjuk, ellenkező irányban negatív.

Térbeli elforgatás esetén nem mindegy, hogy hogyan áll a forgatás tengelye. Ugyanakkor EULER bebizonyította, hogy bármely térbeli elforgatás fölbontható három, valamely tengely mentén végzett elforgatás egymásutánjára. Ha z a forgástengely, akkor a forgatás értelemszerűen megegyezik a síkbeli elforgatással, az új z' koordináta pedig a régi értéket őrzi meg. Hasonlóan állíthatók elő az y és x tengely körüli elforgatás forgatómátrixai:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_x & \sin \delta_x \\ 0 & -\sin \delta_x & \cos \delta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_y & 0 & -\sin \delta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta_y & 0 & \cos \delta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta_z & \sin \delta_z & 0 \\ -\sin \delta_z & \cos \delta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mivel a mátrixok szorzása tetszőlegesen zárójelezhető, mindegy, hogy a pontot szorozgatjuk-e össze szép sorban a mátrixokkal, vagy előbb szorozzuk össze a mátrixokat, és csak utána szorozzuk a pont koordinátaival.

Fontos ugyanakkor, hogy figyeljünk a forgatások helyes sorrendjére, mert a mátrixok szorzása nem fölcserélhető! A fenti képletben először z , majd y , végül x tengely körül forgattunk, de a térinformatikában más sorrend is előfordulhat.

A harmadik gyakori transzformáció a *skálázás*, amely egyszerűen a pont koordinátáinak egy skalárral történő beszorzásával számítható. Ez akkor jön elő a gyakorlatban, ha két koordináta-rendszer más mértékegységet használ (pl. láb és méter), és azok között szeretnénk átszámítani. A különböző mértékegységek kérdéséről a következő előadásban bővebben is lesz szó.

1.6. Analízis a geometriában

Geometriai számításaink során gyakran kell az elemi analízis eszköztárához folyamodnunk. Itt csak röviden fölelevenítjük, hogy egy függvény érintőjének meredeksége a *differenciálhányados*. Fölhasználhatjuk ennek megfelelően görbe vonalak érintőjének kereséséhez, a differenciálhányados ilyenkor az érintő irányszögének a tangensét adja. Mivel a differenciálhányados formális definíciója a függvény icipici megváltozását osztja el a változó icipici megváltozásával, gyakran alkalmazzuk majd a differenciálhányadosot végtelenül kis távolságok hányadosának számítására is.

A *határozott integrálás* formális definíciója a grafikon alatti terület közelítése végtelen sok, végtelen kis téglalappal. Ezért ha végtelen sok, végtelenül kicsi mennyiséget kell összegeznünk, szintén a határozott integrálás vezet eredményre, így bonyolult úthosszak vagy görbe vonalak által határolt területek számítására is alkalmas azok végtelenül finom felosztásával. A NEWTON–LEIBNIZ-tétel bemutatta, hogy a *határozatlan integrálás* a deriválás ellentétes művelete. Fogjuk használni ennek megfelelően olyan egyenletek megoldására, ahol az ismeretlen deriváltja is szerepel az egyenletben. Az ilyen egyenleteket *differenciálegyenletnek* nevezzük. A fontosabb differenciálási szabályok emlékeztetőnek a C. függelékben megtalálhatók.

Második előadás

A gömb és az ellipszoid paraméterezése

II.1. Mértékegységek

A koordináta-rendszerek értelmezésénél igen fontos tudni, hogy milyen mértékegységeket használ. Bár ma evidensnek tűnik a méterrendszer használata, ez nem ilyen egyértelmű külföldi készítésű vagy régi térképeken.

A szöveget általában fokban találjuk a térképen, de a perc és a másodperc is gyakori: $1^\circ = 60' = 3600''$. Francia készítésű térképeken találkozhatunk a decimális rendszerű újfokkal, a derékszöget a franciák régen 90° helyett 100^g -ra osztották. Az újfok újpercekre és újmásodpercekre oszlik: $1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$. Régi francia térképeken ezért körültekintéssel járjunk el!

A képletek gyakran egyszerűbbek, ha radiánban számolunk, ez a középponti szöghöz tartozó körív hosszának és a sugárnak az arányából jön ki: $180^\circ = \pi$ radián. A radiánt úgy jelöljük, hogy nem teszünk ki mértékegységet. Ebben a jegyzetben az $\widehat{\alpha}$ (arkusz) jelölés arra figyelmeztet, hogy az α szöveget radiánban kell a képletbe helyettesíteni. Például az R sugarú, ϑ radiánban mért középponti szöghöz tartozó s körív hossz az $s = R\widehat{\vartheta}$ képlettel számítható.

A rendszerváltás előtt készült katonai térképeken található *vonás* mértékegység elméletileg a radián ezredrésze lenne, azonban a keleti blokk államaiban az egyszerűsítés érdekében a teljes körív a ~ 6283 helyett 6000 vonásra oszlik. A vonást úgy jelöljük, hogy a tízes és százasként helyi értékek közé kötőjelet teszünk: a derékszög vonásértéke tehát $15-00$.

A gyakorlatban alkalmazott koordináta-rendszerek távolságra általában a métert szokták alkalmazni.* A méter régi definíciója szerint a Föld félmerididiánjának tízmilliomod része, azaz 1 km megközelítőleg az 1^c (újperc)

* Mivel a régi etalonok közül a németeknek véletlenül $15\ \mu\text{m}$ -rel hosszabb jutott, az egykori német gyarmatokon (pl. Namíbia) készült térképek métere még a mai napig is eltérhet az igazi métertől, ezt a térinformatikai szoftverekben szükség esetén be kell állítani!

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése

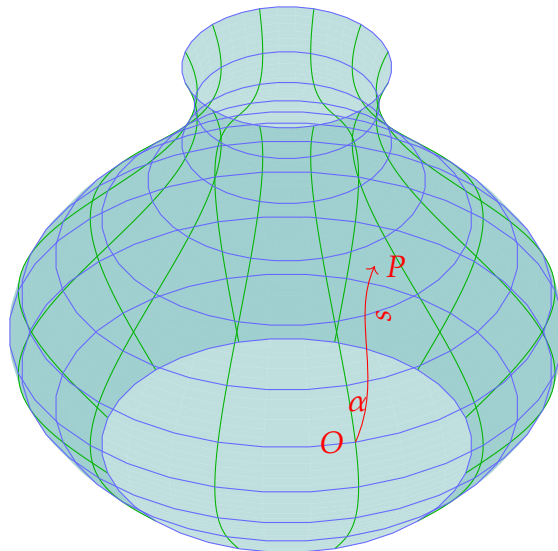
középponti szöghöz tartozó meridiánív hossza. Előfordulhat a méteren kívül más mértékegység is:

- 1 amerikai mérföld ≈ 1609 m
- 1 tengeri mérföld ≈ 1852 m (ez a Földön az $1'$ középponti szöghöz tartozó meridiánív hossza)
- 1 amerikai láb $\approx 30,48$ cm (légitérképeken magasságmérésre használják)
- 1 bécsi öl $\approx 1,896$ m (rég Magyar földmérési és katonai térképeken)
- 1 bécsi mérföld = 4000 öl ≈ 7586 m

A méter és a tengeri mérföld példáján látszik, hogy a földi távolságok a hozzájuk tartozó középponti szögekkel is jellemezhetők, hiszen a Föld sugara ($R \approx 6371$ km) ismert. Ökölszabályként használható tehát az $1^\circ \approx 111$ km becslés, de fontos, hogy ez csak meridiánok mentén ad jó értéket!

II.2. Forgásfelületek

Ha egy tetszőleges sima síkgörbét egy azonos síkban fekvő *forgástengely* körül körbeforgatunk, akkor a görbe által sűrt felületet *forgásfelületnek* nevezzük. A II.1. ábrán zölddel jelölt alkotókat, amelyek az eredeti síkgörbével egybevágók, *meridiánnak*, a forgástengelyre merőleges síkokba eső kék köröket *parallelkörnek* nevezzük. A parallelkörök és a meridiánok egymást mindenütt merőlegesen metszik.



II.1. ábra. Forgásfelületi polárkoordináta-rendszer

Az ábrán látható az egyik lehetséges koordináta-rendszer is, ez a síkbeli polárkoordinátákhoz hasonló *forgásfelületi polárkoordináta-rendszer*. Az s

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése

polártávolságot az O origó és a P pont között a felületen lehetséges legrövidebb útvonalon mérjük. Ezt a legrövidebb útvonalat *geodéziai vonalnak* nevezzük. A forgásfelület minden meridiánja egyúttal geodéziai vonal, de a parallelkörök általában nem azok. A polárszög megfelelője itt az α *azimut*, amelyet mindig az origón áthaladó meridiántól indítva, az óra járásával egyezően mérünk.*

A másik lehetséges vonatkoztatási rendszer a *paraméteres koordináta-rendszer*, amelyet egy tetszőleges $f(u;v) \mapsto (x;y;z)$ függvénnyel megadhatunk, azzal a kikötéssel, hogy a függvény által visszaadott $(x;y;z)$ térbeli derékszögű koordináta-hármas minden, az értelmezési tartományba eső $(u;v)$ -re a felületünk valamely pontjára kell essen. Ebben az esetben az eredeti $(u;v)$ párt a felület *parametrikus koordinátáinak*, az $f(u;v)$ függvényt a felület *paraméteres alakjának* nevezzük. *Paramétervonalnak* hívjuk azokat a felületi görbéket, amelyek mentén vagy az u vagy a v paraméter állandó.

II.3. A gömb

Gömbnek nevezzük az egy ponttól azonos távolságra lévő pontok halmazát. Az origó középpontú, R sugarú gömb pontjai mindig teljesítik a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

A gömb felírható többféle paraméteres alakban is. Az egyik lehetséges paraméterezés, amikor az $u;v$ paraméterek szerepét a φ *földrajzi szélesség* és a λ *földrajzi hosszúság* játsszák. Előbbi a pontba mutató helyvektor és az $x;y$ tengelyek által kifeszített sík között található szög, utóbbi szöveget az x tengely és a pont $x;y$ síkra eső merőleges vetületébe mutató helyvektor között mérjük. Ez a paraméteres alak a II.2. ábra alapján írható fel:

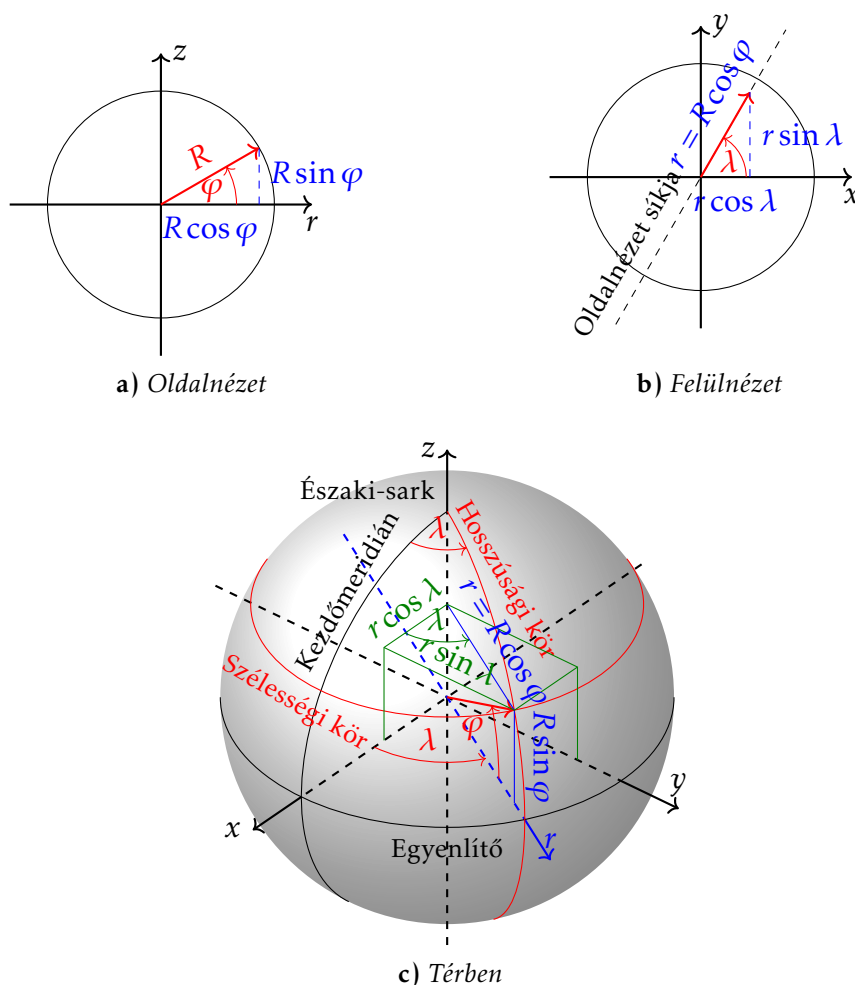
$$x = R \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = R \sin \varphi$$

* Nagyon ritka esetekben előfordulhat, hogy a forgásfelületen két pontot akár több, különböző azimuttal rendelkező geodéziai vonallal is össze lehet kötni. Példa a gömb két áttellenes pontja. Ilyen esetekben a pont azimutja nem egyértelmű, de megfordítva a hozzárendelés mindig egyértelmű: az adott azimut és távolság ilyenkor is egyetlen pontot jelöl ki a felületen.

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése



II.2. ábra. Földrajzi koordináták a gömbön

Látható, hogy a szélességi köröknek nevezett φ -paramétervonalak a gömb parallelkőrei, sugaruk $R \cos \varphi$, míg a hosszúsági köröknek nevezett λ -paramétervonalak a gömb R sugarú meridiánjai. Ha a derékszögű koordinátákból szeretnénk földrajzit kapni, az ábráról az is leolvasható, miszerint:

$$\sin \varphi = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}$$

A Föld esetében a z tengelyt a forgástengely irányában helyezük el, így a szélességet az erre merőleges síktól mérjük. A 0° szélességű paramétervonal neve *Egyenlítő*. Ugyanakkor a hosszúságok mérése nem egyértelmű, mert

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése

az x tengelyt tetszőleges *kezdőmeridián* irányába is forgathatjuk. A gyakorlatban leginkább a greenwich-i csillagvizsgálón átmenő meridiánt szoktuk kezdőmeridiánnak választani,^{*} de más kezdőmeridiánnal is találkozhatunk: A franciák például egészen a közelmúltig gyakran Párizstól kezdve tüntették föl a hosszúságokat,[†] régi térképeken pedig gyakran Ferrótól^{**} mért hosszúsággal találkozunk. A nemzeti földmérési munkálatokhoz a legtöbb ország saját kezdőmeridiánt is kijelölt, Magyarországon ez a Gellérthegyen, a Citadella Szabadság-szobor felé eső végénél található jelen halad át.

II.4. A forgási ellipszoid

Forgási ellipszoidot kapunk, ha egy ellipszoidot valamelyik tengelye körül körbeforgatjuk. Az ellipszoidot két adattal, az a *nagyfő-tengellyel* és a b *kisfő-tengellyel* jellemezhetjük. Az origó középpontú, z forgástengelyű forgási ellipszoidot alkotó pontok a következő egyenlettel írhatók le:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

A forgási ellipszoid alakját jellemezzük még az f *lapultsággal*, az e *első excentricitással* és az e' *második excentricitással*:

$$f = \frac{a - b}{a}$$
$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$
$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

A lapultságnak általában a reciprokát szokás megadni ($f \approx 1/300$), míg az első excentricitásnak gyakran a négyzete szerepel a szakirodalomban.

^{*} Valójában a nemzetközi kezdőmeridián a csillagvizsgálótól 102 m-re keletre található a függővonal-elhajlás korrigálása érdekében.

[†] Ráadásul újfokban, így fokozttan figyeljünk!

^{**} Ez a kezdőmeridián definíció szerint Párizstól 20°-ra nyugatra található az Atlanti-óceánban.

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése

Előfordul azonban, hogy az excentricitást egyáltalán nem adják meg, ilyenkor nekünk kell kiszámítani a lapultságból:

$$e = \sqrt{\frac{a+b}{a} \frac{a-b}{a}} = \sqrt{\frac{2a - (a-b)}{a} f} = \sqrt{(2-f)f} = \sqrt{2f - f^2}$$

Az első excentricitás képletét átalakítva egy igen fontos összefüggést kaphatunk:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\ e^2 - 1 &= -\frac{b^2}{a^2} \\ a^2(1 - e^2) &= b^2 \\ b &= a\sqrt{1 - e^2} \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést gyakran fogjuk használni! Például a lapultságot így megkaphatjuk az első excentricitásból:

$$f = \frac{a - a\sqrt{1 - e^2}}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

Vagy az első és második excentricitások kapcsolata:

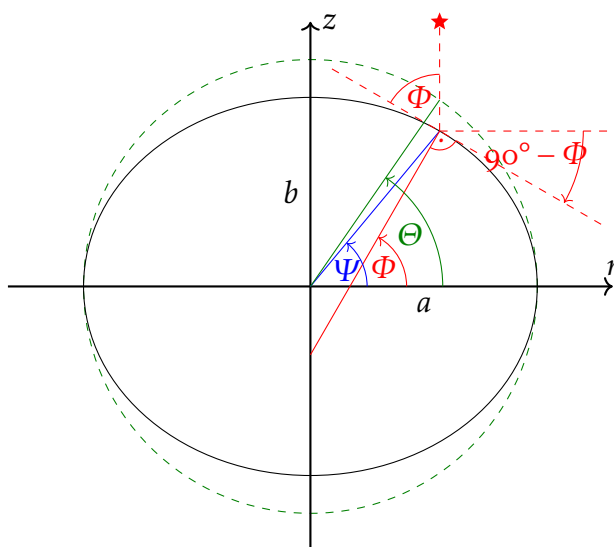
$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2(1 - e^2)}} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Az ellipszoidon a Λ hosszúságot ugyanúgy értelmezzük, mint korábban a gömbön. Azonban háromféle szélességet is definiálhatunk (II.3. ábra):

- A Ψ *geocentrikus szélesség* az ellipszoid középpontjából a pontba mutató vektor és az Egyenlítő síkja között lévő szög.
- A Φ *geodéziai* vagy *földrajzi szélesség* a felület normálisa (helyi függőleges) és az Egyenlítő síkja között bezárt szög.
- A Θ *redukált szélesség* az a szélesség, amelyet az a sugarú gömbön mérnénk, ha az ellipszoidot a z tengely irányában a/b -szerésre nyújtjuk.

A térképészeti gyakorlatban leginkább a földrajzi szélességet alkalmazzuk. Ennek oka, hogy csillagászati módszerekkel könnyű volt mérni: a földrajzi szélesség megegyezik az ellipszoid érintősíkja (helyi vízszintes) és a Föld forgástengelyének iránya (Sarkcsillag) között mért szöggel. A három

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése



II.3. ábra. Ellipszoidi szélességek

szélességdefiníció közötti átszámításhoz először írjuk föl az ábrán látható ellipszis egyenletét:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

z-t kifejezve:

$$z = b\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$$

A differenciálhányados az ellipszis érintőjének iránytangense:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{-br}{a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

A II.3. ábráról leolvasható, hogy az ellipszis piros szaggatott vonallal jelölt érintőjének lejtőszöge a földrajzi szélességet éppen derékszögre egészíti ki. Tudva, hogy a differenciálhányados az érintő lejtőszögének előjeles meredeksége (tangense), és figyelembe véve, hogy a differenciálhányados negatív: $dz/dr = -\text{tg}(90^\circ - \Phi) = -\text{ctg } \Phi$. Azaz:

$$\begin{aligned} \frac{-br}{a\sqrt{a^2 - r^2}} &= -\frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} \\ \frac{b^2 r^2}{a^4 - a^2 r^2} &= \frac{\cos^2 \Phi}{\sin^2 \Phi} \\ b^2 r^2 \sin^2 \Phi &= a^4 \cos^2 \Phi - a^2 r^2 \cos^2 \Phi \end{aligned}$$

II. A gömb és az ellipszoid paraméterezése

$$r^2(a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi) = a^4 \cos^2 \Phi$$

$$r = \frac{a^2 \cos \Phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}}$$

Így megkaptuk a Φ szélességű parallelkör sugarát. Helyettesítsük be az eredményt az ellipszis egyenletébe, hogy z -t is megkapjuk:

$$\begin{aligned} z &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4 \cos^2 \Phi}{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2 a^2 \cos^2 \Phi + b^2 b^2 \sin^2 \Phi - a^2 b^2 \cos^2 \Phi}{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{b^2 \sin \Phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} \end{aligned}$$

Az ábrán leolvasható, hogy $\operatorname{tg} \Psi = z/r$, tehát

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{b^2 \sin \Phi}{a^2 \cos \Phi} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \Phi$$

Azonban Θ definíció szerint Ψ képe a/b -szeres nyújtás után:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \Psi$$

A két egyenletet egymásba helyettesítve:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \Phi$$

Így bármelyik szélességből a másik kettő kiszámítható, továbbá az északi féltekén belátható a $\Psi \leq \Theta \leq \Phi$ összefüggés.

Harmadik előadás

Bevezetés a gömbi geometriába

III.1. Nemeuklideszi geometriák

A közoktatásban tanult euklideszi geometria jól fedti a sík lapon tapasztalható mértani összefüggéseket, azonban a gyakorlati életben eltéréseket tapasztalhatunk. Ilyen volt például, amikor az első földmérők azt tapasztalták, hogy a terepen mért háromszögek belső szögeinek összege kissé nagyobb, mint 180° . Ennek oka a Föld görbülete.

A görbült terek geometriáit *nemeuklideszi geometriáknak* nevezzük. Három fő típusuk különböztethető meg:

- *Hiperbolikus geometria*: A háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180° , egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több nem metsző egyenes húzható ugyanabban a síkban. Ilyen a BOLYAI-geometria.*
- *Parabolikus geometria*: A háromszögek belső szögeinek összege 180° , egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egyetlen párhuzamos egyenes húzható. Példa az euklideszi geometria.
- *Elliptikus geometria*: A háromszögek belső szögeinek összege nagyobb, mint 180° , bármely két, egy síkban fekvő egyenes metszi egymást. A most tárgyalt gömbi geometria ide tartozik.

A gömbi geometriában a sík szerepét a gömb veszi át. Pontokat a szokott módon jelölünk ki. Az egyenesnek olyan megfelelőt keresünk, amely továbbra is a legrövidebb távolságot jelöli bármely két pontja között: ez tehát a geodéziai vonal. A gömbi geodéziai vonalak olyan körök, amelyek középpontja a gömb középpontjába esik, sugaruk a gömb sugarával egyező.† A gömbi egyenest szokás *főkörnek* is nevezni.

* Az EINSTEIN-féle általános relativitáselméletben nagy szerepet töltenek be az ilyen geometriák.

† Az összefüggések egy része otthoni körülmények között is demonstrálható: Vegyünk egy nagyjából gömb alakú, vastag héjú narancsot, és szúrjanak bele tűket vagy fogpiszkálókat! A tűkre húzott befőttesgumi a narancs geodéziai vonalait mentén feszül ki.

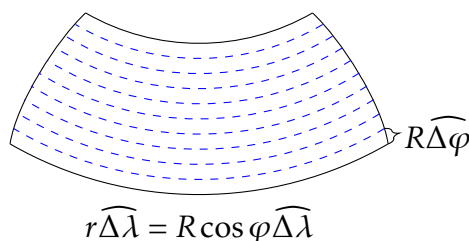
Az egy ponttól azonos távolságra lévő pontok halmazai a gömbön is körök, de ezeket a gömbi egyenesektől megkülönböztetve *kiskörnek* nevezük. Valójában a gömbi egyenesek speciális, lehetséges legnagyobb sugarú gömbi köröknek tekinthetők. Szögek mérése az érintők között a szokott módon történik, míg a távolság jellemzésére a gömb középpontjából a két pontba mutató vektorok hajlásszögét szoktuk használni. A koordinátákat itt földrajzi koordináta-rendszerben értelmezzük.

III.2. Nevezetes felületdarabok

Két koncentrikus kiskör és két, rájuk merőleges főkör által határolt alakzat a *foktrapéz*. Nevével ellentétben nem gömbi sokszög, mert határoló oldalai közül csak kettő gömbi egyenes szakasz, a másik kettő gömbi körív.

A foktrapéz felszíne a következőképp számítható: Bontsuk föl a területét koncentrikus (szélességi) körökkel vékony sávokra! Ekkor minden egyes sáv felszíne jól közelíthető egy téglalappal, melynek területe az alap és a magasság szorzatából adódik (III.1. ábra). Ismert, hogy a szélességi körök sugara $r = R \cos \varphi$ (II.3. fejezet). Az alapot alkotó körív hossza az r sugár és a közbezárt szög (radián!) szorzata. A közbezárt szög azonban a $\lambda_2 - \lambda_1$ hosszúságkülönbség, tehát az alap hossza $R \cos \varphi (\widehat{\lambda}_2 - \widehat{\lambda}_1)$. A kicsi téglalap magassága egy picike körív, amelynek hossza a gömbsugár és a szélesség radiánban mért megváltozásának szorzata ($R \Delta \varphi$). A kis téglalap területe tehát $R^2 (\widehat{\lambda}_2 - \widehat{\lambda}_1) \cos \varphi \Delta \varphi$ -nek adódik. A felosztást minden határon túl finomítva a kicsi téglalapok összegzése egy integrálásba megy át a határoló φ_1 és φ_2 szélességek között:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2 (\widehat{\lambda}_2 - \widehat{\lambda}_1) \cos \varphi \, d\varphi = R^2 (\widehat{\lambda}_2 - \widehat{\lambda}_1) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$



III.1. ábra. Foktrapéz területének felosztása kis téglalapokra

Egy gömbi kiskör által határolt felület a *gömbfüveg*, két koncentrikus gömbi kör között található felület pedig a *gömböv* (III.2. ábra). A gömböv

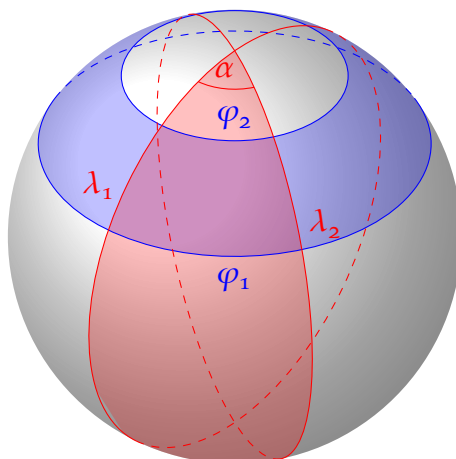
III. Bevezetés a gömbi geometriába

felszíne egyszerűen számítható az előző képletből, ha a határoló hosszúságok helyére $\pm 180^\circ$ -ot helyettesítünk:

$$A_{\odot} = R^2[\pi - (-\pi)](\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2R^2\pi(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

Fenti képletben a határoló szélességek helyébe az északi és déli pólusok szélességét ($\pm 90^\circ$) helyettesítve megkapjuk a teljes gömb felszínét:

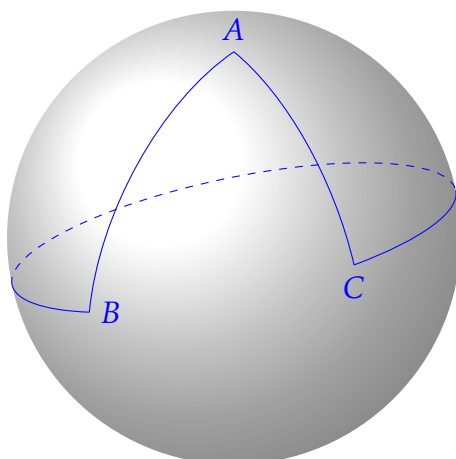
$$A_{\circ} = 2\pi R^2[1 - (-1)] = 4R^2\pi$$



III.2. ábra. Gömböv (kék), gömbkétszög (piros) és foktrapéz (lila)

Mint korábban említettem, a gömbi geometriában bármely két gömbi egyenes (főkör) metszi egymást. Tapasztalható ráadásul, hogy két gömbi egyenesnek nem csak egy, hanem mindjárt két metszéspontja is van, amelyek egymáshoz képest a gömb *ellenlábaspontjai*. Így lehetőség van olyan gömbi sokszög szerkesztésére, amelyet csupán két gömbi szakasz és két csúcs határol. Ez az alakzat a *gömbkétszög* (III.2. ábra). A kétszög felszíne egyenes arányban van a csúcsánál lévő $\widehat{\alpha}$ szöggel, amelyet most az egyszerűség kedvéért radiánban mérünk. Ha a kétszög szöge a teljes szög (2π), akkor lefedjük vele a teljes gömbfelszínt ($4R^2\pi$). Ebből egyszerű aránypár fölállításával megkapjuk a kétszög felszínét:

$$A_0 = 2R^2\widehat{\alpha}$$



III.3. ábra. Nem EULER-féle gömbháromszög

III.3. A gömbháromszög

A síkháromszög megfelelőjét a gömbön *gömbháromszög*nek nevezzük, ezt három gömbi szakasz határolja. Lehetséges olyan gömbháromszöget szerkeszteni, amelyiknek van homorúszöge (III.3. ábra); azonban ezeket nem szoktuk vizsgálni, az összefüggéseket a konvex EULER-féle gömbháromszögekre mondjuk ki.

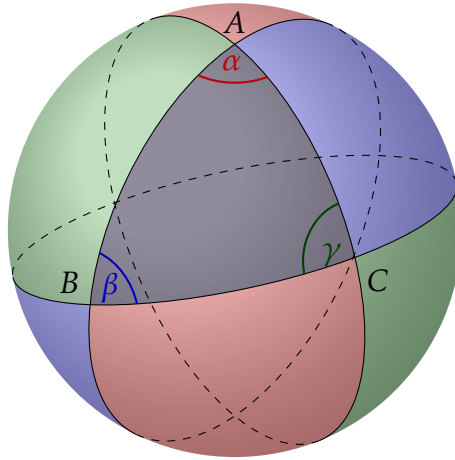
A háromszög területét a kétszög területének képletéből kapjuk meg. Fedjük le a gömböt az A csúcsból kiinduló, két ellenlábassal, α szögű kétszöggel! A két kétszög együttes felszíne $4R^2\widehat{\alpha}$. Ismételjük meg a B és C csúcsokkal és ennek megfelelően két-két β és γ szögű kétszöggel! Most a kétszögek együttes felszíne $4R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma})$. A hat kétszög teljesen lefedi a gömb felszínét ($4R^2\pi$), azonban a kérdéses háromszöget és annak ellenlábassát is háromszor sikerült lefednünk (III.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy a gömbháromszög területét négy ízben is fölöslegesen fedtük le. Ha tehát kivonom a gömb felszínét a hat gömbkétszögből ($4R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)$), akkor a háromszög területének négyszerese marad meg. Ebből már magától értetődik, hogy:

$$A_{\Delta} = R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi)$$

A fenti képletből két igen fontos következtetést vonhatunk le:

- A háromszög belső szögeinek összegéből 180° -ot kivonva megkapott *gömbi szögfölösleg* egyenes arányban áll a gömbháromszög felszínével. Tehát minél nagyobb a háromszög, annál inkább eltérnek a tulajdonságai az euklideszi geometriában megszokottól.
- A háromszög belső szögeinek összege mindig nagyobb, mint 180° , különben a felszín negatív lenne. Ugyanakkor a konvex háromszög belső

III. Bevezetés a gömbi geometriába



III.4. ábra. *EULER-féle gömbháromszög területének kiszámítása két-két piros, kék, illetve zöld kétszöggel*

szögeinek összege bizonyosan kisebb, mint 540° , különben legalább az egyik szögnek konkávnak kellene lennie.

Negyedik előadás

Navigáció a gömbi geometriában

IV.1. Gömbháromszögtan

A gömbháromszögek vizsgálata során észrevehetjük, hogy számos, az euklideszi geometriából ismert összefüggés érvényben maradt. Ilyen például, hogy két oldal összege nagyobb a harmadiknál, a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található vagy hogy három adat egyértelműen meghatározza a háromszöget. Sőt, most már három szög is elég a háromszög meghatározásához, hiszen a belső szögek összege nem egy kötött számérték. Sejtjük tehát, hogy a síkháromszögek ismeretlen adatainak kiszámítására használt szinusz- és koszinusztételeknek vannak megfelelői a gömbi geometriában.

Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben azt feltételezzük, hogy a gömb egységsugarú, így az oldalak és hozzájuk tartozó középponti szögek (radiánban) megegyeznek. Továbbá a térbeli derékszögű koordináta-rendszert úgy forgatjuk el, hogy a z tengely a háromszög egyik csúcsával egybeessen, míg a háromszög egy másik csúcsa az x és z tengelyek által kifeszített síkra essen. Ekkor a csúcspontok derékszögű koordinátái egyszerűen fölírhatók az I.2. fejezetben a térbeli polár- és derékszögű koordináták között kapott képletek segítségével (IV.1. ábra a következő oldalon).

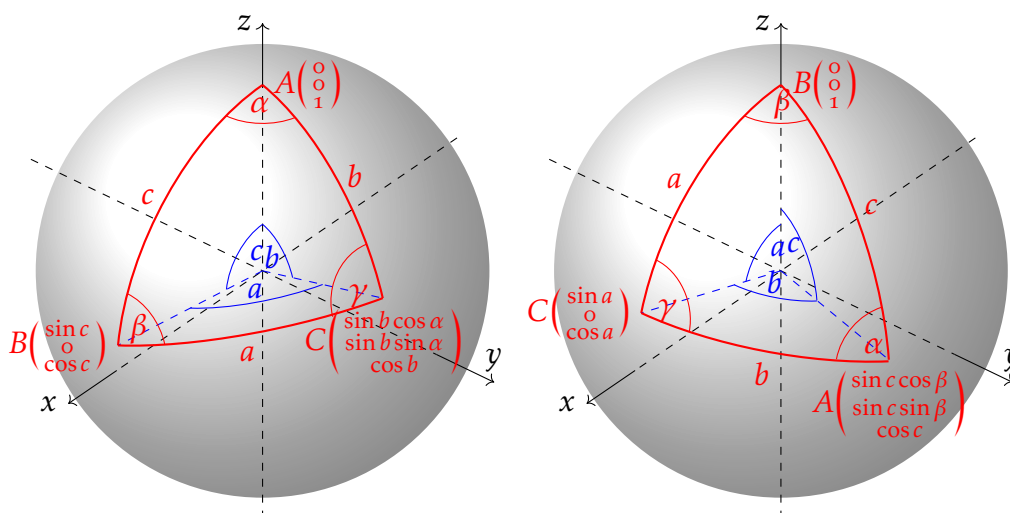
Vizsgáljuk meg az a) esetet, és írjuk föl az origóból kiinduló $\vec{A}; \vec{B}; \vec{C}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát! Ez a három vektorból képzett determináns (I.4. fejezet):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin c & 0 & \cos c \\ \sin b \cos \alpha & \sin b \sin \alpha & \cos b \end{vmatrix} = \sin c \sin b \sin \alpha$$

A b) eseten ugyanez a háromszög látszik, csak a koordinátatengelyeket elforgattuk. Számítsuk ki újra a paralelepipedon térfogatát! Ezúttal a második sor szerint érdemes a determinánst kifejtteni:

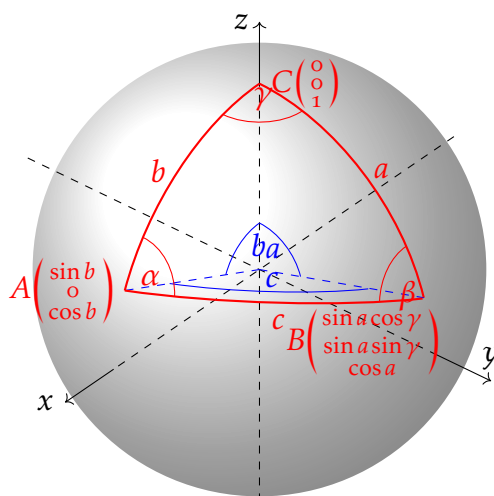
$$\begin{vmatrix} \sin c \cos \beta & \sin c \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{vmatrix} = \sin a \sin c \sin \beta$$

IV. Navigáció a gömbi geometriában



a) A csúcs a z tengelyen, B az xz síkon

b) B csúcs a z tengelyen, C az xz síkon



c) C csúcs a z tengelyen, A az xz síkon

IV.1. ábra. A gömbháromszög csúcsainak derékszögű koordinátái

IV. Navigáció a gömbi geometriában

A paralelepipedon térfogata nem függhet a koordináta-rendszer elforgatásától. Ez azt jelenti, hogy a két előző kifejezés egymással egyenlő kell legyen:

$$\sin c \sin b \sin \alpha = \sin a \sin c \sin \beta$$

$\sin c$ -vel lehet egyszerűsíteni, majd átrendezést követően ezt kapjuk:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

Fenti összefüggés igen hasonló az euklideszi geometriában fölirt szinusz-tételhez, ezért ezt *gömbháromszögtani szinusz-tételnek* hívjuk, és a későbbiekben rendszeresen fogjuk alkalmazni.

Vizsgáljuk meg a c) ábrán lévő elforgatást is! Ezúttal képezzük az origóból kiinduló \vec{A} és \vec{B} vektorok skaláris szorzatát! A skaláris szorzat kiszámítható a vektorok hosszainak és a közbezárt c szög koszinuszának szorzatával. Ez igen egyszerű, hiszen az egységsugarúnak tekintett gömb felszínére mutató \vec{A} és \vec{B} hossza éppen egységnyi. Számítható ugyanakkor a skaláris szorzat a koordináták páronkénti szorzatával is, és akkor is ugyanazt az eredményt kell kapnunk (I.3. fejezet):

$$1 \cdot 1 \cdot \cos c = \sin b \cdot \sin a \cos \gamma + 0 \cdot \sin a \sin \gamma + \cos b \cdot \cos a$$

Átrendezve könnyen megjegyezhető alakra:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

A fent megkapott egyenlet alapvető fontosságú a térképészetben. Neve *gömbháromszögtani oldal-koszinusz-tétel*, a háromszög három oldala és egy szöge között teremt összefüggést, a közoktatásban megismert koszinusz-tételhez hasonló módon.

Mivel a gömbháromszöget három szöge is meghatározhatja, hiányzik egy összefüggés, amelyikkel legalább az egyik oldal hosszát meg tudom mondani a három szög alapján. Ennek semmilyen analógiája sincs az euklideszi geometriában. A hiányzó képlet neve a *gömbháromszögtani szögek-koszinusz-tétel*, amelynek bizonyítása a D. függelékben olvasható:

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

A három összefüggés segítségével most már bármilyen gömbháromszög ismeretlen adatai kiszámíthatók, azonban ehhez néha több lépésre van szükség. E miatt ritka esetekben* jól jön a *második alapforma* is:

$$\sin a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \sin a$$

Mind a négy képletre értelemszerűen elmondható, hogy teljesen mindegy, a háromszög melyik csúcsát jelöljük A -val, B -vel és C -vel mindaddig, amíg a megfelelő a, b, c, α, β és γ jelöléseket is következetesen alkalmazzuk.

* Például főkörök metszéspontjának keresésénél egyszerűbb ezzel számolni.

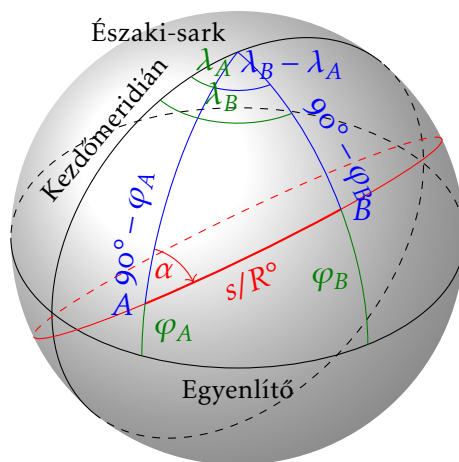
IV.2. Navigáció ortodróma mentén

A gömbháromszögtan jelentőségére egy példát ad a *navigáció* feladata, amelyben két ismert koordinátájú pont között keressük meg az útvonal irányát és hosszát. Az itt levezetett képleteket az óceáni hajózás és a repülés a mai napig alkalmazza. A navigációnak két fajtája alakult ki a történelem során, az *ortodróma* és a *loxodróma* menti navigáció.

A navigációs feladatok megoldása során a földi geodéziai vonalakat *ortodrómának* nevezzük. Kétségtelen előnye, hogy képleteivel garantáltan a legrövidebb útvonalon fogunk a célállomásra jutni. Az ortodróma képleteinek felírásához egy olyan gömbháromszöget fogunk használni, amelynek egyik csúcsa a pólusban van, másik két csúcsa pedig a kiindulási és célállomások.

A IV.2. ábrán látható *A* pontból szeretnénk a *B* pontba eljutni. A kék gömbháromszög északi csúcsában megjelenő szög a hosszúságkülönbség: $\lambda_B - \lambda_A$. A háromszög két oldalát is ismerjük, hiszen ezek a szélességet 90° -ra egészítik ki. Ekkor felírhatjuk az oldal-koszinusztételt a harmadik, kiszámítandó oldalra, amely éppen a szükséges s úthosszhoz tartozó s/R° (fokba váltott) középponti szög. Vegyük figyelembe, hogy $\cos(90^\circ - \delta) = \sin \delta$ és $\sin(90^\circ - \delta) = \cos \delta$!

$$\cos \frac{s^\circ}{R} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A)$$



IV.2. ábra. Ortodróma ívhosszának számítása

Az előző képletben az s/R melletti fokjel arra figyelmeztet, hogy a fokban kapott szöget vissza kell váltani radiánba, és csak utána szabad a Föld sugarával fölszorozni, hogy az s távolságot megkapjuk.

IV. Navigáció a gömbi geometriában

Az ortodróma kezdőirányát, azaz a II.2. fejezetben definiált azimutot kétféleképp lehet kiszámítani. Egyszerűbb a szinusztételt fölírni:

$$\frac{\sin(s/R)^\circ}{\sin(\lambda_B - \lambda_A)} = \frac{\cos \varphi_B}{\sin \alpha}$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A) \cos \varphi_B}{\sin(s/R)^\circ}$$

De az oldal-koszinusztétel is célravezető:

$$\sin \varphi_B = \sin \varphi_A \cos \frac{s^\circ}{R} + \cos \varphi_A \sin \frac{s^\circ}{R} \cos \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi_B - \sin \varphi_A \cos(s/R)^\circ}{\cos \varphi_A \sin(s/R)^\circ}$$

A gyakorlati számításokhoz mindkét képletre szükség van, mert sem a szinusz, sem a koszinusz nem jellemzi egyértelműen az azimutot: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ és $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$. Így mindkét esetben két megoldásunk van: szinusztétel esetén α és $180^\circ - \alpha$; oldal-koszinusztétel esetén α és $360^\circ - \alpha$. A két gyök közül az egyik hamis, ezért át kell gondolni, melyik megoldást fogadjuk el. Megjegyzendő, hogy negatív azimutot nem szoktunk használni, ezért ha az arkuszszinusz eredménye negatív, az értékhez vagy 360° -ot kell hozzáadni, vagy ki kell vonni 180° -ból. A helyes döntést rajz segítségével tudjuk meghozni, vagy mindkét képlettel kiszámoljuk az azimutra a két megoldást, mert ilyen esetben csak egy közös gyök szokott lenni.

Mindezekon felül a szinusz a derékszög körüli szögeknél nagy szögkülönbségre is csak kicsit változik, míg a koszinuszra ugyanez az egyenesszög körüli szögekre mondható el. Kelet–nyugati irányú utakhoz tehát inkább a koszinusztétel, míg észak–déli irányú utakhoz inkább a szinusztétel szolgáltat nagyobb numerikus stabilitást.

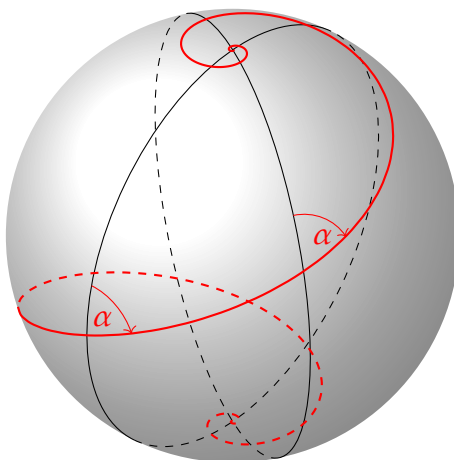
IV.3. Navigáció loxodróma mentén

Vegyünk olyan különleges spirális forgásfelületi vonalakat, amelyeknek azimutja állandó! A két pontot összekötő ilyen vonalak általában hosszabbak a geodéziai vonalnál.* Ezeket a vonalakat a Földön *loxodrómának* hívjuk. Látszik, hogy egy forgásfelület meridiánjai nem csak ortodrómák, hanem a 0° -os azimuthhoz tartozó loxodrómák is. A parallelkörök bár általában nem

* Kivéve a hengeren, ahol a geodéziai vonalak és az ilyen spirálok minden esetben egybeesnek.

ortodrómák, a 90° -os azimuthhoz tartozó loxodrómák. Az Egyenlítő kivétel, mert az egyszerre ortodróma és loxodróma.

A loxodróma navigációs jelentőségét az adja, hogy haladási irányunknak az iránytűhöz képest állandó szöget kell tartani, ami könnyedén megvalósítható. Paradox módon ehhez folyamatosan kanyarodni kell a járművel (IV.3. ábra).^{*} Jellemzően alig hosszabb az ortodrómánál, és a GPS előtti időkben az ortodróma változó azimuthját nehéz lett volna tartani, így régebben közkedvelt volt a hajósok között. A mai légi navigáció már a takarékosabb, ortodróma menti navigációra állt át.[†]



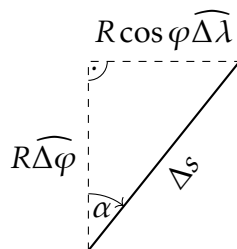
IV.3. ábra. Egy loxodróma nyomvonala

Rajzoljuk föl az α azimuthhoz tartozó loxodróma egy elemi kis, Δs hosszú ívdarabját! Pici ívdarabhoz tartozó paralelkör és meridián menti ívhoszszakat a megfelelő szélességi és hosszúsági kör sugarából és a középponti szögből számíthatjuk. A IV.4. ábrán jól látszik, hogy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{R \cos \varphi \widehat{\Delta \lambda}}{R \widehat{\Delta \varphi}} \\ \frac{\widehat{\Delta \varphi} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} &= \widehat{\Delta \lambda} \end{aligned}$$

^{*} A loxodrómák általában spirális vonalak. A pólusba való beérkezés előtt azt végtelen sokszor, egyre szűkülő ívben járnak körbe, ennek ellenére a hosszuk mégis véges.

[†] Ez csak részben igaz: az ortodróma mentén kiszámolnak érintendő pontokat, azonban két számított töréspont között ma is loxodróma mentén zajlik a forgalom. Ezt a technikát korlátozott mértékben a GPS előtt is használták.



IV.4. ábra. A loxodróma elemi kis ívdarabja

Integráljuk mindkét oldalt az A kezdőpont és a B végpont között, ismervé, hogy α konstans:

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} d\varphi = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda$$

$$\operatorname{tg} \alpha \left[\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right] = \widehat{\lambda}_B - \widehat{\lambda}_A$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\widehat{\lambda}_B - \widehat{\lambda}_A}{\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_B/2) - \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_A/2)}$$

Megtaláltuk tehát az A és B pont közötti loxodróma azimutját. Fontos azonban, hogy ezúttal is két megoldásunk van: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$. Hogy kell-e 180° -ot hozzáadnunk, azt a józan ész alapján kell eldöntenünk. A számológép arkusztangens függvénye negatív értéket is adhat, ilyenkor 180 vagy 360 fokot még hozzá kell adnunk (szintén józan ész alapján döntve, hogy melyiket).

Fontos odafigyelni, hogy a számlálóban a hosszúságkülönbséget mindig szigorúan radiánban számoljuk! A hosszúságkülönbségnek mindig a $\pm 180^\circ$ ($\pm \pi$) tartományon belül kell maradnia! A 180° -os meridiánt keresztező utaknál előforduló nagyobb hosszúságkülönbségeket 360° (2π) hozzáadásával vagy kivonásával kell a tartományon belülré kényszeríteni!

Az előbbi számításban az $1/\cos \varphi$ primitív függvénye levezetés nélkül lett behelyettesítve, ezért ezt ellenőrizzük visszaderiválással!

$$\left[\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]' = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

IV. Navigáció a gömbi geometriában

Megjegyzendő, hogy egyes függvénytáblázatok az $1/\cos \varphi$ primitív függvényének nem $\ln \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi)$ -t, hanem egy látszólag teljesen eltérő kifejezést adnak meg, de egyszerű átalakítással azt is megkapjuk:

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) &= \ln \sqrt{\frac{2 \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(90^\circ + \varphi)}{1 + \cos(90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{arth} \sin \varphi \end{aligned}$$

Úgyhogy a képlet ilyen alakban is fölírható:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\widehat{\lambda}_B - \widehat{\lambda}_A}{\operatorname{arth} \sin \varphi_B - \operatorname{arth} \sin \varphi_A}$$

Még mindig nem tudjuk, mennyit kell utaznunk. A távolság kiszámításához írjuk föl az ábra alapján α koszinuszát:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{R \widehat{\Delta \varphi}}{\Delta s} \\ \Delta s &= \frac{R \widehat{\Delta \varphi}}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Integráljuk megint mindkét oldalt, α továbbra is konstans, továbbá a bal oldalon az integrációs konstans elhagyható, mert a kiindulás pillanatában s értelemszerűen zérus:

$$\begin{aligned} \int ds &= \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{R}{\cos \alpha} d\varphi \\ s &= R \frac{\widehat{\varphi}_B - \widehat{\varphi}_A}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Ha a távolságra negatív érték jön ki, vizsgáljuk meg, hogy nem cseréltük föl menet közben a kezdő- és végpontot, vagy nem feledkeztünk-e meg a féltekék előjeleiről és a $\widehat{\lambda}_B - \widehat{\lambda}_A$ hosszúságkülönbség $\pm\pi$ tartományon belül tartásáról 2π hozzáadásával vagy kivonásával. Ha egyik sem, akkor az azimut képletéből kijött két megoldás közül a rosszat választottuk. Ilyenkor α -hoz adjunk hozzá 180° -ot, s előjelét pedig fordítsuk meg!

IV. Navigáció a gömbi geometriában

Mind a loxodróma, mind az ortodróma képleteinél igen fontos a helyes előjelek használata. Képleteink akkor adnak helyes eredményt, ha az északi szélességet és a keleti hosszúságot pozitív, a déli szélességet és a nyugati hosszúságot negatív előjellel helyettesítjük be. Ennek elmulasztása az Egyenlítőt vagy a kezdőmeridiánt keresztező utaknál komoly hibához vezet! Ez a megjegyzés az eddig tárgyalt képletek közül a foktrapéz felszínére is igaz.

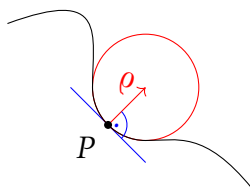
Ötödik előadás

Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

V.1. Meridiángörbületi sugár

Az eddig tárgyalt gömbi geometria egy konstans görbületű felületen alapult. Ez nem mondható el a forgási ellipszoidról, melynek görbülete helyről-helyre változik. Az ilyen felületek belső méretviszonyaival a *differenciálgeometria* tudományága foglalkozik. Először definiáljunk néhány szükséges fogalmat!

Egy sima síkgörbe adott pontban vett *simulóköre*nek nevezzük azt a kört, amelyik a kérdéses pontban érinti a görbét, a pontban vett érintője egybeesik a görbe érintőjével (így középpontja a görbe normálisán található) és második deriváltja megegyezik a görbe adott pontra vonatkozó második deriváltjával. Utóbbi miatt a pont környezetében a görbe és a simulókör érintője közel van egymáshoz (V.1. ábra), ezért ha a ponthoz igen közel merőlegeseket bocsátunk egy síkgörbére, ezek metszéspontja a simulókör középpontjához tart. A görbe adott pontra vonatkozó *görbületi sugara* a pontban vett simulókör sugara.



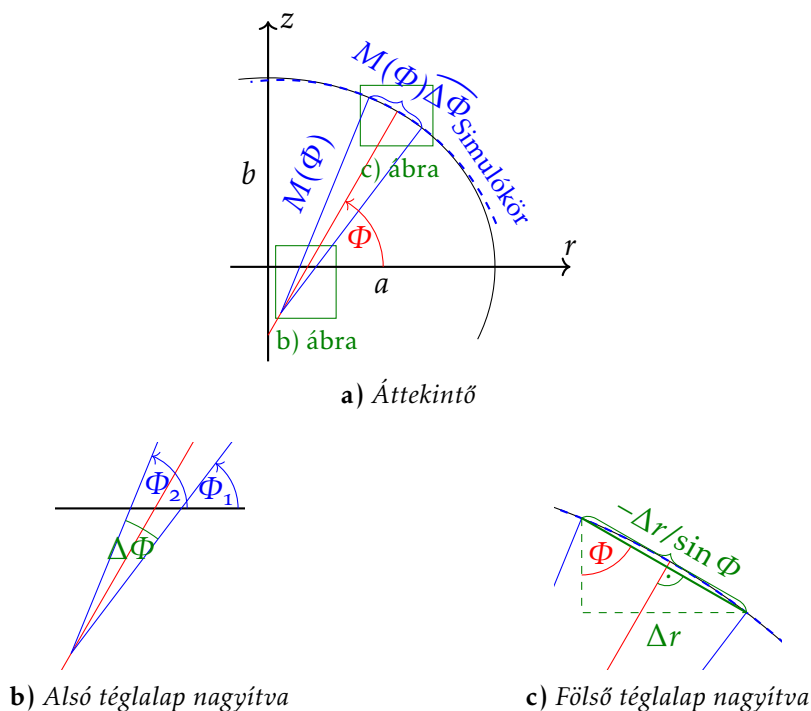
V.1. ábra. Egy síkgörbe P pontban vett ρ görbületi sugara

Egy felület *metszetének* hívjuk azt a görbét, amelyet a felület és egy tetszőleges sík közös részeként kapunk. A forgási ellipszoid minden metszete ellipszis. A felület egy adott pontra vonatkozó *normálmetszete* az a metszet, amelynek síkja tartalmazza a pontot és a felület normálisát (helyi függőleges). Minden más, az adott pontot tartalmazó metszet neve *ferdemetszet*. A

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

felület adott pontra és irányra vonatkozó *görbületi sugara* az adott ponton átmenő és az adott irány síkjába eső normálmetszet görbületi sugara. Mi a meridiánt tartalmazó és az arra merőleges normálmetszeteket vizsgáljuk.*

A *meridiángörbületi sugár* a forgási ellipszoid meridián irányában vett görbületi sugara, jele $M(\Phi)$ (V.2. ábra). Tekintsük a meridiánon a Φ szélességű pontot, és bocsássunk merőlegeseket hozzá közel a $\Phi_1 = \Phi - \Delta\Phi/2$ és $\Phi_2 = \Phi + \Delta\Phi/2$ szélességű pontokról, amint $\Delta\Phi \rightarrow 0$! A simulókör Φ_1 és Φ_2 szélességek közötti ívéhez tartozó középponti szög számításához tekintsük a b) ábrarészen látható kék szárú háromszöget! Ennek jobb felső szöge Φ_1 , bal felső szöge $180^\circ - \Phi_2$. A belső szögek összege 180° , így a harmadik szög szükségképpen $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$. Ezt az $M(\Phi)$ sugárral szorozva megkapjuk a simulókör kis ívhosszát a két pont között, ami $M(\Phi)\widehat{\Delta\Phi}$ -nek adódik.



V.2. ábra. A meridiángörbületi sugár számítása

* Annak oka, hogy miért elégséges e két irány görbületét vizsgálni, mélyen a differenciálgeometria alapjaiban gyökerezik: GAUSS német matematikus kimutatta, hogy ha egy felület adott pontján ismerjük a görbületek szélsőértékeit, akkor minden irányban kiszámítható egy sima elemi felület görbülete. Bizonyította még, hogy a görbületek minimum- és maximumhelyei mindig egymásra merőleges irányokban lépnek föl, sőt forgásfelületeken az egyik szélsőérték iránya mindig a meridián síkjában van.

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

A meridiánív Φ_1 és Φ_2 szélességű pontjain áthaladó szelő határhelyzetben az érintő, ezért a Φ szélességű pontban vett normálisra merőleges. A c) részen található derékszögű háromszög felső szögének másik szára merőleges az Egyenlítő síkjára, ezért ez a szög Φ -vel egyenlő. Ebből a két szélső pont között húzott húr hossza $-\Delta r/\sin \Phi$, ahol a Δr vízszintes befogó a paralelkör sugarának kicsi megváltozása a $\Delta \Phi$ szélességkülönbségre vonatkoztatva (a képletben a negatív előjel célja, hogy a húr hossza pozitív legyen: az északi féltekén Δr , míg a déli féltekén $\sin \Phi$ negatív). Ha $\Delta \Phi \rightarrow 0$, a két szélső pont között a simuló kör és a húr mentén mért távolság megegyezik:

$$\lim_{\Delta \Phi \rightarrow 0} M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi} = \lim_{\Delta \Phi \rightarrow 0} \frac{-\Delta r}{\sin \Phi}$$

Emlékezzünk vissza, hogy a paralelkör r sugarát már egyszer kiszámoltuk a II.4. fejezetben!

$$\begin{aligned} r &= \frac{a^2 \cos \Phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{a \cos \Phi}{\sqrt{\cos^2 \Phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \Phi}} = \\ &= \frac{a \cos \Phi}{\sqrt{1 - \left(\sin^2 \Phi - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \Phi\right)}} = \frac{a \cos \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \end{aligned}$$

Az első egyenletből $M(\Phi)$ kifejezhető, fölhasználva, hogy $\Delta r/\Delta \Phi$ határértéke éppen a differenciálhányados:

$$\begin{aligned} M(\Phi) &= \lim_{\Delta \Phi \rightarrow 0} \frac{-\Delta r}{\widehat{\Delta \Phi} \sin \Phi} = \frac{-1}{\sin \Phi} \frac{dr}{d\Phi} = \\ &= \frac{-1}{\sin \Phi} \frac{-a \sin \Phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi} - a \cos \Phi \frac{-2e^2 \sin \Phi \cos \Phi}{2\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} = \\ &= a \frac{1 - e^2 \sin^2 \Phi - e^2 \cos^2 \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \end{aligned}$$

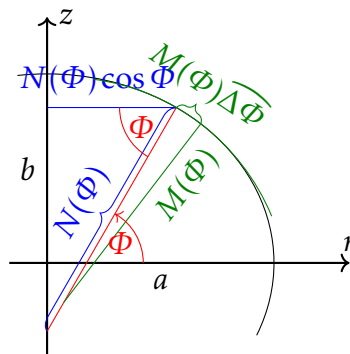
Most számítsuk ki a meridián ívhosszát is a Φ_1 és Φ_2 szélességek között! Ehhez főlosztjuk az ellipszoidot picike ívdarabokra, amelyeket kis körívvel közelítünk. Az előbbi levezetésben a kis ívhosszra $\Delta s = M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi}$ -t

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

kaptunk (V.3. ábra). A felosztást minden határon túl finomítva az összegzés integrálásba megy át:

$$s = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} M(\Phi) d\Phi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi$$

Fenti integrandus primitív függvénye nem írható fel szokásos matematikai függvények segítségével, mert ez egy *elliptikus integrál**. Megoldása numerikus közelítéssel vagy táblázatok segítségével történhet. A modern térinformatikai szoftverek jellemzően FOURIER-sorfejtéssel szokták közelíteni az értéket.



V.3. ábra. A forgási ellipszoid görbületi sugarai

V.2. Harántgörbületi sugár

A meridiánra merőleges normálmetszet görbületi sugara a *harántgörbületi* vagy *normálgörbületi sugár*, jele $N(\Phi)$. Kiszámítása előtt végezzünk el egy gondolatkísérletet egy tetszőleges forgásfelületen! Válasszunk ki két pontot szimmetrikusan a vizsgált pontunk meridiánra merőleges normálmetszetén. Mindkét pontból bocsássunk le merőlegest a felületre! Ekkor a szimmetria miatt a két egyenes metszéspontjának a forgástengelyre kell esnie. Most közelítsük egyszerre és a szimmetriát megőrizve a két pontot a vizsgált pont felé! Ekkor a két pontban lévő normálisok egyre inkább a normálmetszet síkjába fognak esni, miközben metszéspontjuk továbbra is a forgástengelyen marad. Ebből következik, hogy a harántgörbületi

* Az elliptikus integrálok nevüket onnan kapták, hogy először az ellipszis kerületének kiszámításánál derült fény a létezésükre. Azóta kiderült, hogy számtalan tudományterületen előfordulnak. Segítségükkel több szögtartó vetület képlete is elegánsan levezethető.

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

sugár kezdőpontja szintén a forgástengelyen található. Ekkor az V.3. ábráról leolvasható, hogy a paralelkör r sugara $r = N(\Phi) \cos \Phi$ *. Az r korábbi képletéből:

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$$

A forgási ellipszoid r sugarú paralelköreinek a Λ_1 és Λ_2 hosszúságok közé eső ívhossza a sugár és a közbezárt szög szorzataként írható fel:

$$s = N(\Phi) \cos \Phi (\widehat{\Lambda_2} - \widehat{\Lambda_1})$$

V.3. Szélesség, hosszúság és magasság a térben

A műholdas helymeghatározás a műhold és a műszer közötti távolságot méri a jel beérkezési ideje alapján. Minden egyes műholdtól az ismert távolság egy gömbfelületet jelöl ki, amelyek közös metszéspontjában tartózkodunk. A metszéspont koordinátái egy $x; y; z$ térbeli derékszögű koordináta-rendszerben számíthatók ki. Hogyan kapunk ebből földrajzi koordinátákat?

Kevésbé izgalmas, azonban hasonlóan hasznos az a kérdés, hogy egy ismert pont térbeli derékszögű koordinátáit megkapjuk annak földrajzi koordinátáiból. Ilyenre akkor lehet szükségünk, ha különböző méretű és elhelyezésű ellipszoidokra vonatkoztatott pontokat szeretnénk egységes koordináta-rendszerben kezelni. Könnyen belátható, hogy a két probléma egymás megfordítása.

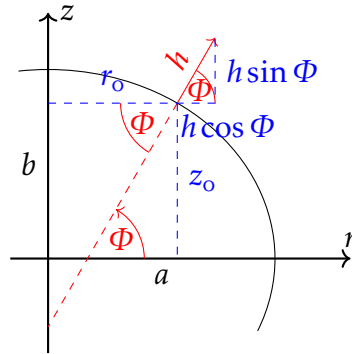
Először a második problémával foglalkozva rajzoljuk fel az ellipszoidnak azt a meridiánját az $r; z$ síkon, amelyiken tartózkodunk. Itt az r vízszintes koordináta az ellipszoid felszínén éppen a paralelkörök sugarával fog megegyezni, z pedig egybeesik a térbeli rendszer z tengelyével. Mi a Φ szélességen és h magasságban vagyunk az ellipszoid fölött. Kis magasságot feltételezve a magasságot az ellipszoidra merőlegesen, egyenes vonalban mérjük. Ekkor az V.4. ábráról leolvasható, hogy:

$$r = r_0 + h \cos \Phi$$

$$z = z_0 + h \sin \Phi$$

* Itt valójában a differenciálgeometriában jól ismert *MEUSNIER-tétel* egy speciális esetét láttuk be. Ez a tétel nem csak forgásfelületen igaz, és bármilyen, egymást a vizsgált pontban érintő normálmetszet és ferdemetszet görbületi sugaráról belátja, hogy arányuk a metszetek síkjai között mért hajlásszögek koszinusza.

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon



V.4. ábra. Pont koordinátái az ellipszoid felett h magasságban

A parallelkör r_0 sugarát már ismerjük ($N(\Phi) \cos \Phi$), sőt z_0 képletét is már kiszámoltuk a II.4. fejezetben, amelyet most átalakítunk:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{b^2 \sin \Phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{a^2 (1 - e^2) \sin \Phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}} = \\ &= \frac{a(1 - e^2) \sin \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} = (1 - e^2) N(\Phi) \sin \Phi \end{aligned}$$

A földrajzi hosszúság definíciójából (II.3. fejezet) tudjuk, hogy $x = r \cos \Lambda$ és $y = r \sin \Lambda$. Ennek ismeretében az előbbi összefüggések fölhasználásával kiszámítható, hogy:

$$\begin{aligned} x &= [N(\Phi) + h] \cos \Phi \cos \Lambda \\ y &= [N(\Phi) + h] \cos \Phi \sin \Lambda \\ z &= [(1 - e^2)N(\Phi) + h] \sin \Phi \end{aligned}$$

Most már tudjuk, hogy egy adott földrajzi koordinátájú pont hol helyezkedik el a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. A másik problémánál (azaz a GPS-es navigációnál) ennek megfordítása szükséges. A második egyenletet az elsővel osztva ezt kapjuk:

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{y}{x}$$

Tehát a hosszúságot már ismerjük. Az első és a második egyenlet négyzetösszege:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= [N(\Phi) + h]^2 \cos^2 \Phi \\ h &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - N(\Phi) \end{aligned}$$

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

Ezt helyettesítsük be z képletébe:

$$z = \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - e^2 N(\Phi) \right] \sin \Phi$$

Fenti képletet átalakítva egy $\text{tg } \Phi$ -ben negyedfokú egyenletet kapunk. A negyedfokú egyenlet megoldható pl. a FERRARI-képlettel, ennek menete az E. függelékben olvasható. Ezt követően Φ ismeretében h már megkapható a kettővel ezelőtt fölirt képlettel. Fontos megjegyezni, hogy h itt nem a tengerszint, hanem az ellipszoid feletti magasságot jelöli, amelyet a GPS-készülékünk még korrigál a geoidunduláció értékével.

A zárt alakú átszámítási képletek levezetése BORKOWSKI nevéhez fűződik. Bár a modern műholdas helymeghatározásban inkább a zárt alakú képleteket alkalmazzák, az egyszerűbb számítás érdekében megadjuk BOWRING képletét is, amely egy tetszőleges alkalommal pontosítható közelítést ad Φ -re. A rekurzív képlet:

$$\text{tg } \Phi'' = \frac{z + (e')^2 b \sin^3 \Theta'}{\sqrt{x^2 + y^2} - e^2 a \cos^3 \Theta'}$$

Ahol a javított Φ -ből átszámított $\text{tg } \Theta = b/a \text{tg } \Phi$ redukált szélességet (II.4. fejezet) helyettesítjük vissza a fenti képletbe, hogy újabb javított Φ -t kapjunk. Θ javasolt kezdőértéke a $h \approx 0$ feltételből:

$$\text{tg } \Theta \approx \frac{az}{b\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Általában már egy iteráció is meglepően jó pontosságot biztosít.

V.4. Ellipszoidi foktrapéz felszíne

A görbületi sugarak másik lehetséges hasznosítása az ellipszoidi foktrapéz felszínének kiszámítása. Emlékezzünk vissza, hogy gömbön ezt a III.1. ábrán szemléltetett kis téglalapokra osztással lehetett kiszámítani. A különbség csak annyi, hogy most az alapi paralellévek hossza

V. Görbületi sugár és ívhossz az ellipszoidon

$N(\Phi) \cos \Phi (\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1)$, míg a picike meridiánív hossza az ellipszoidon $M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi}$. A kis téglalapok összegzése ugyanúgy integrálásba megy át:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} M(\Phi) N(\Phi) \cos \Phi (\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1) d\Phi = \\ &= a^2(1 - e^2) (\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1) \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\cos \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2} d\Phi \end{aligned}$$

Az integrandus primitív függvénye:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2} d\Phi &= \\ &= \int \frac{\cos \Phi + e^2 \sin^2 \Phi \cos \Phi}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2} + \frac{\cos \Phi (1 - e^2 \sin^2 \Phi)}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2} d\Phi = \\ &= \int \frac{\cos \Phi + e^2 \sin^2 \Phi \cos \Phi}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2} + \frac{e \cos \Phi}{2e(1 - e^2 \sin^2 \Phi)} d\Phi = \\ &= \frac{\sin \Phi}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi)} + \frac{1}{2e} \operatorname{arth}(e \sin \Phi) + c \end{aligned}$$

Az utolsó lépés visszaderiválással ellenőrizhető. Tudva, hogy az area tangens hiperbolikuszfölírrható $1/2 \ln(1+x)/(1-x)$ alakban, visszahelyettesíthetjük a fönti képletbe, megkapva a foktrapéz felszínének képletét:

$$\begin{aligned} A &= a^2(1 - e^2) (\widehat{\Lambda}_2 - \widehat{\Lambda}_1) \left[\frac{\sin \Phi_2}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e \sin \Phi_2}{1 - e \sin \Phi_2} - \frac{\sin \Phi_1}{2(1 - e^2 \sin^2 \Phi_1)} - \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e \sin \Phi_1}{1 - e \sin \Phi_1} \right] \end{aligned}$$

A hosszúságok helyére $\pm 180^\circ$ -ot, a szélességekbe $\pm 90^\circ$ -ot helyettesítve kapjuk meg a teljes ellipszoid felszínét:

$$A_{\text{O}} = 4a^2 \pi (1 - e^2) \left[\frac{1}{2(1 - e^2)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right] = 2a^2 \pi \left(1 + \frac{1 - e^2}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

Hatodik előadás

Geodéziai alapfeladatok

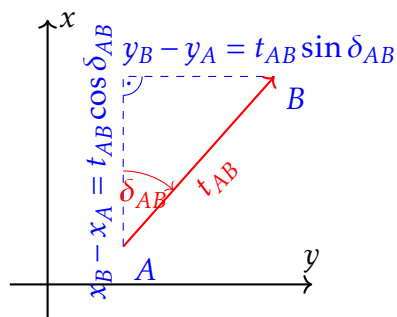
VI.1. Geodéziai alapfeladatok síkon

A geodéziai műszerekkel elsősorban távolság és szög (irány) mérésére van lehetőség, míg nekünk a mért pont koordinátáira van szükségünk. Ezért igen gyakran fordul elő, hogy egy pontból mért azimut és távolság alapján meghatározzuk egy ismeretlen pont koordinátáit. Ezt *első* vagy *direkt geodéziai alapfeladat*nak, esetleg *főfeladat*nak nevezzük. A műszerek tájékozásához és az északi irány kitűzéséhez alkalmazzuk ennek megfordítását, amikor koordinátákból számítunk távolságot és azimutot. Ez a *második* vagy *inverz geodéziai alapfeladat*.

Méréseinket leggyakrabban annyira kis távolságokon belül végezzük, hogy a Föld görbületét elhanyagolhatjuk, és a szokásos euklideszi síkgeometria képleteivel is számolhatunk. Vizsgáljuk meg a VI.1. ábrát! A direkt geodéziai alapfeladat képletei egyszerűen leolvashatók (a távolságot most t , az azimutot δ jelöli):

$$x_B = x_A + t_{AB} \cos \delta_{AB}$$

$$y_B = y_A + t_{AB} \sin \delta_{AB}$$



VI.1. ábra. Geodéziai alapfeladatok síkon

Az inverz főfeladat képletei a PITAGORASZ-tételből adódnak:

$$t_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Az azimutra két megoldásunk van, mert a tangens periódusa 180° . Így lehet, hogy a kapott eredményhez 180° -ot (vagy 360° -ot) hozzá kell adni. A két megoldás közötti diszkusszióra találták ki az $\operatorname{arctg}2$ függvényt. A pontos szintaxis minden programnyelven eltér, általában a törtvonal helyére vesszőt vagy pontosvesszőt kell írni: $\operatorname{atan}(\Delta y/\Delta x)$ helyett $\operatorname{atan}2(\Delta y, \Delta x)$, de például Excelben a nevező és a számláló sorrendje megfordul. Mindig nézzünk utána az adott programozási nyelv útmutatójában! Vigyázzunk, hogy ez is adhat negatív eredményt, ilyenkor 360° -ot kell hozzáadni. Nem helyes minden esetben az arctg helyett $\operatorname{arctg}2$ -t alkalmazni! Ez kifejezetten azimutszámításra való, ezen kívül a földrajzi hosszúság tangensét tartalmazó képleteknél jöhet szóba az alkalmazása.

VI.2. Geodéziai alapfeladatok gömbön

A gömbi geodéziai feladatok számításához lapozzunk vissza a [IV.2.](#) ábrához! Az első alapfeladatnál φ_A, λ_A, s és α ismert, kérdés a B pont helyzete. Írjuk föl az oldal-koszinusztételt az ismeretlen φ_B -re!

$$\sin \varphi_B = \sin \varphi_A \cos \frac{s^\circ}{R} + \cos \varphi_A \sin \frac{s^\circ}{R} \cos \alpha$$

A fokjel arra figyelmeztet, hogy a képletben s/R mindenképp radiánban van, ha a számológép fokba van állítva, akkor vissza kell váltani radiánból fokba! Most már fölírhatjuk a szinusztételt az ismeretlen hosszúságkülönbségre!

$$\frac{\cos \varphi_B}{\sin \alpha} = \frac{\sin(s/R)^\circ}{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \arcsin \frac{\sin \alpha \sin(s/R)^\circ}{\cos \varphi_B}$$

Megjegyzendő, hogy az arkuszszinusz kétértékűsége nem probléma, mert $\pm 90^\circ$ -nál nagyobb hosszúságkülönbségek a geodéziai gyakorlatban rendkívül ritkák.

A második főfeladat, a távolság és azimut számítása gömbön már terítékre került a [IV.2.](#) fejezetben, így azt nem tárgyaljuk újra. A számítógépes

kiszámítást illetően annyi javaslatot tennék hozzá, hogy az azimut megkapható a második alapformából is. Ez a kifejezés alkalmas az \arctg^2 függvény alkalmazására, így a képletek kétértékűsége föloldható:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_A &= \sin \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin(\lambda_B - \lambda_A) \operatorname{ctg} \alpha \\ \frac{\operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{ctg} \alpha} &= \sin(\lambda_B - \lambda_A) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)} \end{aligned}$$

VI.3. Földrajzi segédkoordináták

A gömbi geodéziai alapfeladat speciális alkalmazása a *fokhálózat-elforgatás*, amely azt jelenti, hogy nem a Föld forgástengelyét, hanem egy önkényesen választott másik tengelyt tekintünk forgástengelynek. Az így kijelölt pólusok neve *segédpólus*, a rá vonatkozó koordinátákat pedig *földrajzi segéd-koordinátarendszer* néven jelöljük. A két paraméterét (*segédszélesség* és *segédhosszúság*) csillaggal különböztetjük meg a földrajzi koordinátáktól. Az elforgatott rendszer elhelyezését kétféleképp szokás megadni: vagy a *segédpólusnak* vagy pedig a *kezdő-segédmeridián* és a *segédegyenlítő* metszéspontjának földrajzi koordinátáit adjuk meg. A kezdő-segédmeridiánt úgy definiáljuk, hogy az mindig áthalad az Északi-sarkon.

Az első esetben a segédpólus $\varphi_0; \lambda_0$ koordinátáit adjuk meg. A VI.2. ábrán látható, hogy a pont, a pólus és a segédpólus egy gömbháromszöget határoz meg, amelyre fölírható az oldal-koszinusztétel (ez lényegében a második geodéziai főfeladat):

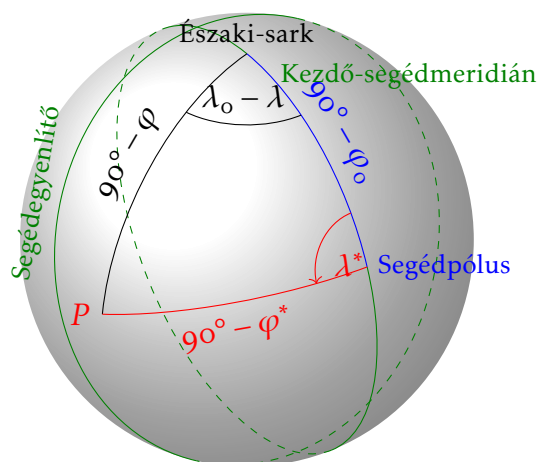
$$\sin \varphi^* = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

A hiányzó λ^* most már számítható a szinusztételből:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varphi^*}{-\sin(\lambda - \lambda_0)} &= \frac{\cos \varphi}{\sin \lambda^*} \\ \sin \lambda^* &= -\frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cos \varphi^*} \end{aligned}$$

Vagy akár az oldal-koszinusztételből is:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi^* \sin \varphi_0 + \cos \varphi^* \cos \varphi_0 \cos \lambda^* \\ \cos \lambda^* &= \frac{\sin \varphi - \sin \varphi^* \sin \varphi_0}{\cos \varphi^* \cos \varphi_0} \end{aligned}$$



VI.2. ábra. Földrajzi segédkoordináták a segédpólus ismeretében

Önmagában sem a szinuszos, sem a koszinuszos képlet nem elegendő, hiszen mindkettő két megoldást ad. A két képlet előnyeit úgy egyesíthetjük, ha elosztjuk egymással, majd behelyettesítjük $\sin \varphi^*$ képletét:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda^* &= \frac{-\frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\cos \varphi^*}}{\frac{\sin \varphi - \sin \varphi^* \sin \varphi_0}{\cos \varphi^* \cos \varphi_0}} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi_0) - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \cos \varphi_0}{\sin \varphi - \sin \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi_0 - \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0} = \\ &= \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0)}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 - \cos(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0} \end{aligned}$$

Az így kapott képlet alkalmas az arctg² függvény használatára, így λ^* egyértelműen meghatározható.

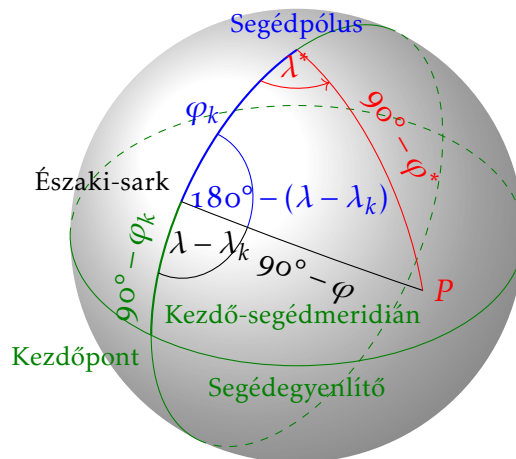
A visszafelé számítás (ez lényegében az első geodéziai főfeladat) képleteit ugyanígy tudjuk levezetni:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi^* \sin \varphi_0 + \cos \varphi^* \cos \varphi_0 \cos \lambda^* \\ \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) &= \frac{-\sin \lambda^*}{\operatorname{tg} \varphi^* \cos \varphi_0 - \cos \lambda^* \sin \varphi_0} \end{aligned}$$

A másik lehetőség, amikor a segédegnyelítő és a kezdő-ségédmeridián metszéspontját ismerjük. Tekintsük meg a VI.3. ábrát! A figyelmes szemlélő

észreveheti, hogy a gömbháromszögnek csak két adata változott meg az előzőhöz képest: $90^\circ - \varphi_0$ helyett a megfelelő oldalhossz φ_k , tehát $\sin \varphi_0$ helyett $\cos \varphi_k$ írandó és fordítva $\cos \varphi_0$ helyett $\sin \varphi_k$. A másik különbség, hogy a pólusban lévő szög $\lambda_0 - \lambda$ helyett $180^\circ + \lambda_k - \lambda$. Utóbbi miatt a képletekbe $\cos(\lambda - \lambda_0)$ helyére $-\cos(\lambda - \lambda_k)$ -t, míg $-\sin(\lambda - \lambda_0)$ helyére $\sin(\lambda - \lambda_k)$ -t írunk (természetesen a képletek az előzőekhez hasonlóan újra levezetve is ugyanezt adják):

$$\begin{aligned}\sin \varphi^* &= \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k) \\ \operatorname{tg} \lambda^* &= \frac{\sin(\lambda - \lambda_k)}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_k + \cos(\lambda - \lambda_k) \cos \varphi_k} \\ \sin \varphi &= \sin \varphi^* \cos \varphi_k + \cos \varphi^* \sin \varphi_k \cos \lambda^* \\ \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_k) &= \frac{\sin \lambda^*}{\operatorname{tg} \varphi^* \sin \varphi_k - \cos \lambda^* \cos \varphi_k}\end{aligned}$$



VI.3. ábra. A segédegyenlítő és a kezdő-segédmeridián metszéspontja ismert

VI.4. Geodéziai alapfeladatok ellipszoidon

Vegyünk gondolatban egy pontszerű kiskocsit egy forgásfelületén és lökjük meg egységnyi kezdősebességgel! A kiskocsira csak a forgásfelület nehézségi ereje hat, a súrlódástól eltekintünk. A nehézségi erő mindenütt merőleges a potenciálfelületnek tekintett forgásfelületre, tehát a kiskocsi pályájára is. Így a kiskocsin a nehézségi erő nem végez munkát, sebessége mindvégig egységnyi marad. Mivel oldalirányú erő sem hat rá, ezért pályája a felületen belül egyenesnek tekinthető, azaz a kiskocsi a forgásfelület egy geodéziai vonala mentén halad.

VI. Geodéziai alapfeladatok

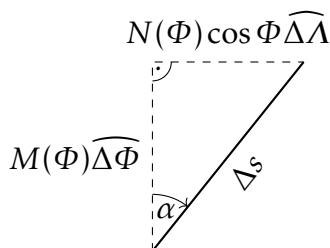
Legyen a kiskocsi pályájának pillanatnyi azimutja α , ekkor a sebességének paralelkör irányú komponense $\sin \alpha$. Ez egyúttal a kiskocsinak a felület forgástengelyére vonatkozó kerületi sebessége is. A nehézségi erő iránya (a forgásfelület normálisa) a szimmetria miatt metszi a forgástengelyt, tehát a forgástengelyre vonatkozóan nincs forgatónyomatéka. Az ilyenkor érvényes perdületmegmaradás törvénye miatt a geodéziai vonal mentén haladó kiskocsi kerületi sebességének és a paralelkör r sugarának (azaz a forgástengelytől vett távolságnak) a szorzata állandó kell legyen (*CLAIRAUT-tétel*)*:

$$r \sin \alpha = \text{const.}$$

Első ránézésre nem sokat tudtunk meg a forgási ellipszoid geodéziai vonalairól, pedig pusztán ennyi információ elég lesz a pálya meghatározásához. Kezdjük a direkt geodéziai alapfeladattal! A VI.4. ábráról leolvasható, hogy:

$$\cos \alpha = \frac{M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi}}{\Delta s}$$

$$\sin \alpha = \frac{N(\Phi) \cos \Phi \widehat{\Delta \Lambda}}{\Delta s}$$



VI.4. ábra. Az ellipszoidi geodéziai vonal elemi kis ívdarabja

Rendezzük át, tudva, hogy a végtelenül kis távolságok hányadosa határhelyzetben a differenciálhányados:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)}$$

$$\frac{d\Lambda}{ds} = \frac{\sin \alpha}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

* Valójában megint a differenciálgeometria mélységeibe kerültünk. Az itt megkapott összefüggés szigorú bizonyításához variációszámítás és bonyolult differenciálegyenletek megoldása szükséges. A CLAIRAUT-tétel csak forgásfelületeken érvényes.

Szükségünk lesz a következő deriváltra is:

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{ds} &= \frac{dN(\Phi) \cos \Phi}{d\Phi} \frac{d\Phi}{ds} = \left[\frac{dN(\Phi)}{d\Phi} \cos \Phi + N(\Phi) \frac{d \cos \Phi}{d\Phi} \right] \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= \left[\frac{ae^2 \sin \Phi \cos \Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \cos \Phi - N(\Phi) \sin \Phi \right] \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= M(\Phi) \frac{e^2 \sin \Phi \cos^2 \Phi}{1 - e^2} \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} - N(\Phi) \sin \Phi \frac{\cos \alpha}{M(\Phi)} = \\
 &= \frac{e^2 \cos^2 \Phi \sin \Phi \cos \alpha}{1 - e^2} - \frac{a(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^{3/2} \sin \Phi \cos \alpha}{a(1 - e^2) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} = \\
 &= \frac{e^2(1 - \sin^2 \Phi) \sin \Phi \cos \alpha - (1 - e^2 \sin^2 \Phi) \sin \Phi \cos \alpha}{1 - e^2} = \\
 &= \frac{e^2 - e^2 \sin^2 \Phi - 1 + e^2 \sin^2 \Phi}{1 - e^2} \sin \Phi \cos \alpha = -\sin \Phi \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Ezt követően deriváljuk a CLAIRAUT-tételt is!

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{ds} \sin \alpha + r \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} &= 0 \\
 N(\Phi) \cos \Phi \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} &= \sin \Phi \cos \alpha \sin \alpha \\
 \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\operatorname{tg} \Phi \sin \alpha}{N(\Phi)}
 \end{aligned}$$

Egy akárhányszor differenciálható f függvény az $x = a$ pont környezetében tetszőleges pontossággal közelíthető az ő TAYLOR-sorával, azaz:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

Természetesen pontos egyenlőség csak akkor állna fenn, ha mind a végtelen sok tagot összeadnánk, azonban a sor gyorsan konvergál, így a sor végén álló kicsiny tagokat figyelmen kívül hagyhatjuk.* Most nézzük, miért

* A módszer minden sima függvénnyel működik, és bonyolult függvényeket hatékonyan közelíthetünk vele. A zsebszámológép is például TAYLOR-sorral számítja a szögfüggvényeket.

is volt erre szükség! Írjuk föl Φ_B -t és Λ_B -t, mint a Φ_A, Λ_A ponttól mért s távolság függvényét! Φ -t és Λ -t fejtsük TAYLOR-sorba $s = 0$ körül!

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \Phi_A + \frac{s}{1!} \frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2\Phi}{ds^2} \Big|_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3\Phi}{ds^3} \Big|_{s=0} + \dots \\ \Lambda_B &= \Lambda_A + \frac{s}{1!} \frac{d\Lambda}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2\Lambda}{ds^2} \Big|_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3\Lambda}{ds^3} \Big|_{s=0} + \dots\end{aligned}$$

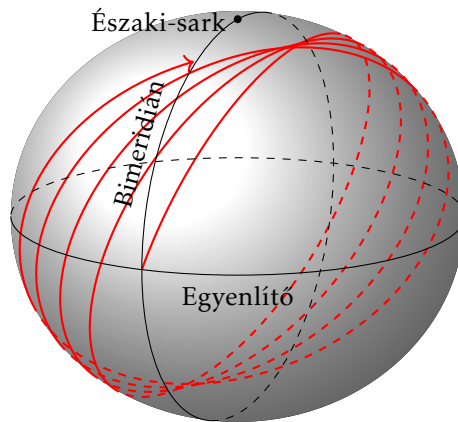
Az első deriváltakat ismerjük, a magasabb rendű deriváltak az első deriváltak további deriválásából értelemszerűen adódnak. Ha megnézzük Φ és Λ deriváltjainak képletét, látszik, hogy azok α -n keresztül is függenek s -től, de ez sem probléma, hiszen α deriváltját is kiszámoltuk, láncszabállyal be tudjuk helyettesíteni.

Ez a módszer LEGENDRE nevéhez fűződik. Bár levezetése tanulságos és viszonylag egyszerűen érthető, a gyakorlatban nem igazán alkalmazható. Ennek oka, hogy igen lassan konvergál, a geodéziai pontossághoz a hatodik deriváltakra is szükség van, pedig ezek a magasabb rendű deriváltak rendkívül nehezen számíthatók. E mellett az s -ben magas fokszámú tagok az inverz alapfeladat megoldását még jobban megnehezítik: Ekkor s az ismeretlen, és megoldóképlet csak s negyedik hatványát tartalmazó egyenletre van.

A geodéták jellemzően GAUSS módszerét használják, amely a két pont közti felezőpont körül fejti TAYLOR-sorba a függvényt, sokkal gyorsabb konvergenciát eredményezve (elegendő a második derivált figyelembe vétele). A módszer hátránya, hogy a felezőpont koordinátáit nem ismerjük, egy első tipp után fokozatos javításokkal juthatunk jobb eredményre.

Az előbb tárgyalt hatványsoros módszerek mind azt feltételezték, hogy s viszonylag rövid (< 1000 km). Hosszabb távolságoknál egzakt megoldásokra van szükség. Népszerűnek számít BESSEL megoldása, amely a problémát az egyszerűen megoldható gömbi geodéziai főfeladatokra vezeti vissza, majd a gömb és az ellipszoid közötti eltérést elliptikus integrálokkal korrigálja. BESSEL képleteit KARNEY alakította számítógépes futtatásra alkalmassá. A korszerű nyílt forrású térinformatikai szoftverek szinte kivétel nélkül az ő képleteit alkalmazzák, eredményük igen megbízhatónak számít, szemben a kissé régebbi csomagok VINCENTY-féle képleteivel. Utóbbiak csak $10\,000$ km-nél rövidebb távolságokon konvergálnak.

A hosszú geodéziai vonalak kiszámítása lehetőséget teremt ezek szemléltetésére is. A VI.5. ábrán jól látszik, hogy a gömbtől eltérően az ellipszoidi geodéziai vonalak nem térnek vissza önmagukba, hanem hátráló mozgást végeznek. Ez alól csak a kör alakú Egyenlítő és az ellipszis alakú bimeridiánok jelentenek kivételt.

VI.5. ábra. Geodéziai vonalak futása ellipszoidon ($f = 1/10$)

A kapott eredményeket a műholdas távérzékelésben hasznosítják. A műholdak röppályája geodéziai vonal (emlékezzünk a kiskocsira). Az erőforráskutató műholdak *napszinkron pályán* keringenek, azaz az azonos megvilágítás érdekében mindig azonos helyi időben haladnak át a területek fölött. Mivel a Föld kering a Nap körül, a műhold pályasíkját folyamatosan változtatni kell, hogy az a Nappal állandó szöget zárjon be (azaz a műhold pályasíkjá éppén három hónap alatt fordul 90° -ot). Gömb alakú Földön ez kivitelezhetetlen lenne, mert a gömbi főkörök síkgörbék, a műholdak nem változtatnák pályasíkjukat. Az ellipszoidon azonban csak a meridiánok és az Egyenlítő síkgörbék, a többi geodéziai vonal pályasíkjá hátrál. Ha a műhold pályája éppén csak egy kicsi szöget ($\sim 1^\circ$) zár be a meridiánokkal, akkor elérhető, hogy a geodéziai vonal kicsi hátrálása pont a nekünk szükséges mértékben módosítsa a műhold keringési síkját. Az előbbi, nem túl barátságos számítások nélkül nem lenne LANDSAT, SPOT és sok más hasonló, sikeres projekt.

VI.5. A Föld alakját helyettesítő felületek

Milyen alakúnak tekintjük a Földet számításaink során? Láttuk hogy a síkbeli számításaink meglehetősen egyszerűek, a gömbi képletek levezetése is még egészen követhető, a forgási ellipszoid képletei azonban már kifejezetten bonyolultak. Képzhetjük, mennyire nehezen kezelhető akkor egy olyan szabálytalan felület, mint a geoid. Érthető, hogy bár a Föld geoid alakú, ezt csak a magasságmérésnél vesszük figyelembe, vízszintes számítások során egyszerűsítünk. Négy esetet különböztetünk meg a terület leghosszabb kiterjedése szerint:

VI. Geodéziai alapfeladatok

- Térképezésünk kis területen (a kiterjedés < 4 km) zajlik: a Föld görbülete elhanyagolható hibát okoz, a Földet síknak tekintve alkalmazhatjuk az egyszerű képleteket.
- Hosszabb távolságok (< 13 km) mérésénél a Föld görbülete állandónak tekinthető, a felszínhez jól illeszkedő *simulógömböt* választunk.
- Még nagyobb terület esetén már szükséges forgási ellipszoidon számolni.
- Ha a területünk igen nagy (> 3500 km), és nem felsőgeodéziai pontosságra törekszünk, hanem egyszerűen kis méretarányú térképet rajzolnánk, akkor az ellipszoid és gömb közötti eltérés (~ 20 km) a kis méretarányú térkép rajzi pontossága alatt marad. Ebben az esetben szintén alkalmazhatunk gömböt, azonban ennek sugara, a *közepes föld-sugár* jelentősen eltérhet a korábban ismertetett simulógömb sugarától!

Hetedik előadás

Átszámítás különböző alapfelületek között

VII.1. A vetület fogalma

Vegyünk két felületet paraméteres koordinátákkal! Vegyünk egy differenciálható $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt is, amely az első felület bármely koordinátpárjához a másik felület egy koordinátpárját rendeli! Ekkor a függvényt *vetületnek*, az első felületet a vetület *alapfelületének*, a másodikat (amely a gyakorlatban a legtöbbször sík) pedig a leképezés *képfelületének* nevezzük. Fontos tehát, hogy egy vetülettel leképezett koordináta-rendszer esetén ne csak a vetületet, hanem annak alapfelületét is megadjuk, különben nem tudjuk, milyen felület koordinátáit kapjuk vissza, ha a leképezést megfordítjuk. Ezért ez a rész az alapfelület megadásának problémáival foglalkozik.

VII.2. Dátumtranszformációk

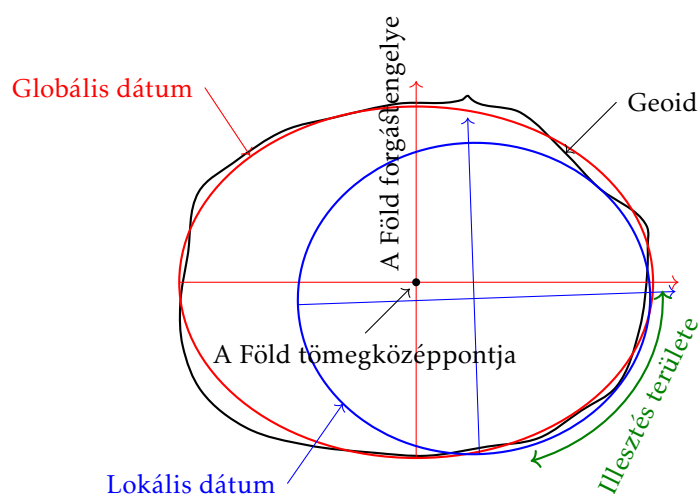
Az előzőekben elemeztük, hogy a legnagyobb pontosság kívánalma esetén is forgási ellipszoiddal közelítjük a Föld geoid alakját. Ez a közelítés két okból nem egyértelmű. Egyfelől a különböző helyen végzett mérések alapján a Föld nagyfőlengelyére és lapultságára más és más adatok jönnek ki. Másfelől nem biztos, hogy a jól illeszkedő forgási ellipszoid középpontja éppen a geoid tömegközéppontjába esik, sőt a forgástengelye is elfordulhat a Föld valós forgástengelyéhez képest. A forgási ellipszoid méreteit és elhelyezési adatait együttesen *geodéziai dátumnak* nevezzük. A különböző dátumokon értelmezett azonos földrajzi koordináták között akár ~ 100 m nagyságrendű eltérés is adódhat, ezért mindig fontos utánajárni, hogy adataink melyik dátumra vonatkoznak!

A régebbi forgási ellipszoidok (pl. az 1810-es ZÁCH–ORIANI) nagyfőlengelye és lapultsága is kisebb volt a ma használtaknál. Ennek oka, hogy az első mérések csak Európára korlátozódtak, és a geoid alakja itt ezeknek a méreteknél felel meg. A későbbi ellipszoidok (pl. az 1841-ben alkotott BESSEL) már több helyen végzett mérések átlagértékeit vették alapul, így közel

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

állnak a ma ismert földalakhoz. A mai ellipszoidok (pl. WGS84) műholdas méréseken alapulnak.

Űrgeodéziai (műholdas) felmérések esetén a Föld tömegközéppontja és forgástengelye jól mérhető, ezért az ellipszoidot úgy helyezzük el, hogy a középpontja és a forgástengelye a földi adatokkal egybeessen. Az így nyert dátumot *globális dátumnak* nevezzük, ez mindenütt egészen jól illeszkedik a Föld geoid alakjához (VII.1. ábra). Példa a WGS84, amely az azonos nevű WGS84 ellipszoidon alapszik.



VII.1. ábra. A geoid és a dátumok kapcsolata

A földi felméréseknél kizárólag a helyi mérések adataira tudunk támaszkodni, így az ellipszoidot lokálisan illesztjük a területünkhöz (*lokális dátum*). Az így elhelyezett ellipszoid középpontja eltolódik (~ 100 m) a Föld tömegközéppontjához képest, forgástengelye pedig elfordul ($\sim 1''$) a Föld forgástengelyétől, azonban területünkön jól illeszkedik a geoidra.* Fontos, hogy ilyenkor az ellipszoid paramétereit (nagyfőeltengely, lapultság) nem változtatjuk a folyamat során, az valamelyik korábbi, nemzetközi mérésen alapuló ellipszoid lesz. Magyarországon területén a HD72 dátumot

* Ez alatt valójában nem azt kell érteni, hogy az ellipszoid és a geoid közötti magasságkülönbség (*geoidunduláció*) minimális, hanem hogy a geoidon csillagászati módszerrel mért helyi függőleges iránya és az ellipszoid normálisa közötti eltérés (*függővonal-elhajlás*) az illesztéshez használt *LAPLACE-pontokon* a lehető legkisebb. Ezáltal a csillagokhoz képest mért és az ellipszoidon számított geodéziai szélességek közötti ellentmondás is minimálissá válik.

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

használjuk, amely az IUGG67 ellipszoid nagyfő tengelyén és lapultságán alapszik.*

A különböző dátumok közti átszámításnál 7 paramétert tudunk figyelembe venni: a Δx ; Δy és Δz eltolást a tér három irányában, az ε_x ; ε_y és ε_z elforgatást a három tengely körül és egy σ nagyítást.† Mivel az ε szögek kicsik, éljünk a $\sin \varepsilon \approx \widehat{\varepsilon}$; $\cos \varepsilon \approx 1$ és $\varepsilon_i \varepsilon_j \approx 0$ közelítéssel! Ekkor az I.5. fejezetből ismerős forgatómátrixok szorzata így alakul:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ 0 & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\widehat{\varepsilon}_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \widehat{\varepsilon}_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & 0 \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ 0 & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & -\widehat{\varepsilon}_y \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & 0 \\ \widehat{\varepsilon}_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & -\widehat{\varepsilon}_y \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ \widehat{\varepsilon}_y & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ezt követően az átméretezés egy skalárral való szorzást, míg az eltolás a megfelelő vektor hozzáadását jelenti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + (1 + \sigma) \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\varepsilon}_z & -\widehat{\varepsilon}_y \\ -\widehat{\varepsilon}_z & 1 & \widehat{\varepsilon}_x \\ \widehat{\varepsilon}_y & -\widehat{\varepsilon}_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Fönti átalakítás neve *BURŠA–WOLF-transzformáció*. Látható, hogy az átalakításhoz nem a földrajzi, hanem a térbeli derékszögű koordináták szükségesek, az oda-vissza számítás képletei az V.3. fejezetben olvashatók. Az átszámítás pontossága jellemzően méter körüli. Fontos figyelni, hogy bizonyos térinformatikai csomagok az elforgatások irányára vonatkozó előjelkonvenciónk fordítottját alkalmazzák, ezért ha a transzformáció a szakirodalomban megadott paraméterekkel egy programban nem működik, mindig próbáljuk meg forgatások előjelét ellentettjére változtatni!

Előfordul, hogy az egyszerűség érdekében csak az eltolást vesszük figyelembe, a hiba ekkor jellemzően öt méter körüli. Ezt *MOLOGYENSKIJ-transzformáció*nak nevezzük, csak három paramétere van. Bár a MOLOGYENSKIJ-transzformációnak fölírható olyan alakja is, amely közvetlen kapcsolatot

* A lokális dátumok realizációja olyan megjelölt földi pontokon nyugszik, amelyek szélességét és hosszúságát papíron rögzítjük, így a lokális dátum a kőzetlemezek vándorlásával az időben lassan elfordulhat eredeti helyzetéhez képest.

† A háromszöghálózatok mérési hibáinak kiegyenlítése miatt a lokális dátumok és a globális dátumok méretviszonyai egymásnak ellentmondanak, ezt az átszámításnál figyelembe vesszük, azonban a szögek mérési pontossága megbízhatóbb, ezért az átszámításnál ügyelünk ezek megőrzésére. Ezért választottunk hasonlósági transzformációt.

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

biztosít a két dátum földrajzi koordinátái között (*áthidaló transzformáció*), itt most az egyszerűség kedvéért a térbeli derékszögű alak szerepel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

VII.3. A Föld sugara

Most a gömb alapfelülettel foglalkozunk. A gömb alakúnak tekintett Föld sugarát többféleképp származtathatjuk a forgási ellipszoid adataiból. Ebben a fejezetben a megadott értékek a WGS84 ellipszoidot közelítő gömbök sugarai, azaz a számítások során $a = 6\,378\,137$ m; $f = 1/298,257\,223\,563$. A kisméretarányú térképezésben leggyakrabban alkalmazott a *volumetrikus földszugár*, amely ugyanakkora térfogatú gömböt jelöl ki, mint a forgási ellipszoid. Értéke kevesebb, mint egy méterrel nagyobb a tanult 6371 km-nél. Számításához írjuk föl a gömb és az ellipszoid térfogatát:

$$\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4a^2b\pi}{3}$$
$$R = \sqrt[3]{a^2b} = a\sqrt[3]{1-e^2}$$

A *területtartó földszugár*hoz tartozó gömbfelszín az ellipszoid felszínével egyezik meg. Értéke 6371,007 km. Számításánál emlékezzünk, hogy a gömb felszínét a III.2. fejezetben, míg a forgási ellipszoidét az V.4. fejezetben kaptuk meg:

$$4R^2\pi = 2a^2\pi \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right)$$
$$R = \sqrt{\frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right)}$$

Hasonlóképp a meridiánok hossza marad változatlan, ha a *meridiánban hossztartó gömbsugarat* választjuk. Ez 6367,449 km, számítása:

$$2R\pi = 2 \int_{-90^\circ}^{90^\circ} M(\Phi) d\Phi$$

Helyi térképezéshez alkalmazzuk a *simulógömb* vagy *Gauss-gömb* sugarát, amely helyről-helyre változik. Megválasztásánál arra törekszünk, hogy a

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

vizsgált szélességi kör környezetében a lehető legkisebb torzulás lépjen föl. Értéke a pontban vett görbületi sugarak mértani közepe: *

$$R = \sqrt{M(\Phi)N(\Phi)}$$

VII.4. Gömbvetületek

Az ellipszoid és a gömb közti leképezést *gömbvetületnek* nevezzük. A gömbvetületekkel szemben elvárjuk, hogy a parallelkörök képei parallelkörök, míg a meridiánok képei meridiánok legyenek. Elvárjuk továbbá, hogy a parallelkörök képeit a meridiánok egyenközűen osszák föl:

$$\begin{aligned}\varphi &= f(\Phi) \\ \lambda &= n\Lambda\end{aligned}$$

A gömbvetületek hossztorzulásait meridián (h) és parallelkör (k) irányban vizsgáljuk. A *hossztorzulás* definíció szerint a végtelenül kis leképezett ívhossz és az eredeti kicsi alapfelületi ívhossz aránya, hely- és irányfüggő mennyiség. Látszik, hogy a torzulásmentességet a $h = k = 1$ jelzi.† A hossztorzulások vizsgálata segít a teljes vetület torzulásainak vizsgálatában:

Ha a vetület az alapfelületi területnagyságokat torzulásmentesen képezi le a képfelületre, a vetület *területtartó*. Ha egy téglalapot egyik irányban valahányszorosára megnyújtok, rá merőlegesen éppen annak reciprokával kell zsugorítanom, hogy ugyanakkora maradjon a területe: $hk = 1$. Ezzel szemben a vetület *szögtartó*, ha minden megfelelő alapfelületi és képfelületi szög megegyezik. Ez akkor történhet meg, ha a leképezés lokálisan minden pontban hasonlóság, azaz a két merőleges irányban ugyanannyiszorosára nagyítom az alakzatokat: $h = k$.

A távolságtartó szót a vetülettanban egyáltalán nem használjuk, de amúgy sem létezik olyan vetület, amely hossztartó volna. Minden más vetület tehát *általános torzulású*. Lehetnek ugyanakkor a vetületeknek *hossztartó*

* A simulógömbnek nem véletlenül választjuk ezt a sugarat, az okok ismét a differenciálgeometriában gyökereznek: GAUSS bizonyította be, hogy két görbült felület között akkor és csak akkor létesíthető torzulásmentes leképezés, ha az első felület bármely pontjában a görbületek szélsőértékeinek (forgásfelületen a meridián irányú és arra merőleges görbületeknek) szorzata (*szorzatgörbület*) a másik felület megfelelő pontjában vett szorzatgörbülettel megegyezik. E miatt lehet a kúppalástot síkba fejteni, de nem lehetséges a gömböt torzulásmentesen síkba vetíteni, sem az ellipszoidot gömbre. Azonban a simulógömb egy kiválasztott parallelkör mentén teljesíti ezt a feltételt, ami könnyen belátható ha a definiáló egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emeljük.

† Ebben a jegyzetben feltételezzük, hogy a fokhálózati vonalak képei a képfelületen is merőlegesek egymásra. A nem merőleges fokhálózatos vetületek esetén az itt tárgyalt összefüggések jóval bonyolultabbá válnak. Erről mesterszakon fogunk tanulni.

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

vonalai, sőt lehet végtelen sok vonal (pl. az összes meridián) hossztartó, de a vetület akkor sem válik minden pontban és irányban hossztartóvá!

Számítsuk ki a gömbvetület hossztorzulásait!

$$h = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta \Phi \rightarrow 0} \frac{R \widehat{\Delta \varphi}}{M(\Phi) \widehat{\Delta \Phi}} = \frac{R}{M(\Phi)} \frac{d\varphi}{d\Phi}$$

$$k = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \Lambda \rightarrow 0} \frac{R \cos \varphi \widehat{\Delta \lambda}}{N(\Phi) \cos \Phi \widehat{\Delta \Lambda}} = \frac{R n \cos \varphi}{N(\Phi) \cos \Phi}$$

A legegyszerűbb gömbvetület a Google Earth gömbmodelljének vetülete:

$$\varphi = \Phi$$

$$\lambda = \Lambda$$

Látható, hogy a vetület minden előzetes elvárásunknak megfelel. A képfelület sugara a Föld *egyenlítői sugara* (6378,137 km). A leképezés általános torzulású, azaz $h \neq k$ és $hk \neq 1$.

Készítsünk területtartó gömbvetületet! Tudjuk, hogy $hk = 1$.

$$\frac{R}{M(\Phi)} \frac{d\varphi}{d\Phi} \frac{R n \cos \varphi}{N(\Phi) \cos \Phi} = 1$$

$$\cos \varphi d\varphi = \frac{M(\Phi) N(\Phi) \cos \Phi}{R^2 n} d\Phi$$

$$\int \cos \varphi d\varphi = \frac{a^2(1-e^2)}{R^2 n} \int \frac{\cos \Phi}{(1-e^2 \sin^2 \Phi)^2} d\Phi$$

$$\sin \varphi = \frac{a^2(1-e^2)}{R^2 n} \left[\frac{\sin \Phi}{2(1-e^2 \sin^2 \Phi)} + \frac{1}{4e} \ln \frac{1+e \sin \Phi}{1-e \sin \Phi} \right] + \kappa$$

Emlékezzünk vissza, hogy a jobb oldalon álló bonyolult integrált már megkaptuk az V.4. fejezetben, ezt tudtuk most behelyettesíteni. κ integrációs konstans, tetszőleges értéket fölvehet. Általában $n = 1$ és $\kappa = 0$ értéket szoktunk választani. Figyeljünk oda, hogy a vetületet a területtartó gömbsugárral van értelme alkalmazni!

Készítsünk meridiánban hossztartó gömbvetületet is ($h = 1$)!

$$\frac{R}{M(\Phi)} \frac{d\varphi}{d\Phi} = 1$$

$$d\varphi = \frac{M(\Phi)}{R} d\Phi$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \int M(\Phi) d\Phi + \kappa$$

Ezt a vetületet is $n = 1$; $\kappa = 0$ értékekkel szoktunk alkalmazni, azonban most a meridiánban hossztartó gömbsugarat érdemes R helyére írni.

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

Már csak a szögtartó változat ($h = k$) kiszámítása maradt hátra:

$$\begin{aligned}\frac{R}{M(\Phi)} \frac{d\varphi}{d\Phi} &= \frac{Rn \cos \varphi}{N(\Phi) \cos \Phi} \\ \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi &= \frac{nM(\Phi)}{N(\Phi) \cos \Phi} d\Phi \\ \int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi &= n \int \frac{1 - e^2}{\cos \Phi (1 - e^2 \sin^2 \Phi)} d\Phi\end{aligned}$$

A bal oldali integrál már ismert a IV.3. fejezet óta. A jobb oldalt át kell alakítani:

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - e^2}{\cos \Phi (1 - e^2 \sin^2 \Phi)} d\Phi &= \int \frac{1 - e^2 \sin^2 \Phi - e^2 \cos^2 \Phi}{\cos \Phi (1 - e^2 \sin^2 \Phi)} d\Phi = \\ &= \int \frac{1}{\cos \Phi} - \frac{e^2 \cos \Phi}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} d\Phi = \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) - e \operatorname{arth}(e \sin \Phi) + \ln \kappa\end{aligned}$$

Az utolsó lépés ismét ellenőrizhető visszaderiválással, az integrációs konstánst ezúttal $\ln \kappa$ alakban írtuk föl. Visszahelyettesítve az előző egyenletbe:

$$\begin{aligned}\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) &= n \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) - \frac{ne}{2} \ln \frac{1 + e \sin \Phi}{1 - e \sin \Phi} + \ln \kappa \\ \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) &= \kappa \operatorname{tg}^n\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi}\right)^{ne/2} \\ \varphi &= 2 \operatorname{arctg} \left[\kappa \operatorname{tg}^n\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi}\right)^{ne/2} \right] - 90^\circ\end{aligned}$$

Φ nem fejezhető ki az egyenletből, fokozatos közelítéssel azonban megkapható:

$$\Phi'' = 2 \operatorname{arctg} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\kappa \left(\frac{1 - e \sin \Phi'}{1 + e \sin \Phi'}\right)^{ne/2}}} - 90^\circ$$

Először a $\Phi \approx \varphi$ közelítéssel élünk, majd a fönti képlettel újabb és újabb javított értéket kapunk. Általában négy-öt közelítés elég szokott lenni, az eljárás igen gyorsan konvergál. Emlékezzünk, hogy továbbra is érvényes a $\lambda = n\Lambda$ képlet! A gömb sugara a szögtartást nem befolyásolja. Kis méretarányban tetszőleges értéket adhatunk neki, és a $\kappa = 1$; $n = 1$ értékeket szoktuk választani.

Nagy méretarányban a GAUSS-féle igen kis torzulású szögtartó gömbvetületet választjuk, amely egy önkényesen választott Φ_n paralelkört torzulásmentesnek jelöl ki, továbbá a paralelkör környezetében minimálisra csökkenti

VII. Átszámítás különböző alapfelületek között

a torzulásokat (azaz a hossztorzulás logaritmusának első két deriváltja ezen a szélességi körön zérus). A levezetést mellőzve a választott gömbsugár a simulógömb sugara, n és a hossztartó paralelkör φ_n gömbi szélességének számítása:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{\operatorname{tg} \Phi_n}{\sqrt{1 + (e')^2 \cos^2 \Phi_n}} \\ R &= \sqrt{M(\Phi_n)N(\Phi_n)} \\ n &= \frac{\sin \Phi_n}{\sin \varphi_n}\end{aligned}$$

Ezt követően a leképezés egyenleteibe Φ_n -t és φ_n -t visszahelyettesítve a hiányzó κ optimális értékét is megkapjuk. Előfordul, hogy ennél a vetületnél a gömbi hossztartó szélességet adjuk meg, de a fenti képletekből ekkor is számíthatók a konstansok. A vetület igen kis torzulású: Magyarországra alkalmazva a hossztorzulás egytől vett eltérése az 1 : 4 000 000 értéket sem éri el; az ellipszoidi és gömbi geodéziai vonalak eltérése miatti azimutkorrekció 50 km távolságon is figyelmen kívül hagyható ($< 0,008''$).

Nyolcadik előadás

Valódi síkvetületek

VIII.1. A vetületek osztályozása

Ettől a ponttól kezdve kizárólag *sík* képfelületű vetületekkel foglalkozunk. A vetületek többféleképp sorolhatók osztályokba. Az egyik lehetőséget, azaz a *torzulási jellemzők szerinti* osztályozást már tanultuk: a vetület lehet területtartó, szögtartó és általános torzulású. Egy másik csoportosítás a *fokhálózat képe szerint* történik. Ebben *valódi vetület*nek nevezzük azokat a leképezéseket, amelyekben

- A paralelkörök és a meridiánok egymást mindenütt merőlegesen metszik;
- A paralelkörök képei koncentrikus körök, körívek vagy párhuzamos egyenesek;
- A meridiánok képei olyan párhuzamos vagy egy pontba tartó egyenesek, amelyek a paralelköröket egyenközűen osztják föl.

Képzetes vetület minden olyan vetület, amelyben a fönti tulajdonságok közül legalább egy nem teljesül. Az osztályozást a paralelkörök képei alapján tovább finomítjuk:

- A *síkvetületek*ben a szélességi körök teljes körökként jelennek meg.
- A *kúpvetületek*ben képeik körívek lesznek.
- A *hengervetületek*ben pedig párhuzamos egyenesek.

Mind a valódi, mind a képzetes vetületek között találunk sík-, kúp- és hengervetületeket, sőt a képzetes vetületek között olyan is található, amelyik egyik csoportba sem illik. Mi csak valódi vetületekkel fogunk foglalkozni.

A vetületeket csoportosítjuk még *geometriai származtatás szerint* is: a vetület *perspektív*, ha előállítható centrális vetítéssel (a forgásszimmetrikus képfelület és az alapfelület közös forgástengelyén lévő gyújtópontból kiinduló egyenessereg segítségével), minden más vetület *nemperspektív*. Minden perspektív vetület egyúttal valódi is.

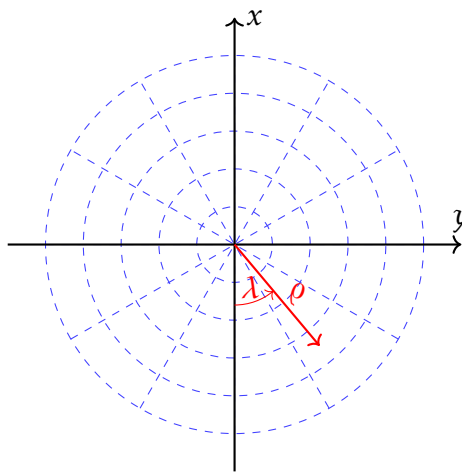
Osztályozunk továbbá *vetület elhelyezése szerint*: Ha a *perspektív* vetület képfelületének tengelye az alapfelületi forgástengellyel egybeesik, a vetület *normális* elhelyezésű, ha a tengely az Egyenlítő síkjában található, akkor

transzverzális, egyébként *ferdetengelyű*. Nemperspektív vetületek esetén ezt úgy általánosíthatjuk, hogy a fokhálózatot forgatjuk el, majd a segédpólusok által kijelölt tengely elhelyezkedése alapján osztályozunk.

VIII.2. Nemperspektív síkvetületek

A valódi síkvetületeknél a valódi és a síkvetületeknél elmondottakat is kikötjük, és az alábbi polárkoordináta-rendszerben tárgyaljuk. Az egy pontból kiinduló egyenes meridiánok a kör alakú paralellköröket egyenközűen osztják, ezért a polárszög a hosszúsággal egyezik (mivel a középpontból kiinduló azimutokat megőrzi, a valódi síkvetületeket *azimutálisnak* is hívják), kizárólag a paralellkörök képeinek sugarát változtathatjuk. Jelölje ezt a sugarat a $\rho(\beta)$ *sugárfüggvény*, ahol a β *pólustávolság* a φ szélesség pót-szöge ($\beta = 90^\circ - \varphi$)! Ez a valódi síkvetületet egyértelműen meghatározza (VIII.1. ábra):

$$\begin{aligned}x &= -\rho \cos \lambda \\y &= \rho \sin \lambda\end{aligned}$$



VIII.1. ábra. Polárkoordináták valódi síkvetületekben

Keressünk speciális torzulási igényeket kielégítő sugárfüggvényeket! A fokhálózat menti torzulások:

$$\begin{aligned}h &= \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{-\Delta \rho}{R \widehat{\Delta \varphi}} = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \\k &= \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\rho \widehat{\Delta \lambda}}{R \cos \varphi \widehat{\Delta \lambda}} = \frac{\rho}{R \sin \beta}\end{aligned}$$

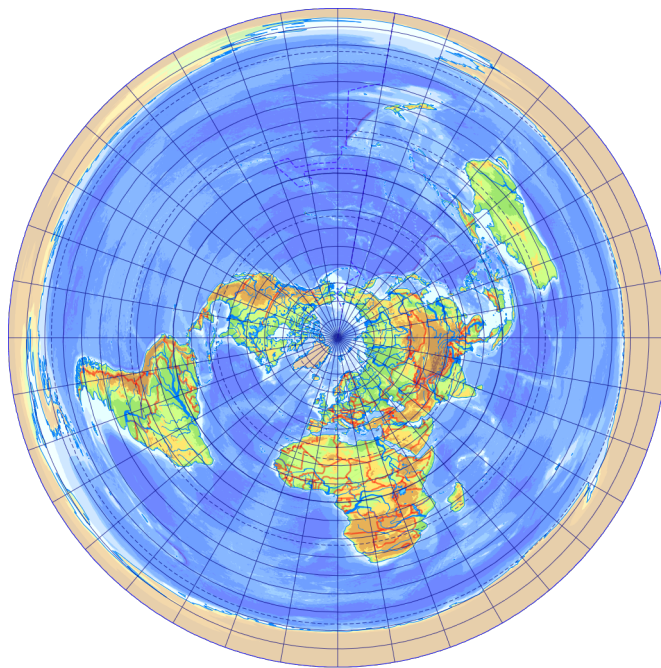
Készítsünk meridiánban hossztartó vetületet ($h = 1$)!

$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = 1$$

$$\int d\rho = R \int d\beta$$

$$\rho = R\beta + d$$

Az integrációs konstans $d = 0$, mert a pólusban $\rho = 0$. Ez POSTEL vetülete (VIII.2. ábra). Feltételezve, hogy β -t az Északi-sarktól számítjuk, az északi félgömbre kedvező.



VIII.2. ábra. POSTEL vetülete

Készítsünk területtartó változatot is ($hk = 1$)! Az integrációs konstans legyen $R^2 + d/2$ alakú!

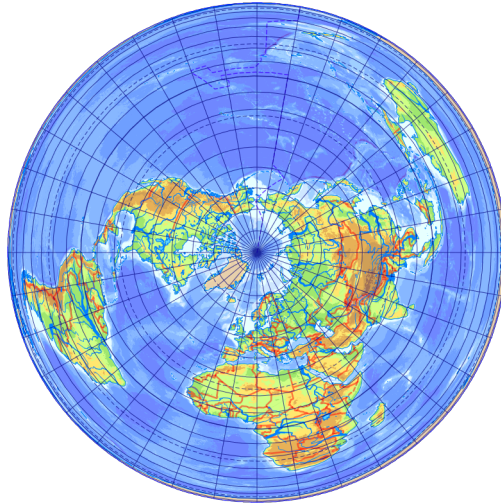
$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \frac{\rho}{R \sin \beta} = 1$$

$$\int \rho d\rho = R^2 \int \sin \beta d\beta$$

$$\frac{\rho^2}{2} = -R^2 \cos \beta + R^2 + \frac{d}{2} = -R^2 \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) + \frac{d}{2}$$

$$\rho = \sqrt{-2R^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) + d} = 2R \sin \frac{\beta}{2}$$

Az utolsó lépésben kihasználtam, hogy a pólusban $\rho = 0$, ami csak akkor lehet, ha $d = 0$. Az eredmény LAMBERT síkvetülete (VIII.3. ábra).



VIII.3. ábra. LAMBERT síkvetülete

Általánosságban megjegyezzük, hogy a β pólustávolságot a valódi sík- és kúpvetületeknél nem szükséges mérni az Északi-sarktól, lehet a Déli-sarktól is. Ez esetben a déli félteke kerül a térkép középpontjába.

VIII.3. Perspektív síkvetületek

A perspektív síkvetületek előállíthatók centrális perspektív vetítéssel. Jelölje a gömb középpontja és a vetítés középpontja közötti távolságot fR , míg a vetítési középpont és a sík távolságát cR ! A perspektív vetület érintő, ha a képfelület a gömböt érinti ($c = 1 + f$), metsző, ha metszi a gömböt, egyébként *lebegő*. A VIII.4. ábrán található két hasonló derékszögű háromszög befogóinak aránya egymással megegyezik:

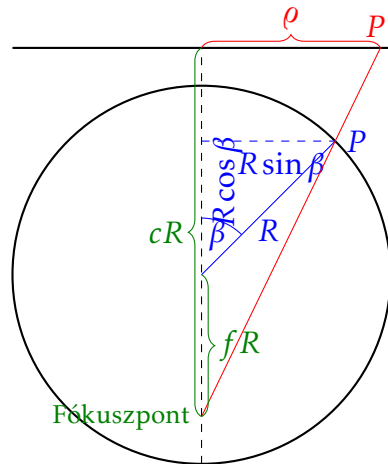
$$\frac{R(f + \cos \beta)}{R \sin \beta} = \frac{cR}{\rho}$$

$$\rho = R \frac{c \sin \beta}{f + \cos \beta}$$

A $f = 0$ esetben (vetítés a gömb középpontjából):

$$\rho = cR \operatorname{tg} \beta$$

Ezt *gnomonikus* vetületnek nevezzük (VIII.5. ábra). Torzulásai kedvezőtlenek, azonban ritkán mégis alkalmazzuk, mert ez a vetület a gömbi geodéziai



VIII.4. ábra. Perspektív síkvetületek elve

vonalakat egyenesre képezi le.* A képletből látható, hogy az Egyenlítő már nem ábrázolható benne.

Vizsgáljuk meg a $f \rightarrow \infty$, $c \rightarrow \infty$ esetet határérték-számítással (ekkor a vetítési középpont végtelen távol van, a sugarak párhuzamosak):

$$\rho = R \sin \beta$$

Ez az *ortografikus* vetület, amely úgy mutatja a Földet, mintha nagy távolságból tekintenénk rá (VIII.6. ábra). Félgömbnél nagyobb terület nem ábrázolható benne.

A legfontosabb perspektív síkvetület az $f = 1$, vagyis amikor a vetítés középpontja az átellenes pólusban van. Ez a *sztereografikus vetület* (VIII.7. ábra):

$$\rho = Rc \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} = Rc \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = Rc \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Ennek írjuk föl a fokhálózat menti torzulásait:

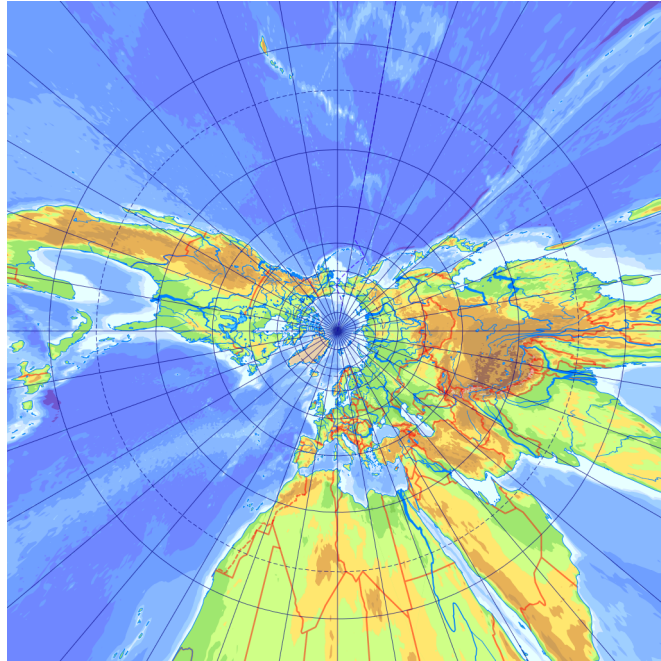
$$h = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{1}{R} \frac{Rc}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$k = \frac{\rho}{R \sin \beta} = \frac{Rc \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

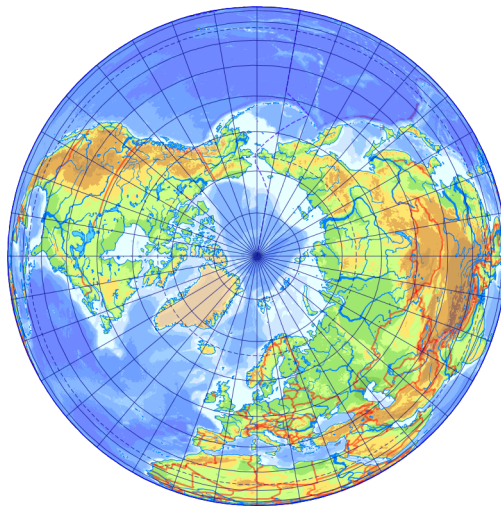
$h = k$, azaz a sztereografikus vetület szögtartó.† Ráadásul minden gömbi kör képe ebben a vetületben kör vagy egyenes, azaz a vetület *körtartó* is

* Ellipszoid alapfelületen nem létezik a geodéziai vonalakat egyenesre képező vetület.

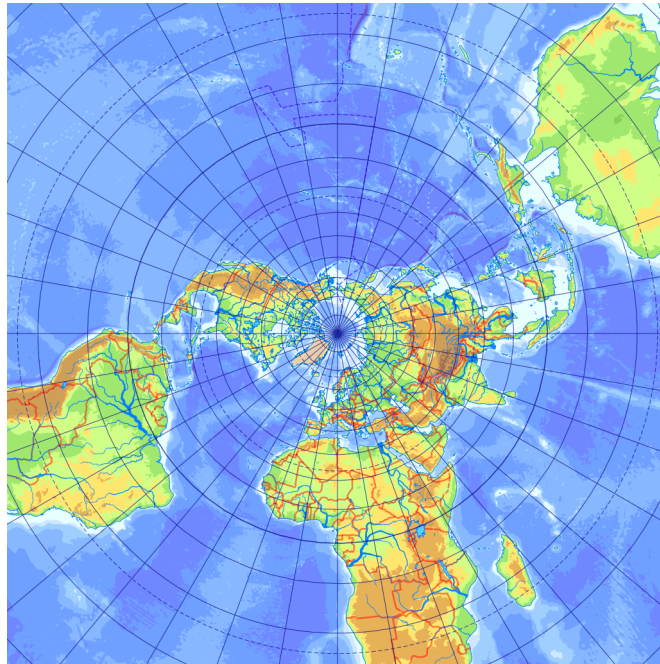
† A forgási ellipszoid nem szolgáltat ilyen szép vetületeket, az ellipszoidi szögtartó síkvetület nem perspektív.



VIII.5. ábra. *Gnomonikus vetület*



VIII.6. ábra. *Ortografikus vetület*



VIII.7. ábra. Sztereografikus vetület

egyben. Ezen előnyös tulajdonságai miatt ez a leképezés széles körben elterjedt annak ellenére, hogy a déli pólus képe a végtelenben van. A $c = 2$ (érintő) változat az Északi-sarkon torzulásmentes, ettől 127,6 km távolságon belül geodéziai célokra alkalmas, mert hossztorzulásának egytől vett eltérése 1 : 10 000 alatt marad. A metsző vetület a metszési paralelkörben lesz torzulásmentes.*

VIII.4. Magyarországi sztereografikus vetület

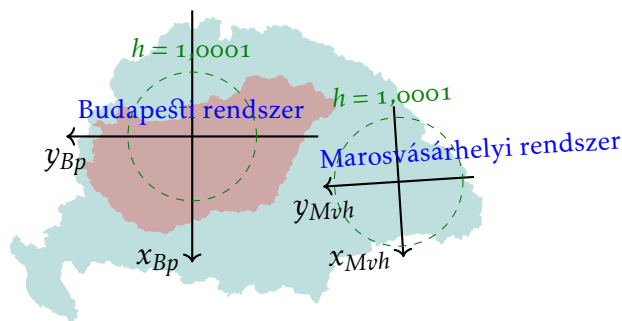
A sztereografikus vetület 1857-től a '70-es évekig Magyarországon is használatban volt. Mivel ez a vetület a pólus környékét ábrázolja kedvezően, célszerű fokhálózat-elforgatást alkalmazni. Ezt azonban a forgási ellipszoidon jóval nehezebb értelmezni, mint gömbön. Ezért kettős vetítést alkalmaztak: a BESSEL-ellipszoidon alapuló HD1863 dátumról először szögtartó gömbvetülettel a régi GAUSS-gömbre vetítettek, a gömbi hossztartó paralelkör $\varphi_n = 46^\circ 30'$, a többi érték a B.1. táblázatban olvasható.

Ezután elforgatjuk a fokhálózatot. A segédpólust a gellért-hegyi kezdőponton vesszük föl. Mivel Magyarország területe jóval nagyobb volt, mint

* Bár a vetülettani szakirodalomban helyenként sajnos tájékozatlanul az ellenkezőjét állítják, a perspektív vetületek általában nem torzulásmentesek a metszési paralelkörben, ez csak a sztereografikus vetület speciális tulajdonsága!

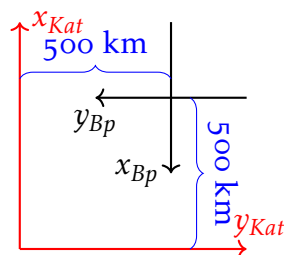
amekkora területen belül a sztereografikus vetület torzulásai elhanyagolhatók, Erdély területén a segédpólust a Marosvásárhely mellett található Kesztej-hegyen vették föl (B.2. táblázat).

Ezt követően alkalmazzuk az érintő sztereografikus vetület képleteit. Mivel mind a gömbvetület, mind a sztereografikus leképezés szögtartó, ezért a kettős leképezés eredménye is az. A koordináta-rendszerek délnyugati tájékozásúak (VIII.8. ábra). A magyar sztereografikus vetület világviszonylatban az elsőként alkalmazott szögtartó kettős leképezés.



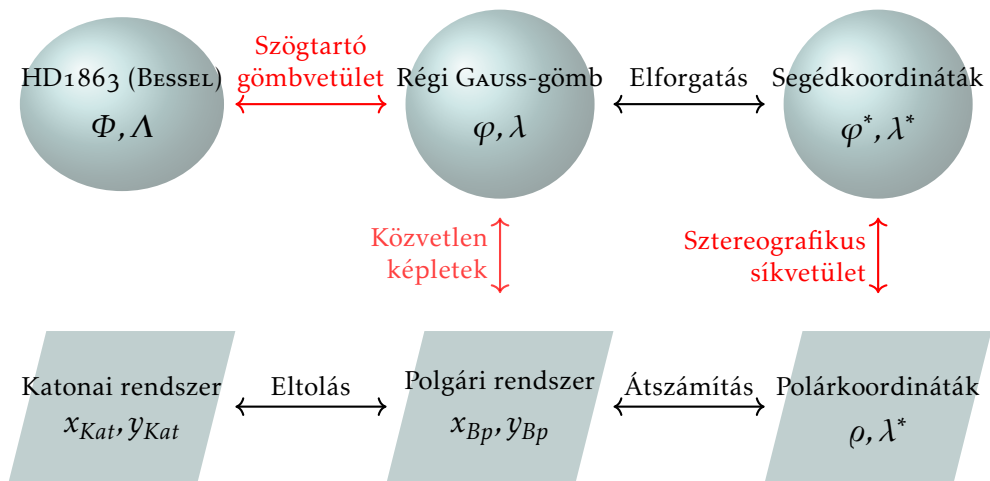
VIII.8. ábra. Magyarországi sztereografikus rendszerek

1936-tól a negatív előjelek kiküszöbölése érdekében a korábbi *polgári* koordinátákat eltolták, és az új *katonai* koordináták tengelyeit északkeleti tájékozásúra fordították. Az eltolás értéke Budapesten 500 km, Marosvásárhelyt 600 km (VIII.9. ábra; B.3. táblázat).



VIII.9. ábra. Polgári és katonai koordináták

A lépéseket a VIII.10. ábrán láthatjuk összefoglalva. Itt látható, hogy a ferde sztereografikus vetületnek levezettek közvetlen képleteket (B. függelék) is az egyszerűbb számítás érdekében.



VIII.10. ábra. Kettős leképezés a sztereografikus rendszerben

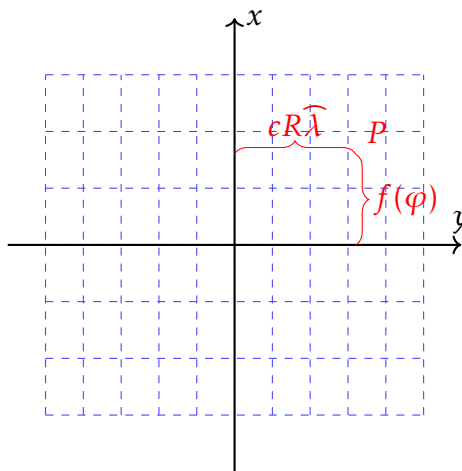
Kilencedik előadás

Valódi hengervetületek

IX.1. Általános képletek

A valódi hengervetületekben a szélességi és hosszúsági körök egymásra merőleges egyenesseregként jelennek meg. A függőleges koordináta tehát csak a szélességtől függ. Az y tengely általában az Egyenlítő képére esik. Az egyenközűség feltétele miatt a vízszintes koordináta a hosszúsággal egyenes arányban áll (IX.1. ábra). Legyen az arányosság tényezője cR !

$$\begin{aligned}x &= f(\varphi) \\ y &= cR\widehat{\lambda}\end{aligned}$$



IX.1. ábra. Koordináták valódi hengervetületekben

Írjuk föl a fokhálózat menti torzulásokat!

$$\begin{aligned}h &= \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{R\widehat{\Delta \varphi}} = \frac{1}{R} \frac{dx}{d\varphi} \\ k &= \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{cR\widehat{\Delta \lambda}}{R \cos \varphi \widehat{\Delta \lambda}} = \frac{c}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

IX. Valódi hengervetületek

k képletét megvizsgálva látható, hogy a $\pm\varphi_n$ szélesség hossztartó, ha $c = \cos \varphi_n$.

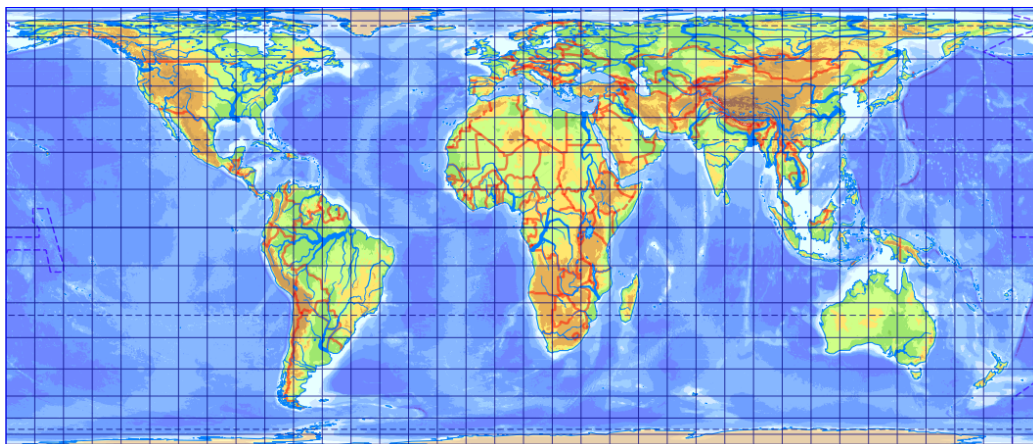
A perspektív hengervetületek rendkívül előnytelen torzulásúak, ezért a gyakorlatban alig használjuk. A nemperspektív valódi hengervetületek között három érdekes vetület van. A területtartó változat ($hk = 1$) képlete:

$$\frac{1}{R} \frac{dx}{d\varphi} \frac{c}{\cos \varphi} = 1$$

$$\int dx = \frac{R}{c} \int \cos \varphi d\varphi$$

$$x = \frac{R}{c} \sin \varphi + d$$

A d integrációs konstans csak egy eltolás, így figyelmen kívül hagyható, c pedig a hossztartó szélesség koszinusza. Ha a hossztartó szélesség 0° ($c = 1$), akkor LAMBERT hengervetületéről, ha 30° ($c = \sqrt{3}/2$), akkor BEHRMANN vetületéről (IX.2. ábra), ha 45° ($c = \sqrt{2}/2$), akkor pedig GALL–PETERS-vetületről beszélünk.



IX.2. ábra. BEHRMANN-vetület

Készítsünk meridiánban hossztartó hengervetületet ($h = 1$)!

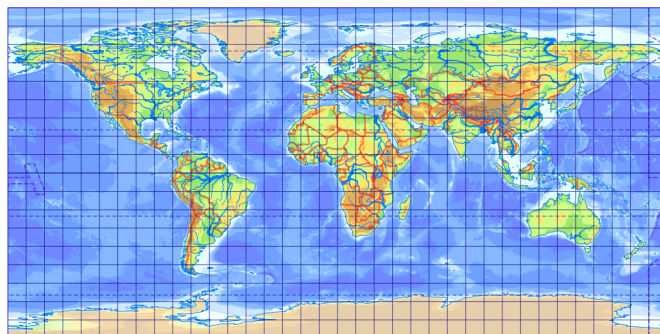
$$\frac{1}{R} \frac{dx}{d\varphi} = 1$$

$$\int dx = R \int d\varphi$$

$$x = R\varphi + d$$

A d integrációs konstans szintén csak eltolást eredményez, ezért nem vesszük figyelembe. A vetületet $c = 1$ választás esetén fokhálózata alapján

négyzetes hengervetületnek (IX.3. ábra) nevezzük. A legtöbb térinformatikai szoftver ebben a vetületben jeleníti meg az adatokat akkor, ha nem adunk meg vetületet.



IX.3. ábra. Négyzetes hengervetület

A szögtartó változat ($h = k$):

$$\frac{1}{R} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{c}{\cos \varphi}$$

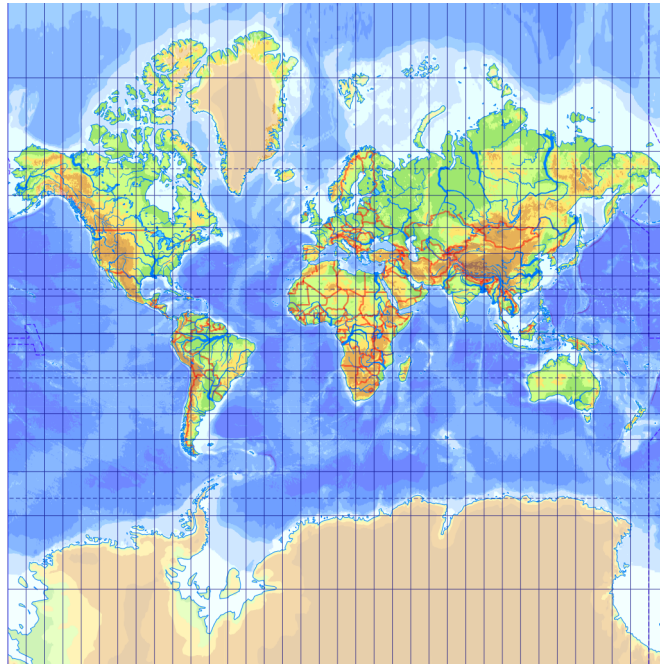
$$\int dx = cR \int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$$

$$x = cR \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + d$$

Ez MERCATOR vetülete (IX.4. ábra). Az integrációs konstans csak eltolást jelent, nem vesszük figyelembe. A pólusok képei a végtelenben vannak. Jelentőségét az adja, hogy a loxodrómákat egyenesre képezi le. E miatt régen igen nagy jelentősége volt a navigációban: mivel a leképezés egyúttal szögtartó is, bármely két pont között futó loxodróma azimutja közvetlenül leolvasható róla.

A c konstans a térképet kicsinyíti-nagyítja. $c = 1$ esetén az Egyenlítő torzulásmentes, tőle 90 km távolsáig geodéziai célokra is alkalmas, azaz hossztorzulása az egységtől kevesebb, mint 1 : 10 000-del tér el. A redukált változat ($c < 1$) a kedvező sáv méretét növelheti, hiszen ekkor két torzulásmentes paralellkör keletkezik, közöttük hosszrövidülés, tőlük kifelé hossznövekedés lép föl, azon kívül hossznövekedés lép föl, de az egységtől való eltérés kisebb, mint $c = 1$ esetén.*

* Sajnos a vetülettanban elterjedt a MERCATOR-vetület redukált változatát süllyesztett vagy metsző hengervetületnek, a torzulásmentes paralellköröket metszési paralellkörnek nevezni, azonban ez megtévesztő, hiszen ez a vetület *nem perspektív*, levezetéséhez nem használtunk sem metsző hengert, sem centrális vetítést, csupán



IX.4. ábra. MERCATOR-vetület

IX.2. A Web Mercator

Az internetes térképszolgáltatók kedvelt vetülete a *Web Mercator*. Milyen vetület ideális egy nagyítható internetes térképnek?

- Akármelyik részletébe nagyítok bele, Észak mindig fölfelé nézzen. Azaz legyen valódi hengervetület.
- Akármelyik részletet nézem, lokálisan ne legyen észrevehető torzulás. A lokálisan hasonlósági transzformációt mutató térképek szögtartók, tehát marad MERCATOR vetülete.
- Legyenek a leképezés egyenletei alacsony számításigényűek! A gömbi képletek kevesebb erőforrást igényelnek a szerveren, mint a jóval bonyolultabb ellipszoidi képletek.

Az előbbi feltételek miatt a gömbi szögtartó valódi hengervetület mellett döntöttek. Az ellipszoidi adatokat a lehető legkevesebb számítással akarták gömbre vetíteni, ezért gömbvetületnek a Google gömbvetületét (VII.4. fejezet) választották. Mivel ez a gömbvetület általános torzulású, szigorú értelemben a Web Mercator sem szögtartó vetület, de szögtorzulása

számításokat végeztünk. Az azonban speciálisan ennél a vetületnél véletlenül igaz, hogy ha a térképet hengerpalást alakjában összecsavarjuk és ráhelyezzük a gömbre, akkor éppen azok a gömbi paralellkörök lesznek torzulásmentesek, ahol a hengerpalást belemetsz a gömbbe, de ez csak a matematika játéka.

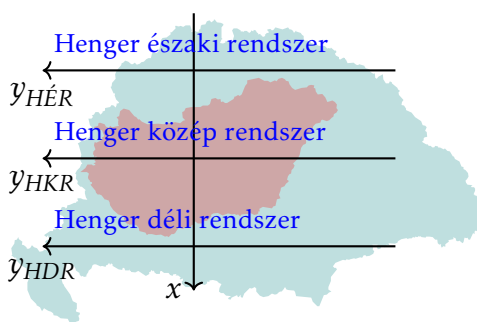
igen csekély (sehol nem éri el a fél fokot). Az igazi szögtartó hengervetület és a Web Mercator között az eltérés 10 km-es nagyságrendű.

A vetületet a 2005-ben induló Google Maps alkalmazta elsőként, mára gyakorlatilag szabványossá vált. Mivel világtérképnek a vetület alkalmatlan, újabban csak nagyobb nagyítási szinten találkozunk a Google Mapsben vele, azonban a háttérben továbbra is ebben a vetületben tárolja az adatokat, és az alternatív térképszolgáltatók a mai napig ebben a vetületben jelenítik meg világtérképeiket is. A vetület elve a IX.6. ábra alján látható.

IX.3. Magyarországi hengervetületek

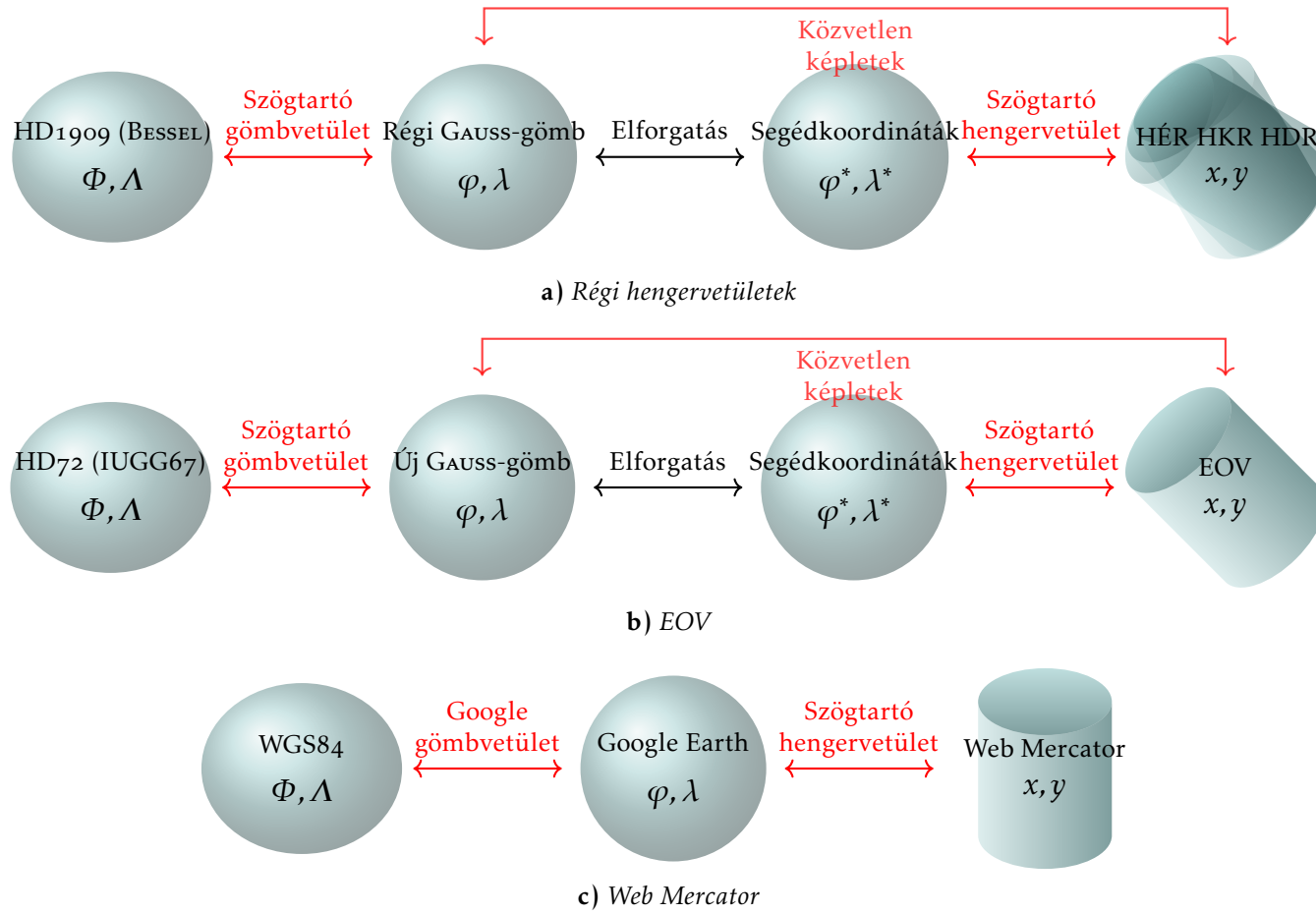
Előnyös tulajdonságai miatt a szögtartó valódi hengervetület a korszerű magyar polgári topográfiai térképek vetülete, azonban ezt ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazzuk. Az 1908-ban történt bevezetés FASCHING ANTAL nevéhez fűződik. A korábbi sztereografikus hálózat pontjait 6,44''-cel az óramutató járásával egyező irányban elforgatta a Gellért-hegy körül, így az alapfelületi koordináták annak ellenére megváltoztak, hogy továbbra is a BESSEL-ellipszoid maradt az alapfelület. Az új dátum a HD1909 nevet kapta.

FASCHING hengervetületi rendszere is kettős leképezés (IX.6. ábra): először a régi GAUSS-gömbre vetítünk, majd elforgatjuk a fokhálózatot, hogy a segédegyenlítő Magyarország területén haladjon át. Az ország területére három kezdőpontot jelölt ki a Gellért-hegy meridiánján (IX.5. ábra, B.2. táblázat): a $45^{\circ}31'59''$, $47^{\circ}6'$ és $48^{\circ}40'2''$ gömbi szélességeken. Végül megtörtént a szögtartó hengerre vetítés. A koordinátatengelyek itt is délnyugati tájékozásúak.



IX.5. ábra. Magyarországi hengervetületi rendszerek

A három hengervetületi rendszer neve $HÉR$, HKR és HDR , azaz *Henger Északi*, *Közép* és *Déli Rendszer*. A három rendszer határvonalát úgy húzták meg, hogy az a községek külterülethatárait kövesse, így minden községen



IX.6. ábra. Kettős leképezés a hengervetületi rendszerekben

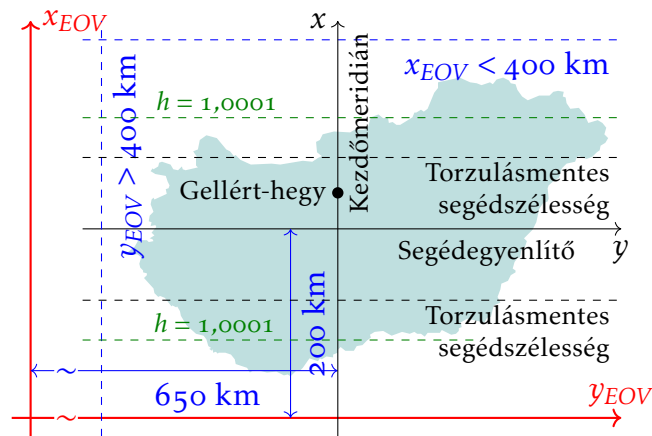
belül egységes rendszert használtak. Ezt a vetületet kizárólag kataszteri célokra használták, a polgári topográfia (rövid megszakítással) a sztereografikus vetületet használta párhuzamosan.

A '70-es években fölmerült az igény, hogy a topográfia és a kataszter egységes vetületet alkalmazzon. Mivel a meglévő rendszereket még a régi Magyarországra alkották meg, szükségesnek érezték, hogy egy új, az akkori országterületre beállított vetületi rendszert készítsenek. Az elkészült új vetület (*Egységes Országos Vetület, EOVS*) elveiben a HKR felújítása, azonban számos különbséget találunk (IX.6. ábra):

- Az alapfelületként szolgáló ellipszoidot az akkor legkorszerűbb, űrgeodéziai alapokon álló IUGG67-esre cserélték.
- Újra tájékozták az alapponthálózatot korszerű fénytáv mérőkkel. Az így kapott geodéziai dátum a HD72-es.
- Az új alapfelület miatt a GAUSS-gömbvetület konstansait újra kellett számolni. A hossztartó parallelkört északabbra hozták, hogy az akkori országterület közepére essék: ellipszoidi szélessége $\Phi_n = 47^\circ 10'$ lett, további adatok a B.1. táblázatban. Az így létrehozott felület az *Új GAUSS-gömb*.
- Bár a segédegyenlítő gömbi szélessége $47^\circ 6'$ maradt, az ellipszoidi koordináták a dátumváltás miatt megváltoztak (B.2. táblázat).
- A hengervetületi koordinátákat 0,999 93-del beszorozták, így két torzulásmentes segédszélesség keletkezett. A torzulások eloszlása így kedvezőbb: a két torzulásmentes vonal között hosszrövidülés, azokon kívül hossznövekedés lép föl. A megkívánt 1 : 10 000 értéknél a hossztorzulás csak Torna és Zemplén környékén, valamint az Ormánságban lett nagyobb.
- A koordinátatengelyek északkeleti tájékozásúak. A negatív előjelek elkerülése érdekében déli irányban 200 km-rel, nyugati irányban 650 km-rel el lettek tolva. Így Magyarország területén a függőleges koordináták 400 km-nél kisebbek, a vízszintesek ettől mindig nagyobbak (IX.7. ábra).

Az EOVS nagy népszerűsége miatt: A katonai topográfiai és geológiai térképek kivételével gyakorlatilag minden magyarországi térképi adatbázis ezt a rendszert alkalmazza. Legfontosabb alkalmazása az *EOTR, Egységes Országos Térképrendszer*, amely egy ebben a koordináta-rendszerben készített, Magyarország teljes területét lefedő topográfiai térképmű. A ferdetengelyű hengervetület közvetlen képletei a B. függelékben találhatóak.

A népszerű nyílt forrású térinformatikai csomagok EOVS-implementációja nem pontos, mert azt a svájci ROSEN MUND vetületével közelíti. Ennek egyetlen eltérése, hogy a GAUSS-gömb hossztartó parallelköre nem paraméterezhető, hanem az a segédegyenlítő szélességével esik egybe. A hiba cm-es



IX.7. ábra. Egységes Országos Vetület

nagyságrendű. A fizetős csomagok általában HORINÉ vetületével közelítik, amely GAUSS-gömb helyett egy retek alakú forgástestet (*aposzféra*) használ közbenső felületnek a kettős szögtartó vetítéshez, így dm-es nagyságrendű eltérés is előfordulhat.

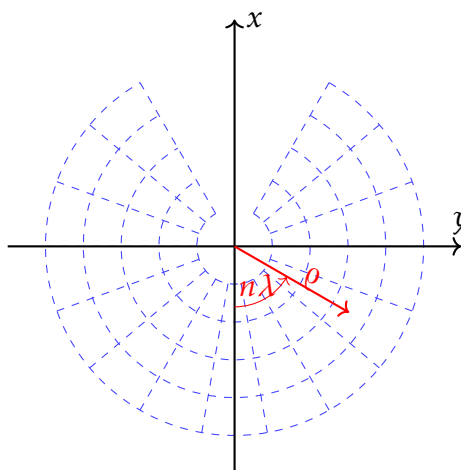
Tizedik előadás

Nemzetközi térképművek vetületei

X.1. Valódi kúpvetületek

A valódi kúpvetületekben a meridiánok képei egy pontba tartó egyenesek, a paralellkörök képei rájuk merőleges, koncentrikus körívek. Az egyenközűség miatt a meridiánok által bezárt szög egyenes arányban van a hosszúságkülönbséggel. E miatt a valódi kúpvetületek a valódi síkvetületektől csak abban különböznek, hogy a polárszög $n\lambda$ (X.1. ábra). A meridiánok képeinek hajlásszögét szabályozó $0 < n < 1$ sugárhajlás mellett továbbra is szabadon választhatjuk meg a ρ sugárfüggvényt. A polárkoordináták és a derékszögűek közti átszámítás:

$$\begin{aligned}x &= -\rho \cos(n\lambda) \\ y &= \rho \sin(n\lambda)\end{aligned}$$



X.1. ábra. Polárkoordináták valódi kúpvetületekben

X. Nemzetközi térképművek vetületei

A valódi kúpvetület *póluspontos*, ha $\beta = 0$ helyen $\rho = 0$, egyébként *pólusvonalas*. A fokhálózat menti torzulások:

$$h = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{-\Delta \rho}{R \Delta \varphi} = \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta}$$

$$k = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\rho n \Delta \lambda}{R \cos \varphi \Delta \lambda} = \frac{\rho n}{R \sin \beta}$$

A perspektív kúpvetületek még a perspektív hengervetületeknél is ritkábbak, ezért csak nemperspektív kúpvetületekkel foglalkozunk. Kezdjük a területtartóval ($hk = 1$)! Az integrációs konstans legyen $R^2/n + R^2 d/2n$ alakú!

$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} \frac{\rho n}{R \sin \beta} = 1$$

$$\int \rho d\rho = \frac{R^2}{n} \int \sin \beta d\beta$$

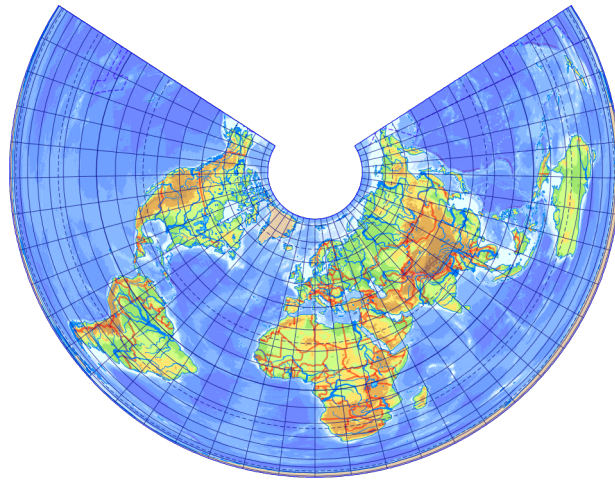
$$\frac{\rho^2}{2} = -\frac{R^2}{n} \cos \beta + \frac{R^2}{n} + \frac{R^2 d}{2n}$$

$$\rho^2 = \frac{R^2}{n} \left(-2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{2d}{2} \right)$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{n}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + d}$$

A d konstans a pólusvonal sugarát határozza meg, hiszen $\beta = 0$ helyettesítés esetén $\rho = R\sqrt{d/n}$. $d = 0$ (póluspont) esetén LAMBERT kúpvetületéről, $d > 0$ (pólusvonal) esetben ALBERS kúpvetületéről (X.2. ábra) beszélünk. Előbbi esetben n egy; utóbbi esetben n és d megfelelő beállítással egy vagy két tetszőlegesen választott szélességi kör mentén teszi lehetővé a hossztartást.*

* A szakirodalom a két parallelkörben hossztartó kúpvetületeket gyakran metsző vagy süllyesztett kúpvetületnek hívja, és gyönyörű ábrákat találunk a gömböt két helyen metsző kúpról. Ez igen szemléletes magyarázat, csak egy hibája van: nem igaz. Az ilyen kúpvetületeket kúppalásttá összezsavarva véletlenül sem oda fognak esni a torzulásmentes szélességek, ahol a kúp metszi a gömböt.



X.2. ábra. ALBERS-vetület

A meridiánban hossztartó ($h = 1$) változat levezetése egyszerű:

$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = 1$$

$$\int d\rho = R \int d\beta$$

$$\rho = R\widehat{\beta} + Rd$$

A d integrációs konstans ezúttal is a pólusvonal sugarát jellemzi, és a két paraméter ($n; d$) ezúttal is egy vagy két hossztartó paralelkört enged meg. A leképezést DE L'ISLE vetületének nevezzük (X.3. ábra), szélességi kör mentén fekvő területre a legkedvezőbb torzulású vetületek közé tartozik.

Ezúttal is a szögtartó változat ($h = k$) a legfontosabb. A levezetés során az integrációs konstans $\ln d + \ln R$ lesz.

$$\frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\beta} = \frac{\rho n}{R \sin \beta}$$

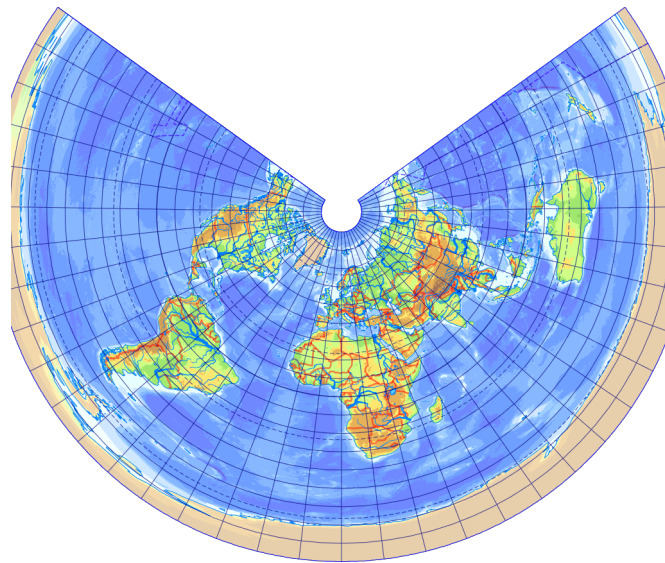
$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = n \int \frac{1}{\sin \beta} d\beta$$

$$\ln \rho = n \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \ln d + \ln R$$

$$\rho = dR \operatorname{tg}^n \frac{\beta}{2}$$

A d paraméter ezúttal kicsinyítés-nagyítást jelöl, a vetület mindenképp póluspontos.* A déli pólus képe a végtelenben van. Ezúttal is két hossztartó

* Pólusvonalas szögtartó vetület általában sem létezik, hacsak a végtelen távolba képezett pólust nem tekintjük pólusvonalnak.



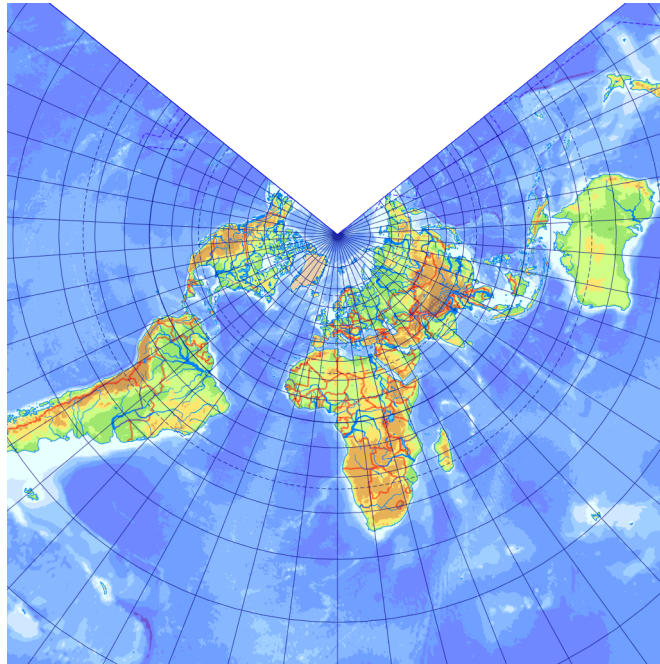
X.3. ábra. DE L'ISLE-vetület

szélességet lehet beállítani n és d megfelelő megválasztásával. A leképezés neve LAMBERT–GAUSS-kúpvetület (X.4. ábra).

Ezt a vetületet előszeretettel alkalmazza a nemzetközi repülés, mert szögtartása mellett a 3000 km-nél rövidebb ortodróákat közel egyenes vonalakként jeleníti meg. A *World Aeronautical Chart* (WAC) is ennek ellipszoidi változatát alkalmazza, de a legtöbb légi navigációs térkép ebben a vetületben készül Magyarországon is. Több külföldi országban, különösen a francia kultúrkörben, topográfiai térképek vetületének is használják. Csehországban és Szlovákiában kettős leképezéssel ferdetengelyű elhelyezésben alkalmazzák KŘOVÁK-vetület néven.

X.2. A GAUSS–KRÜGER-vetület

Készítsünk olyan szögtartó vetületet, amelyik egy kiválasztott középmeridiánt torzulásmentesen képez le, annak környezetét pedig csekély torzulással! Gömb alapfelület esetén a feladat egyszerűen megoldható. Tudjuk, hogy a MERCATOR-vetület szögtartó, és az Egyenlítőt torzulásmentesen képezi le. Forgassuk el a földrajzi segéd-koordinátarendszert transzverzális elhelyezésbe, azaz a segédpólus essék az Egyenlítőre! Ekkor a segédegyenlítő a segédpólustól $\pm 90^\circ$ -ra lévő bimeridiánra esik. A MERCATOR-vetületet a segédkoordinátákra alkalmazva ez a bimeridián torzulásmentes lesz, az egész vetület pedig szögtartó, tehát a feladat megoldása a transzverzális MERCATOR-vetület.



X.4. ábra. LAMBERT–GAUSS-vetület

Nem ilyen egyszerű a helyzet a forgási ellipszoidon. Mivel a fokhálózat-elforgatást gömbön érteltük meg, át kellene térnünk egy gömbvetülettel a gömbre. Mivel a szögtartást szeretnénk megőrizni, kizárólag a szögtartó gömbvetület jöhetne szóba. Egy szögtartó gömbvetületből és egy transzverzális MERCATOR-vetületből álló kettős leképezés ugyanakkor nem lenne torzulásmentes a középmeridiánban, hiszen a szögtartó gömbvetület csak egy kiválasztott szélességi kört tud torzulásmentesen leképezni. Tehát kizárólag közvetlenül a forgási ellipszoidról síkra képező vetület lehet alkalmas a feladatra.

Talán meglepően hangzik, de ha egy szögtartó vetület torzulásait egyetlen tetszőleges sima görbe mentén meghatározom, az egyértelműen definiálja a teljes vetületet.* Jelen esetben a középmeridián hossztartása van előzetesen meghatározva, azaz ez és a szögtartás egyetlen vetületet definiál. A végeredményt ilyen alakban írhatjuk föl:†

$$x = A_0(\Phi) + A_2(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^2 + A_4(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^4 + \dots$$

* Ennek oka mélyen az analízisben rejlik. Két komplex számokkal koordinátázott vetületi sík között kizárólag olyan függvény tud szögtartó leképezést létesíteni, amely a komplex számsík egy nyílt részhalmazán differenciálható.

† A levezetés igen bonyolult, komplex számsíkon értelmezett elliptikus integrálok sorba fejtésén alapul.

$$y = A_1(\Phi)\widehat{\Delta\Lambda} + A_3(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^3 + A_5(\Phi)(\widehat{\Delta\Lambda})^5 + \dots$$

Az első két tényező képlete egyszerű:

$$A_0(\Phi) = \int_0^{\Phi} M(\Phi) d\Phi$$

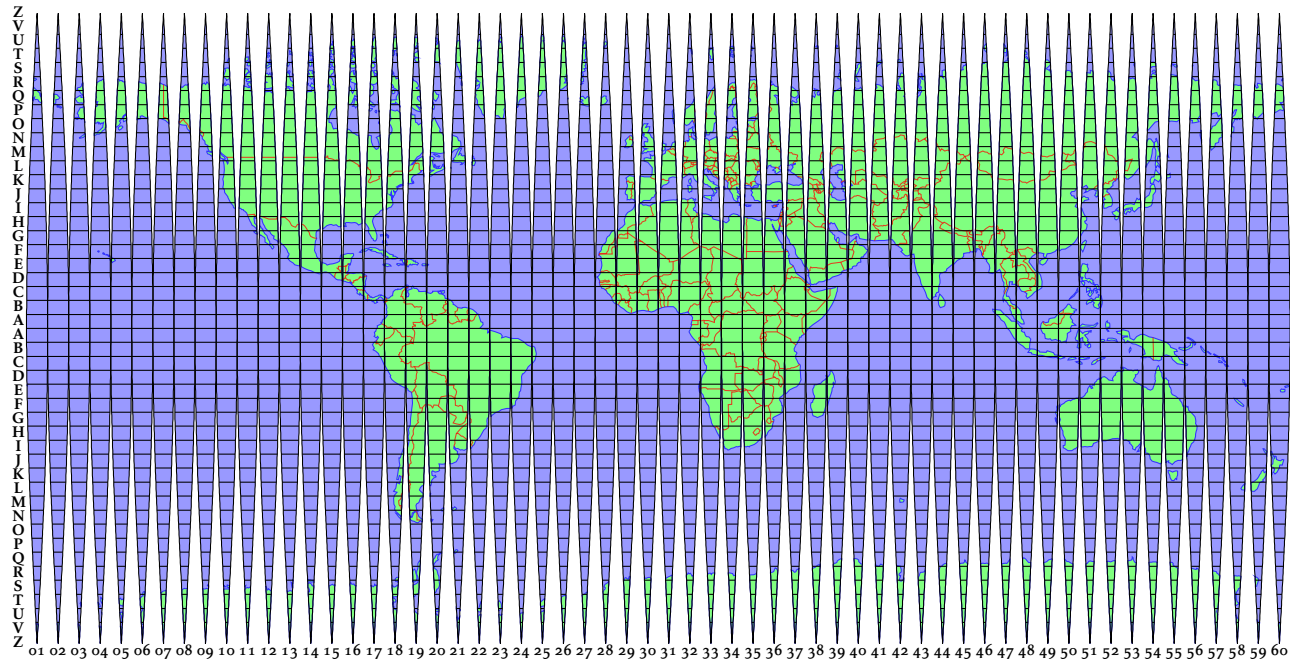
$$A_1(\Phi) = N(\Phi) \cos \Phi$$

A további A_i tényezők képletei a szakirodalomban föllelhetők. A vetületet GAUSS alkotta meg, míg a gyakorlati alkalmazáshoz szükséges sorfejtést KRÜGER számolta végig, ezért ezt a leképezést GAUSS–KRÜGER-vetület néven ismerjük. A sorfejtés csak kis $\Delta\Lambda$ esetén konvergál, a középmeridiántól távol LEE elliptikus függvényeket tartalmazó képletei alkalmazhatók. A népszerű térinformatikai szoftverek sorfejtéssel számolnak, ezért a leképezést csak a középmeridián kb. 10° -os környezetében tudják helyesen megjeleníteni, ne bízzunk vakon a távolabbi tartományok képében!

A leképezés bár nagyon hasonlít a transzverzális szögtartó hengerve-tületre, valójában nem teljesen az. A szögtartó hengerve-tület például a gömb két átellenes pontját a végtelenbe képezi bele, a GAUSS–KRÜGER-ve-tület ezzel szemben a teljes ellipszoidot egy véges nagyságú alakzatban jeleníti meg. Bár szigorú matematikai szempontból ezt nem tehetnénk meg, a származtatás miatt mégis a hengerve-tületek családjába szoktuk sorolni.

Ezt a leképezést a középmeridián szűk környezetének ábrázolására használjuk. Topográfiai célokra a -180° -os meridiántól kiindulva 6° -os ellip-szoidi kétszögekre, más néven *zónákra* osztjuk a Földet, amelyeket arab számokkal jelölünk (X.5. ábra). Magyarország a 33-as és 34-es zónák te-rületére esik, amelyeket a Veszprém közelében haladó 18° -os meridián határol. Minden egyes zónát külön-külön vetülettel képezünk le, a zóna felezővonalát alkalmazva középmeridiánnak. Mivel nem egyetlen vetület-ről beszélünk, ez valójában egy *vetületi rendszer*. A zónákat 4° szélességű *övezetekre* osztjuk tovább, ezeket az Egyenlítőtől kiindulva az ABC nagybe-tűivel jelöljük. Magyarországra az L és M övezetek esnek. Az övezet betűjét szoktuk előre írni, utána a zónát, például L-34.

A negatív koordináták kiküszöbölése érdekében a függőleges tengelyt a középmeridiántól 500 km-rel nyugatra eltolták. A déli féltekén a negatív előjelet nem szokás kiírni, hanem a zóna száma után írt S betű figyelmeztet csak erre. Egyes térinformatikai rendszerek az északi féltekén is kiírják az N betűt. A szomszédos zónák közötti koordináták megkülönböztetése érdekében a zóna utolsó számjegyét, azaz idehaza egy 3-as-t vagy egy 4-es-t



X.5. ábra. A GAUSS-KRÜGER-vetület zónái

szokás írni a vízszintes koordináta elé. Ez a *vezérszám*. Bár ezt a számjegyet a vetületi egyenletek alkalmazása során figyelmen kívül kell hagyni, a térinformatikai szoftverek többsége kéri. Mindig olvassuk el a dokumentációt, hogy kell-e vezérszámot is begépelnünk!

A Varsói Szerződés hivatalos vetülete a GAUSS–KRÜGER vetületi rendszer volt. Alapfelületnek a KRASZOVSKIJ-ellipszoid felhasználásával alkotott S42 (más néven Pulkovo) dátumot választották. Magyarországon 1949-től a NATO-csatlakozásig a katonai térképészet (rövid ideig a polgári is) ezt a rendszert alkalmazta. A magyar készítésű térképeken az *1942. évi koordináta-rendszer* megírás szerepel.*

Geodéziai célokra több ország is alkalmazza ezt a vetületet, azonban mivel a középmeridiántól távolodva a torzulások gyorsan növekednek, ezért 2°-os vagy 3°-os zónaszélesség használatával is találkozunk.

X.3. Az UTM, az UPS és az MGRS

A másik nagy nemzetközi szervezet, a NATO is kifejlesztett egy saját vetületi rendszert, mely két vetületfajtát alkalmaz: az *Univerzális Transzverzális Mercator* (UTM), amely nem MERCATOR-vetület és az *Univerzális Poláris Sztereografikus* (UPS), amely nem sztereografikus leképezés.

Az UTM-vetület valójában a GAUSS–KRÜGER vetületi rendszer képleteit alkalmazza a következő eltérésekkel:

- Az alapfelület a WGS84 ellipszoid.
- Csak a d. sz. 80° és az é. sz. 84° szélességek között alkalmazzuk.
- A zónák általában megegyeznek a GAUSS–KRÜGERével, de Norvégia területén vannak apró eltérések.

* A vetület bevezetése Magyarországon nem volt zökkenőmentes: Az érkező szovjet parancsnokok elvárták a honvédségtől az országterület azonnali gyorsfelmérését és térképezését GAUSS–KRÜGER-vetületben. Amint a katonák átadták az első szelvényeket a Tiszahát térségéről, a szovjetek azonnal megpróbálták összeilleszteni a saját, Kárpátalját ábrázoló térképükkel, de a szelvények kb. 100 m hézaggal illeszkedtek! Természetesen azonnal kitört a botrány, és a szovjetek szabotázzsal gyanúsították meg a magyarokat. Valóságban persze csak annyi történt, hogy a szovjetek nem mondták meg, hogy mégis milyen alapfelületet használnak. A magyarok a II. világháború alatt már alkalmazták GAUSS–KRÜGER-vetületet, mert a német hadsereg ezt használta valamennyi hadszínterén. A magyarok örültek, hiszen az alappontokat már korábban átszámították ebbe a rendszerbe. Igen ám, de a németek ekkor ezt a leképezést BESSEL-ellipszoidra definiálták RDN₁₉₄₀ dátummal! A szovjeteknek persze utána magyarázzkodhattak a KRASZOVSKIJ- és a BESSEL-ellipszoid közötti eltérésről, meg dátumtranszformációról, az illetékes szovjet elvtársak kiválóan értettek ám mindenhez... Maradjon ez a történet emlékeztetőül, hogy geodéziai dátum nélkül sohasem teljes egy vetület megadása!

X. Nemzetközi térképművek vetületei

- Az övezetek 8° szélesek, betűzésük a C betűvel a déli 80° szélességtől indul, de az I és az O betűk kimaradnak. Magyarország a T és U övezetekbe esik. A legészakabbi övezet, az X, 12° széles. Az övezet betűjelét a zóna után írjuk, pl: 34T.
- Az 500 km eltolást megelőzően 0,9996-szorosra kicsinyítjük a vetületet. Ennek következtében a torzulások kedvezőbben oszlanak el: két, a középmeridiánnal közel párhuzamos vonal lesz torzulásmentes, közöttük hosszrövidülés, azokon kívül hossznövekedés tapasztalható.
- A koordinátatengelyek jelölése *E* (Easting) és *N* (Northing), vezérszámot az *E* koordináta elé sohasem teszünk ki.
- Csak a déli féltekén a negatív *N* értékek kiküszöbölése érdekében a vízszintes tengelyt az Egyenlítőtől déli irányba 10 000 km-rel eltolták, a koordináta értéke az északi féltekén nincs eltolva. Az egyértelműség érdekében a koordináta teljes megadásakor közölni kell a félteke vagy a övezet betűjelét (térinformatikai szoftvertől függ, hogy melyiket).

A pólusok környékén az UTM helyett az UPS-vetületet alkalmazzuk. Ez egy közvetlen ellipszoid alapfelületű, nem perspektív, szög tartó valódi síkvetület:

$$\rho = \frac{2da}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{e/2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \left(\frac{1+e \cos B}{1-e \cos B} \right)^{e/2}$$

A *d* kicsinyítés-nagyítási tényező mutatja meg, hogy a pólusban mennyi a hossztorzulás, az UPS esetén ezt 0,994-nek választották. Mindkét koordinátatengelyt 2000 km-rel tolták el a pólustól.

Az UPS-ben ábrázolt területeket két-két félkör alakú övezetre osztjuk tovább a keleti és a nyugati félgömbön. A déli pólus környékének nyugati fele az A, keleti fele a B övezet, az északi pólus környékén pedig a nyugati féltekére az Y, a keletire a Z övezet esik.

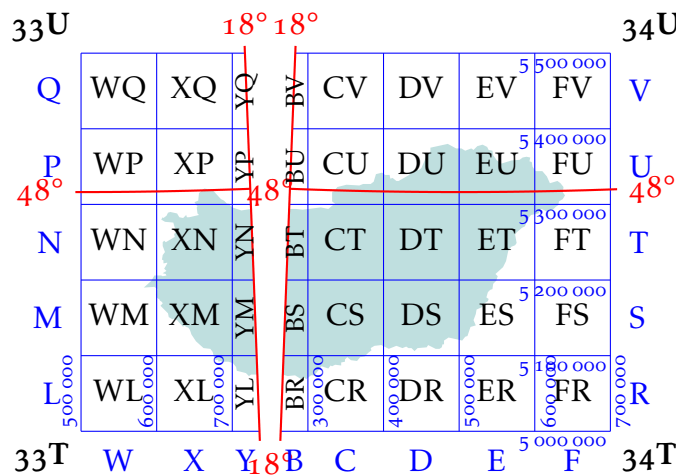
A magyar katonai topográfia a NATO-csatlakozás ('90-es évek) óta a 33-as és 34-es zónák UTM-vetületeit használja.

Hogy egy helyzet megadásához ne kelljen három számot (zóna; *E*; *N*) megadni, a NATO egy *Military Grid Reference System* (MGRS) nevű *katonai jelentő rendszert* dolgozott ki. Ennek első két számjegye a zóna (az UPS esetén ez értelemszerűen elmarad), majd az övezet betűjelzése következik.

Ezután egy oszlopot jelző betűjel következik: a 100 km és a 900 km koordináták között 8, egyenként 100 km széles oszlopra tagoljuk a zónákat. A betűjelek nyugatról keletre haladva három zónánként ismétlődnek: rendre az A–H, J–R és S–Z betűkkel jelölve, az I és az O itt is kimarad. A harmadik betű a sort jelöli. A sorok is 100 km szélesek, jelölésük az Egyenlítőtől két irányban indul, a páratlan zónák esetén A-tól, a párosok esetén F-től betűzve. A sorok betűzésénél az I, O, W, X, Y és Z betűket kihagyjuk, tehát a V

X. Nemzetközi térképművek vetületei

betű elérése után A-val újraindul a betűzés, a betűjelzések 2000 km-enként ismétlődnek. Az UPS esetén is 100×100 km-es négyzetrácsot alkalmazunk, de az oszlopok betűzésekor a D, E, M, N, V és W betűk is kimaradnak, hogy ne legyen azonos betűjelű UTM és UPS négyzet egymás mellett; a sorok betűzésénél pedig csak az I és az O marad ki. A 100×100 km-es négyzetek betűjelzései Magyarország területére a X.6. ábrán láthatók.



X.6. ábra. MGRS Magyarországon

Legvégül a koordináták számjegyei jönnek, előbb az E, utána az N. Mivel a százezres helyi érték a sorok és oszlopok betűjelzései egyértelműen megadják a koordinátát, csak a maradék 5-5 számjegyet írjuk ki. Kisebb pontossági igény esetén lehetőség van kevesebb számjegy megírására is, ilyenkor a koordinátákat mindig lefelé kerekítjük. Például a 6-os villamos Petőfi híd, budai hídfő megállója az UTM 34T 353755 5259967 koordináták alá esik, míg 100 m élességű MGRS-azonosítója 34TCT537599.

Tizenegyedik előadás

Nemzeti vetületek

Ebben a részben két táblázatot találunk. A [XI.1.](#) táblázatban összefoglalva láthatjuk a Magyarországon alkalmazott vetületeket az I. Világháborútól napjainkig. Az összehasonlítás mellett figyeljünk oda a buktatókra, amelyek megkeseríthetik a térinformatikus életét.

A [XI.2.](#) táblázatban láthatjuk, hogy egyes országok hogyan oldották meg a térképezés kérdését. Az itt föl nem sorolt dél-európai és skandináv államok általában az UTM-vetületet alkalmazzák, míg a szovjet utódállamokban a mai napig az S42 alapfelületű GAUSS–KRÜGER-koordinátákkal találkozunk. Külön érdekesség Németország, ahol nem alakult ki egységes rendszer: az egykori NDK területén az 1942. évi rendszerrel találkozunk, az egykori NSZK-ban pedig a szövetségi államok saját rendszereket alakítottak ki jellemzően BESSEL-ellipszoid alapfelületű, 3° zónaszélességű GAUSS–KRÜGER-rendszerrel. A táblázat célja a sokszínűség bemutatása, mi mindenre kell odafigyelnünk, ha egy idegen ország topográfiai térképét óhajtjuk fölhasználni, milyen eltérések lehetnek a hazai megoldásoktól.

Két ország (Svájc és Hollandia) kifejezetten fontos a számunkra, mert míg a magyar vetületeket a térinformatika elég hiányosan támogatja, e két ország vetülete megszólalásig hasonló a magyar vetületekhez. Előbbi nem a véletlen műve: FASCHING ANTAL, a HKR bevezetője hazai munkássága előtt Svájcban dolgozott, onnan visszatérve hozta haza a kor legkorszerűbb leképezését. A GAUSS-gömb eltérő hossztartó paralellköre az Osztrák–Magyar Monarchia területére meghozott döntés volt: a gömbvetületet a teljes Monarchiára egyszeri alkalommal akarták meghatározni, ezért annak közepes szélességét választották torzulásmentesnek.

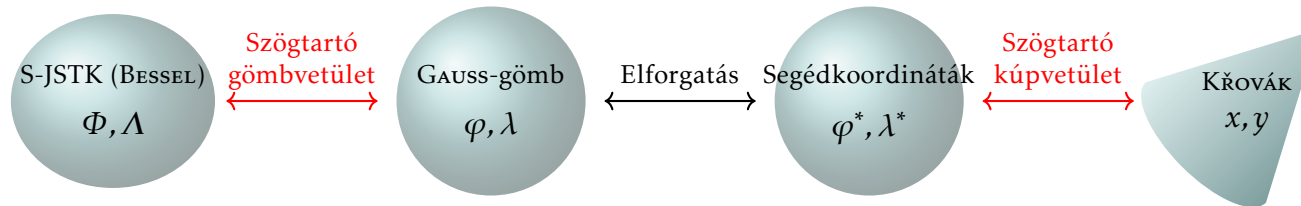
XI.1. táblázat. Magyarországon alkalmazott vetületek áttekintése

Név	Alapfelület	Vetítés	Gömbvet.	Használat	Buktatók	Változatok
Sztereografikus	HD1863 (BESSEL)	Perspek- tív sík	Régi	Régi kataszteri tér- képek; 1945 előtti kato- nai, '70-es évek- ben polgári topog- ráfiai térképek	A polgári rend- szerben DNY-i tá- jékozás és negatív előjelek; A katonai rend- szerben ÉK-i tá- jékozás és eltérő mértékű eltolások	Budapesti; Marosvá- sárhelyi
Hengervetület	HD1909 (BESSEL)	Szögtartó henger	Régi	Kataszteri térké- pek a '70-es éve- kig	DNY-i tájékozás és negatív elője- lek; Nincs eltolt válto- zata	HÉR; HKR; HDR
GAUSS–KRÜGER (1942. évi)	S42 (KRASZOVSZ- KIJ)	Komplex sorfejtés	—	II. világháború és a NATO-csatlako- zás közötti kato- nai térképek	Vezérszám; 500 km eltolás	33; 34

XI.1. táblázat. (folytatás)

Név	Alapfelület	Vetítés	Gömbvet.	Használat	Buktatók	Változatok
EOV	HD72 (IUGG67)	Redukált szög-tartó henger	Új	Polgári topográfiai és kataszteri térképek a '70-es évektől	Nem összetéveszteni a HKR-rel (eltérő alapfelület, kicsinyítés); Az eltolás miatt X és Y nem téveszthető össze	—
UTM	WGS84	Redukált GAUSS-KRÜGER	—	Katonai topográfiai és JOG-térképek a NATO-csatlakozástól	Nincs vezérszám; 500 km eltolás a kicsinyítés után	33; 34

92



XI.1. ábra. Křovák-vetület elve

XI.2. táblázat. Európai országok vetületei

Ország	Alapfelület	Vetület	Megjegyzések
Csehország Szlovákia	S-JSTK (BESSEL)	KřOVÁK (XI.1. ábra)	Kettős leképezés: GAUSS-gömb ($\Phi_n = 49^\circ 30'$, $\Lambda_0 = 24^\circ 50'$), majd egy redukált LAMBERT–GAUSS szögtartó kúpvetület ferdetengelyű elhelyezésben. Segédpólus $\varphi_0 = 59^\circ 45' 27''$; normálparallel $\varphi_n^* = 78^\circ 30'$; kicsinyítés $d = 0,9999$. X északra, Y nyugatra mutat.
Románia	S42 (KRASZOVSZ- KIJ)	Stereo70 (ROUSSILHE)	Ez egy UPS-hez hasonló, ferdetengelyű, nem perspektív, szögtartó vetület közvetlenül ellipszoidról síkra. Nevével ellentétben nem sztereografikus, csak nagyon hasonló hozzá. A gyakorlatban használt képletek komplex sorfejtésből adódnak. Vetületi kezdőpont: $\Phi_0 = 46^\circ$; $\Lambda_0 = 25^\circ$; kicsinyítés: 0,99975; eltolás: 500 km
Ausztria	MGI (BESSEL)	GAUSS– KRÜGER	3°-os zónákat és ferrói kezdőmeridiánt használ, középmeridiánok 28°; 31°; 34° (Greenwichtől 10°20'; 13°20'; 16°20')
Egykori Ju- goszlávia	MGI (BESSEL)	Redukált GAUSS– KRÜGER	3°-os zónák, a kicsinyítés 0,9999, a középmeridiánok 15°; 18°; 21°; 24°. Horvátországban csak egy zónát alkalmaznak 16°30' középmeridiánnal, itt és Szlovéniában már áttértek a WGS84 dátumra.
Ukrajna	S42 (KRASZOVSZ- KIJ)	GAUSS– KRÜGER	3°-os zónák
Lengyelo. (2009 előtt)	S42 (KRASZOVSZ- KIJ)	UKLAD (ROUSSILHE)	Romániához hasonló vetületet használtak, az országot a vajdaságok határai mentén négy zónára osztva külön vetületi kezdőpontokkal. Felső-Sziléziában valamiért GAUSS–KRÜGERT alkalmaztak.
Lengyelo. (2009 után)	WGS84	GAUSS– KRÜGER	3°-os zónák 0,99923-szorosra kicsinyítve.

XI.2. táblázat. (folytatás)

Ország	Alapfelület	Vetület	Megjegyzések
Bulgária (2010 után)	BGS2005 (GRS80)	LAMBERT– GAUSS és UTM	A korábbi szigorúan titkos (ma sem ismert) vetületet a kataszteri és topográfiai célokra két eltérő rendszerrel váltották: előbbi az UTM vetületet használja bolgár alapfelülettel, utóbbi egy két zónára osztott közvetlen ellipszoidi szögtartó kúpvetület $25^{\circ}30'$ középmeridiánnal. Az északi zóna normálparalelköre $43^{\circ}20'$, a délié 42° .
Svájc	CH1903 (BESSEL)	Ferdetenge- lyű szög- tartó hengerve- tület	Ez a kettős leképezés volt a HÉR, HKR és HDR ötletadója. Kezdőpontja a berni csillagvizsgáló ($\Phi = 46^{\circ}57'8,66''$; $\Lambda = 7^{\circ}26'22,5''$), itt van a segédegyenlítő és a kezdőmeridián metszéspontja és ennek szélessége egyúttal a GAUSS-gömb hossztartó szélessége, a negatív előjelek és a koordináták összetévesztése ellen $Y_0 = 600$ km; $X_0 = 200$ km eltolást alkalmaztak. Magyar szempontból igen jelentős, mert az EOV elve csak abban tér el, hogy a GAUSS-gömb hossztartó szélessége nem a vetületi kezdőpontban van (néhány cm eltérést okozva), ezért ha egy térinformatikai szoftver nem ismeri az EOV egyenleteit (ez sajnos a szóba jöhető szoftverek 99%-a), akkor általában a svájci vetület átparaméterezését ajánlja föl.

XI.2. táblázat. (folytatás)

Ország	Alapfelület	Vetület	Megjegyzések
Hollandia	Amersfoort (BESSEL)	Ferdetengelyű metsző sztereografikus	Szintén kettős leképezés, a kezdőpont ezúttal az Amersfoort erőd ($\Phi = 52^{\circ}9'22,18''$; $\Lambda = 5^{\circ}23'15,5''$). A gömbvetület a svájci példához hasonlóan a vetületi kezdőpont szélességén hossztartó. Az érintő sztereografikus vetülethez képest 0,9999079 a kicsinyítés, keleti irányban 155 km, északi irányban 463 km eltolást alkalmaznak, így $x < 280$ km és $y > 300$ km. A vetület magyar szempontból jelentős: ez a budapesti sztereografikushoz leginkább hasonló vetület, átparaméterezéssel centiméter pontossággal tudjuk közelíteni (azaz az eltérés a dátumtranszformáció hibájához képest elenyésző).
Franciao. (2001 előtt)	NTF (CLARKE)	LAMBERT-GAUSS	Ebben a vetületben minden francia. Párizsi kezdőmeridián, minden újfokban. Három kúpvetületre osztották az országot szélességi körök mentén, a normálparallelkörök 55° ; 52° és 49° , Korzikán $46^{\circ}85^c$.
Franciao. (2001 után)	RGF93 (WGS84)	LAMBERT-GAUSS	Most már a nemzetközi trendhez igazodva a franciák is fokban számolnak Greenwichről. Az országot szélességi körök mentén 3° -os övezetekre osztották, és minden sávot külön közvetlen ellipszoidi szögtartó kúpvetületben ábrázolnak. A hossztartó szélességek a sáv középszélességétől $45'$ -re északra és délre találhatók, a középmeridián 3° .
Belgium	WGS84	LAMBERT-GAUSS	A belgák a közelmúltban tértek át a HAYFORD ellipszoidon alapuló BD72 dátumról a WGS84-re, azonban a vetület változatlan. A középmeridián a brüsszeli csillagvizsgálón halad át ($4^{\circ}21'33,18''$), a szögtartó kúpvetület a $49^{\circ}50'$ és $51^{\circ}10'$ szélességeken torzulásmentes.

XI.2. táblázat. (folytatás)

Ország	Alapfelület	Vetület	Megjegyzések
Egyesült Királyság	OSGB1936 (AIRY)	Redukált GAUSS–KRÜGER	Az egész ország egyetlen zóna, a középmeridián a ny. h. 2° , a kicsinyítés kb. 0,9996 (a méter és a láb közötti átváltás miatt nem pontosan). A függőleges tengely a középmeridiántól 400 km-re keletre, a vízszintes a középmeridián és a 49° szélesség metszéspontjától 100 km-re északra lett eltolva.
Írország	IRENET95 (GRS80)	Redukált GAUSS–KRÜGER	A leképezés elve a brithez rendkívül hasonló, a középmeridián ny. h. 8° , ennek és az $53^\circ 30'$ szélességnek a metszéspontja a vízszintes tengelyen 600 km-re, a függőlegesen 750 km-re esik, a kicsinyítési tényező 0,99982.

Tizenkettedik előadás

Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

XII.1. Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük azokat a többismeretlenes egyenletrendszereket, amelyekben csak összeadás-kivonás és az ismeretlenek konstanssal való szorzása szerepel. Nézzük meg például a következő egyenletrendszert, ahol x és y az ismeretlenek:

$$\begin{aligned}ax + by &= e \\ cx + dy &= f\end{aligned}$$

Egy ilyen egyenletrendszer megoldható a középiskolában tanult módszerekkel. Átrendezés után ezt a megoldást kapjuk:

$$\begin{aligned}x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{af - ec}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

Vegyünk észre néhány dolgot! Először is azt, hogy az eredeti egyenletrendszer a mátrixok szorzásáról tanultak (I.3. fejezet) alapján így is fölírható:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Nézzük meg újra a kapott megoldásokat! Mindkét megoldás nevezőjében az előbbi egyenlet *együtthatómátrixának* a determinánsa (I.4. fejezet) áll,

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

melyet *fődetermináns*nak nevezünk. Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a fődetermináns nem nulla (ekkor nem kell nullával osztani). Ha a fődetermináns nulla, akkor az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.

Vigyázzó szemünket a számlálókra vessük! Ezek is fölírhatók determináns alakban, sőt egyetlen oszlop kivételével ezek a determinánsok meg is egyeznek a fődeterminánssal. Az az oszlop változott meg, amelyik az épp kérdéses ismeretlen együtthatóit tartalmazta, ide az egyenlet jobb oldalán álló *szabadvektor* tagjai kerültek. Bebizonyítható, hogy ez az elv akárhány ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre működik, ha pontosan ugyanannyi egyenletünk van, ahány ismeretlenünk. Ennek belátása bár csak a négy alapműveletet igényli, igen hosszadalmas, ezért eltekintünk tőle. Ezt a megoldóképletet *CRAMER-szabálynak* nevezzük, és kevés ismeretlenből álló egyenletrendszer megoldására használható.*

Vegyük a következő n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Akkor x_i ismeretlen megoldása CRAMER-szabállyal:

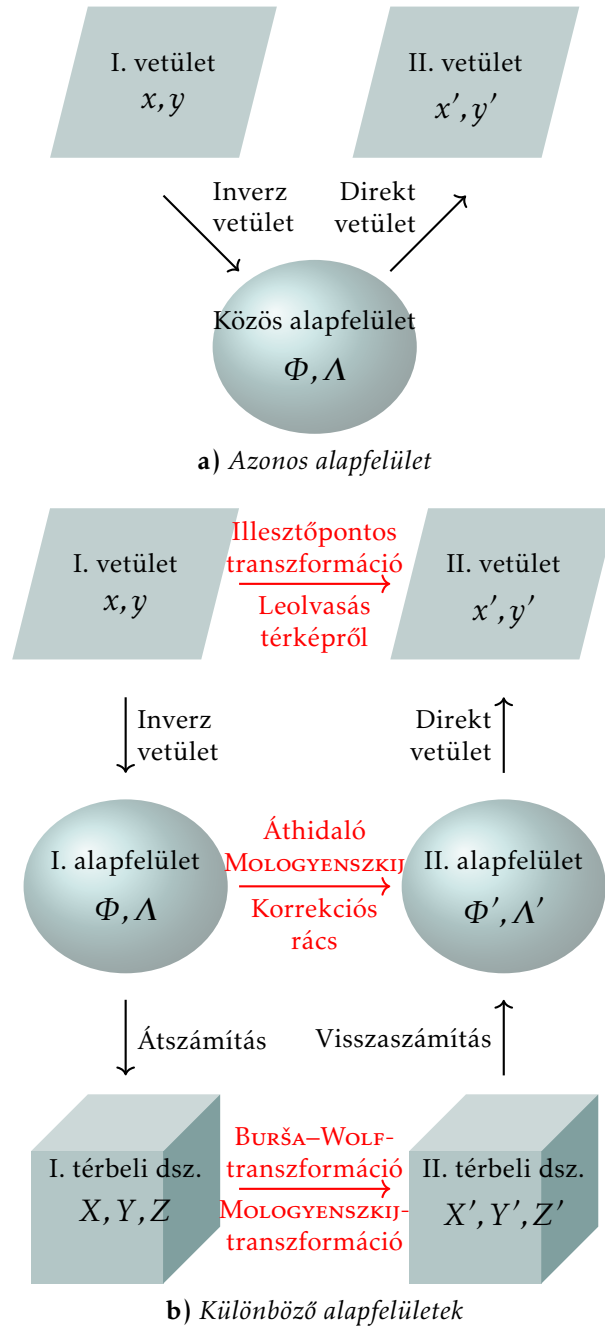
$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

XII.2. Átszámítás alapfelületi koordinátákkal

Adott egy pontunk egy koordináta-rendszerben. Hogyan tudnánk ugyan-
ezt a pontot egy eltérő rendszerben megtalálni? Pontatlan, de gyors leolva-
sást biztosít, ha van olyan térképünk, amelyen minkét rendszert fölűntet-
ték. A többzónás vetületi rendszerekben a zónák széleinél a térképkereten

* Sok ismeretlen esetén egy másik megoldóképlet, a *GAUSS-JORDAN-elimináció* sokkal hatékonyabb.

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között



XII.1. ábra. Átszámítás lehetőségei koordináta-rendszerek között

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

örvonalakkal gyakran föltüntetik a szomszéd zóna koordinátáit, hogy az átszámítást gyorsítsák.

A pontosabb módszerek alkalmazhatóság attól függ, hogy a két vetület azonos vagy különböző alapfelületet használ (XII.1. ábra). Azonos alapfelület esetén az átszámítás egzakt módon történik a *koordináta-módszer* segítségével. A vetületi koordinátákat a vetület *inverz* képleteivel visszazámítjuk az alapfelületre, majd a másik vetület egyenleteit alkalmazva meg is kaptuk a pont képét a második rendszerben. Ezt a módszert alkalmazhatjuk például a budapesti és a marosvásárhelyi koordináták, a HÉR / HKR / HDR vetületek között vagy akár a GAUSS–KRÜGER-vetület zónái között. Szintén megfelelő az UTM-zónák és az UPS között is. Fontos, hogy az alapfelület azonos legyen, tehát nem számolhatunk át így például UTM-ből GK-be vagy HKR-ből EOVB-ba.

Különböző alapfelületek esetén csak közelítő megoldásokkal számolhatunk. Ekkor is van értelme az alapfelületi koordinátákat számítani, azonban a két dátum közti eltérést korrigálnunk kell MOLOGYENSKIJ- vagy BURŠA–WOLF-transzformációval (VII.2. fejezet). A transzformációk paramétereit olyan illesztőpontok alapján tudjuk meghatározni, amelyeknek koordinátáit és ellipszoid fölötti magasságait mindkét dátumon ismerjük. A kb. 5-20 m pontosságot biztosító MOLOGYENSKIJ-transzformációhoz egyetlen illesztőpont kell, a jellemzően 0,5-2 m pontosságú BURŠA–WOLF-transzformáció legalább három ilyen pontot igényel. Ezért a csekélyebb pontosság ellenére a MOLOGYENSKIJ-féle 3 paraméteres módszer ma is kedvelt, sőt ennek van olyan áthidaló képlete is, amely nem igényli a térbeli derékszögű koordináták kiszámítását.

A QGIS alkalmazásban ha egy adott vetületet először alkalmazunk, egy párbeszédablakot dob föl, hogy az adatbázisban szereplők közül melyik transzformációt válasszuk. Ha a paramétersor három paramétert tartalmaz, akkor MOLOGYENSKIJ, ha hét paramétert látunk, akkor a pontosabb BURŠA–WOLF-transzformációt fogja alkalmazni.

Alternatív lehetőségként nagyobb pontosság érdekében *korrekciós rácsot* szoktak még a térinformatikai rendszerek biztosítani, amely gyakorlatilag egy raszteres állományból interpolálva helyről-helyre más értékeket ad hozzá vagy von ki a földrajzi koordinátákból. Ez deciméteres pontosságot eredményez, azonban számításigénye nagy, hiszen a helyben érvényes eltolásokat lassú a raszterből kikeresni.

XII.3. Átszámítás illesztőpontokkal

Mivel úgysem lehet két eltérő dátum között szabatos módon átszámítani, fölmerül a kérdés, hogy nem lehet-e közvetlenül becsülni az új $x';y'$ koor-

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

dinátákat a régi $x; y$ alapján egy $x'(x; y)$ és $y'(x; y)$ függvénypárral. Tegyük föl, hogy az új koordináta közel lineárisan függ a régiektől:

$$x' = a + bx + cy$$

$$y' = d + ex + fy$$

Hat ismeretlen paraméterünk van a és f között betűzve. Minden egyes illesztőpont, amelyet ismerünk mindkét rendszerben, két egyenletet ad meg a fenti összefüggés szerint. Tehát hat egyenletre, azaz három illesztőpontra lesz szükségünk. Most csak az x' koordinátára vonatkozó három egyenletet írom föl:

$$x'_1 = a + bx_1 + cy_1$$

$$x'_2 = a + bx_2 + cy_2$$

$$x'_3 = a + bx_3 + cy_3$$

Ez egy háromismeretlenes lineáris egyenletrendszer, amely megoldható CRAMER-szabállyal:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & x_1 & y_1 \\ x'_2 & x_2 & y_2 \\ x'_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y_1 \\ 1 & x'_2 & y_2 \\ 1 & x'_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x'_1 \\ 1 & x_2 & x'_2 \\ 1 & x_3 & x'_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$

Az y' -t tartalmazó egyenletekből ugyanígy vezethető le a maradék három együttható:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} y'_1 & x_1 & y_1 \\ y'_2 & x_2 & y_2 \\ y'_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y'_1 & y_1 \\ 1 & y'_2 & y_2 \\ 1 & y'_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad f = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y'_1 \\ 1 & x_2 & y'_2 \\ 1 & x_3 & y'_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$

Most már bármilyen új $x; y$ párra meg tudjuk becsülni az $x'; y'$ koordinátapárt az előző paraméterekből, a becsült koordinátákat kalappal jelölve:

$$\hat{x}' = a + bx + cy$$

$$\hat{y}' = d + ex + fy$$

Ezt a módszert *lineáris transzformációnak* nevezzük.* Pontossága függ az illesztőpontok elrendezésétől: ha egymáshoz közel (pár száz méter) esnek,

* A QGIS egy ennél sokkal előnytelenebb transzformációt hív lineárisnak, az itt tárgyalt transzformációt Affin néven találjuk.

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

akár deciméteres pontosságot is elérhetünk azon a területen, ez meglepő módon még a BURŠA–WOLF-transzformációnál is jobb. Országnyi területen ugyanakkor már 100 m pontosságnak is örülhetünk. Ha a pontok nagyjából egy egyenes mentén helyezkednek el, akkor a pontosság drasztikusan romlik, mert a nevezőben lévő fődetermináns nullához közelít.

Mit tegyünk, ha csak két illesztőpontot tudunk figyelembe venni? Ilyenkor választhatjuk a HELMERT-transzformációt, amely csak négy ismeretlent: egy x és egy y irányú eltolást, egy elforgatást és egy nagyítást tartalmaz.*

$$\begin{aligned}x' &= x_0 + xs \cos \delta + ys \sin \delta \\y' &= y_0 - xs \sin \delta + ys \cos \delta\end{aligned}$$

Két pontra fölírva négy egyenlet, négy ismeretlen. Ez az egyenletrendszer lineárisra tehető az $a = s \sin \delta$; $b = s \cos \delta$ helyettesítéssel.

És mit tehetünk akkor, ha több illesztőpontunk van? Ilyenkor figyelembe vehetjük az eredeti x ; y koordináták magasabb fokszámú kifejezéseit. n -ed fokú tagokig számolva most csak az x' koordinátát (feltételezve, hogy x' x és y sima függvénye):

$$x' = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^i y^j$$

A szummákat kifejtve látszik, hogy $m = (n+1)(n+2)/2$ féle a_{ij} ismeretlen együttható van, ennyi illesztőpontra lesz szükségünk. Tehát másodfokú illesztéshez 6, harmadfokúhoz 10, negyedfokúhoz pedig 15 illesztőpontot tudunk fölhasználni. A fokszám emelése egy ideig javítja a pontosságot, azonban a fák sem nőnek az égig: a nagyon magas fokszámú polinomok hirtelen kanyarodhatnak, az adatsorunkban található mérési hibákat nem kívánt mértékben fölnagyíthatják. Általában negyedik fokig van értelme

* Georeferálásnál több illesztőpont esetén is érdemes a HELMERT-transzformációt választani, hiszen ha a papír nem régi, akkor csak a térképlap elfordulásával és a szkener felbontásával kell számolnunk. Régi térképek esetén a papír a két merőleges irányban más mértékben nyúlik, ezt már csak a lineáris transzformáció tudja modellezni.

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

elmenni, már ez is igen kedvező, deciméteres pontosságot nyújthat ország-résznyi területre. Az a_{ij} együtthatókra a megoldást lineáris egyenletrendszer szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & \dots & y_1^n \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & \dots & y_2^n \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & \dots & y_3^n \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & \dots & y_4^n \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & \dots & y_5^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & x_m y_m & \dots & y_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

A másik koordinátát hasonló képlettel jellemezhetjük:

$$y' = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} b_{ij} x^i y^j$$

A b_{ij} együtthatók megkaphatók ugyanazokból az illesztőpontokból a fenti egyenletrendszerbe a_{ij} helyett b_{ij} -t, x'_i helyére y'_i -t írva. Az eljárás neve *polinomos transzformáció*.

Ritka, hogy nekünk éppen 3, 6, 10 vagy 15 illesztőpontunk lenne. Ilyenkor szelektálhatunk valamilyen megfontolással, például a leginkább kilógó méréseket eldobhatjuk, de próbálkozhatunk az összes pontunkat figyelembe véve közepes paraméterkészletet kapni. Tegyük föl, hogy pontjainkat *normális eloszlású hibák* terhelik!* Ekkor a legnagyobb valószínűségű a_{ij} paraméterkészletet a *legkisebb négyzetek módszere* biztosítja. Legyen x' a tényleges x koordináta az új rendszerben, \hat{x}' a becslt:

$$\hat{x}' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^i y^j$$

A becslt értékeket olyannak szeretnénk megkapni, hogy a becslés hibája az m darab illesztőpontunkra minimális legyen. A becslés hibáját úgy definiáljuk, hogy a k -adik illesztőpont tényleges x'_k koordinátájának és a transzformáció által becslt \hat{x}'_k koordinátájának az eltérését négyzetre

* A mérési hibák a szabályos hibák kiküszöbölése után általában valóban közelítőleg normális eloszlásúak.

XII. Átszámítás sík-koordinátarendszerek között

emeljük (az abszolútérték nem jó, mert nem differenciálható), majd ezeket minden pontra összegezzük:

$$\sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2 \rightarrow \min$$

A fenti kifejezés ott minimális, ahol a deriváltja minden a_{ij} szerint zérus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{k=1}^m (\hat{x}'_k - x'_k)^2}{\partial a_{ij}} &= \sum_{k=1}^m 2(\hat{x}'_k - x'_k) \frac{\partial \hat{x}'_k}{\partial a_{ij}} = 0 \\ \sum_{k=1}^m \hat{x}'_k x_k^i y_k^j &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \\ \sum_{k=1}^m (a_{00} + a_{10} x_k + a_{01} y_k + \dots) x_k^i y_k^j &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \\ a_{00} \sum_{k=1}^m x_k^i y_k^j + a_{10} \sum_{k=1}^m x_k^{i+1} y_k^j + a_{01} \sum_{k=1}^m x_k^i y_k^{j+1} + \dots &= \sum_{k=1}^m x'_k x_k^i y_k^j \end{aligned}$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk a_{ij} -re, hiszen i és j bármilyen értéket fölvehet. A megoldandó egyenletrendszer mátrix alakja:

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_k & \sum y_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & \dots & \sum y_k^n \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & \sum x_k^3 & \sum x_k^2 y_k & \dots & \sum x_k y_k^n \\ \sum y_k & \sum x_k y_k & \sum y_k^2 & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k y_k^2 & \dots & \sum y_k^{n+1} \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k^4 & \sum x_k^3 y_k & \dots & \sum x_k^2 y_k^n \\ \sum x_k y_k & \sum x_k^2 y_k & \sum x_k y_k^2 & \sum x_k^3 y_k & \sum x_k^2 y_k^2 & \dots & \sum x_k y_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum y_k^n & \sum x_k y_k^n & \sum y_k^{n+1} & \sum x_k^2 y_k^n & \sum x_k y_k^{n+1} & \dots & \sum y_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x'_k \\ \sum x'_k x_k \\ \sum x'_k y_k \\ \sum x'_k x_k^2 \\ \sum x'_k x_k y_k \\ \vdots \\ \sum x'_k y_k^n \end{pmatrix}$$

a_{ij} helyére b_{ij} -t és x'_k helyére y'_k -t írva írva, a b_{ij} -k segítségével felírt \hat{y}'_k kifejezésekkel az y koordináta értékei ugyanígy becsülhetők. Ez a módszer kissé javítja az elérhető pontosságot, azonban a kilógó, hibás értékek esetén a transzformáció pontossága nagy mértékben romlik.

Bár gyakran pontosabb a paraméteres transzformációknál, a térinformatikai rendszerek általában vetületek között nem, hanem kizárólag a georeferálás során támogatják az illesztőpontos transzformációkat, amelyet jellemzően az itt ismertetett legkisebb négyzetek módszerével implementálnak, pedig a lineárisnál magasabb fokszámoknak elsősorban épp különböző vetületek közötti átszámításnál lenne értelme.

A. függelék

Gyakorlati feladatok megoldásai

1. gyakorlat Középiskolás matematika

A térkép méretaránya 1 : 10 000, a libegő hossza rajta 102 mm, az alsó állomás 225 m, a felső 485 m magasan található. Milyen meredek a pálya? Milyen hosszú a libegő?

$$l = 1020 \text{ m}; \Delta h = 260 \text{ m}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h}{l}; \alpha = 14,3^\circ; s = \sqrt{\Delta^2 h + l^2} = 1053 \text{ m}$$

A figuráns ferde távolsága (s) 26 m, a magasságkülönbség (h) 10 m. Mennyi a vízszintes távolság? Milyen meredek a lejtő?

$$l = \sqrt{s^2 - h^2} = 24 \text{ m}; \sin \alpha = \frac{h}{s}; \alpha = 22,62^\circ$$

Milyen messze van egymástól a Kékes ($\varphi_1 = 47^\circ 51'$; $\lambda_1 = 20^\circ$) és a Kriván ($\varphi_2 = 49^\circ 10'$; $\lambda_2 = 20^\circ$)?

$$R = 6371 \text{ km}; \vartheta = \varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ 19' = 0,0229802; s = R\widehat{\vartheta} = 146,407 \text{ km}$$

Ön a tengerben úszik. Feltűnik egy $h = 4$ m magas yacht árbócának a csúcsa. Mennyit kell úszni, hogy elérje?

$$\cos \vartheta = \frac{R}{R+h}; \vartheta = 0,064204^\circ; s = R\widehat{\vartheta} = 7139,18 \text{ m}$$

2. gyakorlat Középiskolás matematika (folytatás)

Összelátszik-e a Kékes és a Kriván? (Adatok az előző gyakorlatnál.)
Magasságok: $h_1 = 1014$ m; $h_2 = 2494$ m.

$d^2 = (R+h_1)^2 + (R+h_2)^2 - 2(R+h_1)(R+h_2)\cos \vartheta$; $d = 146451$ m; $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \vartheta} = \frac{R+h_1}{d}$;
 $\varepsilon = 88,7627^\circ$; $\sin \varepsilon = \frac{R+h_1}{R+h_2}$; $h = 1007,89$ m. Mivel van ennél magasabb hegy a két csúcs között, nem látszanak össze.

Egy háromszög csúcsának térbeli derékszögű koordinátái: $A(5; 13; 1)$; $B(1, 1, -5)$; $C(3; 7; -8)$. Mekkora az oldalai, szögei és a területe?

A. Gyakorlati feladatok megoldásai

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-4; -12; -6); \vec{AC} = (-2; -6; -9); \vec{BC} = (2; 6; -3); AB = 14, AC = \\ &= 11; BC = 7; \vec{AB} \vec{AC} = |AB||AC| \cos \alpha; \alpha = 29,53^\circ \beta = 50,75^\circ; \gamma = 99,72^\circ; \\ s &= 16; T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 37,95 \end{aligned}$$

3. gyakorlat Foktrapéz; Síkkoordináták

Colorado államot az é. sz. $37^\circ-41^\circ$ és ny. h. $25^\circ-32^\circ$ fokhálózati vonalak határolják (Washingtoni kezdőmeridián). A Wikipédia szerint az állam terüete 269837 km^2 . Ellenőrizzük az állítást!

$$A = |R^2(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)(\widehat{\lambda}_2 - \widehat{\lambda}_1)| = 268994 \text{ km}^2$$

Adottak a polgári koordináták ($Y = -1135,40$; $X = +1359,93$), mennyi a katonai koordináta? (Az eltolás 500 km , tengelyek ellenkező irányban.)

$$Y_{KAT} = 501135,40; X_{KAT} = 498640,07$$

Y É-ra, X K-re mutat, ω déli iránytól nézve keletre pozitív. Mennyi a polárkoordinátája a $(-5; -8)$ pontnak?

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = 9,4340; 360^\circ - \omega = \arctg \frac{-X}{-Y}; \omega = 328^\circ$$

Y délre, X keletre pozitív, ω déltől keletre növekszik. $\rho = 2$; $\omega = 28^\circ$. Mennyi a derékszögű koordináta?

$$X = \rho \sin \omega = 0,9389; Y = \rho \cos \omega = 1,7659$$

Tájfutó térkép alsó sarka ($Y_0 = 651000$; $X_0 = 236500$). Budapesten a mágneses deklináció $\delta = 4^\circ 56'$ keletre. Hová rajzoljam a térképen az $Y = 651058$; $X = 236623$ pontot?

$$X' = X - X_0; Y' = Y - Y_0; \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127,532 \\ 47,208 \end{pmatrix}$$

4. gyakorlat Ívhosszak a gömbön

Rejkavík koordinátái é. sz. $64^\circ 9'$; ny. h. $21^\circ 53'$. Milyen hosszú utat teszünk meg Budapestig (é. sz. $47^\circ 30'$; k. h. $19^\circ 2'$) ortodróma mentén? Milyen irányban induljunk?

$$\begin{aligned} \cos \frac{s}{R} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda; s = 3070,419 \text{ km}; \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_2} = \\ &= \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin(s/R)} \text{ vagy } \sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \frac{s}{R} + \cos \varphi_1 \sin \frac{s}{R} \cos \alpha; \text{ Szinuszt. } 72,6821^\circ, \\ &\text{koszinuszt. } 107,3178^\circ! \text{ Oka: } \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha); \cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha). \text{ A} \\ &\text{koszinusztétel adott most helyes megoldást.} \end{aligned}$$

És loxodrómán haladva?

A. Gyakorlati feladatok megoldásai

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\widehat{\Delta\lambda}}{\operatorname{Intg}(45^\circ + \varphi_2/2) - \operatorname{Intg}(45^\circ + \varphi_1/2)}; \alpha = 126,4471^\circ \text{ (Ne feledjük, } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ)\text{!)}; s = R \frac{\Delta\varphi}{\cos \alpha} = 3116,407 \text{ km}$$

5. gyakorlat Ellipszoidi geometria

Bessel: $a = 6377397,155 \text{ m}; f = 1/299,1528128. b = ?; e^2 = ?$
 $b = a - af = 6356078,963 \text{ m}; e^2 = 2f - f = 0,006674372231$

IUGG 67: $a = 6378160 \text{ m}; e^2 = 0,00669460532857. b = ?; f = ?$
 $b = \sqrt{a^2(1 - e^2)} = 6356774,516 \text{ m}; f = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1/298,247167427$

WGS 84: $a = 6378137; e^2 = 0,00669437999014$; Mennyi a $\Phi_1 = -22^\circ$ parallel hossza a $\Lambda_1 = 20^\circ$ és $\Lambda_2 = 21^\circ$ között?

$$N(\Phi_1) = 6381135 \text{ m}; p = N(\Phi_1) \cos \Phi_1 \widehat{\Delta\Lambda} = 103262 \text{ m.}$$

Milyen hosszú a Λ_2 meridián Φ_1 és $\Phi_2 = -18^\circ 19'$ között?

$$M([\Phi_1 + \Phi_2]/2) = 6343122 \text{ m}; m = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} M(\Phi) d\Phi \approx M([\Phi_1 + \Phi_2]/2) \widehat{\Delta\Phi} = 407776 \text{ m. (A pontosság } \pm 10 \text{ m.)}$$

6. gyakorlat (Kis ZH után) Geodéziai alapfeladatok

$$Y_A = 658031,81; X_A = 247985,58; t_{AB} = 859,26; \delta_{AB} = 267^\circ 12' 49''; Y_B = ?; X_B = ?$$

$$Y_B = Y_A + t_{AB} \sin \delta_{AB} = 657173,57; X_B = X_A + t_{AB} \cos \delta_{AB} = 247943,81$$

7. gyakorlat Geodéziai alapfeladatok (folytatás)

$$Y_A = 658310,44; X_A = 248489,88; Y_B = 658077,70; X_B = 247431,38; t_{AB} = ?; \delta_{AB} = ?$$

$$t_{AB} = \sqrt{\Delta^2 X + \Delta^2 Y} = 1083,79; \delta_{AB} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 192^\circ 24' 3''$$

Kékes é. sz. $47^\circ 52' 20,57''$; k. h. $0^\circ 57' 55,56''$; Csóványos $s = 80446,07 \text{ m}$;
 $\alpha = 276^\circ 8' 14''$; $\varphi_B = ?$; $\lambda_B = ?$

$$\varphi_B = \arcsin(\sin \varphi_A \cos \frac{s}{R} + \cos \varphi_A \sin \frac{s}{R} \cos \alpha) = 47^\circ 56' 41,01''; \lambda_B = \lambda_A + \arcsin \frac{\sin \alpha \sin(s/R)}{\cos(\varphi_B)} = -0^\circ 6' 30,46''$$

8. gyakorlat Sztereografikus vetület

Bessel (HD1863): $\Phi = 46^\circ 35' 26,29''$; $\Lambda = 25^\circ 4' 34,42''$; Számítandó

A. Gyakorlati feladatok megoldásai

a marosvásárhelyi katonai sztereografikus: $Y_{Mvh} = 652388,71$; $X_{Mvh} = 604545,34$

9. gyakorlat Hengervetületek

HÉR: $Y = -160308,11$, $X = 34593,11$; Számítandó a Bessel (HD1909):
 $\Phi = 48^{\circ}23'2,60''$; $\Lambda = 21^{\circ}12'59,01''$

10. gyakorlat EOVS

EOV: $Y = 699204,13$, $X = 174000,22$; Számítandó a HD72: $\Phi = 46^{\circ}54'31,24''$; $\Lambda = 19^{\circ}41'40,07''$

11. gyakorlat MGRS; Lineáris transzformáció

Rajkai zsilip MGRS: 33UXP652200 Számítandó az UTM: 33U 665279
5320071

Kocka büfé UTM: 34T 353730 529643 Számítandó az MGRS:
34TCT5373059643

Pont	$Y_{UTM_{34}}$	$X_{UTM_{34}}$	Y_{EOV}	X_{EOV}
1	457278	5167360	756698	146960
2	320374	5202981	618925	179170
3	517292	5359841	811911	340954
4	434124	5224960	Számítandó	

$$Y_{EOV} \approx 732113; X_{EOV} \approx$$

≈ 203988 ; A becslés hibája kb. 10 m.

12. gyakorlat Nagy ZH

B. függelék

Magyarországi vetületek képletei

Szögtartó gömbvetület

Direkt:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \left[\varkappa \operatorname{tg}^n \left(45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{ne}{2}} \right] - 90^\circ$$
$$\lambda = n(\Lambda - \Lambda_0)$$

Inverz (itt Φ kezdőértéke φ):

$$\Phi'' = 2 \operatorname{arctg} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{\varkappa \left(\frac{1 - e \sin \Phi'}{1 + e \sin \Phi'} \right)^{\frac{ne}{2}}}} - 90^\circ$$
$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{\lambda}{n}$$

Fokhálózat-elforgatás

Segédpólus ismert:

$$\sin \varphi^* = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\operatorname{tg} \lambda^* = \frac{-\sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi - \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi^* \sin \varphi_0 + \cos \varphi^* \cos \varphi_0 \cos \lambda^*$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) = \frac{-\sin \lambda^*}{\cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi^* - \sin \varphi_0 \cos \lambda^*}$$

Segédegyenlítő és segéd-kezdőmeridián metszéspontja ismert:

$$\sin \varphi^* = \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k)$$

$$\operatorname{tg} \lambda^* = \frac{\sin(\lambda - \lambda_k)}{\sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi + \cos \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k)}$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi^* \cos \varphi_k + \cos \varphi^* \sin \varphi_k \cos \lambda^*$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_k) = \frac{\sin \lambda^*}{\cos \varphi_k \cos \lambda^* - \sin \varphi_k \operatorname{tg} \varphi^*}$$

B.1. táblázat. Szögtartó gömbvetület konstansai

	Jelölés	Régi gömbvetület	Új gömbvetület
Alapfelület	—	BESSEL-ellipszoid	IUGG1967-ellipszoid
Képfelület	—	Régi GAUSS-gömb	Új GAUSS-gömb
Félnagy tengely	a	6 377 397,155 m	6 378 160 m
Félkiştengely	b	6 356 078,963 m	6 356 774,516 m
Első numerikus excentricitás	e	0,081 696 683 121 57	0,081 820 567 940 7
Gauss-gömb sugara	R	6 378 512,966 m	6 379 743,001 m
	κ	1,003 016 135 133	1,003 110 007 693
	n	1,000 751 489 594	1,000 719 704 936
Hossztartó szélesség	Φ_n	46°32'43,41041''	47°10'
Hossztartó szélesség	φ_n	46°30'	47°7'20,05780''
Kezdőhosszúság Ferrótól	Λ_o	36°42'53,5733''	—
Kezdőhosszúság Greenwichtől	Λ_o	19°3'7,5533''	19°2'54,8584''

B.2. táblázat. Fokhálózat-elforgatások

	Jelölés	Budapest	Marosvh.	HÉR	HKR	HDR	EOV
Ellipszoidi szélesség	Φ_o / Φ_k	47°29' 9,6380''	46°33' 6,4273''	48°42' 56,3180''	47°8' 46,7267''	45°34' 36,5869''	47°8' 39,8147''
Ellipszoidi hosszúság (Ferrótól, EOV esetén Greenwichtől)	Λ_o / Λ_k	36°42' 53,5733''	42°3' 20,9550''	36°42' 53,5733''	36°42' 53,5733''	36°42' 53,5733''	19°2' 54,8584''
Gauss-gömbi szélesség	φ_o / φ_k	47°26' 21,1372''	46°30' 22,9804''	48°40'2''	47°6'	45°31'59''	47°6'
Gauss-gömbi hosszúság (Gellérthegytől)	λ_o / λ_k	0°	+5°20' 41,8290''	0°	0°	0°	0°

Sztereografikus vetület

Egyenlete ($\beta^* = 90^\circ - \varphi^*$):

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{\beta^*}{2}$$

$$\beta^* = 2 \operatorname{arctg} \frac{\rho}{2R}$$

Polárkoordináták és polgári rendszer átszámítás:

$$Y = \rho \sin \lambda^*$$

$$X = -\rho \cos \lambda^*$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\operatorname{tg} \lambda^* = \frac{Y}{-X}$$

Közvetlen oda-vissza képletek:

$$Y = -2R \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

$$X = -2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{R \sin \varphi_0 (1 - t) - X \cos \varphi_0}{R(1 + t)}$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{-Y}{R \cos \varphi_0 (1 - t) + X \sin \varphi_0} + \lambda_0$$

ahol

$$t = \frac{X^2 + Y^2}{4R^2}$$

Katonai koordináta-rendszerek:

$$X_{KAT} = C - X$$

$$Y_{KAT} = C - Y$$

Ivanicsi rendszer esetén a polgári (és emiatt az eltolással kapott katonai) koordináták vetületnélküli rendszerben vannak, ezért szabatosan nem számíthatók, a CASSINI–SOLDNER-vetülettel becsülhetők. Ezzel a rendszerrel csak az egykori Horvát–Szlavónországban találkozunk.

Szögtartó hengervetület

Egyenletei:

$$Y = cR\lambda^* + Y_0$$

$$X = cR \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2}\right) + X_0$$

Közvetlen oda-vissza képletek:

$$Y = cR \operatorname{arctg} \frac{\sin(\lambda - \lambda_k)}{\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi_k + \cos \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k)} + Y_0$$

$$X = \frac{cR}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi \cos \varphi_k - \cos \varphi \sin \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k)}{1 - \sin \varphi \cos \varphi_k + \cos \varphi \sin \varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k)} + X_0$$

$$\varphi = \operatorname{arcsin} \left[\frac{(t-1) \cos \varphi_k}{1+t} + \frac{2 \sin \varphi_k}{1+t} \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right]$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{2z \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{(1-t) \sin \varphi_k + 2 \cos \varphi_k \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}} + \lambda_k$$

ahol

$$t = e^{\frac{2(X-X_0)}{cR}}$$

$$z = \operatorname{tg} \frac{Y - Y_0}{cR}$$

B.3. táblázat. *Katonai koordináták eltolása*

Jelölés	Budapest	Marosvásárhely	Ivanics
C	500 000 m	600 000 m	400 000 m

B.4. táblázat. *Hengervetületek konstansai*

Jelölés	HÉR / HKR / HDR	EOV
c	-1	0,999 93
X ₀	0 m	200 000 m
Y ₀	0 m	650 000 m

C. függelék

Fontosabb matematikai összefüggések

Alább következnek néhány olyan képlet, amelyeket a jegyzetben található levezetések során fölhasználhatunk. Az azonosságok itt a teljesség igénye nélkül szerepelnek, elsősorban a térképészek számára fontosabb átalakítások kaptak helyet.

Trigonometrikus azonosságok

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

C. Fontosabb matematikai összefüggések

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 + \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right) / \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) / \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) / \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) / \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

Logaritmus azonosságok

$$\begin{aligned}e^{\ln a} &= a \\ -\ln a &= \ln \frac{1}{a} \\ \ln a + \ln b &= \ln(ab) \\ \ln a - \ln b &= \ln \frac{a}{b} \\ c \ln a &= \ln a^c \\ \frac{1}{c} \ln a &= \ln \sqrt[c]{a} \\ \operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{arth} \sin \alpha &= \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\operatorname{arth} \cos \alpha &= \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

Függvények deriváltja és primitív függvénye

Az alábbi táblázatot úgy kell használni, hogy a bal oldali függvény jobb párja a deriváltja, a jobb oldali függvény bal párja a határozatlan integrálja az x változó szerint. Az integrálást követően egy konstánst hozzá kell adni az eredményhez!

$\frac{d}{dx}$	\rightarrow	\leftarrow	$\int dx$
c			0
x			1
cx			c

C. Fontosabb matematikai összefüggések

x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	x^α
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{Intg} \frac{x}{2}$	$\frac{1}{\sin x}$
$\operatorname{Intg} \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$	$\frac{1}{\cos x}$
$\operatorname{arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Összetett függvények deriváltja

$$\frac{d}{dx}(f+c) = \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cf = c\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}fg = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

C. Fontosabb matematikai összefüggések

$$\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df}{dg}[g(x)] \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d}{dx} f^{-1} = \frac{1}{\frac{df}{dx}[f^{-1}(x)]} = \frac{dx}{df}$$

Összetett függvények primitív függvénye

Az alábbi képletekben F primitív függvénye f -nek:

$$\int cf \, dx = c \int f \, dx$$
$$\int f \pm g \, dx = \int f \, dx \pm \int g \, dx$$
$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$
$$\int f^\alpha \frac{df}{dx} \, dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$
$$\int \frac{\frac{df}{dx}}{f} \, dx = \ln f + c$$
$$\int \frac{\frac{df}{dx}}{1+f^2} \, dx = \operatorname{arctg} f + c$$
$$\int \frac{\frac{df}{dx}}{1-f^2} \, dx = \operatorname{arth} f + c$$
$$\int f[g(x)] \frac{dg}{dx} \, dx = F[g(x)] + c$$
$$\int \frac{df}{dx} g \, dx = fg - \int f \frac{dg}{dx} \, dx$$

Szeperábilis differenciálegyenlet megoldása

Ha:

$$g(f)h(x) \frac{df}{dx} = 1$$

Akkor:

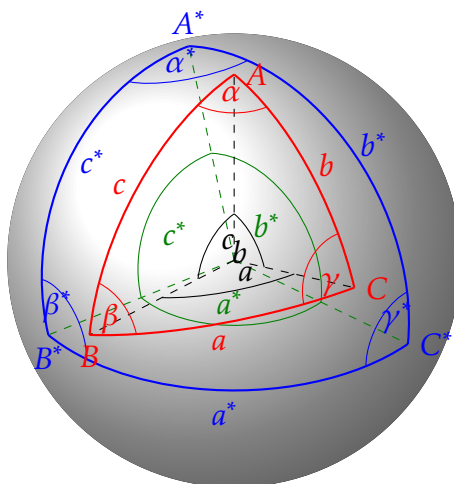
$$\int g(f) \, df = \int \frac{1}{h(x)} \, dx + c$$

D. függelék

Szögkoszinusztétel és második alapforma

Ebben a függelékben a IV.1. fejezetben bizonyítás nélkül közölt gömbháromszögtani tételek egy lehetséges levezetése olvasható az érdeklődők számára. Ezeknek tárgyalására a törzsanyagban azért nem került sor, mert ritkán van rájuk szükség, azonban levezetésük hozzájárul a gömbi geometria mélyebb megértéséhez.

Jelölje a gömb középpontjából az ABC gömbháromszög csúcsaiba mutató vektorokat $\vec{A}; \vec{B}; \vec{C}$! Legyen \vec{A}^* a $\vec{B} \times \vec{C}$ vektoriális szorzat irányába mutató egységvektor; azaz a gömbháromszög a oldalát tartalmazó síkra a gömb középpontján át emeljük merőleget, és annak a gömbbel való két metszéspontja közül az legyen az A^* pont, amelyik az A -hoz közelebb esik! Hasonló szerkesztéssel jelöljük ki a B^* és C^* pontokat is! Az $A^*B^*C^*$ gömbháromszöget az ABC háromszög *poláris gömbháromszögének* nevezzük (D.1. ábra).

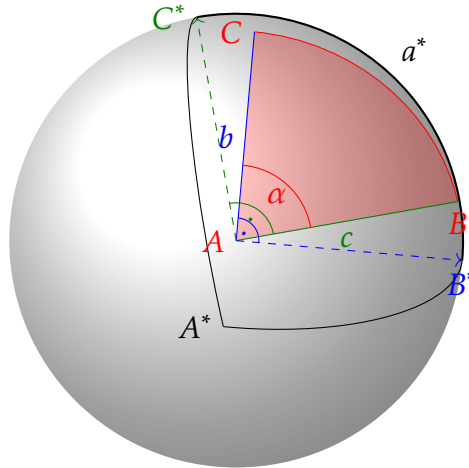


D.1. ábra. Poláris gömbháromszög

Definíció szerint \vec{B}^* merőleges a b oldal síkjára, azaz az \vec{A} és \vec{C} vektorokra is, továbbá \vec{C}^* merőleges a c oldal síkjára, vagyis az \vec{A} és \vec{B} vektorokra.

D. Szögkoszinusztétel és második alapforma

Ebből következik, hogy \vec{A} mind \vec{B}^* -ra, mind \vec{C}^* -ra merőleges, azaz \vec{A} merőleges az utóbbi kettő által kifeszített, a^* oldalt tartalmazó síkra. Hasonlóan mutatható be \vec{B} és b^* , valamint \vec{C} és c^* merőlegessége is. Beláttuk tehát, hogy az $A^*B^*C^*$ háromszög poláris gömbháromszöge éppen az eredeti ABC háromszög.



D.2. ábra. Az α szög polárisa

A D.2. ábrán a gömböt úgy forgattuk el, hogy éppen az A csúcs legyen velünk szemben. Mivel \vec{A} merőleges az a^* oldal síkjára, ezért nézőpontunkból az a^* oldal éppen a gömb képének kerületén látszik. Az ábrán a b oldal síkja és \vec{B}^* közötti kék, valamint a c oldal síkja és \vec{C}^* közötti zöld szögek definíció szerint derékszögek, azonban egymást átfedik a két oldal síkja közti α szögtartományban. Következik, hogy az a^* oldalhoz tartozó középponti szög a két derékszögnél (180°) éppen α -val kevesebb. Ebből $\alpha + a^* = 180^\circ$ adódik. Hasonló érveléssel $\beta + b^*$ és $\gamma + c^*$ is 180° . Mivel a poláris gömbháromszög polárisa az eredeti gömbháromszög, ezért $\alpha^* + a$, $\beta^* + b$ és $\gamma^* + c$ szintén 180° -nak adódik.

Írjuk föl a IV.1. fejezetben bizonyított oldal-koszinusztételt a poláris gömbháromszögre!

$$\cos c^* = \cos a^* \cos b^* + \sin a^* \sin b^* \cos \gamma^*$$

Az eredeti és a poláris gömbháromszög megfelelő oldalai és szögei egymást 180° -ra egészítik ki, azaz $a^* = 180^\circ - a$, $b^* = 180^\circ - b$ stb. Ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \gamma) &= \cos(180^\circ - a) \cos(180^\circ - b) + \\ &\quad + \sin(180^\circ - a) \sin(180^\circ - b) \cos(180^\circ - c) \end{aligned}$$

D. Szögkoszinusztétel és második alapforma

Ismeretes, hogy $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$ és $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta$. Ebből:

$$\begin{aligned} -\cos \gamma &= (-\cos \alpha)(-\cos \beta) + \sin \alpha \sin \beta(-\cos c) \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}$$

Azaz a gömbháromszögtani szögkoszinusztétel valódiságáról meggyőződhetünk.

A IV.1. fejezetben bemutatott szinusztételből:

$$\begin{aligned} \frac{\sin c}{\sin \gamma} &= \frac{\sin a}{\sin \alpha} \\ \sin c &= \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Az oldal-koszinusztételt a c és az a oldalakra is fölírjuk:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \end{aligned}$$

A színes szögfüggvényekre alkalmazva az előbb fölírt szinusztételt, illetve oldal-koszinusztételt:

$$\cos a = \cos b(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma) + \frac{\sin b \sin a \sin \gamma \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

A harmadik oldal kiesett az egyenletből. A $\cos a$ -t tartalmazó tagokat egy oldalra rendezve, majd $\sin a \sin b$ -vel átosztva:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \left(\cos b \cos \gamma + \sin \gamma \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ \cos a(1 - \cos^2 b) &= \sin a \sin b (\cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha) \\ \frac{\cos a \sin^2 b}{\sin a \sin b} &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg} a \sin b &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a keresett második alapformát, amely két oldal és két szög között teremt összefüggést.

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon szereplő két háromszögoldal eltérő kiválasztásával vagy sorrendjük fölcserélésével és a jobb oldali kifejezés megfelelő átírásával az egyenletnek összesen hat különböző alakja létezik.

Az egyenletből közvetlenül csak az a oldal és az α szög fejezhető ki. Ha a b oldalra vagy a γ szögre lenne szükségünk, a $\sin \delta = 2 \operatorname{tg}(\delta/2)/[1 + \operatorname{tg}^2(\delta/2)]$ és a $\cos \delta = [1 - \operatorname{tg}^2(\delta/2)]/[1 + \operatorname{tg}^2(\delta/2)]$ helyettesítéssel (δ helyére a keresett b oldalt vagy γ szöget írva) átrendezést követően $\operatorname{tg}(b/2)$ -ben, illetve $\operatorname{tg}(\gamma/2)$ -ben másodfokú egyenletet kapunk. Ennek jellemzően két megoldása van, de van, hogy csak egy megoldást ad vagy nincs megoldás. Ez utóbbi esetben az adott oldalakkal és szögekkel rendelkező gömbháromszög nem létezik.

E. függelék

BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

Az V.3. fejezetben levezettük, hogy:

$$z = \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \Phi} - e^2 N(\Phi) \right] \sin \Phi$$

Ebből szeretnénk a földrajzi szélességet kifejezni. Először vegyük észre, hogy:

$$\frac{1}{\cos^2 \Phi} = \frac{\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} = \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} + \frac{\cos^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} = \operatorname{tg}^2 \Phi + 1$$

Az eredeti képletbe helyettesítsük be a harántgörbületi sugár képletét, majd kezdünk el átrendezgetni! Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jelölést! Az átalakítás lényege, hogy a gyökjelet eltüntetjük úgy, hogy egy oldalra rendezzük, majd négyzetre emelünk; a törtet a nevezőkkel fölszorozva tüntetjük el, majd $\cos^4 \Phi$ -vel végigosztva mindenből tangens-t csinálunk.

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sin \Phi} &= \frac{r}{\cos \Phi} - \frac{ae^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}} \\ \frac{a^2 e^4}{1 - e^2 \sin^2 \Phi} &= \frac{r^2}{\cos^2 \Phi} - 2 \frac{rz}{\cos \Phi \sin \Phi} + \frac{z^2}{\sin^2 \Phi} \\ a^2 e^4 \cos^2 \Phi \sin^2 \Phi &= r^2 \sin^2 \Phi - r^2 e^2 \sin^4 \Phi - 2rz \cos \Phi \sin \Phi + \\ &\quad + 2rze^2 \sin^3 \Phi \cos \Phi + z^2 \cos^2 \Phi - z^2 e^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \\ a^2 e^4 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} &= r^2 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^4 \Phi} - r^2 e^2 \frac{\sin^4 \Phi}{\cos^4 \Phi} - 2rz \frac{\sin \Phi}{\cos^3 \Phi} + \\ &\quad + 2rze^2 \frac{\sin^3 \Phi}{\cos^3 \Phi} + \frac{z^2}{\cos^2 \Phi} - z^2 e^2 \frac{\sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi} \\ a^2 e^4 \operatorname{tg}^2 \Phi &= r^2 \operatorname{tg}^2 \Phi (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) - r^2 e^2 \operatorname{tg}^4 \Phi - 2rz \operatorname{tg} \Phi (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) + \\ &\quad + 2rze^2 \operatorname{tg}^3 \Phi + z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \Phi) - z^2 e^2 \operatorname{tg}^2 \Phi \end{aligned}$$

E. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

$$[(1 - e^2)r^2] \operatorname{tg}^4 \Phi + [(e^2 - 1)2rz] \operatorname{tg}^3 \Phi + \\ + [r^2 + z^2(1 - e^2) - a^2e^4] \operatorname{tg}^2 \Phi + [-2rz] \operatorname{tg} \Phi + z^2 = 0$$

Ha bevezetjük a $t = \operatorname{tg} \Phi$ változót, akkor a fenti egyenlet szögletes zárójeleiben lévő kifejezéseket az ábécé nagybetűivel jelölve a következő negyedfokú egyenletet kapjuk az ismeretlen t -re:

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

A negyedfokú egyenlet megoldását FERRARI-képletnek nevezzük. Először vezessünk be egy új $u = t + B/4A$ változót a $t = u - B/4A$ helyettesítéssel! Behelyettesítés után az egyenletet A -val végigosztva, a zárójeleket kifejtve és u azonos kitevőit összegyűjtve a harmadfokú tag kiesik:

$$u^4 + \left(\frac{-3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A} \right) u^2 + \left(\frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A} \right) u + \left(\frac{-3B^4}{256A^4} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A} \right) = 0$$

A zárójeles együtthatókat görög betűkkel jelölve:

$$u^4 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$$

Bármilyen v -re igaz az hogy:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v \right)^2 = 2vu^2 - \beta u + v^2 + \alpha v + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma$$

Ezt úgy ellenőrizhetjük, ha a fönti zárójelet kibontjuk és a tagokat egy oldalra rendezzük, akkor v kiesik és az előző egyenletet kapjuk vissza. A jobb oldalt tovább alakítva:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v \right)^2 = \left(\sqrt{2vu} - \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right)^2 - \frac{\beta^2}{8v} + v^2 + \alpha v + \frac{\alpha^2}{4} - \gamma$$

Mivel a fenti egyenlet bármilyen v -re igaz, válasszuk ki azt a v -t, amelyekre a zöld kifejezés éppen nulla. Ekkor a vörös kifejezést V -vel, a kéket K -val jelölve $V^2 = K^2$, vagyis $V^2 - K^2 = 0$, tehát $(V + K)(V - K) = 0$, azaz a következő szorzat értéke nulla:

$$\left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v + \sqrt{2vu} - \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right) \left(u^2 + \frac{\alpha}{2} + v - \sqrt{2vu} + \frac{\beta}{2\sqrt{2v}} \right) = 0$$

A fönti szorzat azonban csak akkor lehet nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Ebből két, u -ban másodfokú egyenletet kapunk, melynek két-két megoldása lesz a hiányos negyedfokú egyenlet négy megoldása.

E. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

Ekkor a definíció alapján u négy gyökéből t -re is kapunk négy megoldást, tehát a negyedfokú egyenletet megoldottuk. Azaz megoldottuk volna, ha tudnánk, mennyinek is választottuk a v -t. A feltétel az volt, hogy a fenti zöld kifejezés legyen nulla. Akkor a zöld kifejezés v -vel szorozva is nulla:

$$v^3 + \alpha v^2 + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)v - \frac{\beta^2}{8} = 0$$

Harmadfokú egyenletet kaptunk, amelyet CARDANO képletével kell megoldanunk. Vezessük be a $w = v - (\alpha^2/4 + \gamma)/3$ segédváltozót, vagyis helyettesítsük be ezt: $v = w + (\alpha^2/4 + \gamma)/3$. Ekkor a zárójeleket kifejtve és a w -ben azonos fokszámú tagokat összegyűjtve a másodfokú tag kiesik:

$$w^3 + \left[\frac{\alpha^2}{4} - \gamma - \frac{\alpha^2}{3}\right]w + \left[-\frac{\beta^2}{8} - \frac{\alpha\left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}\right] = 0$$

Azaz elbetűzve a konstans együtthatókat:

$$w^3 + Pw + Q = 0$$

Legyen $w = W + Z$! Ekkor kifejtve a zárójeleket:

$$W^3 + Z^3 + (3WZ + P)(W + Z) + Q = 0$$

Mivel W és Z közül az egyiket szabadon megválaszthatom, legyen $3WZ + P = 0$! Ekkor a fenti egyenletből és a feltételünkből (mindent köbre emelve) két egyenlethez jutunk:

$$W^3 + Z^3 = -Q$$

$$W^3 Z^3 = -P^3/27$$

A fenti egyenletekből a VIÈTE-formulák miatt az következik, hogy W^3 és Z^3 a következő s -ben másodfokú egyenlet két megoldása:

$$s^2 + Qs - \frac{P^3}{27} = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$s_{1,2} = W^3, Z^3 = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

Azaz, mivelhogy $w = W + Z$, megkaptuk a hiányos harmadfokú egyenlet egyik gyökét:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

A lineáris helyettesítésünkkel így visszkapjuk az eredeti harmadfokú egyenlet v megoldását, amelyből már ismerjük a hiányos negyedfokú

E. BORKOWSKI-képlet a szélesség számítására

egyenletből levezetett két másodfokú egyenletben szereplő v -t is. Így már a negyedfokú egyenletre is van négy u megoldásom, amelyből az eredeti negyedfokú egyenlet t -jére is kaptunk megoldást. Ez a földrajzi szélesség tangense, amelyet az V.3. fejezetben található képletekbe visszahelyettesítve még az ellipszoid fölötti magasságot is visszakaphatjuk. Gondoljunk bele, hogy ez a hatalmas számítás tömeg minden másodpercben lezajlik abban kis telefonba épített GPS-chipben is!

BORKOWSKI valójában nem teljesen a fent felvázolt úton jutott el a negyedfokú egyenletig. A kérdés még a mai napig aktív kutatási terület, hogy hogyan lehet olyan negyedfokú egyenletet kapni, amely numerikusan stabil képletekre vezet.