p-adikus Galois-reprezentációk

Zábrádi Gergely

TKP minikonferencia

2021. június 11.

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Kitüntetett elemek:

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Kitüntetett elemek:

- $\bar{\cdot}$ komplex konjugálás

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Kitüntetett elemek:

- $\bar{\cdot}$ komplex konjugálás
- p-Frobenius: $\mathrm{Frob}_p(x) \equiv x^p \pmod{p}$ – nem egyértelmű

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Kitüntetett elemek:

- $\bar{\cdot}$ komplex konjugálás
- p-Frobenius: $\mathrm{Frob}_p(x) \equiv x^p \pmod{p}$ – nem egyértelmű

$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n \mid a_n \in \{0, \ldots, p-1\}\}$: p-adikus számok teste; rögzített $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \rightsquigarrow G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$, konjugáltság erejéig egyértelmű

Rész- és faktorcsoportok

Legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ az algebrai számok teste és $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- Inverz Galois-probléma: Minden véges csoport előáll $G_{\mathbb{Q}}$ faktorcsoportjaként?

Kitüntetett elemek:

- $\bar{\cdot}$ komplex konjugálás
- p-Frobenius: $\mathrm{Frob}_p(x) \equiv x^p \pmod{p}$ – nem egyértelmű

$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n=-N}^{\infty} a_n p^n \mid a_n \in \{0, \ldots, p-1\}\}$: p-adikus számok teste; rögzített $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \rightsquigarrow G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$, konjugáltság erejéig egyértelmű

$$1 \to I_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p} \to 1$$

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

$$L(E,s) := \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{P_{E,p}(p^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 2)$$

$$P_{E,p}(T) = 1 - a_p T + pT^2 \qquad \text{ha } E \text{ sima mod } p$$

ahol $\#E(\mathbb{F}_p) = P_{E,p}(1) = 1 - a_p + p$.

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

$$L(E,s) := \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{P_{E,p}(p^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 2)$$

$$P_{E,p}(T) = 1 - a_p T + pT^2 \qquad \text{ha } E \text{ sima mod } p$$

$$\text{ahol} \qquad \#E(\mathbb{F}_p) = P_{E,p}(1) = 1 - a_p + p\ .$$

Kódolt számelméleti információ:

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

$$L(E,s) := \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{P_{E,p}(p^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 2)$$

$$P_{E,p}(T) = 1 - a_p T + pT^2 \qquad \text{ha } E \text{ sima mod } p$$

$$\text{ahol} \qquad \#E(\mathbb{F}_p) = P_{E,p}(1) = 1 - a_p + p\ .$$

Kódolt számelméleti információ:

- A mod p pontok $\#E(\mathbb{F}_p)$ száma

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

$$L(E,s) := \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{P_{E,p}(p^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 2)$$

$$P_{E,p}(T) = 1 - a_p T + pT^2 \qquad \text{ha } E \text{ sima mod } p$$

ahol $\#E(\mathbb{F}_p) = P_{E,p}(1) = 1 - a_p + p$.

Kódolt számelméleti információ:

- A mod p pontok $\#E(\mathbb{F}_p)$ száma
- Hipotetikusan: racionális pontok száma:

Birch és Swinnerton-Dyer sejtés ($\sim$1960) – gyenge forma

$L(E,1) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\#E(\mathbb{Q}) = \infty$.

Elliptikus görbék

Legyen E egy $\mathbb{Q}$ fölötti elliptikus görbe $\rightsquigarrow$ L-függvény

$$L(E,s) := \prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{P_{E,p}(p^{-s})} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 2)$$

$$P_{E,p}(T) = 1 - a_p T + pT^2 \qquad \text{ha } E \text{ sima mod } p$$

$$\text{ahol} \qquad \#E(\mathbb{F}_p) = P_{E,p}(1) = 1 - a_p + p\ .$$

Kódolt számelméleti információ:

- A mod p pontok $\#E(\mathbb{F}_p)$ száma
- Hipotetikusan: racionális pontok száma:

Birch és Swinnerton-Dyer sejtés ($\sim$1960) – gyenge forma

$L(E,1) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\#E(\mathbb{Q}) = \infty$.

Analitikus folytatás ebben az esetben: Taniyama–Shimura–Weil sejtés (Wiles és Taylor (1993) tétele).

Hol van itt a Galois-reprezentáció?

Tegyük föl, hogy $p \nmid m$ és $E[m] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ az m-edrendű pontok E-n, azaz $E[m] \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m)$. Ekkor

Néron–Ogg–Safarevics kritérium

E sima modulo $p \Leftrightarrow p$ nem ágazik el a $\mathbb{Q}(E[m])$-ben $\Leftrightarrow I_{\mathbb{Q}_p}$ triviálisan hat $E[m]$-en

Hol van itt a Galois-reprezentáció?

Tegyük föl, hogy $p \nmid m$ és $E[m] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ az m-edrendű pontok E-n, azaz $E[m] \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m)$. Ekkor

Néron–Ogg–Safarevics kritérium

E sima modulo $p \Leftrightarrow p$ nem ágazik el a $\mathbb{Q}(E[m])$-ben $\Leftrightarrow I_{\mathbb{Q}_p}$ triviálisan hat $E[m]$-en

- Itt $E[m]$-en hat $G_{\mathbb{Q}}$, azaz ez egy mod m Galois-reprezentáció!

Hol van itt a Galois-reprezentáció?

Tegyük föl, hogy $p \nmid m$ és $E[m] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ az m-edrendű pontok E-n, azaz $E[m] \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m)$. Ekkor

Néron–Ogg–Safarevics kritérium

E sima modulo $p \Leftrightarrow p$ nem ágazik el a $\mathbb{Q}(E[m])$-ben $\Leftrightarrow I_{\mathbb{Q}_p}$ triviálisan hat $E[m]$-en

- Itt $E[m]$-en hat $G_{\mathbb{Q}}$, azaz ez egy mod m Galois-reprezentáció!
- $P_{E,p}(T)$ mod m a Frob_p karakterisztikus polinomja $E[m]$-en $\rightsquigarrow a_p \pmod{m}$.

Hol van itt a Galois-reprezentáció?

Tegyük föl, hogy $p \nmid m$ és $E[m] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ az m-edrendű pontok E-n, azaz $E[m] \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m)$. Ekkor

Néron–Ogg–Safarevics kritérium

E sima modulo $p \Leftrightarrow p$ nem ágazik el a $\mathbb{Q}(E[m])$-ben $\Leftrightarrow I_{\mathbb{Q}_p}$ triviálisan hat $E[m]$-en

- Itt $E[m]$-en hat $G_{\mathbb{Q}}$, azaz ez egy mod m Galois-reprezentáció!
- $P_{E,p}(T)$ mod m a Frob_p karakterisztikus polinomja $E[m]$-en $\rightsquigarrow a_p \pmod{m}$.
- $m = \ell^n, n \to \infty \rightsquigarrow a_p$.

Hol van itt a Galois-reprezentáció?

Tegyük föl, hogy $p \nmid m$ és $E[m] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ az m-edrendű pontok E-n, azaz $E[m] \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m)$. Ekkor

Néron–Ogg–Safarevics kritérium

E sima modulo $p \Leftrightarrow p$ nem ágazik el a $\mathbb{Q}(E[m])$-ben $\Leftrightarrow I_{\mathbb{Q}_p}$ triviálisan hat $E[m]$-en

- Itt $E[m]$-en hat $G_{\mathbb{Q}}$, azaz ez egy mod m Galois-reprezentáció!
- $P_{E,p}(T)$ mod m a Frob_p karakterisztikus polinomja $E[m]$-en $\rightsquigarrow a_p \pmod{m}$.
- $m = \ell^n, n \to \infty \rightsquigarrow a_p$. $T_\ell(E) := \varprojlim_n E[\ell^n]$ az ℓ-adikus Tate-modulus ($\rightsquigarrow \rho_{E,\ell} \colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ reprezentáció)

Mely reprezentációk jönnek geometriából?

Fontaine–Mazur sejtés (1995)

Egy $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ irred. ℓ-adikus Galois-reprezentáció akkor és csak akkor jön geometriából, ha a következő két feltétel teljesül:

(*i*) ρ elágazásmentes (azaz $\rho(I_p) = \{1\}$) véges sok kivétellel minden p prímre.

(*ii*) ρ *de Rham* a $p = \ell$ prímnél.

Mely reprezentációk jönnek geometriából?

Fontaine–Mazur sejtés (1995)

Egy $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ irred. ℓ-adikus Galois-reprezentáció akkor és csak akkor jön geometriából, ha a következő két feltétel teljesül:

(i) ρ elágazásmentes (azaz $\rho(I_p) = \{1\}$) véges sok kivétellel minden p prímre.

(ii) ρ *de Rham* a $p = \ell$ prímnél.

A "csak akkor" része a fenti sejtésnek ismert: (i)-et Grothendieck bizonyította; (ii)-es állítást ("p-adikus de Rham összehasonlítási izomorfizmus") először Faltings, majd Tsuji igazolta (1980-as évek vége), új bizonyítások: Beilinson (összefoglaló cikk Szamuely–Z) és Scholze.

Mely reprezentációk jönnek geometriából?

Fontaine–Mazur sejtés (1995)

Egy $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ irred. ℓ-adikus Galois-reprezentáció akkor és csak akkor jön geometriából, ha a következő két feltétel teljesül:

(i) ρ elágazásmentes (azaz $\rho(I_p) = \{1\}$) véges sok kivétellel minden p prímre.

(ii) ρ *de Rham* a $p = \ell$ prímnél.

A "csak akkor" része a fenti sejtésnek ismert: (i)-et Grothendieck bizonyította; (ii)-es állítást ("p-adikus de Rham összehasonlítási izomorfizmus") először Faltings, majd Tsuji igazolta (1980-as évek vége), új bizonyítások: Beilinson (összefoglaló cikk Szamuely–Z) és Scholze. Nehéz irány: $n = 2$-re lényegében ismert (Emerton, Kisin) a p-adikus Langlands-megfeleltetés alkalmazásaként.

Mely reprezentációk jönnek geometriából?

Fontaine–Mazur sejtés (1995)

Egy $\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ irred. ℓ-adikus Galois-reprezentáció akkor és csak akkor jön geometriából, ha a következő két feltétel teljesül:

(i) ρ elágazásmentes (azaz $\rho(I_p) = \{1\}$) véges sok kivétellel minden p prímre.

(ii) ρ *de Rham* a $p = \ell$ prímnél.

A "csak akkor" része a fenti sejtésnek ismert: (i)-et Grothendieck bizonyította; (ii)-es állítást ("p-adikus de Rham összehasonlítási izomorfizmus") először Faltings, majd Tsuji igazolta (1980-as évek vége), új bizonyítások: Beilinson (összefoglaló cikk Szamuely–Z) és Scholze. Nehéz irány: $n = 2$-re lényegében ismert (Emerton, Kisin) a p-adikus Langlands-megfeleltetés alkalmazásaként. Jobban meg kell értenünk az $\ell = p$ esetet!

Galois-reprezentációk p karakterisztikában

Legyen E egy tökéletes p-karakterisztikájú test és V egy $\mathbb{F}_p$ fölött végesdimenziós reprezentációja $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-nek. Hilbert 90-es tétele miatt V-t trivializálhatjuk $\overline{E}$ fölött, azaz

$$\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \overline{E}^{\dim_{\mathbb{F}_p} V} \cong \overline{E} \otimes_E \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$$

mint G_E-reprezentációk. Speciálisan $D(V) := \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$ dimenziója E fölött $\dim_{\mathbb{F}_p} V$.

Galois-reprezentációk p karakterisztikában

Legyen E egy tökéletes p-karakterisztikájú test és V egy $\mathbb{F}_p$ fölött végesdimenziós reprezentációja $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-nek. Hilbert 90-es tétele miatt V-t trivializálhatjuk $\overline{E}$ fölött, azaz

$$\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \overline{E}^{\dim_{\mathbb{F}_p} V} \cong \overline{E} \otimes_E \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$$

mint G_E-reprezentációk. Speciálisan $D(V) := \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$ dimenziója E fölött $\dim_{\mathbb{F}_p} V$.

Fontos új jelenség: V-t rekonstruálhatjuk $D(V)$-ből!

Galois-reprezentációk p karakterisztikában

Legyen E egy tökéletes p-karakterisztikájú test és V egy $\mathbb{F}_p$ fölött végesdimenziós reprezentációja $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-nek. Hilbert 90-es tétele miatt V-t trivializálhatjuk $\overline{E}$ fölött, azaz

$$\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \overline{E}^{\dim_{\mathbb{F}_p} V} \cong \overline{E} \otimes_E \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$$

mint G_E-reprezentációk. Speciálisan $D(V) := \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$ dimenziója E fölött $\dim_{\mathbb{F}_p} V$.

Fontos új jelenség: V-t rekonstruálhatjuk $D(V)$-ből!

Extra struktúra: p-karakterisztikában a $\mathrm{Frob}_p \colon \overline{E} \to \overline{E}$ Frobenius fixteste $\mathbb{F}_p$.

Galois-reprezentációk p karakterisztikában

Legyen E egy tökéletes p-karakterisztikájú test és V egy $\mathbb{F}_p$ fölött végesdimenziós reprezentációja $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-nek. Hilbert 90-es tétele miatt V-t trivializálhatjuk $\overline{E}$ fölött, azaz

$$\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \overline{E}^{\dim_{\mathbb{F}_p} V} \cong \overline{E} \otimes_E \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$$

mint G_E-reprezentációk. Speciálisan $D(V) := \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$ dimenziója E fölött $\dim_{\mathbb{F}_p} V$.

Fontos új jelenség: V-t rekonstruálhatjuk $D(V)$-ből!

Extra struktúra: p-karakterisztikában a $\mathrm{Frob}_p \colon \overline{E} \to \overline{E}$ Frobenius fixteste $\mathbb{F}_p$. Legyen $\varphi := \mathrm{Frob}_p \otimes id_V \colon \overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \to \overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$, így $V = \left(\overline{E} \otimes_E D(V)\right)^{\varphi = id}$.

Galois-reprezentációk p karakterisztikában

Legyen E egy tökéletes p-karakterisztikájú test és V egy $\mathbb{F}_p$ fölött végesdimenziós reprezentációja $G_E := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-nek. Hilbert 90-es tétele miatt V-t trivializálhatjuk $\overline{E}$ fölött, azaz

$$\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \overline{E}^{\dim_{\mathbb{F}_p} V} \cong \overline{E} \otimes_E \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$$

mint G_E-reprezentációk. Speciálisan $D(V) := \left(\overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V\right)^{G_E}$ dimenziója E fölött $\dim_{\mathbb{F}_p} V$.

Fontos új jelenség: V-t rekonstruálhatjuk $D(V)$-ből!

Extra struktúra: p-karakterisztikában a $\mathrm{Frob}_p \colon \overline{E} \to \overline{E}$ Frobenius fixteste $\mathbb{F}_p$. Legyen $\varphi := \mathrm{Frob}_p \otimes id_V \colon \overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \to \overline{E} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$, így $V = \left(\overline{E} \otimes_E D(V)\right)^{\varphi = id}$. Tehát a V reprezentációt lecseréltük egy darab $\dim_{\mathbb{F}_p} V \times \dim_{\mathbb{F}_p} V$-es E együtthatós mátrixra!

Hogyan váltunk át 0-karakterisztikára p-ről?

Scholze billentési (tilting) ekvivalenciájával!

Hogyan váltunk át 0-karakterisztikára p-ről?

Scholze billentési (tilting) ekvivalenciájával!

Definíció

Legyen K egy test, ami teljes egy nemarkhimédeszi *nemdiszkrét* $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ abszolútértékre nézve. Azt mondjuk, hogy K *perfektoid*, ha a $\mathrm{Frob}_p\colon \mathcal{O}_K/(p) \to \mathcal{O}_K/(p)$ p-Frobenius leképezés szürjektív.

Hogyan váltunk át 0-karakterisztikára p-ről?

Scholze billentési (tilting) ekvivalenciájával!

Definíció

Legyen K egy test, ami teljes egy nemarkhimédeszi *nemdiszkrét* $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ abszolútértékre nézve. Azt mondjuk, hogy K *perfektoid*, ha a $\mathrm{Frob}_p\colon \mathcal{O}_K/(p) \to \mathcal{O}_K/(p)$ p-Frobenius leképezés szürjektív.

Pl.: $\mathbb{C}_p$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))}$, de $\mathbb{Q}_p$ nem (mert az értékelés diszkrét!).

Hogyan váltunk át 0-karakterisztikára p-ről?

Scholze billentési (tilting) ekvivalenciájával!

Definíció

Legyen K egy test, ami teljes egy nemarkhimédeszi *nemdiszkrét* $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ abszolútértékre nézve. Azt mondjuk, hogy K *perfektoid*, ha a $\mathrm{Frob}_p\colon \mathcal{O}_K/(p) \to \mathcal{O}_K/(p)$ p-Frobenius leképezés szürjektív.

Pl.: $\mathbb{C}_p$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{F}_p((T^{1/p^\infty}))}$, de $\mathbb{Q}_p$ nem (mert az értékelés diszkrét!). Legyen K egy perfektoid test. A $K^\flat := \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{K^\flat})$ p-karakterisztikájú perfektoid test a K *billentettjének* (tilt) nevezzük, ahol

$$\mathcal{O}_{K^\flat} := \varprojlim_{\mathrm{Frob}_p\colon \mathcal{O}_K/(p) \to \mathcal{O}_K/(p)} \mathcal{O}_K/(p)\ .$$

A billentési ekvivalencia

Tétel (Scholze)

Legyen K egy perfektoid test. Ekkor a $\flat\colon L \mapsto L^\flat$ funktor egy kategóriaekvivalenciát létesít K perfektoid testbővítései, ill. $K^\flat$ perfektoid testbővítései között. Továbbá ha L/K véges szeparábilis, akkor L perfektoid (az "almost purity" bébi esete).

A billentési ekvivalencia

Tétel (Scholze)

Legyen K egy perfektoid test. Ekkor a $\flat\colon L \mapsto L^\flat$ funktor egy kategóriaekvivalenciát létesít K perfektoid testbővítései, ill. $K^\flat$ perfektoid testbővítései között. Továbbá ha L/K véges szeparábilis, akkor L perfektoid (az "almost purity" bébi esete).

Következmény

Ekkor $G_K \cong G_{K^\flat}$ és ha K a $\mathbb{Q}_p$ egy Galois-bővítésének a telítettje, akkor $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(K^\flat)$.

A billentési ekvivalencia

Tétel (Scholze)

Legyen K egy perfektoid test. Ekkor a $\flat\colon L \mapsto L^\flat$ funktor egy kategóriaekvivalenciát létesít K perfektoid testbővítései, ill. $K^\flat$ perfektoid testbővítései között. Továbbá ha L/K véges szeparábilis, akkor L perfektoid (az "almost purity" bébi esete).

Következmény

Ekkor $G_K \cong G_{K^\flat}$ és ha K a $\mathbb{Q}_p$ egy Galois-bővítésének a telítettje, akkor $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(K^\flat)$.

Pl. $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$, akkor $K^\flat = \widehat{\mathbb{F}_p((T))^{\mathrm{perf}}}$, sőt, $G_K \cong G_{K^\flat} \cong G_{\mathbb{F}_p((T))}$. Itt $\Gamma := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \overset{\chi_{cyc}}{\cong} \mathbb{Z}_p^\times$ és $\gamma(T) = (1+T)^{\chi_{cyc}(\gamma)} - 1$ $(\gamma \in \Gamma)$.

p-adikus Galois reprezentációk és (φ, Γ)-modulusok

Legyen K egy (0-karakterisztikájú) perfektoid test

$$\{G_K \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-modulusok } / K^\flat\}$$

p-adikus Galois reprezentációk és (φ, Γ)-modulusok

Legyen K egy (0-karakterisztikájú) perfektoid test

$$\{G_K \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-modulusok } / K^\flat\}$$

Witt vektorokat véve és p-t invertálva

$$\{G_K \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-mod } / W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

p-adikus Galois reprezentációk és (φ, Γ)-modulusok

Legyen K egy (0-karakterisztikájú) perfektoid test

$$\{G_K \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-modulusok } / K^\flat\}$$

Witt vektorokat véve és p-t invertálva

$$\{G_K \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-mod } / W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

Hát $G_{\mathbb{Q}_p}$ reprezentációi?

p-adikus Galois reprezentációk és (φ, Γ)-modulusok

Legyen K egy (0-karakterisztikájú) perfektoid test

$$\{G_K \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-modulusok } / K^\flat\}$$

Witt vektorokat véve és p-t invertálva

$$\{G_K \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-mod } / W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

Hát $G_{\mathbb{Q}_p}$ reprezentációi? Legyen $K_\circ/\mathbb{Q}_p$ egy Galois-bővítés úgy, hogy $K := \widehat{K_\circ}$ perfektoid (pl. $K_\circ := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ és $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\circ/\mathbb{Q}_p)$). Ekkor

$$\{G_{\mathbb{Q}_p} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{(\varphi, \Gamma)\text{-modulusok } / W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

p-adikus Galois reprezentációk és (φ,Γ)-modulusok

Legyen K egy (0-karakterisztikájú) perfektoid test

$$\{G_K \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \text{ mod } p \text{ rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-modulusok } /K^\flat\}$$

Witt vektorokat véve és p-t invertálva

$$\{G_K \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{G_{K^\flat} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\varphi\text{-mod } /W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

Hát $G_{\mathbb{Q}_p}$ reprezentációi? Legyen $K_\circ/\mathbb{Q}_p$ egy Galois-bővítés úgy, hogy $K := \widehat{K_\circ}$ perfektoid (pl. $K_\circ := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ és $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\circ/\mathbb{Q}_p)$). Ekkor

$$\{G_{\mathbb{Q}_p} \ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{(\varphi,\Gamma)\text{-modulusok } /W(K^\flat)[p^{-1}]\}$$

$K_\circ := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ a (φ,Γ)-modulusokat lehet $\mathcal{E} = \mathcal{O}_\mathcal{E}[p^{-1}]$ fölött tekinteni, ahol $\mathcal{O}_\mathcal{E} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/(p^n)((T))$ (Fontaine kategóriaekvivalenciája).

Motiváció: Colmez funktorainak általánosítása

Colmez fő észrevétele:

$$1 + T \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi \leftrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motiváció: Colmez funktorainak általánosítása

Colmez fő észrevétele:

$$1 + T \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi \leftrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ funktor a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sima mod p^r reprezentációi $\mapsto$ mod p^r étale (φ, Γ)-modulusok $\overset{\text{Fontaine}}{\mapsto}$ mod p^r lokális Galois-reprezentációk.

Motiváció: Colmez funktorainak általánosítása

Colmez fő észrevétele:

$$1 + T \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi \leftrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ funktor a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sima mod p^r reprezentációi $\mapsto$ mod p^r étale (φ, Γ)-modulusok $\overset{\text{Fontaine}}{\mapsto}$ mod p^r lokális Galois-reprezentációk.
Ha lehet általánosítani magasabb rangú csoportokra (pl. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ahol $n > 2$), természetes, hogy "többváltozós" objektumok jelennek meg.

Motiváció: Colmez funktorainak általánosítása

Colmez fő észrevétele:

$$1 + T \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi \leftrightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ funktor a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sima mod p^r reprezentációi $\mapsto$ mod p^r étale (φ, Γ)-modulusok $\overset{\text{Fontaine}}{\mapsto}$ mod p^r lokális Galois-reprezentációk.
Ha lehet általánosítani magasabb rangú csoportokra (pl. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ahol $n > 2$), természetes, hogy "többváltozós" objektumok jelennek meg. Jó jel (Breuil–Herzig–Schraen): Vegyünk egy ρ mod p (globális) Galois-reprezentációt. Ehhez tartozik egy Hecke-sajátaltér bizonyos Shimuravarietások kohomológiájában, mely egyben egy Π_ρ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-reprezentáció. Ha Colmez funktorának egy általánosítását alkalmazzuk Π_ρ-ra, akkor nem ρ-t fogjuk visszakapni, hanem $\bigotimes_{i=1}^n \bigwedge^i \rho$-t $\rightsquigarrow$ $G_{\mathbb{Q}_p}^n$-reprezentáció?

Tétel (Z: *Math. Res. Letters* (Q1), Carter–Kedlaya–Z: beküldve (Q1))

Legyen Δ egy véges halmaz és $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta} G_{\mathbb{Q}_p}$. Van egy

$$\{G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}\ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\text{étale } (\varphi_\Delta, \Gamma_\Delta)\text{-modulusok}/\mathcal{E}_\Delta\}$$

kategóriaekvivalencia, ahol $\varphi_\Delta = (\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Delta)$ (minden változóhoz egy Frobenius), $\Gamma_\Delta := \prod_{\alpha\in\Delta} \Gamma$, $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}[p^{-1}]$, és $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} := \varprojlim_r \mathbb{Z}/(p^r)[[T_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][\prod_{\alpha\in\Delta} T_\alpha^{-1}]$.

Tétel (Z: *Math. Res. Letters* (Q1), Carter–Kedlaya–Z: beküldve (Q1))

Legyen Δ egy véges halmaz és $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta} G_{\mathbb{Q}_p}$. Van egy

$$\{G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}\ p\text{-adikus rep}\} \leftrightarrow \{\text{étale } (\varphi_\Delta, \Gamma_\Delta)\text{-modulusok}/\mathcal{E}_\Delta\}$$

kategóriaekvivalencia, ahol $\varphi_\Delta = (\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Delta)$ (minden változóhoz egy Frobenius), $\Gamma_\Delta := \prod_{\alpha\in\Delta}\Gamma$, $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}[p^{-1}]$, és $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} := \varprojlim_r \mathbb{Z}/(p^r)[\![T_\alpha \mid \alpha \in \Delta]\!][\prod_{\alpha\in\Delta} T_\alpha^{-1}]$.

Tétel (Z: *Selecta Math. (D1)*)

Létezik egy jobb egzakt, tenzorszorzattal és parabolikus indukcióval kompatibilis funktor a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sima mod p^r reprezentációinak kategóriájából a $G_{\mathbb{Q}_p}^{n-1} \times \mathbb{Q}_p^\times$ csoport mod p^r reprezentációinak kategóriájába. Ha $n = 2$, akkor ez megegyezik Colmez funktorával, ami realizálja a p-adikus Langlands-megfeleltetést $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-re.

További eredmények

- (Pal–Z: *J. Inst. Math. Jussieu* (D1)) $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ csoportkohomológiáinak kiszámítása a többváltozós (φ, Γ)-modulus segítségével és "túlkonvergálás" igazolása.

További eredmények

- (Pal–Z: *J. Inst. Math. Jussieu* (D1)) $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ csoportkohomológiáinak kiszámítása a többváltozós (φ, Γ)-modulus segítségével és "túlkonvergálás" igazolása.
- (Ray–Wei–Z: beküldve (Q1/Q2)) Általánosítás $\mathbb{Q}_p$-ről olyan testekre, melyeknek nem feltétlenül tökéletes a maradékteste.

További eredmények

- (Pal–Z: *J. Inst. Math. Jussieu* (D1)) $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ csoportkohomológiáinak kiszámítása a többváltozós (φ, Γ)-modulus segítségével és "túlkonvergálás" igazolása.
- (Ray–Wei–Z: beküldve (Q1/Q2)) Általánosítás $\mathbb{Q}_p$-ről olyan testekre, melyeknek nem feltétlenül tökéletes a maradékteste.
- (Cherubini–Wu–Z: elfogadva *Math. Zeitschrift* (Q1)): Aritmetikai sokaságokon a prímgeodetikusok számának a prímszámtételhez hasonló becslése L-függvények segítségével

További eredmények

- (Pal–Z: *J. Inst. Math. Jussieu* (D1)) $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ csoportkohomológiáinak kiszámítása a többváltozós (φ, Γ)-modulus segítségével és "túlkonvergálás" igazolása.
- (Ray–Wei–Z: beküldve (Q1/Q2)) Általánosítás $\mathbb{Q}_p$-ről olyan testekre, melyeknek nem feltétlenül tökéletes a maradékteste.
- (Cherubini–Wu–Z: elfogadva *Math. Zeitschrift* (Q1)): Aritmetikai sokaságokon a prímgeodetikusok számának a prímszámtételhez hasonló becslése L-függvények segítségével
- (Csahók–Kutas–Z: cikke kettévágása folyamatban (Q2?)): Kvaternióalgebrák explicit izomorfizmusainak algoritmikus aspektusai: 2-karakterisztikájú eset külön

További eredmények

- (Pal–Z: *J. Inst. Math. Jussieu* (D1)) $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ csoportkohomológiáinak kiszámítása a többváltozós (φ, Γ)-modulus segítségével és "túlkonvergálás" igazolása.
- (Ray–Wei–Z: beküldve (Q1/Q2)) Általánosítás $\mathbb{Q}_p$-ről olyan testekre, melyeknek nem feltétlenül tökéletes a maradékteste.
- (Cherubini–Wu–Z: elfogadva *Math. Zeitschrift* (Q1)): Aritmetikai sokaságokon a prímgeodetikusok számának a prímszámtételhez hasonló becslése L-függvények segítségével
- (Csahók–Kutas–Z: cikke kettévágása folyamatban (Q2?)): Kvaternióalgebrák explicit izomorfizmusainak algoritmikus aspektusai: 2-karakterisztikájú eset külön
- (Erdélyi–Tóth–Z: folyamatban (Q1?)): Általánosított Kloosterman-összegek becslése

Köszönöm a figyelmet!

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM FINANCED FROM THE NRDI FUND