

Geometriai gráfok rekonstrukciója az élhosszak alapján

Jordán Tibor

ELTE TTK Matematikai Intézet, Operációkutatási Tanszék és MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport, Budapest.

TKP Workshop, 2021. június 11.



Distance geometry

Adott egy $G = (V, E)$ gráf, minden $e \in E$ élre az $l(e) \geq 0$ élhossz, valamint a $d \geq 1$ dimenzió. A G egy d -dimenziós *realizációja* egy (G, p) pár, ahol $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy leképezés. Ez *megengedett*, ha G minden $e = uv$ élére teljesül, hogy $\|p(u) - p(v)\| = l(e)$.

Distance geometry

Adott egy $G = (V, E)$ gráf, minden $e \in E$ élre az $l(e) \geq 0$ élhossz, valamint a $d \geq 1$ dimenzió. A G egy d -dimenziós *realizációja* egy (G, p) pár, ahol $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy leképezés. Ez *megengedett*, ha G minden $e = uv$ élére teljesül, hogy $\|p(u) - p(v)\| = l(e)$.

◇ Létezik megengedett realizáció?

Distance geometry

Adott egy $G = (V, E)$ gráf, minden $e \in E$ élre az $l(e) \geq 0$ élhossz, valamint a $d \geq 1$ dimenzió. A G egy d -dimenziós *realizációja* egy (G, p) pár, ahol $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy leképezés. Ez *megengedett*, ha G minden $e = uv$ élére teljesül, hogy $\|p(u) - p(v)\| = l(e)$.

- ◇ Létezik megengedett realizáció?
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen?

Distance geometry

Adott egy $G = (V, E)$ gráf, minden $e \in E$ élre az $l(e) \geq 0$ élhossz, valamint a $d \geq 1$ dimenzió. A G egy d -dimenziós *realizációja* egy (G, p) pár, ahol $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy leképezés. Ez *megengedett*, ha G minden $e = uv$ élére teljesül, hogy $\|p(u) - p(v)\| = l(e)$.

- ◇ Létezik megengedett realizáció?
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen?
- ◇ Egy megengedett realizáció egyértelmű (vagy van-e másik, amelyben néhány páronkénti távolság eltér)?

Speciális eset: teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? $\rightarrow$ Euklideszi távolság mátrixok (Schoenberg tétel)

Speciális eset: teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? $\rightarrow$ Euklideszi távolság mátrixok (Schoenberg tétel)
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen? $\rightarrow$ Trilateráció

Speciális eset: teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? → Euklideszi távolság mátrixok (Schoenberg tétel)
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen? → Trilateráció
- ◇ Egy megengedett realizáció egyértelmű (vagy van-e másik, amelyben néhány páronkénti távolság eltér)? → Igen - definíció szerint egyértelmű

Nem teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? $\rightarrow$ Euklideszi mátrix kiegészítési feladat

Nem teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? $\rightarrow$ Euklideszi mátrix kiegészítési feladat
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen? $\rightarrow$ NP-nehéz

Nem teljes gráfok

- ◇ Létezik megengedett realizáció? → Euklideszi mátrix kiegészítési feladat
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen? → NP-nehéz
- ◇ Egy adott realizáció egyértelmű (vagy van-e másik, amelyben néhány páronkénti távolság eltér)? → NP-nehéz

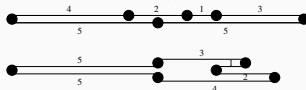


Figure 1: NP-nehéz, akkor is, ha G kör és $d = 1$.

Szenzor hálózat

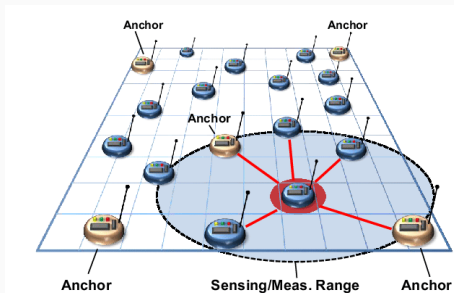


Figure 2: A hálózat lokalizálható, ha az ismert páronkénti távolságok egyértelműen meghatározzák az összes páronkénti távolságot.

A matematikai modell

Egy d -dimenziós *szerkezet* egy (G, p) pár, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, p egy leképezés V -ből $\mathbb{R}^d$ -be. A szerkezet a G *realizációja* $\mathbb{R}^d$ -ben.

A matematikai modell

Egy d -dimenziós *szerkezet* egy (G, p) pár, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, p egy leképezés V -ből $\mathbb{R}^d$ -be. A szerkezet a G *realizációja* $\mathbb{R}^d$ -ben.

A G gráf (G, p) és (G, q) realizációi *ekvivalensek*, ha
 $\|p(u) - p(v)\| = \|q(u) - q(v)\|$ teljesül minden u, v -re, amelyre $uv \in E$.

A matematikai modell

Egy d -dimenziós *szerkezet* egy (G, p) pár, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, p egy leképezés V -ből $\mathbb{R}^d$ -be. A szerkezet a G *realizációja* $\mathbb{R}^d$ -ben.

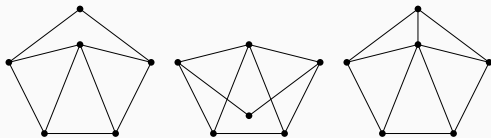
A G gráf (G, p) és (G, q) realizációi *ekvivalensek*, ha
 $\|p(u) - p(v)\| = \|q(u) - q(v)\|$ teljesül minden u, v -re, amelyre $uv \in E$.

A (G, p) és (G, q) realizációk *kongruensek*, ha
 $\|p(u) - p(v)\| = \|q(u) - q(v)\|$ minden $u, v \in V$ pontpárra teljesül.

A (G, p) szerkezet *globálisan merev* $\mathbb{R}^d$ -ben, ha minden vele ekvivalens d -dimenziós realizációja kongruens (G, p) -vel.

Globálisan merev szerkezetek

A (G, p) szerkezet *globálisan merev* $\mathbb{R}^d$ -ben, ha minden vele ekvivalens d -dimenziós realizációja kongruens (G, p) -vel.



(1-2) nem globálisan merev, (3) globálisan merev.

Kellően általános helyzetű (ú.n. generikus) (G, p) szerkezetek esetén a d -dimenziós globális merevség csak a G gráftól függ. (Connelly (2005), Gortler, Healy and Thurston (2010).)

Globálisan merev gráfok

Kellően általános helyzetű (ú.n. generikus) (G, p) szerkezetek esetén a d -dimenziós globális merevség csak a G gráftól függ. (Connelly (2005), Gortler, Healy and Thurston (2010).)

A G gráf *globálisan merev* $\mathbb{R}^d$ -ben, ha minden – avagy ezzel ekvivalens módon, ha valamely – d -dimenziós generikus realizációja globálisan merev.

Globális merevség jellemzése: $d = 1$ könnyű, $d = 2$ Jackson és Jordán (2005), $d \geq 3$ nyitott kérdés.

Unlabeled distance geometry

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.
Keressünk egy m élű $G = (V, E)$ gráfot és egy bijekciót a G élei és az adott élhosszak között úgy, hogy létezzen a G -nek ezen élhosszakhoz d -dimenziós megengedett (G, p) realizációja.

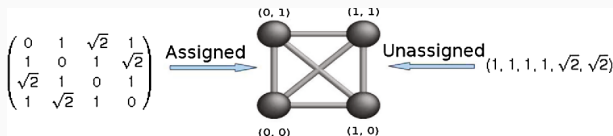


Figure 3: A címkézett és a címkézetlen feladat.

Unlabeled distance geometry

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

Keressünk egy m élű $G = (V, E)$ gráfot és egy bijekciót a G élei és az adott élhosszak között úgy, hogy létezzen a G -nek ezen élhosszakhoz d -dimenziós megengedett (G, p) realizációja.

Unlabeled distance geometry

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

Keressünk egy m élű $G = (V, E)$ gráfot és egy bijekciót a G élei és az adott élhosszak között úgy, hogy létezzen a G -nek ezen élhosszakhoz d -dimenziós megengedett (G, p) realizációja.

◇ Létezik G , bijekció, és megengedett realizáció?

Unlabeled distance geometry

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

Keressünk egy m élű $G = (V, E)$ gráfot és egy bijekciót a G élei és az adott élhosszak között úgy, hogy létezzen a G -nek ezen élhosszakhoz d -dimenziós megengedett (G, p) realizációja.

- ◇ Létezik G , bijekció, és megengedett realizáció?
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen?

Unlabeled distance geometry

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

Keressünk egy m élű $G = (V, E)$ gráfot és egy bijekciót a G élei és az adott élhosszak között úgy, hogy létezzen a G -nek ezen élhosszakhoz d -dimenziós megengedett (G, p) realizációja.

- ◇ Létezik G , bijekció, és megengedett realizáció?
- ◇ Algoritmikusan hogyan kapható meg egy ilyen?
- ◇ Egyértelmű-e a G (továbbá a bijekció, és a realizáció)?

A címkézetlen rekonstrukciós feladat változatai

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

◇ Meghatározzák-e a gráfot?

A címkézetlen rekonstrukciós feladat változatai

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

◇ Meghatározzák-e a gráfot?

◇ Meghatározzák-e a gráfot és a megfelelő élek hosszát?

A címkézetlen rekonstrukciós feladat változatai

Adott m élhossz, $l(e_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, valamint a $d \geq 1$ dimenzió.

- ◇ Meghatározzák-e a gráfot?
- ◇ Meghatározzák-e a gráfot és a megfelelő élek hosszát?
- ◇ Meghatározzák-e a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és a p realizációt is?

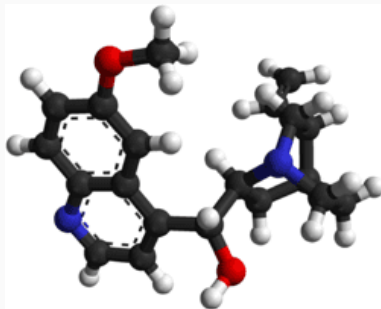


Figure 4: Egy példa a vizsgált térbeli alakzatok közül.

Tipikus inputok

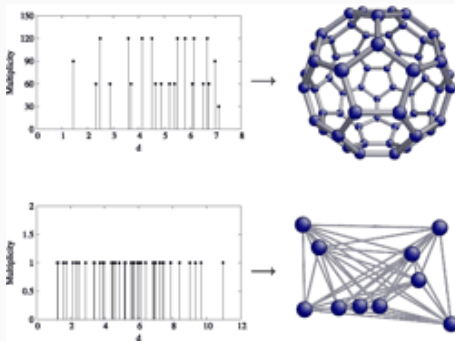


Figure 5: Egy példány sok egyforma éllel és egy random példány.

Billinge et al., Assigned and unassigned distance geometry: applications to biological molecules and nanostructures, *4OR* (2016).

Teljes gráf esetén is nehéz lehet

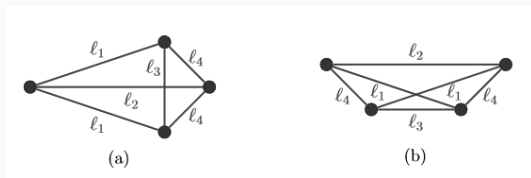


Figure 6: A K_4 teljes gráf nem kongruens realizációi azonos élhossz halmazzal.
 $\ell_1 = \sqrt{10}, \ell_2 = 4, \ell_3 = 2, \ell_4 = \sqrt{2}$.

Általános feltevés

A d dimenzió mindig rögzített. Az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak.

Címkézetlen változat - speciális eset teljes gráfok

Általános feltevés

A d dimenzió mindig rögzített. Az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak.

Tegyük fel, hogy az n pontszám is adott.

Általános feltevés

A d dimenzió mindig rögzített. Az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak.

Tegyük fel, hogy az n pontszám is adott.

◇ Meghatározzák-e a gráfot? $\rightarrow$ Igen, n ponton $\binom{n}{2}$ él az teljes gráf.

Általános feltevés

A d dimenzió mindig rögzített. Az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak.

Tegyük fel, hogy az n pontszám is adott.

◇ Meghatározzák-e a gráfot? $\rightarrow$ Igen, n ponton $\binom{n}{2}$ él az teljes gráf.

◇ Meghatározzák-e a gráfot és a megfelelő élek hosszát? $\rightarrow$ Igen. Boutin és Kemper (2004).

Általános feltevés

A d dimenzió mindig rögzített. Az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak.

Tegyük fel, hogy az n pontszám is adott.

- ◇ Meghatározzák-e a gráfot? $\rightarrow$ Igen, n ponton $\binom{n}{2}$ él az teljes gráf.
- ◇ Meghatározzák-e a gráfot és a megfelelő élek hosszát? $\rightarrow$ Igen. Boutin és Kemper (2004).
- ◇ Meghatározzák-e a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és a p realizációt is? $\rightarrow$ Igen, definíció szerint.

Mely gráfok esetén határozzák meg az élhosszak a gráfot és a megfelelő élek hosszát (és a p realizációt)?

Mely gráfok esetén határozzák meg az élhosszak a gráfot és a megfelelő élek hosszát (és a p realizációt)? Kell-e ismernünk az n pontszámot is a rekonstruálhatósághoz?

Legyen $m_{d,G}(p)$ a (G, p) élhosszainak sorozata és legyen $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ ezek egyesítése a $G = (V, E)$ összes d -dimenziós komplex realizációjára. Ez egy részhalmaza $\mathbb{C}^E$ -nek.

Legyen $m_{d,G}(p)$ a (G, p) élhosszainak sorozata és legyen $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ ezek egyesítése a $G = (V, E)$ összes d -dimenziós komplex realizációjára. Ez egy részhalmaza $\mathbb{C}^E$ -nek. A G d -dimenziós *mérési varietása*, $M_{d,G}$, a $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ lezártja.

Legyen $m_{d,G}(p)$ a (G, p) élhosszainak sorozata és legyen $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ ezek egyesítése a $G = (V, E)$ összes d -dimenziós komplex realizációjára. Ez egy részhalmaza $\mathbb{C}^E$ -nek. A G d -dimenziós *mérési varietása*, $M_{d,G}$, a $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ lezártja.

Tétel

Ha $M_{d,G} = M_{d,H}$, akkor G és H merevségi matroidjai izomorfak.

Legyen $m_{d,G}(p)$ a (G, p) élhosszainak sorozata és legyen $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ ezek egyesítése a $G = (V, E)$ összes d -dimenziós komplex realizációjára. Ez egy részhalmaza $\mathbb{C}^E$ -nek. A G d -dimenziós *mérési varietása*, $M_{d,G}$, a $m_{d,G}(\mathbb{C}^{nd})$ lezártja.

Tétel

Ha $M_{d,G} = M_{d,H}$, akkor G és H merevségi matroidjai izomorfak.

Tétel (Gortler, Thurston, 2014)

A G gráf pontosan akkor globálisan merev $\mathbb{R}^d$ -ben, ha globálisan merev $\mathbb{C}^d$ -ben.

A mérési varietás és a rekonstruálhatóság

Tétel

A G gráfra, adott $d \geq 1$ -re, az alábbiak ekvivalensek: (i) G valamely generikus realizációjára az élhosszak meghatározzák G -t és az élhosszakat, (ii) G bármely generikus realizációjára az élhosszak meghatározzák G -t és az élhosszakat, (iii) Ha $M_{d,G} = M_{d,H}$ és $|V(G)| = |V(H)|$, akkor $G = H$ és az élek közti bijekciót a gráf izomorfizmus indukálja.

Címkézetlen változat - globálisan merev gráfok

Feltevés: az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak. A d dimenzió és az n pontszám adott.

Tétel (Gortler, Theran, Thurston, 2019)

Ha G globálisan merev és $d \geq 2$, $n \geq d + 2$, akkor az élhosszak meghatározzák a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Címkézetlen változat - globálisan merev gráfok

Feltevés: az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak. A d dimenzió és az n pontszám adott.

Tétel (Gortler, Theran, Thurston, 2019)

Ha G globálisan merev és $d \geq 2$, $n \geq d + 2$, akkor az élhosszak meghatározzák a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Tétel (Gortler, Theran, Thurston, 2019)

Ha G 3-összefüggő és $d = 1$, akkor az élhosszak meghatározzák a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Címkézetlen változat - globálisan merev gráfok

Feltevés: az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak. A d dimenzió és az n pontszám adott.

Tétel (Gortler, Theran, Thurston, 2019)

Ha G globálisan merev és $d \geq 2$, $n \geq d + 2$, akkor az élhosszak meghatározzák a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Tétel (Gortler, Theran, Thurston, 2019)

Ha G 3-összefüggő és $d = 1$, akkor az élhosszak meghatározzák a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

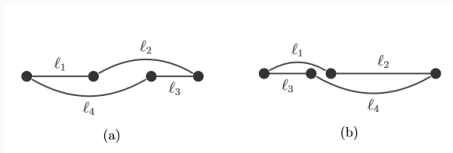


Figure 7: Az élhossz sorozatok megegyeznek, a gráfok izomorfak, de az élek közti bijekciót nem indukálja az izomorfizmus.

Tétel (Garamvölgyi, Jordán, 2020)

$d = 1, 2$ esetben fordítva is igaz: pontosan a 3-összefüggő (ill. globálisan merev) esetén rekonstruálható a gráf és az élhosszak (és így a realizáció is).

Tétel (Garamvölgyi, Jordán, 2020)

$d = 1, 2$ esetben fordítva is igaz: pontosan a 3-összefüggő (ill. globálisan merev) esetén rekonstruálható a gráf és az élhosszak (és így a realizáció is).

Tétel (Garamvölgyi, Jordán, 2020)

$d = 1$ esetben az élhossz sorozat alapján történő gráf rekonstrukció a gráf izomorfizmus problémánál nem könnyebb.

Új eredmények II.

Feltevés: az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak. (A d dimenzió adott - az n pontszám nem adott, de csak generikusakra szorítkozunk.)

Tétel (Garamvölgyi, Gortler, Jordán, 2021)

Ha G globálisan merev és $d \geq 2$, $n \geq d + 2$, akkor az élhosszak meghatározzák a pontszámot, a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Új eredmények II.

Feltevés: az élhosszak egy G gráf generikus (G, p) realizációjából származnak. (A d dimenzió adott - az n pontszám nem adott, de csak generikusakra szorítkozunk.)

Tétel (Garamvölgyi, Gortler, Jordán, 2021)

Ha G globálisan merev és $d \geq 2$, $n \geq d + 2$, akkor az élhosszak meghatározzák a pontszámot, a gráfot, a megfelelő élek hosszát, és így a realizációt is.

Tétel (Garamvölgyi, Gortler, Jordán, 2021)

Ha G globálisan merev és $n \geq d + 2$, akkor G d -dimenziós merevségi matroidja összefüggő.

- ◇ T. Jordán, Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane, *Graphs and Combinatorics*, online, 2020.

- ◇ T. Jordán, Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane, *Graphs and Combinatorics*, online, 2020.
- ◇ T. Jordán, Christopher Poston, Ryan Roach, Extremal families of redundantly rigid graphs in three dimensions, *European J. Combinatorics*, benyújtva, 2020.

- ◇ T. Jordán, Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane, *Graphs and Combinatorics*, online, 2020.
- ◇ T. Jordán, Christopher Poston, Ryan Roach, Extremal families of redundantly rigid graphs in three dimensions, *European J. Combinatorics*, benyújtva, 2020.
- ◇ T. Jordán, A note on generic rigidity of graphs in higher dimension, *Discrete Applied Mathematics*, online, 2021.

- ◇ T. Jordán, Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane, *Graphs and Combinatorics*, online, 2020.
- ◇ T. Jordán, Christopher Poston, Ryan Roach, Extremal families of redundantly rigid graphs in three dimensions, *European J. Combinatorics*, benyújtva, 2020.
- ◇ T. Jordán, A note on generic rigidity of graphs in higher dimension, *Discrete Applied Mathematics*, online, 2021.
- ◇ D. Garamvölgyi, S. Gortler, T. Jordán, Globally rigid graphs are fully reconstructible, *Forum of Mathematics, Sigma*, benyújtva, 2021.

- ◇ T. Jordán, Minimum size highly redundantly rigid graphs in the plane, *Graphs and Combinatorics*, online, 2020.
- ◇ T. Jordán, Christopher Poston, Ryan Roach, Extremal families of redundantly rigid graphs in three dimensions, *European J. Combinatorics*, benyújtva, 2020.
- ◇ T. Jordán, A note on generic rigidity of graphs in higher dimension, *Discrete Applied Mathematics*, online, 2021.
- ◇ D. Garamvölgyi, S. Gortler, T. Jordán, Globally rigid graphs are fully reconstructible, *Forum of Mathematics, Sigma*, benyújtva, 2021.
- ◇ T. Jordán, Rigid block and hole graphs with a single block, benyújtás alatt, 2021.

Köszönöm a figyelmet.

email: `tibor.jordan at ttk.elte.hu`

