

Klasszikus és többszörös Richardson-extrapoláció: stabilitás- és konzisztenciavizsgálatok

Havasi Ágnes

ELTE TTK, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék,
MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport
TKP Workshop, 2021. június 10-11.



- Klasszikus Richardson-extrapoláció (CRE)
- Lehetséges általánosítások (RRE, MRE)
- Az MRE abszolút stabilitásvizsgálata egyes Runge–Kutta-módszerekre
- Konzisztenciaeredmények

Klasszikus Richardson-extrapoláció (CRE)

KDE-rendszer Cauchy-feladata:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Két rácsot definiálunk $[0, T]$ -n:

$$\Omega_h := \{t_n = nh : n = 0, 1, \dots, N_t\}, \text{ where } N_t = T/h, \quad (2)$$

$$\Omega_{h/2} := \{t_k = kh/2 : k = 0, 1, \dots, 2N_t\}. \quad (3)$$

Mindkét rácson megoldjuk (1)-et ugyanazon p -ed rendben konvergencia numerikus módszerrel. A kapott numerikus megoldásokat a durva rács t_n pontjában jelölje $z(t_n)$ és $w(t_n)$.

Ha $y(t)$ $p + 1$ -szer folytonosan differenciálható, akkor

$$y(t_n) - z(t_n) = K \cdot h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}), \text{ és} \quad (4)$$

$$y(t_n) - w(t_n) = K \cdot (h/2)^p + \mathcal{O}(h^{p+1}). \quad (5)$$

Klasszikus Richardson-extrapoláció (CRE)

p -ed rendű tagok eliminálása $\rightarrow$ az

$$y_{\text{RE}}(t_n) := \frac{2^p w(t_n) - z(t_n)}{2^p - 1} \quad (6)$$

kombináció $p + 1$ -ed rendben konvergens.

A CRE két változata:

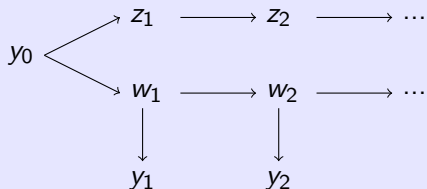
Passzív RE: a kombinált megoldást **nem használjuk fel** a továbblépéshez.

Aktív RE: a durva rács minden t_n pontjából **a kombinált megoldásból lépünk tovább** mindkét rácson.

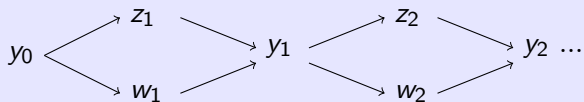
Az előadásban csak az aktív RE-ről lesz szó.

A CRE két változata

Passzív RE:



Aktív RE:



Ismételt Richardson-extrapoláció

- **Kérdés:** Hogyan növelhető tovább a pontosság?
- **Ismételt RE:** kombináljunk **kettőnél több** különböző lépésközzel nyert numerikus megoldásokat

$$y(t_n) - z(t_n) = K_1 \cdot h^p + K_2 \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}), \quad (7)$$

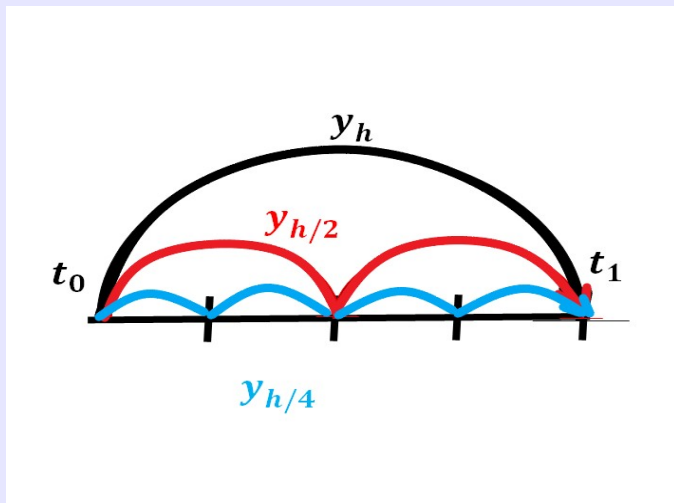
$$y(t_n) - w(t_n) = K_1 \cdot (h/2)^p + K_2 \cdot (h/2)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}), \quad (8)$$

$$y(t_n) - q(t_n) = K_1 \cdot (h/4)^p + K_2 \cdot (h/4)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \quad (9)$$

K_1 és K_2 kiküszöbölésével $p+2$ -ed rendben pontos módszert kapunk.

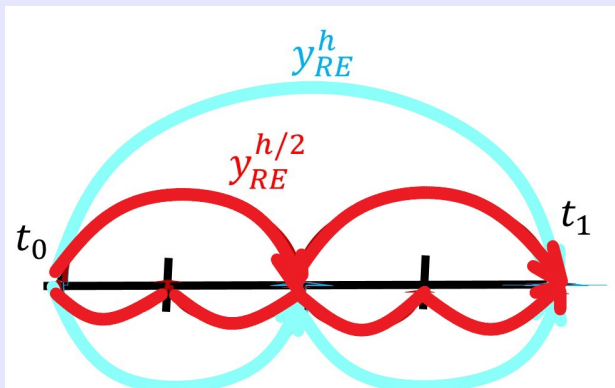
- Ezt a módszert (többszöri ismétlés mellett is) részletesen tanulmányoztuk (**Zahari Zlatev et al.**)

Ismételt Richardson-extrapoláció



Többszörös Richardson-extrapoláció

- **Másik ötlet:** alkalmazzuk a CRE módszerét a kombinált módszerre (mögöttes módszer + CRE!) → **Többszörös RE** ($p \rightarrow p + 2$)



Stabilitás rögzített rácson

Stiff feladatoknál fontos a **Dahlquist-féle tesztfeladaton** való viselkedés:

$$y' = \lambda y, \quad t \in [0, \infty), \quad y(0) = y_0, \quad \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0 \quad (10)$$

Pontos megoldás: $y(t) = y_0 \exp(\lambda t)$.

Fontos tulajdonsága: $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ esetén korlátos

Elvárás: a numerikus megoldás szintén rendelkezzen ezen tulajdonsággal egy rögzített lépésközű rácson, ha $t_n \rightarrow \infty$.

Legyen $\mu := h\lambda$! Ekkor bármely egylépéses numerikus módszert a (10) feladatra alkalmazva az $(n-1)$ -edik időrétegről az n -edikre való továbblépés operátora kifejezhető μ -vel:

$$y_n = R(\mu)y_{n-1} \Rightarrow y_n = (R(\mu))^n y_0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Stabilitás rögzített rácson

$R(\mu)$: a módszer **stabilitási függvénye**.

Pl. 1) az **explicit Euler**-módszert ($y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$) a tesztfeladatra alkalmazva:

$$y_n = (1 + h\lambda)y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

ezért $R_{EE}(\mu) = 1 + \mu$.

Pl. 2) az **implicit Euler**-módszerre $R_{IE}(\mu) = \frac{1}{1-\mu}$.

Egylépéses módszer alkalmazása esetén a numerikus megoldás korlátos a $[0, \infty)$ intervallum rácspontjaiban $\Leftrightarrow |R(\mu)| \leq 1$.

Stabilitási tartomány: $\{\mu \in \mathbf{C} : |R(\mu)| \leq 1\}$

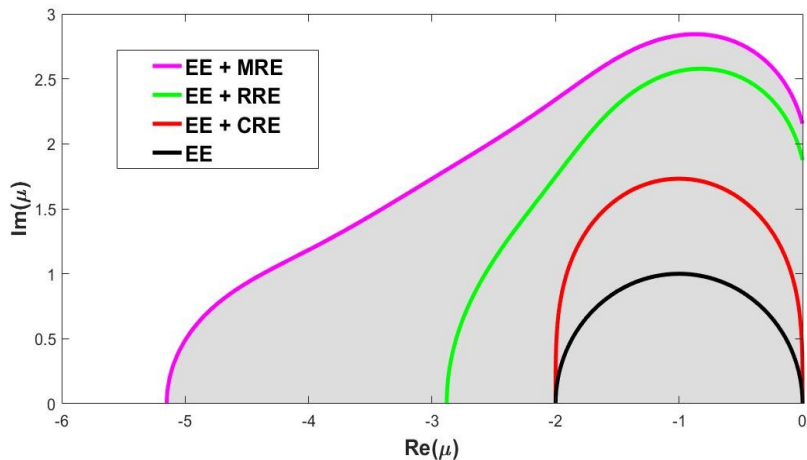
A-stabil módszer: $|R(\mu)| \leq 1 \quad \forall \mu \in \mathbf{C}^-$.

Az abszolút stabilitás vizsgálata

- Az explicit RK (ERK) módszerek stabilitási tartománya korlátozott, és ez a RE-val kombinált változataikra is igaz.
- A klasszikus RE alkalmazása megnöveli a stabilitási tartomány méretét.
- Zlatev et al.: Az ismételt RE (RRE) alkalmazásánál minden egyes ismétléssel nő a tartomány mérete.
- A többszörös RE (MRE) az összes vizsgált ERK módszer esetén nagyobb stabilitási tartománnyal rendelkezik, mint az azonos rendű RRE módszer.

→ *T. Bayleyegn, Á. Havasi: Multiple Richardson Extrapolation Applied to Explicit Runge–Kutta Methods. I. Dimovand, S. Fidanova (eds), Advances in High Performance Computing, pages 262-270, Cham, 2021.*

Stabilitási tartományok az EE mint mögöttes módszer esetén



Az IE + MRE módszer stabilitásvizsgálata

A IE módszer is A-stabil. Ismeretes, hogy az IE + CRE szintén A-stabil.

Kérdés: megőrzi-e az MRE az IE és az IE + CRE módszerek ezen jó tulajdonságát?

1. lépés: Egy h hosszúságú időlépés az IE + CRE módszerrel y_{n-1} kezdővektorból:

$$z_n = R_{IE+CRE}(\mu)y_{n-1} = \left[\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{2})^2} - \frac{1}{1 - \mu} \right] y_{n-1} \quad (13)$$

2. lépés: Két $0.5h$ hosszúságú időlépés az IE + CRE módszerrel:

$$w_n = \left[\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{4})^2} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{2}} \right]^2 y_{n-1}$$

3. lépés: Lineáris kombináció $p = 2$ melletti súlyokkal (az IE + CRE módszer rendje 2):

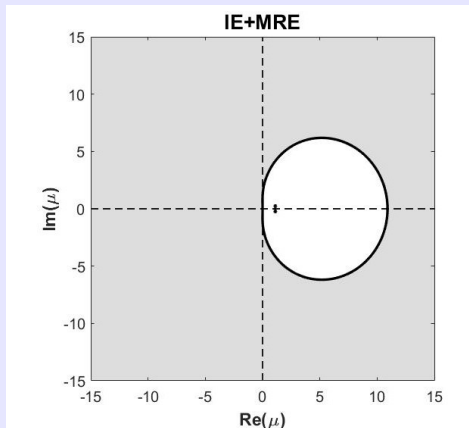
$$y_n = \frac{4}{3}w_n - \frac{1}{3}z_n$$

$$y_n = \left[\frac{4}{3} \left(\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{4})^2} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{2}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{2})^2} - \frac{1}{1 - \mu} \right) \right] y_{n-1} \quad (14)$$

$\Rightarrow$ az IE + MRE módszer stabilitási függvénye:

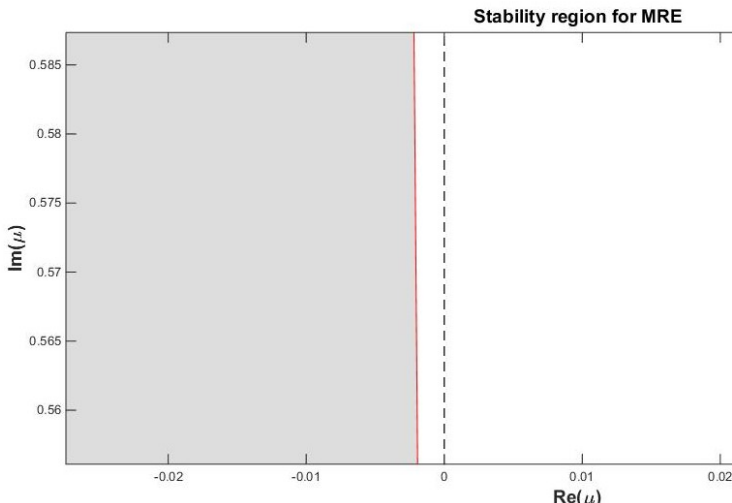
$$R_{IE+MRE}(\mu) = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{4})^2} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{2}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{(1 - \frac{\mu}{2})^2} - \frac{1}{1 - \mu} \right) \quad (15)$$

Stabilitási tartomány



Az ábra ezt sugallja, hogy az $IE + MRE$ módszer A-stabil (a bal félsík szürkének tűnik), azonban lássuk nagyítva!

Nagyított ábra az IE + MRE módszer stabilitási tartományáról



Összefoglalás (abszolút stabilitás)

- Ugyanazon lépésközzel dolgozva az MRE némileg költségesebb módszer a $p + 2$ -ed rendű pontosság elérésére, mint az RRE.
- Az MRE-t explicit Runge–Kutta módszerrel kombinálva nagyobb abszolút stabilitási tartományokat kapunk, mint CRE ill. RRE esetén. Ez hosszabb lépésköz megválasztását teszi lehetővé.
- Ismeretes, hogy az IE és IE + CRE módszerek A-stabilak. Megmutattuk, hogy az IE + MRE módszer nem A-stabil. Stabilitási problémába ütközhetünk, ha a megoldandó feladat mátrixának (vagy Jacobi-mátrixának) tisztán képzetesek a sajátértékei.
 → *T. Bayleyegn, Á. Havasi: Multiple Richardson Extrapolation and its Combination with the Implicit Euler Method. Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math., 2020.*

A módszerek konvergenciája

Korábbi eredmények:

- Ha az alaplódszer konvergens, akkor a passzív RE eggyel megnöveli a konvergencia rendjét.
- ERK ill. DIRK módszer + aktív RE konvergens, ha a jobb oldali f függvény Lipschitzes.

Kérdés: Mit mondhatunk a konvergencia rendjéről az aktív RE esetén?
Ehhez vizsgálandó a konzisztencia rendje.

Általános egylépéses módszer

$$y_n = y_{n-1} + h\Phi(t_{n-1}, y_{n-1}, h) \quad (16)$$

Beláttuk: ha az alapszámítás első- vagy másodrendben konzisztens, akkor az aktív RE eggyel megnöveli a konzisztencia rendjét.

→ *T. Bayleyegn, I. Faragó, Á. Havasi: On the consistency and convergence of classical Richardson extrapolation as applied to explicit one-step methods (Applied Mathematics and Computation)*

További terv: általánosítás általános egylépéses (implicit) módszerre

$$y_n = y_{n-1} + h\Phi(t_{n-1}, y_{n-1}, y_n, h). \quad (17)$$

Runge–Kutta-módszer + aktív RE

A jól ismert rendfeltételek vizsgálatával $p = 3$ rendű alpmódszerre is igazoltuk a konzisztenciarend eggyel való növekedését (a kombinált módszer Butcher-táblája alapján). $\rightarrow$ Lipschitzes f esetén a konvergenciarend is eggyel nő.

$\rightarrow$ *T. Bayleyegn, I. Faragó, Á. Havasi: On the consistency order of Runge–Kutta methods combined with active Richardson Extrapolation, 13th International Conference on Large-Scale Scientific Computations, június 7 - 11, 2021, Szozopol, Bulgária (előadás és cikk).*

További terv: általánosítás többszörös és ismételt Richardson-extrapolációra.