

# Népszerű hozzárendelések keresése

Király Tamás<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ELTE TTK Operációkutatási Tanszék

2021. június 10-11. Budapest



PROGRAM  
FINANCED FROM  
THE NRDI FUND

# A kutatás résztvevői

- ▶ Telikepalli Kavitha (TIFR, Mumbai, India)
- ▶ Jannik Matuschke (Research Center for Operations Management, KU Leuven)
- ▶ Schlotter Ildikó (Budapesti Műszaki Egyetem)
- ▶ Ulrike Schmidt-Kraepelin (Technische Universität Berlin)

A kutatás előzménye:

T. Kavitha, T. Király, J. Matuschke, I. Schlotter, U. Schmidt-Kraepelin, *Popular Branchings and Their Dual Certificates*, Mathematical Programming (2021), available online, <https://doi.org/10.1007/s10107-021-01659-6>

# Hozzárendelési feladat

- ▶ A hozzárendelési probléma a kombinatorikus optimalizálás egyik alapfeladata
- ▶ Adott egy páros gráf, élköltségekkel
- ▶ Feladat: minimális költségű teljes párosítás keresése
- ▶ Hatékony algoritmus: **Magyar módszer**
  - ▶ Harold W. Kuhn, 1955
  - ▶ König Dénes és Egerváry Jenő eredményein alapul
  - ▶ Carl Gustav Jacobi lényegében ekvivalens módszert írt le a XIX. század első felében!
- ▶ Számos gyakorlati alkalmazás (munkaerő-beosztás, gép-ütemezés, pénzügyi tervezés, modul allokáció elosztott számításoknál)

# Az alkalmazhatóság korlátai

Példa a korlátozott alkalmazhatóságra: rezidensek beosztása kórházakhoz

- ▶ Az élkötségeket nehéz definiálni
- ▶ A szereplők (kórházak, rezidensek) nem feltétlenül fogadják el a felkínált hozzárendelést

Megoldás: **stabil párosítási feladat** (Gale, Shapley, 1962)

- ▶ Élsúlyok helyett a szereplőknek preferenciái vannak
- ▶ Optimalitás helyett/mellett stabilitás: nincs *blokkoló* kórház-rezidens pár
- ▶ Gale-Shapley algoritmus
- ▶ Nobel-díj (Shapley, Roth, 2012)

# Egyoldali preferenciák

Sok alkalmazásnál csak az egyik oldalnak vannak preferenciái

- ▶ Diákok témaválasztása
- ▶ Munkaidő-beosztás
- ▶ Szociális bérlakások elosztása
- ▶ Földrajzilag diverz erőforrások beosztása

Ilyenkor a stabilitás túl erős feltétel; gyengébb alternatívák:

- ▶ Pareto-optimális párosítás
- ▶ Rang-maximális párosítás
- ▶ **Népszerű párosítás**

# Népszerű párosítások

- ▶  $G = (S, T; E)$  páros gráf
- ▶  $S$ : ágensek,  $T$ : tárgyak
- ▶  $\prec_s$ : részbenrendezés  $s$  szomszédain ( $s \in S$ )
- ▶  $M$  párosítás **népszerűbb**  $M'$ -nél, ha több szereplő preferálja  $M$ -beli szomszédját, mint ahány az  $M'$ -belit.

## Definíció

Egy  $M$  párosítás **népszerű**, ha nincs nála népszerűbb párosítás.

# Népszerű párosítások – ismert eredmények

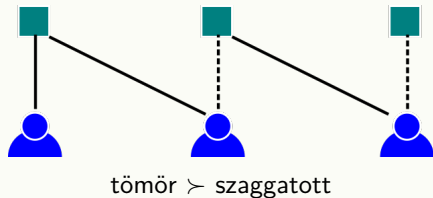
- ▶ Nem mindig létezik
- ▶ Nem mindegyik ugyanakkora
- ▶ Polinom időben található egy maximális méretű népszerű párosítás
- ▶ Minimális költségű népszerű párosítás is található (kétoldali preferenciák esetén NP-teljes)

D. J. Abraham, R. W. Irving, T. Kavitha, K. Mehlhorn, Popular matchings, SIAM Journal on Computing, 2007

E. McDermid, R. W. Irving, Popular matchings: Structure and algorithms, Journal of Combinatorial Optimization, 2011

# Népszerű hozzárendelések

Sok alkalmazásban csak teljes párosítások számítanak, így a népszerű párosítás feltétele túl erős.



Megoldás: a feltételt csak teljes párosításokkal való összehasonlításra követeljük meg.

## Definíció

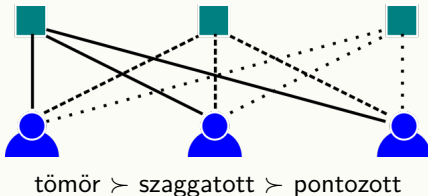
Egy  $M$  teljes párosítás **népszerű hozzárendelés**, ha nincs nála népszerűbb *teljes* párosítás.

M



# Népszerű hozzárendelések tulajdonságai

- ▶ Ha van stabil vagy népszerű teljes párosítás, az népszerű hozzárendelés
- ▶ Népszerű hozzárendelés sem mindig létezik:



- ▶ A népszerű maximális párosítás probléma visszavezethető erre

# Fő eredmények

## Algoritmusok

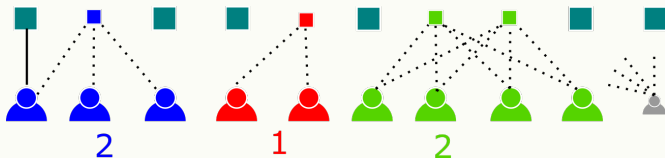
- ▶ Polinom idejű algoritmus népszerű hozzárendelés megtalálására
- ▶ Polinom idejű algoritmus népszerű hozzárendelés keresésére előírt/tiltott élekkel
- ▶  $O(|E|^k)$  idejű algoritmus annak eldöntésére, hogy létezik-e hozzárendelés, aminek népszerűtelnségi rése legfeljebb  $k$

## Nehézségi eredmények

- ▶ Minimális költségű népszerű hozzárendelés megtalálása NP-nehez (rendezések esetén is)
- ▶ Minimális népszerűtelnségi résű hozzárendelés megtalálása  $W[1]$ -nehéz (gyenge rangsorolások esetén is)

# Alkalmazás: népszerű párosítás diverzitás-feltételekkel

- ▶ Adott az ágensek egy  $S_1, \dots, S_k$  partíciója és  $d_1, \dots, d_k$  számok
- ▶ Azok közül a párosítások közül keresünk népszerűt, amik  $S_i$ -ből legalább  $d_i$  ágenset fednek



A kisebb csúcsok dummy csúcsok, a pontozott élek a rangsor alján vannak



# Q&A