

Multiple-agent many-visits TSP

Bérczi Kristóf

MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem

2021. június 10-11.

Utazóügynök probléma (TSP)

Many-visits TSP

Multiple-agent many-visits TSP

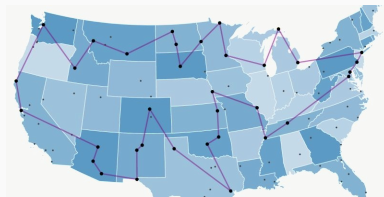
Utazóügynök probléma (TSP)

Alapfeladat

Traveling Salesman Problem (TSP)

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken.

Output: Minimális költségű bejárás.

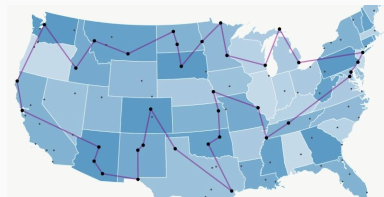


Alapfeladat

Traveling Salesman Problem (TSP)

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken.

Output: Minimális költségű bejárás.



Alkalmazások:

- nyomtatott áramkörök fúrása, tesztelése
- röntgen-kristályográfia
- régészeti leletek elemzése

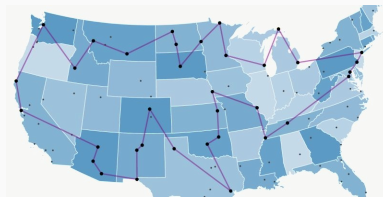


Alapfeladat

Traveling Salesman Problem (TSP)

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken.

Output: Minimális költségű bejárás.



Alkalmazások:

- nyomtatott áramkörök fúrása, tesztelése
- **röntgen-kristályográfia**
- régészeti leletek elemzése



Alapfeladat

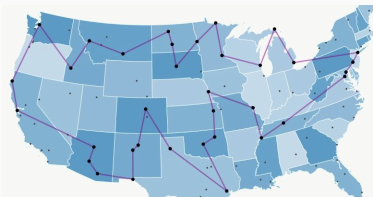
Traveling Salesman Problem (TSP)

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken.

Output: Minimális költségű bejárás.

Alkalmazások:

- nyomtatott áramkörök fúrása, tesztelése
- röntgen-kristályográfia
- régészeti leletek elemzése



DOCUMENTA MATHEM.

199

FLINDERS PETRIE, THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM, AND THE BEGINNING OF MATHEMATICAL MODELING IN ARCHAEOLOGY

THOMAS L. GERTZEN AND MARTIN GRÖTSCHTEL

ABSTRACT. This article describes one of the first attempts to use mathematical modeling and optimization in archaeology. William Matthew Flinders Petrie (1853–1942), eminent British archaeologist, excavating a large graveyard at Naqada in Upper Egypt suggested in his article “Sequences in Prehistoric Remains” [17] to employ a “distance function” to describe the “discontinuity of graves in time”. Petrie’s grave distance is known today as *Hamming metric*, based on which he proposed to establish the chronology of the graves, i.e., the correct sequence of points in time when the graves were built (briefly called *seriations*). He achieved this by solving a graph theoretic problem which is called *weighted Hamiltonian path problem* today and is, of course, equivalent to the *symmetric travelling salesman problem*. This paper briefly sketches a few aspects of Petrie’s biographical background and evaluates the significance of *seriation*.

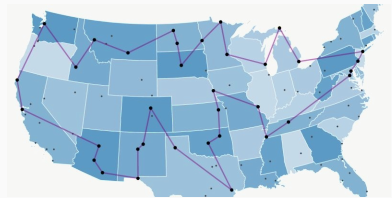
2010 Mathematics Subject Classification: 01A55, 05-03, 90-03, 90C27
Keywords and Phrases: Travelling salesman problem, *seriation*, *Hamming metric*, archaeology

Alapfeladat

Traveling Salesman Problem (TSP)

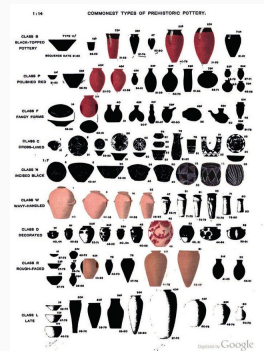
Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken.

Output: Minimális költségű bejárás.



Alkalmazások:

- nyomtatott áramkörök fúrása, tesztelése
- röntgen-kristályográfia
- régészeti leletek elemzése



Approximáció

Komplexitás

A feladat **NP-nehéz**.
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Approximáció

Komplexitás

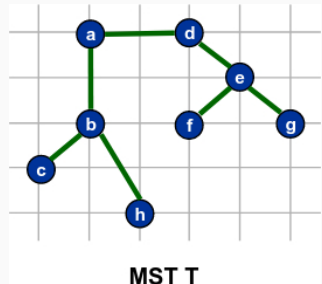
A feladat **NP-nehéz**.
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Bizonyítás:

- 1 $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- 2 $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
- 3 $G' \leftarrow T$ és M uniója
- 4 $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben
- 5 $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör



Approximáció

Komplexitás

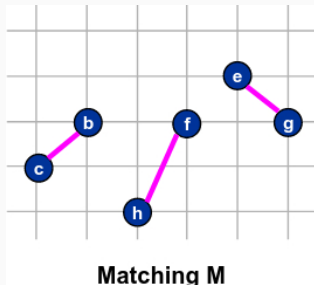
A feladat **NP-nehéz**.
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Bizonyítás:

- 1 $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- 2 $M \leftarrow$ **minimális költségű teljes párosítás**
 T páratlan fokú pontjain
- 3 $G' \leftarrow T$ és M uniója
- 4 $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben
- 5 $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör



Approximáció

Komplexitás

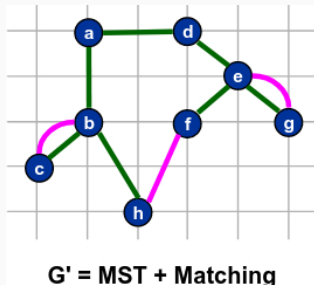
A feladat **NP-nehéz**.
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Bizonyítás:

- 1 $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- 2 $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
- 3 $G' \leftarrow T$ és M **uniója**
- 4 $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben
- 5 $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör



Approximáció

Komplexitás

A feladat **NP-nehéz**.

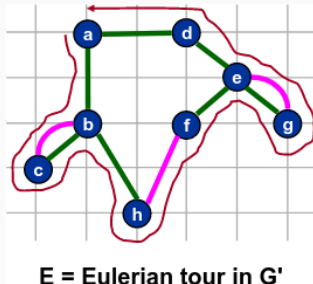
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Bizonyítás:

- 1 $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- 2 $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
- 3 $G' \leftarrow T$ és M uniója
- 4 $E \leftarrow$ **Euler séta** G' -ben
- 5 $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör



Approximáció

Komplexitás

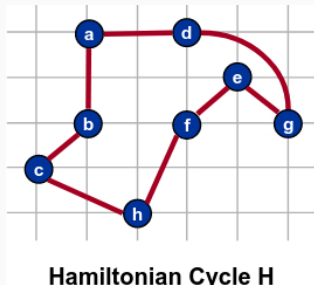
A feladat **NP-nehéz**.
[Hamilton-kör probléma]

Christofides algoritmus

Metrikus költségfüggvény esetén létezik
3/2-approximáció.

Bizonyítás:

- 1 $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- 2 $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
- 3 $G' \leftarrow T$ és M uniója
- 4 $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben
- 5 $H \leftarrow$ **rövidítésekkel kapott Hamilton kör**



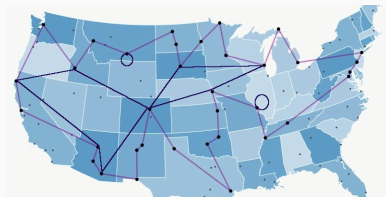
Many-visits TSP

Feladat

Many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon.

Output: Minimális költségű bejárás
multiplicitásokkal.

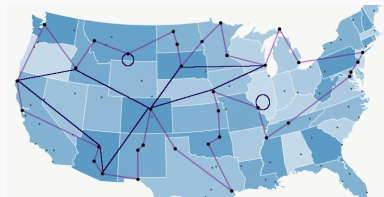


Feladat

Many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon.

Output: Minimális költségű bejárás
multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- ütemezési feladatok
- felszállási sorrend meghatározása egy kifutópályára

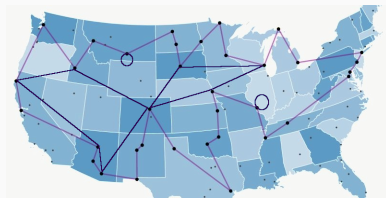


Feladat

Many-visits TSP

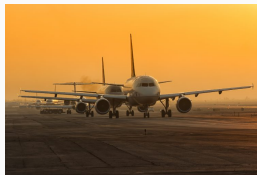
Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon.

Output: Minimális költségű bejárás
multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- ütemezési feladatok
- **felszállási sorrend meghatározása egy
kifutópályára**



Alapötlet

- ① $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa
- ② $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain
- ③ $G' \leftarrow T$ és M uniója
- ④ $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben
- ⑤ $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör

Alapötlet

① $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa

② $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain

③ $G' \leftarrow T$ és M uniója

④ $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben

⑤ $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör

① $T \leftarrow$ minimális költségű $r(V)$ élű összefüggő gráf, minden pont foka legalább $2r(v) - 1$

② $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain

③ $G' \leftarrow T$ és M uniója

④ $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben

⑤ $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott **séta**

Alapötlet

① $T \leftarrow$ minimális költségű feszítő fa

② $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain

③ $G' \leftarrow T$ és M uniója

④ $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben

⑤ $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott Hamilton kör

① $T \leftarrow$ minimális költségű $r(V)$ élű összefüggő gráf, minden pont foka legalább $2r(v) - 1$

② $M \leftarrow$ minimális költségű teljes párosítás T páratlan fokú pontjain

③ $G' \leftarrow T$ és M uniója

④ $E \leftarrow$ Euler séta G' -ben

⑤ $H \leftarrow$ rövidítésekkel kapott **séta**

$\Rightarrow$ Iteratív kerekítésen alapuló algoritmus általánosított polimatroidokra fokszám-korlátok mellett.

LP relaxált

Input: $B(p, b)$ g-polimatroid, $H = (S, \mathcal{E})$ hipergráf, $m_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ szorzó minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$ -re, $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátok, $c : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény.

Cél: $B(p, b)$ egy egész pontja, melyre $f(\varepsilon) \leq \sum_{s \in \varepsilon} m_\varepsilon(s)x(s) \leq g(\varepsilon)$ teljesül minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$ -re, és $c \cdot x$ minimális.

LP relaxált

Input: $B(p, b)$ g-polimatroid, $H = (S, \mathcal{E})$ hipergráf, $m_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ szorzó minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$ -re, $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátok, $c : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény.

Cél: $B(p, b)$ egy egész pontja, melyre $f(\varepsilon) \leq \sum_{s \in \varepsilon} m_\varepsilon(s)x(s) \leq g(\varepsilon)$ teljesül minden $\varepsilon \in \mathcal{E}$ -re, és $c \cdot x$ minimális.

$\Rightarrow$ Ez ilyen formában túl nehéz. Helyette: minden hiperél korlátot legfeljebb Δ -val sértő megoldás, melynek költsége legfeljebb OPT_{LP} .

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{s \in S} c(s) x(s) \\ \text{(LP)} \quad \text{subject to} & p(Z) \leq x(Z) \leq b(Z) \quad \forall Z \subseteq S \\ & f(\varepsilon) \leq \sum_{s \in \varepsilon} m_\varepsilon(s) x(s) \leq g(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{E} \end{array}$$

B, Berger, Mnich, Vincze

- $3/2$ -approximáció a **kör** Many-visits TSP feladatra.
- $3/2$ -approximáció az **út** Many-visits TSP feladatra.



Bérczi, Berger, Mnich, Vincze. *Degree-Bounded Generalized Polymatroids and Approximating the Metric Many-Visits TSP.*



Bérczi, Mnich, Vincze. *A $3/2$ -Approximation for the Metric Many-visits Path TSP.*

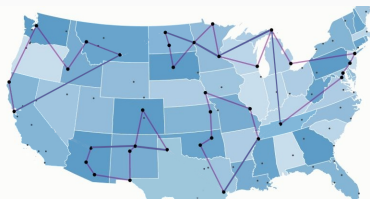
Multiple-agent many-visits TSP

Feladat

Multiple-agent many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon, depók.

Output: Minimális költségű bejárás a
depókból multiplicitásokkal.

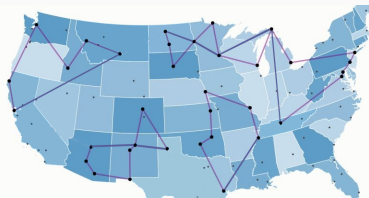


Feladat

Multiple-agent many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon, depók.

Output: Minimális költségű bejárás a
depókból multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- nyomtatási feladatok ütemezése
- járműflották útvonaltervezése
- meleghengermű feladatainak ütemezése
- felszállási sorrend meghatározása több kifutópálya esetén

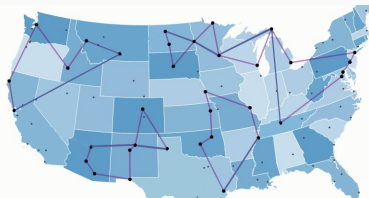


Feladat

Multiple-agent many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon, depók.

Output: Minimális költségű bejárás a depókból multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- nyomtatási feladatok ütemezése
- **járműflották útvonaltervezése**
- meleghengermű feladatainak ütemezése
- felszállási sorrend meghatározása több kifutópálya esetén

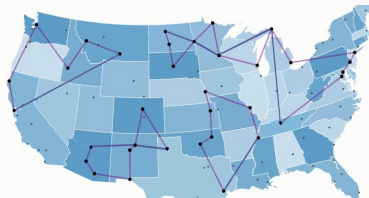


Feladat

Multiple-agent many-visits TSP

Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon, depók.

Output: Minimális költségű bejárás a
depókból multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- nyomtatási feladatok ütemezése
- járműflották útvonaltervezése
- **meleghengermű feladatainak ütemezése**
- felszállási sorrend meghatározása több
kifutópálya esetén

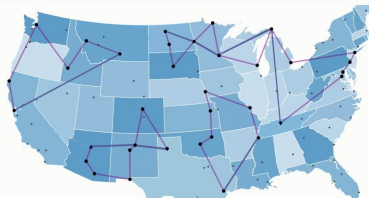


Feladat

Multiple-agent many-visits TSP

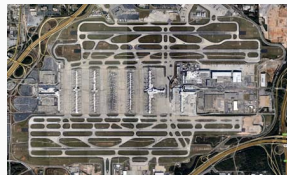
Input: Teljes gráf $G = (V, E)$,
(metrikus) költség az éleken,
multiplicitások a csúcsokon, depók.

Output: Minimális költségű bejárás a
depókból multiplicitásokkal.



Alkalmazások:

- nyomtatási feladatok ütemezése
- járműflották útvonaltervezése
- meleghengermű feladatainak ütemezése
- **felszállási sorrend meghatározása több kifutópálya esetén**



Változatok

		Tetszőleges túrák	Diszjunkt túrák
Nincs depó	Lehet üres túra		
	Nem lehet üres túra		
Van depó	Lehet üres túra		
	Nem lehet üres túra		

Változatok

		Tetszőleges túrák	Diszjunkt túrák
Nincs depó	Lehet üres túra	3-approx.	4-approx.
	Nem lehet üres túra	2-approx.	
Van depó	Lehet üres túra	3-approx.	4-approx.
	Nem lehet üres túra	2-approx.	



Bérczi, Mnich, Vincze. *Approximations for the Multiple-Agent Many-Visits Traveling Salesman Problems.*

[Christofides-jellegű algoritmus, matroidelméleti megfontolások, általánosított polimatroidok fokszámkorlátok mellett, élduplázás]

Változatok

		Tetszőleges túrák	Diszjunkt túrák
Nincs depó	Lehet üres túra	3-approx.	4-approx.
	Nem lehet üres túra	2-approx.	
Van depó	Lehet üres túra	3-approx.	4-approx.
	Nem lehet üres túra	2-approx.	



Bérczi, Mnich, Vincze. *Approximations for the Multiple-Agent Many-Visits Traveling Salesman Problems*.

[Christofides-jellegű algoritmus, matroidelméleti megfontolások, általánosított polimatroidok fokszámkorlátok mellett, élduplázás]

Fő kérdés: Adható-e $3/2$ -approximáció ezekben az esetekben is?

Köszönöm a figyelmet!