

2021. június 11.

TKP workshop

Fourier analízis és gráfok Abel csoportokon

Somlai Gábor

Ciklikus gráfok

- ▶ A gráf csúcsai az egész számok egy m egész számmal adott maradékai.
- ▶ Kiválasztom a különbségek halmazát. Két csúcs akkor van összekötve, ha különbségük az előre kiválasztott halmazban van.

Ciklikus gráfok

- ▶ A gráf csúcsai az egész számok egy m egész számmal adott maradékai.
- ▶ Kiválasztom a különbségek halmazát. Két csúcs akkor van összekötve, ha különbségük az előre kiválasztott halmazban van.
- ▶ Ilyen tehát egy irányított kör, de nem ilyen a Petersen gráf.

Ciklikus gráfok

- ▶ A gráf csúcsai az egész számok egy m egész számmal adott maradékai.
- ▶ Kiválasztom a különbségek halmazát. Két csúcs akkor van összekötve, ha különbségük az előre kiválasztott halmazban van.
- ▶ Ilyen tehát egy irányított kör, de nem ilyen a Petersen gráf.
- ▶ Egy ilyen gráfnak izomorfizmusa egy m -hez relatív elemmel szorzás.
- ▶ Ádám András sejtése, hogy ha két ciklikus gráf izomorf, akkor van köztük szorzás is, ami izomorfizmust csinál.

Cayley gráfos átfogalmazás

- ▶ G (véges) csoport, $S \subseteq G$. Ekkor $Cay(G, S)$ Cayley gráf csúcsai G elemei, g -ből pedig megy egy él h -ba pontosan akkor, ha $gh^{-1} \in S$.
- ▶ Babai a következőt mondta. Ha egy csoport olyan, hogy két Cayley gráfja egy csoportnak izomorf, akkor van köztük G automorfizmusa által indukált izomorfizmus is, akkor a csoportot CI csoportnak hívjuk.

Cayley gráfos átfogalmazás

- ▶ G (véges) csoport, $S \subseteq G$. Ekkor $Cay(G, S)$ Cayley gráf csúcsai G elemei, g -ből pedig megy egy él h -ba pontosan akkor, ha $gh^{-1} \in S$.
- ▶ Babai a következőt mondta. Ha egy csoport olyan, hogy két Cayley gráfja egy csoportnak izomorf, akkor van köztük G automorfizmusa által indukált izomorfizmus is, akkor a csoportot CI csoportnak hívjuk.
- ▶ Babai ezt át is fogalmazta arra, hogy elég egy Cayley gráf automorfizmus csoportjában a G -vel izomorf reguláris részcsoporthokról belátni, hogy konjugáltak.
- ▶ Prímrendű ciklikus csoport CI.

- ▶ Babai 2017-ben publikálta a kvázi polinomiális algoritmusát az általános gráf izomorfizmus problémára.

- ▶ Babai 2017-ben publikálta a kvázi polinomiális algoritmusát az általános gráf izomorfizmus problémára.
- ▶ Ezt megelőzően $2^{O(\sqrt{n \log(n)})}$ volt az algoritmus sebessége, amit még Luks-szal publikált Babai 1983-ban.

- ▶ Babai 2017-ben publikálta a kvázi polinomiális algoritmusát az általános gráf izomorfizmus problémára.
- ▶ Ezt megelőzően $2^{O(\sqrt{n \log(n)})}$ volt az algoritmus sebessége, amit még Luks-szal publikált Babai 1983-ban.
- ▶ A p^2 csúcsú gráfokra sincs polinomiális algoritmus jelenleg.

CI csoportok szerkezete

Feloldható csoportok

Tétel (Ezek lehetnek CI csoportok)

1. $G = U \times V$, ahol a következők fenn állnak $(|U|, |V|) = 1$ minden Sylow részcsoport elemi Abel, kvaternió vagy $\mathbb{Z}_4$.
 U Abel, és V a következők egyike: 1 , Q , A_4 , $E(A, n)$, ahol $n \in \{2, 3, 4\}$ vagy $Q \times E(A, 3)$ vagy $E(A, n) \times E(A', 3)$, ahol $n = 2$ vagy 4 és $(|A|, 6) = (|A'|, 6) = 1$.
2. G a következők egyike: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{18}$, D_{18} , $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_4$ úgy, hogy a centrum rendje 2 , $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_9$, ahol a centrum rendje 3 , $E(A, 8)$, vagy $\mathbb{Z}_2^d \times \mathbb{Z}_9$.

Eredmények

A CI csoportok ritkák, nagyrészt Abel csoportok, vagy egyszerű szerkezetű feloldhatóak.

Tétel (Muzychuk, Somlai)

$\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_q$ CI csoport.

Somlai, G., & Muzychuk, M. (2021). The Cayley isomorphism property for $\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_q$. Algebraic Combinatorics, 4(2), 289-299.

Tétel (Kovács, Muzychuk, Pálffy, Ryabov, Somlai)

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_n$ illetve $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$ CI-csoport.

Spektrális halmazok

- ▶ $\mathbb{R}^n$ egy S részhalmaza spektrális, ha $L^2(S)$ -ben van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis. Igazából egy szép végtelen összeg alakban akarjuk felírni a vizsgált függvényeinket.

Spektrális halmazok

- ▶ $\mathbb{R}^n$ egy S részhalmaza spektrális, ha $L^2(S)$ -ben van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis. Igazából egy szép végtelen összeg alakban akarjuk felírni a vizsgált függvényeinket.
- ▶ Véges Abel csoportok esetében elég véges összeg, és az exponenciális függvények homomorfizmusok $\mathbb{C}^*$ -ba, azaz karakterek.

Spektrális halmazok

- ▶ $\mathbb{R}^n$ egy S részhalmaza spektrális, ha $L^2(S)$ -ben van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis. Igazából egy szép végtelen összeg alakban akarjuk felírni a vizsgált függvényeinket.
- ▶ Véges Abel csoportok esetében elég véges összeg, és az exponenciális függvények homomorfizmusok $\mathbb{C}^*$ -ba, azaz karakterek.
- ▶ Négyzetek, téglalapok spektrálisan, de a körlap vagy egy háromszög már nem.

Spektrális halmazok

- ▶ $\mathbb{R}^n$ egy S részhalmaza spektrális, ha $L^2(S)$ -ben van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis. Igazából egy szép végtelen összeg alakban akarjuk felírni a vizsgált függvényeinket.
- ▶ Véges Abel csoportok esetében elég véges összeg, és az exponenciális függvények homomorfizmusok $\mathbb{C}^*$ -ba, azaz karakterek.
- ▶ Négyzetek, téglalapok spektrálisan, de a körlap vagy egy háromszög már nem.
- ▶ Diszkrét esetben a részcsoportok spektrálisak.

Spektrális halmazok

- ▶ $\mathbb{R}^n$ egy S részhalmaza spektrális, ha $L^2(S)$ -ben van exponenciális függvényekből álló ortogonális bázis. Igazából egy szép végtelen összeg alakban akarjuk felírni a vizsgált függvényeinket.
- ▶ Véges Abel csoportok esetében elég véges összeg, és az exponenciális függvények homomorfizmusok $\mathbb{C}^*$ -ba, azaz karakterek.
- ▶ Négyzetek, téglalapok spektrálisan, de a körlap vagy egy háromszög már nem.
- ▶ Diszkrét esetben a részcsoporthok spektrálisak.
- ▶ Fuglede sejtése: A spektrális halmazok épp a parkettázóakkal esnek egybe.

Kapcsolat diszkrét és folytonos között

Dutkay és Lai eredménye 2013-ból, ami Newman eredményére épít.

Kapcsolat diszkrét és folytonos között

Dutkay és Lai eredménye 2013-ból, ami Newman eredményére épít.

$$T \rightarrow S(\mathbb{R}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

Kapcsolat diszkrét és folytonos között

Dutkay és Lai eredménye 2013-ból, ami Newman eredményére épít.

$$T \rightarrow S(\mathbb{R}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

$$S \rightarrow T(\mathbb{R}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

Kapcsolat diszkrét és folytonos között

Dutkay és Lai eredménye 2013-ból, ami Newman eredményére épít.

$$T \rightarrow S(\mathbb{R}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

$$S \rightarrow T(\mathbb{R}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

Tao belátta, hogy $\mathbb{Z}_3^5$ -re nem igaz a sejtés, és meg is cáfolta az $\mathbb{R}^5$ esetet.

Kapcsolat diszkrét és folytonos között

Dutkay és Lai eredménye 2013-ból, ami Newman eredményére épít.

$$T \rightarrow S(\mathbb{R}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}) \iff T \rightarrow S(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

$$S \rightarrow T(\mathbb{R}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}) \implies S \rightarrow T(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$$

Tao belátta, hogy $\mathbb{Z}_3^5$ -re nem igaz a sejtés, és meg is cáfolta az $\mathbb{R}^5$ esetet.

Ma már csak az 1 és 2 dimenziós eset nyitott, ezért igazán fontos a ciklikus csoportok esete, illetve két ciklikus direkt összege.

Periodikus parketták

1. $S_1 = \{0, 1\}^2$

- ▶ Ezzel lehet periodikusan parkettázni.

Periodikus parketták

1. $S_1 = \{0, 1\}^2$

- ▶ Ezzel lehet periodikusan parkettázni.
- ▶ Minden parkettázás periodikus ezzel a halmazzal?

$$T_1 = \{(2n, 2m + a(n)) \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $a : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ Ez már csak az egyik irány szerint periodikus.

Periodikus parketták

1. $S_1 = \{0, 1\}^2$

- ▶ Ezzel lehet periodikusan parkettázni.
- ▶ Minden parkettázás periodikus ezzel a halmazzal?

$$T_1 = \{(2n, 2m + a(n)) \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $a : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ Ez már csak az egyik irány szerint periodikus.

2.

$$S_2 := \{0, 2\} \times \{0, 1\}$$

Ezzel is lehet periodikus parkettázást csinálni.

$$T_2 = \{(4n, 2m + a(n)) \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \cup \\ \{(4n + 1 + 2b(m), 2m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Ez nem periodikus semelyik (tengelyekkel párhuzamos) irányba sem alkalmas a és b -re.

Periodic tile sejtés

Tétel (Battacharya)

Minden parkettázása $\mathbb{Z}^2$ -nek egy véges halmazzal parkettáz egy háló szerint periodikus halmazzal.

Periodic tile sejtés

Tétel (Battacharya)

Minden parkettázása $\mathbb{Z}^2$ -nek egy véges halmazzal parkettáz egy háló szerint periodikus halmazzal.

Tétel (Greenfeld, Tao)

Minden parkettázása $\mathbb{Z}^2$ -nek egy véges halmazzal parkettáz egy háló szerint periodikus halmazzal.

Létezik egy véges, de exponenciális algoritmus (a parketta átmérőjének függvényében), ami eldönti egy véges halmazról, hogy az parkettáz-e.

Ciklikus csoportok direkt összege

- ▶ A sejtés nem igaz 4 rangú elemi Abel p -csoportokra, ahol p páratlan prím. Ferguson, Sothanaphan
- ▶ A sejtés igaz: $\mathbb{Z}_p^2$, Iosevich, Mayeli, Pakianathan,

Ciklikus csoportok direkt összege

- ▶ A sejtés nem igaz 4 rangú elemi Abel p -csoportokra, ahol p páratlan prím. Ferguson, Sothanaphan
- ▶ A sejtés igaz: $\mathbb{Z}_p^2$, Iosevich, Mayeli, Pakianathan, $\mathbb{Z}_p^3$ is nyitott kivéve $p \leq 7$. Fallon, Mayeli and Villano

Eredmények, ciklikus csoportok

Tétel

$\mathbb{Z}_{p^n q^2}$ -re igaz a Fuglede sejtés.

1. Kiss, Malikiosis, S., Vizer, On the discrete Fuglede and Pompeiu problem, Analysis and PDE folyóiratban megjelent,

Tétel

$\mathbb{Z}_{pqrs}$ -re igaz a Fuglede sejtés.

2. Kiss, Malikiosis, S., Vizer, Fuglede's conjecture holds for cyclic groups of order $pqrs$, Journal of the London Mathematical society folyóiratban van jelenleg elbírálás alatt.
3. Spectral sets in $\mathbb{Z}_{p^2 qr}$ tile,

Tétel (Kiss-S.)

$\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q$ -re igaz a sejtés

1. G. Kiss, S. Fuglede's conjecture holds on $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q$,
Proceedings of AMS-ben elfogadták

Tétel (Fallon-Kiss-S.)

$\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$ -re is igaz a sejtés

2. Spectral sets and tiles in $\mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}_q^2$. Analysis and PDE
folyóiratban van jelenleg elbírálás alatt.

Egyéb eredmények TKP keretein belül

1. Minimum isosceles containers, G. Kiss, J. Pach, Journal of Information processing

Egyéb eredmények TKP keretein belül

1. Minimum isosceles containers, G. Kiss, J. Pach, Journal of Information processing
2. Meghívott előadóként a The 3rd Workshop on «Algebraic Graph Theory and its Applications konferencián beszéltem erről

Egyéb eredmények TKP keretein belül

1. Minimum isosceles containers, G. Kiss, J. Pach, Journal of Information processing
2. Meghívott előadóként a The 3rd Workshop on «Algebraic Graph Theory and its Applications konferencián beszéltem erről
3. 3 szakdolgozat is született a témákban, ebből kettőben Kiss Gergely is témavezető volt. Az egyik ebből egy jövőbeli közös publikáció alapját képezi.

Köszönöm a figyelmet!