

Beágyazott párok erős stabilitást őrző explicit Runge-Kutta módszerekre

Imre Fekete^a, Sidafa Conde^b, John Shadid^b

^a*Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Matematikai Intézet*

^b*Sandia National Laboratories, USA*

**Tématerületi Kiválósági Program Workshop
Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal**

2021. június 11.



PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

SSP elmélet dióhéjban

Hiperbolikus megmaradási törvények

$$U_t + f(U)_x = 0$$

SSP elmélet dióhéjban

Hiperbolikus megmaradási törvények

$$U_t + f(U)_x = 0$$

KDE rendszer

$$u_t = F(u)$$

SSP elmélet dióhéjban

Hiperbolikus megmaradási törvények

$$U_t + f(U)_x = 0$$

KDE rendszer

$$u_t = F(u)$$

Explicit Euler feltétel

$$\|u^n + \Delta t F(u^n)\| \leq \|u^n\|, \quad 0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{\text{FE}}$$

SSP elmélet dióhéjban

Hiperbolikus megmaradási törvények

$$U_t + f(U)_x = 0$$

KDE rendszer

$$u_t = F(u)$$

Explicit Euler feltétel

$$\|u^n + \Delta t F(u^n)\| \leq \|u^n\|, \quad 0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{\text{FE}}$$

SSP (erős stabilitást őrző) tulajdonság

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| \quad \text{hogy} \quad \Delta t \leq \mathcal{C} \Delta t_{\text{FE}}$$

- rend: $p-1$
- nem defektív
- egyszerű struktúra
- maximális $\mathcal{C}$; ha nem lehetséges normál beágyazott pár

Stabilitási

- Abszolút stabilitási valós tengely metszet
- Abszolút stabilitási képzetes tengely metszet
- Kör kontraktivitás
- Abszolút monotonicitási sugár

Stabilitási

- Abszolút stabilitási valós tengely metszet
- Abszolút stabilitási képzetes tengely metszet
- Kör kontraktivitás
- Abszolút monotonicitási sugár

Lokális csonkolási [Kennedy, Carpenter, Lewis]

- $A_2^{(p+1)} = \|\tau^{(p+1)}\|_2$
- $B_2^{(p+1)} = A_2^{(p+1)} / A_2^{(p)}$
- $C_2^{(p+1)} = \|\tilde{\tau}^{(p+1)} - \tau^{(p+1)}\|_2 / \|\tilde{\tau}^{(p)}\|_2$
- $D = \max\{|a_{ij}|, |c_i|, |b_i^T|, |\tilde{b}_i^T|\}$

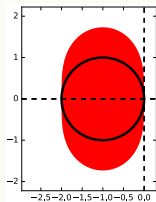
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \left(I + \tilde{C} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \geq 0$$

$$\left\| \tilde{C} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \left(I + \tilde{C} \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{b}^T & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|_{\infty} \leq 1$$

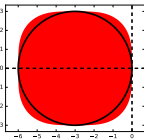
Rendfeltételek negyedrenddel bezárólag

$$F(A, b^T, \tilde{w}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_2^{(p)} & \tilde{A}_\infty^{(p)} \\ \begin{pmatrix} B_2^{(p+1)} - 1 \\ C_2^{(p+1)} - 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_\infty^{(p+1)} - 1 \\ C_\infty^{(p+1)} - 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

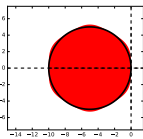
$$\begin{aligned} & \arg \min_{\tilde{w}} \quad \|F(A, b^T, \tilde{w})\|_\infty \\ & \text{subject to} \quad \tau_k(A, \tilde{w}) = 0, \quad k = 1, \dots, 8 \\ & \quad \quad \quad \tilde{w} \geq 0 \end{aligned}$$



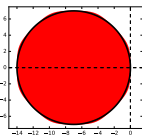
(a) $s = 2$



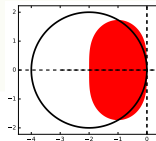
(b) $s = 4$



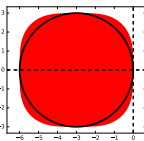
(c) $s = 6$



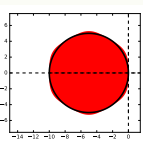
(d) $s = 8$



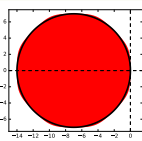
(e) $s = 2$



(f) $s = 4$



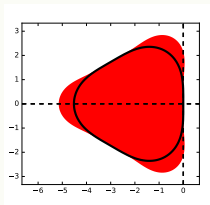
(g) $s = 6$



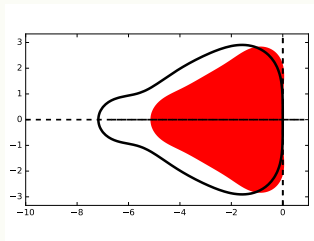
(h) $s = 8$

NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT
AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

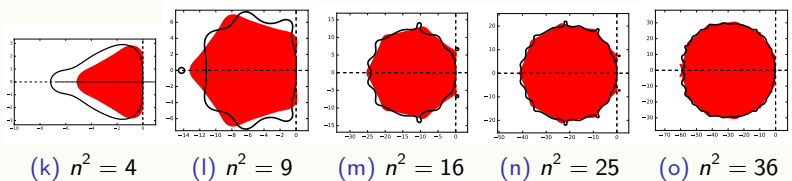
PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND



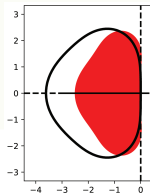
(i) irodalmi pár



(j) a mi módszerünk



0			
1	1		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
	0.291485418878409	0.291485418878409	0.417029162243181



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} = 0$$

Klasszikus irodalmi párok

Fehlberg12

RKF23

Ceshino24

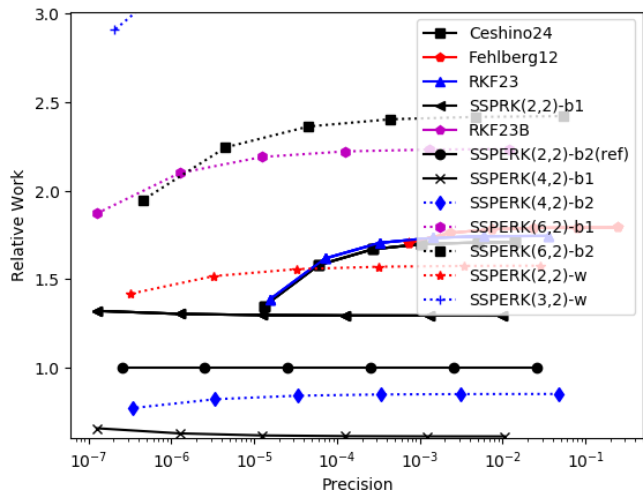
BogackiShampine32

Zonneveld43

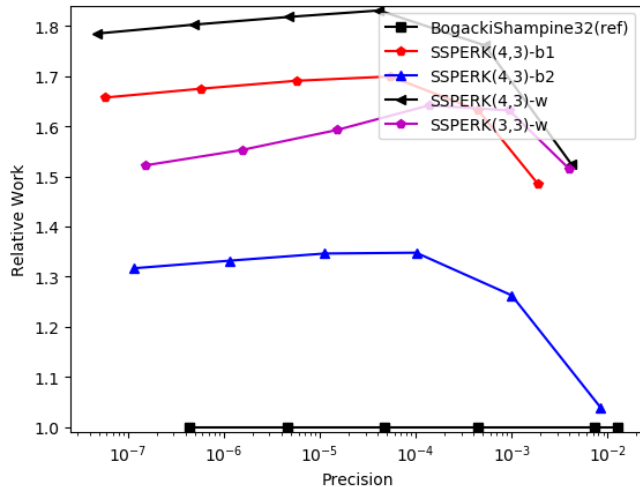
DormandPrince54

Merson45

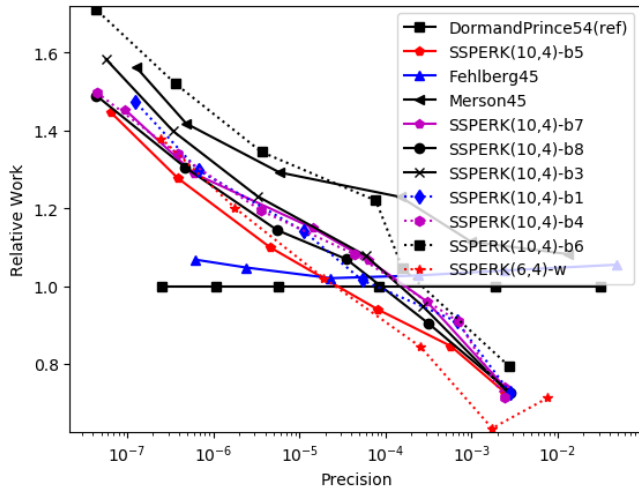
Fehlberg45



PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND



PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND



PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Eredményeink felhasználása

Eredményeink felhasználása

Python csomagok

RK-Opt: A package for the design of numerical ODE solvers

NodePy: A package for the analysis of numerical ODE solvers

Eredményeink felhasználása

Python csomagok

RK-Opt: A package for the design of numerical ODE solvers

NodePy: A package for the analysis of numerical ODE solvers

Sandia National Laboratories, USA

Szuperszámítógépes szimulációk

Eredményeink felhasználása

Python csomagok

RK-Opt: A package for the design of numerical ODE solvers

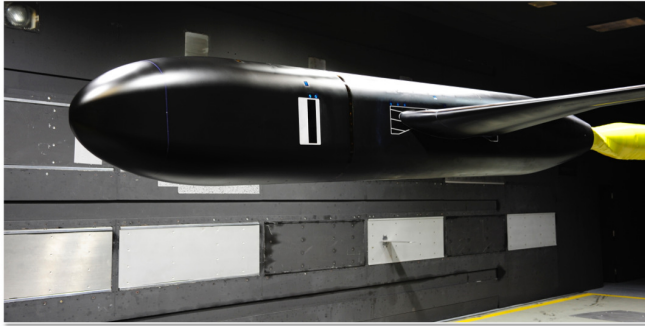
NodePy: A package for the analysis of numerical ODE solvers

Sandia National Laboratories, USA

Szuperszámítógépes szimulációk

CFD szimuláláshoz

H. Ranocha, L. Dalcin, M. Parsani, D. Ketcheson: Optimized Runge–Kutta Methods with Automatic Step Size Control for Compressible Computational Fluid Dynamics, arXiv:2104.06836v1, 2021. április



ábra. https://turbmodels.larc.nasa.gov/Other_exp_Data/junctureflow_exp.html

Juncture flow

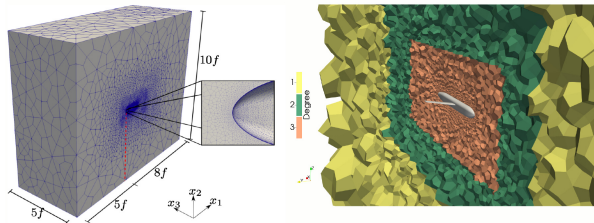


Figure 8.: Solution polynomial degree distribution, computational domain and boundary mesh elements for the NASA juncture experiment [55]; f is the fuselage length.

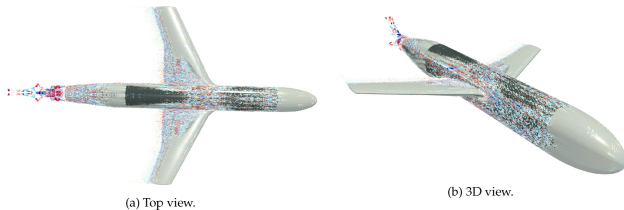


Figure 9.: Q-criterion colored by the velocity magnitude of the NASA juncture flow.

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

Juncture flow

Table 8.: Performance of different methods for error and CFL-based step size controllers: Number of function evaluations (#FE), rejected steps (#R), and wall-clock time in seconds for the NASA juncture flow problem.

Scheme	β	tol/ν	#FE	#R	Wall-clock time (s)
BS3(2)3 _F	(0.60, -0.20, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	1786	1	586.49
		$\nu = 1.0$	3598		1171.60
SSP3(2)4[3S* ₊]	(0.55, -0.27, 0.05)	$\text{tol} = 10^{-8}$	1172	1	376.18
		$\nu = 1.0$	2340		747.45
RK3(2)5 _F [3S* ₊]	(0.70, -0.23, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	1527	1	496.58
		$\nu = 1.0$	3056		991.35
RK4(3)9[3S* ₊]	(0.25, -0.12, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	1467	1	469.20
		$\nu = 1.0$	2862		912.17
RK5(4)10 _F [3S* ₊]	(0.45, -0.13, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	1864	3	597.06
		$\nu = 1.0$	3661		1170.10

McLaren 17D első terelőszárny

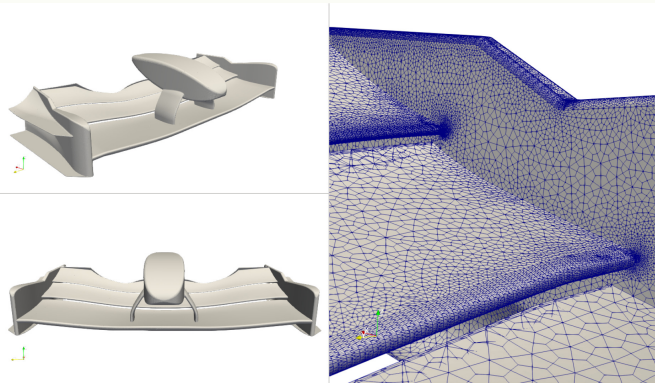
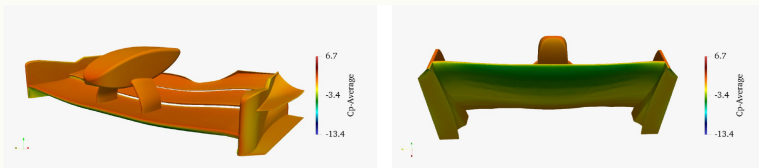


Figure 10.: Overview of the Imperial Front Wing.

McLaren 17D első terelőszárny



(a) Top.

(b) Bottom.

Figure 11.: Time-averaged pressure coefficient, C_p , on the surface of the Imperial Front Wing.

McLaren 17D első terelőszárny

Table 9.: Performance of different methods for error and CFL-based step size controllers: Number of function evaluations (#FE), rejected steps (#R), and wall-clock time in seconds for the Imperial Front Wing using polynomials of degree $p = 2$.

Scheme	β	tol/ν	#FE	#R	Wall-clock time (s)
BS3(2)3 _F	(0.60, -0.20, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	3973	0	2699.9
		$\nu = 1.0$	7678		5188.4
SSP3(2)4[3S* ₊]	(0.55, -0.27, 0.05)	$\text{tol} = 10^{-8}$	2980	0	1971.5
		$\nu = 1.0$	4992		3298.9
RK3(2)5 _F [3S* ₊]	(0.70, -0.23, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	3400	4	2277.8
		$\nu = 1.0$	6516		4362.3
RK4(3)9[3S* ₊]	(0.25, -0.12, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	3195	1	2115.2
		$\nu = 1.0$	6111		4046.1
RK5(4)10 _F [3S* ₊]	(0.45, -0.13, 0.00)	$\text{tol} = 10^{-8}$	4094	3	2714.1
		$\nu = 1.0$	7811		5186.8

Köszönöm a figyelmet!

Az ED_18-1-2019-0030 szerződésszámú projekt (Alkalmazásiterület-specifikus nagy megbízhatóságú informatikai megoldások tématerület) a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a Tématerületi kiválósági program finanszírozásában valósult meg.