

Szimmetrikus megoldások és kiterjesztések

Tarcsay Zsigmond

ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



NATIONAL RESEARCH, DEVELOPMENT
AND INNOVATION OFFICE
HUNGARY

PROGRAM
FINANCED FROM
THE NRDI FUND

TKP Workshop, 2021.06.10-11.

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \tag{1}$$

egyenlet megoldhatóságát.

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \quad (1)$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \quad (1)$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \quad (1)$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás
- szimmetrikus (önadjungált) megoldás

Operátor- és mátrix egyenletek

A vizsgált operátor/mátrix egyenletek

Adott S, T lineáris transzformációk esetén vizsgáljuk az

$$SX = T, \quad (1)$$

egyenlet megoldhatóságát.

Speciális megoldások keresése

A megoldások között speciális megoldások keresése:

- minimális normájú megoldás
- pozitív szemi-definit megoldás
- szimmetrikus (önadjungált) megoldás
- a fentiek között extrémális megoldások

Probléma

$TX = S$ pozitív szemi-definit megoldhatósága, azaz:

$$\exists X = X^* \geq 0, \quad TX = S$$

Korlátos pozitív szemi-definit megoldás létezése

Probléma

$TX = S$ pozitív szemi-definit megoldhatósága, azaz:

$$\exists X = X^* \geq 0, \quad TX = S$$

Észrevétel: ekvivalens probléma: $XT^* = S^*$ megoldhatósága



Az $X_0 : T^*x \mapsto S^*x$ leképezésnek létezik pozitív szemi-definit kiterjesztése.

Korlátos pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ (pozitív) lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ (pozitív) lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Megjegyzés: A kérdés alacsony dimenzióban sem triviális: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$, $A_0(v, 0) = (0, v)$.

$$\langle A_0(v, 0), (v, 0) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 \geq 0.$$

Korlátos pozitív kiterjeszthetőség kérdése

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ (pozitív) lineáris transzformáció kiterjeszthető-e $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pozitív lineáris transzformációvá?

Megjegyzés: A kérdés alacsony dimenzióban sem triviális: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$, $A_0(v, 0) = (0, v)$.

$$\langle A_0(v, 0), (v, 0) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 \geq 0.$$

$$A_0 \quad \begin{matrix} A_0 \subset A \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A = A^* \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = -1 < 0$, vagyis nem létezik $A = A^* \geq 0, A \supset A_0$.

Folytonos pozitív kiterjesztés létezése (T., Titkos, 2021)

$A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definitté $\iff$

Folytonos pozitív kiterjesztés létezése (T., Titkos, 2021)

$A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definitté $\iff$

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Folytonos pozitív kiterjesztés létezése (T., Titkos, 2021)

$A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definitté $\iff$

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. Van legkisebb megoldás (a szemidefinit rendezésre nézve)

Folytonos pozitív kiterjesztés létezése (T., Titkos, 2021)

$A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ kiterjeszthető folytonos pozitív szemi-definitté $\iff$

$$\|A_0 x\|^2 \leq \alpha \langle A_0 x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Extremális megoldások

1. Van legkisebb megoldás (a szemidefinit rendezésre nézve)
2. Adott $A_0 \leq B$ mellett van legnagyobb olyan $A_{\max}$ megoldás, hogy $A_{\max} \leq B$.

A pozitív szemi-definit megoldás problémája

Pozitív szemi-definit megoldás létezése (T., Titkos, 2020)

$TX = S$ megoldható pozitív szemi-definit X mellett $\iff$

A pozitív szemi-definit megoldás problémája

Pozitív szemi-definit megoldás létezése (T., Titkos, 2020)

$TX = S$ megoldható pozitív szemi-definit X mellett $\iff SS^* \leq \gamma TS^*$.

A pozitív szemi-definit megoldás problémája

Pozitív szemi-definit megoldás létezése (T., Titkos, 2020)

$TX = S$ megoldható pozitív szemi-definit X mellett $\iff SS^* \leq \gamma TS^*$.

Extremális megoldás létezése

Ha van megoldás, van (a rendezés szerint) legkisebb megoldás

A pozitív szemi-definit megoldás problémája

Pozitív szemi-definit megoldás létezése (T., Titkos, 2020)

$TX = S$ megoldható pozitív szemi-definit X mellett $\iff SS^* \leq \gamma TS^*$.

Extremális megoldás létezése

Ha van megoldás, van (a rendezés szerint) legkisebb megoldás

Referenciák:

1. Zs. Tarcsay and T. Titkos, Operators on anti-dual pairs: Generalized Krein-von Neumann extension, *Math. Nachrichten*, 2021, megjelenés alatt.

Nemkorlátos megoldhatóság kérdése

Észrevétel

A közöséges, ill. parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Nemkorlátos megoldhatóság kérdése

Észrevétel

A közönséges, ill. parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Probléma

Adott $S, T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ operátorok esetén keressük

$$XT = S$$

(nem feltétlenül folytonos) X megoldásait.

Nemkorlátos megoldhatóság kérdése

Észrevétel

A közönséges, ill. parciális differenciálegyenletekben szereplő differenciáloperátorok többsége nem-korlátos.

Probléma

Adott $S, T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ operátorok esetén keressük

$$XT = S$$

(nem feltétlenül folytonos) X megoldásait.

Kérdések

- megoldás létezése
- pozitív önadjungált megoldás
- szimmetrikus megoldás

Nemkorlátos pozitív kiterjesztési probléma

A pozitív megoldhatóság kérdése ekvivalens az

$$A_0 : Tx \mapsto Sx, \quad x \in \operatorname{dom} S \quad (2)$$

operátor pozitív kiterjeszthetőségével.

Nemkorlátos pozitív kiterjesztési probléma

A pozitív megoldhatóság kérdése ekvivalens az

$$A_0 : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}, \quad x \in \mathcal{D} \quad (2)$$

operátor pozitív kiterjeszthetőségével.

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor mikor terjeszthető ki (nem feltétlenül korlátos) pozitív önadjungált operátorra:

$$A_0 \subset A = A^* \geq 0?$$

Nemkorlátos pozitív kiterjesztési probléma

A pozitív megoldhatóság kérdése ekvivalens az

$$A_0 : T_{\mathcal{D}} \mapsto S_{\mathcal{D}}, \quad x \in \text{dom } S \quad (2)$$

operátor pozitív kiterjeszthetőségével.

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor mikor terjeszthető ki (nem feltétlenül korlátos) pozitív önadjungált operátorra:

$$A_0 \subset A = A^* \geq 0?$$

Korábbi eredmények

A klasszikus eredmények (Krein, Neumann, Friedrichs) csak a $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben alkalmazhatók.

Nemkorlátos pozitív kiterjesztési probléma

A pozitív megoldhatóság kérdése ekvivalens az

$$A_0 : T_{\mathcal{D}} \mapsto S_{\mathcal{D}}, \quad x \in \text{dom } S \quad (2)$$

operátor pozitív kiterjeszthetőségével.

Általánosabb probléma

Adott $A_0 : \mathcal{H} \supset \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor mikor terjeszthető ki (nem feltétlenül korlátos) pozitív önadjungált operátorra:

$$A_0 \subset A = A^* \geq 0?$$

Korábbi eredmények

A klasszikus eredmények (Krein, Neumann, Friedrichs) csak a $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ esetben alkalmazhatók. A (2) operátor tipikusan nem ilyen!

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése (Sebestyén, T., 2021)

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ lineáris altér (nem feltétlen zárt vagy sűrű). Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ operátor kiterjeszthető pozitív önadjungálttá $\iff$

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése (Sebestyén, T., 2021)

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ lineáris altér (nem feltétlen zárt vagy sűrű). Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ operátor kiterjeszthető pozitív önadjungálttá $\iff$

$$\mathcal{D}_* := \{k \in \mathcal{H} : \sup\{|\langle A_0 g, k \rangle| : g \in \mathcal{D}, \langle A_0 g, g \rangle \leq 1\} < +\infty\}$$

totális halmaz $\mathcal{H}$ -ban, azaz $\mathcal{D}_*^\perp = \{0\}$.

Nem sűrűn értelmezett operátor kiterjesztése

Pozitív önadjungált kiterjesztés létezése (Sebestyén, T., 2021)

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ lineáris altér (nem feltétlen zárt vagy sűrű). Egy $A_0 : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ operátor kiterjeszthető pozitív önadjungálttá $\iff$

$$\mathcal{D}_* := \{k \in \mathcal{H} : \sup\{|\langle A_0 g, k \rangle| : g \in \mathcal{D}, \langle A_0 g, g \rangle \leq 1\} < +\infty\}$$

totális halmaz $\mathcal{H}$ -ban, azaz $\mathcal{D}_*^\perp = \{0\}$.

Referencia: Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, On the Krein-von Neumann and Friedrichs extension of positive operators, *Acta Wasaensia*, 2021, megjelenés alatt.

Nemkorlátos operátorok rendezése

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos operátorok rendezése

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0 -nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztés.

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos operátorok rendezése

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0 -nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztés.
2. A legkisebb kiterjesztés megadása konstruktív.

Extremális kiterjesztések

Nemkorlátos operátorok rendezése

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Extremális kiterjesztés létezése

Legyen $A_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ lineáris operátor.

1. Ha A_0 -nak van pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor van legkisebb kiterjesztés.
2. A legkisebb kiterjesztés megadása konstruktív.
3. Ha $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$, akkor (és csak akkor) van legnagyobb kiterjesztés.

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ esetén ekvivalensek:

- (i) $XT = S$ egyenletnek van $X = X^* \geq 0$ megoldása,

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ esetén ekvivalensek:

- (i) $XT = S$ egyenletnek van $X = X^* \geq 0$ megoldása,
- (ii) az alábbi

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} : |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x \in \text{dom } S)\}$$

halmaz totális: $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$.

Nemkorlátos pozitív önadjungált megoldások

Pozitív önadjungált megoldás létezése

Adott $S, T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ esetén ekvivalensek:

- (i) $XT = S$ egyenletnek van $X = X^* \geq 0$ megoldása,
- (ii) az alábbi

$$\mathcal{D}_{T,S} := \{y \in \mathcal{H} : |\langle Sx, y \rangle|^2 \leq \gamma_y \cdot \langle Sx, Tx \rangle \quad (\forall x \in \text{dom } S)\}$$

halmaz totális: $(\mathcal{D}_{T,S})^\perp = \{0\}$.

Minimális megoldás létezése

Ha (ii) teljesül, akkor van a rezolvens rendezésre minimális megoldás.

Rezolvens rendezés és automorfizmusai

A rezolvens rendezés

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Megjegyzés

Ha A és B korlátos, akkor ez azonos a szemi-definit rendezéssel. ($A \leq B$, ha $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ minden x -re.)

Rezolvens rendezés és automorfizmusai

A rezolvens rendezés

Ha A, B (nem feltétlenül korlátos) pozitív és önadjungált operátorok, akkor

$$A \preceq B \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad (I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$$

Megjegyzés

Ha A és B korlátos, akkor ez azonos a szemi-definit rendezéssel. ($A \leq B$, ha $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ minden x -re.)

Probléma

Jelölje $\mathcal{S}_+$ az $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pozitív önadjungált operátorainak halmazát $\preceq$ rendezéssel. Kérdés: hogy írhatóak le $\mathcal{S}_+$ rendezés megőrző izomorfizmusai?

Rendezésautomorfizmusok leírása (Gehér, T., 2020)

Ha $\phi : \mathcal{S}_+ \rightarrow \mathcal{S}_+$ egy „ $\preceq$ ”-tartó bijekció ($A \preceq B \iff \phi(A) \preceq \phi(B)$), akkor létezik egyetlen $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ folytonos izomorfizmus, hogy

$$\phi(A) = TAT^*, \quad \forall A^* = A \geq 0.$$

Rendezésautomorfizmusok leírása (Gehér, T., 2020)

Ha $\phi : \mathcal{S}_+ \rightarrow \mathcal{S}_+$ egy „ $\preceq$ ”-tartó bijekció ($A \preceq B \iff \phi(A) \preceq \phi(B)$), akkor létezik egyetlen $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ folytonos izomorfizmus, hogy

$$\phi(A) = TAT^*, \quad \forall A^* = A \geq 0.$$

Megjegyzés: ϕ -ről *a priori* sem folytonosságot, sem linearitást nem feltételeztünk!

$\mathcal{S}_+$ rendezés automorfizmusai

Rendezésautomorfizmusok leírása (Gehér, T., 2020)

Ha $\phi : \mathcal{S}_+ \rightarrow \mathcal{S}_+$ egy „ $\preceq$ ”-tartó bijekció ($A \preceq B \iff \phi(A) \preceq \phi(B)$), akkor létezik egyetlen $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ folytonos izomorfizmus, hogy

$$\phi(A) = TAT^*, \quad \forall A^* = A \geq 0.$$

Megjegyzés: ϕ -ről *a priori* sem folytonosságot, sem linearitást nem feltételeztünk!

Komparabilitás megőrző bijekciók leírása (Gehér, T., 2021)

Ugyanígy jellemezhetők az összehasonlíthatóság megőrző transzformációk A és B összehasonlítható $\iff \phi(A)$ és $\phi(B)$ összehasonlítható.

Referencia: Gy. P. Gehér, Zs. Tarcsay, Order automorphisms of the set of positive self-adjoint linear operators, 2021, kézirat.

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $TX = S$ egyenletnek mikor létezik szimmetrikus megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

Szimmetrikus megoldások

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $TX = S$ egyenletnek mikor létezik szimmetrikus megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

Szimmetrikus megoldás létezése (T., Titkos)

Az $TX = S$ egyenletnek pontosan akkor van szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és $SS^* \leq \gamma TT^*$.

Szimmetrikus megoldások

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $TX = S$ egyenletnek mikor létezik szimmetrikus megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

Szimmetrikus megoldás létezése (T., Titkos)

Az $TX = S$ egyenletnek pontosan akkor van szimmetrikus X megoldása, ha TS^* szimmetrikus és $SS^* \leq \gamma TT^*$.

Referencia: Zs. Tarcsay and T. Titkos, Operators on anti-dual pairs: self-adjoint extensions and the Strong Parrott Theorem, Canadian Math. Bulletin, 63 (4) (2020), 813-824.

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

- szintén átfogalmazható kiterjesztési kérdésre

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

- szintén átfogalmazható kiterjesztési kérdésre
- az irodalom csak sűrűn definiált kiterjeszthetőséget vizsgálja (nem elégséges)

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

- szintén átfogalmazható kiterjesztési kérdésre
- az irodalom csak sűrűn definiált kiterjeszthetőséget vizsgálja (nem elégséges)
- egyelőre egy elégséges feltételt sikerült találnunk:
 - a klasszikus sűrűn definiált esetet lefedi

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

- szintén átfogalmazható kiterjesztési kérdésre
- az irodalom csak sűrűn definiált kiterjeszthetőséget vizsgálja (nem elégséges)
- egyelőre egy elégséges feltételt sikerült találnunk:
 - a klasszikus sűrűn definiált esetet lefedi
 - valós terekre is alkalmazható

Szimmetrikus megoldás létezésének problémája

Az $XT = S$ egyenletnek mikor létezik (nem feltétlenül korlátos) önadjungált megoldása?

$$\exists? X = X^*, TX = S$$

- szintén átfogalmazható kiterjesztési kérdésre
- az irodalom csak sűrűn definiált kiterjeszthetőséget vizsgálja (nem elégséges)
- egyelőre egy elégséges feltételt sikerült találnunk:
 - a klasszikus sűrűn definiált esetet lefedi
 - valós terekre is alkalmazható
- cél: szükséges és elégséges feltétel

Köszönöm a figyelmet!