Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

Szabó László

Bevezetés a konvex geometriába

Egyetemi jegyzet

Budapest, 2018

Lektorálta: Burcsi Péter

A jegyzet az ELTE tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán elnyert forrás felhasználásával készült.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A konvex geometria szerteágazó része a matematikának. Kapcsolatát a funkcionálanalízissel, a variációszámítással, a komplex függvénytannal, a gráfelmélettel vagy a krisztallográfiával nem nehéz felismerni, sőt egyes fejezetei újabban a kódelméletben, a szférikus harmonikusok elméletében, a numerikus analízisben és az algebrai geometriában is felbukkannak.

Konvex halmazokra vonatkozó speciális eredmények már az ókorban is ismertek voltak. Euklidész Elemek című műve több, sokszögekre és poliéderekre vonatkozó tételt tartalmaz, többek között az öt szabályos poliéder levezetését is. Arkhimédész volt az első, aki a konvex halmazokat precízen definiálta. Ugyancsak tőle származik a kétoldali közelítés módszere, melynek segítségével sikerült meghatároznia az egyenes körhenger, az egyenes körkúp valamint a gömb felszínét és térfogatát. Végül neki tulajdonítható a 13 félig szabályos poliéder felfedezése is (egy poliédert félig szabályosnak nevezünk, ha lapjai nem mind egybevágó szabályos sokszögek, szimmetriacsoportja pedig tranzitív a csúcsokon). Az izoperimetrikus problémával kapcsolatban, amely mindig is az érdeklődés középpontjában állt, Zenodorusz megmutatta, hogy az adott kerületű konvex n-szögek között a szabályos n-szög területe a legnagyobb (feltéve, hogy létezik maximális területű ilyen sokszög).

Kepler 1619-ben újra felfedezte a félig szabályos poliédereket, és igazolta, hogy csak 13 van belőlük. Szintén Kepler nevéhez köthető a 3-dimenziós lapcentrált kockarács által meghatározott rácsszerű gömbelhelyezés első részletes leírása is, melyről Gauss 1831-ben bebizonyította, hogy a rácsszerű gömbelhelyezések között a legsűrűbb. Ebben az elhelyezésben a gömbök sugara $1/\sqrt{2}$, centrumaik pedig a Descartes-féle koordinátarendszer azon egész koordinátájú pontjaiban vannak, melyekben a koordináták összege páros. Vegyük észre, hogy minden gömböt pontosan 12 másik érint, például azt, amelyiknek középpontja az origóban van a $(0, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1, 0)$ középpontú gömbök. Ez a 12 gömbközéppont egy félig szabályos poliédernek, egy úgynevezett kuboktaédernek a csúcsaiban helyezkedik el.

Euler 1752-ben észrevette, hogy egy konvex poliéder csúcsainak, éleinek és lapjainak f_0, f_1 és f_2 számára az

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \qquad f_0 \leqslant 2f_2 - 4, \qquad f_2 \leqslant 2f_0 - 4 \tag{$*$}$$

összefüggések mindig fennállnak. Ezek első precíz bizonyítását Legendre adta 1794-ben.

Fourier 1826-ban kifejlesztett egy módszert, amely lineáris egyenlőtlenség rendszerek összes megoldását állította elő. Ebből az eredményből nőtt ki, elsősorban Kantorovics és Dantzig munkásságának köszönhetően a lineáris programozás (részletesebben ld. Schrijver (1986)).

Cauchy 1813-ban egy figyelemre méltó felfedezést tett. Ha két konvex poliéder azonos kombinatorikus típusú, továbbá az egymásnak megfelelő lapjaik egybevágóak, akkor a két poliéder is egybevágó (két konvex poliédert azonos kombinatorikus típusúnak nevezünk, ha a két poliéder csúcsai, élei, illetve lapjai között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, amely az illeszkedési viszonyokat megtartja). Cauchy egy másik, 1850-ben talált formulája szerint egy 3-dimenziós konvex test felszíne négyszerese a test 2-dimenziós vetületei területátlagának.

Von Staudt 1847-ben bevezette a konvex testek polárisának fogalmát, ám ez a feledés homályába merült, és később Minkowski és Steinitz is újrafelfedezték.

Steiner munkásságának hatása a konvex geometriára már könnyebben felismerhető. 1836 és 1841 között, többek között a róla elnevezett szimmetrizáció felhasználásával számos bizonyítást adott a kör és a gömb izoperimetrikus tulajdonságára, azonban a maximális térfogatú alakzat létezésének kérdését mindig figyelmen kívül hagyta. Az izoperimetrikus problémára kifogástalan bizonyítást elsőként Edler és Schwarz adott 1882-ben, illetve 1884-ben. A kortárs alternatív megoldások közül még megemlítjük Minkowski és Blaschke 1901-ben, illetve 1916-ban publikált bizonyításait. Minkowski gondolatmenete az általa bevezetett felszín fogalmat és a Brunn-Minkowski tételt használja, míg Blaschke bizonyítása a Steiner szimmetrizáción és a Blaschke-féle kiválasztási tételen nyugszik (a történet folytatását illetően ld. Burago-Zalgaller (1988)). Steiner másik, 1840-ből származó nevezetes eredménye annak felismerése, hogy egy $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test $\lambda > 0$ sugarú parallel tartományának térfogata kifejezhető λ egy n-edfokú polinomjaként.

Schläfli magasabb dimenziós politópokra vonatkozó eredményei, például az Euler-féle poliéderformula általánosítása már 1852-ben megszülettek, azonban megjelenésükre 1901-ig kellet várni. Megjegyezzük, hogy az Euler-féle poliéderformulát Schläflitől függetlenül Poincaré is kiterjesztette magasabb dimenzióra, azonban mindkét bizonyítás hiányos. Az előbbi bizonyítást csak 1971-ben, míg az utóbbit az 1930-as években sikerült teljessé tenni. Az első elemi bizonyítások Hadwigertől és Grünbaumtól származnak.

Végül a múlt század végén, elsősorban Minkowski munkásságának köszönhetően, a konvex geometria a matematika önálló ágává vált. Ekkor már a szisztematikus vizsgálatok is megjelentek. Brunn 1899-ben bebizonyította, hogy tetszőleges $K, L \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testekre

$$V(K+L)^{1/n} \geqslant V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}.$$

Minkowski megmutatta, hogy ha $K_1, \dots, K_m \subseteq \mathbb{E}^n$ kompakt, konvex halmazok, akkor léteznek olyan $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ együtthatók (amelyeket vegyes térfogatoknak nevezünk), hogy minden $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0$ esetén

$$V(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1=1}^{m} \dots \sum_{i_n=1}^{m} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})\, \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}.$$

Fenchel és Alexandrov 1936-ban, illetve 1937-ben Minkowski egy vegyes térfogatokra vonatkozó egyenlőtlenségét messzemenően általánosítva igazolták, hogy

$$V(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)^2 \geqslant V(K_1, K_1, K_3, \dots, K_n) V(K_2, K_2, K_3, \dots, K_n).$$

Minkowskinak még két híres tételét említjük meg. 1893-ban észrevette, hogy ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ egy az origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmaz és $V(K) \geqslant 2^n$, akkor K szükségképpen tartalmaz az origótól különböző olyan pontot, melynek koordinátái egész számok. A másik erdeményt 1897-ben érte el: egy konvex poliéder lapjainak területei, valamint a lapok külső normálvektorai a poliédert egyértelműen meghatározzák. Mindkét tétel napjainkig intenzíven kutatott területek kiindulópontjának tekinthető.

Hilbert harmadik problémája azt kérdezi, hogy ha két 3-dimenziós poliéder térfogata megegyezik, akkor a poliéderek átdarabolhatók-e egymásba. A válasz meglepő, Dehn 1901-ben megmutatta, hogy egy kocka soha nem darabolható át egy vele egyenlő térfogatú szabályos tetraéderbe. Megjegyezzük, hogy a 2-dimenziós esetben már Bolyai Farkas igazolta, hogy az azonos terület maga után vonja az átdarabolhatóságot. Dehn eredményeit Hadwiger 1954-ben terjesztette ki magasabb dimenzióra (további eredményeket illetően ld. Boltyanski (1978)).

Blaschke konvex geometriai eredményei két típusba sorolhatók. Nagyon sok szemléletes tételt talált, ezek közül csak egy példát említünk: egy K konvex test akkor és csak akkor ellipszoid, ha minden rögzített egyenesre a K ezzel párhuzamos támaszegyenesei K-t egy síkbeli halmazban metszik. Másrészt szisztematikusan vizsgálta a kompakt, konvex halmazok terét az ún. Hausdorff metrikával ellátva, és többek között 1914-ben belátta, hogy ez a metrikus tér teljes.

Carathéodory, Helly és Radon nevét együtt szokták emlegetni a róluk elnevezett híres tételek miatt, amelyek a konvex geometria alapköveit képezik. Carathéodory tétele azt állítja, hogy egy halmaz konvex burkának minden pontja benne van egy olyan szimplexben, amelynek csúcsai az adott halmazban vannak. Helly tétele szerint ha $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább $n+1$ kompakt, konvex halmazának egy családja, és $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjának van közös pontja, akkor $\mathcal{F}$ összes tagjának van közös pontja. Végül a Radon tétel: ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy legalább $n+2$ pontból álló halmaz, akkor S felbontható két olyan diszjunkt S_1 és S_2 részre, hogy $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$.

A krisztallográfia konvex geometriai aspektusait tekintve kiemelhetjük Bieberbach és Frobenius egy 1910 körül született eredményét, mely Hilbert azon sejtését igazolta, hogy bármely dimenzióban legfeljebb véges sok kristálycsoport létezik.

A konvex politópok kombinatorikus elméletének kialakulása Steinitz nevéhez fűződik. Egyik nevezetes eredménye, hogy ha az f_0, f_1, f_2 pozitív egész számok kielégítik a $(*)$ összefüggéseket, akkor létezik olyan 3-dimenziós konvex poliéder, melynek f_0 csúcsa, f_1 éle és f_2 lapja van. Az f-vektorok hasonló, magasabb dimenziós karakterizációja még megoldatlan. Viszont szimpliciális politópok f-vektorainak karakterizációja ismert. McMullen egy szükséges és elégséges feltételt megfogalmazó sejtését igazolva, Billera és Lee, illetve Stanley 1980-ban érték el ezt a kiemelkedő eredményt. Steinitznek még egy fontos tételét említjük meg. Bármely háromszorosan összefüggő, egyszerű síkgráf izomorf egy 3-dimenziós konvex poliéder élgráfjával.

Ennél a pontnál be is fejeznénk történeti áttekintésünket, mely egyébként is csak néhány fontosabb eseményt villantott fel a teljesség bármiféle igénye nélkül. Jegyzetünkben sem törekszünk többre, mint az alapfogalmak elsajátítása után bepillantsunk a konvex geometria néhány fontosabb fejezetébe. Sajnos több alapvető területet a terjedelmi korlátok miatt érintőlegesen sem tudunk tárgyalni. Ilyen például a diszkrét geometria, a geometriai számelmélet, a geometriai algoritmusok elmélete valamint a konvex geometria differenciálgeometriai, integrálgeometriai és algebrai geometriai kapcsolatai. Ezekről az irodalomjegyzékben felsorolt könyvekből szerezhet információt az olvasó. Viszonylag teljes kép kapható a Gruber és Wills szerkesztette kétkötetes „Handbook of convex geometry” című tanulmánygyűjteményből.

A jegyzet kilenc fejezetből áll. Minden fejezet végén feladatok találhatók, melyek nehézsége széles határok között mozog. A nehezebb feladatokat *-gal jelöltük meg. Néhány feladat már nem is igazán tekinthető feladatnak, inkább az érdeklődőknek ad támpontot a továbbhaladáshoz (ez persze nem jelenti azt, hogy nem létezhet egyszerű megoldásuk). Ezeket a feladatokat ** jelzi, és mindig tartalmaznak az irodalomra vonatkozó utalást. A feladatok többségénél útmutatás található, ezek részletessége azonban változó.

A jegyzetet elég terjedelmes irodalomjegyzék zárja, melyben megpróbáltuk összegyűjteni a konvex geometriával kapcsolatos fontosabb tankönyveket és monográfiákat is.

Ami a szükséges előismereteket illeti, ezeket igyekeztünk a lehetőségekhez képest a minimumra szorítani, csak a szokásos egyetemi geometria, lineáris algebra és valós analízis előadások legalapvetőbb részeire támaszkodunk.

Végül ezúton szeretnék köszönetet mondani Burcsi Péternek, amiért elvállalta a kézirat lektorálását, és értékes tanácsaival jelentősen hozzájárult annak jobbá tételéhez. Szeretném megköszönni kollégáimnak és diákjaimnak a sok hasznos beszélgetést, amelyeket a jegyzettel kapcsolatban folytattunk. Külön kiemelném Bezdek Károly, Böröczky Károly, G. Horváth Ákos, Kertész Gábor, Makai Endre, Naszódi Márton és Uhrin Béla nevét.

1. fejezet

Konvex halmazok

1.1. Affin halmazok

A valós számokból álló rendezett n-esek halmazát az

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) &= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),\\
\lambda\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n),\\
\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n)\rangle &= \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n
\end{aligned}$$

műveletekkel n-dimenziós euklideszi térnek tekinthetjük, amelyet röviden $\mathbb{E}^n$-nel fogunk jelölni. Ezek után a szokásos módon vezethetjük be az alapvető lineáris algebrai és topológiai fogalmakat, ám erre itt nem térünk ki. Helyette inkább a lineáris alterek euklideszi térbeli megfelelőivel ismerkedünk meg. Állapodjunk meg abban, hogy az origót mindig o jelöli.

1.1.1. Definíció. *Az n-dimenziós euklideszi tér valamely lineáris alterének eltoltját affin altérnek nevezzük.*

Azt mondjuk, hogy két affin altér párhuzamos, ha egymás eltoltjai. Egy affin altér dimenziója legyen az azzal párhuzamos lineáris altér dimenziója. Az 1-dimenziós affin altereket egyeneseknek, míg az $(n-1)$-dimenziós affin altereket hipersíkoknak nevezzük. Alkalmanként szükség lehet különböző dimenziós affin alterek párhuzamosságáról beszélni. Ebben az esetben azt követeljük meg, hogy az egyik affin altér tartalmazza a másik affin altér valamely eltoltját. Ugyanilyen fontos reláció affin alterek körében a merőlegesség. Két (nem párhuzamos) affin alteret akkor nevezünk merőlegesnek, ha a megfelelő (ugyanolyan dimenziós) párhuzamos lineáris alterek, az uniójuk által kifeszített lineáris altérben tekintve őket, tartalmazzák egymás ortogonális kiegészítőit.

1.1.2. Definíció. *Ha $x, y \in \mathbb{E}^n$ különböző pontok, akkor az*

$$xy = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ és } \alpha + \beta = 1\}$$

halmazt az x és y pontokat összekötő egyenesnek nevezzük.

1.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz affin, ha minden $x, y \in S$ esetén $xy \subseteq S$.*

1.1.4. Állítás. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz akkor és csak akkor affin, ha affin altér.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy S affin halmaz, és legyen $x \in S$ tetszőleges pont. Legyen továbbá $U = -x + S = \{-x + s \mid s \in S\}$. Ekkor $S = x + U$. Megmutatjuk, hogy az U halmaz lineáris altér. Valóban, ha $u_1, u_2 \in U$, akkor léteznek olyan $s_1, s_2 \in S$ pontok, hogy $u_1 = -x + s_1$ és $u_2 = -x + s_2$. Így minden λ valós számra

$$u_1 + \lambda u_2 = (-x + s_1) + \lambda(-x + s_2) = -x + \lambda\left(2\left(\tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_2\right) - x\right) + (1 - \lambda)s_1.$$

Mivel S affin halmaz, ezért $\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \in S$, így $2(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2) - x \in S$, következésképpen $\lambda\left(2\left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2\right) - x\right) + (1 - \lambda)s_1 \in S$ teljesül. Ennélfogva $u_1 + \lambda u_2 \in -x + S = U$, amiből egyszerűen adódik, hogy U lineáris altér, és így $S = x + U$ affin altér.

Megfordítva, legyen $S = x + U$, ahol $x \in \mathbb{R}^n$ és U lineáris altér. Megmutatjuk, hogy S affin halmaz. Valóban, ha $s_1, s_2 \in S$, akkor léteznek olyan $u_1, u_2 \in U$ pontok, hogy $s_1 = x + u_1$ és $s_2 = x + u_2$. Ennélfogva minden λ valós számra

$$\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 = \lambda(x + u_1) + (1 - \lambda)(x + u_2) = x + \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2.$$

Mivel U lineáris altér, ezért $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in U$, és így $\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 \in S$. Ebből következik, hogy S affin halmaz. $\square$

A lineáris algebrából ismert lineáris kombinációhoz hasonlóan definiálható pontok affin kombinációja is.

1.1.5. Definíció. *Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Ekkor a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ pontot az $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ pontok egy affin kombinációjának nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy egy halmaz akkor és csak akkor affin, ha bármely két pontjának affin kombinációit is tartalmazza. A következő állítás arra mutat rá, hogy ez tetszőleges számú pont affin kombinációira is igaz.

1.1.6. Állítás. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz akkor és csak akkor affin, ha*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$

$$\left. \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\} \subseteq S.$$

Bizonyítás. A feltétel elégségessége magától értetődik. A szükségességet az affin kombinációban előforduló S-beli pontok k száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $k = 2$, akkor az állítás definíció szerint teljesül. Ezek után feltéve, hogy S bármely legfeljebb k pontból álló affin kombinációi szintén S-ben vannak, tekintsünk egy $k+1$ pontból álló affin kombinációt, azaz legyen $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$, ahol $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ és $x_i \in S$ minden $1 \leqslant i \leqslant k+1$ esetén. Világos, hogy ebben az affin kombinációban legalább egy λ_i együttható, mondjuk $\lambda_{k+1} \neq 1$. Most

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} \neq 0,$$

és így

$$x = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Ám az indukciós feltevés szerint a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_k$$

pont hozzátartozik S-hez, ezért x előáll két S-beli pont affin kombinációjaként, azaz $x \in S$. $\square$

A lineáris függetlenség affin megfelelője is bevezethető.

1.1.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ pontok affin összefüggők, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nem mind nulla valós számok, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = o.$$

Ellenkező esetben affin független pontrendszerről beszélünk.

1.1.8. Állítás. *Bármely legalább $n+2$ pontot tartalmazó $\mathbb{E}^n$-beli halmaz affin összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $m \geqslant n+2$, és tekintsük az $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{E}^n$ pontokat. Ekkor az $x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1$ vektorok lineárisan összefüggők, így léteznek olyan $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ nem mind nulla valós számok, hogy

$$\alpha_2(x_2 - x_1) + \dots + \alpha_m(x_m - x_1) = o,$$

azaz

$$-(\alpha_2 + \dots + \alpha_m)x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = o.$$

Következésképpen az $x_1, \dots, x_m$ pontok affin összefüggők. □

Az affin burok definiálásához szükségünk van az alábbi, triviális észrevételre.

1.1.9. Állítás. *Affin halmazok tetszőleges családjának a metszete affin halmaz.*

1.1.10. Definíció. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazt tartalmazó összes affin halmaz metszetét az S halmaz affin burkának nevezzük és* aff S*-sel jelöljük.*

Világos, hogy egy S halmaz akkor és csak akkor affin, ha $S = \operatorname{aff} S$. Megmutatjuk, hogy ennél több is igaz.

1.1.11. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges nem üres halmaz. Ekkor*

$$\operatorname{aff} S = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}.$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}$$

jelölést. Mivel aff S affin halmaz, ezért az 1.1.6. Állítás szerint

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ és } x_i \in \operatorname{aff} S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\} \subseteq \operatorname{aff} S.$$

Másrészt $S \subseteq \operatorname{aff} S$, így

$$T \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$

$$\left. \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ és } x_i \in \operatorname{aff} S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}.$$

Következésképpen $T \subseteq \operatorname{aff} S$.

Megfordítva, ha $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r$ és $y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_s y_s$ tetszőleges T-beli pontok, akkor minden λ valós számra a

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda\alpha_r x_r + (1-\lambda)\beta_1 y_1 + \cdots + (1-\lambda)\beta_s y_s$$

pont is hozzátartozik T-hez, hiszen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda\alpha_i + \sum_{j=1}^{s} (1-\lambda)\beta_j = \lambda \sum_{i=1}^{r} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{s} \beta_j = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1.$$

Így T affin halmaz, amely tartalmazza S-et. Ennélfogva $\operatorname{aff} S \subseteq T$ is teljesül. □

1.2. Konvex halmazok

Ebben a fejezetben megkezdjük a konvex halmazok szisztematikus vizsgálatát. Ehhez mindenekelőtt szükségünk van néhány definícióra.

1.2.1. Definíció. *Ha $x, y \in \mathbb{E}^n$ tetszőleges pontok, akkor az*

$$\overline{xy} = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \geqslant 0 \text{ és } \alpha + \beta = 1\}$$

halmazt az x és y pontokat összekötő szakasznak nevezzük.

1.2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz konvex, ha minden $x, y \in S$ esetén $\overline{xy} \subseteq S$.*

1.2.3. Definíció. *Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ olyan nem negatív valós számok, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Ekkor a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ pontot az $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$ pontok egy konvex kombinációjának nevezzük.*

Azonnal következik, hogy egy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely két pontjának konvex kombinációit is tartalmazza. Az alábbi állítás arra mutat rá, hogy ez tetszőleges számú pont konvex kombinációira is igaz (vö. 1.1.6. Állítás).

1.2.4. Állítás. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz akkor és csak akkor konvex, ha*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$

$$\left. \lambda_i \geqslant 0 \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\} \subseteq S.$$

Bizonyítás. A feltétel elégségessége nyilvánvaló, a szükségességet pedig a konvex kombinációban előforduló S-beli pontok k száma szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk. Ha $k = 2$, akkor az állítás definíció szerint teljesül. Ezek után feltéve, hogy S bármely, legfeljebb k pontból álló konvex kombinációi szintén S-ben vannak, tekintsünk egy $k+1$ pontból álló konvex kombinációt, azaz legyen $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$, ahol $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ és $x_i \in S$ minden $1 \leqslant i \leqslant k+1$ esetén. Világos, hogy ebben a konvex kombinációban legalább egy λ_i együttható, mondjuk $\lambda_{k+1} < 1$. Most $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$, és így

$$x = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Ám az indukciós feltevés szerint a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} x_k$$

pont hozzátartozik S-hez, ezért x előáll két S-beli pont konvex kombinációjaként, azaz $x \in S$. $\square$

A konvex burok fogalmának bevezetéséhez is szükségünk van egy triviális észrevételre.

1.2.5. Állítás. *Konvex halmazok tetszőleges családjának a metszete konvex halmaz.*

1.2.6. Definíció. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazt tartalmazó összes konvex halmaz metszetét az S halmaz konvex burkának nevezzük és* $\operatorname{conv} S$*-sel jelöljük.*

Világos, hogy egy S halmaz akkor és csak akkor konvex, ha $S = \operatorname{conv} S$. Sőt ennél sokkal több is igaz.

1.2.7. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges nem üres halmaz. Ekkor*

$$\operatorname{conv} S = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \geqslant 0 \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}.$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \geqslant 0 \text{ és } x_i \in S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}$$

jelölést. Mivel $\operatorname{conv} S$ konvex halmaz, ezért az 1.2.4. Állítás szerint

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \geqslant 0 \text{ és } x_i \in \operatorname{conv} S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\} \subseteq \operatorname{conv} S.$$

Másrészt $S \subseteq \operatorname{conv} S$, így

$$T \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{Z}^+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \right.$$
$$\left. \lambda_i \geqslant 0 \text{ és } x_i \in \operatorname{conv} S \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ esetén} \right\}$$

Következésképpen $T \subseteq \operatorname{conv} S$.

Megfordítva, ha $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r$ és $y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_s y_s$ tetszőleges T-beli pontok, akkor minden $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén a

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda \alpha_r x_r + (1-\lambda)\beta_1 y_1 + \cdots + (1-\lambda)\beta_s y_s$$

pont is hozzátartozik T-hez, hiszen az együtthatók mindegyike 0 és 1 között van, továbbá

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} (1-\lambda)\beta_j = \lambda \sum_{i=1}^{r} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{s} \beta_j = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1.$$

Így T konvex halmaz, amely tartalmazza S-et. Ennélfogva $\operatorname{conv} S \subseteq T$ is teljesül. $\square$

Az előző állítás szerint egy S halmaz konvex burkának bármely pontja kifejezhető az S bizonyos számú pontjának konvex kombinációjaként, ám semmi információt nem kapunk a kombinációban szereplő pontok számáról. A következő tétel, amely alapvető fontosságú a konvex halmazok elméletében, ezt a bizonytalanságot szünteti meg.

1.2.8. Tétel (Carathéodory, 1907). *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz, akkor* $\operatorname{conv} S$ *bármely pontja előállítható S legfeljebb $n+1$ pontjának konvex kombinációjaként.*

Bizonyítás. Az 1.2.7. Állítás szerint $\operatorname{conv} S$ tetszőleges x pontja előállítható az S halmaz véges sok pontjának konvex kombinációjaként, azaz valamely k pozitív egész számra $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, ahol $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ és $x_i \in S$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Ha a fenti előállításban $k \leqslant n+1$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ezért tegyük fel, hogy $k > n+1$. Ebben az esetben az $x_1, \ldots, x_k$ pontok affin összefüggők, azaz léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nem mind nulla valós számok, amelyekre $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ és $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = o$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha_k > 0$ és $\lambda_k/\alpha_k \leqslant \lambda_i/\alpha_i$ minden olyan $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén, amelyre $\alpha_i > 0$. Ezek után legyen $\beta_i = \lambda_i - (\lambda_k/\alpha_k)\alpha_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Így $\beta_k = 0$ és

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 - 0 = 1.$$

Továbbá minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén $\beta_i \geqslant 0$. Valóban, ha $\alpha_i \leqslant 0$, akkor $\beta_i \geqslant \lambda_i \geqslant 0$. Ha pedig $\alpha_i > 0$, akkor $\beta_i = (\lambda_i/\alpha_i - \lambda_k/\alpha_k)\alpha_i \geqslant 0$. Ezért

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = x,$$

azaz az x pont kifejezhető az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ pontok konvex kombinációjaként is. Ez az eljárás addig ismételhető, amíg az x pont elő nem áll az S halmaz legfeljebb $n+1$ pontjának konvex kombinációjaként. $\square$

Könnyű ellenőrizni, hogy ha kevesebb, mint $n+1$ pontot veszünk, akkor már nem lesz igaz az állítás. Most lássunk egy egyszerű példát az 1.2.8. Carathéodory tétel alkalmazására.

1.2.9. Állítás. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmaz, akkor* $\operatorname{conv} S$ *is kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Definiáljunk egy $D \subseteq \mathbb{E}^{n+1}$ kompakt halmazt a következőképpen:

$$D = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \text{ és } \alpha_i \geqslant 0 \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant n+1 \text{ esetén}\}.$$

Tekintsük továbbá az

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, \ldots, x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$$

folytonos függvényt. Az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint ekkor

$$f(D \times S \times \cdots \times S) = \operatorname{conv} S.$$

De $D \times S \times \cdots \times S$ kompakt halmaz, így $\operatorname{conv} S$ is szükségképpen kompakt halmaz. □

A fejezet hátralévő részében a konvex halmazok egy érdekes topológiai tulajdonságával ismerkedünk meg. Ehhez szükségünk lesz némi előkészületre.

1.2.10. Állítás. *Tekintsünk egy $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq \mathbb{E}^n$ affin független pontrendszert. Ekkor S affin burkának minden pontja egyértelműen írható fel az $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ pontok affin kombinációjaként.*

Bizonyítás. Az 1.1.11. Állítással összhangban tegyük fel, hogy S affin burkának valamely pontjára

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i.$$

Legyen $\lambda_i = \alpha_i - \beta_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant k+1$ esetén. Ekkor $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = o$. De

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1 - 1 = 0,$$

ami az $x_1, \ldots, x_{k+1}$ pontok affin függetlensége miatt csak akkor lehetséges ha $\lambda_i = 0$, azaz $\alpha_i = \beta_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant k+1$ esetén. □

1.2.11. Következmény. *Tekintsünk egy $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq \mathbb{E}^n$ affin független pontrendszert. Ekkor S konvex burkának minden pontja egyértelműen fejezhető ki az $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ pontok konvex kombinációjaként.*

Állapodjunk meg néhány hasznos jelölésben. Egy tetszőleges $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz belsejét jelölje $\operatorname{int} A$, határát $\operatorname{bd} A$, lezártját pedig $\operatorname{cl} A$. Az A halmaz $\dim A$ dimenziója definíció szerint legyen $\operatorname{aff} A$ dimenziója. Megjegyezzük, hogy $\dim A$ különbözhet a halmaz topológiai dimenziójától (konvex halmazok esetén persze a két érték megegyezik). Ha $\dim A < n$, akkor nyilván $\operatorname{int} A = \emptyset$ és $\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A$. Elég gyakran azért ennél több információra van szükségünk. Így az A halmaz $\operatorname{aff} A$-ra vonatkozó belsejét és határát jelölje $\operatorname{relint} A$, illetve $\operatorname{relbd} A$.

1.2.12. Definíció. *Legyen $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq \mathbb{E}^n$ affin független pontrendszer. Ekkor az $S = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$ kompakt, konvex halmazt k-dimenziós szimplexnek nevezzük.*

Ezek után már rátérhetünk eredeti célunk megvalósítására.

1.2.13. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmaz. Ekkor* $\operatorname{relint} S \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Ha S egy k-dimenziós halmaz, akkor S tartalmaz $k+1$ affin független pontot. Ezen pontok konvex burka egy k-dimenziós szimplex, amelynek relatív belseje nyilván hozzátartozik $\operatorname{relint} S$-hez. Így elég az állítást k-dimenziós szimplexekre igazolni. Most legyen $S = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ egy k-dimenziós szimplex, és tekintsük az

$$f : \operatorname{aff} S \to \mathbb{E}^{k+1}, \ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1})$$

függvényt (vö. 1.2.10. Állítás). Mivel f folytonos, és az

$$x_0 = \frac{1}{k+1}(x_1 + \cdots + x_{k+1})$$

pontban minden koordinátája pozitív, ezért létezik olyan x_0 középpontú B nyílt gömb, hogy a $B \cap \operatorname{aff} S$ halmazon f minden koordinátája szintén pozitív. Ennélfogva $B \cap \operatorname{aff} S$ minden pontja előáll az $x_1, \ldots, x_{k+1}$ pontok konvex kombinációjaként, és így az 1.2.7. Állítás szerint $B \cap \operatorname{aff} S \subseteq S$. Következésképpen $x_0 \in \operatorname{relint} S$. $\square$

Feladatok

1.1. Feladat. *Legyenek $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ affin alterek. Mutassuk meg, hogy ha $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, akkor* $\dim(F_1 \cap F_2) \geqslant \dim F_1 + \dim F_2 - n$.

1.2. Feladat. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy*

(1) $\operatorname{relint} S = \operatorname{relint} \operatorname{cl} S$,

(2) $\operatorname{cl} S = \operatorname{cl} \operatorname{relint} S$,

(3) $\operatorname{relbd} S = \operatorname{relbd} \operatorname{cl} S = \operatorname{relbd} \operatorname{relint} S$.

1.3. Feladat. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy*

(1) $\operatorname{int} S$ *konvex halmaz,*

(2) $\operatorname{cl} S$ *konvex halmaz.*

1.4. Feladat. *Egy nem üres $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz azon x pontjainak összességét, amelyekre $\overline{xy} \subseteq S$ minden $y \in S$ pontra, az S magjának nevezzük. Mutassuk meg, hogy bármely nem üres $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz magja konvex.*

1.5. Feladat* (Foland-Marr, 1966). *Mutassuk meg, hogy ha egy legalább három, nem egy egyenesen lévő pontot tartalmazó $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz bármely három, nem egy egyenesen lévő x, y, z pontjához pontosan egy olyan $p \in S$ pont létezik, amelyre $\overline{xp}, \overline{yp}, \overline{zp} \subseteq S$, akkor S magja egyetlen pontból áll.* [Útmutatás: Először azt igazoljuk, hogy tetszőleges $x, y \in S$, $\overline{xy} \nsubseteq S$ esetén pontosan egy olyan $p \in S$ pont létezik, amelyre $\overline{xp}, \overline{yp} \subseteq S$.]

1.6. Feladat. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy legfeljebb n összefüggő komponensből álló, nem üres halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $x \in \operatorname{conv} S$ esetén létezik legfeljebb n olyan $x_1, \ldots, x_k \in S$ pont, hogy $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$.* [Útmutatás: Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy x az origóba essen. Indirekt tegyük fel, hogy $k = n + 1$, és minden $1 \leqslant i \leqslant n + 1$ esetén tekintsük az origóból induló, a $\operatorname{conv}\{-x_1, \ldots, -x_{i-1}, -x_{i+1}, \ldots, -x_{n+1}\}$ halmaz pontjain átmenő félegyenesek által meghatározott konvex kúpot. Mutassuk meg, hogy ezen kúpok legalább egyikének S valamely pontja szükségképpen a határán van. Most ez a pont kiegészíthető az $x_1, \ldots, x_{n+1}$ pontok közül legfeljebb $n - 1$ továbbival úgy, hogy már ennek az n pontnak a konvex burka is tartalmazza az origót.]

1.7. Feladat (Baker, 1979). *Legyen $m > n$, legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy m pontból álló halmaz, és legyen $x \in \operatorname{conv} S$. Mutassuk meg, hogy ekkor S pontjai közül legalább $\binom{m-n}{r-n}$ különböző módon választható $n < r \leqslant m$ pont úgy, hogy ezek konvex burka tartalmazza x-et.* [Útmutatás: Használjunk n-re és m-re szimultán teljes indukciót. Az indukciós lépéshez tekintsünk egy tetszőleges $y \in S$ pontot, és vizsgáljuk meg külön az $x \in \operatorname{conv}(S \setminus \{y\})$ és az $x \notin \operatorname{conv}(S \setminus \{y\})$ eseteket.]

1.8. Feladat* (McKinney, 1966). *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, nem konvex, zárt halmaz. Mutassuk meg, hogy S akkor és csak akkor két konvex halmaz uniója, ha minden $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq S$ páratlan elemszámú, véges részhalmazra $\overline{x_1x_2}, \ldots, \overline{x_{m-1}x_m} \not\subseteq S$ esetén $\overline{x_1x_m} \subseteq S$.*

2. fejezet

Hipersíkok

2.1. Hipersíkok és lineáris funkcionálok

Az 1.1. fejezetben a hipersíkokat az n-dimenziós tér $(n-1)$-dimenziós affin altereiként definiáltuk. Ez természetes módon általánosítja a 2-dimenziós tér egyeneseinek, illetve a 3-dimenziós tér síkjainak fogalmát. Idézzük fel, hogy ezeket az alakzatokat az $\alpha x_1 + \beta x_2 = \delta$, valamint az $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ egyenletek írják le. Megmutatjuk, hogy magasabb dimenzióban is hasonló a helyzet.

2.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ függvény lineáris, ha minden $x, y \in \mathbb{E}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Ha az f lineáris függvény képhalmaza megegyezik a valós számok halmazával, vagyis $m = 1$, akkor f-et lineáris funkcionálnak is nevezzük. Egy f lineáris funkcionálra és egy α valós számra legyen

$$[f : \alpha] = \{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) = \alpha\}.$$

2.1.2. Állítás. *Egy $H \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz pontosan akkor hipersík, ha létezik olyan nem azonosan nulla f lineáris funkcionál és olyan δ valós szám, hogy $H = [f : \delta]$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy H hipersík, és legyen $H_1 = -x_0 + H$, ahol $x_0 \in H$. Ekkor H_1 egy $(n-1)$-dimenziós lineáris altér, és így bármely rögzített $y \in \mathbb{E}^n \setminus H_1$ pontra $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}y + H_1$, azaz minden $p \in \mathbb{E}^n$ pont felírható $p = \alpha y + p_1$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $p_1 \in H$. Sőt egyszerűen látható, hogy ez a felírás egyértelmű. Most definiáljuk az f függvényt a következőképpen. Minden $p = \alpha y + p_1$ esetén legyen $f(p) = \alpha$. Megmutatjuk, hogy f lineáris. Valóban, ha $p = \alpha y + p_1$ és $q = \beta y + q_1$, akkor

$$f(p+q) = f((\alpha+\beta)y + p_1 + q_1) = \alpha + \beta = f(p) + f(q),$$

mivel $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ és $p_1 + q_1 \in H_1$. Hasonlóan, ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(\lambda p) = f(\lambda\alpha y + \lambda p_1) = \lambda\alpha = \lambda f(p),$$

mivel $\lambda\alpha \in \mathbb{R}$ és $\lambda p_1 \in H_1$. Világos, hogy $[f : 0] = H_1$, és így $[f : f(x_0)] = H$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f nem azonosan nulla lineáris funkcionál. Definíció szerint f képtere 1-dimenziós, ezért az N magtér szükségképpen $(n-1)$-dimenziós. Most tekintsük azt az $x_0 \in \mathbb{E}^n$ pontot, amelyre $f(x_0) = \delta$ (ilyen pont a homogenitás miatt nyilván létezik). Ekkor $[f : \delta] = x_0 + N$, azaz $[f : \delta]$ egy $(n-1)$-dimenziós lineáris altér eltoltja. □

2.1.3. Állítás. *Ha f és g olyan $\mathbb{E}^n$-en értelmezett lineáris funkcionálok, valamint α és β olyan valós számok, hogy $[f : \alpha] = [g : \beta]$, akkor $f = \lambda g$ és $\alpha = \lambda\beta$ valamely λ nem nulla valós számra.*

Bizonyítás. Ha f vagy g azonosan nulla, akkor az állítás magától értetődik. Ezért tegyük fel, hogy f és g egyike sem azonosan nulla, és legyen $H = [f : \alpha] = [g : \beta]$. Ha $\alpha = 0$, akkor a H hipersík átmegy az origón, és így $\beta = 0$. Hasonlóan, ha $\beta = 0$, akkor $\alpha = 0$. Ezek után két esetet kell megkülönböztetnünk.

Először legyenek $\alpha, \beta = 0$. Legyen továbbá z egy a H-ra nem illeszkedő pont. Ekkor $f(z), g(z) \neq 0$, így tekinthetjük a $\lambda = f(z)/g(z)$ nem nulla valós számot. Mivel H egy $(n-1)$-dimenziós lineáris altér, tetszőleges $p \in \mathbb{E}^n$ pont előáll $\delta z + h$ alakban, ahol $\delta \in \mathbb{R}$ és $h \in H$. De $f(h), g(h) = 0$, ezért

$$f(p) - \lambda g(p) = (\delta f(z) + f(h)) - \lambda(\delta g(z) + g(h)) = \delta(f(z) - \lambda g(z)) = 0,$$

azaz $f(p) = \lambda g(p)$.

Másodszor legyenek $\alpha, \beta \neq 0$. Legyen továbbá z egy H-ra illeszkedő pont. Mivel H egy az origót nem tartalmazó hipersík, nyilván $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}z + H$, azaz tetszőleges $p \in \mathbb{E}^n$ pont előáll $\delta z + h$ alakban, ahol $\delta \in \mathbb{R}$ és $h \in H$. De $f(h), f(z) = \alpha$ és $g(h), g(z) = \beta$, ezért a $\lambda = \alpha/\beta$ jelölés bevezetésével

$$f(p) - \lambda g(p) = (\delta f(z) + f(h)) - \lambda(\delta g(z) + g(h)) = (1+\delta)(\alpha - \lambda\beta) = 0,$$

vagyis $f(p) = \lambda g(p)$. □

Végül lássuk, hogyan kapcsolódnak az előzőek a hipersíkok ún. normálvektoros egyenletéhez.

2.1.4. Állítás. *Ha f lineáris funkcionál, akkor létezik olyan $u \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy $f(x) = \langle x, u \rangle$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ az n-dimenziós tér standard bázisa, továbbá legyenek $\lambda_1 = f(e_1), \ldots, \lambda_n = f(e_n)$. Ekkor az $u = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ választással, minden $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ esetén

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = \langle x, u \rangle. \qquad \square$$

2.1.5. Következmény. *Egy $H \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz pontosan akkor hipersík, ha létezik olyan nem nulla $u \in \mathbb{E}^n$ vektor és olyan δ valós szám, hogy*

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle = \delta\}.$$

2.1.6. Definíció. *Ha a H hipersík az $\{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle = \delta\}$ alakban van megadva, akkor u-t a H egy normálvektorának nevezzük.*

Világos, hogy két hipersík akkor és csak akkor párhuzamos, ha normálvektoraik egymás skalárszorosai.

2.2. Konvex halmazok elválasztása hipersíkokkal

Ebben a fejezetben figyelmünket a konvex halmazok hipersíkokkal való elválaszthatóságának problémája felé fordítjuk.

2.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $H = [f : \alpha]$ hipersík elválasztja a nem üres A és B halmazokat, ha*

(1) *vagy $f(A) \leqslant \alpha$ és $f(B) \geqslant \alpha$,*

(2) *vagy $f(A) \geqslant \alpha$ és $f(B) \leqslant \alpha$.*

2.2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $H = [f : \alpha]$ hipersík szigorúan elválasztja a nem üres A és B halmazokat, ha*

(1) *vagy $f(A) < \alpha$ és $f(B) > \alpha$,*

(2) *vagy $f(A) > \alpha$ és $f(B) < \alpha$.*

Jegyezzük meg, hogy a szigorú elválaszthatóság maga után vonja a halmazok diszjunktságát, ám a megfordítás nem feltétlenül igaz. Valóban, bár az

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x > 0 \text{ és } y \geqslant \tfrac{1}{x}\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ és } y \leqslant 0\}$$

zárt, konvex halmazoknak nincs közös pontja, mégsem választhatók el szigorúan egy egyenessel. Ebből is látszik, hogy az elválaszthatóság kérdése sokkal bonyolultabb, mint első látásra tűnik.

2.2.3. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, nyílt, konvex halmaz, F pedig egy az S-től diszjunkt k-dimenziós affin altér, ahol $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Ekkor létezik olyan $(k+1)$-dimenziós affin altér, amely tartalmazza F-et és szintén diszjunkt S-től.*

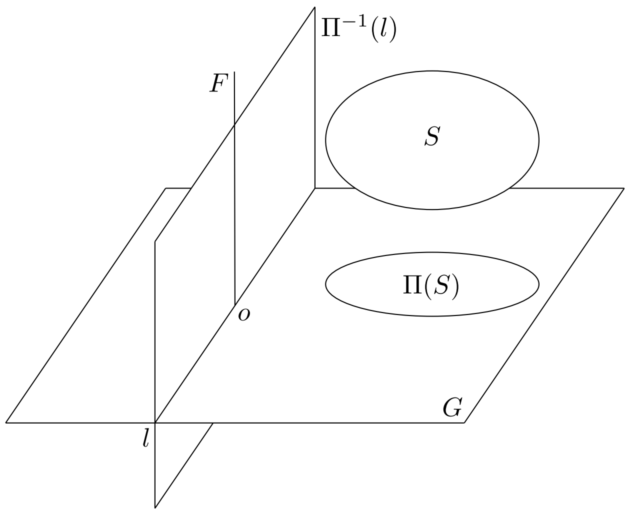
Bizonyítás. Ha $k = 0$, akkor tekintsünk egy F-et tartalmazó, tetszőleges 2-dimenziós P lineáris alteret. Mivel $S \cap P$ nyílt, konvex halmaz P-ben, így létezik olyan egyenes P-ben, amely tartalmazza F-et és diszjunkt S-től. Valóban, az F-ből kiinduló, $S \cap P$ pontjaira illeszkedő félegyenesek uniója egy olyan nyílt, konvex kúp, melynek nyílásszöge legfeljebb π, hiszen $F \notin S \cap P$. Ennek a kúpnak a határegyenesei pedig diszjunktak S-től.

Ezek után feltesszük, hogy $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Legyen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ az n-dimenziós tér standard bázisa. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in F$ továbbá, hogy F-et az $e_1, \ldots, e_k$ vektorok feszítik ki. Legyen G a fennmaradó $e_{k+1}, \ldots, e_n$ vektorok által kifeszített lineáris altér, és tekintsük a

$$\Pi : \mathbb{E}^n \to G, \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$$

merőleges vetítést. Világos, hogy $\Pi(S)$ nyílt részhalmaza G-nek és $o \notin \Pi(S)$. Ha P jelöli az e_{n-1} és e_n vektorok által kifeszített 2-dimenziós lineáris alteret, akkor nyilván $P \subseteq G$, továbbá $P \cap \Pi(S)$ az origót nem tartalmazó nyílt halmaz P-ben. Így az első bekezdés szerint létezik olyan, az origón átmenő l egyenes, amely diszjunkt $\Pi(S)$-től. De ekkor $\Pi^{-1}(l)$ egy F-et tartalmazó, S-től diszjunkt, $(k+1)$-dimenziós lineáris altér (ld. 2.2.1. ábra). $\square$

2.2.4. Következmény. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, nyílt, konvex halmaz, F pedig egy S-től diszjunkt k-dimenziós affin altér, ahol $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ekkor létezik olyan hipersík, amely tartalmazza F-et és szintén diszjunkt S-től.*



2.2.1. ábra.

2.2.5. Állítás. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ olyan nem üres, konvex halmazok, amelyekre* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ *és* $B \cap \operatorname{int} A = \emptyset$*. Ekkor létezik olyan H hipersík, amelyik elválasztja az A és B halmazokat.*

Bizonyítás. Mivel $A \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{int} A)$, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy A nyílt halmaz. Tekintsük az

$$A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt. Nem nehéz belátni, hogy $A - B$ nyílt, konvex halmaz. Most $o \notin A - B$, hiszen $A \cap B = \emptyset$. Így a 2.2.4. Következmény szerint létezik olyan, az origót tartalmazó $H' = [f : 0]$ hipersík, amely diszjunkt az $A - B$ halmaztól. De $A - B$ konvex, ezért vagy $f(A - B) > 0$, vagy pedig $f(A - B) < 0$. Tegyük fel, hogy $f(A - B) > 0$. Ekkor minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $0 < f(a - b) = f(a) - f(b)$, azaz $f(b) < f(a)$. Ebből következik, hogy az $\{f(a) \mid a \in A\}$ halmaz alulról korlátos. Jelölje α a fenti halmaz alsó határát, és tekintsük a $H = [f : \alpha]$ hipersíkot. Világos, hogy H elválasztja az A és B halmazokat. $\square$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a 2.2.5. Állításnál nem hagyható el, hogy az A halmaz n-dimenziós legyen, mint azt az

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ z = 0\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x = 0,\ y = 0,\ |z| \leqslant 1\}$$

példa is mutatja. Ennek ellenére azért lehet gyengíteni a feltételeket.

2.2.6. Definíció. *Legyen $H = [f : \alpha]$ tetszőleges hipersík. Ekkor az*

$$\{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) > \alpha\} \qquad \text{és} \qquad \{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) < \alpha\},$$

illetve az

$$\{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) \geqslant \alpha\} \qquad \text{és} \qquad \{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) \leqslant \alpha\}$$

halmazokat a H által határolt nyílt, illetve zárt féltereknek nevezzük.

2.2.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $H = [f : \alpha]$ hipersík kettévág egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazt, ha léteznek olyan $x, y \in S$ pontok, amelyekre $f(x) < \alpha$ és $f(y) > \alpha$.*

2.2.8. Állítás. *Egy $H = [f : \alpha]$ hipersík akkor és csak akkor vág ketté egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmazt, ha az alábbi két feltétel teljesül:*

(1) $S \nsubseteq H$,

(2) $\operatorname{relint} S \cap H \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy H kettévágja S-et. Ekkor léteznek olyan $x, y \in S$ pontok, amelyekre $f(x) < \alpha$ és $f(y) > \alpha$. Mivel $f(H) = \alpha$, ezért (1) automatikusan teljesül. Ezek után legyen $z \in \operatorname{relint} S$. Most az $\overline{xz}$ és $\overline{yz}$ szakaszok, esetleg az x és y pontoktól eltekintve hozzátartoznak $\operatorname{relint} S$-hez. De $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ összefüggő halmaz, f pedig folytonos függvény, így létezik olyan p pont az $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ töröttvonalon, amelyre $f(p) = \alpha$. Világos, hogy p nem egyezhet meg az x és y pontok egyikével sem, ezért szükségképpen $p \in \operatorname{relint} S$, azaz (2) is fennáll.

Megfordítva, ha (1) és (2) teljesül, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in \operatorname{relint} S \cap H$, továbbá, hogy létezik olyan $x \in S \setminus H$ pont, amelyre $f(x) > 0$. Mivel $o \in \operatorname{relint} S$, ezért valamely δ pozitív valós számra $-\delta x \in S$. De ekkor $f(-\delta x) = -\delta f(x) < 0$, azaz H valóban kettévágja az S halmazt. □

2.2.9. Tétel. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ olyan nem üres, konvex halmazok, amelyekre teljesül, hogy $\dim(\operatorname{aff}(A \cup B)) = n$. Ezen feltétel mellett az A és B halmazok pontosan akkor választhatók el egy H hipersíkkal, ha*

$$\operatorname{relint} A \cap \operatorname{relint} B = \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha a relint A és relint B halmazoknak létezik egy x közös pontja, akkor nyilván minden olyan H hipersík, amelyik elválasztja A-t és B-t szükségképpen tartalmazza x-et. De $\dim(\mathrm{aff}(A \cup B)) = n$, ezért H nem tartalmazhatja az A és B halmazok mindegyikét. Így a 2.2.8. Állítás szerint H legalább az egyik halmazt kettévágja, azaz A és B nem választható el semmilyen hipersíkkal.

Az elégségesség igazolásához először is vegyük észre, hogy A és B akkor és csak akkor választható el egy hipersíkkal, ha ugyanez fennáll a relint A és relint B halmazokra is. Ezért feltehetjük, hogy mind A, mind pedig B relatív nyílt halmaz, és így $A \cap B = \emptyset$. Ezen megjegyzés után az állítást az A halmaz dimenziója szerinti "csökkenő sorrendű" teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $\dim A = n$, akkor $\mathrm{int}\, A \neq \emptyset$, következésképpen a 2.2.5. Állítás szerint létezik a megfelelő elválasztó hipersík. Ezek után tegyük fel, hogy minden olyan esetben igaz a tétel, amikor az egyik halmaz dimenziója legalább k valamely $1 \leqslant k \leqslant n$ esetén, és legyen $\dim A = k - 1$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel továbbá, hogy $o \in A$. Legyen $H = [f : 0]$ egy tetszőleges A-t tartalmazó hipersík, és $x \in \mathbb{E}^n$ olyan pont, amelyre $f(x) > 0$. Most tekintsük a $C = \mathrm{conv}(A \cup (x + A))$ és $D = \mathrm{conv}(A \cup (-x + A))$ halmazokat. Ha $B \cap C \neq \emptyset$ és $B \cap D \neq \emptyset$, akkor B és $C \cup D$ konvexitása miatt $B \cap A \neq \emptyset$ is fennállna, ami nem lehetséges. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $B \cap C = \emptyset$. Mivel $\dim C = k$, így az indukciós hipotézis szerint létezik olyan H hipersík, amelyik elválasztja C-t és B-t. De $A \subseteq C$, így H szükségképpen elválasztja az A és B halmazokat is. $\square$

Ezek után áttérünk a szigorú elválaszthatóság kérdésére. Mindenekelőtt bevezetünk egy jelölést. Tetszőleges $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazokra legyen

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Megjegyezzük, hogy a D függvény persze nem metrika még a nem üres, kompakt, konvex halmazok családján sem (vö. 5.1.4. Definíció).

2.2.10. Állítás. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmazok, melyek közül A kompakt, B pedig zárt. Ezen feltételek mellett akkor és csak akkor létezik olyan H hipersík, amelyik szigorúan elválasztja az A és B halmazokat, ha $A \cap B = \emptyset$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az A és B halmazok diszjunktak. Ekkor a $\delta = D(A, B)$ távolság szükségképpen pozitív. Ha most S jelöli az origó középpontú, $\delta/2$ sugarú nyílt gömböt, akkor $A + S$ és $B + S$ egymástól diszjunkt, nyílt, konvex részhalmazai az n-dimenziós térnek, így a 2.2.9. Tétel szerint létezik olyan H hipersík, amelyik elválasztja őket. Ám ez a hipersík nyilván szigorúan elválasztja A-t és B-t. Az állítás megfordítása magától értetődik. $\square$

A 2.2.10. Állítás számos átfogalmazása, illetve kiterjesztése ismert. Így például ha elhagyjuk az A és B halmazok konvexitására vonatkozó feltételt, akkor az alábbi érdekes tételt kapjuk.

2.2.11. Tétel. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazok. Ezen feltétel mellett az A és B halmazok akkor és csak akkor választhatók el szigorúan egy hipersíkkal, ha* $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset$, akkor felhasználva azt, hogy kompakt halmazok konvex burka szintén kompakt (ld. 1.2.9. Állítás), a 2.2.10. Állítás szerint létezik olyan H hipersík, amelyik szigorúan elválasztja a $\operatorname{conv} A$ és $\operatorname{conv} B$ halmazokat. Világos, hogy ekkor ugyanez szükségképpen fennáll az A és B részhalmazokra is.

Megfordítva, ha a $H = [f : \alpha]$ hipersík szigorúan elválasztja az A és B halmazokat, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $f(A) < \alpha$ és $f(B) > \alpha$. Legyen $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ egy az A pontjaiból képzett tetszőleges konvex kombináció. Ekkor

$$f(a) = \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_k f(a_k) < \lambda_1 \alpha + \cdots + \lambda_k \alpha = \alpha,$$

mivel $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Ezért $f(\operatorname{conv} A) < \alpha$. Ugyanígy igazolható, hogy $f(\operatorname{conv} B) > \alpha$. Következésképpen a H hipersík szigorúan elválasztja a $\operatorname{conv} A$ és $\operatorname{conv} B$ halmazokat is, így a 2.2.10. Állítás szerint

$$\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset.$$

$\square$

2.3. Konvex halmazok támaszhipersíkjai

Most az elválasztás egyik legfontosabb alkalmazásával fogunk foglalkozni, amely maga után vonja az ún. támaszhipersíkok létezését. Majd ennek segítségével bebizonyítunk néhány érdekes tételt, többek között az 1.2.8. Carathéodory tétel egy változatát is.

2.3.1. Definíció. *Legyen $A \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy a $H = [f : \alpha]$ hipersík támaszhipersíkja A-nak valamely $x \in A$ pontban, ha $x \in H$ és*

(1) *vagy $f(A) \leqslant \alpha$,*

(2) *vagy $f(A) \geqslant \alpha$.*

Nem nehéz értelmezni egy halmaz alacsonyabb dimenziós támasz affin altereit sem. Egy H affin alteret akkor nevezünk az A nem üres halmaz egy támasz affin alterének valamely $x \in A$ pontban, ha $x \in H$, és H benne van A egy támaszhipersíkjában.

2.3.2. Állítás. *Legyen $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, zárt, konvex halmaz. Ekkor A-nak minden x határpontjában létezik támaszhipersíkja.*

Bizonyítás. Ha A dimenziója kisebb, mint n, akkor minden olyan hipersík, amelyik tartalmazza A-t egyben támaszhipersík is. Ezért tegyük fel, hogy $\dim A = n$. Ekkor $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, így a 2.2.4. Következmény szerint létezik olyan H hipersík, amelyik tartalmazza x-et és diszjunkt $\operatorname{int} A$-tól, azaz H az A halmaz egy támaszhipersíkja az x pontban. $\square$

Bizonyos speciális esetekben az előbbi állítás megfordítása is igaz.

2.3.3. Állítás. *Ha egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező, zárt halmaznak minden határpontjában létezik támaszhipersíkja, akkor A konvex halmaz.*

Bizonyítás. Ha $A = \mathbb{E}^n$, akkor A nyilván konvex. Ellenkező esetben létezik olyan x pont, amelyik nem tartozik hozzá A-hoz. Legyen $y \in \operatorname{int} A$. Ekkor $\operatorname{relint} \overline{xy}$ szükségképpen tartalmazza A valamely b határpontját. A b-ben húzott H támaszhipersík viszont nem tartalmazhatja az x pontot, mert akkor tartalmaznia kellene a belső y pontot is, ami nem lehetséges. Így a H által határolt, y-t tartalmazó zárt féltér magába foglalja az A halmazt, de az x pontot nem. Mivel x tetszőleges, A-n kívüli pont volt, ez azt jelenti, hogy A előáll zárt félterek metszeteként, következésképpen A konvex. $\square$

A fenti állításokból (pontosabban azok bizonyításából) egyszerűen adódik az a figyelemreméltó észrevétel, hogy minden nem üres, kompakt, konvex halmaz megegyezik a támaszféltereinek metszetével.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy egy S nem üres, konvex halmaz előáll-e valamely S' valódi részhalmazának konvex burkaként. Ha S legalább két pontból áll, akkor a válasz igen: legyen $S' = S \setminus \{x\}$, ahol $x \in \operatorname{relint} S$. Ezek után célunk nem más, mint az ilyen tulajdonságú minimális halmazok meghatározása. Ehhez szükségünk lesz az alábbi definícióra.

2.3.4. Definíció. *Egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz valamely x pontját extremális pontnak nevezzük, ha nem létezik olyan szakasz A-ban, amelynek x relatív belső pontja. Az A halmaz extremális pontjainak halmazát jelölje* $\operatorname{ext} A$.

2.3.5. Tétel (Minkowski, 1911). *Bármely $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz megegyezik az extremális pontjainak konvex burkával.*

Bizonyítás. A tételt az A halmaz k dimenziója szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $k = 0$ vagy $k = 1$, akkor az állítás magától értetődik. Ezért tegyük fel, hogy minden legfeljebb $(k-1)$-dimenziós nem üres kompakt, konvex halmaz megegyezik az extremális pontjainak konvex burkával, és tekintsünk egy k-dimenziós A nem üres, kompakt, konvex halmazt, ahol $k \geqslant 2$. Legyen $x \in A$.

Ha x az A egy relatív határpontja, akkor a 2.3.2. Állítás szerint aff A-ban létezik olyan H hipersík (azaz $(k-1)$-dimenziós affin altér), amely A támaszhipersíkja x-ben. Világos, hogy $A \cap H$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, amelynek dimenziója legfeljebb $k-1$. Így az indukciós hipotézis szerint x előáll $A \cap H$ extremális pontjainak alkalmas konvex kombinációjaként. Azonban vegyük észre, hogy $A \cap H$ extremális pontjai egyben A extremális pontjai is, így x előáll az A halmaz extremális pontjainak konvex kombinációjaként.

Ha pedig $x \in \operatorname{relint} A$, akkor tekintsünk egy olyan x-re illeszkedő l egyenest, amelyik aff A-ban van. Ekkor $l \cap A$ egy zárt szakasz, amelynek végpontjai, mondjuk y és z hozzátartoznak A relatív határához. De az előző okoskodás szerint y és z előállnak az A halmaz extremális pontjainak konvex kombinációjaként, így ugyanez szükségképpen fennáll az x pontra is.

Ebből következik, hogy A benne van az extremális pontjainak konvex burkában. A fordított irányú tartalmazás magától értetődik. $\square$

Egy A nem üres, kompakt, konvex halmaz extremális pontjait az A pontjainak konvex kombinációi segítségével definiáltuk, így ez a fogalom a halmaz "belső" leírását teszi lehetővé. Kívülről nézve az A halmazt, a határpontok egy másik fontos osztályához juthatunk.

2.3.6. Definíció. *Egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz valamely x pontját exponált pontnak nevezzük, ha létezik olyan H támaszhipersíkja A-nak, hogy $A \cap H = \{x\}$. Az A halmaz exponált pontjainak halmazát jelölje* $\exp A$.

Világos, hogy $\exp A \subseteq \operatorname{ext} A$, ám a fordított irányú tartalmazás általában nem teljesül. Az egyik legegyszerűbb ellenpélda egy négyzet, amelynek egyik oldalához egy félkört csatoltunk. Az viszont igaz, hogy minden extremális pont exponált pontok torlódási pontja.

2.3.7. Tétel (Straszewicz, 1935). *Bármely $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz megegyezik az exponált pontjai konvex burkának lezártjával.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\dim A = n$. Legyen $x \in \operatorname{ext} A$, és tekintsük x egy tetszőleges U környezetét. Ekkor U tartalmaz olyan x középpontú B_0 nyílt gömböt, amelyre $A \setminus B_0 \neq \emptyset$. Legyen $\bar{A} = \operatorname{conv}(A \setminus B_0)$. Nem nehéz látni, hogy $x \notin \bar{A}$. Valóban, ha $x \in \bar{A}$, akkor az 1.2.8. Carathéodory tétellel összhangban x relatív belső pontja egy olyan, legalább 1-dimenziós szimplexnek, melynek csúcsai A-ban vannak. Ez viszont ellentmond annak, hogy x extremális pont.

Mivel $\bar{A}$ nem üres, kompakt, konvex halmaz és $x \notin \bar{A}$, ezért a 2.2.10. Állítás szerint létezik olyan H hipersík, amely szigorúan elválasztja x-et és $\bar{A}$-t. Jelölje H^+ azt a H által határolt zárt félteret, amely (a belsejében) tartalmazza x-et. Ekkor $A \cap H^+ \subseteq U$. Most legyen G az az x végpontú, H-ra merőleges félegyenes, amely metszi H-t. Mivel A kompakt, így tetszőleges $z \in G$ ponthoz létezik olyan $y_z \in A$ pont, amely z-től mért távolsága maximális. Vegyük észre, hogy a zy_z egyenesre az y_z pontban állított merőleges hipersík csak az y_z pontban metszi A-t, ezért $y_z \in \exp A$. Sőt ha z elég messze van x-től, akkor ráadásul $y_z \in A \cap H^+ \subseteq U$, amiből következik, hogy $\operatorname{ext} A \subseteq \operatorname{cl} \exp A$. Most felhasználva a 2.3.5. Minkowski tételt kapjuk, hogy

$$A = \operatorname{conv} \operatorname{ext} A \subseteq \operatorname{conv} \operatorname{cl} \exp A \subseteq \operatorname{cl} \operatorname{conv} \exp A \subseteq \operatorname{cl} \operatorname{conv} \operatorname{ext} A = A,$$

vagyis $A = \operatorname{cl} \operatorname{conv} \exp A$. $\square$

A következő probléma elválasztási jellegű. Itt is szükséges némi előkészület.

2.3.8. Definíció. *Egy $p \in \mathbb{E}^n$ pontot egy adott $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmazra nézve k-szimplex tulajdonságúnak nevezünk, ha létezik legfeljebb k olyan $x_1, \dots, x_r \in A$ affin független pont, hogy $p \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$. Az egyszerűség kedvéért az A halmazra nézve k-szimplex tulajdonságú pontok halmazát jelölje A_k.*

Világos, hogy $A_1 = A$, továbbá az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint $A_{n+1} = \operatorname{conv} A$.

2.3.9. Állítás. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazok, és tegyük fel, hogy $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$. Ezen feltétel mellett ha x a $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B$ halmaz egy extremális pontja, valamint i és j azok a legkisebb egész számok, amelyekre $x \in A_i \cap B_j$, akkor $i + j \leqslant n + 2$.*

Bizonyítás. Mivel i a legkisebb olyan egész, hogy $x \in A_i$, ezért létezik olyan x középpontú, $(i-1)$-dimenziós Γ_A gömb, amely benne van $\operatorname{conv} A$-ban. Hasonlóan, mivel j a legkisebb olyan egész, hogy $x \in B_j$, ezért létezik olyan x középpontú, $(j-1)$-dimenziós Γ_B gömb, amely benne van $\operatorname{conv} B$-ben. De x a $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B$ halmaz extremális pontja, így szükségképpen $\Gamma_A \cap \Gamma_B = \{x\}$. Ebből pedig következik, hogy $(i-1)+(j-1) \leqslant n$, azaz $i+j \leqslant n+2$. □

2.3.10. Tétel (Kirchberger, 1903). *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazok. Ezen feltételek mellett az A és B halmazok akkor és csak akkor választhatók el szigorúan egy hipersíkkal, ha $A \cup B$ bármely, legfeljebb $n+2$ pontot tartalmazó T részhalmazára $T \cap A$ és $T \cap B$ is szigorúan elválasztható egy hipersíkkal.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $A \cup B$ bármely, legfeljebb $n+2$ pontot tartalmazó T részhalmazára $T \cap A$ és $T \cap B$ szigorúan elválasztható egy hipersíkkal, de A és B nem választható el szigorúan egy hipersíkkal. Ekkor a 2.2.11. Tétel szerint $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$. Legyen x a $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B$ halmaz egy extremális pontja. Most alkalmazva a 2.3.9. Állítást, léteznek olyan $a_1, \ldots, a_i \in A$ és $b_1, \ldots, b_j \in B$ pontok, ahol $i+j \leqslant n+2$, hogy

$$x \in \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_i\} \cap \operatorname{conv}\{b_1, \ldots, b_j\}.$$

Ez viszont ellentmond annak a feltételezésnek, hogy az $\{a_1, \ldots, a_i\}$ és a $\{b_1, \ldots, b_j\}$ halmazok szigorúan elválaszthatók egy hipersíkkal.

Az állítás megfordítása magától értetődik. □

Végül lássuk az 1.2.8. Carathéodory tétel egy érdekes változatát.

2.3.11. Tétel (Steinitz, 1913). *Tetszőleges $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz esetén, ha $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} S$, akkor létezik olyan, legfeljebb $2n$ elemű $T \subseteq S$ ponthalmaz, hogy $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} T$.*

Bizonyítás. Ha $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} S$, akkor nyilvánvaló módon x belső pontja egy olyan szimplexnek, amelynek csúcsai hozzátartoznak $\operatorname{conv} S$-hez. Alkalmazva minden egyes csúcsra az 1.2.8. Carathéodory tételt kapjuk, hogy létezik olyan, legfeljebb $(n+1)^2$ elemű $S' \subseteq S$ ponthalmaz, amelyre $x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} S'$. Ezek után válasszunk egy x-re illeszkedő, ám S' bármely $n-1$ pontja által kifeszített affin alteret legfeljebb az x pontban metsző G egyenest. Ez lehetséges, hiszen a fenti, legfeljebb $(n-2)$-dimenziós affin altereket az x középpontú egységgömbre radiálisan vetítve, a vetületek uniója nem az egész gömbfelszín lesz. Legyenek x_1 és x_2 a $G \cap \operatorname{conv} S'$ szakasz végpontjai. Most a 2.3.2. Állítás szerint létezik $\operatorname{conv} S'$-nek x_1-ben és x_2-ben támaszhipersíkja. Jelölje ezeket rendre H_1, illetve H_2. Világos, hogy $i=1$ és $i=2$ esetén is $x_i \in H_i \cap \operatorname{conv} S'$, így ismét az 1.2.8. Carathéodory tétel, valamint a G

egyenes megválasztása miatt x_i kifejezhető $S' \cap H_i$ valamely n pontjának, mondjuk a $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ pontok konvex kombinációjaként, de nem fejezhető ki n-nél kevesebb pont még affin kombinációjaként sem. Következésképpen $x_1 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \{v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}\}$ és $x_2 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \{v_1^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}$, továbbá mivel $x \in \operatorname{relint} \overline{x_1 x_2}$, ennélfogva

$$x \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \{v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}.$$

Ám $\dim\{v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\} = n$, így esetünkben

$$x \in \operatorname{int} \operatorname{conv} \{v_1^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)}\}.$$

is fennáll. $\square$

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel éles abban az értelemben, hogy ha például $S = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$, ahol $\{e_1, \ldots, e_n\}$ szokásos módon $\mathbb{E}^n$ standard bázisa, akkor S bármely T valódi részhalmazára $o \notin \operatorname{int} \operatorname{conv} T$, bár $o \in \operatorname{int} \operatorname{conv} S$ nyilván fennáll.

2.4. Izometriák

Az izometriák tanulmányozása nem tartozik szorosan a jegyzet anyagához, csak azért érintjük röviden, mert szoros kapcsolatban állnak a hipersíkokkal (pontosabban a hipersíkokra vonatkozó tükrözésekkel).

2.4.1. Definíció. *Egy $\mathcal{I} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ leképezést izometriának nevezünk, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{E}^n$ esetén $d(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) = d(x, y)$.*

2.4.2. Definíció. *Egy $\mathcal{A} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ lineáris leképezést ortogonális transzformációnak nevezünk, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{E}^n$ esetén $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.*

2.4.3. Definíció. *Egy $\mathcal{T} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ leképezést eltolásnak nevezünk, ha létezik olyan $t \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{E}^n$ esetén $\mathcal{T}(x) = x + t$.*

2.4.4. Állítás. *Minden ortogonális transzformáció izometria.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{A}$ ortogonális transzformáció, akkor minden $x, y \in \mathbb{E}^n$ esetén

$$\begin{aligned} d(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) &= \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| = (\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle - 2\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle + \langle \mathcal{A}y, \mathcal{A}y \rangle)^{1/2} \\ &= (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)^{1/2} = \|x - y\| = d(x, y). \end{aligned}$$ $\square$

2.4.5. Állítás. *Minden eltolás izometria.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{T}$ eltolás, akkor létezik olyan $t \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{E}^n$ esetén $\mathcal{T}(x) = x + t$. Így bármely $x, y \in \mathbb{E}^n$ pontokra

$$d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| = \|(x+t) - (y+t)\| = \|x - y\| = d(x, y). \quad \square$$

Ezek után lássuk az izometriák alaptételét.

2.4.6. Tétel. *Legyenek $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_0, b_1, \dots, b_n\} \subseteq \mathbb{E}^n$ affin független pontrendszerek, továbbá tegyük fel, hogy minden $0 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$. Ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{I} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ izometria létezik, amelyre $\mathcal{I}(a_i) = b_i$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy létezik a feltételeknek megfelelő izometria. Tekintsük azt az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációt, amely az $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ bázist a $\{b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0\}$ bázisba viszi. Ekkor

$$\mathcal{A}a_i + (-\mathcal{A}a_0 + b_0) = b_i$$

minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Így a 2.4.4. és 2.4.5. Állításokkal összhangban elég belátni, hogy $\mathcal{A}$ ortogonális transzformáció. Mivel

$$\begin{aligned}
d(a_i, a_j)^2 &= \|a_i - a_j\|^2 \\
&= \langle a_i - a_j, a_i - a_j \rangle \\
&= \langle (a_i - a_0) - (a_j - a_0), (a_i - a_0) - (a_j - a_0) \rangle \\
&= \|a_i - a_0\|^2 - 2\langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle + \|a_j - a_0\|^2, \\
d(b_i, b_j)^2 &= \|b_i - b_j\|^2 = \\
&= \langle b_i - b_j, b_i - b_j \rangle \\
&= \langle (b_i - b_0) - (b_j - b_0), (b_i - b_0) - (b_j - b_0) \rangle \\
&= \|b_i - b_0\|^2 - 2\langle b_i - b_0, b_j - b_0 \rangle + \|b_j - b_0\|^2,
\end{aligned}$$

ennélfogva

$$\langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle = \langle b_i - b_0, b_j - b_0 \rangle = \langle \mathcal{A}(a_i - a_0), \mathcal{A}(a_j - a_0) \rangle.$$

Most legyenek

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0) \quad \text{és} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (a_j - a_0)$$

tetszőleges vektorok. Ekkor

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(a_i - a_0), \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathcal{A}(a_j - a_0)\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\mu_j \langle \mathcal{A}(a_i - a_0), \mathcal{A}(a_j - a_0)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\mu_j \langle a_i - a_0, a_j - a_0\rangle \\
&= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_0), \sum_{j=1}^{n} \mu_j (a_j - a_0)\Big\rangle \\
&= \langle x, y\rangle,
\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

Az egyértelműség igazolásához legyenek $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ olyan izometriák, amelyekre $\mathcal{I}(a_i) = \mathcal{J}(a_i) = b_i$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Ekkor a $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}$ izometria az $a_0, a_1, \dots, a_n$ pontokat fixen hagyja. Tekintsük a

$$\mathcal{T} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n,\ x \mapsto x - a_0$$

eltolást, és legyen $\mathcal{T}(a_i) = c_i$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Világos módon $c_0 = o$, és $\{c_1, \dots, c_n\}$ az n-dimenziós tér egy bázisa. Tekintsük továbbá az $\mathcal{M} = \mathcal{T}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{T}^{-1}$ izometriát. Egyszerűen adódik, hogy $\mathcal{M}(c_i) = c_i$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén, így $d(x, c_i) = d(\mathcal{M}(x), \mathcal{M}(c_i)) = d(\mathcal{M}(x), c_i)$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ és $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Innen viszont $d(x, c_0) = \|x\|$ és $d(\mathcal{M}(x), c_0) = \|\mathcal{M}(x)\|$ felhasználásával következik, hogy $\|\mathcal{M}(x)\| = \|x\|$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ esetén. Másrészt

$$\begin{aligned}
d(x, c_i)^2 &= \|x - c_i\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, c_i\rangle + \|c_i\|^2, \\
d(\mathcal{M}(x), c_i)^2 &= \|\mathcal{M}(x) - c_i\|^2 = \|\mathcal{M}(x)\|^2 - 2\langle \mathcal{M}(x), c_i\rangle + \|c_i\|^2,
\end{aligned}$$

ennélfogva $\langle x, c_i\rangle = \langle \mathcal{M}(x), c_i\rangle$ minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén. De $\{c_1, \dots, c_n\}$ bázis, így tetszőleges $y \in \mathbb{E}^n$ esetén $\langle x, y\rangle = \langle \mathcal{M}(x), y\rangle$, azaz $\langle \mathcal{M}(x) - x, y\rangle = 0$. Ám ez csak akkor lehetséges, ha $\mathcal{M}$ identitás, amiből $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ adódik. □

A bizonyításból az is kiderül, hogy az ortogonális transzformációk valamint az eltolások az izometriák úgymond építőkövei.

2.4.7. Következmény. *Minden izometria előáll egy ortogonális transzformáció és egy eltolás egymásutánjaként.*

Bevezetjük a hipersíkra való tükrözés fogalmát, majd megvizsgáljuk milyen kapcsolat van a tükrözések és az izometriák között.

2.4.8. Definíció. *Egy az x_0 ponton átmenő, u egységnyi normálvektorú H hipersíkra való $\mathcal{R}_H$ tükrözés legyen a következő transzformáció:*

$$\mathcal{R}_H : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \ x \mapsto x - 2\langle x - x_0, u\rangle u.$$

A definícióból azonnal adódik, hogy minden hipersíkra való tükrözés izometria.

2.4.9. Tétel. *Ha egy $\mathcal{I} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ izometria egy $(n-r)$-dimenziós affin alteret pontonként fixen hagy, akkor $\mathcal{I}$ előáll legfeljebb r hipersíkra való tükrözés egymásutánjaként, ahol $-1 \leqslant n - r \leqslant n$.*

Bizonyítás. Az állítást r szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $r = 0$ eset magától értetődik. Ezért legyen $1 \leqslant r \leqslant n+1$, és tegyük fel, hogy $\mathcal{I}$ fixen hagy egy $(n-r)$-dimenziós F affin alteret. Legyen továbbá $\{a_0, \dots, a_{n-r}\} \subseteq F$ affin független pontrendszer. Világos, hogy $\{a_0, \dots, a_{n-r}\}$ kiegészíthető az n-dimenziós tér egy $\{a_0, \dots, a_{n-r}, a_{n-r+1}, \dots, a_n\}$ affin független pontrendszerévé. Ezek után tekintsük az $\overline{a_{n-r+1}\mathcal{I}(a_{n-r+1})}$ szakasz H felezőmerőleges hipersíkját, valamint az $\mathcal{R}_H\mathcal{I}$ izometriát. Mivel

$$d(a_i, a_{n-r+1}) = d(\mathcal{I}(a_i), \mathcal{I}(a_{n-r+1})) = d(a_i, \mathcal{I}(a_{n-r+1}))$$

minden $0 \leqslant i \leqslant n - r$ esetén, ezért $\{a_0, \dots, a_{n-r}\} \subseteq H$. Következésképpen $\mathcal{R}_H\mathcal{I}$ fixen hagyja az $a_0, \dots, a_{n-r}, a_{n-r+1}$ pontokat, és így a 2.4.6. Tétel szerint az egész $(n-r+1)$-dimenziós $\operatorname{aff}\{a_0, \dots, a_{n-r}, a_{n-r+1}\}$ affin alteret is. Most alkalmazva az indukciós hipotézist, $\mathcal{R}_H\mathcal{I}$ előáll legfeljebb $r-1$ hipersíkra való tükrözés egymásutánjaként. Ennélfogva $\mathcal{I} = \mathcal{R}_H(\mathcal{R}_H\mathcal{I})$ előáll legfeljebb r hipersíkra való tükrözés egymásutánjaként. $\square$

2.4.10. Következmény. *Minden $\mathcal{I} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ izometria előáll legfeljebb $n+1$ hipersíkra való tükrözés egymásutánjaként.*

Feladatok

2.1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az n-dimenziós teret k általános helyzetű hipersík pontosan $\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i}$ tartományra bontja.* [Útmutatás: Használjunk n-re és k-ra szimultán teljes indukciót.]

2.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az n-dimenziós térben k általános helyzetű pont pontosan $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{k}{n-2i}$ különböző módon vágható ketté egy hipersíkkal.* [Útmutatás: Mutassuk meg, hogy az n-dimenziós projektív teret k általános helyzetű hipersík pontosan $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{k}{n-2i}$ tartományra bontja. A feladat ennek az állításnak a duálisa.]

2.3. Feladat. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ általános helyzetű pontok egy k elemű halmaza. Mutassuk meg, hogy ekkor n-dimenziós gömbökkel pontosan $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{k}{i}$ különböző részhalmaz vágható ki S-ből. Formálisabban $|\{S \cap B \mid B \text{ egy gömb}\}| = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{k}{i}$.* [Útmutatás: Tekintsük a $p_i \in S$ pontoknak az $(n+1)$-dimenziós $\mathcal{P} = \{(p, r) \in \mathbb{E}^n \times \mathbb{R} \mid \|p\|^2 = r\}$ forgásparaboloidra eső $p_i' = (p_i, \|p_i\|^2)$ merőleges vetületeit. A p_i' pontok, kiegészítve az r-tengely egy elég messze lévő pontjával, az előző feladat szerint $\sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{k+1}{n+1-2i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{k}{i}$ különböző módon vághatók ketté $\mathbb{E}^{n+1}$ hipersíkjaival. Ezen hipersíkoknak a paraboloiddal vett metszeteit merőlegesen vetítve $\mathbb{E}^n$-re lényegében a kívánt gömbrendszert kapjuk.]

2.4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha az $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, zárt, konvex, n-dimenziós halmazra $A \neq \operatorname{conv}(\operatorname{bd} A)$, akkor vagy $A = \mathbb{E}^n$ vagy pedig A egy zárt féltér.*

2.5. Feladat. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező halmazok. Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok akkor és csak akkor választhatók el egy hipersíkkal, ha $A \cup B$ bármely, legfeljebb $2n+2$ pontot tartalmazó T részhalmazára $T \cap A$ és $T \cap B$ is elválasztható egy hipersíkkal.* [Útmutatás: Használjuk fel a 2.2.9. és 1.2.8. Tételeket.]

2.6. Feladat. *Legyenek $P, Q \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmazok. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik olyan zárt, konvex S halmaz, hogy $P \subseteq S$ és $Q \cap \operatorname{int} S = \emptyset$, ha $P \cup Q$ bármely, legfeljebb $2n+1$ pontból álló T részhalmazához létezik olyan zárt, konvex S_T halmaz, hogy $P \cap T \subseteq S_T$ és $(Q \cap T) \cap \operatorname{int} S_T = \emptyset$.* [Útmutatás: Használjuk fel a 2.3.11. Tételt.]

2.7. Feladat. *Legyenek $P, Q \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazok. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik olyan zárt, konvex halmaz, amely tartalmazza P-t és diszjunkt Q-tól, ha $P \cup Q$ bármely, legfeljebb $n+2$ pontból álló T részhalmazához létezik olyan zárt, konvex halmaz, amely tartalmazza $T \cap P$-t és diszjunkt $T \cap Q$-tól.* [Útmutatás: Használjuk fel az 1.2.8. Tételt.]

2.8. Feladat. *Legyenek $P, Q \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazok. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik olyan zárt gömb, amely tartalmazza P-t* *és diszjunkt Q-tól, ha $P \cup Q$ bármely, legfeljebb $n+3$ pontból álló T részhalmazához létezik olyan zárt gömb, amely tartalmazza $T \cap P$-t és diszjunkt $T \cap Q$-tól.* [Útmutatás: Vetítsük sztereografikusan a P és Q halmazokat egy olyan $(n+1)$-dimenziós gömbre, amely érinti $\mathbb{E}^n$-et, majd használjuk a 2.3.10. Tételt.]

2.9. Feladat* (Bárány-Katchalski-Pach, 1982). *Bizonyítsuk be, hogy ha egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz konvex burka tartalmaz egy origó középpontú, egységnyi sugarú gömböt, akkor S-nek létezik olyan, legfeljebb $2n$ pontból álló részhalmaza, melynek konvex burka tartalmaz egy origó középpontú, n^{-2n} sugarú gömböt.*

2.10. Feladat. *Egy $\mathcal{H} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ leképezést hasonlósági transzformációnak nevezünk, ha létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{E}^n$ esetén $d(\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)) = \lambda\, d(x, y)$. Most legyenek*

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_n\},\ \{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \mathbb{E}^n$$

affin független pontrendszerek, továbbá tegyük fel, hogy minden $0 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén $d(b_i, b_j) = \lambda\, d(a_i, a_j)$ valamely rögzített $\lambda > 0$ valós számra. Mutassuk meg, hogy ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{H} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ hasonlósági transzformáció létezik, amelyre $\mathcal{H}(a_i) = b_i$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén.

2.11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy hasonlósági transzformáció nem izometria, akkor pontosan egy fixpontja van.* [Útmutatás: Ez a kontrakciókra vonatkozó Banach-féle fixpont tétel egy speciális esete.]

3. fejezet

Konvex politópok

3.1. Konvex politópok és poliédrikus halmazok

Ebben a fejezetben a konvex sokszögek, illetve a konvex poliéderek magasabb dimenziós megfelelőivel foglalkozunk. Ezek az alakzatok már több, mint kétezer évvel ezelőtt a régi görögök érdeklődését is felkeltették. Aztán a múlt évszázadban, főleg a lineáris programozás és a játékelmélet kialakulásának köszönhetően ismét előtérbe került a konvex politópok vizsgálata. Először az alapvető fogalmakat vezetjük be, majd igazoljuk a konvex politópok "alaptételét".

3.1.1. Definíció. *Véges sok pont konvex burkát konvex politópnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *ponthalmaz a* P *konvex politóp egy minimális reprezentációja, ha*

(1) $P = \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$,

(2) $x_i \notin \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$ *tetszőleges* $1 \leqslant i \leqslant k$ *esetén.*

3.1.2. Definíció. *Legyen* $S \subseteq \mathbb{E}^n$ *nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor egy* $F \subseteq S$ *halmazt az* S *egy lapjának nevezünk, ha*

(1) *vagy* $F = \emptyset$,

(2) *vagy* $F = S$,

(3) *vagy pedig létezik olyan* H *támaszhipersíkja* S*-nek, hogy* $F = S \cap H$.

Az első két esetben nem valódi, míg a harmadikban valódi lapról beszélünk. Ha az F *valódi lap dimenziója* k, *akkor* F*-et* k*-lapnak nevezzük. A* 0*-dimenziós lapokat csúcsoknak is mondjuk. A csúcsok halmazát jelölje* $\mathrm{vert}\, S$.

3.1.3. Állítás. *Legyen $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ a P konvex politóp egy minimális reprezentációja. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) $x \in M$.

(2) $x \in \operatorname{vert} P$.

(3) $x \in \operatorname{ext} P$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2). Legyen $x \in M$, és tekintsük a $Q = \operatorname{conv}(M \setminus \{x\})$ politópot. Ekkor definíció szerint $x \notin Q$, így mivel Q kompakt, alkalmazva az 2.2.10. Állítást létezik olyan H' hipersík, amelyik szigorúan elválasztja x-et Q-tól. Most tekintsük azt a H'-vel párhuzamos H hipersíkot, amely átmegy x-en. Világos, hogy Q teljes egészében a H által határolt valamelyik, mondjuk H^+ zárt féltérben helyezkedik el, ezért $P \subseteq H^+$. Továbbá nyilván x a P egyetlen olyan pontja, amely illeszkedik H-ra, így $H \cap P = \{x\}$, azaz x a P politóp csúcsa.

(2) $\Rightarrow$ (3). Egy kompakt konvex halmaz csúcsa mindig extremális pont, amiből következik az állítás.

(3) $\Rightarrow$ (1). Világos, hogy P bármely extremális pontja szükségképpen hozzátartozik M-hez, ellenkező esetben az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint benne lenne valamelyik, az M bizonyos pontjai által meghatározott szimplex relatív belsejében. $\square$

3.1.4. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{E}^n$ tetszőleges konvex politóp. Ekkor P minden valódi lapja szintén konvex politóp. Továbbá P-nek csak véges sok különböző lapja van.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_1, \ldots, x_k\}$ a P konvex politóp minimális reprezentációja, és tekintsük a P egy a $H = [f : \alpha]$ támaszhipersík által meghatározott F valódi lapját. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$f(x_i) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \alpha + \varepsilon_i, & \text{ha } r+1 \leqslant i \leqslant k, \end{cases}$$

ahol $\varepsilon_i > 0$ minden $r+1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Most legyen $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, a P politóp tetszőleges pontja. Ekkor

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i(\alpha + \varepsilon_i) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i \varepsilon_i = \alpha + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i \varepsilon_i.$$

Világos, hogy x akkor és csak akkor illeszkedik H-ra, ha $f(x) = \alpha$, azaz pontosan akkor, ha

$$\sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i \varepsilon_i = 0.$$

De minden $\varepsilon_i > 0$ és minden $\lambda_i \geqslant 0$, így ez akkor és csak akkor lehetséges, ha $\lambda_i = 0$ minden $r + 1 \leqslant i \leqslant k$ esetén, azaz ha $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$. Következésképpen $H \cap P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$, vagyis $H \cap P$ konvex politóp.

Végül, mivel az $\{x_1, \dots, x_k\}$ halmaznak csak véges sok részhalmaza van, és P minden lapja egyértelműen megfeleltethető egy ilyen részhalmaznak, ezért P-nek csak véges sok különböző lapja lehet. $\square$

A következő állítás bármely nem üres, kompakt, konvex halmazra érvényes.

3.1.5. Állítás. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz és $\{F_1, \dots, F_m\}$ az S lapjainak valamely családja, akkor $F_1 \cap \dots \cap F_m$ szintén lapja S-nek.*

Bizonyítás. Jelölje F az $F_1, \dots, F_m$ lapok metszetét. Ha $F = \emptyset$, akkor az állítás definíció szerint igaz. Ezért legyen $F \neq \emptyset$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in F$, továbbá $F_1, \dots, F_m$ valódi lapjai S-nek. Ekkor minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén az F_i laphoz létezik egy olyan $H_i = [f_i : 0]$ támaszhipersík, hogy $f_i(S) \geqslant 0$, és $S \cap H_i = F_i$. Most definiáljunk egy új $f = f_1 + \dots + f_m$ lineáris függvényt, és legyen $H = [f : 0]$.

Állítjuk, hogy $F = H \cap S$. Valóban, ha $x \in F$, akkor minden $f_i(x) = 0$, és így $f(x) = 0$, azaz $x \in H \cap S$. Másrészt, ha $x \in S \setminus F$, akkor legalább egy esetben $f_i(x) > 0$, és így $f(x) > 0$, azaz $x \notin H \cap S$. Következésképpen $F = H \cap S$.

Végül, mivel $o \in H \cap S$ és $f(S) \geqslant 0$, ezért H támaszhipersíkja S-nek, vagyis F egy lapja S-nek. $\square$

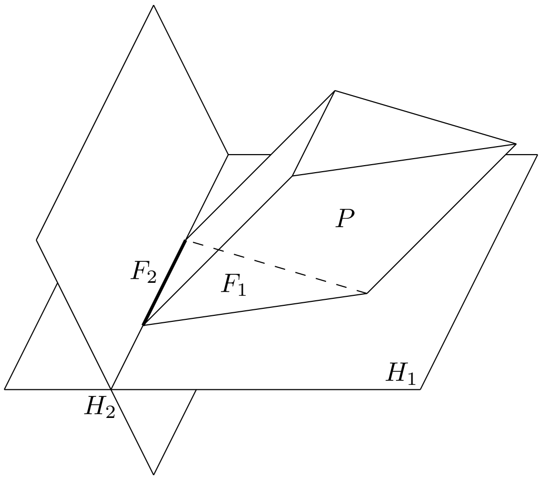
Az alábbi két állítás segítségünkre lehet, ha egy konvex politóp adott dimenziós lapjainak számát szeretnénk meghatározni.

3.1.6. Állítás. *Legyenek S_1 és S_2 nem üres, kompakt, konvex halmazok, és tegyük fel, hogy $S_2 \subseteq S_1$. Ezen feltételek mellett ha F az S_1 egy lapja, akkor $F \cap S_2$ az S_2 egy lapja.*

Bizonyítás. Ha F nem valódi lapja S_1-nek, akkor az állítás triviális. Ellenkező esetben tekintsük az S_1 egy olyan H támaszhipersíkját, amelyre $H \cap S_1 = F$. Mivel $S_2 \subseteq S_1$, ezért $F \cap S_2 = H \cap S_2$. Most $H \cap S_2$ vagy üres halmaz, vagy pedig H az S_2 egy támaszhipersíkja. Mindkét esetben $F \cap S_2$ az S_2 egy lapja nyilvánvaló módon. $\square$

3.1.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy F_1 egy valódi lapja a P konvex politópnak, továbbá F_2 egy valódi lapja F_1-nek. Ekkor F_2 szintén egy valódi lapja P-nek.*

Bizonyítás. Legyen H_1 olyan támaszhipersíkja P-nek, hogy $H_1 \cap P = F_1$, továbbá legyen H_2 olyan támaszhipersíkja F_1-nek H_1-ben, hogy $H_2 \cap F_1 = F_2$. Most $\dim H_2 = \dim P - 2$. Így, figyelembe véve, hogy P-nek csak véges sok olyan csúcsa van, amely nincs F_2-n, H_1 elforgatható H_2 körül úgy, hogy a kapott hipersík P-t pontosan F_2-ben messe (ld. 3.1.1. ábra). □



3.1.1. ábra.

A 2.3. fejezetben láttuk, hogy minden kompakt, konvex halmaz előáll alkalmas zárt félterek metszeteként. Meg fogjuk mutatni, hogy konvex politópok esetén véges sok ilyen zárt féltér is elég. Sőt a megfordítás is igaz, ami elvezet a konvex politópok egy ekvivalens definíciójához. Mindenekelőtt szükségünk lesz a következő fogalomra.

3.1.8. Definíció. *Véges számú zárt féltér metszetét poliédrikus halmaznak nevezzük.*

3.1.9. Állítás. *Minden $P \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex politóp korlátos poliédrikus halmaz.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy P dimenziója n. Legyen $\{x_1, \ldots, x_k\}$ a P minimális reprezentációja. Legyenek továbbá $F_1, \ldots, F_m$ a P politóp $(n-1)$-lapjai, és $H_1, \ldots, H_m$, illetve $H_1^+, \ldots, H_m^+$ a megfelelő támaszhipersíkok valamint zárt félterek, azaz $F_i = H_i \cap P$ és $P \subseteq H_i^+$ minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén. Nyilván elég megmutatni, hogy $P = H_1^+ \cap \cdots \cap H_m^+$.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $x \in H_1^+ \cap \cdots \cap H_m^+$ pont, amelyik diszjunkt P-től. Definiáljuk most a

$$D = \bigcup_C \operatorname{aff}(\{x\} \cup C)$$

halmazt, ahol C végigfut az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ legfeljebb $n-1$ elemű részhalmazain. Ekkor D véges sok legfeljebb $(n-1)$-dimenziós affin altér uniója. Mivel $\dim P = n$, így szükségképpen létezik olyan $y \in \operatorname{int} P$ pont, amely nem tartozik hozzá D-hez. Ám $x \notin P$, ezért létezik olyan $z \in \operatorname{relint} \overline{xy}$ pont, hogy $z \in \operatorname{bd} P$. Állítjuk, hogy z rajta van P valamely $(n-1)$-lapján, de nincs rajta egyetlen alacsonyabb dimenziós lapján sem. Valóban, ha z hozzátartozna egy j-laphoz valamely $0 \leqslant j \leqslant n-2$ esetén, akkor az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint z benne lenne $\{x_1, \ldots, x_k\}$ valamely legfeljebb $n-1$ elemű részhalmazának konvex burkában, azaz z hozzátartozna D-hez. Ebből pedig következne, hogy $y \in xz$ szintén hozzátartozna D-hez, ami nem lehetséges.

Így z illeszkedik a P valamely $(n-1)$-lapjára, mondjuk F_j-re. Ekkor $z \in H_j$, és mivel $y \in \operatorname{int} P \subseteq H_j^+$, x nem tartozhat hozzá H_j^+-hoz, ellentmondás. Kaptuk tehát, hogy $H_1^+ \cap \cdots \cap H_m^+ \subseteq P$.

A másik irányú tartalmazás pedig egyszerűen abból adódik, hogy $P \subseteq H_i^+$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. □

3.1.10. Állítás. *Minden $P \subseteq \mathbb{E}^n$ korlátos poliédrikus halmaz konvex politóp.*

Bizonyítás. Mivel minden korlátos poliédrikus halmaz kompakt, ezért a 2.3.5. Tétel szerint elég megmutatni, hogy P extremális pontjainak száma véges. Ezt az n dimenzió szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor P vagy egyetlen pont, vagy pedig egy zárt szakasz, amelyekre nyilván igaz az állítás. Ezek után tekintsünk egy n-dimenziós P korlátos poliédrikus halmazt, és legyenek $H_1, \ldots, H_m$ azok a hipersíkok, amelyek által határolt zárt félterek metszete P. Ha $x \in \operatorname{ext} P$, akkor nyilván $x \in \operatorname{bd} P$. Így létezik olyan H_i hipersík, hogy $x \in H_i$. Világos, hogy P minden olyan extremális pontja, amely H_i-ben van szükségképpen extremális pontja $P \cap H_i$-nek is. Ám az indukciós feltevés szerint $P \cap H_i$ extremális pontjainak száma véges, továbbá a hipersíkok száma is véges, ezért $\operatorname{ext} P$ is véges halmaz. □

3.2. Speciális konvex politópok

Ebben a fejezetben megismerkedünk néhány nevezetes konvex politóppal. Ezek természetes általánosításai lesznek a jól ismert 3-dimenziós konvex poliédereknek, a tetraédernek, a kockának, az oktaédernek stb.

A legegyszerűbb politóp az 1.2. fejezetben már megismert szimplex. Egy n-dimenziós S^n szimplex csúcsainak halmaza affin független, így azok bármely részhalmaza is affin független. Ebből következik, hogy S^n bármely lapja szintén egy (alacsonyabb dimenziós) szimplex. Másrészt S^n bármely n csúcsa S^n egy támaszhipersíkját feszíti ki, amely természetesen egy $(n-1)$-dimenziós lapban metszi S^n-t. A 3.1.7. Állítás szerint ennek az $(n-1)$-dimenziós lapnak az összes lapja lapja lesz S^n-nek is. Innen teljes indukcióval azonnal adódik, hogy S^n tetszőleges $k+1$ csúcsa S^n egy k-dimenziós lapját határozza meg. Ennélfogva igaz a következő.

3.2.1. Állítás. *Egy n-dimenziós S^n szimplex k-dimenziós lapjainak száma $\binom{n+1}{k+1}$ minden $0 \leqslant k \leqslant n-1$ esetén.*

Egy S^n szimplex úgy is felfogható, mint egy S^{n-1} szimplex, valamint egy az aff S^{n-1}-re nem illeszkedő pont konvex burka. Ez a konstrukció egyszerűen általánosítható.

3.2.2. Definíció. *Egy $(n-1)$-dimenziós Q politóp valamint egy $x \notin \operatorname{aff} Q$ pont konvex burkát n-dimenziós gúlának nevezzük és P^n-nel jelöljük. A Q politóp a gúla alapja, az x pont pedig a gúla csúcsa.*

3.2.3. Állítás. *Egy n-dimenziós P^n gúla, melynek alapja az $(n-1)$-dimenziós Q politóp, csúcsa pedig az x pont, k-dimenziós lapjainak $f_k(P^n)$ száma*

$$\begin{aligned} f_0(P^n) &= f_0(Q) + 1, \\ f_k(P^n) &= f_k(Q) + f_{k-1}(Q) \text{ minden } 1 \leqslant k \leqslant n-2 \text{ esetén}, \\ f_{n-1}(P^n) &= 1 + f_{n-2}(Q). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen F a P^n gúla egy k-lapja, H pedig egy az F-et kimetsző támaszhipersík. Mivel $\operatorname{vert} F \subseteq \operatorname{vert} P^n = \{x\} \cup \operatorname{vert} Q$, most két eset lehetséges:

(1) $x \notin \operatorname{vert} F$. Ekkor F a 3.1.6. Állítás szerint a Q egy k-lapja.

(2) $x \in \operatorname{vert} F$. Ekkor pedig az F lap x-től különböző csúcsai a Q politóp $(k-1)$-dimenziós $H \cap Q$ lapjának csúcsaival egyeznek meg. Így F most egy $F \cap Q$ alapú, x csúcsú, k-dimenziós gúla.

Másrészt a 3.1.7. Állítás szerint Q minden lapja (beleszámítva magát Q-t is) a P^n gúla egy valódi lapja lesz. Továbbá Q bármely valódi $(k-1)$-lapjának és az x pontnak a konvex burka a P^n gúla egy valódi k-lapja. Valóban, ha G a Q egy valódi $(k-1)$-lapja, akkor $\operatorname{aff} Q$-ban van olyan H_0 támaszhipersíkja Q-nak, hogy $H_0 \cap Q = G$ (természetesen $\dim H_0 = n-2$). De ekkor $H =$

$\operatorname{aff}(H_0 \cup \{x\})$ egy támaszhipersíkja P^n-nek és $H \cap P^n = \operatorname{conv}(G \cup \{x\})$. Ezen észrevételekből az állítás már közvetlenül adódik. $\square$

Ezek után az oktaéder magasabb dimenziós megfelelőjével, valamint ennek egy általánosításával foglalkozunk.

3.2.4. Definíció. *Legyenek $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{E}^n$ lineárisan független vektorok. Ekkor az $X^n = \operatorname{conv}\{\pm x_1 \ldots, \pm x_n\}$ politópot n-dimenziós keresztpolitópnak nevezzük.*

3.2.5. Definíció. *Legyen Q egy tetszőleges, $(n-1)$-dimenziós politóp, és legyen $\overline{xy}$ olyan zárt szakasz, amelyre $\operatorname{relint} Q \cap \operatorname{relint} \overline{xy}$ egyetlen pontból áll. Ekkor a $P = \operatorname{conv}(\{x, y\} \cup Q)$ politópot n-dimenziós kettős gúlának nevezzük. A Q politóp a kettős gúla alapja, az x és y pontok pedig a kettős gúla csúcsai.*

A 3.2.3. Állítás bizonyításához teljesen hasonló módon látható, hogy a fent definiált P kettős gúla valódi lapjai pontosan a következők:

(1) Q valódi lapjai,

(2) olyan x vagy y csúcsú gúlák, amelyek alapja Q egy valódi lapja,

(3) x és y.

Innen pedig egyszerűen adódnak az alábbiak.

3.2.6. Állítás. *Egy n-dimenziós P kettős gúla, melynek alapja az $(n-1)$-dimenziós Q politóp, k-dimenziós lapjainak $f_k(P)$ száma*

$$\begin{aligned} f_0(P) &= f_0(Q) + 2, \\ f_k(P) &= f_k(Q) + 2f_{k-1}(Q) \textit{ minden } 1 \leqslant k \leqslant n-2 \textit{ esetén,} \\ f_{n-1}(P) &= 2f_{n-2}(Q). \end{aligned}$$

3.2.7. Következmény. *Egy n-dimenziós X^n keresztpolitóp k-dimenziós lapjainak száma $2^{k+1}\binom{n}{k+1}$ minden $0 \leqslant k \leqslant n-1$ esetén.*

Végül a parallelepipedon magasabb dimenziós megfelelőjével foglalkozunk.

3.2.8. Definíció. *Legyenek $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{E}^n$ lineárisan független vektorok, és tekintsük az $I_j = \overline{ox_j}$ szakaszokat minden $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén. Ekkor a*

$$C^n = I_1 + \cdots + I_n = \{y_1 + \cdots + y_n \mid y_1 \in I_1, \ldots, y_n \in I_n\}$$

vektori összeget n-dimenziós parallelotópnak (vagy parallelepipedonnak) nevezzük. Ha az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok páronként merőlegesek, akkor n-dimenziós merőleges parallelotópról, ha pedig ezen kívül még hosszaik is megegyeznek, akkor n-dimenziós kockáról beszélünk.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy $C^n = C^{n-1} + I_n$. Mivel minden egyes ilyen lépésnél a csúcsok száma megkétszereződik, ezért C^n-nek összesen 2^n csúcsa van. Másrészt $C^n = \operatorname{conv}(C^{n-1} \cup (C^{n-1} + x_n))$, így C^n egy valódi k-lapja vagy C^{n-1}, illetve $C^{n-1} + x_n$ egy k-lapja vagy pedig C^{n-1} egy $(k-1)$-lapjának és I_n-nek a vektori összege.

Megfordítva, C^{n-1}, illetve $C^{n-1} + x_n$ bármely lapja (beleértve önmagukat is) lapja C_n-nek, és ugyanez fennáll C^{n-1} bármely lapjának és I_n-nek a vektori összegére is. Ennélfogva $f_k(C^n) = 2f_k(C^{n-1}) + f_{k-1}(C^{n-1})$ minden $1 \leqslant k \leqslant n-1$ esetén. Innen teljes indukcióval kapjuk a következőt.

3.2.9. Állítás. *Egy n-dimenziós C^n parallelotóp k-dimenziós lapjainak száma $2^{n-k}\binom{n}{k}$ minden $0 \leqslant k \leqslant n-1$ esetén.*

Az eddigieknek megfelelően a parallelotóp is általánosítható.

3.2.10. Definíció. *Legyen Q egy tetszőleges, $(n-1)$-dimenziós politóp, és legyen $I = \overline{ox}$ olyan zárt szakasz, amely nem párhuzamos* aff *Q-val. Ekkor a $P = Q + I$ vektori összeget Q alapú hasábnak nevezzük,.*

A parallelotópoknál elmondottakhoz teljesen hasonlóan igazolható a következő.

3.2.11. Állítás. *Egy n-dimenziós, Q alapú P hasáb k-dimenziós lapjainak $f_k(P)$ száma*

$$\begin{aligned} &f_0(P) = 2f_0(Q), \\ &f_k(P) = 2f_k(Q) + f_{k-1}(Q) \text{ minden } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ esetén.} \end{aligned}$$

3.3. Euler-Poincaré formula

Ebben a fejezetben az egyik klasszikus tételen keresztül bepillantunk a konvex politópok kombinatorikus elméletébe. Mivel ez a témakör mind eszköztárában, mind eredményeiben messze túlmutat jegyzetünk keretein, ezért további részletekbe nem is megyünk bele.

3.3.1. Tétel. *Legyen P egy tetszőleges n-dimenziós konvex politóp, és jelölje a P politóp j-dimenziós lapjainak számát $f_j(P)$ minden $0 \leqslant j \leqslant n-1$ esetén. Ekkor*

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f_j(P) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Bizonyítás. Jelölje D azoknak a hipersíkoknak az unióját, amelyek illeszkednek az origóra és merőlegesek P valamely két csúcsát összekötő egyenesre. Mivel az ilyen hipersíkok száma véges, létezik olyan u vektor, amelyik nincs D-ben. Legyen H egy u normálvektorú hipersík. Világos, hogy H bármely H' eltoltjára $|H' \cap \operatorname{vert} P| \leqslant 1$. Másrészt H-nak pontosan $f_0(P)$ olyan eltoltja van, amelyek tartalmazzák P valamely csúcsát, jelölje ezeket sorrendben $H_1, H_3, \ldots, H_{2f_0(P)-1}$. Legyenek továbbá $H_2, H_4, \ldots, H_{2f_0(P)-2}$ olyan H-val párhuzamos hipersíkok, amelyek sorban a fenti hipersíkok között helyezkednek el. Ekkor

$$|H_i \cap \operatorname{vert} P| = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ezen megjegyzés után a tételt a dimenzió szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván $n = 1, 2$ esetén igaz az állítás. Ezért legyen $n \geqslant 3$, és tekintsünk egy n-dimenziós P politópot. Tekintsük továbbá a $P_i = P \cap H_i$ metszethalmazt minden $1 \leqslant i \leqslant 2f_0(P) - 1$ esetén. Ekkor az $i = 1$ és $i = 2f_0(P) - 1$ esetektől eltekintve, P_i egy $(n-1)$-dimenziós politóp. Ha most F^j a P egy j-dimenziós lapja, ahol $1 \leqslant j \leqslant n-1$, akkor legyen

$$\varrho(F^j, P_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } P_i \cap \operatorname{relint} F^j = \emptyset, \\ 1, & \text{ha } P_i \cap \operatorname{relint} F^j \neq \emptyset. \end{cases}$$

Jelölje m a legkisebb, M pedig a legnagyobb olyan indexet, amelyre

$$P_m \cap F^j \neq \emptyset \quad \text{és} \quad P_M \cap F^j \neq \emptyset.$$

Ekkor m és M szükségképpen páratlan, továbbá

$$P_m \cap \operatorname{relint} F^j = \emptyset \quad \text{és} \quad P_M \cap \operatorname{relint} F^j = \emptyset.$$

Másrészt minden $m < i < M$ esetén

$$(-1)^i \varrho(F^j, P_i) = \begin{cases} -1, & \text{ha } i \text{ páratlan,} \\ 1, & \text{ha } i \text{ páros.} \end{cases}$$

Így mivel a páros indexek száma eggyel nagyobb, mint a páratlanoké,

$$\sum_{i=2}^{2f_0(P)-2} (-1)^i \varrho(F^j, P_i) = 1.$$

Most ha rögzítjük a j dimenziót, akkor

$$\sum_{F^j \; j\text{-lap}} \sum_{i=2}^{2f_0(P)-2} (-1)^i \varrho(F^j, P_i) = f_j(P),$$

amiből

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \sum_{F^j\ j\text{-lap}} \sum_{i=2}^{2f_0(P)-2} (-1)^i \varrho(F^j, P_i) = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j f_j(P). \qquad (*)$$

Ezek után legyen $2 \leqslant i \leqslant 2f_0(P) - 2$, és tekintsük az $(n-1)$-dimenziós P_i politópot. Minden olyan j-dimenziós F^j lapra, amelyre $P_i \cap \operatorname{relint} F^j \neq \emptyset$ teljesül, $P_i \cap F^j$ egy $(j-1)$-dimenziós lapja P_i-nek, sőt fordítva is, P_i minden $(j-1)$-dimenziós lapja ilyen alakú, kivéve ha $j = 1$ és a $(j-1)$-dimenziós lap a P poliéder egy csúcsa. Ennélfogva

$$\sum_{F^j\ j\text{-lap}} \varrho(F^j, P_i) = \begin{cases} f_0(P_i) - 1, & \text{ha } j = 1 \text{ és } i \text{ páratlan,} \\ f_{j-1}(P_i), & \text{különben,} \end{cases}$$

és ezért

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \sum_{F^j\ j\text{-lap}} \varrho(F^j, P_i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j f_{j-1}(P_i), & \text{ha } i \text{ páros,} \\ \displaystyle -(f_0(P_i) - 1) + \sum_{j=2}^{n-1}(-1)^j f_{j-1}(P_i), & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Így az indukciós hipotézis szerint

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \sum_{F^j\ j\text{-lap}} \varrho(F^j, P_i) = \begin{cases} -(1 + (-1)^{n-2}) = -1 + (-1)^{n-1}, & \text{ha } i \text{ páros,} \\ -(1 + (-1)^{n-2}) + 1 = (-1)^{n-1}, & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Következésképpen

$$\sum_{i=2}^{2f_0(P)-2} (-1)^i \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \sum_{F^j\, j\text{-lap}} \varrho(F^j, P_i) = (-1)^{n-1} - (f_0(P) - 1).$$

Ezt összevetve a $(*)$ összefüggéssel adódik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j f_j(P) = (-1)^{n-1} - (f_0(P) - 1),$$

azaz

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j f_j(P) = 1 + (-1)^{n-1}. \qquad \square$$

Az előbb igazolt Euler-Poincaré formula szerint bármely n-dimenziós P konvex politóp $f(P) = (f_0(P), f_1(P), \dots, f_{n-1}(P))$ lapvektora rajta van az

$$x_0 - x_1 + \dots + (-1)^{n-1}x_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

egyenletű hipersíkon. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy a lapvektorok koordinátáira vajon más lineáris összefüggés is érvényes? A következő tétel mutatja, hogy teljes általánosságban erre a kérdésre a válasz nemleges.

3.3.2. Tétel. *Az n-dimenziós P konvex politópok $f(P)$ lapvektorai által kifeszített affin altér éppen az*

$$x_0 - x_1 + \dots + (-1)^{n-1}x_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

egyenletű hipersík.

Bizonyítás. A tételt a dimenzió szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván $n = 1, 2$ esetén igaz az állítás. Ezért legyen $n \geqslant 3$, és tegyük fel, hogy valamely $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ nem mind nulla együtthatókkal minden n-dimenziós P konvex politópra

$$\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j f_j(P) = \beta.$$

Most legyen Q egy tetszőleges, $(n-1)$-dimenziós konvex politóp, és tekintsünk egy Q alapú P_1 gúlát, valamint egy Q alapú P_2 kettős gúlát. Ekkor a 3.2.3. és 3.2.6. Állítások szerint az

$$f(P_1) = (f_0(Q)+1, f_1(Q)+f_0(Q), \dots, f_{n-2}(Q)+f_{n-3}(Q), 1+f_{n-2}(Q)),$$
$$f(P_2) = (f_0(Q)+2, f_1(Q)+2f_0(Q), \dots, f_{n-2}(Q)+2f_{n-3}(Q), 2f_{n-2}(Q))$$

pontok rajta vannak a $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1} = \beta$ egyenletű hipersíkon. A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$\lambda_1 f_0(Q) + \lambda_2 f_1(Q) + \dots + \lambda_{n-1}f_{n-2}(Q) = \lambda_{n-1} - \lambda_0$$

Ez az összefüggés minden $(n-1)$-dimenziós Q politópra fennáll, így az indukciós feltevés szerint a

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1} - \lambda_0)$$

vektor (nem nulla) skalárszorosa az

$$(1, -1, \dots, (-1)^{n-2}, 1 + (-1)^{n-2})$$

vektornak. Ennélfogva $\lambda_j = \lambda_1 (-1)^{j-1}$ minden $1 \leqslant j \leqslant n-1$ esetén, és $\lambda_{n-1} - \lambda_0 = \lambda_1 (1 + (-1)^{n-2})$, ahonnan $\lambda_0 = -\lambda_1$. Továbbá, ha tekintünk egy n-dimenziós P politópot, akkor a 3.3.1. Tétellel összhangban

$$\beta = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j(P) = -\lambda_1 \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f_j(P) = -\lambda_1 (1 + (-1)^{n-1}).$$

Ezért a $\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} = \beta$ és $x_0 - x_1 + \dots + (-1)^{n-1} x_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$ egyenletek egymás skalárszorosai (az első a második $(-\lambda_1)$-szerese). $\square$

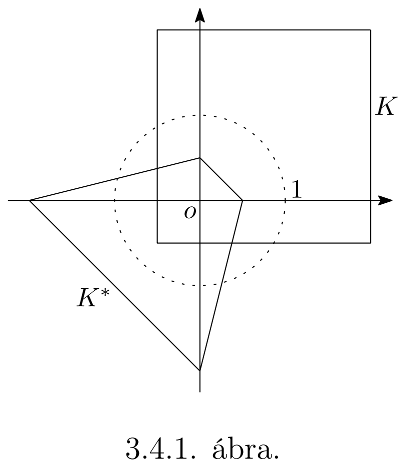
3.4. Polaritás

Mint a matematika legkülönbözőbb területein, a konvex halmazok elméletében is találkozhatunk a dualitás fogalmával. Ennek felhasználásával, többek között, a konvex halmazok határpontjaira vonatkozó eredményekből a támaszhipersíkok tulajdonságaira következtethetünk, és viszont. Jegyzetünkben a dualitást a polaritásra támaszkodva építjük fel.

3.4.1. Definíció. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz. Ekkor a*

$$K^* = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, y \rangle \leqslant 1 \text{ minden } x \in K \text{ esetén}\}$$

halmazt a K poláris halmazának nevezzük (ld. 3.4.1. ábra).



3.4.1. ábra.

A polaritás tulajdonságainak levezetése előtt nézzünk két egyszerű példát.

3.4.2. Állítás. *Ha $K = \{x\}$ és $x \neq o$, akkor K^* az $\{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, y\rangle = 1\}$ hipersík által határolt, az origót tartalmazó zárt féltér. Továbbá ha $K = \{o\}$, akkor $K^* = \mathbb{E}^n$.*

3.4.3. Állítás. *Az origó középpontú, r sugarú $B_r(o)$ zárt gömb poláris halmaza az origó középpontú, $1/r$ sugarú $B_{1/r}(o)$ zárt gömb.*

Bizonyítás. Legyen $y \in B_r(o)^*$, és messe az origóból induló, y-ra illeszkedő félegyenes $B_r(o)$ határát az x' pontban. Ekkor $1 \geqslant \langle x', y\rangle = \|x'\|\,\|y\| = r\,\|y\|$, azaz $\|y\| \leqslant 1/r$, és így $y \in B_{1/r}(o)$.

Másrészt, ha $z \in B_{1/r}(o)$, akkor minden $x \in B_r(o)$ esetén $\langle x, z\rangle \leqslant \|x\|\,\|z\| \leqslant r \cdot \frac{1}{r} = 1$. Ezért $z \in B_r(o)^*$. □

Most pedig következzenek a már említett tulajdonságok.

3.4.4. Állítás. *Legyen $\{K_\alpha \subseteq \mathbb{E}^n \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ nem üres halmazok egy családja. Ekkor*

$$(\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha)^* = \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha^*.$$

Bizonyítás. A poláris halmaz definíciójából

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha)^* &= \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ minden } x \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha \text{ esetén}\}\\ &= \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ minden } x \in K_\alpha \text{ esetén}\}\\ &= \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} K_\alpha^*.\end{aligned}$$ □

3.4.5. Állítás. *Legyen $K \in \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz. Ekkor K^* egy az origót tartalmazó, zárt, konvex halmaz.*

Bizonyítás. A 3.4.2. Állítás szerint egyetlen pont poláris halmaza vagy egy zárt féltér, vagy pedig az egész $\mathbb{E}^n$. Most alkalmazva a 3.4.4. Állítást,

$$K^* = (\bigcup_{x\in K} \{x\})^* = \bigcap_{x\in K} \{x\}^*,$$

azaz K^* zárt, konvex halmazok metszete, és ezért maga is zárt, konvex halmaz. Továbbá $o \in \{x\}^*$ minden $x \in K$ esetén, így $o \in K^*$ is fennáll. □

3.4.6. Állítás. *Legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmazok, és tegyük fel, hogy $K_1 \subseteq K_2$. Ekkor $K_2^* \subseteq K_1^*$.*

Bizonyítás. Ha $K_1 \subseteq K_2$, akkor $K_2 = K_1 \cup (K_2 \setminus K_1)$, és így a 3.4.4. Állítás felhasználásával

$$K_2^* = (K_1 \cup (K_2 \setminus K_1))^* = K_1^* \cap (K_2 \setminus K_1)^* \subseteq K_1^*. \qquad \square$$

3.4.7. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz és λ pozitív valós szám. Ekkor $(\lambda K)^* = (1/\lambda)K^*$.*

Bizonyítás. Ha $x \in (\lambda K)^*$, akkor $\langle \lambda y, x \rangle \leqslant 1$ minden $\lambda y \in \lambda K$ esetén. Azaz $\langle y, \lambda x \rangle \leqslant 1$ minden $y \in K$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy $\lambda x \in K^*$, és így $x \in (1/\lambda)K^*$. A fordított irányú tartalmazás hasonlóan igazolható. $\square$

A fenti tulajdonságok, mint láttuk, $\mathbb{E}^n$ tetszőleges, nem üres halmazaira teljesülnek. A következő két állításban szűkítjük a vizsgált halmazok körét.

3.4.8. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ kompakt, konvex halmaz, és tegyük fel, hogy $o \in \operatorname{int} K$. Ekkor K^* szintén kompakt, konvex halmaz és $o \in \operatorname{int} K^*$.*

Bizonyítás. Mivel $o \in \operatorname{int} K$, ezért létezik olyan r pozitív szám, hogy $B_r(o) \subseteq K$. A 3.4.3. Állítás szerint $B_r(o)^* = B_{1/r}(o)$, így alkalmazva a 3.4.6. Állítást $K^* \subseteq B_{1/r}(o)$, azaz K^* korlátos. Ezt összevetve a 3.4.5. Állítással, K^* kompakt, konvex halmaz.

Hasonlóan, mivel K korlátos, létezik olyan R pozitív szám, hogy $K \subseteq B_R(o)$. Most alkalmazva ismét a 3.4.6. Állítást kapjuk, hogy $B_{1/R}(o) \subseteq K^*$, azaz $o \in \operatorname{int} K^*$. $\square$

3.4.9. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ zárt, konvex halmaz, és tegyük fel, hogy $o \in K$. Ekkor $K^{**} = K$, ahol $K^{**} = (K^*)^*$ definíció szerint.*

Bizonyítás. Ha $x \in K$, akkor $\langle x, y \rangle \leqslant 1$ minden $y \in K^*$ esetén. Ezért $x \in K^{**}$, és így $K \subseteq K^{**}$.

Megfordítva, ha $x_0 \notin K$, akkor a 2.2.10. Állítás szerint létezik olyan

$$H = \{z \in \mathbb{E}^n \mid \langle z, u \rangle = 1\}$$

hipersík, amelyik szigorúan elválasztja x_0-t K-tól. Mivel $o \in K$, ezért minden $x \in K$ esetén $\langle x, u \rangle < 1$, ezzel szemben $\langle x_0, u \rangle > 1$. Az első egyenlőtlenségből következik, hogy $u \in K^*$, és így a másodikból, hogy $x_0 \notin K^{**}$. Ennélfogva $K^{**} \subseteq K$ is szükségképpen fennáll. $\square$

Elérkeztünk a fejezet legfontosabb tételének igazolásához.

3.4.10. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ egy az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz. Rendeljük hozzá K minden (valódi és nem valódi) F lapjához a K^* poláris halmaz*

$$F^\diamond = \{y \in K^* \mid \langle y, x\rangle = 1 \text{ minden } x \in F \text{ esetén}\}$$

részhalmazát. Ekkor $F^\diamond$ a K^* egy lapja. Továbbá az $F \mapsto F^\diamond$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, a tartalmazási relációt megfordító megfeleltetés K és K^* lapjai között.

Bizonyítás. Mivel $\emptyset^\diamond = K^*$ és $K^\diamond = \emptyset$, ezért elég azzal az esettel foglalkozni, amikor F valódi lap. Ekkor létezik olyan $H = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y, u_0\rangle = 1\}$ hipersík, hogy $H \cap K = F$ és $K \subseteq \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y, u_0\rangle \leqslant 1\}$. Mivel $\langle y, u_0\rangle = 1$ minden $y \in F$ esetén, így szükségképpen $u_0 \in F^\diamond$. Most legyen $x_0 \in \operatorname{relint} F$, és tekintsük a $H' = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y, x_0\rangle = 1\}$ hipersíkot. Világos, hogy H' támaszhipersíkja K^*-nak, így $F' = H' \cap K^*$ lapja K^*-nak. Állítjuk, hogy $F^\diamond = F'$.

Az $F^\diamond \subseteq F'$ tartalmazás nyilván teljesül, hiszen $F^\diamond \subseteq H'$. Másrészt legyen $y_0 \in K^* \setminus F^\diamond$. Ekkor létezik olyan $x_1 \in F$, hogy $\langle y_0, x_1\rangle < 1$. Mivel $x_0 \in \operatorname{relint} F$, létezik olyan $x_2 \in F$ is, hogy $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, ahol $0 < \lambda < 1$. De $y_0 \in K^*$, így $\langle y_0, x_2\rangle \leqslant 1$, következésképpen $\langle y_0, x_0\rangle = (1-\lambda)\langle y_0, x_1\rangle + \lambda\langle y_0, x_2\rangle < 1$, azaz $y_0 \notin F'$. Ezért $F' \subseteq F^\diamond$ is fennáll.

Most rátérünk az $F \mapsto F^\diamond$ leképezés kölcsönösen egyértelmű voltának igazolására. Ehhez nyilván elég belátni, hogy K bármely F lapjára $F^{\diamond\diamond} = F$. Valóban, ebből azonnal következik a leképezés injektivitása, míg a szürjektivitás ugyanennek az egyenlőségnek a K^* lapjaira való alkalmazásából adódik. Definíció szerint

$$F^{\diamond\diamond} = \{y \in K^{**} \mid \langle x, y\rangle = 1 \text{ minden } x \in F^\diamond \text{ esetén}\}.$$

De a 3.4.9. Állítás szerint $K = K^{**}$, így ha $y \in F$ és $x \in F^\diamond$, akkor $y \in K^{**}$ és $\langle x, y\rangle = 1$. Ezért $y \in F^{\diamond\diamond}$, vagyis $F \subseteq F^{\diamond\diamond}$. Másrészt, legyen F a K egy valódi lapja. Ekkor, mint már említettük létezik olyan $H = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y, u_0\rangle = 1\}$ hipersík, hogy $F = H \cap K$ és $K \subseteq \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle y, u_0\rangle \leqslant 1\}$. Tudjuk, hogy $u_0 \in F^\diamond$, így ha $z \in K \setminus F$, akkor $\langle z, u_0\rangle < 1$, azaz $z \notin F^{\diamond\diamond}$. Ezért $F^{\diamond\diamond} \subseteq F$ is teljesül.

A tartalmazási reláció megfordítása magától értetődik. □

Végül bevezetjük a dualitás fogalmát a konvex politópok körében, és a 3.4.10. Tétel segítségével megmutatjuk, hogy minden politópnak van duálisa.

3.4.11. Definíció. *Legyen $P \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex politóp. Ekkor egy P' konvex politópot a P duális politópjának nevezünk, ha létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés P és P' lapjai között, amely a tartalmazási relációt megfordítja.*

3.4.12. Tétel. *Legyen $P \subseteq \mathbb{E}^n$ egy az origót belső pontként tartalmazó, konvex politóp. Ekkor P^* a P duális politópja.*

Bizonyítás. A 3.4.10. Tétel alapján P és P^* lapjai között kölcsönösen egyértelmű, a tartalmazási relációt megfordító megfeleltetés létesíthető. Így elegendő belátni, hogy P^* szintén n-dimenziós konvex politóp.

Mivel P-nek csak véges sok lapja van (ld. 3.1.4. Állítás), ezért a fenti megfeleltetés miatt P^* lapjainak száma is véges, azaz P^* poliédrikus halmaz. Továbbá, mivel P^* korlátos halmaz (ld. 3.4.8. Állítás), ebből következik, hogy P^* politóp (ld. 3.1.9. Állítás). Végül, mivel az origó belső pontja P^*-nak (ld. 3.4.8. Állítás), így a P^* politóp n-dimenziós. □

Vegyük észre, hogy az $o \in \operatorname{int} P$ feltétel csupán technikai jellegű, és egy alkalmas eltolással mindig biztosítható is (természetesen csak a $\dim P = n$ esetet tekintjük).

Feladatok

3.1. Feladat. *Legyen P egy n-dimenziós konvex politóp, és legyen $\lfloor n/2 \rfloor < k < n+1$ rögzített egész. Mutassuk meg, hogy ha P bármely k csúcsa a P egy valódi lapjának csúcshalmaza, akkor P szimplex.* [Útmutatás: Használjuk a 4.1.1. Tételt.]

3.2. Feladat* (Coxeter, 1963). *Legyen P egy n-dimenziós konvex politóp, x pedig a P egy csúcsa. Ha az x-ből kiinduló élek felezőpontjai egy hipersíkon vannak, akkor ezek a felezőpontok egy $(n-1)$-dimenziós konvex politópnak, a P politóp x csúcshoz tartozó ún. csúcsalakzatának a csúcsai. Ezek után a P politópot szabályosnak nevezzük, ha mind az $(n-1)$-dimenziós lapok, mind pedig a csúcsalakzatok szabályos, $(n-1)$-dimenziós politópok (a definíció rekurzív, csak abban kell megállapodnunk, hogy egy sokszög akkor és csak akkor szabályos, ha oldalai és szögei egyenlők). Mutassuk meg, hogy pontosan öt 3-dimenziós, pontosan hat 4-dimenziós, valamint $n \geqslant 5$ esetén pontosan három n-dimenziós szabályos, konvex politóp létezik.*

3.3. Feladat. *Legyen P egy r csúcsú, n-dimenziós konvex politóp. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan P', szintén r csúcsú, n-dimenziós konvex politóp, amelynek az összes valódi lapja szimplex, és minden $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén az i-dimenziós lapok száma P'-ben legalább annyi, mint P-ben.* [Útmutatás: Legyen v a P egy tetszőleges csúcsa, $u \notin P$ pedig egy olyan pont, hogy az $\overline{uv}$ szakasz, leszámítva a v végpontot, nem metszi a P csúcsai által kifeszített hipersíkok egyikét sem, továbbá $v \in \operatorname{int} \operatorname{conv}(\{u\} \cup P)$. Jelölje a

$\mathrm{conv}(\{u\} \cup P)$ nyilván r csúcsú, n-dimenziós konvex politópot Q. Mutassuk meg, hogy ekkor $f_i(P) \leqslant f_i(Q)$ minden $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén. Ehhez elég belátni, hogy minden $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén a Q politóp i-dimenziós lapjai pontosan a következők:

(1) P azon i-lapjai, amelyek nem tartalmazzák v-t,

(2) $\mathrm{conv}(\{u\} \cup F^{i-1})$ alakú gúlák, ahol F^{i-1} a P politóp egy v-t tartalmazó $(n-1)$-lapjának egy v-t nem tartalmazó $(i-1)$-lapja.

Egymás után alkalmazva ezt az eljárást minden csúcsra úgy, hogy a csúcsok végül általános helyzetbe is kerüljenek, az állítás adódik.]

3.4. Feladat. *Legyen P egy n-dimenziós konvex politóp, F pedig a P egy k-lapja, ahol $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Minden $k \leqslant j \leqslant n-1$ esetén jelölje $h_j(F)$ a P azon j-lapjainak számát, amelyek tartalmazzák F-et. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j h_j(F) = (-1)^{n-1}.$$

[Útmutatás: Tekintsük P duális politópját, és alkalmazzuk $F^\diamond$-ra a 3.3.1. Tételt.]

3.5. Feladat. *Legyen P olyan n-dimenziós konvex politóp, amelynek minden valódi lapja szimplex (az ilyen politópokat egyébként szimpliciális politópoknak nevezzük). Mutassuk meg, hogy ekkor a P politóp $f(P)$ lapvektorának koordinátáira fennállnak a következő összefüggések:*

$$\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j \binom{j+1}{k+1} f_j(P) = (-1)^{n-1} f_k(P)$$

minden $0 \leqslant k \leqslant n-2$ esetén. [Útmutatás: Legyenek F^k és F^j a P politóp egy k-lapja, illetve egy j-lapja, ahol $0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n-1$. Legyen továbbá $\varphi(F^k, F^j) = 0$, ha $F^k \not\subseteq F^j$, illetve $\varphi(F^k, F^j) = 1$, ha $F^k \subseteq F^j$. A szummázások sorrendjétől függően számoljuk ki kétféleképpen a

$$\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j \sum_{F^k \ k\text{-lap}} \ \sum_{F^j \ j\text{-lap}} \varphi(F^k, F^j)$$

összeget. Ehhez használjuk fel, hogy az utolsó összeg éppen egy $(n-k-1)$-dimenziós konvex politóp $(j-k-1)$-dimenziós lapjainak száma, majd alkalmazzuk a 3.3.1. Tételt.]

3.6. Feladat. *Legyen $n \geqslant 2$, és tekintsük az*

$$M_n : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n, t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$$

ún. n-dimenziós momentum görbét. Legyen továbbá $r \geqslant n+1$, és legyenek $M_n(t_1), \dots, M_n(t_r) \in M_n$ különböző pontok. Ekkor a

$$C(r, n) = \operatorname{conv}\{M_n(t_1), \dots, M_n(t_r)\}$$

konvex politópot ciklikus politópnak nevezzük. Mutassuk meg, hogy

(1) *$C(r, n)$ egy n-dimenziós konvex politóp,*

(2) *$C(r, n)$ csúcshalmaza $\{M_n(t_1), \dots, M_n(t_r)\}$,*

(3) *$C(r, n)$ szimpliciális politóp,*

(4) *$C(r, n)$ csúcsainak bármely $k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmaza $C(r, n)$ egy $(k-1)$-dimenziós lapját határozza meg.*

3.7. Feladat** (McMullen, 1970). *Bizonyítsuk be, hogy egy n-dimenziós, r csúcsú konvex politóp i-dimenziós lapjainak száma nem haladhatja meg a $C(r, n)$ ciklikus politóp i-dimenziós lapjainak számát semmilyen $1 \leqslant i \leqslant n-1$ esetén.*

3.8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy az origót belső pontként tartalmazó ellipszoid polárisa szintén egy az origót belső pontként tartalmazó ellipszoid.*

3.9. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy n-dimenziós szimplex duálisa szintén egy n-dimenziós szimplex.*

4. fejezet

Helly tétel

4.1. Radon és Tverberg tételei

Ebben a részben egy a konvex halmazok elméletében nagyon gyakran alkalmazott tételt, majd annak egy messzemenő általánosítását bizonyítjuk be.

4.1.1. Tétel (Radon, 1921). *Legyen $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ az n-dimenziós tér egy legalább $n + 2$ pontból álló véges halmaza. Ekkor S felbontható két olyan diszjunkt S_1 és S_2 részre, hogy* $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Mivel $r \geqslant n + 2$, így az 1.1.8. Állítás szerint S affin összefüggő. Ezért léteznek olyan nem mind nulla $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ valós számok, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = o \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0.$$

Világos, hogy legalább két α_i ellentétes előjelű. Ennélfogva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ és $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_r < 0$ valamely $1 \leqslant k \leqslant r - 1$ indexre. Most

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = -(\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_r),$$

így ha α jelöli a közös értéket, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha}\, x_i = \sum_{i=k+1}^{r} -\frac{\alpha_i}{\alpha}\, x_i.$$

Ám vegyük észre, hogy a bal oldal az $x_1, \dots, x_k$, míg a jobb oldal az $x_{k+1}, \dots$, x_r pontok egy alkalmas konvex kombinációja. Ennélfogva $S_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ és $S_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_r\}$ választással $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$. □

A 4.1.1. Radon tétel Tverbergtől származó általánosításának igazolásához szükségünk van a következő észrevételre.

4.1.2. Állítás. *Legyenek* $S_1, \dots, S_{n+1} \subseteq \mathbb{E}^n$ *olyan halmazok, amelyek konvex burkainak metszete nem üres, és legyen* $x \in \operatorname{conv} S_1 \cap \dots \cap \operatorname{conv} S_{n+1}$. *Ekkor minden* $1 \leqslant i \leqslant n+1$ *esetén létezik olyan* $x_i \in S_i$ *pont, hogy* $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$.

Bizonyítás. Az 1.2.8. Carathéodory tétel alapján elég azzal az esettel foglalkozni, amikor az S_i halmazok mindegyike véges. Tekintsünk egy olyan

$$x_1 \in S_1, \ \dots, \ x_{n+1} \in S_{n+1}$$

pontrendszert, amelyre a $D(\{x\}, \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$ távolság minimális. Indirekt tegyük fel, hogy ez a távolság pozitív, és legyen z a

$$C = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

halmaz azon (egyértelmű) pontja, amelyre $d(x,z) = D(\{x\}, C)$. Legyen továbbá H a z-n átmenő $\overrightarrow{zx}$ normálvektorú hipersík. Mivel H támaszhipersíkja C-nek és $z \in H \cap C$, ezért ismét az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint z benne van az $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ponthalmaz valamely legfeljebb n elemű, mondjuk az $\{x_1, \dots, x_n\}$ részhalmazának konvex burkában. De $x \in \operatorname{conv} S_{n+1}$ is fennáll, így szükségképpen létezik olyan $x'_{n+1} \in S_{n+1}$ pont, amely a H által határolt nyílt félterek közül az x-et tartalmazóban fekszik. Erre a pontra cserélve x_{n+1}-et, a kapott $\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x'_{n+1}\}$ halmaz nyilván közelebb lesz x-hez, mint C volt, hiszen már a z-t és x'_{n+1}-et összekötő szakasznak sem z az x-hez legközelebb eső pontja, ellentmondás. □

4.1.3. Tétel (Tverberg, 1966). *Legyen* $r \geqslant 2$ *tetszőleges egész szám. Ekkor* $\mathbb{E}^n$ *minden, legalább* $(r-1)(n+1)+1$ *pontból álló halmaza felbontható* r *páronként diszjunkt olyan részre, amelyek konvex burkainak metszete nem üres.*

Bizonyítás. Legyen $N = (r-1)(n+1)$, és tekintsünk egy

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{E}^n$$

ponthalmazt. Legyen $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ standard bázisa az $\mathbb{E}^{r-1}$ térnek, és legyen $v_r = -(v_1 + \dots + v_{r-1})$. Végül legyen

$$y_j = \begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^{n+1}$$

minden $0 \leqslant j \leqslant N$ esetén. Ezek után minden $0 \leqslant j \leqslant N$ és $1 \leqslant i \leqslant r$ esetén tekintsük az $(n+1)\times(r-1)$-es $y_j \otimes v_i$ mátrixot, amely k-adik sorának, illetve l-edik oszlopának metszéspontjában az y_j vektor k-adik és a v_i vektor l-edik koordinátájának szorzata áll. Világos módon

$$o \in \operatorname{conv}\{y_j \otimes v_1, \ldots, y_j \otimes v_r\}$$

minden $0 \leqslant j \leqslant N$ esetén, hiszen $v_1 + \cdots + v_r = o$ miatt

$$\frac{1}{r} y_j \otimes v_1 + \cdots + \frac{1}{r} y_j \otimes v_r = o.$$

Így a 4.1.2. Állítás szerint minden $0 \leqslant j \leqslant N$ indexhez létezik olyan $1 \leqslant i(j) \leqslant r$ index, hogy

$$o \in \operatorname{conv}\{y_j \otimes v_{i(j)} \mid 0 \leqslant j \leqslant N\}.$$

Most o kifejezhető az $y_j \otimes v_{i(j)}$ mátrixok konvex kombinációjaként, azaz

$$o = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j y_j \otimes v_{i(j)},$$

ahol az α_j együtthatók nem negatívak és összegük 1. Ám vegyük észre, hogy

$$o = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j y_j \otimes v_{i(j)} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{\substack{j \in \{0,\ldots,N\} \\ i(j)=i}} \alpha_j y_j \right) \otimes v_i, \qquad (*)$$

ami természetes módon adja az X halmaz egy r-partícióját: legyenek $I_i = \{j \mid i(j) = i\}$ és $X_i = \{x_j \mid j \in I_i\}$ minden $1 \leqslant i \leqslant r$ esetén. Állítjuk, hogy az $\{X_1, \ldots, X_r\}$ partíció kielégíti a feltételeket. Valóban, nyilván létezik olyan $u_{st} \in \mathbb{E}^{r-1}$ vektor, amely merőleges a

$$v_1, \ldots, v_{s-1}, v_{s+1}, \ldots, v_{t-1}, v_{t+1}, \ldots, v_r$$

vektorokra, továbbá $\langle u_{st}, v_s \rangle = 1$ és $\langle u_{st}, v_t \rangle = -1$ minden $1 \leqslant s < t \leqslant r$ esetén. Ezek után a $(*)$ mátrixegyenlőség mindkét oldalát az $u_{st} \in \mathbb{E}^{r-1}$ vektorra alkalmazva, az $(y \otimes v)(u) = \langle u, v \rangle y$ összefüggés felhasználásával

$$\sum_{j \in I_s} \alpha_j y_j = \sum_{j \in I_t} \alpha_j y_j$$

adódik. De ez s és t minden értékére igaz, másszóval

$$\sum_{j \in I_1} \alpha_j y_j = \cdots = \sum_{j \in I_r} \alpha_j y_j,$$

vagy ekvivalens módon

$$\sum_{j\in I_1}\alpha_j\binom{x_j}{1}=\dots=\sum_{j\in I_r}\alpha_j\binom{x_j}{1}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{j\in I_1}\alpha_j=\dots=\sum_{j\in I_r}\alpha_j,$$

így a közös értéket α-val jelölve

$$\sum_{j\in I_1}\frac{\alpha_j}{\alpha}x_j=\dots=\sum_{j\in I_r}\frac{\alpha_j}{\alpha}x_j,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $X_1,\dots,X_r$ halmazok konvex burkainak metszete nem üres (a bizonyításból az a hallgatólagosan felhasznált tény is egyszerűen adódik, hogy az X_i halmazok egyike sem üres). $\square$

Megmutatható, hogy létezik olyan $(r-1)(n+1)$ elemű ponthalmaz, amely nem bontható fel a fenti módon.

4.2. Helly tétel

Ebben a fejezetben talán a legismertebb, konvex halmazokra vonatkozó tétellel, nevezetesen a Helly tétellel, illetve annak egy Horntól származó általánosításával ismerkedünk meg. Először a Helly tétel Radontól származó bizonyítását mutatjuk be, amely a 4.1.1. Tételen alapul.

4.2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}=\{A_1,\dots,A_r\}$ az n-dimenziós tér legalább $n+1$ konvex halmazának egy családja, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjának van közös pontja. Ekkor $\mathcal{F}$ összes tagjának van közös pontja.*

Bizonyítás. Az állítást a konvex halmazok r száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $r=n+1$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ezért legyen $\mathcal{F}$ egy legalább $n+2$ tagú halmazcsalád. Az indukciós hipotézis szerint most minden $1\leqslant i\leqslant r$ esetén létezik olyan x_i pont, hogy

$$x_i\in A_1\cap\dots\cap A_{i-1}\cap A_{i+1}\cap\dots\cap A_r.$$

Ezek után tekintsük az $S=\{x_1,\dots,x_r\}$ halmazt. Mivel $r\geqslant n+2$, így a 4.1.1. Radon tétellel összhangban S felbontható két olyan S_1 és S_2 diszjunkt részre, amelyek konvex burkai metszik egymást. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $S_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ és $S_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_r\}$, ahol $1 \leqslant k \leqslant r-1$. Legyen

$$x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\}.$$

Állítjuk, hogy x benne van az összes A_i halmazban. Valóban, ha $i \leqslant k$, akkor $x_i \in A_{k+1} \cap \dots \cap A_r$. Ezért $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq A_{k+1} \cap \dots \cap A_r$. Hasonlóan, ha $i \geqslant k+1$, akkor $x_i \in A_1 \cap \dots \cap A_k$. Így

$$x \in \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\} \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_k. \qquad \square$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a 4.2.1. Tétel feltételei közül önmagában már egyik sem gyengíthető, így az állítás nem terjeszthető ki mindenfajta megkötés nélkül például végtelen halmazcsaládokra sem. Igaz viszont a következő.

4.2.2. Tétel (Helly, 1923). *Legyen $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább $n+1$ kompakt, konvex halmazának egy családja, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjának van közös pontja. Ekkor $\mathcal{F}$ összes tagjának van közös pontja.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ tagjainak metszete üres halmaz, és legyen $F \in \mathcal{F}$ tetszőleges. Ekkor minden $x \in F$ esetén létezik olyan $F_x \in \mathcal{F}$ halmaz, amelyik nem tartalmazza az x pontot. De F_x zárt halmaz, így szükségképpen létezik olyan x középpontú, δ_x sugarú nyílt gömb is, amelyik szintén diszjunkt F_x-től. Világos, hogy ezek a nyílt gömbök lefedik az F halmazt. Ám a Heine-Borel tétel szerint ezen nyílt gömbök közül kiválasztható véges sok is, amelyek szintén lefedik F-et. Legyenek az ezeknek megfelelő $\mathcal{F}$-beli halmazok $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}$. Most $F \cap F_{x_1} \cap \dots \cap F_{x_k} = \emptyset$, ami ellentmond a 4.2.1. Tételnek, azaz $\mathcal{F}$ tagjainak metszete nem lehet üres halmaz. $\square$

A teljesség kedvéért ismertetjük a 4.2.1. Tétel eredeti, a tér dimenziójára vonatkozó teljes indukciós bizonyítását is. Ez a bizonyítás csak kompakt halmazok esetén működik. Először is $\mathbb{E}^0$-ban az állítás nyilvánvaló. Ezek után tegyük fel, hogy $\mathbb{E}^{n-1}$-ben igaz a tétel, és tekintsünk $\mathbb{E}^n$-ben egy legalább $n+1$ kompakt, konvex halmazból álló véges $\mathcal{F}$ családot, amelyben bármely $n+1$ tagnak van közös pontja, de $\cap\mathcal{F} = \emptyset$. Ekkor létezik olyan $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ alcsalád, valamint olyan $A \in \mathcal{F}'$ halmaz, hogy $\cap\mathcal{F}' = \emptyset$, ám $M = \cap(\mathcal{F}' \setminus \{A\}) \neq \emptyset$. Most A és M diszjunkt, nem üres, kompakt, konvex halmazok, így a 2.2.10. Állítás szerint egy H hipersíkkal szigorúan elválaszthatók egymástól. Jelölje M' az $\mathcal{F}' \setminus \{A\}$ alcsalád valamely n tagjának metszetét. Világos, hogy $M \subseteq M'$, és mivel $\mathcal{F}$ tetszőleges $n+1$ tagjának van közös pontja, ezért M' szükségképpen metszi A-t. Ebből következik, hogy $H \cap M' \neq \emptyset$, vagyis a $C \cap H$ alakú halmazok közül, ahol $C \in \mathcal{F}' \setminus \{A\}$, bármely n-nek van közös pontja. De az indukciós hipotézis szerint ekkor $M \cap H$ sem lehet üres, ami ellentmondás.

A Helly tétel figyelemre méltó általánosítása kapható, ha csak azt követeljük meg, hogy a halmazrendszer bármely k tagjának legyen közös pontja, ahol $1 \leqslant k \leqslant n$. Ennek a problémának a megoldása már némi előkészületet igényel.

Az n-dimenziós tér $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \|x\| = 1\}$ részhalmazát $(n-1)$-dimenziós szférának nevezzük (itt kivételesen a topológiai dimenziót tekintjük). $\mathbb{E}^n$ valamely k-dimenziós lineáris alterének az $\mathbb{S}^{n-1}$ szférával való metszete egy $(k-1)$-dimenziós $\mathbb{S}^{k-1}$ főszféra. Az 1-dimenziós főszféra helyett a főkör elnevezést is használjuk. Egy főkört két lineárisan független x és y pontja két zárt ívre bontja, melyek közül az egyik félkörnél kisebb, a másik pedig félkörnél nagyobb. A félkörnél kisebb ív

$$\{(\alpha x + \beta y)/\|\alpha x + \beta y\| \mid \alpha, \beta \geqslant 0 \text{ és } \alpha + \beta = 1\}.$$

4.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ halmaz konvex, ha bármely két $x, y \in A$ lineárisan független pontra az azokat összekötő, félkörnél kisebb ív hozzátartozik A-hoz.*

4.2.4. Tétel (Horn, 1949). *Legyen $1 \leqslant k \leqslant n$, legyen $\mathcal{F}$ az $(n-1)$-dimenziós $\mathbb{S}^{n-1}$ szféra legalább k kompakt, konvex halmazának egy családja, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ bármely k tagjának van közös pontja. Ekkor bármely $(n-k-1)$-dimenziós $\mathbb{S}^{n-k-1}$ főszférára illeszkedik egy olyan $(n-k)$-dimenziós $\mathbb{S}^{n-k}$ főszféra, amelyik $\mathcal{F}$ összes tagját metszi.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért jelölje az állítást röviden $T(n, k)$. Ezután a tételt az n dimenzió szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Világos, hogy $T(1, 1)$ teljesül.

Először azt mutatjuk meg, hogy minden $1 \leqslant k \leqslant n$ esetén $T(k, k)$ maga után vonja $T(n, k)$-t.

Legyen H_{n-k} az $\mathbb{S}^{n-k-1}$ főszféra által generált lineáris altér, H_k pedig annak ortogonális kiegészítője. $\mathcal{F}$ azon tagjaitól, amelyek metszik $\mathbb{S}^{n-k-1}$-et nyilván eltekinthetünk, hiszen ezeket bármely az $\mathbb{S}^{n-k-1}$-et tartalmazó $\mathbb{S}^{n-k}$ főszféra is metszi. Így ha Π jelöli az n-dimenziós tér H_k-ra való merőleges vetítését, akkor tetszőleges $F \in \mathcal{F}$ halmazra $o \notin \Pi(F)$. Ezek után az $F \in \mathcal{F}$ halmazok helyett tekintsük az $F' = \{\Pi(x)/\|\Pi(x)\| \mid x \in F\}$ halmazokat, és legyen $\mathcal{F}' = \{F' \mid F \in \mathcal{F}\}$.

A Π leképezés linearitásának felhasználásával könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{F}'$ kompakt, konvex halmazok egy családja az $\mathbb{S}^{k-1} = H_k \cap \mathbb{S}^{n-1}$ főszférán.

Lássuk például a konvexitást. Ha z_1 és z_2 lineárisan független pontok F'-n, azaz $z_1 = \Pi(x_1)/\|\Pi(x_1)\|$ és $z_2 = \Pi(x_2)/\|\Pi(x_2)\|$, ahol x_1 és x_2 lineárisan független pontok F-en, akkor minden $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\|\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2\|} &= \frac{\alpha_1 \dfrac{\Pi(x_1)}{\|\Pi(x_1)\|} + \alpha_2 \dfrac{\Pi(x_2)}{\|\Pi(x_2)\|}}{\left\| \alpha_1 \dfrac{\Pi(x_1)}{\|\Pi(x_1)\|} + \alpha_2 \dfrac{\Pi(x_2)}{\|\Pi(x_2)\|} \right\|} \\
&= \frac{\Pi\left(\dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2 \right)}{\left\| \Pi\left(\dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2 \right) \right\|} \\
&= \frac{\Pi\left(\dfrac{\dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2}{\left\| \dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2 \right\|} \right)}{\left\| \Pi\left(\dfrac{\dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2}{\left\| \dfrac{\alpha_1}{\|\Pi(x_1)\|} x_1 + \dfrac{\alpha_2}{\|\Pi(x_2)\|} x_2 \right\|} \right) \right\|}.
\end{aligned}$$

Ezért a z_1 és z_2 pontokat összekötő, félkörnél kisebb ív bármely pontja az x_1 és x_2 pontokat összekötő, félkörnél kisebb ív valamely pontjának képe. Most $\mathcal{F}'$ bármely k tagjának van közös pontja, így a feltétel szerint létezik olyan $w \in \mathbb{S}^{k-1}$ pont, hogy tetszőleges $F' \in \mathcal{F}'$ esetén $F' \cap \{-w, w\} \neq \emptyset$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy valamely $x \in F$ pontra $\Pi(x)/\|\Pi(x)\| = \pm w$, azaz $\Pi(x)$ a w skalárszorosa. Következésképpen $\mathcal{F}$ minden tagját metszi a H_{n-k} és a w által kifeszített $(n-k+1)$-dimenziós H_{n-k+1} lineáris altér, és ezért az $(n-k)$-dimenziós $\mathbb{S}^{n-1} \cap H_{n-k+1}$ főszféra is.

A bizonyítás teljessé tételéhez megmutatjuk, hogy $T(n-1, n-1)$ maga után vonja $T(n, n)$-t, ha $n > 1$.

Vegyük észre, hogy ezt az állítást elég véges sok tagból álló $\mathcal{F}$ halmazcsaládokra igazolni. Valóban, feltéve, hogy $T(n, n)$ nem teljesül, minden $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ponthoz létezik olyan $F_x \in \mathcal{F}$ halmaz, amelyre $F_x \cap \{-x, x\} = \emptyset$. Ráadásul, mivel F_x kompakt, ezért létezik olyan δ_x pozitív szám, hogy $F_x \cap \{-z, z\} = \emptyset$ is fennáll, ha $\|z - x\| < \delta_x$. De ezek az x, illetve $-x$ középpontú δ_x sugarú nyílt szférikus gömbpárok nyilván lefedik $\mathbb{S}^{n-1}$-et, így a Heine-Borel tétel szerint kiválasztható közülük véges sok is, amelyek szintén lefedik $\mathbb{S}^{n-1}$-et. Legyenek az ezeknek megfelelő $\mathcal{F}$-beli halmazok $F_{x_1}, \ldots, F_{x_s}$. Világos, hogy ekkor nem létezhet olyan $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ pont, hogy az $F_{x_1}, \ldots, F_{x_s}$ halmazok mindegyike tartalmazza az x és $-x$ pontok legalább egyikét.

Most megmutatjuk, hogy ha létezik olyan $G \in \mathcal{F}$ halmaz, amely benne van valamely $\mathbb{S}^{n-2}$ főszférában, akkor $T(n,n)$ automatikusan teljesül. Legyen $F' = F \cap \mathbb{S}^{n-2}$ minden $F \in \mathcal{F}$ esetén, és legyen $\mathcal{F}' = \{F' \mid F \in \mathcal{F}\}$. Ekkor $\mathcal{F}'$ minden tagja kompakt, konvex halmaz $\mathbb{S}^{n-2}$-n, továbbá $\mathcal{F}'$ bármely $n-1$ tagjának van közös pontja, hiszen ezek mindegyikének van közös pontja G-vel. Így alkalmazva $T(n-1,n-1)$-et a kívánt eredményt kapjuk.

Ezek után feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ véges sok tagból áll, és egyetlen tag sincs benne valamely $\mathbb{S}^{n-2}$ főszférában. $T(n,n)$-t az $\mathcal{F}$ tagjainak r száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $r \leqslant n$, akkor nincs mit bizonyítani. Ezért legyen $r > n$. Szükségünk lesz a következő segédállításra.

Legyen $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$, és tegyük fel, hogy létezik olyan x pont, amelyre $x \in F_1, \dots, F_s$ és $-x \in F_{s+1}, \dots, F_{s+t}$, ahol $s > 0$, $t \geqslant 0$ és $s + t \leqslant r - 1$. Ekkor $T(n-1, n-1)$ maga után vonja, hogy létezik olyan y pont is, hogy

(1) vagy $\mathcal{F}$ minden tagja tartalmazza a $-y$ és y pontok legalább egyikét,

(2) vagy y hozzátartozik az $\mathcal{F}$ legalább $s+1$ tagjához,

(3) vagy pedig y hozzátartozik az $\mathcal{F}$ legalább s tagjához, míg $-y$ az előzőektől különböző legalább $t+1$ tagjához.

Mivel az $F_1 \cap F_r, \dots, F_{r-1} \cap F_r$ halmazok közül bármely $n-1$-nek van közös pontja, továbbá mivel $T(n-1,n-1)$ maga után vonja $T(n,n-1)$-et, létezik olyan, a $-x$ és x pontokon átmenő $\mathbb{S}^1$ főkör, amely az $F_1 \cap F_r, \dots, F_{r-1} \cap F_r$ halmazok mindegyikét metszi. Ha $\{-x, x\} \cap F_r \neq \emptyset$, akkor (2) vagy (3) értelmében készen vagyunk, ezért tegyük fel, hogy $-x, x \notin F_r$. Ha most $F_r \cap \mathbb{S}^1$ egy szemköztes $\{-y, y\}$ pontpár, akkor léteznek olyan $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ számok, hogy $\varepsilon_i y \in F_i \cap F_r \cap \mathbb{S}^1 \subseteq F_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant r$ esetén, azaz (1) teljesül. Különben pedig $F_r \cap \mathbb{S}^1$ az $\mathbb{S}^1$ főkör $-x$ és x pontjai által határolt félkörök valamelyikének belsejében lévő összefüggő halmaz. De ekkor az $F_1 \cap \mathbb{S}^1, \dots, F_s \cap \mathbb{S}^1$ halmazok is összefüggők, hiszen tartalmazzák x-et, valamint $F_1 \cap F_r \cap \mathbb{S}^1, \dots, F_s \cap F_r \cap \mathbb{S}^1$ pontjait. Legyen $x_i \in F_i \cap F_r \cap \mathbb{S}^1$ minden $1 \leqslant i \leqslant s$ esetén, és jelölje y az $x_1, \dots, x_s$ pontok közül az x-hez legközelebb esőt. Világos, hogy $y \in F_1 \cap \dots \cap F_s \cap F_r$, ami éppen a (2) eset.

Ezek után térjünk vissza az eredeti állítás igazolásához. Az indukciós hipotézis szerint létezik olyan $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ pont, hogy az indexek alkalmas megválasztásával $x \in F_1, \dots, F_s$ és $-x \in F_{s+1}, \dots, F_{r-1}$, ahol $1 \leqslant s \leqslant r-1$. Könnyű ellenőrizni, hogy a fenti észrevétel véges sokszori alkalmazásával eljuthatunk $T(n,n)$-hez, így a tételt bebizonyítottuk. □

4.2.5. Tétel (Horn, 1949). *Legyen $1 \leqslant k \leqslant n+1$, legyen $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább k kompakt, konvex halmazának egy családja, és tegyük fel, hogy*

$\mathcal{F}$ bármely k tagjának van közös pontja. Ekkor bármely $(n-k)$-dimenziós affin altérre illeszkedik egy olyan $(n-k+1)$-dimenziós affin altér, amelyik $\mathcal{F}$ összes tagját metszi.

Bizonyítás. A $k = n + 1$ eset éppen a 4.2.2. Helly tétel, ezért legyen $1 \leqslant k \leqslant n$. Jelöljön H_{n-k} egy tetszőleges $(n-k)$-dimenziós affin alteret. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in H_{n-k}$. Továbbá azt is feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ egyetlen tagja sem metszi H_{n-k}-t.

Most minden $F \in \mathcal{F}$ halmazra legyen $F' = \{x/\|x\| \mid x \in F\}$, és tekintsük az $\mathcal{F}' = \{F' \mid F \in \mathcal{F}\}$ halmazcsaládot. Világos, hogy $\mathcal{F}'$ minden tagja kompakt, konvex halmaz $\mathbb{S}^{n-1}$-en. Így alkalmazva a 4.2.4. Tételt létezik olyan $\mathbb{S}^{n-k}$ főszféra, amely tartalmazza az $\mathbb{S}^{n-k-1} = H_{n-k} \cap \mathbb{S}^{n-1}$ főszférát és metszi az $\mathcal{F}'$ minden tagját. Ezért az $\mathbb{S}^{n-k}$ által generált $(n-k+1)$-dimenziós H_{n-k+1} affin altér szükségképpen metszi az $\mathcal{F}$ összes tagját. $\square$

4.3. Helly tétel kvantitatív változatai

A Helly tételt tekintve természetes módon vetődik fel, hogy tudunk-e valamit mondani a metszethalmaz méretéről.

4.3.1. Tétel (Klee, 1953). *Legyen $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább $n+1$ nem üres, kompakt, konvex halmazának egy családja, valamint K egy további nem üres, kompakt, konvex halmaz.*

(1) *Ha $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjához létezik olyan eltoltja K-nak, amelyet mind az $n+1$ tag tartalmaz, akkor létezik olyan eltoltja K-nak, amelyet $\mathcal{F}$ összes tagja tartalmaz.*

(2) *Ha $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjához létezik olyan eltoltja K-nak, amely mind az $n+1$ tagot tartalmazza, akkor létezik olyan eltoltja K-nak, amely $\mathcal{F}$ összes tagját tartalmazza.*

(3) *Ha $\mathcal{F}$ bármely $n+1$ tagjához létezik olyan eltoltja K-nak, amely mind az $n+1$ tagot metszi, akkor létezik olyan eltoltja K-nak, amely $\mathcal{F}$ összes tagját metszi.*

Bizonyítás. (1) Minden $A \in \mathcal{F}$ halmazra legyen $A' = \{p \mid p + K \subseteq A\}$. Állítjuk, hogy A' kompakt, konvex halmaz. Valóban, ha $p_1, p_2 \in A'$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, akkor minden $k \in K$ esetén

$$\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 + k = \lambda(p_1 + k) + (1-\lambda)(p_2 + k).$$

De $p_1 + k, p_2 + k \in A$ és A konvex, ezért $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + k \in A$. Következésképpen $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 \in A'$, azaz A' konvex. Továbbá mivel K és A kompakt, ezért A' is kompakt.

Feltevésünk szerint az A' halmazok közül bármely $(n + 1)$-nek van közös pontja, így a 4.2.2. Helly tétel alapján az összesnek is van közös pontja. Ha most q egy ilyen közös pontot jelöl, akkor világos, hogy $q + K$ benne van az A halmazok mindegyikében.

(2) Minden $A \in \mathcal{F}$ halmazra legyen $A' = \{p \mid A \subseteq p + K\}$. Állítjuk, hogy A' kompakt, konvex halmaz. Valóban, ha $p_1, p_2 \in A'$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, akkor minden $a \in A$ esetén léteznek olyan $k_1, k_2 \in K$ pontok, hogy $a = p_1 + k_1$ és $a = p_2 + k_2$. Ám ekkor $a = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + \lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2$, vagyis $a \in \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + K$. Így $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 \in A'$, azaz A' konvex. Továbbá mivel K és A kompakt, ezért A' is kompakt.

Feltevésünk szerint az A' halmazok közül bármely $(n + 1)$-nek van közös pontja, így a 4.2.2. Helly tétel alapján az összesnek is van közös pontja. Ha most q egy ilyen közös pontot jelöl, akkor világos, hogy $q + K$ tartalmazza az A halmazok mindegyikét.

(3) Minden $A \in \mathcal{F}$ halmazra legyen $A' = \{p \mid A \cap (p + K) \neq \emptyset\}$. Állítjuk, hogy A' kompakt, konvex halmaz. Valóban, ha $p_1, p_2 \in A'$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, akkor léteznek olyan $a_1, a_2 \in A$ és $k_1, k_2 \in K$ pontok, hogy $a_1 = p_1 + k_1$ és $a_2 = p_2 + k_2$. Most

$$\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + \lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2 \in \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + K.$$

De $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$, mivel A konvex, így $A \cap (\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 + K) \neq \emptyset$. Következésképpen $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 \in A'$, azaz A' konvex. Továbbá mivel K és A kompakt, ezért A' is kompakt.

Feltevésünk szerint az A' halmazok közül bármely $(n + 1)$-nek van közös pontja, így a 4.2.2. Helly tétel alapján az összesnek is van közös pontja. Ha most q egy ilyen közös pontot jelöl, akkor világos, hogy $q + K$ metszi az A halmazok mindegyikét. □

A következő tétel bizonyítása már több ötletet igényel.

4.3.2. Tétel (Bárány-Katchalski-Pach, 1984). *Létezik olyan, kizárólag a dimenziótól függő v_n konstans, hogy ha $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább $2n$ konvex halmazának egy véges családja, és $\mathcal{F}$ bármely $2n$ halmaza metszetének térfogata legalább v_n, akkor $V(\cap\mathcal{F}) \geqslant 1$.*

Bizonyítás. A tételt először abban a speciális esetben bizonyítjuk, amikor $\mathcal{F}$ zárt félterekből áll. Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Alkalmazva a 4.2.1. Tételt az $\mathcal{F}$-beli zárt félterek belsejére kapjuk, hogy $V(\cap\mathcal{F}) > 0$, ezért létezik zárt félterek véges családjainak olyan $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots)$ végtelen sorozata, hogy minden i pozitív egész számra

(1) $V(\cap\mathcal{H}_i) = 1$,

(2) bármely $2n$ darab $\mathcal{H}_i$-beli halmaz metszetének a térfogata legalább i.

Minden i pozitív egész számra tekintsünk egy maximális térfogatú, $\cap\mathcal{H}_i$-ben elhelyezkedő, n-dimenziós S_i szimplexet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S_i szabályos és súlypontja éppen az origó (ellenkező esetben alkalmazzunk $\mathcal{H}_i$-re egy megfelelő, térfogattartó affinitást). Az S_i szimplex csúcsait jelölje $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Tekintsük továbbá az

$$S_i' = -nS_i = \operatorname{conv}\{-nc_0, -nc_1, \ldots, -nc_n\}$$

szimplexet, melynek a $c_0, c_1, \ldots, c_n$ pontokra illeszkedő lapjait jelölje ebben a sorrendben $F_0, F_1, \ldots, F_n$. Végül legyenek $G_0, G_1, \ldots, G_n$ az origót nem tartalmazó azon nyílt félterek, amelyek határoló hipersíkjai $\operatorname{aff}(F_0), \operatorname{aff}(F_1), \ldots$, $\operatorname{aff}(F_n)$. Ekkor S_i' éppen $\cup_{k=0}^{n} G_k$ kiegészítő halmaza.

Állítjuk, hogy $\cap\mathcal{H}_i \subseteq S_i'$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik olyan $c \in \cap\mathcal{H}_i$ pont, amely nincs S_i'-ben, vagyis $c \in G_k$ legalább egy k indexre. Ám a $c_0, \ldots, c_{k-1}, c, c_{k+1}, \ldots, c_n$ csúcsok által meghatározott szimplex is benne van $\cap\mathcal{H}_i$-ben, ráadásul a térfogata nagyobb, mint S_i térfogata, ellentmondás. Ennélfogva $S_i \subseteq \cap\mathcal{H}_i \subseteq S_i'$, amiből az is következik, hogy

$$V(S_i') = n^n V(S_i) \leqslant n^n V(\cap\mathcal{H}_i) = n^n.$$

Most alkalmazva a 4.2.1. Tételt a $\mathcal{H}_i \cup \{G_k\}$ családra kapjuk, hogy létezik n olyan féltér $\mathcal{H}_i$-ben, melyek metszete diszjunkt G_k-tól minden $0 \leqslant k \leqslant n$ esetén. Tekintsük az így kiválasztott, legfeljebb $n(n+1)$ darab féltér $\mathcal{H}_i' \subseteq \mathcal{H}_i$ rendszerét, és legyen $P_i = \cap\mathcal{H}_i'$. Világos, hogy $S_i \subseteq P_i \subseteq S_i'$, így P_i egy konvex politóp, amely $(n-1)$-dimenziós lapjainak száma $f(i) \leqslant n(n+1)$. A P_i politópot írjuk fel

$$P_i = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_{ij}, x\rangle \leqslant 1 \text{ minden } 1 \leqslant j \leqslant f(i) \text{ esetén}\}$$

alakban, ahol $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{if(i)}$ a P_i politóp $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normálvektorai. (Egy politóp egy lapjának külső normálvektora egy a lapot tartalmazó támaszhipersíknak olyan normálvektora, amely a hipersík által meghatározott zárt félterek közül a politópot nem tartalmazóba mutat.) Ekkor az $\cup_{i=1}^{\infty}\{a_{i1}, \ldots, a_{if(i)}\}$ vektorhalmaz korlátos, ugyanis minden P_i tartalmazza az origó súlypontú S_i szabályos szimplexet, melynek térfogata

$$V(S_i) = n^{-n} V(S_i') \geqslant n^{-n} V(\cap\mathcal{H}_i) = n^{-n}.$$

Így van olyan (i_h) indexsorozat, hogy $f(i_1) = f(i_2) = \ldots = f$, továbbá minden $1 \leqslant j \leqslant f$ esetén $\lim_{h\to\infty} a_{i_h j} = a_j$ létezik. Ezek után legyen

$$P = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_j, x\rangle \leqslant 1 \text{ minden } 1 \leqslant j \leqslant f \text{ esetén}\}.$$

Nyilván P is egy n-dimenziós konvex politóp, hiszen tartalmazza egy origó súlypontú, n^{-n} térfogatú szabályos szimplex beírt gömbjét, és benne van egy origó súlypontú, n^n térfogatú szabályos szimplex körülírt gömbjében. Megmutatjuk, hogy az $\{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_j, x\rangle \leqslant 1\}$ félterek közül bárhogyan is választunk ki legfeljebb $2n$ darabot, azok metszete nem korlátos. Indirekt tegyük fel, hogy például

$$Q = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_j, x\rangle \leqslant 1\},$$

ahol $k \leqslant 2n$, korlátos, azaz $\max_{q\in Q} \|q\| < R$, valamely R pozitív számra. Most minden h pozitív egész számra tekintsük a

$$Q_{i_h} = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_{i_h j}, x\rangle \leqslant 1\}$$

halmazt. A bizonyítás elején tett feltevés második része szerint $V(Q_{i_h}) \geqslant i_h$, ezért minden elég nagy h indexre léteznek olyan $q_{i_h} \in Q_{i_h}$ pontok, melyek origótól mért távolsága R. Legyen a (q_{i_h}) sorozat valamely konvergens részsorozatának határértéke q. Mivel $\|q\| = R$, így $q \notin Q$, vagyis $\langle a_j, q\rangle > 1$ legalább egy $1 \leqslant j \leqslant k$ indexre. Másrészt $\langle a_{i_h j}, q_{i_h}\rangle \leqslant 1$ is nyilván igaz minden h pozitív egész számra, ennélfogva $\langle a_j, q\rangle \leqslant 1$ is szükségképpen fennáll, ellentmondás.

Kaptuk tehát, hogy az $\{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle a_j, x\rangle \leqslant 1\}$ félterek közül bárhogyan is választunk ki legfeljebb $2n$ darabot, azok metszete nem korlátos. Azonban vegyük észre, hogy ez nem lehetséges. Valóban, tekintsük a P konvex politóp $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normálvektorait. Ezen vektorok végpontjainak konvex burka nyilván n-dimenziós, és a 2.2.4. Következmény szerint az origó belső pontja, ellenben P tartalmazna origóból induló félegyenest. Most alkalmazva a 2.3.11. Steinitz tételt, a fenti pontok közül kiválasztható legfeljebb $2n$ olyan, amelyek konvex burkának az origó szintén belső pontja. Ám az így kapott pontokhoz, illetve normálvektorokhoz tartozó, legfeljebb $2n$ féltér metszete nyilván nem tartalmazhat félegyenest, vagyis korlátos. Ebből az ellentmondásból következik a tétel félterekre.

Az általános eset igazolásához legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ a feltételeket kielégítő halmazcsalád. Nyugodtan feltehetjük, hogy az A_i halmazok zártak, hiszen a tétel térfogatokról szól. Alkalmazva a 4.2.1. Tételt az $\operatorname{int} A_i$

halmazokra kapjuk, hogy $V(\cap\mathcal{F}) > 0$. Ha $V(\cap\mathcal{F}) = \infty$, akkor nincs mit bizonyítanunk, ezért elég azzal az esettel foglalkozni amikor $\cap\mathcal{F}$ korlátos. Minden A_i halmazra tekintsük az A_i-t tartalmazó zárt félterek $\mathcal{H}_i$ családját, és legyen $\mathcal{H} = \cup_{i=1}^{m}\mathcal{H}_i$. Nyilván $\mathcal{H}$ bármely $2n$ zárt féltere metszetének térfogata legalább v_n, továbbá $\cap\mathcal{H} = \cap\mathcal{F}$.

Ezek után legyen ε tetszőleges pozitív szám, és tekintsük $\mathbb{E}^n$ azon pontjainak U_ε halmazát, melyek $\cap\mathcal{F}$-től mért távolsága legfeljebb ε. Mivel U_ε határa kompakt, és a $\mathcal{H}$-hoz tartozó zárt félterek kiegészítő halmazai teljesen lefedik azt, a Heine-Borel tételből egyszerűen következik, hogy $\mathcal{H}$ féltereinek létezik olyan $\mathcal{H}'$ véges részhalmaza, melyre $(\cap\mathcal{H}') \cap \operatorname{bd} U_\varepsilon = \emptyset$, és így $\cap\mathcal{H}' \subseteq U_\varepsilon$. Most alkalmazva tételünk már bizonyított részét a véges $\mathcal{H}'$ családra kapjuk, hogy $V(U_\varepsilon) \geqslant V(\cap\mathcal{H}') \geqslant 1$. Ebből pedig a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(V(U_\varepsilon) - V(\cap\mathcal{F})) = 0$$

összefüggés felhasználásával $V(\cap\mathcal{F}) \geqslant 1$ adódik. □

Megjegyezzük, hogy tételünk bizonyos értelemben a lehető legélesebb. Valóban, tekintsük egy $1/k$ élű, n-dimenziós kocka $(n-1)$-dimenziós lapjainak a kockát tartalmazó támaszféltereit, és jelölje ezen $2n$ féltér halmazát $\mathcal{F}$. Most $V(\cap\mathcal{F}) = k^{-n}$, miközben $\mathcal{F}$ bármely $2n-1$ féltere metszetének térfogata végtelen.

4.4. Helly tétel alkalmazásai

A Helly tétel egyik legérdekesebb alkalmazása a Krasnosselski-féle képtár tétel.

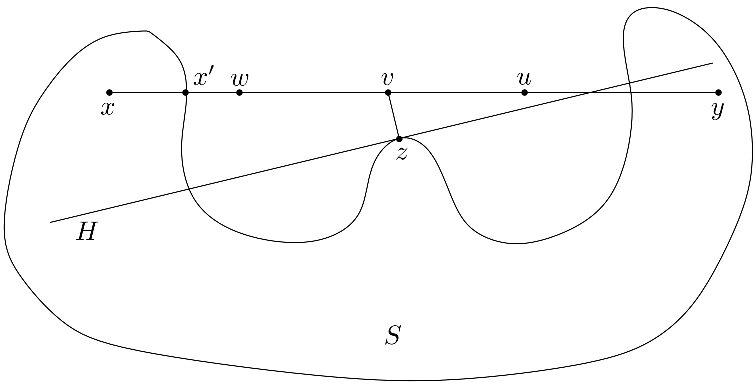
4.4.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ kompakt halmaz, továbbá $x, y \in S$ tetszőleges pontok. Azt mondjuk, hogy az x pontból látható az y pont, ha $\overline{xy} \subseteq S$.*

4.4.2. Tétel (Krasnosselski, 1946). *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy legalább $n+1$ pontból álló kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy S bármely $n+1$ pontjához létezik olyan pontja S-nek, amelyből mind az $n+1$ pont látható. Ekkor létezik olyan pontja S-nek, amelyből S összes pontja látható.*

Bizonyítás. Minden $x \in S$ pontra legyen

$$V_x = \{y \in S \mid \overline{xy} \subseteq S\}.$$

Feltevésünk szerint a V_x halmazok közül bármely $n+1$ metszete nem üres, így alkalmazva a 4.2.2. Helly tételt létezik $y \in \cap_{x\in S} \operatorname{conv} V_x$. Indirekt tegyük fel, hogy $y \notin \cap_{x \in S} V_x$. Ekkor szükségképpen létezik olyan $x \in S$, valamint $u \in \overline{xy}$ pont, hogy $u \notin S$. Most legyen x' az S relatív határának azon pontja, amely az $\overline{xu}$ szakaszon a legközelebb van u-hoz. Mivel S kompakt, van olyan $w \in \overline{x'u}$ pont, hogy $d(w, x') = \frac{1}{2} D(\{u\}, S)$. Továbbá van olyan $v \in \overline{wu}$ és $z \in S$ pont is, hogy $d(v, z) = D(\overline{wu}, S)$, (ld 4.4.1. ábra).



4.4.1. ábra.

Most z az S halmaz v-hez legközelebbi pontja, ezért V_z a $\overline{vz}$-re merőleges, z-n átmenő H hipersík által határolt, a v pontot nem tartalmazó, mondjuk H^+ zárt féltérben helyezkedik el. De $y \in \operatorname{conv} V_z \subseteq H^+$, így $y \neq z$ esetén $\measuredangle yzv \geqslant \pi/2$, vagyis minden esetben $\measuredangle zvy < \pi/2$. Továbbá mivel $D(\{v\}, S) \leqslant D(\{w\}, S) < D(\{u\}, S)$, ezért $u \neq v$. Következésképpen a $\overline{vu}$ szakasznak létezik olyan pontja, amelyik közelebb van z-hez, mint a v pont. Ez pedig ellentmond a v megválasztásának. $\square$

A Helly tétel még két fontos következményével ismerkedünk meg.

4.4.3. Tétel (Jung, 1901). *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmaz, és jelölje* $\operatorname{diam} S$ *az S pontjai között fellépő távolságok maximumát, $R(S)$ pedig az S-et tartalmazó legkisebb gömb sugarát. Ekkor*

$$R(S) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \operatorname{diam} S.$$

Továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha S tartalmazza egy $\operatorname{diam} S$ *élű szabályos n-dimenziós szimplex csúcsait.*

Bizonyítás. A 4.3.1. Klee tétel (2) pontja, valamint egyszerű kompaktsági megfontolás miatt elég az állítást legfeljebb $n+1$ pontú halmazokra igazolni. Ezért legyen S egy legfeljebb $n+1$ pontból álló halmaz, és tekintsük az S-et tartalmazó legkisebb gömböt. Legyenek $x_0, \ldots, x_m$ az S azon pontjai, amelyek e gömb határán vannak. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a gömb középpontja az origó. Így nyilván $o \in \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_m\}$, vagyis léteznek olyan $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ nem negatív valós számok, hogy

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i = o.$$

Még azt is feltehetjük, hogy itt $\alpha_0, \dots, \alpha_k > 0$ és $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m = 0$. Most $\|x_i - x_j\|^2 = 2R(S)^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle$, továbbá $\|x_i - x_j\|^2 \leqslant (\operatorname{diam} S)^2$. Ezért minden $0 \leqslant j \leqslant k$ esetén

$$1 - \alpha_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \frac{\|x_i - x_j\|^2}{(\operatorname{diam} S)^2} =$$

$$= 2\,\frac{R(S)^2}{(\operatorname{diam} S)^2} - 2\,\frac{1}{(\operatorname{diam} S)^2} \left\langle \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = 2\,\frac{R(S)^2}{(\operatorname{diam} S)^2}.$$

Összegezve a fenti egyenlőtlenségeket a $0 \leqslant j \leqslant k$ indexekre kapjuk, hogy

$$k \geqslant 2(k+1)\frac{R(S)^2}{(\operatorname{diam} S)^2},$$

ahonnan

$$R(S) \leqslant \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}\operatorname{diam} S \leqslant \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\operatorname{diam} S \leqslant \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\operatorname{diam} S.$$

Világos, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $k = m = n$, továbbá $\|x_i - x_j\| = \operatorname{diam} S$ minden $0 \leqslant i, j \leqslant n$ és $i \neq j$ esetén. $\square$

4.4.4. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmaz. Ekkor létezik olyan $t \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy $-\frac{1}{n}S + t \subseteq S$.*

Bizonyítás. Nyilván elég megmutatni, hogy létezik olyan $z \in S$ pont, amelyre tetszőleges $u, v \in \operatorname{bd} S$, $z \in \overline{uv}$ esetén

$$\frac{d(u,z)}{d(u,v)} \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

Most minden $x \in S$ pontra legyen $S_x = x + \frac{n}{n+1}(-x + S)$. Állítjuk, hogy az S_x halmazok metszete nem üres. Valóban, legyenek $x_0, \dots, x_n \in S$, és tekintsük az

$$y = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$$

pontot. Ekkor minden $0 \leqslant j \leqslant n$ esetén

$$y = x_j + \frac{n}{n+1}\Big(-x_j + \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} x_i\Big) \in x_j + \frac{n}{n+1}(-x_j + S).$$

Következésképpen az $S_{x_0}, \dots, S_{x_n}$ halmazok metszete nem üres, amiből a 4.2.2. Helly tétel felhasználásával adódik, hogy az S_x halmazok metszete sem üres. Ezek után legyen $z \in \cap_{x\in S} S_x$, valamint u és v az S határának olyan pontjai, amelyekre $z \in \overline{uv}$. Ekkor

$$z \in u + \frac{n}{n+1}(-u + \overline{uv}) \subseteq S_u,$$

ahonnan $z = u + \frac{n}{n+1}\lambda(-u+v)$ valamely $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén. Így

$$\frac{d(u,z)}{d(u,v)} = \lambda\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1}. \qquad \square$$

Feladatok

4.1. Feladat. *Legyenek $F_1, F_2, \dots, F_{n+1} \subseteq \mathbb{E}^n$ kételemű ponthalmazok. Mutassuk meg, hogy ekkor $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n+1}$ felbontható két diszjunkt A és B részre úgy, hogy A és B is pontosan egy pontot tartalmaz az $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ halmazok mindegyikéből, továbbá* $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$.

4.2. Feladat. *Tegyük fel, hogy az n-dimenziós tér zárt féltereinek valamely véges családja lefed egy adott konvex halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a félterek közül legfeljebb $n+1$ is lefedi az adott halmazt.*

4.3. Feladat. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy k pontból álló, tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $q \in \mathbb{E}^n$ pont, hogy a q-t nem tartalmazó, zárt félterek bármelyike S legfeljebb $\lfloor nk/(n+1)\rfloor$ pontját tartalmazza.* [Útmutatás: Mutassuk meg, hogy az S legalább $\lfloor nk/(n+1)\rfloor+1$ pontját tartalmazó zárt félterek metszete nem üres.]

4.4. Feladat*. *Legyenek $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}$ az n-dimenziós tér kompakt, konvex halmazaiból álló nem üres halmazcsaládok, és tegyük fel, hogy $C_1 \cap \dots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ tetszőleges $C_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, C_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$ választás mellett. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\mathcal{C}_i$ családok legalább egyikében az összes halmaznak van közös pontja.* [Útmutatás: Először is vegyük észre, hogy elég véges $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}$ családokat tekinteni. Válasszunk ki n halmazt a $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}$ családokból úgy, hogy minden családba legfeljebb egy halmaz tartozik, és legyen $\mathcal{F}$ az így kapott

n-esek metszeteinek családja. Ekkor található olyan $v \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy $\min\{\langle x, v\rangle \mid x \in F\}$ minden $F \in \mathcal{F}$ esetén egyetlen pontban vétetik fel (ez azon múlik, hogy egy kompakt, konvex halmaz majdnem minden egységnyi hosszú normálvektorú támaszhipersíkja a halmazt egyetlen pontban metszi). Legyen F' egy olyan halmaz, melyre a fenti minimum maximális, és $x' \in F'$ az a pont, ahol ez felvétetik. Mutassuk meg, hogy ha F' mondjuk a $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ családokból kiválasztott halmazok metszete, akkor $x' \in \cap\mathcal{C}_{n+1}$.]

4.5. Feladat (Maehara, 1989). *Legyen $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér legalább $n+2$ darab, nem feltétlenül origó középpontú és egységnyi sugarú $(n-1)$-dimenziós szférájának családja, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ bármely $n+2$ szférájának van közös pontja. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathcal{F}$ összes szférájának van közös pontja.* [Útmutatás: A dimenzióra vonatkozó teljes indukcióval mutassuk meg, hogy ha $m \leqslant n$, és $\mathcal{F}$ az n-dimenziós tér $(n-1)$-dimenziós szféráinak olyan családja, melyben a szférák középpontjai egy m-dimenziós affin altérben vannak, továbbá bármely $m+2$ szférának van közös pontja, akkor az összes szférának van közös pontja.]

4.6. Feladat* (Doignon, 1973). *Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_r\}$ az n-dimenziós tér legalább 2^n konvex halmazának egy családja, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ bármely 2^n tagjának van közös rácspontja (azaz olyan pontja, melynek minden koordinátája egész szám). Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathcal{F}$ összes tagjának van közös rácspontja.* [Útmutatás: Rácspontok egy halmazát nevezzük rácskonvexnek, ha azt egy konvex halmaz metszi ki a rácsból. Definiáljuk rácspontok egy K halmazának a $\mathrm{conv}_\Lambda(K)$ rácskonvex burkát, mint a halmazt tartalmazó összes rácskonvex halmaz metszetét. Mutassuk meg, hogy tetszőleges 2^n+1 rácspontból álló $K \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazra

$$\bigcap_{x \in K} \mathrm{conv}_\Lambda(K \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Ehhez elég belátni, hogy a ponthalmaz konvex burkát tekintve nem létezhet a tartalmazásra nézve minimális ellenpélda. Ezek után az állítás r szerinti teljes indukcióval igazolható.]

4.7. Feladat (Alon-Kleitman, 1992).** *Legyenek $p \geqslant q$ pozitív egész számok. Kompakt, konvex halmazok egy $\mathcal{F}$ családjáról azt mondjuk, hogy (p,q)-tulajdonságú, ha $\mathcal{F}$ bármely p tagja között található q olyan, amelyeknek van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy minden $p \geqslant q \geqslant n+1$ esetén létezik olyan $c = c(p,q,n) < \infty$ univerzális konstans, melyre az n-dimenziós tér bármely, kompakt, konvex halmazokból álló, (p,q)-tulajdonságú családja letűzhető legfeljebb c ponttal, azaz a halmazok mindegyikéhez hozzátartozik ezen pontok legalább egyike.*

4.8. Feladat* **(Bárány-Katchalski-Pach, 1982).** *Legyen* $\mathcal{F}$ *az* n*-dimenziós tér legalább* $2n$ *konvex halmazának egy véges családja, és tegyük fel, hogy* $\mathcal{F}$ *bármely* $2n$ *halmaza metszetének térfogata legalább* n^{2n^2}*. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $V(\cap\mathcal{F}) \geqslant 1$*.*

4.9. Feladat (Breen, 1979). *Legyen* $S \subseteq \mathbb{E}^n$ *kompakt halmaz és* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *rögzített szám. Tegyük fel, hogy* S *tetszőleges* $n+1$ *pontjához létezik olyan* n*-dimenziós,* ε *sugarú gömb* S*-ben, amelynek bármely pontjából mind az* $n+1$ *pont látható. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan* n*-dimenziós,* ε *sugarú gömb* S*-ben, amelynek bármely pontjából* S *összes pontja látható.* [Útmutatás: Módosítsuk a 4.4.2. Tétel bizonyítását.]

5. fejezet

Konvex halmazok analitikus leírása

5.1. Konvex halmazok Hausdorff távolsága

Számos geometriai szélsőérték feladatban a megoldás létezésének bizonyítása alapvető fontosságú. Ehhez általában kompakt, konvex halmazok bizonyos családjairól kell kimutatni, hogy tartalmaznak valamilyen speciális tulajdonsággal bíró tagot. Például az izoperimetrikus problémánál (ld. 9.2. fejezet) egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy az n-dimenziós tér adott térfogatú kompakt, konvex halmazai között létezik minimális felszínű halmaz. Fejezetünk fő célja az ún. Blaschke-féle kiválasztási tétel bizonyítása, amelynek segítségével az ilyen típusú problémák viszonylag könnyebben kezelhetővé válhatnak. Első lépésként metrikával látjuk el a kompakt, konvex halmazok összességét.

5.1.1. Definíció. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmazok. Ekkor az*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt az A és B halmazok Minkowski összegének nevezzük.

5.1.2. Állítás. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok. Ekkor $A + B$ szintén nem üres, kompakt, konvex halmaz.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy az A és B konvex halmazok Minkowski összege konvex halmaz. Legyenek $c_1, c_2 \in A + B$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ekkor léteznek olyan $a_1, a_2 \in A$ és $b_1, b_2 \in B$ pontok, hogy $c_1 = a_1 + b_1$ és $c_2 = a_2 + b_2$. Mivel A és B konvex, így

$$\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A \quad \text{és} \quad \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B.$$

Ennélfogva

$$\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 = \lambda(a_1+b_1) + (1-\lambda)(a_2+b_2) = \\ = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in A+B,$$

azaz $A+B$ konvex.

A zártság igazolásához legyen $(c_i) : \mathbb{N} \to A+B$ konvergens sorozat, a határértéket jelölje c. Ekkor léteznek olyan $(a_i) : \mathbb{N} \to A$ és $(b_i) : \mathbb{N} \to B$ sorozatok, hogy $c_i = a_i + b_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel A és B kompakt halmazok, ezért létezik olyan (i_j) indexsorozat (valójában (i_j) és (i_{j_k}), ám ez utóbbit tekintve (i_j)-nek), hogy az (a_{i_j}) és a (b_{i_j}) részsorozatok konvergensek és a, illetve b határértékük A-ban, illetve B-ben van. Most $c = \lim_{i\to\infty} c_i = \lim_{j\to\infty} c_{i_j} = \lim_{j\to\infty}(a_{i_j} + b_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} a_{i_j} + \lim_{j\to\infty} b_{i_j} = a + b \in A+B$, azaz $A+B$ zárt halmaz. $A+B$ korlátossága magától értetődik. $\square$

5.1.3. Definíció. *Legyen $A \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $B_\delta(o)$ pedig az origó középpontú, δ sugarú, zárt gömb. Ekkor az $A_\delta = A + B_\delta(o)$ kompakt, konvex halmazt az A halmaz δ sugarú parallel tartományának nevezzük.*

5.1.4. Definíció. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok. Ekkor a*

$$d(A,B) = \inf\{\delta \in \mathbb{R}^+ \mid A \subseteq B_\delta \text{ és } B \subseteq A_\delta\}$$

nem negatív számot az A és B halmazok Hausdorff távolságának nevezzük.

Világos, hogy

$$d(A,B) = \max\{\sup\nolimits_{a\in A}(\inf\nolimits_{b\in B} d(a,b)), \sup\nolimits_{b\in B}(\inf\nolimits_{a\in A} d(a,b))\}.$$

Megmutatjuk, hogy a Hausdorff távolság metrika a nem üres, kompakt, konvex halmazok családján.

5.1.5. Állítás. *Ha $A, B, C \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, akkor*

(1) $d(A,B) \geqslant 0$.

(2) $d(A,B) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $A = B$.

(3) $d(A,B) = d(B,A)$.

(4) $d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$.

Bizonyítás. Az (1)-(3) tulajdonságok közvetlenül adódnak a definícióból. A (4) tulajdonság igazolásához pedig legyenek $\alpha = d(A,B)$, $\beta = d(B,C)$ és $\gamma = \alpha + \beta$. Mivel $B \subseteq A_\alpha$, ezért $B_\beta \subseteq (A_\alpha)_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_\gamma$. Így $C \subseteq B_\beta \subseteq A_\gamma$. Hasonlóan, mivel $B \subseteq C_\beta$, ezért $A \subseteq B_\alpha \subseteq (C_\beta)_\alpha = C_{\beta+\alpha} = C_\gamma$. Következésképpen $C \subseteq A_\gamma$ és $A \subseteq C_\gamma$, vagyis $d(A,C) \leqslant \gamma = \alpha + \beta = d(A,B) + d(B,C)$. □

5.1.6. Definíció. *Az n-dimenziós tér nem üres, kompakt, konvex halmazainak családját jelölje $\mathcal{K}_n$.*

Mint minden metrikus térben, így $\mathcal{K}_n$-ben is bevezethetők a szokásos fogalmak.

5.1.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $(A_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ sorozat Cauchy-féle, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan n küszöbindex, hogy minden $i, j > n$ esetén $d(A_i, A_j) < \varepsilon$.*

5.1.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $(A_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ sorozat konvergens, és határalakzata az $A \in \mathcal{K}_n$ halmaz, ha $\lim_{i\to\infty} d(A_i, A) = 0$.*

Nyilván minden konvergens sorozat egyben Cauchy-féle is. Megmutatjuk, hogy az állítás megfordítása is igaz, vagyis $\mathcal{K}_n$ a Hausdorff távolságra nézve teljes metrikus tér.

5.1.9. Tétel. *Ha egy $(A_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ sorozat Cauchy-féle, akkor létezik olyan $B \in \mathcal{K}_n$ halmaz, hogy $\lim_{i\to\infty} A_i = B$.*

Bizonyítás. Minden i pozitív egész számra legyen $B_i = \operatorname{cl}(A_i \cup A_{i+1} \cup \cdots)$. Ekkor persze $B_{i+1} \subseteq B_i$ minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Legyen továbbá

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Mivel (B_i) nem üres, kompakt halmazok egymásba skatulyázott, monoton csökkenő sorozata, ezért B szükségképpen nem üres, kompakt halmaz. Állítjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan m küszöbindex, hogy minden $i > m$ esetén $B_i \subseteq \operatorname{int} B_\varepsilon$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan (i_h) indexsorozat, hogy $B_{i_h} \nsubseteq \operatorname{int} B_\varepsilon$ minden $h \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $C_{i_h} = B_{i_h} \cap (\mathbb{E}^n \setminus \operatorname{int} B_\varepsilon)$ minden $h \in \mathbb{N}$ esetén. Most (C_{i_h}) nem üres, kompakt halmazok egymásba skatulyázott, monoton csökkenő sorozata, következésképpen a C_{i_h} halmazoknak van közös pontja. Azonban ez a közös pont egyrészt hozzátartozik a B_{i_h} halmazok mindegyikéhez, másrészt nem tartozhat hozzá a B halmazhoz, ellentmondás. Ezért $A_i \subseteq \operatorname{int} B_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon$ minden $i > m$ esetén, hiszen $A_k \subseteq B_i$ minden $k \geqslant i$ esetén.

Most felhasználva azt, hogy az (A_i) sorozat Cauchy-féle, minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan m' küszöbindex, hogy $d(A_i, A_j) < \varepsilon$, ha $i, j > m'$. Ezért minden $i > m'$ esetén

$$\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j \subseteq (A_i)_\varepsilon,$$

és így

$$B \subseteq B_i = \operatorname{cl} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j \subseteq (A_i)_\varepsilon.$$

Ennélfogva $d(A_i, B) < \varepsilon$, ha $i > \max\{m, m'\}$, vagyis az (A_i) sorozat a B halmazhoz konvergál.

A bizonyítás teljessé tételéhez meg kell még mutatnunk, hogy B konvex. Indirekt tegyük fel, hogy B nem konvex. Ekkor léteznek olyan $x, y \in B$ pontok, valamint olyan $z \in \overline{xy}$ pont, hogy $z \notin B$. Mivel B zárt, ezért létezik olyan δ pozitív szám, hogy a z középpontú, δ sugarú nyílt gömb diszjunkt B-től. Legyen i olyan index, amelyre $d(A_i, B) < \delta/2$, és válasszunk két olyan $x', y' \in A_i$ pontot, amelyekre $d(x, x') < \delta/2$ és $d(y, y') < \delta/2$. Ekkor létezik olyan $z' \in \overline{x'y'}$ pont is, hogy $d(z, z') < \delta/2$. De így $d(\{z'\}, B) > \delta/2$, azaz $z' \notin B_{\delta/2}$. Viszont $A_i \subseteq B_{\delta/2}$, következésképpen $z' \notin A_i$, ellentmondva A_i konvexitásának. □

A Blaschke-féle kiválasztási tétel bizonyításához szükségünk van még egy definícióra.

5.1.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}_n$ halmazcsalád egyenletesen korlátos, ha létezik olyan zárt gömb, amelyik $\mathcal{M}$ minden tagját tartalmazza.*

5.1.11. Tétel. *Legyen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}_n$ egy egyenletesen korlátos, végtelen halmazcsalád. Ekkor $\mathcal{M}$ tartalmaz olyan konvergens (A_i) sorozatot, melynek határértéke $\mathcal{K}_n$ valamely tagja.*

Bizonyítás. Az 5.1.9. Tétel alapján elég belátni, hogy $\mathcal{M}$ tartalmaz Cauchy-féle sorozatot. Tekintsük $\mathbb{E}^n$ egy olyan C kockáját, amely $\mathcal{M}$ minden tagját tartalmazza. Legyen ennek a kockának az élhossza τ. Az élek 2^i egyenlő részre osztásával a C kockát $2^{-i}\tau$ élhosszú, egybevágó, zárt kockákra bonthatjuk;

jelölje $\mathcal{L}_i$ a kapott kis kockák családját minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Valamely $M \in \mathcal{M}$ halmazra és rögzített i pozitív egészre az $\mathcal{L}_i$ család M-et metsző tagjainak egyesítését M minimális fedőjének nevezzük.

Mivel $\mathcal{L}_1$ csak véges sok kis kockából áll, ezért csak véges sok minimális fedő konstruálható $\mathcal{L}_1$ tagjaiból. De $\mathcal{M}$ végtelen halmaz, következésképpen $\mathcal{M}$-ből kiválasztható olyan $(A_{1\alpha})$ végtelen részsorozat, amely tagjainak minimális fedője ugyanaz. Hasonlóan, $(A_{1\alpha})$ tartalmaz olyan $(A_{2\alpha})$ végtelen részsorozatot, amely tagjainak $\mathcal{L}_2$-ből alkotott minimális fedői megegyeznek. Eljárásunkat folytatva egy olyan $(A_{i\alpha})$ dupla sorozathoz jutunk, amelyre minden rögzített i pozitív egész esetén az $(A_{i\alpha})$ sorozat tagjainak minimális fedője ugyanaz.

Világos, hogy ha két ilyen halmaznak a minimális fedője ugyanaz, akkor távolságuk nem haladhatja meg a fedésben előforduló kis kockák testátlójának hosszát. Így minden rögzített i pozitív egészre

$$d(A_{i\alpha}, A_{i\beta}) \leqslant \frac{\tau\sqrt{n}}{2^i}.$$

Továbbá mivel $(A_{j\beta})$ az $(A_{i\alpha})$ egy részsorozata ha $j \geqslant i$, ezért

$$d(A_{i\alpha}, A_{j\beta}) \leqslant \frac{\tau\sqrt{n}}{2^i}$$

tetszőleges α, β és $j \geqslant i$ esetén. Végül tekintsük az $(A_i) = (A_{ii})$ átlós sorozatot. Most ha $j \geqslant i$, akkor

$$d(A_i, A_j) \leqslant \frac{\tau\sqrt{n}}{2^i}.$$

Következésképpen minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan m küszöbindex, hogy bármely $i, j > m$ esetén $d(A_i, A_j) < \varepsilon$, azaz az (A_i) sorozat Cauchy-féle. $\square$

Végül megmutatjuk, hogy a konvex politópok egy ún. mindenütt sűrű halmazt alkotnak $\mathcal{K}_n$-ben. Ez a tény főleg a későbbi fejezetekben fog majd jelentősebb szerephez jutni.

5.1.12. Állítás. *Bármely $S \in \mathcal{K}_n$ halmazhoz létezik konvex politópoknak olyan sorozata, amely S-hez konvergál.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\dim S = n$. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan P konvex politóp, hogy $P \subseteq S \subseteq P_\varepsilon$. Valóban, mivel S kompakt halmaz, így minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik véges sok olyan $x_1, \ldots, x_k \in S$ pont, hogy az ezen pontok köré rajzolt ε sugarú gömbök lefedik S-et. Legyen

$$P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Most minden x_i pont a konvex S halmazban van, ezért $P \subseteq S$. Másrészt $S \subseteq P_\varepsilon$ is nyilván fennáll, hiszen S-et már az $x_1, \ldots, x_k$ pontok köré rajzolt, ε sugarú gömbök is lefedik.

Ezek után tekintsük konvex politópoknak egy olyan (P_i) sorozatát, melyre

$$P_i \subseteq S \subseteq (P_i)_{1/i}$$

minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Ekkor a (P_i) sorozat definíció szerint éppen az S halmazhoz konvergál. □

5.2. Konvex halmazok távolságfüggvénye

A távolságfüggvényt először Minkowski alkalmazta abból a célból, hogy a standard n-dimenziós lineáris teret az euklideszitől különböző metrikával lássa el.

5.2.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz. Ekkor a*

$$g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda S\}$$

függvényt az S távolságfüggvényének nevezzük.

Világos, hogy ha $x \in \mathbb{E}^n \setminus \{o\}$, és az origóból induló, x-en áthaladó félegyenes S határát mondjuk x_0-ban metszi, akkor $g(x) = \|x\|/\|x_0\|$.

A következő tétel a távolságfüggvény legfontosabb tulajdonságait foglalja össze.

5.2.2. Tétel. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz, akkor annak g távolságfüggvénye az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

(1) $g(x) \geqslant 0$ *minden* $x \in \mathbb{E}^n$ *esetén,*

(2) $g(x) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = o$*,*

(3) $g(\lambda x) = \lambda\, g(x)$ *minden* $x \in \mathbb{E}^n$ *és* $\lambda \geqslant 0$ *esetén,*

(4) *$g(x+y) \leqslant g(x)+g(y)$ minden $x, y \in \mathbb{E}^n$ esetén.*

Megfordítva, ha egy $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az (1)-(4) tulajdonságokkal, akkor az

$$S = \{x \in \mathbb{E}^n \mid g(x) \leqslant 1\}$$

halmaz egy az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz, melynek távolságfüggvénye éppen g.

Bizonyítás. Először legyen g az S távolságfüggvénye. Az (1)-(3) tulajdonságok közvetlenül adódnak a definícióból. A (4) tulajdonság igazolásához tekintsünk két tetszőleges $x, y \in \mathbb{E}^n \setminus \{o\}$ pontot. Most ha $g(x) = \alpha$ és $g(y) = \beta$, akkor $\frac{1}{\alpha}x \in S$ és $\frac{1}{\beta}y \in S$, így S konvexitása miatt

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{1}{\alpha}\,x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{1}{\beta}\,y \in S.$$

Következésképpen $g(x+y) \leqslant \alpha+\beta = g(x)+g(y)$. Ez persze akkor is fennáll, ha x és y valamelyike az origó.

Megfordítva, legyen $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely rendelkezik az (1)-(4) tulajdonságokkal. Megmutatjuk, hogy g folytonos (és ehhez csak a (3)-(4) tulajdonságokat fogjuk használni). Tekintsük a

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid \ |x_i| \leqslant 1 \text{ minden } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ esetén}\}$$

kockát. Ekkor minden $x \in C$ esetén az előjelek alkalmas megválasztása mellett

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \pm|x_i|e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| g(\pm e_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\pm e_i),$$

ahol $\{e_1, \ldots, e_n\}$ szokásos módon $\mathbb{E}^n$ standard bázisa. Most a

$$\gamma = n \cdot \max\{g(e_1), g(-e_1), \ldots, g(e_n), g(-e_n)\}$$

jelölés bevezetésével $g(x) \leqslant \gamma$ adódik.

Ezek után legyen $x_0 \in \mathbb{E}^n$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges pozitív szám. Ekkor (4) miatt minden $x \in \mathbb{E}^n$ esetén

$$g(x) \leqslant g(x-x_0) + g(x_0) \quad \text{és} \quad g(x_0) \leqslant g(x_0-x) + g(x),$$

azaz $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \max\{g(x-x_0), g(x_0-x)\}$. Így $|g(x)-g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, ha $x - x_0 \in \varepsilon\frac{1}{\gamma}C$, vagyis g folytonos.

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{E}^n \mid g(x) \leqslant 1\}$ halmazt. Világos, hogy $\frac{1}{\gamma}C \subseteq S$. Másrészt $S \subseteq \frac{1}{\delta}C$, ahol $\delta > 0$ jelöli a g minimumát $\operatorname{bd} C$-n. Továbbá ha $x, y \in S$ és $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, akkor

$$g(\vartheta x+(1-\vartheta)y) \leqslant g(\vartheta x)+g((1-\vartheta)y) = \vartheta g(x)+(1-\vartheta)g(y) \leqslant \vartheta+(1-\vartheta) = 1,$$

azaz $\vartheta x+(1-\vartheta)y \in S$. Kaptuk tehát egymás után, hogy $o \in \operatorname{int} S$, S korlátos és S konvex. S zártsága pedig egyszerűen a g függvény folytonosságából következik. □

Megjegyezzük, hogy S pontosan akkor szimmetrikus az origóra, ha (3) helyett a következő erősebb feltétel teljesül.

(3') $g(\lambda x) = |\lambda| g(x)$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ezek után már egyszerűen látható, hogy mit vett észre Minkowski.

5.2.3. Következmény. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező, az origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmaz, és legyen az S távolságfüggvénye g. Ekkor a $d_M(x, y) = g(x - y)$ függvény metrika $\mathbb{E}^n$-en, azaz*

(1) $d_M(x, y) \geqslant 0$ *minden* $x, y \in \mathbb{E}^n$ *esetén,*

(2) $d_M(x, y) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $x = y$,

(3) $d_M(x, y) = d_M(y, x)$ *minden* $x, y \in \mathbb{E}^n$ *esetén,*

(4) $d_M(x, z) \leqslant d_M(x, y) + d_M(y, z)$ *minden* $x, y, z \in \mathbb{E}^n$ *esetén.*

Ízelítőül lássuk a 4.4.3. Jung tétel megfelelőjét ebben az új geometriában.

5.2.4. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező, az origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmaz, és legyen a K távolságfüggvénye g. Két pont távolságát a szokásos euklideszi metrika helyett a g által generált metrika szerint számolva, valamely $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmazra jelölje $\operatorname{diam}_M S$ az S pontjai között fellépő távolságok maximumát, $R_M(S)$ pedig az S-et tartalmazó legkisebb gömb sugarát. Ekkor*

$$R_M(S) \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}_M S.$$

Továbbá egyenlőség áll fenn például, ha $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ affin független pontrendszer, $T = \operatorname{conv} S$ és $K = T + (-T)$.

Bizonyítás. A 4.3.1. Klee tétel (2) pontja szerint elég azzal az esettel foglalkozni, amikor $S = \{x_0, \dots, x_n\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S affin független pontrendszer. Legyen minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén

$$s_i = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x_j \quad \text{és} \quad s = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} x_j.$$

Ekkor minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén

$$\begin{aligned}
\|x_i - s\| &= \left\| \frac{n}{n+1}(x_i - s_i) \right\| \\
&= \frac{n}{n+1} \|x_i - s_i\| \\
&= \frac{n}{n+1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} (x_i - x_j) \right\| \\
&\leqslant \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \|x_i - x_j\| \\
&\leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}_M S.
\end{aligned}$$

Az állítás második felének igazolásához minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén jelölje T_i a T szimplex x_i-vel szemközti $(n-1)$-lapját, H_i pedig a T_i által meghatározott hipersíkot. Ekkor minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén $-x_i + T_i \subseteq \operatorname{bd} K$, és így

$$\|x_i - s_i\| = \|x_i - x_0\| = \dots = \|x_i - x_{i-1}\| = \|x_i - x_{i+1}\| = \dots = \|x_i - x_n\| = 1,$$

azaz $\operatorname{diam}_M S = 1$. Ebből következik, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban mindenhol egyenlőség áll fenn. Ez geometriailag azt jelenti, hogy minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén a $K_{n/(n+1)}(x_i) = x_i + \frac{n}{n+1} K$ halmaz határa átmegy az s ponton. Továbbá könnyű ellenőrizni, hogy

$$\bigcap_{i=0}^{n} K_{n/(n+1)}(x_i) = \{s\}.$$

Valóban, ha egy s' pont hozzátartozik a metszethez, akkor minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén az s' pont benne van az $x_i + \frac{n}{n+1}(-x_i + H_i)$ hipersík által határolt, az x_i-t tartalmazó zárt féltérben. De ezen félterek pontjainak az $\{x_0, \dots, x_n\}$ affin koordinátarendszerben felírt $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ baricentrikus koordinátáira, amelyek az 1.2.10. Állítás alapján definiálhatók, $\alpha_i \geqslant \frac{1}{n+1}$ minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Így mivel $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, ezért s' koordinátái $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n+1}$, vagyis

$s' = s$. Másrészt az $x_0 + \rho K, \dots, x_n + \rho K$ halmazok metszete nyilván üres, ha $\rho < \frac{n}{n+1}$. Ennélfogva

$$R_M(S) = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}_M S. \qquad \square$$

5.3. Konvex halmazok támaszfüggvénye

Mivel egy nem üres, kompakt, konvex halmaz megegyezik a támaszféltereinek metszetével, ezért egy ilyen halmazt egyértelműen meghatároz a támaszhipersíkjainak a helyzete. A támaszhipersíkok megadásnak egy módja a támaszfüggvény.

5.3.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor a*

$$h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sup_{s \in S} \langle s, x\rangle$$

függvényt az S támaszfüggvényének nevezzük.

Lássunk egy egyszerű példát! Megmutatjuk, hogy a $B \subseteq \mathbb{E}^n$ origó középpontú, egységnyi sugarú, zárt gömb támaszfüggvénye

$$h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|.$$

Valóban, ha $x = o$, akkor $h(x) = 0$ nyilvánvaló módon, különben pedig

$$h(x) = \sup_{s \in S} \langle s, x\rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle = \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|} = \|x\|.$$

5.3.2. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, h pedig az S támaszfüggvénye. Ekkor*

(1) *$h(\lambda x) = \lambda\, h(x)$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ és $\lambda \geqslant 0$ esetén,*

(2) *h konvex,*

(3) *h folytonos.*

Bizonyítás. (1) közvetlenül következik h definíciójából. (2) igazolásához legyenek $x, y \in \mathbb{E}^n$, valamint α, β olyan nem negatív számok, amelyekre $\alpha + \beta = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= \sup_{s \in S} \langle s, \alpha x + \beta y\rangle \\ &= \sup_{s \in S} \{\alpha\langle s, x\rangle + \beta\langle s, y\rangle\} \\ &\leqslant \alpha \sup_{s \in S} \langle s, x\rangle + \beta \sup_{s \in S} \langle s, y\rangle \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y), \end{aligned}$$

azaz h konvex. Végül (1) és (2) alapján

$$h(x+y) \leqslant \tfrac{1}{2}(h(2x)+h(2y)) = h(x)+h(y),$$

így (3) az 5.2.2. Tétel bizonyításánál elmondottak szerint adódik. □

A következő állítás arra mutat rá, hogy honnan származik a támaszfüggvény elnevezés.

5.3.3. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és legyen h az S támaszfüggvénye. Ekkor tetszőleges $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{o\}$ esetén*

(1) *létezik olyan $x_u \in S$ pont, hogy $h(u) = \langle x_u, u\rangle$,*

(2) *a $H = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle = h(u)\}$ hipersík az S támaszhipersíkja x_u-ban,*

(3) *a H hipersík origótól mért előjeles távolsága $h(u/\|u\|)$.*

Bizonyítás. (1) Mivel a skaláris szorzat folytonos, S pedig kompakt halmaz, így $\langle s, u\rangle$ felveszi a maximumát valamely $x_u \in S$ pontban.

(2) A H hipersík nem vághatja ketté S-et, ugyanis minden $s \in S$ esetén $\langle s, u\rangle \leqslant \sup_{s\in S}\langle s, u\rangle = h(u)$. Továbbá $x_u \in H \cap S$, így H támaszhipersíkja S-nek x_u-ban.

(3) Mivel u merőleges H-ra, így létezik olyan λ valós szám, amelyre $\lambda u \in H$. De ekkor H origótól mért előjeles távolsága $\lambda\|u\|$. Másrészt világos módon $\langle \lambda u, u\rangle = h(u)$, ezért

$$h\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|}\,h(u) = \frac{\langle \lambda u, u\rangle}{\|u\|} = \lambda\,\frac{\langle u, u\rangle}{\|u\|} = \lambda\|u\|. \qquad \square$$

Megmutatjuk, hogy egy nem üres, kompakt, konvex halmaz a támaszfüggvénye által egyértelműen meghatározott.

5.3.4. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és legyen h az S támaszfüggvénye. Ekkor*

$$S = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle \leqslant h(u) \text{ minden } u \in \mathbb{E}^n \text{ esetén}\}.$$

Bizonyítás. A $H_u = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle \leqslant h(u)\}$ zárt féltér tartalmazza S-et minden $u \in \mathbb{E}^n$ esetén, így

$$S \subseteq \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle \leqslant h(u) \text{ minden } u \in \mathbb{E}^n \text{ esetén}\}.$$

Másrészt ha $x_0 \notin S$, akkor a 2.2.10. Állítás szerint létezik olyan

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u_0 \rangle = \delta\}$$

hipersík, amelyik szigorúan elválasztja x_0-t S-től. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\langle s, u_0 \rangle < \delta$ ha $s \in S$, és $\langle x_0, u_0 \rangle > \delta$. Az első egyenlőtlenségből következik, hogy $h(u_0) \leqslant \delta$, és így $x_0 \notin H_{u_0}$. Ennélfogva

$$\{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle \leqslant h(u) \text{ minden } u \in \mathbb{E}^n \text{ esetén}\} \subseteq S$$

is fennáll. $\square$

A konvex halmazok elméletében alapvető szerepet játszanak kompakt, konvex halmazok nem negatív együtthatós "lineáris kombinációi" (azaz a homotetikus példányok Minkowski összegei), így érdemes külön megjegyezni azt az egyszerű összefüggést, ami a megfelelő halmazok támaszfüggvényei között fennáll.

5.3.5. Állítás. *Legyenek $S_1, \ldots, S_k \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, valamint $h_1, \ldots, h_k$ ezek támaszfüggvényei. Ekkor tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ pozitív számokra az $S = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i$ nem üres, kompakt, konvex halmaz támaszfüggvénye*

$$h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}, \ u \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(u).$$

Bizonyítás. A támaszfüggvény pozitív homogenitása miatt feltehetjük, hogy $\lambda_i = 1$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Az állítást csak $k = 2$ esetén igazoljuk, az általános eset teljes indukcióval a szokásos módon bizonyítható. Legyen $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{o\}$. Ekkor léteznek olyan $s_1 \in S_1$ és $s_2 \in S_2$ pontok, hogy $\langle s_1, u \rangle = h_1(u)$ és $\langle s_2, u \rangle = h_2(u)$. Ebből következik, hogy $h_1(u) + h_2(u) = \langle s_1, u \rangle + \langle s_2, u \rangle = \langle s_1 + s_2, u \rangle \leqslant h(u)$. Másrészt minden $s \in S$ pont előállítható $s = s_1 + s_2$ alakban, ahol $s_1 \in S_1$ és $s_2 \in S_2$. Most $\langle s, u \rangle = \langle s_1 + s_2, u \rangle = \langle s_1, u \rangle + \langle s_2, u \rangle \leqslant h_1(u) + h_2(u)$, és mivel $s \in S$ tetszőleges volt, így $h(u) \leqslant h_1(u) + h_2(u)$ is fennáll. $\square$

A polaritás segítségével érdekes összefüggés létesíthető egy az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz támaszfüggvénye és az előző fejezetben bevezetett távolságfüggvénye között.

5.3.6. Tétel. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz, valamint jelölje S poláris halmazát S^*. Ekkor S támaszfüggvénye megegyezik S^* távolságfüggvényével, és S távolságfüggvénye megegyezik S^* támaszfüggvényével. Vagyis $h_S = g_{S^*}$ és $g_S = h_{S^*}$.*

Bizonyítás. A 3.4.8. Állítás szerint S^* szintén az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz. Valamely $x \in \mathbb{E}^n \setminus \{o\}$ pontra jelölje x_0 az origóból induló, x-en áthaladó félegyenes és $\operatorname{bd} S^*$ metszéspontját. Mivel $x_0 \in S^*$, ezért $\langle s, x_0 \rangle \leqslant 1$ minden $s \in S$ esetén, azaz $h_S(x_0) \leqslant 1$. De $x = \|x\|(x_0/\|x_0\|)$, így

$$h_S(x) = h_S\left(\frac{\|x\|}{\|x_0\|}\, x_0\right) = \frac{\|x\|}{\|x_0\|}\, h_S(x_0) \leqslant \frac{\|x\|}{\|x_0\|} = g_{S^*}(x).$$

Másrészt $g_S(x) > 0$ ha $x \neq 0$, és így $x \notin \delta S$ ha $0 < \delta < g_S(x)$. De $\delta S = (\delta S)^{**} = (\frac{1}{\delta} S^*)^*$ a 3.4.7. és 3.4.9. Állítás szerint, ezért $x \notin (\frac{1}{\delta} S^*)^*$. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\frac{1}{\delta} s_0 \in \frac{1}{\delta} S^*$ pont, hogy $\langle \frac{1}{\delta} s_0, x \rangle > 1$, vagyis $\langle s_0, x \rangle > \delta$. Ebből pedig következik, hogy $h_{S^*}(x) = \sup_{s \in S^*} \langle s, x \rangle > \delta$. És mivel ez minden $\delta < g_S(x)$ esetén fennáll, ezért $h_{S^*}(x) \geqslant g_S(x)$.

Ennélfogva $h_{S^*}(x) = g_S(x)$ minden $x \in \mathbb{E}^n$ esetén, hiszen $h_{S^*}(o) = g_S(o) = 0$. Végül S és S^* felcserélésével kapjuk, hogy $h_S(x) = h_{S^{**}}(x) = g_{S^*}(x)$. □

Az utolsó állítás a támaszfüggvény és a Hausdorff távolság egy lényeges kapcsolatára mutat rá.

5.3.7. Állítás. *Legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, és legyen a K_1 halmaz támaszfüggvénye h_1, a K_2 halmaz támaszfüggvénye pedig h_2. Ekkor*

$$d(K_1, K_2) = \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_2(u) - h_1(u)|.$$

Bizonyítás. A $K_1 \subseteq (K_2)_\rho$ és $K_2 \subseteq (K_1)_\rho$ összefüggések ekvivalensek azzal, hogy

$$h_1(u) \leqslant h_2(u) + \rho\,\|u\| \quad \text{és} \quad h_2(u) \leqslant h_1(u) + \rho\,\|u\|,$$

azaz minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén $-\rho \leqslant h_2(u) - h_1(u) \leqslant \rho$. Innen pedig

$$\begin{aligned}
&\inf\{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid K_1 \subseteq (K_2)_\rho,\ K_2 \subseteq (K_1)_\rho\} \\
&\qquad = \inf\{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid\ |h_2(u) - h_1(u)| \leqslant \rho \text{ minden } u \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ esetén}\} \\
&\qquad = \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_2(u) - h_1(u)|\,,
\end{aligned}$$

amiből következik az állítás, hiszen h_1 és h_2 folytonos, $\mathbb{S}^{n-1}$ pedig kompakt. □

Feladatok

5.1. Feladat. *Legyenek $K, L \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, konvex halmazok és $\lambda, \mu > 0$ valós számok. Mutassuk meg, hogy*

(1) $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$,

(2) $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$.

5.2. Feladat. *Legyenek $K_1, K_2, L_1, L_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok. Mutassuk meg, hogy*

$$d(\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2), \operatorname{conv}(L_1 \cup L_2)) \leqslant \max\{d(K_1, L_1), d(K_2, L_2)\}.$$

5.3. Feladat. *Legyenek $K, L \subseteq \mathbb{E}^n$ olyan nem üres, kompakt, konvex halmazok, amelyekre $d(K, L) = 1$. Legyen továbbá $M_{(\gamma)} = (1 - \gamma)K + \gamma L$ minden $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor $d(M_{(\alpha)}, M_{(\beta)}) = \beta - \alpha$ tetszőleges $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ esetén.*

5.4. Feladat. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $\delta > 1$ esetén létezik olyan P konvex politóp, hogy $P \subseteq K \subseteq \delta P$.* [Útmutatás: K nyilván tartalmaz egy $B_r(o)$ gömböt. Legyen $0 < \varepsilon < r(\delta - 1)/\delta$. Az 5.1.12. Állítás szerint létezik olyan P konvex politóp, hogy $P \subseteq K \subseteq P_\varepsilon$. Mutassuk meg, hogy most $K \subseteq \delta P$ is fennáll.]

5.5. Feladat (Motzkin, 1935). *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, zárt halmaz. Mutassuk meg, hogy S akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in \mathbb{E}^n$ ponthoz egyetlen olyan $y \in S$ pont létezik, amelyre $d(y, x) = \inf_{s \in S} d(s, x)$.* [Útmutatás: Indirekt tegyük fel, hogy léteznek olyan x, y pontok, hogy $\overline{xy} \cap S = \{x, y\}$, és tekintsünk egy olyan $B_\rho((x + y)/2)$ gömböt, amely diszjunkt S-től. Először mutassuk meg, hogy létezik olyan maximális sugarú C gömb, amely tartalmazza B-t, a belseje viszont diszjunkt S-től. Ezután mutassuk meg, hogy C eltolható, majd a középpontjából még nagyítható úgy, hogy az előbbi két tulajdonság ne sérüljön, ellentmondás.]

5.6. Feladat. *Legyen $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ nem üres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmazok konvergens sorozata, és tegyük fel, hogy a K határalakzat szintén nem üres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{H}$ olyan hipersík $\mathbb{E}^n$-ben, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $K_i \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, továbbá $(\operatorname{int} K_0) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, akkor*

$$\lim_{i \to \infty} (K_i \cap \mathcal{H}) = K_0 \cap \mathcal{H}.$$

5.7. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a*

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid -1 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén}\}$$

kocka támaszfüggvénye $h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

5.8. Feladat. *Legyen* $S \subseteq \mathbb{E}^n$ *nem üres, kompakt, konvex halmaz, valamint* h *az* S *támaszfüggvénye. Mutassuk meg, hogy* S *akkor és csak akkor konvex politóp, ha* h *szakaszonként lineáris (azaz felosztható a tér véges sok olyan, a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt konvex poliédrikus halmazra, melyeken* h *lineáris).*

5.9. Feladat. *Legyen* $h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ *szublineáris függvény, azaz*

(1) $h(\lambda x) = \lambda\, h(x)$ *minden* $x \in \mathbb{E}^n$ *és* $\lambda \geqslant 0$ *esetén,*

(2) $h(x + y) \leqslant h(x) + h(y)$ *minden* $x, y \in \mathbb{E}^n$ *esetén.*

Mutassuk meg, hogy ekkor pontosan egy olyan $S \in \mathcal{K}_n$ *halmaz létezik, amelynek támaszfüggvénye* h.

5.10. Feladat. *Legyenek* $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathbb{E}^n$ *nem üres, kompakt, konvex halmazok, valamint* $h_1, \dots, h_k$ *ezek támaszfüggvényei. Mutassuk meg, hogy ekkor az* $S = \operatorname{conv} \cup_{i=1}^{k} S_i$ *kompakt, konvex halmaz támaszfüggvénye*

$$h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ u \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant k} h_i(u).$$

5.11. Feladat (Kneser, 1970). *Legyenek* $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathbb{E}^n$ *nem üres, kompakt, konvex halmazok, valamint* $h_1, \dots, h_k$ *ezek támaszfüggvényei. Mutassuk meg, hogy ha az* $S = \cap_{i=1}^{k} S_i$ *kompakt, konvex halmaz nem üres, akkor támaszfüggvénye*

$$h : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R},\ u \mapsto \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} h_i(u_i) \mid \sum_{i=1}^{k} u_i = u \right\}.$$

[Útmutatás: Először mutassuk meg, hogy a jobb oldalon álló függvény véges és szublineáris. Ezután igazoljuk, hogy egyértelműen létezik olyan nem üres, kompakt, konvex halmaz, amelynek éppen ez a függvény a támaszfüggvénye (vö. 5.9. Feladat). Végül mutassuk meg, hogy ez a halmaz szükségképpen az S halmaz.]

6. fejezet

Konvex halmazok metrikus jellemzői

6.1. Konvex halmazok átmérője és szélessége

Ebben a fejezetben bevezetjük az átmérő, az adott irányú szélesség és a minimális szélesség fogalmát, és megvizsgáljuk, hogy a konvex halmazokhoz rendelt ezen metrikus tulajdonságok milyen összefüggésben állnak egymással.

6.1.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres halmaz. Ekkor a*

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x,y \in S} \|x - y\|$$

nem negatív valós számot az S halmaz átmérőjének nevezzük.

6.1.2. Állítás. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmaz, akkor*

$$\operatorname{diam}(\operatorname{conv} S) = \operatorname{diam} S.$$

Bizonyítás. Nyilván $\operatorname{diam} S \leqslant \operatorname{diam}(\operatorname{conv} S)$, hiszen $S \subseteq \operatorname{conv} S$. Másrészt, ha $\operatorname{diam} S \leqslant \delta$, valamely δ pozitív számra, akkor minden $x \in S$ esetén $S \subseteq B_\delta(x)$, és így $\operatorname{conv} S \subseteq B_\delta(x)$ hiszen $B_\delta(x)$ konvex halmaz. Ezek után legyen $y \in \operatorname{conv} S$ tetszőleges pont. Világos, hogy ekkor $S \subseteq B_\delta(y)$, következésképpen $\operatorname{conv} S \subseteq B_\delta(y)$ hiszen $B_\delta(x)$ is konvex halmaz. És mivel ez $\operatorname{conv} S$ bármely y pontjára fennáll, ezért $\operatorname{diam}(\operatorname{conv} S) \leqslant \delta$. Ebből pedig adódik az állítás. $\square$

6.1.3. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, l pedig egy tetszőleges egyenes. Ekkor az S halmaz l-re merőleges támaszhipersíkjainak távolságát az S halmaz l irányú szélességének nevezzük.*

Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz valamely $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ irányú szélessége könnyen kifejezhető az S halmaz h_S támaszfüggvénye segítségével. Az S halmaz u-ra merőleges támaszhipersíkjai

$$H_u = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle = h_S(u)\}$$

és

$$H_{-u} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u\rangle = -h_S(-u)\}.$$

De a H_u és H_{-u} támaszhipersíkok távolsága éppen az S halmaz u irányú $w_S(u)$ szélessége, vagyis $w_S(u) = h_S(u) + h_S(-u)$ minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén.

Egyszerűen adódik, hogy léteznek olyan párhuzamos támaszhipersík párok, melyek távolsága megegyezik S minimális, illetve maximális szélességével. A következő állítás az átmérő és a maximális szélesség közötti összefüggésre mutat rá.

6.1.4. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor az S halmaz maximális szélessége éppen* $\operatorname{diam} S$.

Bizonyítás. Legyen S maximális szélessége m, továbbá legyenek H_1 és H_2 olyan párhuzamos támaszhipersíkjai S-nek, amelyek távolsága m. Most ha $x_1 \in H_1 \cap S$ és $x_2 \in H_2 \cap S$, akkor $m \leqslant \|x_1 - x_2\| \leqslant \operatorname{diam} S$. Másrészt nyilván léteznek olyan $y_1, y_2 \in S$ pontok, hogy $\|y_1 - y_2\| = \operatorname{diam} S$. Tekintsük azokat az $\overline{y_1 y_2}$-re merőleges H_1^* és H_2^* hipersíkokat, amelyek illeszkednek y_1-re, illetve y_2-re. Ezen hipersíkok szükségképpen támaszhipersíkjai S-nek, ellenkező esetben léteznének olyan pontok S-ben, amelyek távolsága nagyobb, mint $\operatorname{diam} S$. Így $\operatorname{diam} S \leqslant m$ is fennáll. □

6.1.5. Következmény. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, valamint legyenek H_1 és H_2 olyan párhuzamos támaszhipersíkjai S-nek, amelyek távolsága megegyezik S maximális szélességével. Ekkor a H_1 és H_2 hipersíkok egy-egy pontban metszik S-et, továbbá az ezeket a pontokat összekötő szakasz merőleges H_1-re és H_2-re.*

Mit mondhatunk a minimális szélességhez tartozó párhuzamos támaszhipersík párról?

6.1.6. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, valamint legyenek H_1 és H_2 olyan párhuzamos támaszhipersíkjai S-nek, amelyek távolsága megegyezik S minimális szélességével. Ekkor H_1 és H_2 tartalmaznak olyan S-beli pontokat, amelyek összekötő szakasza merőleges H_1-re és H_2-re.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül. Ekkor $H_1 \cap S$ merőleges vetülete H_2-n diszjunkt a $H_2 \cap S$ halmaztól, azaz létezik olyan $(n-2)$-dimenziós D_2 affin altér H_2-ben, amelyik szigorúan elválasztja $H_1 \cap S$ vetületét a $H_2 \cap S$ halmaztól (vö. 2.2.10. Állítás). Jelölje D_1 a D_2 merőleges vetületét H_1-en. Most elforgathatjuk H_1-et D_1 körül, illetve H_2-t D_2 körül úgy, hogy H_1 és H_2 párhuzamos maradjon, továbbá egyik se messe az S halmazt. De az elforgatás során H_1 és H_2 távolsága csökken, ellentmondva az eredeti helyzet minimalitási tulajdonságának. $\square$

A továbbiakban gyakran fogunk foglalkozni olyan kompakt, konvex halmazokkal, melyek belseje nem üres.

6.1.7. Definíció. *Egy $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmazt konvex testnek nevezünk.*

6.2. Tarski-féle plank probléma

A következő problémát Tarski vetette fel még 1932-ben. Bizonyítsuk be, hogy ha egy K konvex test benne van a $K_1, \ldots, K_r$ konvex testek egyesítésében, akkor K minimális szélessége nem haladja meg a $K_1, \ldots, K_r$ konvex testek minimális szélességeinek összegét! Világos, hogy elég az állítást olyan párhuzamos hipersíkok által határolt $S_1, \ldots, S_r$ sávokra igazolni, ahol az S_i-t határoló hipersíkok távolsága megegyezik K_i minimális szélességével minden $1 \leqslant i \leqslant r$ esetén.

A probléma megoldásához mindenekelőtt szükségünk van egy új fogalomra, illetve néhány egyszerű összefüggésre.

6.2.1. Definíció. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Minden l egyenesre jelölje $\delta_l(K)$ a K test l-lel párhuzamos húrjai hosszának maximumát. Jelölje továbbá ezen $\delta_l(K)$ értékek minimumát $\Delta(K)$.*

Nem nehéz belátni, hogy tetszőleges K konvex testre egyrészt minden l egyenesre létezik l-lel párhuzamos, $\delta_l(K)$ hosszú húrja K-nak, másrészt a $\delta_l(K)$ értékeknek valóban van minimuma.

6.2.2. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ekkor K minimális szélessége $\Delta(K)$.*

Bizonyítás. Világos, hogy a K halmaz bármely l irányú szélessége legalább akkora, mint $\delta_l(K)$, így a minimális szélesség is legalább $\Delta(K)$. Másrészt vegyük észre, hogy ha $\overline{pq}$ a K test egy l irányú, $\delta_l(K)$ hosszú húrja, akkor léteznek olyan párhuzamos támaszhipersíkjai K-nak, amelyek illeszkednek a p, illetve q pontokra. Valóban, a $\overrightarrow{pq}$ eltolás a K halmazt egy a határpontjaitól eltekintve a K-tól diszjunkt K' halmazba viszi, különben K-nak lenne ($\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K'$ egy pontján keresztül) $\delta_l(K)$-nál hosszabb, l irányú húrja. Most a K, illetve K' halmazokat elválasztó hipersík, amelynek létezését a 2.2.5. Állítás biztosítja, valamint annak $\overrightarrow{qp}$ vektorral való eltoltja nyilván megfelel a kívánalmaknak. Ezek után a $\Delta(K)$ minimumot szolgáltató l irány esetén alkalmazva a fentieket olyan párhuzamos támaszhipersíkokhoz jutunk, amelyek távolsága legfeljebb $\Delta(K)$, így a minimális szélesség is legfeljebb $\Delta(K)$. Ebből következik az állítás. □

6.2.3. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, v pedig egy olyan nem nulla vektor, amelynek $\frac{1}{2}d$ hosszára $d < \Delta(K)$ teljesül. Ekkor $(-v+K) \cap (v+K)$ egy legalább $\Delta(K) - d$ minimális szélességű konvex test.*

Bizonyítás. A 6.2.2. Állítással összhangban K-nak létezik v-vel párhuzamos, $l \geqslant \Delta(K)$ hosszúságú húrja. Ennek a húrnak egy $l-d$ hosszúságú szelete nyilván hozzátartozik a kérdéses metszethez. Válasszuk e szelet középpontját origónak, és tekintsük az $(1-\frac{d}{l})K$ konvex testet. Ennek a testnek a minimális szélessége magától értetődően $(1-\frac{d}{l})\Delta(K) \geqslant \Delta(K) - d$. Így az állítás igazolásához elég megmutatni, hogy $(1-\frac{d}{l})K \subseteq (-v+K) \cap (v+K)$. Először is vegyük észre, hogy $\pm\frac{l}{d}v \in K$, hiszen $\pm\frac{l}{d}\|v\| = \pm\frac{l}{d}\frac{1}{2}d = \pm\frac{l}{2}$. Így minden $x \in K$ pontra K konvexitásából adódóan a $\frac{d}{l}(\pm\frac{l}{d}v)+(1-\frac{d}{l})x = \pm v+(1-\frac{d}{l})x$ pont is K-ban van. Következésképpen $(1-\frac{d}{l})x \in \mp v + K$, ami bizonyítandó volt. □

6.2.4. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, és legyenek $v_1, \dots, v_r$ olyan nem nulla vektorok, amelyek $\frac{1}{2}d_1, \dots, \frac{1}{2}d_r$ hosszaira $d_1 + \dots + d_r < \Delta(K)$ teljesül. Jelölje továbbá valamely $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{-1,+1\}^r$ szám r-esre εv az $\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_r v_r$ vektort. Ekkor*

$$\bigcap_{\varepsilon \in \{-1,+1\}^r} (-\varepsilon v + K)$$

egy legalább $\Delta(K) - d_1 - \dots - d_r$ minimális szélességű konvex test.

Bizonyítás. Definiáljuk a $K_1, \dots, K_r$ konvex testeket a következőképpen:

$$\begin{aligned}
K_1 &= (-v_1 + K) \cap (v_1 + K),\\
K_2 &= (-v_2 + K_1) \cap (v_2 + K_1),\\
&\vdots\\
K_r &= (-v_r + K_{r-1}) \cap (v_r + K_{r-1}).
\end{aligned}$$

Teljes indukcióval egyszerűen belátható, hogy most

$$K_r = \bigcap_{\varepsilon\in\{-1,+1\}^r} (-\varepsilon v + K),$$

így a 6.2.3. Állítás ismételt alkalmazásával adódik, hogy a kérdéses halmaz egy legalább $\Delta(K) - d_1 - \cdots - d_r$ minimális szélességű konvex test. $\square$

6.2.5. Tétel (Bang, 1951). *Tegyük fel, hogy egy $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testet teljesen lefednek a $d_1, \ldots, d_r > 0$ szélességű $S_1, \ldots, S_r$ sávok. Ekkor*

$$d_1 + \cdots + d_r \geqslant \Delta(K).$$

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $d_1 + \cdots + d_r < \Delta(K)$, akkor létezik le nem fedett pontja K-nak. Tekintsük az $S_1, \ldots, S_r$ sávok határhipersíkjainak $\frac{1}{2}d_1, \ldots, \frac{1}{2}d_r$ hosszúságú $v_1, \ldots, v_r$ normálvektorait. Válasszuk a

$$\bigcap_{\varepsilon\in\{-1,+1\}^r} (-\varepsilon v + K)$$

konvex test egy tetszőleges belső pontját origónak (vö. 6.2.4. Állítás). Mivel az εv pontok mind K belsejében vannak, ezért létezik olyan $\lambda > 1$ konstans, hogy a $\lambda\varepsilon v$ pontok is mind K belsejében vannak minden $\varepsilon \in \{-1, +1\}^r$ esetén. Most bármely $1 \leqslant i \leqslant r$ esetén ha az S_i sáv középpárhuzamos hipersíkjának egyenlete $\langle v_i, x\rangle + c_i = 0$, akkor a határoló hipersíkok egyenlete nyilván $\langle v_i, x\rangle + c_i = \pm\|v_i\|^2$, így egy x pont akkor és csak akkor tartozik hozzá S_i-hez, ha $|\langle v_i, x\rangle + c_i| \leqslant \|v_i\|^2$. Ezek után legyen $\bar\varepsilon = (\bar\varepsilon_1, \ldots, \bar\varepsilon_r)$ azon ε szám r-esek valamelyike, amelyre a

$$\lambda \left\| \sum_{i=1}^r \varepsilon_i v_i \right\|^2 + 2\sum_{i=1}^r \varepsilon_i c_i$$

kifejezés értéke maximális. Legyen továbbá minden $1 \leqslant j \leqslant r$ esetén

$$\bar\varepsilon^{(j)} = (\bar\varepsilon_1, \ldots, -\bar\varepsilon_j, \ldots, \bar\varepsilon_r).$$

Ekkor minden $1 \leqslant j \leqslant r$ esetén

$$\lambda \left\| \sum_{i=1}^r \bar\varepsilon_i v_i \right\|^2 - \lambda \left\| \sum_{i=1}^r \bar\varepsilon_i^{(j)} v_i \right\|^2 + 2\sum_{i=1}^r (\bar\varepsilon_i - \bar\varepsilon_i^{(j)})c_i \geqslant 0,$$

ennélfogva

$$4\lambda\langle\bar\varepsilon_j v_j, \sum_{i=1}^r \bar\varepsilon_i v_i - \bar\varepsilon_j v_j\rangle + 4\bar\varepsilon_j c_j = 4\bar\varepsilon_j \left(\langle v_j, \lambda \sum_{i=1}^r \bar\varepsilon_i v_i\rangle - \bar\varepsilon_j \lambda \|v_j\|^2 + c_j \right) \geqslant 0,$$

így

$$\bar{\varepsilon}_j\left(\langle v_j, \lambda\sum_{i=1}^{r}\bar{\varepsilon}_i v_i\rangle + c_j\right) - \|v_j\|^2 \geqslant \lambda\|v_j\|^2 - \|v_j\|^2 = (\lambda-1)\|v_j\|^2 > 0.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $x = \lambda\bar{\varepsilon}v$ pontot, amely, mint láttuk K belsejében van, az $S_1, S_2, \ldots, S_r$ sávok egyike sem tartalmazza. $\square$

6.3. Állandó szélességű halmazok

Általában egy halmaz különböző irányú szélességei különbözőek. Mi történik azonban, ha a szélességek mind azonosak?

6.3.1. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy S állandó szélességű halmaz, ha S minimális, illetve maximális szélessége megegyezik.*

A legegyszerűbb példa állandó szélességű halmazra nyilván a gömb. Az ettől különböző állandó szélességű halmazok közül a legismertebb talán az ún. Reuleaux-háromszög. Ez egy w oldalú szabályos háromszögből származtatható az alábbi módon. Minden csúcs körül rajzoljuk meg a másik kettőt összekötő w sugarú körívek kisebbikét. E három ív által határolt tartomány világos, hogy egy w állandó szélességű halmaz. Nem nehéz belátni, hogy ha a Reuleaux-háromszöget (az n-dimenziós térben) megforgatjuk az egyik szimmetriatengelye körül, akkor szintén egy (gömbtől különböző) állandó szélességű testhez jutunk.

6.3.2. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy w állandó szélességű, kompakt, konvex halmaz. Ekkor bármely $x \in \mathbb{E}^n \setminus S$ esetén* $\operatorname{diam}(\{x\} \cup S) > w$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{E}^n \setminus S$, és tekintsük az S halmaz x-hez legközelebb eső y pontját (könnyű ellenőrizni, hogy ez a pont egyértelmű). Ekkor az $\overline{xy}$ szakaszra merőleges, y-ra illeszkedő hipersík támaszhipersíkja S-nek. Az ezzel párhuzamos másik támaszhipersík messe S-et mondjuk z-ben (vö. 6.1.5. Következmény). Világos, hogy z az xy egyenesen van, így $\|x - z\| > \|y - z\| = w$, következésképpen $\operatorname{diam}(\{x\} \cup S) > w$. $\square$

Az állítás megfordítása is igaz (ld. 6.3.4. Állítás), amiből az állandó szélességű halmazok egy érdekes karakterizációjához jutunk.

6.3.3. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy bármely $x \in \mathbb{E}^n \setminus S$ esetén* $\operatorname{diam}(\{x\} \cup S) > \operatorname{diam} S$. *Ekkor S megegyezik a pontjai köré rajzolt* $\operatorname{diam} S$ *sugarú zárt gömbök $\mathcal{B}(S)$ metszetével.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{B}(S) \subsetneqq S$, azaz létezik $y \in \mathcal{B}(S) \setminus S$. De ekkor $\operatorname{diam}(\{y\} \cup S) = \operatorname{diam} S$, ellentmondás. A másik irányú tartalmazás magától értetődik. □

6.3.4. Állítás. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és tegyük fel, hogy bármely $x \in \mathbb{E}^n \setminus S$ esetén $\operatorname{diam}(\{x\} \cup S) > \operatorname{diam} S$. Ekkor S egy $\operatorname{diam} S$ állandó szélességű, kompakt, konvex halmaz.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan S halmaz, amelyik kielégíti a feltételeket, ám a δ minimális szélessége kisebb, mint $\operatorname{diam} S$. Legyenek H_1 és H_2 olyan párhuzamos támaszhipersíkjai S-nek, amelyek távolsága δ. Ekkor léteznek olyan $x_1 \in H_1 \cap S$ és $x_2 \in H_2 \cap S$ pontok, hogy $\overline{x_1 x_2}$ merőleges H_1-re és H_2-re (ld. 6.1.6. Állítás). Továbbá létezik olyan $q \in S$ pont is, amelyre $\|q - x_1\| = \operatorname{diam} S$, különben egy x_1 középpontú, alkalmasan kis sugarú zárt gömböt hozzávehetnénk S-hez az átmérő növelése nélkül. Most felhasználva, hogy S megegyezik a pontjai köré rajzolt $\operatorname{diam} S$ sugarú zárt gömbök metszetével (ld. 6.3.3. Állítás), S tartalmazza az x_2 és a q pontokat összekötő, $\operatorname{diam} S$ sugarú, félkörnél nem nagyobb köríveket. Ezek után tekintsük az x_1, x_2 és q pontok által meghatározott síkot. Legyen az x_2 kezdőpontú, x_1-en átmenő félegyenes x_2-től $\operatorname{diam} S$ távolságra lévő pontja y. Ekkor az y középpontú, $\operatorname{diam} S$ sugarú kör (amely érinti H_2-t) nem tartalmazhatja a q pontot, hiszen $\|q - y\| > \|q - x_1\| = \operatorname{diam} S$. Így az x_2 és q pontokat összekötő, $\operatorname{diam} S$ sugarú körív, amely az előbbi kör x_2 körüli elforgatásából származik szükségképpen metszi H_2-t, ellentmondás. □

A következő tétel alapvető fontosságú a konvex halmazok elméletében.

6.3.5. Tétel. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt halmaz, akkor létezik olyan $\operatorname{diam} S$ állandó szélességű, kompakt, konvex halmaz, amely tartalmazza S-et.*

Bizonyítás. A 6.1.2. Állítással összhangban feltehetjük, hogy S konvex. Ha S nem állandó szélességű, akkor a 6.3.4. Állítás szerint létezik olyan $x \in \mathbb{E}^n \setminus S$ pont, amelyre $\operatorname{diam}(\{x\} \cup S) = \operatorname{diam} S$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(S) &= \{x \in \mathbb{E}^n \mid \operatorname{diam}(\{x\} \cup S) = \operatorname{diam} S\},\\
\rho(S) &= \sup_{x \in \mathcal{U}(S)} D(\{x\}, S),\\
\mathcal{V}(S) &= \{x \in \mathcal{U}(S) \mid D(\{x\}, S) = \rho(S)\}.
\end{aligned}$$

Ezek után legyenek $x_1 \in \mathcal{V}(S)$ és $S_1 = \operatorname{conv}(\{x_1\} \cup S)$. Általában is, ha S_i-t már definiáltuk, akkor legyenek $x_{i+1} \in \mathcal{V}(S_i)$ és $S_{i+1} = \operatorname{conv}(\{x_{i+1}\} \cup S_i)$. Végül legyen $T = \operatorname{cl}(\cup_{i=1}^{\infty} S_i)$. Nyilván T kompakt, konvex halmaz, továbbá átmérője megegyezik az S átmérőjével. Állítjuk, hogy T állandó szélességű is. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor a 6.3.4. Állítással összhangban létezik olyan $y \in \mathbb{E}^n \setminus T$ pont, amelyre $\operatorname{diam}(\{y\} \cup T) = \operatorname{diam} T$. Legyen $\delta = D(\{y\}, T)$. Most bármely két x_i és x_j pontra, ahol $i < j$, teljesül, hogy $\|x_i - x_j\| \geqslant \rho(S_{j-1})$, hiszen $x_i \in S_i \subseteq S_{j-1}$. Ugyanakkor $S_{j-1} \subseteq T$ miatt egyrészt $y \in \mathcal{U}(S_{j-1})$, másrészt $\|x - y\| \geqslant \delta$ minden $x \in S_{j-1}$ pontra, így $\rho(S_{j-1}) \geqslant \delta$, következésképpen $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$ is fennáll minden $i < j$ esetén. De ez azt jelenti, hogy $\mathbb{E}^n$ egy korlátos tartományában végtelen sok pont helyezkedik el úgy, hogy közülük bármely kettő távolsága legalább δ, ellentmondás. $\square$

Tetszőleges konvex testnek definiálhatjuk a beírt és a körülírt gömbjét. Ezek általában semmilyen nevezetes kapcsolatban nem állnak egymással. Viszont, mint látni fogjuk, állandó szélességű testeknél más a helyzet.

6.3.6. Definíció. *Legyen $S \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ekkor egy olyan maximális sugarú gömböt, amely S-ben elhelyezhető az S beírt gömbjének nevezzük. Hasonlóan, egy olyan minimális sugarú gömböt, amely tartalmazza S-et az S körülírt gömbjének mondjuk.*

6.3.7. Állítás. *Tetszőleges $S \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testnek létezik mind beírt, mind pedig körülírt gömbje.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{B}$ az S konvex testben elhelyezhető gömbök családját, és legyen $r = \sup\{r(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$, ahol $r(B)$ jelöli a B gömb sugarát. Most tekintsük $\mathcal{B}$-beli gömböknek egy olyan (B_i) sorozatát, amelynél a sugarak $(r(B_i))$ sorozata r-hez tart. Mivel S kompakt, ezért a (B_i) sorozatból kiválasztható olyan (B_{i_j}) részsorozat, amelyben a gömbök középpontjainak sorozata konvergens. Innen következik a beírt gömb létezése.

A körülírt gömb létezése, azzal az észrevétellel, hogy elég azokra az S-et tartalmazó gömbökre szorítkozni, amelyek középpontjai az S halmazban helyezkednek el, és amelyek sugarai legfeljebb $\operatorname{diam} S$ hosszúak, teljesen hasonlóan igazolható. $\square$

Világos, hogy egy konvex test körülírt gömbje mindig egyértelmű, ellenben a beírt gömb nem feltétlenül az. Nem ez a helyzet az állandó szélességű halmazokkal.

6.3.8. Tétel. *Ha $S \subseteq \mathbb{E}^n$ egy λ állandó szélességű, kompakt, konvex halmaz, akkor S beírt, illetve körülírt gömbje koncentrikus, továbbá sugaruk összege λ.*

Bizonyítás. Jelölje B_I az S egy beírt gömbjét, és legyen ennek a gömbnek a középpontja p. Világos, hogy $p \in \operatorname{conv}(\operatorname{bd} B_I \cap \operatorname{bd} S)$. Így az 1.2.8. Carathéodory tétel szerint létezik legfeljebb $n+1$ olyan $x_1, \dots, x_k \in \operatorname{bd} B_I \cap \operatorname{bd} S$ affin független pont, hogy $p \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$.

Minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén a $\overline{px_i}$ szakaszra merőleges, x_i-re illeszkedő hipersík az egyetlen olyan x_i-n átmenő hipersík, amely nem metszi B_I-t, így $B_I \subseteq S$ miatt ez a hipersík szükségképpen az S támaszhipersíkja x_i-ben. Ezek után minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén legyen y_i az x_i-ből kiinduló, p-n áthaladó félegyenes azon pontja, amelyre $\|x_i - y_i\| = \lambda$. Nyilván az $y_1, \dots, y_k$ pontok egyenlő távolságra vannak p-től. Jelölje most B_C azt a gömböt, amelynek középpontja p, és az $y_1, \dots, y_k$ pontok a határán vannak. Állítjuk, hogy $S \subseteq B_C$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik $q \in S \setminus B_C$. Messe a q kezdőpontú, p-n áthaladó félegyenes B_I határát másodszor mondjuk t-ben. Mivel $B_I \subseteq S$, így $t \in S$. Ennélfogva $\operatorname{diam} S \geqslant \|q - t\| = \|q - p\| + \|p - t\| > \|y_i - p\| + \|p - x_i\| = \lambda$. Ám ez lehetetlen, hiszen S állandó szélességű, vagyis $\operatorname{diam} S = \lambda$.

A 6.1.5. Következménnyel összhangban $y_1, \dots, y_k \in S$, így szükségképpen $p \in \operatorname{conv}(S \cap \operatorname{bd} B_C)$. Innen már adódik, hogy B_C az S körülírt gömbje. Valóban, ha p' egy tetszőleges p-től különböző pont, akkor tekintsük $\overline{pp'}$ szakaszfelező-merőleges hipersíkját. Ez a hipersík két nyít félteret határoz meg, melyek közül a p'-t nem tartalmazóban biztosan benne van valamelyik y_i pont, ugyanis $p \in \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_k\}$. De ekkor $\|p - y_i\| < \|p' - y_i\|$, ezért p' nem lehet a körülírt gömb középpontja. □

6.4. Borsuk probléma

Melyik az a legkisebb $b(n)$ pozitív egész szám, hogy $\mathbb{E}^n$ bármely egységnyi átmérőjű halmaza felbontható $b(n)$ egynél kisebb átmérőjű részre? Az egységnyi élű szabályos szimplex mutatja, hogy $b(n) \geqslant n+1$. Borsuk 1933-ban vetette fel, hogy vajon $b(n) = n+1$. Világos, hogy elég kompakt, konvex halmazokra, sőt a 6.3.5. Tétel szerint állandó szélességű, kompakt, konvex halmazokra szorítkoznunk. Ennek ellenére Borsuk sejtését néhány speciális eset kivételével senkinek sem sikerült igazolni. Aztán 1992-ben bombaként robbant a hír, hogy a sejtés még véges halmazokra sem igaz. Ebben a fejezetben az ellenpéldát ismertetjük. Ehhez szükségünk lesz egy kombinatorikai tételre.

6.4.1. Tétel. *Legyen p páratlan prím, és legyen $m = 4p$. Jelölje V azon $(v_1, \dots, v_m) \in \{+1, -1\}^m$ vektorok halmazát, amelyekben $v_1 = 1$, és a pozitív koordináták száma páros. Végül legyen $U \subseteq V$ olyan, hogy U semelyik két* *vektora sem merőleges egymásra. Ekkor*

$$|U| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\langle u, v\rangle \equiv 0 \mod 4$ bármely két $u, v \in V$ vektorra. Valóban, ha u^+ és v^+ jelöli az u és v vektor pozitív koordinátáinak számát, továbbá t azon koordináták számát, melyekben u pozitív v pedig negatív, akkor azon koordináták számának különbsége, melyekben u és v megegyezik, illetve különbözik pontosan

$$((u^+ - t) + (m - v^+ - t)) - ((v^+ - (u^+ - t)) + t) = m + 2u^+ - 2v^+ - 4t.$$

Mivel $m = 4p$ valamint u^+ és v^+ páros szám, az észrevétel adódik. Másrészt V vektorainak első koordinátája $+1$, így $\langle u, v\rangle \neq -m = -4p$. Ezekből következik, hogy bármely két $u, v \in U$ vektorra $\langle u, v\rangle \equiv 0 \mod p$ akkor és csak akkor ha $u = v$.

Most minden $u \in U$ vektorhoz rendeljük hozzá a p elemű $\mathrm{GF}(p)$ véges test feletti m változós

$$f_u(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (\langle u, x\rangle - i),$$

polinomot, ahol $x = (x_1, \dots, x_m)$, és persze minden mod p értendő. Ekkor tetszőleges $v \in U$ vektorra $f_u(v) \neq 0$ akkor és csak akkor ha $u = v$. Az $f_u(x)$ polinomok foka legfeljebb $p - 1$, azaz $f_u(x)$ tagjai $ax_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ alakúak, ahol $a \in \mathrm{GF}(p)$ és $k_1 + \cdots + k_m \leqslant p - 1$. Az összes ilyen tagban cseréljük ki a k_i kitevőt 1-re ha k_i páratlan és 0-ra ha k_i páros minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén. Így az $\hat{f}_u(x)$ multilineáris polinomokhoz jutunk. Jegyezzük meg, hogy bármely $x \in \{+1, -1\}^m$ vektorra $\hat{f}_u(x) = f_u(x)$.

Állítjuk, hogy az $\hat{f}_u(x)$ polinomok lineárisan függetlenek $\mathrm{GF}(p)$ fölött. Valóban, ha

$$\sum_{u \in U} \lambda_u \hat{f}_u(x) = 0,$$

akkor a v vektor behelyettesítésével azt kapjuk, hogy $\lambda_v = 0$ minden $v \in U$ esetén. Ennélfogva $|U|$ nem lehet nagyobb, mint $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}$, az m változós, legfeljebb $p - 1$ fokú multilineáris polinomok terének dimenziója. □

6.4.2. Tétel (Kahn-Kalai, 1993). *Legyen $n = \binom{4p}{2}$, ahol p páratlan prím, és jelölje $b(n)$ azt a legkisebb pozitív egész számot, hogy $\mathbb{E}^n$ bármely korlátos halmaza felbontható $b(n)$ kisebb átmérőjű részre. Ekkor $b(n) \geqslant 1.203^{\sqrt{n}}$.*

Bizonyítás. Jelölje V ugyanazoknak az m-dimenziós vektoroknak a halmazát, mint a 6.4.1. Tételben. Minden $v = (v_1, \dots, v_m) \in V$ vektorhoz rendeljük hozzá a

$$p(v) = (v_1v_1, v_1v_2, \dots, v_mv_{m-1}, v_mv_m) \in \mathbb{E}^{m^2}$$

vektort, és tekintsük a $P = \{p(v) \mid v \in V\}$ halmazt. Vegyük észre, hogy bármely két $u, v \in V$ vektorra $\langle p(u), p(v)\rangle = \langle u, v\rangle^2 \geqslant 0$. Mivel P minden vektora ugyanolyan hosszú, és mivel nyilvánvalóan léteznek olyan $u, v \in V$ vektorok, amelyekre $\langle u, v\rangle = 0$, így az előbbiekből egyszerűen adódik, hogy $\|p(u) - p(v)\| = \operatorname{diam} P$ akkor és csak akkor, ha $\langle u, v\rangle = 0$. Ebből a 6.4.1. Tétel felhasználásával következik, hogy P nem bontható fel kevesebb kisebb átmérőjű részre, mint

$$|P| \Big/ \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i} = 2^{m-2} \Big/ \sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i}.$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i} < 2\binom{4p}{p-1}$. Valóban, mivel tetszőleges $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$ esetén $\binom{m}{k-1}/\binom{m}{k} = k/(m-k+1) \leqslant l/(m-l+1)$, bevezetve az $\alpha = (p-1)/(3p+2)$ jelölést,

$$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i} \leqslant \binom{4p}{p-1} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha} \binom{4p}{p-1}$$

adódik, hiszen $\alpha = (p-1)/(3p+2) < 1/2$. De $1/(1-\alpha) < 1/(1-1/2) = 2$, ahonnan az állítás következik. Így P nem bontható fel kevesebb kisebb átmérőjű részre, mint

$$2^{4p-2} \Big/ \sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i} > 2^{4p-3} \Big/ \binom{4p}{p-1}.$$

Teljes indukcióval egyszerűen belátható, hogy $2^{4p-3}/\binom{4p}{p-1} > 1.1397^{4p}$. Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy

$$\frac{2^{4p+1} \Big/ \binom{4p+4}{p}}{2^{4p-3} \Big/ \binom{4p}{p-1}} = \frac{12p(3p+2)(3p+4)}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)} > \frac{27}{16} > 1.1397^4.$$

Mivel a P ponthalmaz egy $\binom{4p}{2}$-dimenziós altérben fekszik, ennélfogva $n = \binom{4p}{2}$ esetén, ahol p páratlan prím,

$$b(n) \geqslant 1.1397^{4p} > 1.1397^{\sqrt{2n}} > 1.203^{\sqrt{n}}. \qquad \square$$

Ez az eredmény az ismert prímszámelméleti tétel felhasználásával, mely szerint minden ε pozitív szám és elég nagy pozitív x esetén létezik prímszám $(1-\varepsilon)x$ és x között, tetszőleges n-re kiterjeszthető, feltéve persze, hogy n elég nagy. Megjegyezzük, hogy $n = 2278$ a legkisebb olyan n egész, amely kielégíti a 6.4.2. Tétel feltételeit, és amelyre $1.203^{\sqrt{n}} > n+1$.

Feladatok

6.1. Feladat. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Vágjuk ketté K-t egy hipersíkkal. Ezután válasszuk ki az egyik részt, és azt is vágjuk ketté. Most válasszunk megint egyet az eddig előállított három darabból, és ezt is vágjuk ketté egy hipersíkkal. Addig ismételjük ezt az eljárást amíg m részre nem vágtuk K-t. Mutassuk meg, hogy a részek beírt gömbjei sugarának összege legalább akkora, mint a K beírt gömbjének sugara.*

6.2. Feladat (Bezdek-Bezdek, 1995). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Vágjuk szét a K testet $m-1$ egymás utáni hipersík vágással m részre, ugyanúgy mint azt a 6.1. Feladatban tettük. Mutassuk meg, hogy a kapott darabokba beírt gömbök legnagyobbikának a sugara ekkor legalább $r(K,m)$, ahol $r(K,m)$ az a ρ sugár, melyre a K-ba írt, ρ sugarú gömbök egyesítéseként keletkező konvex test minimális szélessége éppen $2m\rho$.* [Útmutatás: Igazoljuk, hogy az adott hipersíkokra szimmetrikus, 2ρ szélességű sávok lefedik K azon pontjait, melyeknek K határától mért távolsága legalább ρ, majd alkalmazzuk a 6.2.5. Tételt.]

6.3. Feladat (Danzer-Laugwitz-Lenz, 1957). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy*

(1) *egy és csak egy K köré írt, minimális térfogatú ellipszoid létezik.*

(2) *egy és csak egy K-ba írt, maximális térfogatú ellipszoid létezik.*

[Útmutatás: A létezés igazolásához módosítsuk a 6.3.7. Állítás bizonyítását. Az egyértelműség megmutatása a két esetben kicsit eltérő. (1) Legyenek E_1 és E_2 minimális térfogatú körülírt ellipszoidok. Nyilván feltehető, hogy E_1 határának egyenlete $\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = 1$, míg E_2 határának egyenlete $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 = 1$, ahol $a_1 \cdots a_n = 1$. Ezek után tekintsük a

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}((x_i - c_i)^2 + x_i^2/a_i^2) = 1$$

egyenlettel meghatározott E ellipszoidot. Lássuk be, hogy ennek az $E \supseteq K$ ellipszoidnak akkor és csak akkor nem kisebb a térfogata E_1 térfogatánál, ha $E_1 = E_2$. (2) Legyenek E_1 és E_2 maximális térfogatú beírt ellipszoidok. Itt is feltehető, hogy E_1 határának egyenlete

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-1}, \\ x_2 &= \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \\ x_n &= \sin\vartheta_1, \end{aligned}$$

míg E_2 határának egyenlete

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-1} + c_1, \\ x_2 &= a_2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1} + c_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_{n-1} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + c_{n-1}, \\ x_n &= a_n \sin\vartheta_1 + c_n, \end{aligned}$$

ahol $a_1 \cdots a_n = 1$ és $a_i > 0$ minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Ezek után tekintsük azt az E ellipszoidot, amely határának egyenlete

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1+1}{2} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-1} + \frac{c_1}{2}, \\ x_2 &= \frac{a_2+1}{2} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cdots \cos\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1} + \frac{c_2}{2}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{a_{n-1}+1}{2} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \frac{c_{n-1}}{2}, \\ x_n &= \frac{a_n+1}{2} a_n \sin\vartheta_1 + \frac{c_n}{2}. \end{aligned}$$

Lássuk be, hogy ennek az $E \subseteq K$ ellipszoidnak akkor és csak akkor nem nagyobb a térfogata E_1 térfogatánál, ha E_1 és E_2 egymás eltoltjai. Mutassuk meg, hogy ha most $E_1 \neq E_2$, akkor $\mathrm{conv}(E_1 \cup E_2) \subseteq K$ tartalmaz E_1 térfogatánál nagyobb térfogatú ellipszoidot.]

6.4. Feladat* (John, 1948). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, és legyen E a K-ba írt, maximális térfogatú ellipszoid. Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy E centruma egyezzen meg az origóval. Mutassuk meg, hogy ekkor*

(1) $E \subseteq K \subseteq nE$,

(2) $E \subseteq K \subseteq \sqrt{n}E$, *ha* K *centrálszimmetrikus.*

6.5. Feladat. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *egy állandó szélességű, konvex test. Mutassuk meg, hogy ha* K *centrálszimmetrikus, akkor* K *gömb.*

6.6. Feladat* **(Schramm, 1988).** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *egy* w *állandó szélességű halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor* K *térfogata legalább akkora, mint egy* w *átmérőjű gömb térfogatának a* $(\sqrt{3+2/(n+1)}-1)^n$*-szerese.*

6.7. Feladat* **(Steinhagen, 1922).** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *egy* w *minimális szélességű konvex test, és jelölje a* K *beírt gömbjének sugarát* r*. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$r \geqslant \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\, w, & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \\ \dfrac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)}\, w, & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

6.8. Feladat* **(Gale, 1953).** *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{E}^n$ *bármely, egységnyi átmérőjű* K *halmaza beírható egy* $\sqrt{n(n+1)/2}$ *élű szabályos szimplexbe.* [Útmutatás: Tekintsük az $(n+1)$-dimenziós euklideszi tér $e_0, e_1, \ldots, e_n$ standard bázisát, és legyen $e = \sum_{i=0}^n e_i$. Ekkor $\mathbb{E}^n$ azonosítható e tér $\langle x, e\rangle = 0$ egyenletű L hipersíkjával. Minden $0 \leqslant i \leqslant n$ esetén legyenek $\alpha_i = \min_{x\in K}\langle x, e_i\rangle$, $\beta_i = \max_{x\in K}\langle x, e_i\rangle$, és tekintsük az $\langle x, e_i\rangle \geqslant \alpha_i$ egyenletű H_i', valamint az $\langle x, e_i\rangle \leqslant \beta_i$ egyenletű H_i'' zárt féltereket. Végül legyenek $S' = \cap_{i=0}^n H_i' \cap L$ és $S'' = \cap_{i=0}^n H_i'' \cap L$. Igazoljuk, hogy S' és S'' a K köré írt, n-dimenziós, szabályos szimplexek, továbbá egyikük éle legfeljebb $\sqrt{n(n+1)/2}$. Pontosabban S' éle $-\sqrt{2}\langle a, e\rangle$ és S'' éle $\sqrt{2}\langle b, e\rangle$, ahol $a = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ és $b = \sum_{i=0}^n \beta_i e_i$.]

6.9. Feladat. *Legyen* S *egy* n*-dimenziós szimplex. Jelölje* r *és* R *az* S *beírt és körülírt gömbjének sugarát. Mutassuk meg, hogy ekkor* $R \geqslant nr$*.* [Útmutatás: Bizonyítsuk be, hogy egy adott gömbbe írt szimplexek közül a szabályos szimplex térfogata a legnagyobb, továbbá egy adott gömb köré írt szimplexek közül a szabályos szimplex térfogata a legkisebb.]

6.10. Feladat (Lassak, 1982). *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{E}^n$ *bármely, egységnyi átmérőjű* K *halmaza felbontható* $2^{n-1}+1$ *egynél kisebb átmérőjű részre.* [Útmutatás: A 4.4.3. Tétellel összhangban az adott K halmaz benne van egy olyan $r = \sqrt{n/(2n+2)}$ sugarú B gömbben, melynek ráadásul K valamely p pontja a határán van. Másrészt K nyilván benne van egy p

középpontú, egységnyi sugarú B' gömbben is, így $K \subseteq B \cap B'$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy B egyenlete $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$ és $p = (0, \ldots, 0, r)$. Mutassuk meg, hogy most $B \cap B'$ egy alkalmas $x_n = r'$, valamint az $x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$ egyenletű hipersíkokkal $2^{n-1} + 1$ egynél kisebb átmérőjű részre bontható.]

6.11. Feladat (Hadwiger, 1945). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ egységnyi átmérőjű konvex test, és tegyük fel, hogy K minden határpontjában egyetlen támaszhipersík fektethető. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K felbontható $n + 1$ egynél kisebb átmérőjű részre.* [Útmutatás: Először azt mutassuk meg, hogy gömbre igaz az állítás, majd az általános esetet vezessük vissza erre a speciális esetre a következő leképezésen keresztül. A K test egy p határpontjához rendeljük hozzá a gömb azon q határpontját, melyre a gömb q-beli támaszhipersíkja párhuzamos a K test p-beli támaszhipersíkjával, és a testek a támaszhipersíkok ugyanazon oldalán helyezkednek el (ez a q pont feltevésünk szerint egyértelmű).]

7. fejezet

Konvex halmazok vetületei és metszetei

7.1. Konvex halmazok vetületei

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen mértékben határozzák meg bizonyos vetületeik (árnyékaik) a konvex testeket. Vetítés alatt mindig merőleges vetítést fogunk érteni. Mindenekelőtt bevezetünk néhány jelölést. Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $S \subseteq \mathbb{E}^n$ pedig egy lineáris altér. Ekkor a K halmaz S-re eső merőleges vetületét jelölje $K|S$.

7.1.1. Definíció. *Az n-dimenziós euklideszi tér k-dimenziós lineáris altereinek halmazát jelölje $\mathcal{G}(n,k)$ minden $1 \leqslant k \leqslant n$ esetén.*

Legyen $1 \leqslant k \leqslant n$, legyen $K \in \mathcal{K}_n$, és legyen $S \in \mathcal{G}(n,k)$. Vegyük észre, hogy ha ismerjük a $K|S$ vetületet, és $T \subseteq S$ egy j-dimenziós lineáris altér, ahol $1 \leqslant j \leqslant k$, akkor nyilván ismerjük a $K|T$ vetületet is, hiszen $K|T = (K|S)|T$. Ennélfogva pozitív eredmények igazolásánál elég az alacsony dimenziós vetületekkel foglalkozni (persze más út is lehetséges), míg ellenpéldák konstruálásánál a magasabb dimenziós vetületekre érdemes koncentrálni. Példaként álljon itt két egyszerű állítás.

7.1.2. Állítás. *Legyen $1 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor K-t egyértelműen meghatározza az összes $K|S$ vetülete, ahol $S \in \mathcal{G}(n,k)$. Valójában K-t már egy adott, az origón átmenő egyenesre illeszkedő 2-dimenziós síkokra eső merőleges vetületei is meghatározzák.*

Bizonyítás. Az állítás első részét nyilván elég $k = 1$ esetén igazolni. Legyen $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ha ismerjük a $K|l_u$ vetületet, ahol l_u az origón átmenő, u irányvektorú egyenest jelöli, akkor persze ismerjük a K támaszfüggvényének $h(u)$

és $h(-u)$ értékeit. És mivel K-t a támaszfüggvénye egyértelműen meghatározza, ezért K-t az origón átmenő egyenesekre eső vetületei is egyértelműen meghatározzák. Ebből egyébként egyszerűen következik az állítás második része is. $\square$

7.1.3. Állítás. *Legyen $1 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(n,k)$ véges halmaz. Ekkor létezik olyan $P \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex politóp, amelyet nem határoznak meg az $\mathcal{S}$-beli k-dimenziós lineáris alterekre eső vetületei.*

Bizonyítás. Ezt az állítást viszont elég $k = n-1$ esetén igazolni. Legyen P olyan konvex politóp, amelynek egyik $(n-1)$-dimenziós lapja sem merőleges $\mathcal{S}$ lineáris altereire. Legyen továbbá $Q = \cap\{(P|S) \times S^{\perp} \mid S \in \mathcal{S}\}$. Ekkor Q poliédrikus halmaz, $P \subseteq Q$ és $P|S = Q|S$ minden $S \in \mathcal{S}$ esetén. Megmutatjuk, hogy $P \neq Q$. Valóban, ha x a P valamely $(n-1)$-dimenziós lapjának relatív belső pontja, akkor a P-re tett feltevés miatt $x \in \operatorname{int}((P|S) \times S^{\perp})$ minden $S \in \mathcal{S}$ esetén, vagyis $x \in \operatorname{int} Q$. Ezek után tekintsük $Q \setminus P$ valamely y pontját, és legyen $P' = \operatorname{conv}(P \cup \{y\})$. Világos, hogy most P' egy olyan, P-től különböző konvex politóp, melyre $P'|S = P|S$ minden $S \in \mathcal{S}$ esetén. $\square$

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ha egy kompakt, konvex halmaz adott dimenziós vetületei rendelkeznek valamilyen tulajdonsággal, akkor ez a tulajdonság fennáll-e magára a halmazra. Idézzük fel, hogy homotéciának a pozitív arányú centrális hasonlóságokat és az eltolásokat nevezzük.

7.1.4. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Ha $K_1|S$ homotetikus képe (eltoltja) $K_2|S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K_1 is homotetikus képe (eltoltja) K_2-nek.*

Bizonyítás. Mivel az a tulajdonság, hogy két halmaz homotetikus képe, illetve eltoltja egymásnak vetítésinvariáns, ezért elég az állítást $k = 2$ esetén igazolni.

Legyen az $\overline{a_1 b_1}$ szakasz a K_1 halmaz egy átmérője. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ és $b_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Ekkor az $x_1 = 0$ és $x_1 = 1$ egyenletű H_0 és H_1 hipersíkok támaszhipersíkjai K_1-nek, és csak az a_1 és b_1 pontokban érintik K_1-et. Toljuk el a K_2 halmazt úgy, hogy a H_0 hipersík az origóban érintse K_2-t, és mindkét konvex test a H_0 ugyanazon oldalán helyezkedjen el (ez az eltolás nem befolyásolja tételünket). A K_2 test H_0-val párhuzamos másik támaszhipersíkjának egyenlete legyen $x_1 = r$. Nyilvánvaló módon $r > 0$.

Ezek után tekintsünk egy az x_1 tengelyre illeszkedő 2-dimenziós S síkot. Ekkor a $K_1|S$ és $K_2|S$ vetületeket a $t = S \cap H_0$ egyenes az origóban érinti, K_1-nél ez az egyetlen érintési pont, és mivel $K_1|S$ és $K_2|S$ homotetikusak, ugyanez fennáll K_2-re is. Ezért a homotécia vagy identitás, vagy egy origó centrumú, egytől különböző arányú centrális nagyítás. Továbbá vegyük észre, hogy a t-vel párhuzamos másik támaszegyenesek a b_1, illetve a $b_2 = (r, 0, \ldots, 0)$ pontokban érintik $K_1|S$-et és $K_2|S$-et. Ebből következik, hogy a homotécia aránya r, és így $K_2|S = r(K_1|S)$. Mivel ez minden olyan 2-dimenziós S lineáris altérre igaz, amely tartalmazza az x_1 tengelyt, alkalmazva a 7.1.2. Állítás második részét, $K_2 = rK_1$ adódik.

Abban az esetben mikor a vetületek egymás eltoltjai, a már bizonyított rész alapján K_1 és K_2 homotetikusak, ám ez nyilván csak úgy lehetséges, ha K_1 és K_2 egymás eltoltjai. □

A fenti tétel felhasználásával egyszerűen bizonyíthatjuk, hogy ha egy kompakt, konvex halmaz vetületei centrálszimmetrikusak, akkor maga a halmaz is centrálszimmetrikus.

7.1.5. Állítás. *Egy $K \in \mathcal{K}_n$ halmaz akkor és csak akkor centrálszimmetrikus, ha $-K$ és K egymás eltoltjai.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy K centrálszimmetrikus, legyen a centruma c. Ekkor $x \in -K$ vagyis $-x \in K$ ekvivalens azzal, hogy $-x+2(c+x) \in K$. Ez utóbbi viszont pontosan akkor áll fenn ha $x \in -2c + K$. Ebből következik, hogy $-K$ és K egymás eltoltjai.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $-K = -2c + K$ valamely $c \in \mathbb{E}^n$ esetén. Most $x \in K$ vagyis $-x \in -K$ akkor és csak akkor, ha $-x + 2c \in K$, vagyis $x + 2(c - x) \in K$. Így ebben az esetben K centrálszimmetrikus a c centrummal. □

7.1.6. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ha $K|S$ centrálszimmetrikus minden $S \in \mathcal{G}(n, k)$ esetén, akkor K maga is centrálszimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen $K_1 = K$, és legyen $K_2 = -K$. Ekkor minden $S \in \mathcal{G}(n, k)$ esetén $K_2|S = -K_1|S$. A 7.1.5. Állítás szerint $K_1|S$ és $K_2|S$ egymás eltoltjai, hiszen $K_1|S$ centrálszimmetrikus. Ám ekkor K_1 és K_2 is egymás eltoltjai a 7.1.4. Tétel miatt. Most alkalmazva ismét a 7.1.5. Állítást kapjuk, hogy $K_1 = K$ centrálszimmetrikus. □

7.1.7. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ha $K|S$ gömb minden $S \in \mathcal{G}(n, k)$ esetén, akkor K maga is gömb.*

Bizonyítás. Legyen $K_1 = K$, és legyen $K_2 = B$ egy n-dimenziós gömb. A 7.1.4. Tétel szerint K és B homotetikusak, következésképpen K is egy n-dimenziós gömb. □

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy ha egy konvex test vetületeit csak körülbelül ismerjük, akkor mit mondhatunk magáról a testről. Az egyik nehézség ilyen típusú eredmények megfogalmazásánál a testek közötti távolság definiálása. Ez általában az adott szituációtól függ. Kezdjük egy egyszerű példával, ahol a távolság egyszerűen a Hausdorff metrika (ld. 5.1.4. Definíció).

7.1.8. Állítás. *Legyen $1 \leqslant k \leqslant n-1$, legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ha $d(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$ minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor $d(K_1, K_2) \leqslant \varepsilon$.*

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy ha E_1, E_2 olyan kompakt, konvex halmazok, melyekre $d(E_1, E_2) \leqslant \varepsilon$, akkor $d(E_1|S, E_2|S) \leqslant \varepsilon$ is fennáll bármely S lineáris altérre, hiszen a vetítés nem növeli a Hausdorff távolságot. Ezért elég az állítást $k = 1$ esetén igazolni. Indirekt tegyük fel, hogy $d(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$ minden $S \in \mathcal{G}(n,1)$ esetén, ám $d(K_1, K_2) > \varepsilon$. Ekkor az indexek alkalmas megválasztása mellett létezik olyan $x_1 \in K_1$ pont, amelynek a K_2 hozzá legközelebb eső x_2 pontjától mért távolsága nagyobb, mint ε. Tekintsük az x_1x_2 egyenessel párhuzamos, az origón átmenő t egyenest. Most $d(K_1|t, K_2|t) > \varepsilon$, ami ellentmondás. □

Következő célunk a 7.1.4. Tétel stabilitás változatának bizonyítása. Először az eltolás esetet tekintjük. Itt érdemes egy új távolságot bevezetni.

7.1.9. Definíció. *Legyenek $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_n$. Ekkor a*

$$d_t(K_1, K_2) = \inf\{d(K_1, K_2 + x) \mid x \in \mathbb{E}^n\}$$

valós számot a K_1 és K_2 halmazok transzlációs Hausdorff távolságának nevezzük.

Egyszerű számolással adódik, hogy tetszőleges K_1 és K_2 nem üres, kompakt, konvex halmazokra a $d_t(K_1, K_2)$ transzlációs Hausdorff távolság definíciójában infimum helyett minimumot is írhattunk volna.

7.1.10. Állítás. *A d_t függvényre igaz a háromszögegyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Legyenek $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}_n$. Ekkor léteznek olyan $x_2, x_3 \in \mathbb{E}^n$ vektorok, hogy $d_t(K_1, K_2) = d(K_1, K_2 + x_2)$ és $d_t(K_2, K_3) = d(K_2, K_3 + x_3)$. Figyelembe véve, hogy a Hausdorff távolság metrika kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_t(K_1, K_3) &\leqslant d(K_1, K_3 + x_2 + x_3) \\ &= d(K_1 - x_2, K_3 + x_3) \\ &\leqslant d(K_1 - x_2, K_2) + d(K_2, K_3 + x_3) \\ &= d(K_1, K_2 + x_2) + d(K_2, K_3 + x_3) \\ &= d_t(K_1, K_2) + d_t(K_2, K_3). \end{aligned} \qquad \square$$

Megjegyezzük, hogy d_t nem igazi metrika $\mathcal{K}_n$-en.

7.1.11. Tétel (Groemer, 1987). *Legyen $n \geqslant 3$, legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ha most $d_t(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$ tetszőleges $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ esetén, akkor $d_t(K_1, K_2) \leqslant (1 + 2\sqrt{2})\varepsilon$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $S_0 \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkot, majd a K_2 halmazt toljuk el először S_0-lal, utána pedig $S_0^\perp$-vel párhuzamosan úgy, hogy $d(K_1|S_0, K_2|S_0) \leqslant \varepsilon$ és $d(K_1|S_0^\perp, K_2|S_0^\perp) \leqslant \varepsilon$ is teljesüljön. Legyenek H_1 és H_2 olyan párhuzamos támaszhipersíkjai K_1-nek és K_2-nek, melyek távolsága $d(K_1, K_2)$, és amelyeknek mindkét test ugyanazon az oldalán helyezkedik el (vö. 5.3.7. Állítás). Legyen továbbá $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ olyan hipersík, amely tartalmazza $S_0^\perp$-t és merőleges H_1-re. Ekkor $d(K_1, K_2) = d(K_1|S, K_2|S)$. Feltevésünk szerint létezik olyan $x \in S$ vektor, hogy $d(K_1|S, (K_2|S) + x) \leqslant \varepsilon$.

Tekintsük az x pont y és z vetületeit a $T = S_0 \cap S$ és $S_0^\perp$ lineáris altereken. Ekkor

$$\begin{aligned} \|y\| &= d(K_2|T, (K_2|T) + y) \\ &\leqslant d(K_2|T, K_1|T) + d(K_1|T, (K_2|T) + y) \\ &\leqslant d(K_2|S_0, K_1|S_0) + d(K_1|S, (K_2|S) + x) \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned} \|z\| &= d(K_2|S_0^\perp, (K_2|S_0^\perp) + z) \\ &\leqslant d(K_2|S_0^\perp, K_1|S_0^\perp) + d(K_1|S_0^\perp, (K_2|S_0^\perp) + z) \\ &\leqslant d(K_2|S_0^\perp, K_1|S_0^\perp) + d(K_1|S, (K_2|S) + x) \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Következésképpen $\|x\| \leqslant 2\sqrt{2}\varepsilon$, ahonnan

$$\begin{aligned} d_t(K_1, K_2) &\leqslant d(K_1, K_2) \\ &= d(K_1|S, K_2|S) \\ &\leqslant d(K_1|S, (K_2|S) + x) + d((K_2|S) + x, K_2|S) \\ &\leqslant \varepsilon + 2\sqrt{2}\varepsilon. \end{aligned}$$ $\square$

Vegyük észre, a 7.1.11. Tételben nem szükséges minden $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkra eső vetületre fennállni, hogy $d_t(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$, hanem ezt elég egyetlen $S_0 \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkra, valamint az erre merőleges hipersíkokra eső vetületekről feltenni.

Ezek után áttérünk a homotetikus eset tárgyalására. Itt egy nem-szimmetrikus távolsággal célszerű dolgozni.

7.1.12. Definíció. *Legyenek $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_n$. Ekkor a*

$$d_h(K_1, K_2) = \inf\{d_t(K_1, aK_2) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$$

valós számot a K_1 és K_2 halmazok homotetikus Hausdorff távolságának nevezzük.

Nem nehéz megmutatni, hogy tetszőleges K_1 és K_2 nem üres, kompakt, konvex halmazokra a $d_h(K_1, K_2)$ homotetikus Hausdorff távolság definíciójában infimum helyett minimumot is írhattunk volna.

7.1.13. Tétel (Groemer, 1987). *Legyen $n \geqslant 3$, legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ha most $d_h(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$ tetszőleges $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ esetén, akkor*

$$d_h(K_1, K_2) \leqslant (1 + 2R(K_2)/r(K_2))(1 + 2\sqrt{2})\varepsilon,$$

ahol $r(K_2)$ és $R(K_2)$ a K_2 halmaz beírt és körülírt gömbjének sugara.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $S_0 \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkot. A K_2 halmazra alkalmazzunk egy olyan homotéciát, hogy $d(K_1|S_0, K_2|S_0) \leqslant \varepsilon$ teljesüljön. Nyilván minden $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkra létezik olyan $a > 0$, melyre $d_t(K_1|S, (aK_2)|S) \leqslant \varepsilon$. Így ha $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ egy S_0-ra merőleges hipersík és $T = S \cap S_0$, akkor $d(K_1|T, K_2|T) \leqslant \varepsilon$ és $d_t(K_1|T, (aK_2)|T) \leqslant \varepsilon$. Alkalmazva a 7.1.10. Állítást,

$$d_t(K_2|T, (aK_2)|T) \leqslant d_t(K_2|T, K_1|T) + d_t(K_1|T, (aK_2)|T) \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ebből az 5.3.7. Állítást figyelembe véve következik, hogy $K_2|T$ és $(aK_2)|T$ egy alkalmas eltoltjának támaszfüggvényei bármely $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ vektorra legfeljebb 2ε-nal térhetnek el egymástól. Ám egy nem üres, kompakt, konvex halmaz támaszfüggvényének az u és $-u$ vektorokon felvett értékeinek összege éppen a halmaz u irányú szélessége, ennélfogva $K_2|T$ és $(aK_2)|T$ egy alkalmas eltoltjának szélességei bármely $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ irányban legfeljebb 4ε-nal térhetnek el egymástól. Mivel $K_2|T$ és $(aK_2)|T$ homotetikusak, ezért maximális szélességeik ugyanabban az irányokban vétetnek fel, így a 6.1.4. Állítás szerint $|\operatorname{diam}((aK_2)|T) - \operatorname{diam}(K_2|T)| \leqslant 4\varepsilon$, ahonnan

$$|a-1| \leqslant \frac{4\varepsilon}{\operatorname{diam}(K_2|T)} \leqslant \frac{2\varepsilon}{r(K_2)}.$$

Legyen $x \in S$ olyan vektor, hogy az $L = (K_2|S) + x$ halmaz körülírt gömbjének középpontja az origó. Most az 5.3.7. Állítást felhasználva

$$\begin{aligned} d_t(K_2|S, (aK_2)|S) &\leqslant d(L, aL) \\ &= \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_{aL}(u) - h_L(u)| \\ &\leqslant |a-1| \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} h_L(u) \\ &\leqslant |a-1| R(K_2) \\ &\leqslant 2\varepsilon R(K_2)/r(K_2), \end{aligned}$$

ahol h_L az L halmaz támaszfüggvénye. Így

$$\begin{aligned} d_t(K_1|S, K_2|S) &\leqslant d_t(K_1|S, (aK_2)|S) + d_t((aK_2)|S, K_2|S) \\ &\leqslant \varepsilon + 2\varepsilon R(K_2)/r(K_2). \end{aligned}$$

Ez fennáll minden S_0-ra merőleges $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ hipersíkra, és feltevésünk szerint $d(K_1|S_0, K_2|S_0) \leqslant \varepsilon$ is igaz. Ennélfogva a 7.1.11. Tételt (az utána tett megjegyzéssel) alkalmazva az állítás adódik. □

7.1.14. Következmény. *Legyen $n \geqslant 3$, legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ha $d(K|S, B_S) \leqslant \varepsilon$ minden $S \in \mathcal{G}(n, n-1)$ esetén, valamilyen $B_S \subseteq S$ gömbre, akkor létezik olyan n-dimenziós B gömb, amelyre $d(K, B) \leqslant 3(1 + 2\sqrt{2})\varepsilon$.*

Térjünk vissza egy kicsit a 7.1.4. Tételhez. Bizonyára feltűnt, hogy kizártuk a $k = 1$ esetet. Valóban, ekkor a tétel állítása hamis, ugyanis tetszőleges $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testre K és $-K$ vetületei bármely egyenesen egyforma hosszú szakaszok, ám a 7.1.5. Állítás szerint K és $-K$ akkor és csak akkor egymás eltoltjai, ha K centrálszimmetrikus. Így bármely nem centrálszimmetrikus, kompakt, konvex halmaz (vagy akár konvex politóp) ellenpélda.

A K halmaznak egy $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ irányvektorú egyenesre eső merőleges vetületének a hossza nem más, mint a halmaz u irányú $w_K(u)$ szélessége. Ám a szélesség egyszerűen kifejezhető a támaszfüggvény segítségével, $w_K(u) = h_K(u) + h_K(-u)$ minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén. Ezért az 5.3.5. Állítás szerint ha $0 \leqslant t \leqslant 1$, akkor $h_{tK+(1-t)(-K)} = th_K + (1-t)h_{-K}$, és mivel $w_{-K} = w_K$, így

$$w_{tK+(1-t)(-K)} = tw_K + (1-t)w_{-K} = w_K.$$

Ebből következik, hogy minden olyan $K \in \mathcal{K}_n$ halmazra, amely nem centrálszimmetrikus, kontinuum sok olyan kompakt, konvex halmaz létezik, melyek páronként nem egymás eltoltjai, és amelyek 1-dimenziós vetületeinek hosszai megegyeznek a K megfelelő 1-dimenziós vetületeinek hosszaival. Valóban, indirekt tegyük fel, hogy valamely $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ valós számokhoz létezik olyan $x \in \mathbb{E}^n$ vektor, amelyre $sK + (1-s)(-K) = tK + (1-t)(-K) + x$. Most az 5.3.4. és 5.3.5. Állításokat többször alkalmazva

$$sK + (1-t)(-K) + (t-s)(-K) = sK + (1-t)(-K) + (t-s)K + x,$$

és így $(t-s)(-K) = (t-s)K + x$ adódik. Ám ez a 7.1.5. Állítás szerint csak akkor lehetséges, ha K centrálszimmetrikus, ellentmondás.

7.2. Konvex halmazok metszetei

Most azt fogjuk vizsgálni, hogy mit mondhatunk egy kompakt, konvex halmazról, ha vetületei helyett bizonyos lineáris alterekkel vett metszeteit ismerjük. Bár első látásra a két probléma távol esik egymástól, a 3.4. fejezetben bevezetett polaritás miatt a kapcsolat mégis szoros. Nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmazra és S lineáris altérre $K^* \cap S = (K|S)^*$. Valóban, az 5.3.6. Tétel szerint (az ottani jelöléseket megtartva) minden $u \in S \cap \mathbb{S}^{n-1}$ esetén

$$g_{K^* \cap S}(u) = g_{K^*}(u) = h_K(u) = h_{K|S}(u) = g_{(K|S)^*}(u).$$

Azonban, meglepő módon, nagyon kevés esetben tudunk visszavezetni egy metszetekről szóló tételt egy már ismert, vetületekről szóló tételre.

Mivel egy konvex testet az összes lineáris altérrel vett metszetei nyilván egyértelműen meghatároznak, így rögtön a 7.1.4. Tétel megfelelőjének bizonyításával kezdünk. Azonban mindjárt az elején jegyezzük meg, hogy ha a K_1 és K_2 konvex testek egymás eltoltjai, akkor ez nem feltétlenül áll fenn egy adott S lineáris altérrel vett $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ metszeteikre is.

7.2.1. Tétel (Burton, 1976). *Legyen* $2 \leqslant k \leqslant n-1$, *és legyenek* $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ *konvex testek. Ha* $K_1 \cap S$ *homotetikus képe (eltoltja)* $K_2 \cap S$*-nek minden* $S \in \mathcal{G}(n,k)$ *esetén, akkor* K_1 *is homotetikus képe (eltoltja)* K_2*-nek.*

Bizonyítás. A tétel előtt tett megjegyzés ellenére elég az állítást $k = 2$ esetén igazolni. Valóban, tegyük fel, hogy 2-dimenziós metszetekre már igazoltuk az állítást, és tudjuk, hogy valamely $k > 2$ egész számra $K_1 \cap S$ homotetikus képe (eltoltja) $K_2 \cap S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén. Legyen T egy $(n-k+2)$-dimenziós lineáris altér, Q pedig annak egy 2-dimenziós lineáris altere. Legyen továbbá U az a k-dimenziós lineáris altér, amely tartalmazza $T^{\perp}$-t és Q-t is. Feltevésünk szerint $K_1 \cap U$ homotetikus képe (eltoltja) $K_2 \cap U$-nak, és így ezeknek a halmazoknak a T-re eső merőleges vetületei is rendelkeznek ugyanezzel a tulajdonsággal, vagyis $(K_1 \cap U)|T = (K_1|T) \cap Q$ homotetikus képe (eltoltja) $(K_2 \cap U)|T = (K_2|T) \cap Q$-nak minden $Q \in \mathcal{G}(n,2)$, $Q \subseteq T$ altérre. Most alkalmazva tételünket a (megelőlegezett) $k = 2$ esetre kapjuk, hogy $K_1|T$ homotetikus képe (eltoltja) $K_2|T$-nek. Ám ez minden $T \in \mathcal{G}(n, n-k+2)$ lineáris altérre fennáll, így a 7.1.4. Tételből következik, hogy K_1 is homotetikus képe (eltoltja) K_2-nek.

(a) Először tegyük fel, hogy K_1 és K_2 is a belsejében tartalmazza az origót. Helyettesítsük K_2-t $r_0 K_2$-vel, ahol r_0 az a legnagyobb pozitív szám, melyre $r_0 K_2 \subseteq K_1$. Most K_1-nek és K_2-nek létezik legalább egy közös H támaszhipersíkja. Legyenek $H_1 = K_1 \cap H$ és $H_2 = K_2 \cap H$. Ekkor $H_2 \subseteq H_1$ nyilván. Ha H valamely l egyenese H_2-t egyetlen pontban, H_1-et viszont szakaszban metszené, akkor az origón átmenő és l-re illeszkedő 2-dimenziós sík nem metszhetné K_1-et és K_2-t homotetikus halmazokban. Ebből következik, hogy vagy $H_1 = H_2$, vagy pedig H_1 és H_2 egy egyenesen fekvő szakaszok. Valóban, ha $\dim H_2 \leqslant 1$, akkor ez magától értetődik. Ezután indirekt tegyük fel, hogy $\dim H_2 \geqslant 2$, és $H_1 \neq H_2$. Ekkor nyilván létezik olyan 2-dimenziós $\bar{H} \subseteq H$ sík, hogy $\dim(H_2 \cap \bar{H}) = 2$ és $H_1 \cap \bar{H} \neq H_2 \cap \bar{H}$. Vegyük észre, hogy $H_2 \cap \bar{H}$ relatív határán legfeljebb megszámlálható sok szakasz van, hiszen minden i pozitív egész számra a legalább $1/i$ hosszú szakaszok száma véges, és megszámlálható sok véges halmaz uniója legfeljebb megszámlálható halmaz. Ezért szükségképpen létezik olyan $t \subseteq \bar{H}$ egyenes, amely átmegy $(\mathrm{relint}(H_1 \cap \bar{H})) \setminus (H_2 \cap \bar{H})$ valamely pontján, nem párhuzamos a $H_2 \cap \bar{H}$ relatív határán lévő szakaszok egyikével sem, és diszjunkt a $H_2 \cap \bar{H}$ halmaztól. Világos, hogy egy ilyen t egyenes eltolható úgy, hogy $(H_1 \cap \bar{H}) \cap t$ szakasz, ám $(H_2 \cap \bar{H}) \cap t$ egyetlen pont legyen, ellentmondás.

Mindkét fenti esetben található olyan, a H_1 és a H_2 halmaz H-ra vonatkozó relatív határához is hozzátartozó a pont, hogy esetleg egyetlen l_0 egyenes kivételével, a H hipersík bármely a-ra illeszkedő l egyenese vagy az a pontban, vagy pedig a végpontú, ugyanazon az a-ból kiinduló félegyenesen fekvő szakaszokban metszi mind a H_1, mind pedig a H_2 halmazokat. $H_1 = H_2$ esetén például legyen a a H_1 egy extremális pontja, míg a másik esetben a H_2 szakasz tetszőleges pontja.

Messe az a pontot az origóval összekötő l_1 egyenes K_1-et és K_2-t másodszor a b_1 és b_2 pontokban. Ekkor $b_2 - a = r(b_1 - a)$ valamely r pozitív számra. Most tekintsünk egy, az l_1-et tartalmazó, a H-t egy l_0-tól különböző l egyenesben metsző, 2-dimenziós S síkot. Az l egyenes támaszegyenese a $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazoknak, és ezek a halmazok l ugyanazon oldalán vannak S-ben. Továbbá l vagy az a pontban vagy pedig egy a-ból kiinduló félegyenesen fekvő szakaszokban metszi a H_1 és H_2 halmazokat. Ebből következik, hogy a $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazok közötti homotécia vagy identitás, vagy egy a centrumú, $r \neq 1$ arányú centrális nagyítás, vagyis $(K_2 \cap S) - a = r((K_1 \cap S) - a)$. Ez az összefüggés, legfeljebb egy kivétellel, minden $S \in \mathcal{G}(n, 2)$ és $l_1 \subseteq S$ esetén fennáll. Azonban egyetlen kivétel nem lehet, hiszen tetszőleges $K' \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testre és tetszőleges, legfeljebb $(n-1)$-dimenziós H' affin altérre nyilván $K' = \mathrm{cl}((\mathrm{int}\, K') \setminus H')$, így $K_2 - a = r(K_1 - a)$, azaz K_1 és K_2 homotetikusak.

(b) Áttérünk annak az esetnek az igazolására, amikor K_1 és K_2 egyike sem tartalmazza az origót. Tetszőleges K halmazra jelölje $\mathcal{R}(K)$ az origóból induló, a K halmazt metsző félegyenesek unióját. Állítjuk, hogy vagy $\mathcal{R}(K_1) = \mathcal{R}(K_2)$, vagy pedig $\mathcal{R}(K_1) = -\mathcal{R}(K_2)$. Legyen t egy, az origóra illeszkedő, K_1-től diszjunkt egyenes. Most $o \notin K_1|t^{\perp}$, így a 2.2.10. Állítás szerint $t^{\perp}$-ben létezik olyan ($(n-2)$-dimenziós) hipersík, amely szigorúan elválasztja a $K_1|t^{\perp}$ halmazt az origótól. De ekkor $t^{\perp}$-ben szükségképpen létezik olyan, az origóra illeszkedő t' egyenes is, amely szintén diszjunkt a $K_1|t^{\perp}$ halmaztól, és így $(t + t') \cap K_1 = \emptyset$. Ebből következik, hogy egy, az origóra illeszkedő t egyenes pontosan akkor diszjunkt K_1-től, ha létezik olyan $S \in \mathcal{G}(n, 2)$, $t \subseteq S$ sík, amely szintén diszjunkt K_1-től. Ám egy 2-dimenziós lineáris altér pontosan akkor nem metszi K_1-et, ha nem metszi K_2-t sem, ezért a K_1-et, illetve K_2-t metsző, az origón átmenő egyenesek halmazai megegyeznek, vagyis $-\mathcal{R}(K_1) \cup \mathcal{R}(K_1) = -\mathcal{R}(K_2) \cup \mathcal{R}(K_2)$. Viszont a 2.2.10. Állítással összhangban létezik olyan, az origóra illeszkedő hipersík, amely diszjunkt K_1-től. Ez a hipersík szigorúan elválasztja az $\mathcal{R}(K_1) \setminus \{o\}$ és a $-\mathcal{R}(K_1) \setminus \{o\}$ halmazokat, ennélfogva K_1 a $-\mathcal{R}(K_1) \cup \mathcal{R}(K_1)$ kettős kúpnak csak az egyik felét metszheti. Ugyanez elmondható a K_2 halmazra is, amiből az állítás adódik.

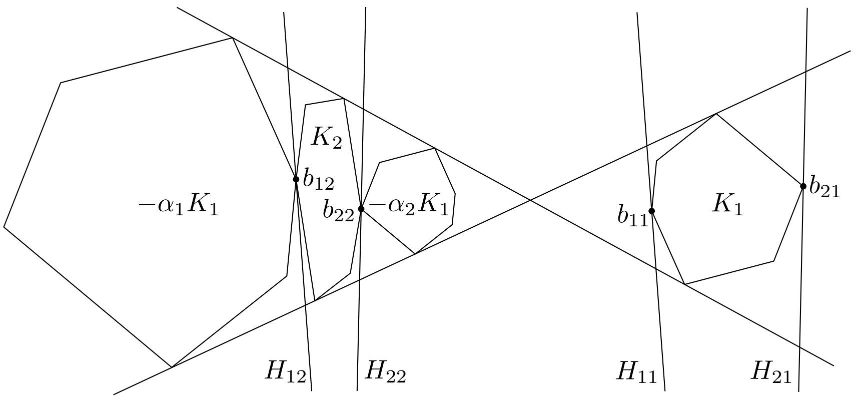
Először tegyük fel, hogy $\mathcal{R}(K_1) = \mathcal{R}(K_2)$. Legyen l egy, az origóból induló félegyenes $\mathcal{R}(K_1)$ határán, H pedig $\mathcal{R}(K_1)$-nek egy l-re illeszkedő támaszhipersíkja (vö. 2.2.4. Következmény). Legyenek továbbá a_1 és a_2 az $l \cap K_1$ és $l \cap K_2$ halmazoknak az origótól legtávolabb eső pontjai. Ekkor $a_2 = ra_1$ valamely r pozitív számra. Tekintsünk egy tetszőleges olyan $S \in \mathcal{G}(n, 2)$, $l \subseteq S$, $S \nsubseteq H$ alteret, amelyre $\mathrm{int}\, \mathcal{R}(K_1) \cap S \neq \emptyset$, és amely ezért $\mathcal{R}(K_1)$-et

2-dimenziós halmazban metszi. Ezt a metszethalmazt az l és egy l' félegyenes határolja. Az $(rK_1) \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazok feltevésünk szerint homotetikusak. Világos, hogy az $a_2 = ra_1$ pont ennek a homotéciának szükségképpen fixpontja, az l'-t tartalmazó egyenes pedig fixegyenese. Mivel $a_2 \notin l'$, így a homotécia csak identitás lehet, vagyis $(rK_1) \cap S = K_2 \cap S$. Ebből következik, hogy $x \in \operatorname{int}(rK_1) \subseteq \operatorname{int} \mathcal{R}(K_1)$ esetén $x \in K_2$, azaz $\operatorname{int}(rK_1) \subseteq K_2$, és hasonlóan, $\operatorname{int} K_2 \subseteq rK_1$. Ennélfogva $rK_1 = K_2$.

Ezek után tegyük fel, hogy $\mathcal{R}(K_1) = -\mathcal{R}(K_2)$. Legyenek

$$\alpha_1 = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid K_2 \cap (-\alpha K_1) \neq \emptyset\},$$
$$\alpha_2 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid K_2 \cap (-\alpha K_1) \neq \emptyset\}.$$

A 2.2.5. Állítás alapján $i = 1$ és $i = 2$ esetén létezik olyan $b_{i2} \in K_2 \cap (-\alpha_i K_1)$ pont és a b_{i2} pontra illeszkedő olyan H_{i2} hipersík, amely elválasztja K_2-t és $-\alpha_i K_1$-et egymástól. Legyenek $i = 1$ és $i = 2$ esetén $b_{i1} = -\frac{1}{\alpha_i} b_{i2}$ és $H_{i1} = -\frac{1}{\alpha_i} H_{i2}$. Ekkor $i = 1$ és $i = 2$ esetén H_{i1} és H_{i2} a K_1 és K_2 halmazoknak párhuzamos támaszhipersíkjai ugyanarról az oldalról a b_{i1} és b_{i2} pontokban. Vegyük észre, hogy a H_{11}, H_{21}, H_{12}, H_{22} hipersíkok nem mennek át az origón, továbbá $H_{11} \neq H_{21}$ és $H_{12} \neq H_{22}$ (ld. 7.2.1. ábra).



7.2.1. ábra.

Tekintsünk $i = 1$ és $i = 2$ esetén egy, a b_{i1} ponton átmenő $l \subseteq H_{i1}$ egyenest, és legyen S az origót és az l egyenest tartalmazó 2-dimenziós sík. Legyen továbbá $l' = -\alpha_i l$. Mivel l és l' a homotetikus $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazok párhuzamos támaszegyenesei ugyanarról az oldalról, ezért ezek az egyenesek vagy szakaszokban vagy egy-egy pontban metszik $K_1 \cap S$-et és $K_2 \cap S$-et. Ebből következik, hogy $i = 1$ és $i = 2$ esetén $K_1 \cap H_{i1}$ és $K_2 \cap H_{i2}$ ugyanolyan dimenziós, párhuzamos affin altereket feszítenek ki. Most két eset lehetséges.

(1) Tegyük fel, hogy $\dim(K_1 \cap H_{11}) < n-1$ vagy $\dim(K_1 \cap H_{21}) < n-1$, mondjuk $\dim(K_1 \cap H_{11}) < n-1$. Legyen H egy, az origóra illeszkedő, a $K_1 \cap H_{11}$ és $K_2 \cap H_{12}$ halmazokat tartalmazó hipersík, l pedig a b_{11} és b_{12} pontokat összekötő egyenes. Tekintsünk egy olyan 2-dimenziós S síkot, amely tartalmazza l-et, de nincs benne H-ban, vagyis amelyre $S \cap H = l$. Az $S \cap H_{11}$ és az $S \cap H_{12}$ egyenesek a homotetikus $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazok párhuzamos támaszegyenesei ugyanarról az oldalról, és ezek az egyenesek csak a b_{11} és b_{12} pontokban metszik $K_1 \cap S$-et és $K_2 \cap S$-et. Így a homotécia b_{11}-et b_{12}-be viszi, azaz l fixegyenes. Világos, hogy l metszi a K_1 és K_2 halmazok belsejét, ellenkező esetben lennének olyan 2-dimenziós homotetikus metszetek, amelyeket l elválasztana, és ekkor persze l nem lehetne fixegyenes. Tekintsük azt az egyértelmű homotéciáját $\mathbb{E}^n$-nek, amely $K_1 \cap l$-et $K_2 \cap l$-be viszi. Ez a homotécia minden fenti $S \in \mathcal{G}(n,2)$-re $K_1 \cap S$-et $K_2 \cap S$-be viszi, és így $K_1 \setminus H$-t $K_2 \setminus H$-ra képezi. Ebből következik, hogy K_1 és K_2 homotetikusak.

(2) Tegyük fel, hogy $\dim(K_1 \cap H_{11}) = \dim(K_1 \cap H_{21}) = n-1$. Belátjuk, hogy ekkor $-\alpha_1(K_1 \cap H_{11}) = K_2 \cap H_{12}$ és $-\alpha_2(K_1 \cap H_{21}) = K_2 \cap H_{22}$. Ehhez elég megmutatni, hogy ha a fenti egyenlőségek közül valamelyik, például az első nem állna fenn, akkor létezne olyan $S \in \mathcal{G}(n,2)$ sík, hogy az $S \cap H_{11}$ és $S \cap H_{12}$ párhuzamos egyenesek, amelyek ugyanarról az oldalról támaszegyenesei a $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazoknak, e halmazok egyikét pontban, a másikat pedig szakaszban metszenék, vagyis e halmazok nem lehetnének homotetikusak. Az S síkot az (a) pont elején alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan konstruálhatjuk meg. Legyenek $K_1' = -\alpha_1(K_1 \cap H_{11}) = (-\alpha_1 K_1) \cap H_{12}$ és $K_1'' = K_2 \cap H_{12}$. Azt mindenesetre tudjuk, hogy K_1' és K_1'' dimenziója is $n-1$. Ha $K_1' \neq K_1''$, akkor nyilván létezik olyan 2-dimenziós $\bar{H} \subseteq H_{12}$ sík, amely metszi a K_1' és K_1'' halmazok relatív belsejét, és amely tartalmaz egy $x \in ((\operatorname{relint} K_1') \setminus K_1'') \cup ((\operatorname{relint} K_1'') \setminus K_1')$ pontot. Világos, hogy x a K_1' és K_1'' halmazok egyikének relatív belső pontja, míg a másik halmaz nem tartalmazza x-et. Most az (a) pont elejéhez hasonlóan található olyan $t \subseteq \bar{H}$ egyenes, amely a K_1' és K_1'' halmazok egyikét szakaszban, a másikat pedig egyetlen pontban metszi. Ezek után legyen S a t és a $-\frac{1}{\alpha_1}t$ egyenesek által kifeszített, az origóra illeszkedő 2-dimenziós sík. Az így megkonstruált S sík nyilván megfelel a kívánalmaknak.

Módosítsuk $i = 1$ és $i = 2$ esetén a b_{i1} és b_{i2} pontokat (ha szükséges) úgy, hogy $b_{i1} \in \operatorname{relint}(K_1 \cap H_{i1})$, $b_{i2} \in \operatorname{relint}(K_2 \cap H_{i2})$, és persze $b_{i2} = -\alpha_i b_{i1}$ teljesüljön. Legyen S egy az origóra, valamint a b_{11} és b_{21} pontokra illeszkedő 2-dimenziós sík. A $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazok feltevésünk szerint homotetikusak, mondjuk az r aránnyal. Legyenek $i = 1$ és $i = 2$ esetén $s_{i1} = K_1 \cap H_{i1} \cap S$ és $s_{i2} = K_2 \cap H_{i2} \cap S$. Most $i = 1$ és $i = 2$ esetén az s_{i1} és s_{i2} szakaszok nem elfajulók, és hosszaikra $r|s_{i1}| = |s_{i2}|$. Másrészt $i = 1$

és $i = 2$ esetén $-\alpha_i(K_1 \cap H_{i1}) = K_2 \cap H_{i2}$, ennélfogva $\alpha_i|s_{i1}| = |s_{i2}|$. Ebből következik, hogy $\alpha_1 = r = \alpha_2$, ellentmondás. Így ez az eset nem fordulhat elő.

(c) Tegyük fel, hogy a K_1 és K_2 halmazok legalább egyike tartalmazza az origót. Ekkor a másik halmaz is tartalmazza az origót, különben a 2.2.10. Állítással összhangban létezne olyan 2-dimenziós lineáris altér, amely a K_1 és K_2 halmazok egyikét metszené, ám a másiktól diszjunkt lenne. Azzal az esettel már foglalkoztunk, amikor a K_1 és K_2 halmazok a belsejükben tartalmazzák az origót, így most legyen az origó mondjuk a K_1 határán. Tekintsük a K_1 halmaz egy, az origón átmenő H_1 támaszhipersíkját, és legyen H_2 a K_2 halmaz azon H_1-el párhuzamos támaszhipersíkja, amelynek ugyanazon az oldalán van K_2, mint H_1-nek K_1. Most két eset lehetséges.

(1) Tegyük fel, hogy $H_1 \neq H_2$. A (b) esetnél elmondottakhoz hasonlóan $K_1 \cap H_1$ és $K_2 \cap H_2$ itt is ugyanolyan dimenziós, párhuzamos affin altereket feszítenek ki. Ha $\dim(K_1 \cap H_1) > 1$ lenne, akkor létezne olyan $S \in \mathcal{G}(n, 2)$, hogy az $S \cap H_1$ és $S \cap H_2$ párhuzamos egyenesek, amelyek ugyanarról az oldalról támaszegyenesei a $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ halmazoknak, $K_1 \cap S$-et szakaszban, $K_2 \cap S$-et pedig pontban metszenék (megint ugyanazt a gondolatmenetet kell követni, mint az (a) pont elején), vagyis e halmazok nem lehetnének homotetikusak. Ezért $\dim(K_1 \cap H_1), \dim(K_2 \cap H_2) \leqslant 1$. Legyenek $u \in K_2 \cap H_2$ és l az origót az u ponttal összekötő egyenes. Világos, hogy l nincs benne H_1-ben és H_2-ben sem, továbbá $o, u \in K_2$ miatt $K_2 \cap l$ szakasz. Legyen S_0 egy olyan 2-dimenziós sík, amely tartalmazza $K_1 \cap H_1$-et és $K_2 \cap H_2$-t. Ezek után tekintsünk egy, az l-re illeszkedő, S_0-tól különböző 2-dimenziós S síkot. Mivel $(K_1 \cap H_1) \cap S$ és $(K_2 \cap H_2) \cap S$ pontok, így $K_1 \cap S$-et $K_2 \cap S$-be $\mathbb{E}^n$ azon egyértelmű homotéciája viszi, melynél a $K_1 \cap l$ szakasz képe $K_2 \cap l$. Azonban ez a homotécia K_1-et K_2-be viszi.

(2) Tegyük fel, hogy $H_1 = H_2$. Ha $K_1 \cap H_1$ és $K_2 \cap H_2$ legalább egyike nem csak az origóból áll, akkor létezik az origóra illeszkedő olyan $l \subseteq H_1$ egyenes, amely a K_1 és K_2 halmazok egyikét szakaszban metszi. Ez az l egyenes a másik halmazt is nyilván szakaszban metszi. Tekintsük azt az egyértelmű homotéciáját $\mathbb{E}^n$-nek, amely $K_1 \cap l$-et $K_2 \cap l$-be viszi. Ez a homotécia minden $S \in \mathcal{G}(n, 2)$, $l \subseteq S$, $S \nsubseteq H_1$ esetén $K_1 \cap S$-et $K_2 \cap S$-be viszi. Ebből következik, hogy K_1 és K_2 homotetikusak.

Ha $K_1 \cap H_1$ és $K_2 \cap H_2$ is csak az origóból áll, akkor tekintsünk egy, az origót a K_1 valamely belső pontjával összekötő l egyenest, valamint azt az egyértelmű homotéciáját $\mathbb{E}^n$-nek, amely $K_1 \cap l$-et $K_2 \cap l$-be viszi. Ez a homotécia minden $S \in \mathcal{G}(n, 2)$, $l \subseteq S$ esetén $K_1 \cap S$-et $K_2 \cap S$-be viszi, így K_1 képe is K_2 lesz.

Ha $K_1 \cap S$ eltoltja $K_2 \cap S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n, 2)$ esetén, akkor a bizonyítás eddigi része szerint K_1 homotetikus képe K_2-nek. Ha a homotécia aránya $\lambda \neq 1$, akkor tekintsünk egy, a homotécia c centrumát tartalmazó, és a K_2 belsejét metsző $S_0 \in \mathcal{G}(n,2)$ síkot. Most $K_1 - c = \lambda(K_2 - c)$, így $(K_1 \cap S_0) - c = \lambda((K_2 \cap S_0) - c)$, és $\dim(K_1 \cap S_0) = 2$ persze. Másrészt feltevésünk szerint $K_1 \cap S_0$ és $K_2 \cap S_0$ egymás eltoltjai, vagyis $\lambda = 1$, ellentmondás. Ebből következik, hogy K_1 és K_2 egymás eltoltjai. $\square$

Az a feltevés, hogy $K_1 \cap S$ eltoltja $K_2 \cap S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, nem vonja maga után a $K_1 = K_2$ egyenlőséget. Valóban, legyen K_1 egy, az origótól különböző centrumú gömb, és legyen $K_2 = -K_1$.

7.2.2. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ha $K \cap S$ centrálszimmetrikus minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K maga is centrálszimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen $K_1 = K$, és legyen $K_2 = -K$. Ekkor minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén $K_2 \cap S = -(K_1 \cap S)$. A 7.1.5. Állítás szerint $K_1 \cap S$ és $K_2 \cap S$ egymás eltoltjai, hiszen $K_1 \cap S$ centrálszimmetrikus. Ám ekkor K_1 és K_2 is egymás eltoltjai a 7.2.1. Tétel miatt. Alkalmazva ismét a 7.1.5. Állítást kapjuk, hogy $K_1 = K$ centrálszimmetrikus. $\square$

7.2.3. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó konvex test. Ha $K \cap S$ gömb minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K maga is gömb.*

Bizonyítás. Legyen $K_1 = K$, és legyen $K_2 = B$ egy origó középpontú, n-dimenziós gömb. A 7.2.1. Tétel szerint K és B homotetikusak, következésképpen K is egy n-dimenziós gömb. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 7.2.3. Tételben az $o \in \operatorname{int} K$ feltétel elhagyható, vagyis ha $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és egy $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testre $K \cap S$ gömb minden olyan $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, amelyre $(\operatorname{int} K) \cap S \neq \emptyset$, akkor K gömb.

7.3. Ellipszoid karakterizációs tételek

Fő célunk a 7.1.7. és 7.2.3. Tételek kiterjesztése lesz ellipszoidokra. Ellipszoidoknak a gömb affin képeit nevezzük. A koordinátarendszer alkalmas megválasztásával $\mathbb{E}^n$ minden ellipszoidja előáll $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 \leqslant 1$ alakban. Valóban, egy A nem szinguláris lineáris transzformációra $\langle Ax, Ax\rangle \leqslant 1$ ekvivalens azzal, hogy $\langle A^\top Ax, x\rangle \leqslant 1$, és itt tekinthetjük a pozitív definit, szimmetrikus $A^\top A$ mátrix főtengelytranszformáltját.

7.3.1. Tétel. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ha $K|S$ ellipszoid minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K maga is ellipszoid.*

Bizonyítás. Elég az állítást $k = n-1$ esetén igazolni. Valóban, ha minden k-dimenziós vetület ellipszoid, akkor (megelőlegezett) állításunk szerint a $(k+1)$-dimenziós vetületek is ellipszoidok, és így teljes indukcióval maga K is ellipszoid lesz.

Legyen $\overline{aa'}$ a K egy átmérője. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = (1,0,\dots,0)$ és $a' = (-1,0,\dots,0)$. Ekkor az $x_1 = 1$ és $x_1 = -1$ egyenletű hipersíkok támaszhipersíkjai K-nak.

Legyen H egy az aa' egyenessel párhuzamos támaszhipersíkja K-nak, S pedig egy a H-ra merőleges, az aa' egyenest tartalmazó hipersík. A $K|S$ vetület ellipszoid S-ben, és $\overline{aa'}$ tengelye ennek az ellipszoidnak, hiszen egy ellipszoid tengelyei pontosan azok a húrok, amelyek végpontjaira illeszkedő támaszhipersíkok merőlegesek a húrra. $H \cap S$ támaszhipersíkja $K|S$-nek (S-ben), egyetlen pontban metszi $K|S$-et, és ez a pont nyilván benne van az $x_1 = 0$ egyenletű H_0 hipersíkban. Ebből következik, hogy $H \cap K$ is benne van a H_0 hipersíkban. Mivel ez az aa' egyenessel párhuzamos bármely H hipersíkra fennáll, ezért a K halmaznak a H_0 hipersíkra eső merőleges vetülete, amely egy E ellipszoid, megegyezik $K \cap H_0$-val. Az E ellipszoid középpontja szükségképpen az origó, hiszen ha $H \cap S$ támaszhipersíkja $K|S$-nek, akkor $-(H \cap S)$ is az.

Tekintsünk egy olyan φ affinitást, amely az aa' egyenest pontonként fixen hagyja, E-t pedig egy origó középpontú, az $x_1 = 0$ egyenletű hipersíkban fekvő B gömbbe viszi. Legyen $\overline{bb'}$ a B gömb egy átmérője. A $\overline{bb'}$ átmérőre a végpontjaiban emelt merőleges hipersíkok támaszhipersíkjai φK-nak, hiszen a φ^{-1} leképezésnél vett képük támaszhipersíkjai K-nak (ui. párhuzamosak aa'-vel, és az $x_1 = 0$ egyenletű hipersíkkal vett metszetük érintik E-t).

A φK halmaz vetületei szintén ellipszoidok, így alkalmazva az előző bekezdés gondolatmenetét φK-ra és $\overline{bb'}$-re kapjuk, hogy $\overline{bb'}$ szakaszfelező merőleges hipersíkja φK-t egy E' ellipszoidban metszi. Az E' ellipszoidnak $\overline{aa'}$ nyilván tengelye. Ennélfogva az aa' egyenest tartalmazó, $\operatorname{aff} E'$-beli 2-dimenziós síkok olyan ellipszisekben metszik φK-t, amelyek egyik tengelye $\overline{aa'}$, a másik pedig B egy átmérője. Még vegyük észre, hogy bármely, az aa' egyenest tartalmazó 2-dimenziós S síkra a $\overline{bb'}$ átmérő alkalmas választásával elérhető, hogy $S \subseteq \operatorname{aff} E'$ legyen. Ebből következik, hogy φK forgásellipszoid, és így K ellipszoid. $\square$

A 7.2.3. Tétel kiterjesztése kicsit bonyolultabb. Először azt az esetet fogjuk tekinteni, amikor K a belsejében tartalmazza az origót.

7.3.2. Állítás. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó konvex test. Ha $K \cap S$ ellipszoid minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K maga is ellipszoid.*

Bizonyítás. Mivel a k-dimenziós ellipszoidok 2-dimenziós metszetei ellipszisek, ezért elég az állítást $k = 2$ esetén igazolni.

Legyen g egy az origóra illeszkedő egyenes, és messe g a K határát a q_1 és q_2 pontokban. Legyenek továbbá H_1 és H_2 a K halmaz támaszhipersíkjai q_1-ben és q_2-ben. Mivel a g-re illeszkedő 2-dimenziós síkok ellipszisekben metszik K-t, így $K \cap H_1 = \{q_1\}$ és $K \cap H_2 = \{q_2\}$. Ebből következik, hogy az $(n-2)$-dimenziós (esetleg ideális) $L = H_1 \cap H_2$ affin altér diszjunkt K-tól. Euklideszi terünket bővítsük ki az ideális térelemekkel, és e projektív térben legyen p az origónak a q_1 és q_2 pontokra vonatkozó harmonikus társa a g egyenesen. Most válasszuk ideális hipersíknak az L altérre és a p pontra illeszkedő hipersíkot, amely persze nem metszi K-t. Elhagyva az ideális térelemeket, Euklideszi terünkben a H_1 és H_2 hipersíkok már párhuzamosak, az origó pedig a H_1 és H_2 középpárhuzamos H hipersíkján fekszik (világos, hogy egy ilyen projektív leképezésnél K a metszeteivel együtt akkor és csak akkor ellipszoid, ha eredetileg is az volt). Egy alkalmas affin transzformációval az is elérhető, hogy g merőleges legyen H-ra.

Ezek után az állítást a dimenzióra vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Először a 3-dimenziós esetet tekintjük. A g egyenesre illeszkedő 2-dimenziós síkok ellipszisekben metszik K-t. Ezeknek az ellipsziseknek az egyik tengelyük a $\overline{q_1 q_2}$ szakasz, ezért középpontjuk az origó, másik tengelyük pedig benne van H-ban. Ebből következik, hogy a $K \cap H$ ellipszis szimmetrikus az origóra. Alkalmazzunk K-ra egy olyan affinitást, amely g-t pontonként fixen hagyja, és a $K \cap H$ ellipszist egy origó középpontú körbe viszi. Ez az affinitás K-t nyilván egy forgásellipszoidba transzformálja, így K szükségképpen ellipszoid.

Ha $n > 3$, akkor az indukciós feltevés szerint $K \cap H$ ellipszoid. Ez az ellipszoid ismét szimmetrikus az origóra. Ezek után a fenti gondolatmenet megismétlésével adódik, hogy K ellipszoid. □

Az általános eset bizonyításához szükség lesz két önmagában is érdekes tételre.

7.3.3. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó konvex test. Ha K bármely két különböző p és q határpontjához létezik olyan affinitás, amely az origót fixen hagyja, K-t önmagára képezi, és p-t q-ba viszi, akkor K origó középpontú ellipszoid.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy egy és csak egy origó középpontú, K-t tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid létezik. Jelölje $\mathcal{E}$ a K-t tartalmazó, origó középpontú ellipszoidok családját, és legyen $a = \inf\{V(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$. Ekkor $a > 0$ nyilván. Most tekintsük $\mathcal{E}$-beli ellipszoidoknak egy olyan (E_i) sorozatát, hogy a térfogatok $(V(E_i))$ sorozata a-hoz tart. Az (E_i) sorozatból nyilván kiválasztható olyan (E_{i_j}) sorozat, amelyben az ellipszoidok tengelyirány n-esei konvergensek, ebből pedig, figyelembe véve a tengelyhosszak alulról korlátos voltát, kiválasztható olyan sorozat, ahol már maguk a tengely n-esek konvergensek. Innen következik a minimális térfogatú ellipszoid létezése.

Hátra van még az egyértelműség. Legyenek E_1 és E_2 origó középpontú, a K-t tartalmazó, minimális térfogatú ellipszoidok. Tekintsünk egy olyan térfogattartó affinitást, amely E_1-et egy origó középpontú E_1' gömbbe transzformálja. Ez az affinitás E_2-t egy origó középpontú E_2' ellipszoidba viszi. A koordinátarendszer alkalmas megválasztásával az E_1' gömb egyenlete $\sum_{i=1}^n x_i^2/b^2 \leqslant 1$, az E_2' ellipszoid egyenlete pedig $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 \leqslant 1$ alakú. Mivel E_1' és E_2' térfogata megegyezik, ezért $a = b^n\kappa_n = a_1a_2\cdots a_n\kappa_n$, ahol κ_n az n-dimenziós egységgömb térfogata. Továbbá a K halmaznak a K' affin képe benne van E_1'-ben és E_2'-ben is, így minden $x \in K'$ pontra $\sum_{i=1}^n x_i^2/b^2 \leqslant 1$ és $\sum_{i=1}^n x_i^2/a_i^2 \leqslant 1$, következésképpen

$$\sum_{i=1}^n \frac{b^{-2} + a_i^{-2}}{2} x_i^2 \leqslant 1.$$

Vegyük észre, hogy ez utóbbi szintén egy E' ellipszoid egyenlete, melynek térfogata feltevésünk szerint persze legalább a. Másrészt a számtani és mértani közép közötti összefüggés felhasználásával

$$V(E') = \kappa_n \prod_{i=1}^n ba_i\sqrt{\frac{2}{b^2 + a_i^2}} \leqslant \kappa_n \prod_{i=1}^n (ba_i)^{1/2} = V(E_1')^{1/2}V(E_2')^{1/2} = a.$$

Ebből következik, hogy $V(E') = a$ is fennáll, ami viszont csak akkor lehetséges ha $b = a_i$ minden $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén, vagyis $E_1' = E_2'$, és így $E_1 = E_2$.

Ezek után a tétel bizonyítása már nem nehéz. Legyen E az origó középpontú, a K-t tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid. Ekkor K-nak és E-nek van legalább egy közös határpontja, legyen p egy ilyen pont. Tekintsük a K egy tetszőleges, p-től különböző q határpontját. Feltevésünk szerint létezik olyan φ affinitás, amely az origót fixen hagyja, K-t önmagára képezi, és p-t q-ba viszi. A φ affinitás nyilván térfogattartó, ezért E képe a fentiekkel összhangban csak önmaga lehet. Ebből következik, hogy q is az E határán van. Mivel ez K minden határpontjára fennáll, így $K = E$. □

7.3.4. Tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, és tegyük fel, hogy bármely rögzített egyenesre K-nak az adott egyenessel párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy hipersíkra illeszkednek. Ekkor K ellipszoid.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy elég a tételt $n = 2$ esetén igazolni. Valóban, e (megelőlegezett) tételből következik, hogy egy rögzített belső ponton átmenő 2-dimenziós síkok ellipszisekben metszik K-t, s így a 7.3.2. Állítás szerint K ellipszoid.

Legyen $\mathcal{F}_1$ a K konvex síkidom egy rögzített iránnyal párhuzamos húrjainak családja, g_1 pedig e húrok felezőpontjainak egyenese. A g_1 egyenessel párhuzamos húrok családját jelölje $\mathcal{F}_2$, és ezen húrok felezőpontjainak egyenese legyen g_2. Tekintsük $i = 1$ és $i = 2$ esetén azt a φ_i tengelyes affinitást, amely g_i-t pontonként fixen hagyja, és $\mathcal{F}_i$ minden húrjának a végpontjait felcseréli.

A φ_1 affinitás K-t önmagára képezi, továbbá az $\mathcal{F}_2$-beli húrokat $\mathcal{F}_2$-beli húrokba viszi. Ám egy affinitás felezőponttartó, így szükségképpen $\varphi_1(g_2) = g_2$ és $g_2 \cap K \in \mathcal{F}_1$. Az indexek felcserélésével adódik, hogy $\varphi_2(g_1) = g_1$ és $g_1 \cap K \in \mathcal{F}_2$. Egy alkalmas affin transzformációval elérhető, hogy a g_1 és g_2 egyenesek a koordinátarendszer tengelyei, φ_1 és φ_2 pedig a g_1-re és g_2-re történő tengelyes tükrözések legyenek. Mivel a $\varphi_1\varphi_2$ középpontos tükrözés K-t fixen hagyja, ezért a $z = g_1 \cap g_2$ pont szükségképpen centruma K-nak.

Ezek után ha p és q két olyan különböző határpontja K-nak, amelyekre $\operatorname{relint} \overline{pq} \subseteq \operatorname{int} K$ vagy $\overline{pq} = pq \cap \operatorname{bd} K$, és $\mathcal{F}_1$ jelöli a pq egyenessel párhuzamos K-beli húrok halmazát, akkor a fent definiált φ_1 affinitás K-t önmagára képezi, p-t q-ba viszi, és z-t fixen hagyja. Legyen most $\overline{pq} \subseteq \operatorname{bd} K$ olyan, hogy $\overline{pq} \neq pq \cap \operatorname{bd} K$, például $p \in \operatorname{relint}(pq \cap \operatorname{bd} K)$. Ha találunk olyan $r \in \operatorname{bd} K$ pontot, amelyre $\operatorname{relint} \overline{pr} \subseteq \operatorname{int} K$ és $\operatorname{relint} \overline{rq} \subseteq \operatorname{int} K$, akkor a (p, r) és (r, q) párokhoz a fent megkonstruált affinitások kompozíciója K-t önmagára képezi, p-t q-ba viszi, és z-t fixen hagyja. Legyen $r \in \operatorname{bd} K$ egy olyan pont, amelyre $rpq\measuredangle = \pi - \varepsilon$, ahol ε alkalmasan kicsi pozitív valós szám. Ekkor $p \in \operatorname{relint}(pq \cap \operatorname{bd} K)$ miatt $\operatorname{relint} \overline{pr} \subseteq \operatorname{int} K$, továbbá ε megválasztása miatt $\operatorname{relint} \overline{rq} \subseteq \operatorname{int} K$ is teljesül.

Így a 7.3.3. Tétel szerint K csak ellipszis lehet. $\square$

Most már nem nehéz bizonyítani a 7.2.3. Tétel kiterjesztését az általános esetben sem.

7.3.5. Tétel (Burton, 1976). *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Ha $K \cap S$ ellipszoid minden olyan $S \in \mathcal{G}(n, k)$ esetén, amelyre $(\operatorname{int} K) \cap S \neq \emptyset$, akkor K maga is ellipszoid.*

Bizonyítás. Mivel a k-dimenziós ellipszoidok 2-dimenziós metszetei ellipszisek, ezért elég az állítást $k = 2$ esetén igazolni.

Ha K belső pontként tartalmazza az origót, akkor a 7.3.2. Állítás szerint K ellipszoid, ezért tegyük fel, hogy az origó nem belső pontja K-nak. Először a 3-dimenziós esettel foglalkozunk. Hasonlóan, mint a 7.3.2. Állítás bizonyításának elején láttuk, most is tekinthetünk egy olyan, origón átmenő, K belsejébe belemetsző g egyenest, amelyre a K testnek a $K \cap g$ szakasz a_1 és a_2 végpontjaira illeszkedő H_1 és H_2 támaszsíkjai párhuzamosak. Egy alkalmas affin transzformációval az is elérhető, hogy g merőleges legyen H_1-re és H_2-re.

A g-re illeszkedő 2-dimenziós síkok most olyan ellipszisekben metszik K-t, melyek centruma $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, egyik tengelyük pedig az $\overline{a_1 a_2}$ szakasz. Ebből következik, hogy K-nak a H_1 és H_2 között lévő, azokkal párhuzamos metszetei (páronként) homotetikusak g-n lévő homotécia centrummal, továbbá centrálszimmetrikusak g-n lévő centrummal.

Legyen H az a pontra illeszkedő, H_1-el párhuzamos 2-dimenziós sík. A $K \cap H$ halmaz határa nem tartalmazhat szakaszt, hiszen egy ilyen szakasznak és az origónak az affin burka, amely nyilván metszi K belsejét, nem metszhetné K-t ellipszisben. Tekintsünk egy tetszőleges $h \subseteq H$ egyenest. Az előző bekezdésben elmondottakból egyszerűen adódik, hogy K-nak a h-val párhuzamos támaszegyenesei olyan pontokban metszik K-t, melyek egy a g-t tartalmazó 2-dimenziós S síkban vannak. Most legyen $h' \subseteq H$ olyan, h-val párhuzamos egyenes, amely szakaszban metszi $K \cap H$-t. Az origón átmenő, h'-re illeszkedő 2-dimenziós S' sík ellipszisben metszi K-t, és ezt az ellipszist a h'-vel párhuzamos érintői S-beli pontokban érintik. Ennélfogva a $K \cap H \cap h' = K \cap S' \cap h'$ szakasz felezőpontja S-ben van. Mivel ez minden olyan, h-val párhuzamos h' egyenesre fennáll, amely szakaszban metszi $K \cap H$-t, így a $K \cap H$ halmaz h-val párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy egyenesen vannak. Ám h tetszőleges H-beli egyenes volt, ezért a 7.3.4. Tétel szerint $K \cap H$ ellipszis. Ebből pedig már következik, hogy K ellipszoid.

Ha $n \geqslant 4$, akkor tekintsük K egy p belső pontját. Minden, az origót elkerülő, a p-re illeszkedő 2-dimenziós S síkra legyen $\bar{S}$ az origónak és az S síknak a (3-dimenziós) affin burka. Most az origóra illeszkedő, $\operatorname{relint}(K \cap \bar{S})$ valamely pontját tartalmazó, 2-dimenziós síkok $K \cap \bar{S}$-et ellipszisekben metszik, így az előzőek szerint $K \cap \bar{S}$ ellipszoid, amiből következik, hogy $K \cap S$ ellipszis. Mivel ez utóbbi minden, a p pontra illeszkedő 2-dimenziós S síkra fennáll, ezért a 7.3.2. Állítással összhangban K ellipszoid. $\square$

A 7.3.5. Tételből egyszerűen következik, hogy ha $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, és egy $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testre $K \cap S$ gömb minden olyan $S \in \mathcal{G}(n, k)$ esetén, amelyre $(\operatorname{int} K) \cap S \neq \emptyset$, akkor K gömb (vö. 7.2.3. Tétel). Ehhez csak azt kell észrevenni, hogy bármely, gömbtől különböző 3-dimenziós ellipszoidhoz található olyan, az origóra illeszkedő 2-dimenziós sík, amely az ellipszoidot körtől különböző ellipszisben metszi. Valóban, az origóra, valamint az ellipszoid legrövidebb vagy leghosszabb tengelyére (válasszuk azt, amelyik hossza különbözik a harmadik tengely hosszától) illeszkedő sík biztosan nem körben metszi az ellipszoidot.

Feladatok

7.1. Feladat. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ha $K|S$ állandó szélességű halmaz (S-ben) minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K maga is állandó szélességű halmaz.*

7.2. Feladat. *Legyen $n \geqslant 3$, legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ centrálszimmetrikus, konvex testek, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy ha $d_t(K_1|S, K_2|S) \leqslant \varepsilon$ minden $S \in \mathcal{G}(n,n-1)$ esetén, akkor $d_t(K_1, K_2) \leqslant \varepsilon$.* [Útmutatás: Módosítsuk a 7.1.11. Tétel bizonyítását.]

7.3. Feladat. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó konvex test. Mutassuk meg, hogy ha $K \cap S$ állandó szélességű halmaz (S-ben) minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor K állandó szélességű halmaz.* [Útmutatás: Először azt lássuk be, hogy K-nak létezik origóra illeszkedő átmérője.]

7.4. Feladat** (Montejano, 1991). *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ha $K \cap S$ állandó szélességű halmaz (S-ben) minden olyan $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, amelyre $K \cap S \neq \emptyset$, akkor K gömb.*

7.5. Feladat** (Burton-Mani, 1978). *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Tegyük fel, hogy létezik az origótól különböző olyan x pont, amelyre $(K+x) \cap S$ homotetikus képe $K \cap S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor K ellipszoid.*

7.6. Feladat. *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Mutassuk meg, hogy ha $K_1 \cap S$ homotetikus képe $K_2 \cap S$-nek minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, akkor vagy $K_2 = rK_1$, ahol $r > 0$, vagy pedig K_1 és K_2 homotetikus ellipszoidok.* [Útmutatás: Használjuk fel a 7.2.1. Tételt, valamint a 7.5. Feladatot.]

7.7. Feladat (Larman, 1974). *Legyen $2 \leqslant k \leqslant n-1$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ha $K \cap S$ centrálszimmetrikus minden $S \in \mathcal{G}(n,k)$ esetén, és K nem szimmetrikus az origóra, akkor K ellipszoid.* [Útmutatás: Használjuk fel a 7.2.2. Tételt, valamint a 7.5. Feladatot.]

7.8. Feladat. *Legyen $n \geqslant 2$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó konvex test. Mutassuk meg, hogy K akkor és csak akkor szimmetrikus az origóra, ha K bármely, origón átmenő húrjának végpontjaiban léteznek párhuzamos támaszhipersíkjai K-nak.* [Útmutatás: Elég az állítást 2-dimenzióban igazolni. Legyen K határának polárkoordinátás egyenlete $r = f(\alpha)$ ahol f periódusa 2π. Ezek után tekintsük az $r = (f(\alpha)+f(\alpha+\pi))/2$ és $r = f(\alpha+\pi)$ polárkoordinátás egyenletekkel meghatározott K' és K'' kompakt halmazokat. Könnyű ellenőrizni, hogy $2V(K') \leqslant V(K) + V(K'')$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az f függvény π szerint is periodikus. Bizonyítsuk be, hogy a másik irányú egyenlőtlenség, azaz $2V(K') \geqslant V(K) + V(K'')$ is fennáll, amiből következik az állítás.]

7.9. Feladat*. *Legyen $n \geqslant 3$, és legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy K akkor és csak akkor ellipszoid, ha K adott irányú támaszegyeneseinek uniója K-t mindig olyan halmazban metszi, amely egy hipersíkban helyezkedik el.* [Útmutatás: Először lássuk be, hogy elég az állítást 3-dimenzióban igazolni. Legyenek H_1 és H_2 párhuzamos támaszsíkjai K-nak az (egyértelmű) p_1 és p_2 pontokban. A 7.8. Feladat felhasználásával mutassuk meg, hogy bármely, H_1 és H_2 között elhelyezkedő, H_1-el párhuzamos sík a p_1p_2-n lévő szimmetriacentrumú halmazban metszi K-t. Most ebből az észrevételből, valamint a 7.3.4. Tételből vezessük le, hogy tetszőleges, a p_1-re illeszkedő $g \subseteq H_1$ egyenesre a K halmaz g-vel párhuzamos támaszegyeneseinek uniója K-t ellipszisben metszi. Ezután igazoljuk, hogy a K halmaz p_1p_2 egyenessel párhuzamos támaszegyeneseinek uniója olyan ellipszisben metszi K-t, melynek síkja párhuzamos H_1-gyel. Végül alkalmazzuk a 7.3.2. Állítás bizonyításának gondolatmenetét.]

7.10. Feladat* (Rogers-Shephard, 1957). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, és tegyük fel, hogy ha K valamely két homotetikus példánya legalább 1-dimenziós halmazban metszi egymást, akkor a metszet homotetikus K-val. Mutassuk meg, hogy ekkor K szimplex.* [Útmutatás: Legyen p a K egy olyan határpontja, melyre K-nak csak egyetlen H támaszhipersíkja illeszkedik. A K halmaz H-val párhuzamos másik támaszhipersíkjának a K-val vett metszetén válasszunk egy tetszőleges q pontot. Most legyen $0 < \varepsilon < 1$, és kicsinyítsük K-t a q pontból ε arányban. Az így kapott halmazt jelölje K', a p pont képét pedig p'. Ezután legyen $\delta > 1$, és nagyítsuk K'-t a p' pontból δ

arányban. Így egy K'' halmazhoz jutunk. Mutassuk meg, hogy $K \cap K''$ valójában független δ-tól, majd igazoljuk, hogy K egy olyan q csúcsú kúp, amely alapjának p relatív belső pontja. Végül magát az állítást, a fenti észrevétel felhasználásával, a dimenzióra vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk.]

8. fejezet

Vegyes térfogatok

8.1. Konvex halmazok térfogata

Röviden elevenítsük fel a Lebesgue mértékkel kapcsolatos ismereteinket. Legyenek $a_j < b_j$ tetszőleges pozitív számok minden $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén, és tekintsük a $P = I_1 + \cdots + I_n$ merőleges parallelotópot, ahol I_j az n-dimenziós tér x_j tengelyén az $a_j \leqslant x_j < b_j$ egyenlőtlenséggekkel definiált félig nyílt szakasz minden $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén. Egy ilyen P merőleges parallelotóp $V(P)$ térfogata legyen $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. A következő két bekezdésben az egyszerűség kedvéért merőleges parallelotóp alatt mindig ilyen típusú parallelotópot fogunk érteni.

Az n-dimenziós tér egy halmazát elemi halmaznak nevezzük, ha valamilyen módon előállítható véges sok, páronként diszjunkt merőleges parallelotóp uniójaként. Ha egy A elemi halmazra $A = \cup P_k$, ahol a P_k halmazok páronként diszjunkt merőleges parallelotópok, akkor az A halmaz $V(A)$ térfogata legyen $\sum_k V(P_k)$. Nem nehéz belátni, hogy ez az érték független a $\{P_k\}$ halmazrendszertől.

Ezek után egy tetszőleges $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz külső mértéke legyen a

$$\mu(A) = \inf_{A \subseteq \cup P_k} \sum_k V(P_k)$$

nem negatív szám, ahol az infimum az A halmaz összes lehetséges, véges vagy megszámlálhatóan sok merőleges parallelotóp uniójával való lefedésére vonatkozik. Elemi halmazokra nyilván $\mu(A) = V(A)$.

Most egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazt Lebesgue mérhetőnek nevezünk, ha tetszőleges $X \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazra $\mu(X) = \mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A)$. Megmutatható, hogy egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz pontosan akkor Lebesgue mérhető, és $\mu(A)$ mértéke véges, ha bármely ε pozitív számhoz létezik olyan B elemi halmaz, amelyre az A és

B halmazok szimmetrikus differenciájának külső mértéke kisebb, mint ε. A μ függvénynek a Lebesgue mérhető halmazok családjára való megszorítását térfogatnak nevezzük, és a V betűvel jelöljük. Megjegyezzük, hogy például $\mathbb{E}^n$ minden kompakt halmaza Lebesgue mérhető, és térfogata véges.

Megmutatjuk, hogy konvex testekre ennél sokkal több is igaz. Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy K benne van a

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid -\tfrac{1}{2} \leqslant x_j \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ minden } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ esetén}\}$$

kockában. Legyen i tetszőleges pozitív egész szám. Az élek 2^i egyenlő részre osztásával a C kockát 2^{-i} élű, egybevágó, zárt kockákra bonthatjuk. Jelölje $\mathcal{L}_i$ a kapott kis kockák közül azoknak a családját, amelyek metszik K belsejét, $\bar{\mathcal{L}}_i$ pedig ezek közül azokét, amelyek metszik K határát. Ekkor nyilván

$$\cup(\mathcal{L}_i \setminus \bar{\mathcal{L}}_i) \subseteq K \subseteq \cup\mathcal{L}_i.$$

Állítjuk, hogy $\bar{\mathcal{L}}_i$ kis kockáinak térfogatösszege legfeljebb $n2^n2^{-i}$. Valóban, tekintsük azt a 2^n irányt, amelyeket a C kocka csúcsaiból a kocka középpontjába mutató vektorok határoznak meg. Minden ilyen irányhoz rendeljünk hozzá $n2^{i(n-1)}$ nem feltétlenül különböző félegyenest a következőképpen. Ha v a C kocka valamelyik csúcsa, akkor a $\overrightarrow{vo}$ iránnyal párhuzamos félegyenesek kezdőpontjai legyenek a C kocka v-t tartalmazó $(n-1)$-dimenziós lapjaira illeszkedő kis kockák azon csúcsai, melyekből kiindulva a félegyenes metszi a kis kocka belsejét. Így összesen nem több, mint $n2^n2^{i(n-1)}$ különböző félegyenest definiáltunk.

Most tekintsük $\bar{\mathcal{L}}_i$ egy tetszőleges C' kis kockáját, és azt a 2^n félegyenest, amelyek metszik C' belsejét. Ha ezen félegyenesek mindegyike a C' kis kocka elérése előtt már metszené $\mathcal{L}_i$ valamely C'-től különböző kis kockájának belsejét, akkor K ezekben a kis kockákban lévő belső pontjainak konvex burka egyrészt K belsejében lenne, másrészt tartalmazná C'-t, amely így nem lehetne $\bar{\mathcal{L}}_i$-ben. Az állítás második részéhez csak azt kell észrevenni, hogy ha a derékszögű koordinátarendszer koordinátahipersíkjai által meghatározott 2^n nyílt térrész mindegyikében választunk egy x_j pontot, ahol $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, akkor ezen pontok konvex burka tartalmazza az origót. Valóban, ha ez nem igaz, akkor a 2.2.10. Állítással összhangban létezik olyan $u \in \mathbb{E}^n$ vektor, hogy $\langle x_j, u\rangle < 0$ minden $1 \leqslant j \leqslant 2^n$ esetén, ami az x_j pontok koordinátáinak előjeleloszlása miatt lehetetlen. Ebből következik, hogy $\bar{\mathcal{L}}_i$ kis kockáinak száma legfeljebb $n2^n2^{i(n-1)}$, és így az össztérfogat legfeljebb $n2^n2^{-i}$.

Mivel i növekedésével $\mathcal{L}_i$ kis kockáinak térfogatösszege monoton csökken, $\mathcal{L}_i \setminus \bar{\mathcal{L}}_i$ kis kockáinak térfogatösszege pedig monoton nő, továbbá a megfelelő térfogatösszegek különbsége nullához tart, ezért a térfogatösszegek ezen sorozatai konvergensek, és ugyanahhoz a pozitív számhoz tartanak. Ez a szám nyilván a K-ba írt véges sok, a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunkt, a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű, zárt merőleges parallelotóp térfogatösszegének szuprémuma, valamint a K-t lefedő véges sok, a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunkt, a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű, zárt merőleges parallelotóp térfogatösszegének infimuma is (az ilyen halmazokat egyébként Jordan mérhető halmazoknak nevezzük), vagyis nem más, mint a K térfogata.

Foglaljuk össze a térfogat legfontosabb tulajdonságait.

8.1.1. Állítás. *Legyenek $A, B \in \mathcal{K}_n$. Ekkor*

(1) $V(A) \geqslant 0$ *és* $V(A) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\dim A < n$,

(2) $V(\sigma(A)) = V(A)$ *minden* $\sigma : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *izometria esetén,*

(3) $V(\lambda A) = \lambda^n V(A)$ *minden* $\lambda \geqslant 0$ *esetén,*

(4) $V(A \cup B) + V(A \cap B) = V(A) + V(B)$, *ha* $A \cup B$ *is kompakt, konvex halmaz.*

(5) $V(A) \leqslant V(B)$ *ha* $A \subseteq B$, *továbbá* $V(A) = V(B)$ *akkor és csak akkor, ha vagy* $\dim B = n$ *és* $A = B$, *vagy pedig* $\dim B < n$.

8.1.2. Állítás. *Ha* $(A_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ *konvergens sorozat, és a határalakzat mondjuk* A_0, *akkor* $\lim_{i\to\infty} V(A_i) = V(A_0)$.

Bizonyítás. Ha A_0 dimenziója kisebb, mint n, akkor az állítás lényegében magától értetődik. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\dim A_0 = n$. Most az általánosság megszorítása nélkül az is feltehető, hogy létezik olyan $\delta > 0$ valós szám, amelyre $B_\delta(o) \subseteq A_i$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel az (A_i) sorozat határalakzata az A_0 halmaz, ezért az 5.3.7. Állítás szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan i_ε küszöbindex, hogy $|h_i(u) - h_0(u)| \leqslant \varepsilon$, minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $i > i_\varepsilon$ esetén, ahol h_i az A_i halmaz támaszfüggvényét jelöli minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilván $h_i(u) \geqslant \delta$ ha $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, így

$$h_i(u) \leqslant h_0(u) + \varepsilon \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_0(u) \quad \text{és} \quad h_0(u) \leqslant h_i(u) + \varepsilon \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_i(u),$$

azaz

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-1} h_0(u) \leqslant h_i(u) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_0(u),$$

ha $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $i > i_\varepsilon$. Ennélfogva

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-1} A_0 \subseteq A_i \subseteq \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right) A_0,$$

ahonnan

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-n} V(A_0) \leqslant V(A_i) \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n} V(A_0).$$

De

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n} = 1,$$

következésképpen $\lim_{i\to\infty} V(A_i) = V(A_0)$. □

Megmutatjuk, hogy miképpen állítható elő egy n-dimenziós konvex politóp térfogata az $(n-1)$-dimenziós lapok $(n-1)$-dimenziós térfogataiból a támaszfüggvény segítségével.

8.1.3. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex politóp. Tegyük fel, hogy a politóp $(n-1)$-dimenziós lapjait a $H(u_i) = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u_i\rangle = h(u_i)\}$ támaszhipersíkok metszik ki, ahol $1 \leqslant i \leqslant k$, és h a P támaszfüggvénye, $u_1, \ldots, u_k$ pedig az $(n-1)$-dimenziós lapok külső normál egységvektorai. Jelölje az $(n-1)$-dimenziós $P \cap H(u_i)$ lap $(n-1)$-dimenziós térfogatát $V_{(n-1)}(P \cap H(u_i))$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Ekkor*

$$V(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} h(u_i)\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)).$$

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy az állítás $\dim P < n$ esetén triviális, így elég azzal az esettel foglalkozni amikor $\dim P = n$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in \operatorname{int} P$. Valóban, egy v nem nulla vektorral való eltolás $h(u_i)$ értékét $\langle v, u_i\rangle$-vel növeli minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén, másrészt

$$\frac{1}{\|v\|} \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i))$$

a $V_{(n-1)}(P|v^{\perp})$ térfogatérték egyszer pozitív, illetve egyszer negatív előjellel vett összege, vagyis nulla. Ezek után

$$
\begin{aligned}
V(P) &= \sum_{i=1}^{k} V(\operatorname{conv}(\{o\} \cup (P \cap H(u_i)))) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\int_0^1 V_{(n-1)}(\lambda\,(P \cap H(u_i)))\, d(\lambda\, h(u_i)) \right) \\
&= \left(\int_0^1 \lambda^{n-1}\, d\lambda \right) \sum_{i=1}^{k} h(u_i)\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} h(u_i)\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)). \qquad \square
\end{aligned}
$$

8.2. Vegyes térfogatok

Ebben a fejezetben azzal fogunk foglalkozni, hogy nem üres, kompakt, konvex halmazok nem negatív együtthatós lineáris kombinációinak térfogata hogyan függ az együtthatóktól. Ehhez természetesen bizonyos előkészületekre lesz szükség.

8.2.1. Állítás. *Legyen*

$$
\Theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} \gamma_{l_1 \ldots l_n}\, \alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_n}
$$

homogén n-edfokú polinom, ahol a $\gamma_{l_1 \ldots l_n}$ együtthatók mindegyike az indexeiben szimmetrikus. Ekkor egy alkalmas r pozitív egész számra léteznek olyan, a Θ polinomtól független $\alpha_1^{(\rho)}, \ldots, \alpha_m^{(\rho)}$ nem negatív konstansok, ahol $1 \leqslant \rho \leqslant r$, továbbá olyan, csak ezektől a konstansoktól függő, az indexeikben szimmetrikus $\delta^{(\rho)}_{l_1 \ldots l_n}$ együtthatók, hogy

$$
\gamma_{l_1 \ldots l_n} = \sum_{\rho=1}^{r} \delta^{(\rho)}_{l_1 \ldots l_n}\, \Theta(\alpha_1^{(\rho)}, \ldots, \alpha_m^{(\rho)}).
$$

Bizonyítás. Az állítást a Θ polinom változóinak m száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $m = 1$, akkor $\Theta(\alpha_1) = \gamma_{1 \ldots 1}(\alpha_1)^n$, azaz $\gamma_{1 \ldots 1} = 1 \cdot \Theta(1)$. Ezek után tegyük fel, hogy minden legfeljebb $m-1$ változós homogén polinomra igaz az állítás, és tekintsünk egy m változós $\Theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

polinomot. Ekkor

$$\Theta(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m)= \sum_{i=0}^{n}(\alpha_m)^i\left(\sum_{l_1=1}^{m-1}\cdots\sum_{l_{n-i}=1}^{m-1}\binom{n}{i}\gamma_{l_1\ldots l_{n-i}m\ldots m}\,\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_{n-i}}\right).$$

Most legyenek $\alpha_m^{(0)},\ldots,\alpha_m^{(n)}$ páronként különböző, nem negatív számok, és tekintsük a

$$\Theta(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m^{(j)})= \sum_{i=0}^{n}(\alpha_m^{(j)})^i\left(\sum_{l_1=1}^{m-1}\cdots\sum_{l_{n-i}=1}^{m-1}\binom{n}{i}\gamma_{l_1\ldots l_{n-i}m\ldots m}\,\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_{n-i}}\right)$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert, ahol $0\leqslant j\leqslant n$. A Vandermonde-féle determináns tételből adódik, hogy a fenti egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és a megoldás a Cramer szabály szerint felírható

$$\sum_{l_1=1}^{m-1}\cdots\sum_{l_{n-i}=1}^{m-1}\binom{n}{i}\gamma_{l_1\ldots l_{n-i}m\ldots m}\,\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_{n-i}}= \sum_{j=0}^{n}\beta_j^{(i)}(\alpha_m^{(0)},\ldots,\alpha_m^{(n)})\cdot\Theta(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m^{(j)})$$

alakban. Ezek után alkalmazva az indukciós hipotézist, minden $0\leqslant i\leqslant n$ esetén

$$\gamma_{l_1\ldots l_{n-i}m\ldots m}=\binom{n}{i}^{-1}\sum_{\rho=r_0+\cdots+r_{i-1}+1}^{r_0+\cdots+r_i}\delta^{(\rho)}_{l_1\ldots l_{n-i}} \times\left(\sum_{j=0}^{n}\beta_j^{(i)}(\alpha_m^{(0)},\ldots,\alpha_m^{(n)})\cdot\Theta(\alpha_1^{(\rho)},\ldots,\alpha_{m-1}^{(\rho)},\alpha_m^{(j)})\right),$$

tetszőleges $1\leqslant l_1\leqslant m-1,\ldots,1\leqslant l_{n-i}\leqslant m-1$ indexekre. Így az összes $\gamma_{l_1\ldots l_n}$ együttható előáll a kívánt alakban. □

8.2.2. Állítás. *Legyenek* $P_1,\ldots,P_m\subseteq\mathbb{E}^n$ *konvex politópok és* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\geqslant 0$. *Ekkor a*

$$P=\sum_{l=1}^{m}\lambda_l P_l$$

konvex politóp $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normál egységvektorai egy olyan véges vektorhalmazból valók, amely független a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ együtthatóktól.

Bizonyítás. Legyenek $u_1, \ldots, u_k$ a P politóp $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normál egységvektorai. Tegyük fel továbbá, hogy minden $1 \leqslant l \leqslant m$ esetén a P_l politóp (nem csak $(n-1)$-dimenziós) lapjait az $u_{i_l}^{(l)}$ normálvektorú $H_l(u_{i_l}^{(l)})$ hipersíkok metszik ki, ahol $1 \leqslant i_l \leqslant k_l$ és $u_{i_l}^{(l)}$ a $P_l \cap H_l(u_{i_l}^{(l)})$ lap egy külső normál egységvektora. Most a P_l politóp minden fenti lapjának relatív belsejében válasszunk egy $p_{i_l}^{(l)}$ pontot, és tekintsük a $p_{i_l}^{(l)}$ pontra illeszkedő támaszhipersíkok külső normálvektorai által meghatározott $N_{i_l}^{(l)}$ kúpokat. Toljuk el ezeket a kúpokat úgy, hogy csúcsaik az origóba kerüljenek. Ekkor csak véges sok olyan $i_1, \ldots, i_m$ indexkombináció létezik, amelyre $\cap_{l=1}^m N_{i_l}^{(l)}$ egydimenziós kúp, azaz egy az origóból induló, v_j egységnyi irányvektorú félegyenes. Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$ ezeknek a vektoroknak a halmaza. Állítjuk, hogy $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$. Valóban, minden u_i vektor, ahol $1 \leqslant i \leqslant k$, az összes P_l politóp valamely $P_l \cap H_l(u_i) = P_l \cap H_l(u_{i_l(i)}^{(l)})$ lapjának is külső normál egységvektora, vagyis $u_i \in \cap_{l=1}^m N_{i_l(i)}^{(l)}$. Ezek után tegyük fel, hogy létezik olyan $v \in \bigcap_{l=1}^m N_{i_l(i)}^{(l)}$ vektor, amely nem pozitív skalárszorosa az u_i vektornak. Ekkor a P_l politóp $p_{i_l(i)}^{(l)}$ pontján átmenő, v külső normálvektorú $H_l(v)$ támaszhipersíkja tartalmazza a $P_l \cap H_l(u_i)$ lapot minden $1 \leqslant l \leqslant m$ esetén. Így viszont a P politóp v külső normálvektorú $H(v)$ támaszhipersíkjára

$$H(v) \supseteq P \cap H(v) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \left(P_l \cap H_l(v)\right) \supseteq \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \left(P_l \cap H_l(u_i)\right) = P \cap H(u_i),$$

ami ellentmondás, hiszen $P \cap H(u_i)$ dimenziója $n-1$. Következésképpen $u_i \in V$, és mivel V nyilván független a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ együtthatóktól, az állítást beláttuk. □

8.2.3. Tétel (Minkowski, 1911). *Legyenek $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$ és $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_m \geqslant 0$. Ekkor*

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} \gamma_{l_1 \ldots l_n} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n},$$

ahol a $\gamma_{l_1 \ldots l_n}$ együtthatók mindegyike az indexeiben szimmetrikus, és ezek az együtthatók csak a $K_1, \ldots, K_m$ halmazoktól függnek.

Bizonyítás. Először azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a $K_1, \ldots,$ K_m halmazok konvex politópok. Ekkor a 2.3.5. Tétellel összhangban a

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l$$

halmaz is konvex politóp. Ezek után az állítást az n dimenzió szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor a $K_1, \ldots, K_m$ politópok zárt szakaszok, azaz $K_1 = \overline{\xi^{(1)}\eta^{(1)}}, \ldots, K_m = \overline{\xi^{(m)}\eta^{(m)}}$. Most $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l$ pontosan az a szakasz, melynek végpontjai $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \xi^{(l)}$ és $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \eta^{(l)}$, és persze

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \eta^{(l)} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \xi^{(l)} = \sum_{l=1}^{m} (\eta^{(l)} - \xi^{(l)}) \lambda_l,$$

ami $n = 1$ esetén az állítást adja.

A következő lépésben tegyük fel, hogy $(n-1)$-dimenzióban igaz a tétel, és tekintsük az n-dimenziós esetet. Legyen $K = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l$. Ekkor a 8.1.3. és 8.2.2. Állítások szerint, használva az ott bevezetett jelöléseket

$$V(K) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{s} h(v_j)\, V_{(n-1)}(K \cap H(v_j)),$$

hiszen ha $v_j \notin \{u_1, \ldots, u_k\}$, akkor $K \cap H(v_j)$ legfeljebb $(n-2)$-dimenziós, ezért $(n-1)$-dimenziós térfogata nulla. Továbbá $h(v_j) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, h_l(v_j)$, ahol h_l a K_l támaszfüggvénye minden $1 \leqslant l \leqslant m$ esetén, valamint

$$K \cap H(v_j) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, (K_l \cap H_l(v_j)),$$

ahol $H_l(v_j)$ a K_l politóp v_j külső normál egységvektorú támaszhipersíkja. Ezek után

$$(K \cap H(v_j))|v_j^{\perp} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l((K_l \cap H_l(v_j))|v_j^{\perp}).$$

Alkalmazva az indukciós hipotézist a $v_j^{\perp}$ hipersíkban fekvő $(K_l \cap H_l(v_j))|v_j^{\perp}$ konvex politópokra

$$\begin{aligned} V_{(n-1)}(K \cap H(v_j)) &= V_{(n-1)}((K \cap H(v_j))|v_j^{\perp}) \\ &= \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_{n-1}=1}^{m} \gamma^{(j)}_{l_1 \ldots l_{n-1}}\, \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_{n-1}}\,, \end{aligned}$$

ahol a $\gamma^{(j)}_{l_1\dots l_{n-1}}$ együtthatók az indexeikben szimmetrikusak, és ezek az együtthatók csak a politópoktól függnek. Így

$$\begin{aligned}
V(K) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} h(v_j)\, V_{(n-1)}(K\cap H(v_j)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\, h_l(v_j)\left(\sum_{l_1=1}^{m}\cdots\sum_{l_{n-1}=1}^{m}\gamma^{(j)}_{l_1\dots l_{n-1}}\,\lambda_{l_1}\cdots\lambda_{l_{n-1}}\right)\right) \\
&= \sum_{l_1=1}^{m}\cdots\sum_{l_n=1}^{m}\gamma_{l_1\dots l_n}\,\lambda_{l_1}\cdots\lambda_{l_n}\,,
\end{aligned}$$

ahol a $\gamma_{l_1\dots l_n}$ együtthatók mindegyike az indexeiben szimmetrikus, és ezek az együtthatók csak a $K_1,\dots,K_m$ politópoktól függnek. Ezzel konvex politópokra bebizonyítottuk az állítást.

Az általános eset igazolásához tekintsük konvex politópoknak olyan

$$(K_1^{(i)}),\dots,(K_m^{(i)})$$

sorozatait, amelyek a $K_1,\dots,K_m$ halmazokhoz konvergálnak (vö. 5.1.12. Állítás). Ezekre a politópokra már beláttuk, hogy minden $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geqslant 0$ és $i\in\mathbb{N}$ esetén

$$V\left(\sum_{l=1}^{m}\lambda_l K_l^{(i)}\right)=\sum_{l_1=1}^{m}\cdots\sum_{l_n=1}^{m}\gamma^{(i)}_{l_1\dots l_n}\,\lambda_{l_1}\cdots\lambda_{l_n}.$$

Másrészt a térfogat függvény folytonossága miatt (ld. 8.1.2. Állítás)

$$V\left(\sum_{l=1}^{m}\lambda_l K_l\right)=V\left(\lim_{i\to\infty}\sum_{l=1}^{m}\lambda_l K_l^{(i)}\right)=\lim_{i\to\infty}V\left(\sum_{l=1}^{m}\lambda_l K_l^{(i)}\right).$$

A 8.2.1. Állítás alapján a $\gamma^{(i)}_{l_1\dots l_n}$ együtthatók sorozata is konvergens, és a

$$\gamma_{l_1\dots l_n}=\lim_{i\to\infty}\gamma^{(i)}_{l_1\dots l_n}$$

együtthatók az indexeikben szimmetrikusak. Így egyszerű határátmenettel éppen a kívánt állítást kapjuk. □

Most már bevezethetjük a vegyes térfogatok fogalmát.

8.2.4. Definíció. *Legyenek* $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$ *és* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$. *Ekkor a*

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} \gamma_{l_1 \ldots l_n} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$$

összefüggésben szereplő, indexeikben szimmetrikus $\gamma_{l_1 \ldots l_n}$ *együtthatókat a* K_{l_1}, $\ldots$, K_{l_n} *halmazok* $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n})$ *vegyes térfogatainak nevezzük minden* $1 \leqslant l_1 \leqslant m, \ldots, 1 \leqslant l_n \leqslant m$ *esetén.*

Megmutatjuk, hogy a fent definiált vegyes térfogatok az argumentumaik által egyértelműen meghatározottak.

8.2.5. Állítás. *Legyenek* $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$ *és* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$. *Ekkor a*

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n}) \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$$

összefüggésben szereplő $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n})$ *vegyes térfogatok az argumentumaik által egyértelműen meghatározottak minden* $1 \leqslant l_1 \leqslant m, \ldots, 1 \leqslant l_n \leqslant m$ *esetén.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n})$ vegyes térfogatok nem függnek azoktól a K_l halmazoktól, amelyekre $l \notin \{l_1, \ldots, l_n\} = L$. Legyenek $\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_{m'} \subseteq \mathbb{E}^n$ olyan nem üres, kompakt, konvex halmazok, amelyek közül $\hat{K}_{l_1} = K_{l_1}, \ldots, \hat{K}_{l_n} = K_{l_n}$. Most megvizsgálva a definiáló összefüggést abban a speciális esetben, amikor $\lambda_l = 0$ minden $l \notin L$ esetén,

$$V\left(\sum_{l \in L} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1 \in L} \cdots \sum_{l_n \in L} V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n}) \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$$

és

$$V\left(\sum_{l \in L} \lambda_l \hat{K}_l\right) = \sum_{l_1 \in L} \cdots \sum_{l_n \in L} \hat{V}(\hat{K}_{l_1}, \ldots, \hat{K}_{l_n}) \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}.$$

Következésképpen $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n}) = \hat{V}(\hat{K}_{l_1}, \ldots, \hat{K}_{l_n})$. Hátra van még annak az esetnek a tisztázása, amikor a vegyes térfogatokat definiáló halmazok nem mind különbözőek. Tekintsük a $V(K_1, \ldots, K_n)$ vegyes térfogatot, és tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned}
\hat{K}_1 &= K_1 = \cdots = K_{n_1}, \\
\hat{K}_2 &= K_{n_1+1} = \cdots = K_{n_1+n_2}, \\
&\vdots \\
\hat{K}_m &= K_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1} = \cdots = K_{n_1+\cdots+n_m},
\end{aligned}$$

ahol $n_1 + \cdots + n_m = n$. Ekkor a

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \hat{\lambda}_l \hat{K}_l\right)$$

polinom kifejtésében a $(\hat{\lambda}_1)^{n_1} \cdots (\hat{\lambda}_m)^{n_m}$ tag együtthatója

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}\, \hat{V}(\underbrace{\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\hat{K}_m, \ldots, \hat{K}_m}_{n_m}).$$

Teljesen hasonló módon, a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i\right)$$

polinom kifejtésében a $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ tag együtthatója $n!\, V(K_1, \ldots, K_n)$. Most elvégezve a

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n_1}, \\
\hat{\lambda}_2 &= \lambda_{n_1+1} + \cdots + \lambda_{n_1+n_2}, \\
&\ \ \vdots \\
\hat{\lambda}_m &= \lambda_{n_1+\cdots+n_{m-1}+1} + \cdots + \lambda_{n_1+\cdots+n_m}
\end{aligned}$$

helyettesítést,

$$\begin{aligned}
V\left(\sum_{l=1}^{m} \hat{\lambda}_l \hat{K}_l\right) &= V\left(\sum_{l=1}^{m} (\lambda_{n_1+\cdots+n_{l-1}+1} + \cdots + \lambda_{n_1+\cdots+n_l}) \hat{K}_l\right) \\
&= V\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i\right).
\end{aligned}$$

De a $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ változószorzat csak a $(\hat{\lambda}_1)^{n_1} \cdots (\hat{\lambda}_m)^{n_m}$ változószorzatban fordul elő, ezért

$$n_1! \cdots n_m!\, \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}\, \hat{V}(\underbrace{\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\hat{K}_m, \ldots, \hat{K}_m}_{n_m}) = n!\, V(K_1, \ldots, K_n),$$

vagyis

$$\hat{V}(\underbrace{\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\hat{K}_m, \ldots, \hat{K}_m}_{n_m}) = V(K_1, \ldots, K_n).$$

Ebből pedig az első észrevétel felhasználásával következik az állítás. □

A vegyes térfogatok egyszerűen kifejezhetők Minkowski összegek segítségével.

8.2.6. Állítás. *Legyenek $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$. Ekkor*

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \sum_{1 \leqslant l_1 < \dots < l_k \leqslant n} V(K_{l_1} + \dots + K_{l_k}). \qquad (*)$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért jelölje a $(*)$ összefüggés jobb oldalát $f(K_1, \dots, K_n)$. A 8.2.3. Tételből következik, hogy $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ esetén $f(\lambda_1 K_1, \dots, \lambda_n K_n)$ homogén, n-edfokú polinom a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ változókban. Most vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1} n! f(\{o\}, K_2, \dots, K_n) = &\sum_{2 \leqslant i \leqslant n} V(K_i) - \\ &- \left[\sum_{2 \leqslant j \leqslant n} V(\{o\} + K_j) + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} V(K_i + K_j) \right] + \\ &+ \left[\sum_{2 \leqslant j < k \leqslant n} V(\{o\} + K_j + K_k) + \sum_{2 \leqslant i < j < k \leqslant n} V(K_i + K_j + K_k) \right] - \\ &- \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} V(\{o\} + K_2 + \dots + K_n) = 0.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $f(0K_1, \lambda_2 K_2, \dots, \lambda_n K_n)$ azonosan nulla minden λ_2, $\dots$, λ_n esetén, így az $f(\lambda_1 K_1, \dots, \lambda_n K_n)$ polinom minden olyan $\lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$ tagjának, amelyre $1 \notin \{l_1, \dots, l_n\}$ nulla az együtthatója. Ugyanezt az 1 index helyett a $2, \dots, n$ indexekre is elmondhatjuk, ezért legfeljebb csak a $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ tagnak nem nulla az együtthatója. Ez az együttható viszont éppen $V(K_1, \dots, K_n)$. □

Most lássuk a vegyes térfogatok legfontosabb tulajdonságait. Ezekből az első kettő nyilvánvaló.

8.2.7. Állítás. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor $V(K, \dots, K) = V(K)$.*

8.2.8. Állítás. *Legyenek $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$, és legyen $\sigma : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ tetszőleges izometria. Ekkor*

$$V(\sigma(K_1), \dots, \sigma(K_n)) = V(K_1, \dots, K_n).$$

8.2.9. Állítás. *Legyenek $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, K_2, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$. Ekkor tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ esetén*

$$\begin{aligned}V(\alpha_1 K_1^{(1)} + \alpha_2 K_1^{(2)}, K_2, \dots, K_n) = \\ \alpha_1 V(K_1^{(1)}, K_2, \dots, K_n) + \alpha_2 V(K_1^{(2)}, K_2, \dots, K_n).\end{aligned}$$

Bizonyítás. A 8.2.3. Tétel szerint az $n!V(\alpha_1 K_1^{(1)} + \alpha_2 K_1^{(2)}, K_2, \ldots, K_n)$ vegyes térfogat a

$$\begin{aligned} V(\lambda_1(\alpha_1 K_1^{(1)} + \alpha_2 K_1^{(2)}) + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_n K_n) = \\ = V((\alpha_1\lambda_1)K_1^{(1)} + (\alpha_2\lambda_1)K_1^{(2)}) + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_n K_n) \end{aligned}$$

polinom $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ tagjának az együtthatója, ami éppen

$$n!(\alpha_1 V(K_1^{(1)}, K_2, \ldots, K_n) + \alpha_2 V(K_1^{(2)}, K_2, \ldots, K_n)). \qquad \square$$

8.2.10. Állítás. *Legyenek $(K_1^{(i)}), \ldots, (K_m^{(i)}) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ konvergens sorozatok, és jelölje a megfelelő határalakzatokat $K_1^{(0)}, \ldots, K_m^{(0)}$. Ekkor*

$$\lim_{i\to\infty} V(K_{l_1}^{(i)}, \ldots, K_{l_n}^{(i)}) = V(K_{l_1}^{(0)}, \ldots, K_{l_n}^{(0)})$$

minden $1 \leqslant l_1 \leqslant m, \ldots, 1 \leqslant l_n \leqslant m$ esetén.

Bizonyítás. A 8.2.1. Állítás szerint egy alkalmas r természetes számra léteznek olyan $\lambda_1^{(\rho)}, \ldots, \lambda_m^{(\rho)}$ nem negatív konstansok, ahol $1 \leqslant \rho \leqslant r$, továbbá olyan, csak ezektől a konstansoktól függő, az indexeikben szimmetrikus $\delta_{l_1\ldots l_n}^{(\rho)}$ együtthatók, hogy

$$V(K_{l_1}^{(i)}, \ldots, K_{l_n}^{(i)}) = \sum_{\rho=1}^{r} \delta_{l_1\ldots l_n}^{(\rho)} V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l^{(\rho)} K_l^{(i)}\right)$$

minden $1 \leqslant l_1 \leqslant m, \ldots, 1 \leqslant l_n \leqslant m$ és $i \in \mathbb{N}$ esetén. Ennélfogva egyszerű határátmenettel

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} V(K_{l_1}^{(i)}, \ldots, K_{l_n}^{(i)}) &= \sum_{\rho=1}^{r} \delta_{l_1\ldots l_n}^{(\rho)} V\left(\lim_{i\to\infty} \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^{(\rho)} K_l^{(i)}\right) \\ &= \sum_{\rho=1}^{r} \delta_{l_1\ldots l_n}^{(\rho)} V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l^{(\rho)} K_l^{(0)}\right) \\ &= V(K_{l_1}^{(0)}, \ldots, K_{l_n}^{(0)}) \qquad \square \end{aligned}$$

Az utolsó három tulajdonság igazolása nagyon hosszadalmas, és mivel a későbbiekben ezeket sehol sem fogjuk használni, ezért itt a bizonyításoktól eltekintünk.

8.2.11. Tétel. *Tetszőleges $K_1, K_2, K_1 \cap K_2, K_1 \cup K_2, K_3, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_n$ esetén*

$$V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n) = V(K_1 \cap K_2, K_1 \cup K_2, K_3, \ldots, K_n).$$

8.2.12. Tétel. *Tetszőleges* $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, \dots, K_n^{(1)}, K_n^{(2)} \in \mathcal{K}_n$ *esetén ha* $K_i^{(1)} \subseteq K_i^{(2)}$ *minden* $1 \leqslant i \leqslant n$ *esetén, akkor*

$$V(K_1^{(1)}, \dots, K_n^{(1)}) \leqslant V(K_1^{(2)}, \dots, K_n^{(2)}).$$

8.2.13. Tétel. *Tetszőleges* $K_1, K_2, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$ *esetén*

$$V(K_1, K_2, \dots, K_n) \geqslant 0,$$

továbbá $V(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$ *akkor és csak akkor, ha valamely* $1 \leqslant h \leqslant n$ *számra a* $K_1, K_2, \dots, K_n$ *halmazok közül* h *darab párhuzamos* $(h-1)$-*dimenziós affin alterekben fekszik.*

8.3. Konvex halmazok alapmértékei

Az előző fejezetben bevezetett vegyes térfogatok közül megkülönböztetett fontossággal bírnak azok, amelyek argumentumában csak két különböző konvex halmaz szerepel, ráadásul ezek egyike az egységgömb.

8.3.1. Definíció. *Legyen* $K \in \mathcal{K}_n$, *és legyen* $B_1(o)$ *az origó középpontú, egységnyi sugarú* n-*dimenziós, zárt gömb. Ekkor minden* $0 \leqslant \nu \leqslant n$ *esetén a*

$$W_\nu(K) = V(\underbrace{K, \dots, K}_{n-\nu}, \underbrace{B_1(o), \dots, B_1(o)}_{\nu})$$

vegyes térfogatot a K *halmaz* ν-*edik alapmértékének nevezzük.*

Világos, hogy $W_0(K) = V(K)$ és $W_n(K) = V(B_1(o))$. Az egységgömb térfogatára vezessük be a $\kappa_n = V(B_1(o))$ jelölést ($\kappa_0 = 1$ definíció szerint). A teljesség kedvéért kiszámoljuk κ_n értékét. Egy egységgömböt egy a gömb középpontjától $0 \leqslant x \leqslant 1$ távolságra lévő hipersík egy $\sqrt{1-x^2}$ sugarú $(n-1)$-dimenziós gömbben metszi. Így a Fubini tétel szerint

$$\kappa_n = 2\int_0^1 \kappa_{n-1}(\sqrt{1-x^2})^{n-1}dx = 2\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

Parciális integrálással és teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy $k \geqslant 1$ esetén

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2k-1}{2k}, & \text{ha } n = 2k, \\[2ex] \dfrac{2}{3}\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2k}{2k+1}, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

Innen ismét teljes indukcióval kapjuk, hogy tetszőleges $k \geqslant 1$ esetén

$$\kappa_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!}, & \text{ha } n = 2k, \\ \dfrac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k+1)!}, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

Visszatérve az alapmértékekhez, először a Steiner formulát vezetjük le.

8.3.2. Tétel. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$ és ρ pozitív valós szám. Ekkor*

$$V(K_\rho) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} W_\nu(K)\, \rho^\nu .$$

Bizonyítás. Mivel $K_\rho = K + \rho B_1(o)$, így a 8.2.3. Tétel alapján

$$V(K_\rho) = V(K + \rho B_1(o)) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} W_\nu(K)\, \rho^\nu . \qquad \square$$

Érdekes kérdés, hogy az alapmértékek miképpen függnek a dimenziótól.

8.3.3. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^{n-1} \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor $W_0(K) = 0$ és*

$$W_\nu(K) = \frac{\nu}{n} \frac{\kappa_\nu}{\kappa_{\nu-1}} W_{\nu-1}^{(n-1)}(K)$$

minden $1 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén.

Bizonyítás. Jelölje $H(\tau)$ az $\mathbb{E}^{n-1}$ hipersíkkal párhuzamos, attól τ előjeles távolságra lévő hipersíkokat. Ekkor

$$\begin{aligned} V(K_\rho) &= \int_{-\rho}^{\rho} V_{(n-1)}(K_\rho \cap H(\tau))\, d\tau \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} V_{(n-1)}(K_{\sqrt{\rho^2-\tau^2}})\, d\tau \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (\sqrt{\rho^2-\tau^2})^\nu\, W_\nu^{(n-1)}(K) \right) d\tau \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{\kappa_{\nu+1}}{\kappa_\nu} \rho^{\nu+1}\, W_\nu^{(n-1)}(K) , \end{aligned}$$

hiszen

$$\int_{-\rho}^{\rho} \kappa_\nu \, (\sqrt{\rho^2 - \tau^2})^\nu \, d\tau = \kappa_{\nu+1}\rho^{\nu+1}$$

egy ρ sugarú $(\nu+1)$-dimenziós gömb térfogata. Másrészt a 8.3.2. Tétel szerint

$$V(K_\rho) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} W_\nu(K)\, \rho^\nu .$$

Így a megfelelő együtthatók szükségképpen megegyeznek, vagyis $W_0(K) = 0$ és

$$W_\nu(K) = \frac{\nu}{n}\, \frac{\kappa_\nu}{\kappa_{\nu-1}}\, W_{\nu-1}^{(n-1)}(K),$$

minden $1 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén. □

Az előző fejezetben elmondottak alapján egyszerűen igazolhatók az alapmértékek tulajdonságai.

8.3.4. Tétel. *Az n-dimenziós tér tetszőleges nem üres, kompakt, konvex halmazaira*

(1) $W_\nu(\sigma(K)) = W_\nu(K)$ *minden* $\sigma : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *izometria esetén,*

(2) $W_\nu(\lambda K) = \lambda^{n-\nu}\, W_\nu(K)$ *minden* $\lambda \geqslant 0$ *esetén,*

(3) $W_\nu(K)$ *folytonos függvény* $\mathcal{K}_n$*-n,*

(4) $W_\nu(K_1) \leqslant W_\nu(K_2)$*, ha* $K_1 \subseteq K_2$*,*

(5) $W_\nu(K) \geqslant 0$ *és* $W_\nu(K) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\dim K < n - \nu$*,*

minden $1 \leqslant \nu \leqslant n$ *esetén.*

8.3.5. Állítás. *Legyenek* $K, L \in \mathcal{K}_n$*, és tegyük fel, hogy* $K \cup L \in \mathcal{K}_n$ *is fennáll. Ekkor* $W_\nu(K \cup L) + W_\nu(K \cap L) = W_\nu(K) + W_\nu(L)$ *minden* $1 \leqslant \nu \leqslant n$ *esetén.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy tetszőleges $M \in \mathcal{K}_n$ esetén fennállnak a $(K \cup L) + M = (K + M) \cup (L + M)$ valamint a $(K \cap L) + M = (K + M) \cap (L + M)$ összefüggések. Ezek közül az első nyilvánvaló, és a másodikban is csak a $(K \cap L) + M \supseteq (K + M) \cap (L + M)$ tartalmazás igényel némi indoklást. Legyen $x \in (K + M) \cap (L + M)$ tetszőleges pont. Ekkor léteznek olyan $x_1 \in K$, $x_2 \in L$ és $y_1, y_2 \in M$ pontok, melyekre $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Mivel $K \cup L$ konvex halmaz, ezért $\overline{x_1 x_2} \subseteq K \cup L$. Most felhasználva K és L zártságát, létezik olyan $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ pont, ahol $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, amely benne van $K \cap L$-ben. Ennélfogva $x = \lambda_1 x + \lambda_2 x = \lambda_1(x_1+y_1)+\lambda_2(x_2+y_2) = z+w$, ahol $w = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 u_2 \in M$, következésképpen $x \in (K \cap L) + M$.

Ezek után legyen $M = \rho B_1(o)$, ahol $\rho > 0$. Ekkor a fenti összefüggések felhasználásával

$$V((K \cup L)_\rho) + V((K \cap L)_\rho) = V(K_\rho \cup L_\rho) + V(K_\rho \cap L_\rho) = V(K_\rho) + V(L_\rho).$$

Ha itt mindkét oldalra alkalmazzuk a 8.3.2. Tételt, akkor az együtthatók összevetésével az állítás adódik. □

Most bevezetjük a felszín fogalmát, és rámutatunk annak az első alapmértékkel való kapcsolatára. Gondolatmenetünkből, az első alapmérték folytonosságának figyelembe vételével, az is következni fog, hogy valójában ez az egyetlen "értelmes" módja a felszín definiálásának.

8.3.6. Definíció. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor az*

$$O(K) = \lim_{\rho \to 0} \frac{V(K_\rho) - V(K)}{\rho}$$

nem negatív számot a K felszínének nevezzük.

8.3.7. Állítás. *Ha $K \in \mathcal{K}_n$, akkor*

$$O(K) = n\,W_1(K).$$

Bizonyítás. A 8.3.2. Tétel szerint minden $\rho > 0$ esetén

$$\frac{V(K_\rho) - V(K)}{\rho} = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} W_\nu(K)\,\rho^{\nu-1},$$

ahonnan

$$O(K) = \lim_{\rho \to 0} \frac{V(K_\rho) - V(K)}{\rho} = n\,W_1(K).$$ □

8.3.8. Állítás. *Legyen $P \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex politóp. Tegyük fel, hogy a politóp $(n-1)$-dimenziós lapjait a $H(u_i)$ támaszhipersíkok metszik ki, ahol $1 \leqslant i \leqslant k$, és $u_1, \dots, u_k$ az $(n-1)$-dimenziós lapok külső normál egységvektorai. Ekkor*

$$O(P) = \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)).$$

Bizonyítás. Legyen $F_i = P \cap H(u_i)$, és jelölje F_i' az F_i lap ρu_i vektorral való eltoltját minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Legyen továbbá $P_i = \operatorname{conv}(F_i \cup F_i')$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Ekkor $V(P_i) = \rho V_{(n-1)}(F_i)$ minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Most $P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \subseteq P_\rho$, és mivel a $P, P_1, \dots, P_k$ politópok a határpontjaiktól eltekintve diszjunktak, ezért $V(P) + V(P_1) + \dots + V(P_k) \leqslant V(P_\rho)$. Következésképpen

$$O(P) = \lim_{\rho \to 0} \frac{V(P_\rho) - V(P)}{\rho} \geqslant \lim_{\rho \to 0} \frac{V(P_1) + \dots + V(P_k)}{\rho} = \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(F_i).$$

Másrészt $P_\rho = P \cup ((F_1)_\rho \cap H^-(u_1)) \cup \dots \cup ((F_k)_\rho \cap H^-(u_k))$, ahol $H^-(u_i)$ a $H(u_i)$ hipersík által határolt, a P-t nem tartalmazó zárt félteret jelöli minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Így

$$V(P_\rho) \leqslant V(P) + \sum_{i=1}^{k} V((F_i)_\rho \cap H^-(u_i)),$$

vagyis

$$\begin{aligned} O(P) &= \lim_{\rho \to 0} \frac{V(P_\rho) - V(P)}{\rho} \\ &\leqslant \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} V((F_i)_\rho \cap H^-(u_i)) \\ &\leqslant \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k} \rho V_{(n-1)}((F_i)_\rho^{(n-1)}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(F_i). \end{aligned}$$

□

A következő tételben szereplő összefüggés Cauchy formula néven ismert.

8.3.9. Tétel. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor*

$$O(K) = \frac{1}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_{(n-1)}(K|v^\perp)\, d\sigma.$$

Bizonyítás. Az állítást először nem üres belsővel rendelkező konvex politópokra igazoljuk. Legyenek $P \cap H(u_1), \dots, P \cap H(u_k)$ a P politóp $(n-1)$-dimenziós lapjai, ahol u_i a $P \cap H(u_i)$ lapot kimetsző $H(u_i)$ támaszhipersík külső normál egységvektora minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Megmutatjuk, hogy

$$O(P) = \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)) = \frac{1}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_{(n-1)}(P|v^\perp)\, d\sigma\,.$$

Mivel a $P|v^{\perp}$ halmaz relatív belső pontjai a $P \cap H(u_i)$ lapok vetületeivel pontosan kétszer vannak lefedve, ezért

$$2V_{(n-1)}(P|v^{\perp}) = \sum_{i=1}^{k} |\langle u_i, v\rangle|\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i))$$

minden $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén. Mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} 2V_{(n-1)}(P|v^{\perp})\, d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\langle u_i, v\rangle|\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i))\right) d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u_i, v\rangle|\, V_{(n-1)}(P \cap H(u_i))\, d\sigma\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u_i, v\rangle|\, d\sigma.\end{aligned}$$

Itt

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u_i, v\rangle|\, d\sigma = 2V_{(n-1)}(B_1(o)|u_i^{\perp}) = 2\kappa_{n-1}$$

minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén, így

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_{(n-1)}(P|v^{\perp})\, d\sigma = \kappa_{n-1} \sum_{i=1}^{k} V_{(n-1)}(P \cap H(u_i)),$$

ahonnan az állítás adódik.

Ezek után tekintsünk egy tetszőleges $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazt. Ha $\dim K \leqslant n-1$, akkor lényegében nincs mit bizonyítanunk, ezért legyen $\dim K = n$. Az 5.1.12. Állítás szerint létezik konvex politópoknak olyan (P_i) sorozata, amely a K halmazhoz konvergál. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy valamely $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_\delta(o) \subseteq K$ és $B_\delta(o) \subseteq P_i$ minden $i \in \mathbb{Z}^+$ indexre. Jelölje h_v, illetve $h_v^{(i)}$ a $H(v)$ részhalmazaiként tekintett $K|v^{\perp}$, illetve a $P_i|v^{\perp}$ halmazok támaszfüggvényeit minden $i \in \mathbb{Z}^+$ indexre. Ekkor h_v, illetve $h_v^{(i)}$ a K, illetve P_i halmazok h, illetve $h^{(i)}$ támaszfüggvényeinek a $H(v)$ hipersíkra való leszűkítései minden $i \in \mathbb{Z}^+$ indexre. A továbbiakban legyen ε tetszőleges pozitív valós szám. Most létezik olyan i_0 küszöbindex, hogy ha $i > i_0$, akkor $d(P_i, K) \leqslant \varepsilon$. Ebben az esetben $|h_v(u) - h_v^{(i)}(u)| \leqslant \varepsilon$ ha $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap H(v)$. Másrészt $h_v(u),\ h_v^{(i)}(u) \geqslant \delta$. Ennélfogva

$$h_v^{(i)}(u) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_v(u) \quad \text{és} \quad h_v(u) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_v^{(i)}(u),$$

azaz

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-1} h_v(u) \leqslant h_v^{(i)}(u) \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right) h_v(u).$$

Innen pedig

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-1} (K|v^{\perp}) \subseteq P_i|v^{\perp} \subseteq \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right) (K|v^{\perp}),$$

vagyis

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{-(n-1)} V_{(n-1)}(K|v^{\perp}) \leqslant V_{(n-1)}(P_i|v^{\perp}) \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n-1} V_{(n-1)}(K|v^{\perp}),$$

Ezek után legyen $B_R(o)$ olyan gömb, amely tartalmazza K-t. Ekkor

$$\begin{aligned} |V_{(n-1)}(P_i|v^{\perp}) - V_{(n-1)}(K|v^{\perp})| &\leqslant \left(\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n-1} - 1\right) V_{(n-1)}(K|v^{\perp}) \\ &\leqslant \left(\left(1+\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n-1} - 1\right) \kappa_{n-1} R^{n-1} \end{aligned}$$

minden $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $i > i_0$ esetén. Az előzőek szerint $V_{(n-1)}(P_i|v^{\perp})$ folytonos függvénye v-nek, így a fenti becslés alapján ugyanez fennáll $V_{(n-1)}(K|v^{\perp})$-ra is (ebből speciálisan a jobb oldalon álló integrál létezése is adódik). Másrészt $O(K) = nW_1(K)$ folytonos függvénye K-nak, amiből a

$$\lim_{i\to\infty} V_{(n-1)}(P_i|v^{\perp}) = V_{(n-1)}(K|v^{\perp})$$

egyenletes konvergencia felhasználásával következik az állítás. □

Bebizonyítjuk a 8.3.9. Tétel egy általánosítását is.

8.3.10. Tétel (Kubota, 1925). *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor*

$$W_\nu(K) = \frac{1}{n\,\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} W_{\nu-1}^{(n-1)}(K|v^{\perp})\, d\sigma$$

minden $1 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén.

Bizonyítás. Világos, hogy $K_\rho|v^{\perp} = (K|v^{\perp})_\rho^{(n-1)}$, így a 8.3.2. Tétel szerint

$$V_{(n-1)}(K_\rho|v^{\perp}) = V_{(n-1)}((K|v^{\perp})_\rho^{(n-1)}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} W_\nu^{(n-1)}(K|v^{\perp})\, \rho^\nu.$$

Mivel $V_{(n-1)}(K_\rho|v^\perp)$ folytonosan függ v-től minden $\rho \geqslant 0$ esetén, így a Cramer szabály alapján $W_\nu^{(n-1)}(K|v^\perp)$ is folytonosan függ v-től. Most alkalmazva a 8.3.9. Tételt a K_ρ halmazra

$$\begin{aligned} O(K_\rho) &= \frac{1}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} V_{(n-1)}(K_\rho|v^\perp)\, d\sigma \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \left(\frac{1}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} W_\nu^{(n-1)}(K|v^\perp)\, d\sigma \right) \rho^\nu. \end{aligned}$$

Másrészt a 8.3.7. és 8.2.9. Állítások szerint

$$\begin{aligned} O(K_\rho) &= n\, V(K + \rho\, B_1(o), \ldots, K + \rho\, B_1(o), B_1(o)) \\ &= n \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} W_{\nu+1}(K)\, \rho^\nu. \end{aligned}$$

Innen pedig az együtthatók összevetésével adódik az állítás. □

8.4. Kiértékeléselmélet

Ebben a fejezetben betekintést adunk az ún. kiértékeléselmélet témakörébe. Azt fogjuk vizsgálni, hogy ha az alapmértékek segítségével definiálunk egy valós függvényt a $\mathcal{K}_n$ halmazon, akkor ezt a függvényt az alapmértékek bizonyos tulajdonságai vajon egyértelműen meghatározzák-e.

8.4.1. Definíció. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ vektorra jelölje $w(u)$ a K halmaz u irányú szélességét. Ekkor a*

$$B(K) = \frac{1}{n\kappa_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} w(u)\, d\sigma$$

értéket a K átlagos szélességének nevezzük.

8.4.2. Állítás. *Legyen $K_0 \in \mathcal{K}_n$, és jelölje $\mathcal{D}(K_0)$ azoknak a halmazoknak a családját, amelyek előállnak $\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \sigma_l(K_0)$ alakban, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ és $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, továbbá $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ az origót fixen hagyó izometriák. Ekkor létezik olyan $(K_j) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(K_0)$ konvergens sorozat, hogy $\lim_{j\to\infty} K_j = B_{\rho_0}(o)$, valamely $\rho_0 \geqslant 0$ esetén.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{D}(K_0)$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \sigma_i(K_i)$$

tetszőleges $\mu_1, \ldots, \mu_m \geqslant 0$ és $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$ esetén szintén hozzátartozik $\mathcal{D}(K_0)$-hoz. Ezek után minden $K \in \mathcal{K}_n$ halmazra jelölje $\rho(K)$ az origó középpontú, K-t tartalmazó gömbök sugarának minimumát, és legyen $\rho_0 = \inf_{K \in \mathcal{D}(K_0)} \rho(K)$. Világos, hogy ekkor létezik olyan $(K_j) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(K_0)$ sorozat, amelyre $\lim_{j\to\infty} \rho(K_j) = \rho_0$. Másrészt minden $K \in \mathcal{D}(K_0)$ esetén

$$\rho(K) = d(\{o\}, K) = d\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \{o\}, \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \, \sigma_l(K_0)\right) \leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \, d(\{o\}, \sigma_l(K_0)) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \, d(\{o\}, K_0) = d(\{o\}, K_0) = \rho(K_0)$$

(vö. 5.3.5. és 5.3.7. Állítások), azaz $K \subseteq B_{\rho(K)}(o) \subseteq B_{\rho(K_0)}(o)$. Így az 5.1.11. Tétel szerint a (K_j) sorozatnak létezik olyan (K_{j_t}) részsorozata, amely $\mathcal{K}_n$ valamely $\tilde{K}_0$ tagjához konvergál. Nyilván $\rho(\tilde{K}_0) = \rho_0$, hiszen $\rho(K)$ folytonos $\mathcal{K}_n$-n. Ha most $\rho_0 = 0$, akkor $\tilde{K}_0 = \{o\}$, ennélfogva elég azzal az esettel foglalkozni, amikor $\rho_0 > 0$. Meg fogjuk mutatni, hogy $\tilde{K}_0 = B_{\rho_0}$. A $\tilde{K}_0$ halmaz természetesen része a B_{ρ_0} gömbnek, ezért csak a másik irányú tartalmazást kell igazolni. Indirekt tegyük fel, hogy $B_{\rho_0} \nsubseteq \tilde{K}_0$. Jelölje $\tilde{h}_0$ a $\tilde{K}_0$ halmaz támaszfüggvényét. Ekkor létezik olyan $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ vektor és $\delta > 0$ valós szám, amelyre $\tilde{h}_0(u) < \rho_0$ minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ és $\|u - u_0\| < \delta$ esetén. Legyen

$$\mathcal{U}_\delta(u) = \{v \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \|u - v\| < \delta\}$$

minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén. Mivel $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt halmaz, a Heine-Borel tétel szerint az $\{\mathcal{U}_\delta(u) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ nyílt fedésből kiválasztható egy

$$\{\mathcal{U}_\delta(u_1), \ldots, \mathcal{U}_\delta(u_m)\}$$

véges fedés is. Minden $1 \leqslant i \leqslant m$ esetén jelöljön $\tilde{\sigma}_i$ egy olyan origót fixen hagyó izometriát, amely az $\mathcal{U}_\delta(u_0)$ gömbsüveget az $\mathcal{U}_\delta(u_i)$ gömbsüvegbe viszi. Továbbá legyen

$$\tilde{K}_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \, \tilde{\sigma}_i(\tilde{K}_0).$$

Ekkor a $\tilde{K}_1$ halmaz $\tilde{h}_1$ támaszfüggvényére

$$\tilde{h}_1(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \, \tilde{h}_0(\tilde{\sigma}_i^{-1}(u))$$

minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén. De $\mathbb{S}^{n-1} = \mathcal{U}_\delta(u_1) \cup \cdots \cup \mathcal{U}_\delta(u_m)$, ezért minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén van olyan $1 \leqslant i_0 \leqslant m$ index, amelyre $u \in \mathcal{U}_\delta(u_{i_0})$, és így

$\tilde{h}_0(\tilde{\sigma}_{i_0}^{-1}(u)) < \rho_0$. Sőt a fennmaradó $1 \leqslant i' \leqslant m$ indexekre is $\tilde{h}_0(\tilde{\sigma}_{i'}^{-1}(u)) \leqslant \rho_0$. Következésképpen $\tilde{h}_1(u) < \rho_0$, azaz $\rho(\tilde{K}_1) < \rho_0$. Ezek után legyen $\varepsilon_0 = \rho_0 - \rho(\tilde{K}_1)$. Most létezik olyan t_0 küszöbindex, hogy ha $t > t_0$, akkor $d(\tilde{K}_0, K_{j_t}) < \varepsilon_0$. Ennélfogva

$$d\left(\tilde{K}_1, \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\,\tilde{\sigma}_i(K_{j_t})\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\, d(\tilde{\sigma}_i(\tilde{K}_0), \tilde{\sigma}_i(K_{j_t}))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\, d(\tilde{K}_0, K_{j_t}) < \varepsilon_0,$$

és így

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\,\tilde{\sigma}_i(K_{j_t})\right) = d\left(\{o\}, \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\,\tilde{\sigma}_i(K_{j_t})\right) \leqslant$$
$$d(\{o\}, \tilde{K}_1) + d\left(\tilde{K}_1, \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\,\tilde{\sigma}_i(K_{j_t})\right) < \rho(\tilde{K}_1) + \varepsilon_0 = \rho_0,$$

ami, figyelembe véve a bizonyítás elején tett megjegyzést, ellentmond ρ_0 definíciójának. $\square$

8.4.3. Tétel (Hadwiger, 1957). *Tegyük fel, hogy egy $\varphi : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.*

(1) *φ egybevágóság-invariáns, azaz tetszőleges $\sigma : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ izometriára*

$$\varphi(\sigma(K)) = \varphi(K).$$

(2) *φ folytonos, azaz minden $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ konvergens sorozatra*

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(K_i) = \varphi\left(\lim_{i\to\infty} K_i\right).$$

(3) *φ Minkowski értelemben lineáris, azaz*

$$\varphi\left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \varphi(K_l), \quad \text{ahol} \quad \sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 1 \ \text{ és } \ \lambda_1, \dots, \lambda_k \geqslant 0.$$

Ekkor léteznek olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ konstansok, amelyekre $\varphi(K) = \gamma\, B(K) + \delta$.

Bizonyítás. A 8.4.2. Állítás szerint (az ott bevezetett jelölések megtartásával) bármely $K \in \mathcal{K}_n$ halmazhoz létezik olyan $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(K)$ sorozat, amely egy $B_\rho(o)$ gömbhöz konvergál. Ám az (1)-(3) tulajdonságok alapján

$$\varphi(B_\rho(o)) = \lim_{i\to\infty} \varphi(K_i) =$$
$$\lim_{i\to\infty} \left(\sum_{l_i=1}^{k_i} \lambda_{l_i} \varphi(\sigma_{l_i}(K)) \right) = \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{l_i=1}^{k_i} \lambda_{l_i} \varphi(K) \right) = \varphi(K).$$

Másrészt könnyű ellenőrizni, hogy a B átlagos szélesség függvény szintén rendelkezik az (1)-(3) tulajdonságokkal, ezért $B(B_\rho(o)) = B(K)$ is fennáll. Következésképpen elég az állítást gömbökre igazolni. Ha most $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, akkor

$$\varphi(\rho\, B_1(o)) = \varphi(\rho\, B_1(o) + (1-\rho)\{o\}) = \rho\, \varphi(B_1(o)) + (1-\rho)\varphi(\{o\}),$$

ha pedig $\rho > 1$, akkor

$$\varphi(B_1(o)) = \varphi\left(\frac{1}{\rho}\,(\rho\, B_1(o)) + \frac{\rho-1}{\rho}\,\{o\}\right) = \frac{1}{\rho}\,\varphi(\rho\, B_1(o)) + \frac{\rho-1}{\rho}\,\varphi(\{o\}).$$

Így mindkét esetben

$$\varphi(\rho\, B_1(o)) = \rho\,(\varphi(B_1(o)) - \varphi(\{o\})) + \varphi(\{o\}).$$

Másrészt $B(\rho\, B_1(o)) = \rho\, B(B_1(o)) = 2\rho$, ennélfogva

$$\varphi(\rho\, B_1(o)) = \frac{1}{2}\,(\varphi(B_1(o)) - \varphi(\{o\}))\, B(\rho\, B_1(o)) + \varphi(\{o\}),$$

amiből $\gamma = \frac{1}{2}\,(\varphi(B_1(o)) - \varphi(\{o\}))$ és $\delta = \varphi(\{o\})$ választással éppen a kívánt eredményt kapjuk. Még annyit jegyezzünk meg, hogy a fenti alakú φ függvények természetesen kielégítik az (1)-(3) tulajdonságokat. □

A 8.4.3. Tételből egyszerűen adódik az $(n-1)$-edik alapmérték egy érdekes geometriai jelentése.

8.4.4. Állítás. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor*

$$W_{n-1}(K) = \frac{\kappa_n}{2} B(K).$$

Bizonyítás. Mivel a W_{n-1} alapmérték egybevágóság-invariáns, folytonos és Minkowski értelemben lineáris függvény, így a 8.4.3. Tétel szerint léteznek olyan $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ konstansok, amelyekre $W_{n-1}(K) = \gamma\, B(K) + \delta$. Ezek után a $K = \{o\}$, illetve a $K = B_1(o)$ speciális eseteket tekintve egyszerűen adódik, hogy $\delta = 0$ és $\gamma = \kappa_n/2$. □

Végül, bizonyítás nélkül, még két fontos eredményre hívjuk fel a figyelmet.

8.4.5. Tétel (Hadwiger, 1957). *Tegyük fel, hogy egy* $\varphi : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ *függvény rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.*

(1) φ *egybevágóság-invariáns.*

(2) φ *folytonos.*

(3) φ *additív, azaz* $\varphi(K_1 \cup K_2) + \varphi(K_1 \cap K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2)$, *ha* $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}_n$.

Ekkor léteznek olyan $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ *konstansok, amelyekre*

$$\varphi(K) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu W_\nu(K).$$

8.4.6. Tétel (Hadwiger, 1957). *Tegyük fel, hogy egy* $\varphi : \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}$ *függvény rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.*

(1) φ *egybevágóság-invariáns.*

(2) φ *folytonos.*

(3) φ *egyszerűen additív, azaz additív és* $\varphi(K) = 0$, *ha* $\dim K < n$.

Ekkor létezik olyan $\gamma \in \mathbb{R}$ *konstans, amelyre* $\varphi(K) = \gamma V(K)$.

Feladatok

8.1. Feladat. *Legyen* $S = \operatorname{conv}\{x_0, \ldots, x_n\}$ *egy* n*-dimenziós szimplex. Mutassuk meg, hogy ekkor* $n!V(S) = |\det(v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0)|$.

8.2. Feladat. *Legyen* $S = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ *egy* n*-dimenziós szimplex, és legyen* $B = (b_{ij})$ *az az* $(n+1) \times (n+1)$*-es mátrix, amelyre* $b_{ij} = \|v_i - v_j\|^2$. *Jelölje továbbá* $\hat{B}$ *azt az* $(n+2) \times (n+2)$*-es mátrixot, amelyet úgy kapunk* B*-ből, hogy a tetejéhez illesztjük a* $(0, 1, \ldots, 1)$ *sort, a bal oldalához pedig a* $(0, 1, \ldots, 1)^\top$ *oszlopot. Mutassuk meg, hogy ekkor* $2^n (n!)^2 V(S)^2 = |\det(\hat{B})|$.

8.3. Feladat. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *egy az origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmaz, és tegyük fel, hogy* $V(K) \geqslant 2^n$. *Mutassuk meg, hogy ekkor* K *tartalmaz az origótól különböző olyan pontot, melynek koordinátái egész számok.* [Útmutatás: Nyilván elég az állítást abban az esetben igazolni, mikor $V(K) > 2^n$ is fennáll. Osszuk fel az n-dimenziós teret az $x_i = 2k+1$ egyenletű hipersíkokkal, ahol $1 \leqslant i \leqslant n$ és $k \in \mathbb{Z}$, egybevágó, 2^n térfogatú kockákra.

Ezen kockák közül azokat, melyeknek van közös pontja K-val toljuk rá az origó középpontú kockára. Mivel $V(K) > 2^n$, ezért az origó középpontú kockában lesz olyan rész, amely K pontjainak eltoltjaival legalább kétszeresen le lesz fedve. Legyenek x és y azon kockák középpontjai, melyek eltolt példányaiból egy ilyen kétszeresen lefedett rész származik. Mutassuk meg, hogy most $\frac{1}{2}(x-y)$ egy a kívánalmaknak megfelelő pont.]

8.4. Feladat (Elekes, 1986). *Azt mondjuk, hogy a $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testet az Ω orákulum írja le (amit egyszerűen egy szubrutinnak képzelhetünk), ha*

(1) *Bármely $q \in \mathbb{E}^n$ pontról megkérdezhetjük, hogy benne van-e K-ban, mire Ω egységnyi idő alatt vagy azt válaszolja, hogy IGEN, vagy azt, hogy NEM.*

(2) *Ω külön kérés nélkül közöl két olyan gömböt, amelyek közül az egyik benne van K-ban, a másik pedig tartalmazza K-t.*

Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan (n-ben) polinomiális idejű, determinisztikus algoritmus, amely tetszőleges, orákulummal leírt $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testhez olyan $\alpha(K)$ nem negatív számot határoz meg, hogy $\alpha(K) \leqslant V(K) \leqslant 1.9999^n\alpha(K)$. [Útmutatás: Használjuk fel, hogy ha $p_1, \ldots, p_k \in B_1(o) \subseteq \mathbb{E}^n$, akkor $V(\operatorname{conv}\{p_1, \ldots, p_k\}) \leqslant k\kappa_n/2^n$. Ehhez elég észrevenni, hogy az $\overline{op_1}, \ldots, \overline{op_k}$ szakaszok Thalesz gömbjeinek uniója lefedi $\operatorname{conv}\{p_1, \ldots, p_k\}$-t.]

8.5. Feladat. *Legyen P olyan n-dimenziós konvex politóp, amely $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normálvektorai $u_1, \ldots, u_k$, továbbá az u_i normálvektorú lap $(n-1)$-dimenziós térfogata f_i minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum_{i=1}^k f_i u_i = o$.* [Útmutatás: Alkalmazzuk a 8.1.3. Állítást.]

8.6. Feladat* (Minkowski, 1903). *Legyenek $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{S}^{n-1}$ olyan, páronként különböző vektorok, melyek kifeszítik az n-dimenziós teret, és legyenek $f_1, \ldots, f_k$ olyan pozitív valós számok, hogy $\sum_{i=1}^k f_i u_i = o$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan n-dimenziós P konvex politóp, amely $(n-1)$-dimenziós lapjainak külső normálvektorai pontosan $u_1, \ldots, u_k$, továbbá az u_i normálvektorú lap $(n-1)$-dimenziós térfogata f_i minden $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén.* [Útmutatás: Tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nem-negatív valós számokra tekintsük az $\langle x, u_1\rangle \leqslant \alpha_1, \ldots, \langle x, u_k\rangle \leqslant \alpha_k$ egyenletű zárt félterek $P(a)$ metszetét, ahol $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Ekkor $P(a)$ nyilván konvex politóp. Legyen

$$M = \{a \in \mathbb{E}^k \mid \alpha_i \geqslant 0,\ V(P(a)) \geqslant 1\},$$

és definiáljuk a $\Phi(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ lineáris funkcionált. Világos, hogy Φ felveszi a μ^{n-1} minimumát M-en valamely $\bar{a} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k)$ pontban. Bizonyítsuk be, hogy a $\mu P(\bar{a})$ konvex politóp megfelel a kívánalmaknak.]

8.7. Feladat. *Legyen* $1 \leqslant k \leqslant n-1$, *legyenek* $K_1, \ldots, K_k \in \mathcal{K}_n$, *legyen* $S \in \mathcal{G}(n,k)$, *és legyenek* $H_1, \ldots, H_{n-k} \subseteq S^\perp$ *nem üres, kompakt, konvex halmazok. Mutassuk meg, hogy ekkor*

$$\binom{n}{k} V(K_1, \ldots, K_k, H_1, \ldots, H_{n-k}) = V(K_1|S, \ldots, K_k|S) V(H_1, \ldots, H_{n-k}).$$

[Útmutatás: Először azt a speciális esetet igazoljuk, amikor $K_1 = \cdots = K_k = K$ és $H_1 = \cdots = H_{n-k} = H$, ahol H egy $(n-k)$-dimenziós konvex politóp. Ehhez elég annyit észrevenni, hogy minden ε pozitív valós számra

$$V(H + \varepsilon K) = V_{(n-k)}(H) V_{(k)}(K|S) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Az általános eset igazolásához ezután először a $H = \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_{n-k} H_{n-k}$, majd a $K = \lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_k K_k$ helyettesítést hajtsuk végre.]

8.8. Feladat. *Legyenek* $K, L \in \mathcal{K}_n$, *és legyen* $M = K + L$. *Mutassuk meg, hogy ekkor*

$$V(K) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i V(\underbrace{M, \ldots, M}_{n-i}, \underbrace{L, \ldots, L}_{i}).$$

8.9. Feladat. *Legyen* $1 \leqslant m \leqslant n-1$, *és legyenek* $K, L \in \mathcal{K}_n$, *melyekre* $\dim K = m$, $\dim L = n-m$, $\operatorname{aff} K \cap \operatorname{aff} L = \{o\}$ *és* $\operatorname{aff} L = (\operatorname{aff} K)^\perp$. *Mutassuk meg, hogy ekkor minden* $0 \leqslant \nu \leqslant n$ *esetén*

$$\binom{n}{\nu} \frac{1}{\kappa_\nu} W_\nu(K+L) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{m}{\mu} \frac{1}{\kappa_\mu} \binom{n-m}{\nu-\mu} \frac{1}{\kappa_{\nu-\mu}} W_\mu^{(m)}(K) W_{\nu-\mu}^{(n-m)}(L),$$

ahol az összegzést persze csak azokra a μ *értékekre hajtjuk végre, amelyekre* $W_\mu^{(m)}(K)$ *és* $W_{\nu-\mu}^{(n-m)}(L)$ *is értelmezve van.*

8.10. Feladat. *Legyenek* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_n$. *Mutassuk meg, hogy ha* $K_1 \subseteq K_2$, *akkor* $O(K_1) \leqslant O(K_2)$. [Útmutatás: Először azt igazoljuk, hogy léteznek konvex politópoknak olyan K_1-hez és K_2-höz konvergáló $(P_i^{(1)})$, illetve $(P_i^{(2)})$ sorozatai, melyekre $P_i^{(1)} \subseteq P_i^{(2)}$ minden i természetes számra.]

9. fejezet

Geometriai egyenlőtlenségek

9.1. Brunn-Minkowski egyenlőtlenség

A konvex halmazok Minkowski összegének térfogatát tanulmányozva jutottunk el a vegyes térfogatok fogalmához. Ebben a fejezetben egy másik alapvető irányt követve megismerkedünk a Brunn-Minkowski tétellel (9.1.1. Tétel), amely a geometriai egyenlőtlenségek elméletének egyik kiinduló pontja, és számos extremális probléma megoldásához is elvezet, például az ún. izoperimetrikus problémáéhoz is.

9.1.1. Tétel. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Ekkor*

$$V(A+B)^{1/n} \geqslant V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}.$$

Bizonyítás. Nyilván elég olyan (nem feltétlenül konvex) halmazokra szorítkozni, amelyek véges számú, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos élű, a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunkt merőleges parallelotópokból állnak (ld. a 8.1. fejezet elején a konvex halmazokra vonatkozó megjegyzéseket). Ezek után az állítást az A és B halmazokat meghatározó parallelotópok együttes száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha A és B is egyetlen parallelotóp, ahol A élhosszai $a_1, \dots, a_n$ és B élhosszai $b_1, \dots, b_n$, akkor $A+B$ is parallelotóp az $a_1+b_1, \dots, a_n+b_n$ élhosszakkal. Így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{V(A)^{1/n}}{V(A+B)^{1/n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i}$$

és

$$\frac{V(B)^{1/n}}{V(A+B)^{1/n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i+b_i}\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i+b_i}\,,$$

ahonnan

$$\frac{V(A)^{1/n}}{V(A+B)^{1/n}} + \frac{V(B)^{1/n}}{V(A+B)^{1/n}} \leqslant 1.$$

Most tegyük fel, hogy bármely, legfeljebb $k-1 \geqslant 2$ parallelotópot tartalmazó halmazpárra igaz az állítás, és tekintsünk két olyan A és B halmazt, amelyek együttesen k parallelotópból állnak. Ekkor például A legalább két parallelotópot tartalmaz, így létezik olyan H hipersík, amely merőleges valamelyik koordináta-tengelyre, és az A halmazt két, az A-nál kevesebb parallelotópból álló, nem üres A' és A'' részre vágja. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in H$. Legyen $V(A') = \lambda V(A)$. Most toljuk el B-t úgy, hogy H a B halmazt is két olyan B' és B'' részre vágja, amelyekre $V(B') = \lambda V(B)$. Ezek az eltolások nyilván nem változtatják $V(A)$, $V(B)$, illetve $V(A+B)$ értékét. Mivel a B' és B'' halmazokban szereplő parallelotópok száma nem haladhatja meg a B-ben szereplő parallelotópok számát, így az A', B', illetve A'', B'' halmazpárok, amelyek a H által meghatározott különböző félterekben fekszenek, legfeljebb $k-1$ parallelotópból állnak, ennélfogva alkalmazható rájuk az indukciós hipotézis:

$$\begin{aligned} V(A+B) &\geqslant V(A'+B') + V(A''+B'') \\ &\geqslant (V(A')^{1/n} + V(B')^{1/n})^n + (V(A'')^{1/n} + V(B'')^{1/n})^n \\ &= \lambda\,(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n})^n + (1-\lambda)(V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n})^n \\ &= (V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n})^n. \end{aligned}$$

□

Megmutatható, hogy a 9.1.1. Tételben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha A és B homotetikus konvex testek.

Az alkalmazások szempontjából sokszor hasznos a 9.1.1. Tétel következő átfogalmazása.

9.1.2. Állítás. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Ekkor az*

$$\Omega : [0,1] \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto V(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n}$$

függvény konkáv.

Bizonyítás. A $C_{(\lambda)} = \lambda A + (1-\lambda)B$ jelölés bevezetésével $\Omega(\lambda) = V(C_{(\lambda)})^{1/n}$ nyilvánvaló módon. Mivel Ω folytonos, ezért elég belátni, hogy Ω gyengén konkáv, vagyis

$$\Omega\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \geqslant \frac{\Omega(\lambda_1)+\Omega(\lambda_2)}{2}$$

tetszőleges $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$ és $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$ esetén. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} C_{((\lambda_1+\lambda_2)/2)} &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)A + (1-\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2))B \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 A + (1-\lambda_1)B) + \tfrac{1}{2}(\lambda_2 A + (1-\lambda_2)B) \\ &= \tfrac{1}{2}C_{(\lambda_1)} + \tfrac{1}{2}C_{(\lambda_2)}, \end{aligned}$$

így a 9.1.1. Tétel szerint

$$V(C_{((\lambda_1+\lambda_2)/2)})^{1/n} \geqslant \tfrac{1}{2}V(C_{(\lambda_1)})^{1/n} + \tfrac{1}{2}V(C_{(\lambda_2)})^{1/n},$$

amiből következik az állítás. □

A fenti állítás, valamint a 9.1.1. Tétel felhasználásával még két fontos egyenlőtlenséget igazolhatunk, melyeket az irodalomban Minkowski egyenlőtlenségeknek neveznek.

9.1.3. Tétel. *Legyenek $K, L \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Ekkor*

$$V(K,\dots,K,L)^n \geqslant V(K)^{n-1}V(L), \tag{$*$}$$

$$V(K,\dots,K,L)^2 \geqslant V(K)V(K,\dots,K,L,L). \tag{$**$}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$\Omega : [0,1] \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto V((1-\xi)K + \xi L)^{1/n}$$

függvényt. Ekkor a 8.2.3. Tétel szerint

$$\Omega(\xi)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \gamma_\nu (1-\xi)^{n-\nu}\xi^\nu,$$

ahol

$$\gamma_\nu = V(\underbrace{K,\dots,K}_{n-\nu}, \underbrace{L,\dots,L}_{\nu})$$

minden $0 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén. Innen differenciálással kapjuk, hogy

$$n(\Omega(\xi))^{n-1}\frac{d\Omega}{d\xi}(\xi) = n\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}(\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu)(1-\xi)^{n-1-\nu}\xi^\nu$$

és

$$n(n-1)(\Omega(\xi))^{n-2}\left(\frac{d\Omega}{d\xi}(\xi)\right)^2 + n(\Omega(\xi))^{n-1}\frac{d^2\Omega}{d\xi^2}(\xi) =$$

$$n(n-1)\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n-2}{\nu}(\gamma_{\nu+2}-2\gamma_{\nu+1}+\gamma_\nu)(1-\xi)^{n-2-\nu}\xi^\nu.$$

Ezek után tekintsük a

$$\Psi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto (1-\xi)\Omega(0) + \xi\Omega(1) - \Omega(\xi)$$

függvényt. Világos, hogy Ψ kétszer folytonosan differenciálható konvex függvény (hiszen Ω konkáv a 9.1.2. Állítás szerint), továbbá $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$. Ennélfogva Ψ' monoton növekvő, és így $\Psi'(0) \leqslant 0$, vagyis

$$-(\gamma_0)^{1/n} + (\gamma_n)^{1/n} - \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{(\gamma_0)^{(n-1)/n}} \leqslant 0,$$

ahonnan $(*)$ azonnal adódik. Másrészt Ψ második deriváltja sehol sem negatív, speciálisan

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}(0) &= (n-1)\left(\frac{1}{(\gamma_0)^{1/n}}\frac{(\gamma_1-\gamma_0)^2}{(\gamma_0)^{(2n-2)/n}} - \frac{\gamma_2 - 2\gamma_1 + \gamma_0}{(\gamma_0)^{(n-1)/n}}\right) = \\ &= \frac{n-1}{(\gamma_0)^{(2n-1)/n}}\left((\gamma_1)^2 - \gamma_0\gamma_2\right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

amiből $(**)$ következik. □

Végül (bizonyítás nélkül) közöljük az alapvető fontosságú Alexandrov-Fenchel egyenlőtlenséget, amelynek például a második $(**)$ Minkowski egyenlőtlenség is speciális esete.

9.1.4. Tétel. *Legyenek $K_1, \ldots, K_n \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex testek. Ekkor*

$$V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n)^2 \geqslant V(K_1, K_1, K_3, \ldots, K_n)V(K_2, K_2, K_3, \ldots, K_n).$$

9.2. Izoperimetrikus egyenlőtlenség

Ebben a fejezetben az izoperimetrikus, illetve az izodiametrikus problémával foglalkozunk. Az első azt állítja, hogy az azonos térfogatú konvex testek közül a gömb felszíne, míg a második azt, hogy a gömb átmérője a legkisebb.

9.2.1. Tétel. *Bármely $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test felszíne legalább akkora, mint egy $V(K)$ térfogatú gömb felszíne.*

Bizonyítás. Alkalmazva a 9.1.1. Tételt a K_ρ halmazra kapjuk, hogy

$$V(K_\rho)^{1/n} \geqslant V(K)^{1/n} + \rho\sqrt[n]{\kappa_n},$$

vagyis

$$\frac{1}{\rho}\left(V(K_\rho)^{1/n} - V(K)^{1/n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\kappa_n}.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\kappa_n} &\leqslant \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\,(V(K_\rho)^{1/n} - V(K)^{1/n})\\
&= \frac{1}{n}\,V(K)^{(1-n)/n}\,\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\,(V(K_\rho) - V(K))\\
&= \frac{1}{n}\,V(K)^{(1-n)/n}\,O(K).
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
O(K) &\geqslant n\,\sqrt[n]{\kappa_n}\,V(K)^{(n-1)/n}\\
&= n\,\sqrt[n]{\kappa_n}\,(\sqrt[n]{\kappa_n})^{n-1} r(K)^{n-1}\\
&= n\,\kappa_n r(K)^{n-1}\\
&= O(B_{r(K)}(o)),
\end{aligned}$$

ahol $r(K)$ jelölte a $V(K)$ térfogatú gömb sugarát. □

9.2.2. Tétel. *Bármely $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test átmérője legalább akkora, mint egy $V(K)$ térfogatú gömb átmérője.*

Bizonyítás. Nyilván elég megmutatni, hogy

$$V(K) \leqslant \frac{\kappa_n}{2^n}\,(\operatorname{diam} K)^n.$$

Tekintsük az $S_0(K) = \frac{1}{2}\,(K + (-K))$ origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmazt (ezt egyébként a K centrálszimmetrizáltjának nevezzük, és részletesen a következő fejezetben fogunk vele foglalkozni). A 9.1.1. Tétel szerint

$$V(S_0(K)) = V(\tfrac{1}{2}\,K + \tfrac{1}{2}\,(-K)) \geqslant (\tfrac{1}{2}\,V(K)^{1/n} + \tfrac{1}{2}\,V(-K)^{1/n})^n = V(K).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} S_0(K) &= \operatorname{diam}\left(\tfrac{1}{2}(K + (-K))\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(K + (-K))\\
&= \tfrac{1}{2}\max\{\|(u-v) - (x-y)\| \mid u,v,x,y \in K\}\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}(\max\{\|u-v\| \mid u,v \in K\} + \max\{\|x-y\| \mid x,y \in K\})\\
&= \tfrac{1}{2}(\operatorname{diam} K + \operatorname{diam} K)\\
&= \operatorname{diam} K.
\end{aligned}$$

Így elég az állítást a K halmaz helyett az origóra szimmetrikus $S_0(K)$ halmazra igazolni. De $S_0(K)$ benne van az origó középpontú, $\frac{1}{2}\operatorname{diam} S_0(K)$ sugarú gömbben, következésképpen

$$V(S_0(K)) \leqslant \frac{\kappa_n}{2^n}\,(\operatorname{diam} S_0(K))^n. \qquad \square$$

Felhívnánk a figyelmet arra, hogy a 9.2.1. és 9.2.2. Tételek egyszerűen adódnak az első $(*)$ Minkowski egyenlőtlenségből is (9.1.3. Tétel). Valóban, ha az egyik halmaz szerepét a $B_1(o)$ egységgömb tölti be, akkor

$$\left(\frac{O(K)}{n\kappa_n}\right)^n \geqslant \left(\frac{V(K)}{\kappa_n}\right)^{n-1},$$

illetve

$$\left(\frac{B(L)}{2}\right)^n \geqslant \frac{V(L)}{\kappa_n}.$$

Ez utóbbinál elég annyit észrevenni, hogy az átlagos szélesség nem haladhatja meg az átmérőt.

Megjegyezzük még, hogy ha K nem gömb, akkor mind a 9.2.1., mind pedig a 9.2.2. Tételben szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

9.3. Centrálszimmetrizáció

Szimmetrizáción általában olyan eljárást értünk, amely egy adott konvex halmazt bizonyos szimmetria tulajdonságokkal rendelkező konvex halmazba transzformál. A legfontosabbak azok a szimmetrizációk, amelyek a halmaz alapmértékeinek egy részét változatlanul hagyják, míg másokat mindig vagy növelnek, vagy pedig csökkentenek. Két ilyen eljárást fogunk ismertetni.

9.3.1. Definíció. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor az*

$$S_0(K) = \tfrac{1}{2}(K + (-K))$$

halmazt a K centrálszimmetrizáltjának nevezzük.

$S_0(K)$ nyilván az origóra szimmetrikus, kompakt, konvex halmaz. A 9.2.2. Tétel bizonyításánál láttuk, hogy a centrálszimmetrizáció nem csökkenti a térfogatot. A teljesség kedvéért ezt most újra levezetjük, sőt megmutatjuk, hogy ennél sokkal több is igaz.

9.3.2. Tétel. *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, akkor*

$$W_\nu(S_0(K)) \geqslant W_\nu(K)$$

minden $0 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén.

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy ha $\nu < n$, akkor bármely ν-dimenziós H_ν lineáris altérre $S_0(K)|H_\nu = S_0(K|H_\nu)$. Így a 8.3.10. Kubota tétel ismételt alkalmazásával egyszerűen adódik, hogy elég az állítást a $\nu = 0$ speciális esetben igazolni. De $W_0(K) = V(K)$, amikor is a 9.1.1. Tétel szerint

$$V(S_0(K)) = V(\tfrac{1}{2}\,K + \tfrac{1}{2}\,(-K)) \geqslant (\tfrac{1}{2}\,V(K)^{1/n} + \tfrac{1}{2}\,V(-K)^{1/n})^n = V(K). \quad \square$$

Most lássuk, hogy mit mondhatunk a halmaznak, illetve annak centrálszimmetrizáltjának térfogatarányáról a másik oldalról.

9.3.3. Tétel (Rogers-Shephard, 1957). *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, akkor*

$$V(S_0(K)) \leqslant 2^{-n}\binom{2n}{n}\,V(K)\,.$$

Bizonyítás. Nyilván elég azzal az esettel foglalkozni, amikor $\dim K = n$. Jelölje a K karakterisztikus függvényét $\chi(K)$, azaz

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in K, \\ 0, & \text{ha } x \notin K. \end{cases}$$

Ekkor a Fubini tétel szerint

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{E}^n}\left(\int_{\mathbb{E}^n}\chi(y)\,\chi(y-x)\,dy\right)dx &= \int_{\mathbb{E}^n}\chi(y)\left(\int_{\mathbb{E}^n}\chi(y-x)\,dx\right)dy \\
&= V(K)\int_{\mathbb{E}^n}\chi(y)\,dy \\
&= V(K)^2.
\end{aligned}$$

Ezek után minden $x \in 2S_0(K)\setminus\{o\}$ pontra jelölje z_x azt az egyértelműen meghatározott pontot, amelyben az origóból induló, x-en átmenő félegyenes $2S_0(K)$ határát metszi. Most $x = \lambda_x z_x$, alkalmas $0 < \lambda_x \leqslant 1$ esetén, valamint z_x kifejezhető $a_x - b_x$ alakban, ahol $a_x, b_x \in K$. Továbbá K konvexitását felhasználva

$$(1-\lambda_x)\,K + \lambda_x a_x \subseteq K \quad \text{és} \quad (1-\lambda_x)\,K + \lambda_x b_x + x \subseteq K + x.$$

De $\lambda_x a_x - (\lambda_x b_x + x) = \lambda_x(a_x - b_x) - x = \lambda_x z_x - x = 0$, így a bal oldalon álló halmazok megegyeznek, és mindkettő része a $K \cap (K + x)$ halmaznak.

Ezért ha $x \in 2S_0(K) \setminus \{o\}$, akkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{E}^n} \chi(y)\,\chi(y-x)\,dy &= V(K \cap (K+x)) \\ &\geqslant V((1-\lambda_x)\,K) = \\ &= (1-\lambda_x)^n V(K) \\ &= \left(\int_{\lambda_x}^1 n\,(1-t)^{n-1}\,dt\right) V(K),\end{aligned}$$

ha pedig $x \notin 2S_0(K)$, akkor

$$\int_{\mathbb{E}^n} \chi(y)\,\chi(y-x)\,dy = V(K \cap (K+x)) = 0.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}V(K) &= \frac{1}{V(K)} \int_{\mathbb{E}^n} \left(\int_{\mathbb{E}^n} \chi(y)\,\chi(y-x)\,dy\right) dx \\ &= \frac{1}{V(K)} \int_{2S_0(K)} \left(\int_{\mathbb{E}^n} \chi(y)\,\chi(y-x)\,dy\right) dx \\ &\geqslant \int_{2S_0(K)} \left(\int_{\lambda_x}^1 n\,(1-t)^{n-1}\,dt\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\substack{x\in 2S_0(K)\\ 0<\lambda_x\leqslant t}} n\,(1-t)^{n-1}\,dx\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x\in 2tS_0(K)} n\,(1-t)^{n-1}\,dx\right) dt = \\ &= \int_0^1 n\,(1-t)^{n-1}\,V(2tS_0(K))\,dt \\ &= 2^n\,V(S_0(K)) \int_0^1 n\,(1-t)^{n-1}\,t^n\,dt \\ &= 2^n \binom{2n}{n}^{-1} V(S_0(K)).\end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlőség parciális integrálással adódik. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 9.3.3. Tételben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha K szimplex.

9.4. Steiner szimmetrizáció

Ebben a fejezetben egy másik szimmetrizációs eljárást ismertetünk. Érdekes tény, hogy ezt először Steiner használta az izoperimetrikus probléma megoldásánál.

9.4.1. Definíció. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, H pedig egy az origóra illeszkedő hipersík. Tekintsünk most egy tetszőleges $p \in K$ pontot, és állítsunk p-ből merőlegest a H hipersíkra. Messe ez az l_p merőleges a K halmazt a $\overline{p_1p_2}$ szakaszban. Ezek után toljuk el a $\overline{p_1p_2}$ szakaszt l_p mentén úgy, hogy az a H-ra szimmetrikus helyzetbe kerüljön. Végrehajtva ugyanezt az eljárást az összes $p \in K$ pontra, a kapott, H-ra szimmetrikus szakaszok egyesítését a K halmaz $S_H(K)$ Steiner szimmetrizáltjának nevezzük.*

A definícióból azonnal adódnak a Steiner szimmetrizáció következő tulajdonságai.

9.4.2. Állítás. *Az n-dimenziós tér tetszőleges nem üres, kompakt, konvex halmazaira, valamint bármely az origón átmenő H hipersíkra*

(1) *$S_H(K)$ szimmetrikus a H hipersíkra,*

(2) *$S_H(\lambda K) = \lambda S_H(K)$ minden $\lambda \geqslant 0$ esetén,*

(3) *$S_H(K_1) \subseteq S_H(K_2)$, ha $K_1 \subseteq K_2$.*

9.4.3. Állítás. *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz és H egy, az origón átmenő hipersík, akkor $S_H(K)$ szintén nem üres, kompakt, konvex halmaz.*

Bizonyítás. Mivel K korlátos, ezért létezik olyan origó középpontú gömb, amely tartalmazza K-t. De ennek a gömbnek a Steiner szimmetrizáltja önmaga, így ez a gömb tartalmazza $S_H(K)$-t is, vagyis $S_H(K)$ korlátos.

Megmutatjuk, hogy $S_H(K)$ zárt halmaz. Legyen $(p_i) : \mathbb{N} \to S_H(K)$ egy konvergens sorozatot, és jelölje a határértéket p_0. Minden $i = 0, 1, \ldots$ esetén legyen a p_i pont H-ra eső merőleges vetülete x_i, és legyen l_i a H-ra merőleges, az x_i pontra illeszkedő egyenes. Most K kompaktsága miatt $x_0 \in S_H(K)$ és

$$\|p_0 - x_0\| = \lim_{i\to\infty} \|p_i - x_i\| \leqslant \tfrac{1}{2} \limsup_{i\to\infty} |l_i \cap K| \leqslant \tfrac{1}{2} |l_0 \cap K| ,$$

ahonnan következik, hogy $p_0 \in S_H(K)$ (itt $|l_i \cap K|$ az $l_i \cap K$ szakasz hosszát jelöli minden $i \in \mathbb{N}$ esetén).

Végül belátjuk, hogy $S_H(K)$ konvex halmaz. Legyenek $p', q' \in S_H(K)$ tetszőleges pontok. Most ha a p'-ből és a q'-ből a H-ra állított merőlegesek K-t mondjuk a $\overline{p_1p_2}$ és a $\overline{q_1q_2}$ szakaszokban metszik, akkor nyilván $p' \in S_H(\overline{p_1p_2})$ és $q' \in S_H(\overline{q_1q_2})$. Továbbá világos, hogy a $\operatorname{conv}(S_H(\overline{p_1p_2}) \cup S_H(\overline{q_1q_2}))$ trapéz éppen a $\operatorname{conv}(\overline{p_1p_2} \cup \overline{q_1q_2})$ trapéz Steiner szimmetrizáltja. Ebből pedig K konvexitását felhasználva következik, hogy

$$\overline{p'q'} \subseteq S_H(\operatorname{conv}(\overline{p_1p_2} \cup \overline{q_1q_2})) \subseteq S_H(K). \qquad \square$$

9.4.4. Állítás. *Legyenek $K_1, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, H pedig egy az origóra illeszkedő hipersík. Ekkor*

$$\sum_{l=1}^{m} \lambda_l S_H(K_l) \subseteq S_H\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right)$$

minden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$ esetén.

Bizonyítás. Nyilván elég az állítást az $m = 2$ és $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ speciális esetben igazolni. Legyenek $p \in S_H(K_1)$ és $q \in S_H(K_2)$ tetszőleges pontok, valamint legyen $t = p + q$. Jelölje l_p, l_q és l_t rendre a p, q és t pontokon átmenő, H-ra merőleges egyeneseket. Ekkor $t \in (l_p \cap S_H(K_1)) + (l_q \cap S_H(K_2))$. Továbbá $(l_p \cap S_H(K_1)) + (l_q \cap S_H(K_2))$ szimmetrikus H-ra, és hossza

$$|(l_p \cap S_H(K_1)) + (l_q \cap S_H(K_2))| = |l_p \cap S_H(K_1)| + |l_q \cap S_H(K_2)|.$$

Hasonló módon,

$$|(l_p \cap K_1) + (l_q \cap K_2)| = |l_p \cap K_1| + |l_q \cap K_2|.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}(l_p \cap S_H(K_1)) + (l_q \cap S_H(K_2)) &= S_H((l_p \cap K_1) + (l_q \cap K_2)) \\ &\subseteq S_H(l_t \cap (K_1 + K_2)),\end{aligned}$$

vagyis $t \in S_H(K_1 + K_2)$, amiből következik az állítás. $\square$

9.4.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy egy $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{K}_n$ sorozat konvergens, és határalakzata a K_0 halmaz. Tegyük fel azt is, hogy léteznek olyan n-dimenziós $B_r(o)$, illetve $B_R(o)$ gömbök, amelyekre $B_r(o) \subseteq K_i \subseteq B_R(o)$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen továbbá H egy az origóra illeszkedő tetszőleges hipersík. Ekkor*

$$\lim_{i \to \infty} S_H(K_i) = S_H(K_0).$$

Bizonyítás. Mivel a Steiner szimmetrizáció a $B_r(o)$, illetve $B_R(o)$ gömböket fixen hagyja, ezért $B_r(o) \subseteq S_H(K_i) \subseteq B_R(o)$ szintén fennáll minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Most felhasználva a (K_i) sorozat konvergenciáját, minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan i_0 küszöbindex, hogy bármely $i > i_0$ esetén $d(K_0, K_i) < \varepsilon$. Ennélfogva

$$K_i \subseteq K_0 + B_\varepsilon(o) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K_0,$$

ahonnan

$$S_H(K_i) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) S_H(K_0) \subseteq S_H(K_0) + B_{\frac{\varepsilon}{r}R}(o).$$

Teljesen hasonló módon

$$K_0 \subseteq K_i + B_\varepsilon(o) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K_i,$$

és így

$$S_H(K_0) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) S_H(K_i) \subseteq S_H(K_i) + B_{\frac{\varepsilon}{r}R}(o).$$

Következésképpen minden $i > i_0$ esetén $d(S_H(K_0), S_H(K_i)) \leqslant \frac{\varepsilon}{r}R$, amiből adódik az állítás. $\square$

Jegyezzük meg, hogy a $B_r(o) \subseteq K_i \subseteq B_R(o)$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén feltétel elhagyásával általában már nem lesz igaz a 9.4.5. Állítás.

9.4.6. Állítás. *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és H egy az origón átmenő hipersík, akkor*

(1) $V(S_H(K)) = V(K)$,

(2) $O(S_H(K)) \leqslant O(K)$.

Bizonyítás. Az állítás első része magától értetődik. A második rész igazolásához tekintsük a $K + B_\rho(o)$ halmazt, ahol ρ tetszőleges pozitív valós szám. Ekkor a 9.4.4. Állítás szerint $S_H(K) + B_\rho(o) \subseteq S_H(K + B_\rho(o))$, így

$$V(S_H(K) + B_\rho(o)) \leqslant V(S_H(K + B_\rho(o))) = V(K + B_\rho(o)).$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{V(S_H(K) + B_\rho(o)) - V(S_H(K))}{\rho} \leqslant \frac{V(K + B_\rho(o)) - V(K)}{\rho}.$$

Mivel ez minden $\rho > 0$ esetén fennáll, ezért $O(S_H(K)) \leqslant O(K)$. $\square$

Megmutatható, igaz sokkal komplikáltabban, hogy a Steiner szimmetrizáció a többi alapmértéket sem növeli.

9.4.7. Tétel. *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és H egy az origón átmenő hipersík, akkor*

$$W_\nu(S_H(K)) \leqslant W_\nu(K)$$

minden $0 \leqslant \nu \leqslant n$ esetén.

A következő tétel több szempontból is alapvető fontosságú.

9.4.8. Tétel. *Legyen $K_0 \subseteq \mathbb{E}^n$ az origót belső pontként tartalmazó, kompakt, konvex halmaz. Jelölje továbbá $\mathcal{G}(K_0)$ mindazon halmazok családját, amelyek K_0-ból az origón átmenő véges sok hipersíkra egymás után történő Steiner szimmetrizációval előállíthatók. Ekkor létezik olyan $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{G}(K_0)$ sorozat, amely egy origó középpontú $B_R(o)$ gömbhöz konvergál.*

Bizonyítás. Minden $K \in \mathcal{G}(K_0)$ halmazra jelölje $R(K)$ a legkisebb, origó középpontú, K-t tartalmazó gömb sugarát, valamint legyen

$$R = \inf_{K \in \mathcal{G}(K_0)} R(K).$$

Világos, hogy ekkor létezik olyan $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{G}(K_0)$ konvergens sorozat, amelyre $\lim_{i \to \infty} R(K_i) = R$. Állítjuk, hogy a (K_i) sorozat $\bar{K}$ határalakzata (amely természetesen nem feltétlenül tartozik hozzá $\mathcal{G}(K_0)$-hoz) az origó középpontú, R sugarú $B_R(o)$ gömb. Mivel $R(K)$ folytonos függvény, ezért $R(\bar{K}) = R$, és így $\bar{K} \subseteq B_R(o)$. A másik irányú tartalmazást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a $B_R(o)$ gömb határán létezik olyan p pont, amely nem tartozik hozzá $\bar{K}$-hoz. Ekkor szükségképpen létezik olyan p középpontú C_1 zárt gömbsüveg is, amely szintén diszjunkt $\bar{K}$-tól. Fedjük le a $B_R(o)$ gömb határát a C_1 gömbsüveg véges sok páronként különböző, egybevágó $C_1, \ldots C_m$ példányával, és tekintsük minden $2 \leqslant j \leqslant m$ esetén a C_1 és C_j halmazok origóra illeszkedő H_j szimmetria hipersíkját. Nyilván $C_1 \cap S_{H_2}(\bar{K}) = C_2 \cap S_{H_2}(\bar{K}) = \emptyset$. Továbbá hasonlóan

$$C_1 \cap S_{H_3}(S_{H_2}(\bar{K})) = C_2 \cap S_{H_3}(S_{H_2}(\bar{K})) = C_3 \cap S_{H_3}(S_{H_2}(\bar{K})) = \emptyset.$$

Folytatva ezt a szimmetrizációt, a $\bar{K}$ halmazból véges sok lépésben egy olyan $\bar{K}'$ halmazt kapunk, amely sehol sem metszi $B_R(o)$ határát. Most végrehajtva ugyanezt az eljárást az összes K_i halmazra, a 9.4.5. Állítással összhangban egy a $\bar{K}'$ halmazhoz konvergáló $(K_i') : \mathbb{N} \to \mathcal{G}(K_0)$ sorozathoz jutunk. Mivel $R(\bar{K}') < R$, ezért valamely i_0 küszöbindextől kezdve $R(K_i') < R$ is fennáll, ami ellentmond R definíciójának. □

Vegyük észre, hogy a 9.4.6. Állítás valamint a 9.4.8. Tétel segítségével a 9.2.1. Tételre egy újabb bizonyítást adhatunk.

A megismert szimmetrizációs eljárások alkalmazására lássunk egy kiemelkedően szép példát, a Blaschke-Santaló egyenlőtlenség bizonyítását.

9.4.9. Tétel (Santaló, 1949). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origóra szimmetrikus konvex test. Jelölje továbbá K^* a K poláris halmazát. Ekkor*

$$V(K)\,V(K^*) \leqslant V(B_1(o))^2.$$

Bizonyítás. Először azt fogjuk megmutatni, hogy bármely, origón átmenő H hipersíkra $V(K)\,V(K^*) \leqslant V(S_H(K))\,V(S_H(K)^*)$. Mivel a Steiner szimmetrizáció a térfogatot nem változtatja, ezért elég a $V(K^*) \leqslant V(S_H(K)^*)$ egyenlőtlenséget igazolni. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy H megegyezik az $x_n = 0$ egyenletű hipersíkkal. Azonosítsuk az n-dimenziós teret a $H \times \mathbb{R}$ direkt szorzattal. Ekkor

$$\begin{aligned}
K^* &= \{(X,x) \in H \times \mathbb{R} \mid \langle X,Y\rangle + xy \leqslant 1,\ \text{minden } (Y,y) \in K \text{ esetén}\},\\
S_H(K) &= \{(X, \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)) \in H \times \mathbb{R} \mid X \in K|H,\ (X,x_1),(X,x_2) \in K\},\\
S_H(K)^* &= \{(X,x) \in H \times \mathbb{R} \mid \langle X,Y\rangle + \tfrac{1}{2}\,x(y_1 - y_2) \leqslant 1,\\
&\qquad\qquad \text{minden } (Y,y_1),(Y,y_2) \in K \text{ esetén}\}.
\end{aligned}$$

Most ha valamely $t \in \mathbb{R}$ valós számra és $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazra

$$A(t) = \{T \in H \mid (T,t) \in A\},$$

akkor a fenti formulákból

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\,(K^*(t) + K^*(-t)) =\\
&\quad = \{\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \mid\ X_1, X_2 \in H \text{ és } \langle X_1, Y_1\rangle + ty_1 \leqslant 1,\ \langle X_2, Y_2\rangle - ty_2 \leqslant 1\\
&\qquad\qquad \text{minden } (Y_1,y_1),(Y_2,y_2) \in K \text{ esetén}\}\\
&\quad \subseteq \{\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \mid\ X_1, X_2 \in H \text{ és } \langle X_1, Y\rangle + ty_1 \leqslant 1,\ \langle X_2, Y\rangle - ty_2 \leqslant 1\\
&\qquad\qquad \text{minden } (Y,y_1),(Y,y_2) \in K \text{ esetén}\}\\
&\quad \subseteq \{\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \mid\ X_1, X_2 \in H \text{ és } \langle \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2), Y\rangle + \tfrac{1}{2}t(y_1 - y_2) \leqslant 1\\
&\qquad\qquad \text{minden } (Y,y_1),(Y,y_2) \in K \text{ esetén}\}\\
&\quad = \{X \mid\ X \in H \text{ és } \langle X, Y\rangle + \tfrac{1}{2}t(y_1 - y_2) \leqslant 1\\
&\qquad\qquad \text{minden } (Y,y_1),(Y,y_2) \in K \text{ esetén}\}\\
&\quad = S_H(K)^*(t).
\end{aligned}$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel K szimmetrikus az origóra, ezért K^* is szimmetrikus az origóra, így $K^*(t) = -K^*(-t)$, következésképpen $V_{(n-1)}(K^*(t)) = V_{(n-1)}(K^*(-t))$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ennélfogva a 9.3.2. Tétel szerint (azt $(n-1)$-dimenzióban alkalmazva)

$$\begin{aligned}
V_{(n-1)}(S_H(K)^*(t)) &\geqslant V_{(n-1)}(\tfrac{1}{2}\,(K^*(t) + (K^*(-t))))\\
&\geqslant \big(\tfrac{1}{2}\,V_{(n-1)}(K^*(t))^{1/(n-1)} + \tfrac{1}{2}\,V_{(n-1)}(K^*(-t))^{1/(n-1)}\big)^{n-1}\\
&= V_{(n-1)}(K^*(t))
\end{aligned}$$

minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahonnan integrálással

$$V(S_H(K)^*) = \int_{\mathbb{R}} V_{(n-1)}(S_H(K)^*(t))\, dt \geqslant \int_{\mathbb{R}} V_{(n-1)}(K^*(t))\, dt = V(K^*)$$

adódik.

Ezek után visszatérve az eredeti állításra, a 9.4.8. Tétel szerint (az ott bevezetett jelölések megtartásával) létezik olyan $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{G}(K)$ sorozat, amely egy $B_R(o)$ gömbhöz konvergál. Ám, mint az előbb láttuk

$$V(K)\, V(K^*) \leqslant V(K_i)\, V(K_i^*)$$

minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Következésképpen

$$V(K)\, V(K^*) \leqslant V(B_R(o))\, V(B_{\frac{1}{R}}(o)) = V(B_1(o))^2. \qquad \square$$

Megmutatható, hogy a 9.4.9. Tételben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha K ellipszoid.

Feladatok

9.1. Feladat. *Legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, és tegyük fel, hogy K_2 centrálszimmetrikus. Mutassuk meg, hogy ha minden $S \in \mathcal{G}(n,1)$ esetén $K_1|S$ hossza nem haladja meg $K_2|S$ hosszát, akkor $V(K_1) \leqslant V(K_2)$.* [Útmutatás: Alkalmazzuk a 9.1.1. Tételt.]

9.2. Feladat. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ az origóra szimmetrikus, konvex test. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ esetén*

$$V_{(n-1)}(K \cap u^\perp) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} V_{(n-1)}(K \cap (u^\perp + \lambda u)).$$

[Útmutatás: Alkalmazzuk a 9.1.1. Tételt.]

9.3. Feladat (Kubota, 1925). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ekkor $O(K) \leqslant n\kappa_n(\operatorname{diam} K/2)^{n-1}$.* [Útmutatás: Módosítsuk a 9.2.2. Tétel bizonyítását.]

9.4. Feladat* (Gritzmann-Wills-Wrase, 1987). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ekkor $O(K)^{n-1} > \kappa_{n-1}(\operatorname{diam} K)(n\,V(K))^{n-2}$.* [Útmutatás: Legyen g egy olyan origón átmenő egyenes, mely párhuzamos K

valamely átmérőjével. Tekintsük először a K testnek a $g^\perp$ hipersíkra vonatkozó K' Steiner szimmetrizáltját, majd a K' testnek a g egyenesre vonatkozó K'' Schwarz-féle lekerekítését (ld. 9.8. Feladat). Világos, hogy elég az állítást a K'' testre igazolni. Ezek után használjuk fel a következő integrálegyenlőtlenséget. Legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos, konkáv függvény, és tegyük fel, hogy $f(0) = 1$. Legyenek továbbá p, q olyan valós számok, melyekre $1 \leqslant p \leqslant q$. Ekkor

$$\left[\int_0^1 f^q(t)\,dt\right]^{1/q}\left[\int_0^1 (1-t)^p\,dt\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_0^1 f^p(t)\,dt\right]^{1/p}\left[\int_0^1 (1-t)^q\,dt\right]^{1/q}.$$

Ez az egyenlőtlenség például variációszámítási módszerekkel igazolható.]

9.5. Feladat. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ekkor*

$$r(K) \leqslant nV(K)/O(K) \leqslant R(K),$$

ahol $r(K)$ és $R(K)$ a K test beírt, illetve körülírt gömbjének sugara. [Útmutatás: Elég az állítást konvex politópokra igazolni.]

9.6. Feladat (Wills, 1970). *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test. Mutassuk meg, hogy ekkor $V(K)/O(K) \leqslant r(K)$, ahol $r(K)$ a K test beírt gömbjének sugara.* [Útmutatás: Elég az állítást konvex politópokra igazolni.]

9.7. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $K \in \mathcal{K}_n$, és H egy, az origón átmenő hipersík, akkor* $\operatorname{diam} S_H(K) \leqslant \operatorname{diam} K$.

9.8. Feladat. *Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, g pedig egy tetszőleges egyenes. Minden olyan g-re merőleges H hipersíkban, amely metszi K-t tekintsük azt az $(n-1)$-dimenziós gömböt, amelynek középpontja g-n van, térfogata pedig $V_{(n-1)}(K \cap H)$. Ezen gömbök unióját a K halmaz g-re vonatkozó Schwarz-féle lekerekítésének nevezzük, és $S_g(K)$-val jelöljük. Mutassuk meg, hogy $S_g(K)$ konvex test, továbbá $V(S_g(K)) = V(K)$, $O(S_g(K)) \leqslant O(K)$ és* $\operatorname{diam} S_g(K) \leqslant \operatorname{diam} K$. [Útmutatás: Feltehetjük, hogy g a koordinátarendszer x_n tengelye. Először azt igazoljuk, hogy $S_g(K)$ valóban konvex test. Ezek után jelölje $\mathcal{F}_g(K)$ mindazon halmazok családját, amelyek K-ból véges sok, a g-re illeszkedő hipersíkra egymás után történő Steiner szimmetrizációval előállíthatók. A 9.4.8. Tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $(K_i) : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_g(K)$ konvergens sorozat, amely K_0 határhalmazának az $x_n = \alpha$ egyenletű H_α hipersíkkal vett metszete minden α racionális számra megegyezik az $S_g(K)$ halmaznak a H_α hipersíkkal vett metszetével. Végül mutassuk meg, hogy ez csak akkor lehetséges ha $K_0 = S_g(K)$.]

9.9. Feladat. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *konvex test,* $\mathcal{L}$ *pedig tetszőleges vektorhalmaz. Mutassuk meg, hogy* $\mathcal{L} + K$ *pontosan akkor elhelyezés, ha* $\mathcal{L} + S_0(K)$ *is az (határpontjaiktól eltekintve diszjunkt halmazok családját nevezzük elhelyezésnek).*

9.10. Feladat** **(Bourgain-Milman, 1985).** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{E}^n$ *az origóra szimmetrikus konvex test. Jelölje továbbá* K^* *a* K *poláris halmazát. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan univerzális (*n*-től független)* $c > 0$ *konstans, amelyre* $c^n\, V(B_1(o))^2 \leqslant V(K)\, V(K^*)$.

Irodalomjegyzék

[1] Alexandrov, A. D.: *Convex polyhedra.* Springer Verlag, Berlin, 2005.

[2] Alexandrov, A. D.: *Intrinsic geometry of convex surfaces.* Chapman and Hall, Boca Raton, 2006.

[3] Alon, N., Kleitman, D. J.: Piercing convex sets and the Hadwiger-Debrunner (p,q)-problem. *Adv. Math.* **96** (1992), 103-112.

[4] Baker, M. J. C.: Covering a polygon with triangles: a Carathéodory-type theorem. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **28** (1979), 229-234.

[5] Bang, T.: A solution of the plank problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 990-993.

[6] Barvinok, A.: *A course in convexity.* American Mathematical Society, Providence, 2002.

[7] Bárány, I., Katchalski, M., Pach, J.: Quantitative Helly-type theorems. *Proc. Amer. Math. Soc.* **86** (1982), 109-114.

[8] Bárány, I., Katchalski, M., Pach, J.: Helly's theorem with volumes. *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 362-365.

[9] Benson, R. V.: *Euclidean geometry and convexity.* McGraw-Hill Co, New York, 1966.

[10] Bezdek, A., Bezdek, K.: A solution of Conway's fried potato problem. *Bull. London Math. Soc.* **27** (1995), 492-496.

[11] Bezdek, K.: *Classical topics in discrete geometry.* Springer Verlag, New York, 2010.

[12] Blaschke, W.: *Kreis und Kugel.* 2. Auflage, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1956.

[13] Boltyanski, V. G.: *Hilbert's third problem.* V. H. Winston & Sons, Washington, 1978.

[14] Boltyanski, V. G., Gohberg I.: *Results and problems in combinatorial geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[15] Boltyanski, V. G., Martini, H., Soltan, P. S.: *Excursions into combinatorial geometry.* Springer Verlag, Berlin, 1996.

[16] Bonnesen, T., Fenchel, W.: *Theory of convex bodies.* BCS Associates, Moscow, 1987.

[17] Böröczky Jr, K.: *Finite packing and covering.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[18] Bourgain, J., Milman, V. D.: New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n. *Invent. Math.* **88** (1987), 319-340.

[19] Brass, P., Moser, W., Pach, J.: *Research problems in discrete geometry.* Springer Verlag, New York, 2005.

[20] Breen, M.: A Helly-type theorem for the dimension of the kernel of a starshaped set. *Proc. Amer. Math. Soc.* **73** (1979), 233-236.

[21] Brøndsted, A.: *An introduction to convex polytopes.* Springer Verlag, New York, 1983.

[22] Burago, Y. D., Zalgaller, V. A.: *Geometric inequalities.* Springer Verlag, Berlin, 1988.

[23] Burton, G. R.: Sections of convex bodies. *J. London Math. Soc.* **12** (1976), 331-336.

[24] Burton, G. R., Mani, P.: A characterisation of the ellipsoid in terms of concurrent sections. *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 485-507.

[25] Busemann, H.: *Convex surfaces.* Interscience, New York, 1958.

[26] Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. *Math. Ann.* **64** (1907), 95-115.

[27] Cassels, J. W. S.: *An introduction to the geometry of numbers.* Springer Verlag, Berlin, 1959.

[28] Chvátal, V.: *Linear programming.* W. H. Freeman, New York, 1983.

[29] Coxeter, H. S. M.: *Regular polytopes.* 2nd ed., Macmillan, New York, 1963.

[30] Croft, H. T., Falconer, K. J., Guy, R. K.: *Unsolved problems in geometry.* Springer Verlag, New York, 1991.

[31] Danzer, L., Laugwitz, D., Lenz, H.: Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. *Arch. Math.* **8** (1957), 214-219.

[32] Danzer, L., Grünbaum, B., Klee, V.: Helly's theorem and its relatives. In: *Convexity, Proc. Symposia Pure Math.*, Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, 1963, pp. 101-180.

[33] Doignon, J. P.: Convexity in crystallographical lattices, *J. Geom.* **3** (1973), 71-85.

[34] Eggleston, H. G.: *Convexity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[35] Elekes, G.: A geometric inequality and the complexity of computing volume. *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 289-292.

[36] Ewald, G.: *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Springer Verlag, New York, 1996.

[37] Fejes Tóth, L.: *Regular figures.* Macmillan, New York, 1964.

[38] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[39] Foland, N. E., Marr, J. M.: Sets with zero-dimensional kernels. *Pacific J. Math.* **19** (1966), 429-432.

[40] Fulton, W. F.: *Introduction to toric varieties.* Princeton University Press, Princeton, 1993.

[41] Gale, D.: On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 222-225.

[42] Gardner, R. J.: *Geometric tomography.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[43] Gritzmann, P., Klee, V.: On the complexity of some basic problems in computational convexity: I. Containment problems. *Discrete Math.* **136** (1994), 129-174.

[44] Gritzmann, P., Klee, V.: On the complexity of some basic problems in computational convexity: II. Volume and mixed volumes. In: *Polytopes: abstract, convex and computational*, Eds. Bisztriczky, T., McMullen, P., Schneider, R., Ivić Weiss, A., Kluwer, Boston, 1994, pp. 373-466.

[45] Gritzmann, P., Wills, J. M., Wrase, D.: A new isoperimetric inequality. *J. Reine Angew. Math.* **379** (1987), 22-30.

[46] Groemer, H.: Stability theorems for projections of convex sets. *Israel J. Math.* **60** (1987), 177-190.

[47] Groemer, H.: *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[48] Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A.: *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. Springer Verlag, Berlin, 1988.

[49] Gruber, P. M.: *Convex and discrete geometry*. Springer Verlag, Berlin, 2007.

[50] Gruber, P. M., Lekkerkerker, C. G.: *Geometry of numbers*. Second edition. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[51] Gruber, P. M., Wills, J. M. (eds.): *Convexity and its applications*. Birkhäuser, Basel, 1983.

[52] Gruber, P. M., Wills, J. M. (eds.): *Handbook of convex geometry*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[53] Grünbaum, B.: *Convex polytopes*. Second edition. Springer Verlag, New York, 2003.

[54] Hadwiger, H.: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers. *Comment. Math. Helv.* **18** (1945/46), 73-75.

[55] Hadwiger, H.: *Altes und Neues über konvexe Körper*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1955.

[56] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer Verlag, Berlin, 1957.

[57] Hadwiger, H., Debrunner, H., Klee, V.: *Combinatorial geometry in the plane*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[58] Helly, E.: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jahrb. Deut. Math. Verein* **32** (1923), 175-176.

[59] Horn, A.: Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 923-929.

[60] Jaglom, I. M., Boltyanskii, V. G.: *Convex figures.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

[61] John, F.: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In: *Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday*, Interscience, New York, 1948, pp. 187-204.

[62] Jung, H. W. E.: Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *J. Reine Angew. Math.* **123** (1901), 241-257.

[63] Kahn, J., Kalai, G.: A counterexample to Borsuk's conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 60-62.

[64] Kirchberger, P.: Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.* **57** (1903), 509-540.

[65] Klee, V.: The critical set of a convex body. *Amer. J. Math.* **75** (1953), 178-188

[66] Kneser, H.: Die Stützfunktion eines Durchschnitts konvexer Körper. *Arch. Math.* **21** (1970), 221-224.

[67] Krasnosselski, M. A.: Sur un critère pour qu'un domain soit étoilé (in Russian). *Mat. Sb.* **19** (1946), 309-310.

[68] Kubota, T.: Über die konvex-geschlossenen Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raume. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.* **14** (1925), 85-99.

[69] Lassak, M.: An estimate concerning Borsuk partition problem. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.* **30** (1982), 449-451.

[70] Larman, D. G.: A note on the false centre problem. *Mathematika* **21** (1974), 216-227.

[71] Lay, S. R.: *Convex sets and their application.* John Wiley & Sons, New York, 1982.

[72] Leichtweiß, K.: *Konvexe Mengen.* Springer Verlag, Berlin, 1980.

[73] Leonard, I. E., Lewis, J E.: *Geometry of convex sets.* John Wiley & Sons, Hoboken, 2016.

[74] Lyusternik, L. A.: *Convex figures and polyhedra.* Dover, New York, 1963.

[75] Maehara, H.: Helly-type theorems for spheres. *Discrete Comput. Geom.* **4** (1989), 279-285.

[76] Matoušek, J.: *Lectures on discrete geometry.* Springer Verlag, New York, 2002.

[77] Matoušek, J.: *Using the Borsuk-Ulam theorem.* Corrected second printing. Springer Verlag, Berlin, 2008.

[78] McKinney, R. L.: On unions of two convex sets. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 883-886.

[79] McMullen, P.: The maximum number of faces of a convex polytope. *Mathematika* **17** (1970), 179-184.

[80] McMullen, P., Shephard, G. C.: *Convex polytopes and the upper bound conjecture.* Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[81] Minkowski, H.: Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.* **57** (1903), 447-495.

[82] Minkowski, H.: Theorie der konvexen Körper, inbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. In: *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. II, Teubner, Leipzig, 1911, pp. 131-229.

[83] Montejano, L.: A characterization of the Euclidean ball in terms of concurrent sections of constant width. *Geom. Dedicata* **37** (1991), 307-316.

[84] Moszyńska, M.: *Selected topics in convex geometry.* Birkhäuser, Boston, 2006.

[85] Motzkin, T. S.: Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend., Classe. Sci. Fis. Mat. Natur.* **21** (1935), 773-779.

[86] Oda, T.: *Convex bodies and algebraic geometry: an introduction to the theory of toric varieties.* Springer Verlag, Berlin, 1988.

[87] Pach, J., Agarwal, P. K.: *Combinatorial geometry.* John Wiley & Sons, New York, 1995.

[88] Pogorelov, A. V.: *Extrinsic geometry of convex surfaces.* Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

[89] Radon, J.: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.* **83** (1921), 113-115.

[90] Rockafellar, R. T.: *Convex analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[91] Rogers, C. A.: *Packing and covering.* Cambridge University Press, Cambridge, 1964.

[92] Rogers, C. A., Shephard, G. C.: The difference body of a convex body. *Arch. Math.* **8** (1957), 220-233.

[93] Santaló L. A.: Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones. *Portugaliae Math.* **8** (1949), 155-161.

[94] Santaló L. A.: *Integral geometry and geometric probability.* Addison-Wesley, Reading, 1976.

[95] Schneider, R.: *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[96] Schramm, O.: On the volume of sets having constant width. *Israel J. Math.* **63** (1988), 178-182.

[97] Schrijver, A.: *Theory of linear and integer programming.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

[98] Simon, B.: *Convexity: an analytic viewpoint.* Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[99] Soltan, V.: *Lectures on convex sets.* World Scientific, New Jersey, 2015.

[100] Sommerville, D. M. Y.: *An introduction to the geometry of n dimensions.* Dover, New York, 1958.

[101] Steinhagen, P.: Über die grösste Kugel in einer konvexen Punktmenge. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **1** (1922), 15-26.

[102] Steinitz, E.: Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme I. *J. Reine Angew. Math.* **143** (1913), 128-175.

[103] Straszewicz, S.: Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen. *Fund. Math.* **24** (1935), 139-143.

[104] Szabó, L.: A simple proof for the Jordan measurability of convex sets. *Elem. Math.* **52** (1997), 84-86.

[105] Thompson, A. C.: *Minkowski geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[106] Toth, G.: *Measures of symmetry for convex sets and stability.* Springer Verlag, Cham, 2015.

[107] Tverberg, H.: A generalization of Radon's theorem. *J. London Math. Soc.* **41** (1966), 123-128.

[108] Valentine, F. A.: *Convex sets.* McGraw-Hill, New York, 1964.

[109] Webster, R.: *Convexity.* Oxford University Press, Oxford, 1994.

[110] Wills, J. M.: Zum Verhältnis von Volumen zu Oberfläche bei konvexen Körpern. *Arch. Math.* **21** (1970), 557-560.

[111] Ziegler, G. M.: *Lectures on polytopes.* Updated seventh printing. Springer Verlag, New York, 2007.

[112] Zong, C.: *Strange phenomena in convex and discrete geometry.* Springer Verlag, New York, 1996.

[113] Zong, C.: *The cube: a window to convex and discrete geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Jelölések

$A^\top$	az A mátrix transzponáltja
$\operatorname{aff} K$	K affin burka
$B(K)$	K átlagos szélessége
$B_r(o)$	$\{x \in \mathbb{E}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$
$\operatorname{bd} K$	K határa
$C(r,n)$	n-dimenziós, r csúcsú ciklikus politóp
$\operatorname{cl} K$	K lezártja
$\operatorname{conv} K$	K konvex burka
$d(x,y)$	az x és y pontok távolsága
$d(K,L)$	$\inf\{\delta \in \mathbb{R}^+ \mid K \subseteq L_\delta$ és $L \subseteq K_\delta\}$
$d_h(K,L)$	$\inf\{d_t(K,aL) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$
$d_t(K,L)$	$\inf\{d(K,L+x) \mid x \in \mathbb{E}^n\}$
$D(K,L)$	$\inf\{d(x,y) \mid x \in K,\ y \in L\}$
$\det A$	az A négyzetes mátrix determinánsa
$\operatorname{diam} K$	K átmérője
$\dim K$	K (affin) dimenziója
$\mathbb{E}^n$	n-dimenziós euklideszi tér
$\exp K$	K exponált pontjainak halmaza
$\operatorname{ext} K$	K extremális pontjainak halmaza
$[f:\alpha]$	$\{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) = \alpha\}$
$f_i(P)$	a P politóp i-dimenziós lapjainak száma
g_K	K távolságfüggvénye
$\mathcal{G}(n,k)$	az n-dimenziós tér k-dimenziós lineáris altereinek halmaza
h_K	K támaszfüggvénye
$\operatorname{int} K$	K belseje
$\mathcal{K}_n$	$\mathbb{E}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmazainak családja
K^*	K polárisa
K_δ	$K + B_\delta(o)$
$K \vert S$	K merőleges vetülete az S lineáris altéren
$K+L$	$\{x+y \mid x \in K,\ y \in L\}$
κ_n	$V(B_1(o))$

$\lvert\lambda\rvert$	a λ valós szám abszolút értéke
$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza
o	origó
$O(K)$	K felszíne
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza
$r(K)$	K beírt gömbjének sugara
$R(K)$	K körülírt gömbjének sugara
$\operatorname{relbd} K$	K relatív határa
$\operatorname{relint} K$	K relatív belseje
$\mathbb{S}^{n-1}$	$\{x \in \mathbb{E}^n \mid \lVert x\rVert = 1\}$
$S^\perp$	az S lineáris altér ortogonális kiegészítője
$\lvert s\rvert$	az s szakasz hossza
$S_0(K)$	K centrálszimmetrizáltja
$S_g(K)$	K Schwarz-féle lekerekítettje a g egyenesre vonatkozóan
$S_H(K)$	K Steiner szimmetrizáltja a H hipersíkra vonatkozóan
$\lvert T\rvert$	a T halmaz elemszáma
$V(K)$	K térfogata
$V(K_1, \ldots, K_n)$	$K_1, \ldots, K_n$ vegyes térfogata
$\operatorname{vert} K$	K csúcsainak halmaza
w_K	K szélességfüggvénye
$W_i(K)$	K-nak az i-edik alapmértéke
$\lVert x\rVert$	az x vektor hossza
xy	az x és y pontokat összekötő egyenes
$\overline{xy}$	az x és y pontokat összekötő szakasz
$\langle x, y\rangle$	az x és y vektorok skaláris szorzata
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$	pozitív egész számok halmaza

Tárgymutató