ISBN 978-963-489-068-3

VÁLOGATOTT FEJEZETEK A MATEMATIKÁBÓL

SIMON PÉTER

SIMON PÉTER

VÁLOGATOTT FEJEZETEK A MATEMATIKÁBÓL

EGYETEMI JEGYZET

simon_valogatott_matematika_borito.indd 1 2019.03.19. 14:24:40

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Válogatott fejezetek a matematikából

egyetemi jegyzet

Budapest, 2019

A jegyzet az ELTE IK 2018. évi *Jegyzettámogatási pályázat*
keretében készült.

Lektorálta: Dr. Kovács Sándor egyetemi adjunktus

Tartalomjegyzék

Előszó **7**

1. Komplex függvények **9**
1.1. Komplex számok . . . 9
1.1.1. Megjegyzések . . . 16
1.2. Komplex függvények . . . 17
1.2.1. Megjegyzések . . . 29
1.3. Komplex vonalintegrál . . . 47
1.3.1. Megjegyzések . . . 51
1.4. Cauchy-tétel és következményei . . . 56
1.4.1. Cauchy-tétel . . . 56
1.4.2. Háromszögek, Goursat-lemma . . . 57
1.4.3. Cauchy-tétel körökön . . . 61
1.4.4. Az alaptétel következményei . . . 63
1.4.5. Taylor-sorok, Cauchy-formula . . . 66
1.4.6. Laurent-sorok . . . 75
1.4.7. Megjegyzések . . . 78
1.5. Nyílt leképezések, invertálás . . . 107
1.6. Feladatok . . . 112

2. Differenciálegyenletek **117**
2.1. Szeparábilis, egzakt differenciálegyenletek . . . 117
2.1.1. Függőleges hajítás . . . 117
2.1.2. Szeparábilis differenciálegyenletek . . . 120
2.1.3. Egzakt differenciálegyenletek . . . 122
2.1.4. Megjegyzések . . . 125
2.1.5. Feladatok . . . 130
2.2. Lineáris differenciálegyenletek . . . 132
2.2.1. Radioaktív bomlás . . . 132
2.2.2. Lineáris differenciálegyenletek . . . 134
2.2.3. Differenciaegyenletek . . . 143

2.3. Differenciálegyenlet-rendszerek . . . 146
2.3.1. Differenciálegyenlet-rendszerek . . . 146
2.3.2. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . . 148
2.3.3. Szukcesszív approximáció . . . 170
2.3.4. Megjegyzések . . . 191
2.3.5. Feladatok . . . 229
2.4. Magasabb rendű differenciálegyenletek . . . 233
2.4.1. Rezgőmozgás . . . 233
2.4.2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek . . . 243
2.4.3. Másodrendű differenciálegyenletek . . . 247
2.4.4. Magasabb rendű lineáris differenciáelgyenletek . . . 250
2.4.5. A variációszámítás elemei . . . 264
2.4.6. Másodrendű differenciaegyenletek . . . 273
2.4.7. Megjegyzések . . . 294
2.4.8. Feladatok . . . 309

3. Laplace-transzformált 315
3.1. A $\mathcal{D}_L$ függvényosztály . . . 316
3.2. Laplace-transzformált . . . 323
3.2.1. Megjegyzések . . . 330
3.3. Speciális függvények Laplace-transzformáltja . . . 339
3.4. A Laplace-transzformált tulajdonságai . . . 352
3.5. Aszimptotikus közelítések . . . 374
3.6. Konvolúció . . . 383
3.7. Mellin-transzformáció . . . 391
3.7.1. Megjegyzések . . . 407
3.8. Alkalmazások . . . 427
3.8.1. Speciális kezdetiérték-problémák . . . 427
3.8.2. Lineáris differenciaegyenletek . . . 432
3.8.3. Általános kezdetiérték-problémák . . . 451
3.8.4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek . . . 459
3.8.5. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . . 462
3.8.6. Parciális differenciálegyenletek . . . 463
3.8.7. Integrálegyenletek . . . 470

4. Poincaré–Stokes-tétel 477
4.1. Felületi integrál . . . 477
4.2. Multilineáris leképezések . . . 480
4.3. Az $\mathcal{A}_k(\mathbf{R}^n)$ tér . . . 484
4.4. Differenciálformák . . . 487
4.4.1. Differenciálformák . . . 487

4.4.2. Transzformált 491
4.4.3. Derivált 495
4.4.4. Integrál 506
4.5. Poincaré–Stokes-tétel 512
4.5.1. Speciális esetek 514
4.6. Megjegyzések 517

Tárgymutató **549**

Előszó

Ebben a jegyzetben rövid válogatást adunk néhány olyan területről, amelyek elsősorban a programtervező informatikus képzésben tanuló hallgatóknak lehetnek hasznosak. Alapvetően az MSc-s (a matematika bizonyos fejezeteire erősebben támaszkodó, szakirányú képzésekben részt vevő) hallgatóság számára íródott az anyag, de haszonnal forgathatják az érdeklődő BSc-s hallgatók (sőt, más szakosok) is. A jegyzet anyaga négy fejezetre tagolódik: *komplex függvénytan, differenciál* (*és differencia*) *egyenletek, Laplace-transzformáció, Poincaré–Stokes-tétel és speciális esetei.* Ezek közül az első, a harmadik és a negyedik témakör teljesen hiányzik a szóban forgó képzésből. A differenciálegyenletekről az alapképzésben (főleg a későbbiekben a modellalkotó MSc-s szakirányt célba vevők) ugyan hallanak, de a második fejezet azok számára is segítséget kíván nyújtani, akik a jel- és képfeldolgozás alapjaival akarnak megismerkedni úgy, hogy előzetesen esetleg nem hallottak a differenciálegyenletekről. Éppen ezért ebben a témakörben csupán néhány gyakorlati feladat kapcsán tárgyalunk egy-két alapvető egyenlettípust, mind a differenciálegyenleteket, mind pedig a differenciaegyenleteket illetően. Hasonló szellemben dolgozzuk fel a Laplace-transzformáció alapjait érintő kérdéseket is, számos gyakorlati alkalmazásra mutatva példát. A komplex függvénytani fejtegetések során a (többnyire egyszerű tartományokon, például körlemezen értelmezett) differenciálható komplex függvények, leképezések vizsgálata áll a középpontban, így: törtlineáris függvények, félsíkok, körlemezek leképezései. Ennek kapcsán bevezetünk olyan, a modern jel- és képfeldolgozás szempontjából fontos függvényeket is, mint például a Malmquist–Takenaka-féle függvényrendszer elemei. A negyedik fejezetnek a megértését nagyban egyszerűsítő tárgyalásmódhoz röviden érintjük a differenciálformák egy speciális esetét.

Számos (részben idegen nyelvű) jegyzet, szakkönyv, monográfia áll az érdeklődők rendelkezésére. A teljesség igénye nélkül az alábbiakban ajánlunk néhány művet:

- B. Davis: *Integral Transforms and Their Applications.* Springer-Verlag, Series: Texts in Applied Mathematics, Vol. 41., 3rd edition, 2002 (magyar fordítás: Műszaki Könyvkiadó, 1983.)

- G. Doetsch: *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1974.

- J. Duncan: *Bevezetés a komplex függvénytanba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- P. P. G. Dyke: *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series.* Springer-Verlag, Series: Undergraduate Mathematics, 2000.
- B. A. Fuksz – B. V. Sabat: *Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- Kósa András: *Variációszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- Kósa András: *Differenciálegyenletek.* Egyetemi jegyzet (több kiadásban), Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- Pál Jenő – Schipp Ferenc – Simon Péter: *Analízis II.* Egyetemi jegyzet (több kiadásban), Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- L. Sz. Pontrjagin: *Közönséges differenciálegyenletek.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- J. L. Schiff: *The Laplace Transform.* Theory and applications, Springer-Verlag, New York, 1999.
- Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe I-II.* Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.
- Simon Péter: *Mérték és integrál.* Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.
- A. G. Svesnyikov - A. N. Tyihonov: *Theory of functions of a complex variable.* Izdat. Nauka, Moscow, 1974.
- Szőkefalvi-Nagy Béla: *Komplex függvénytan.* Egyetemi jegyzet (több kiadásban), Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

Köszönettel tartozom feleségemnek, *Dr. S. Gyarmati Erzsébetnek* és *Dr. Kovács Sándornak,* egyetemi adjunktusoknak a kézirat lelkiismeretes elolvasásáért, értékes megjegyzéseikért, valamint a sajtóhibák gondos kijavításáért.

A szerző

Budapest, 2017. július