

A szintfelmérő megoldása

1. Adottak a következő halmazok:

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{5\text{-tel osztható pozitív egészek}\}$$

$$C = \{20\text{-nál kisebb egészek}\}$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ és } |x| < 10\}$$

Adja meg a következő halmazokat:

$$A \cap B, A \cap B \cap C, B \cap C, A \setminus B, C \setminus A, \bar{A}, C \cup D.$$

Megoldás:

$$A \cap B = \{10\text{-zel osztható pozitív egészek}\}$$

$$A \cap B \cap C = \{10\}$$

$$B \cap C = \{5, 10, 15\}$$

$$A \setminus B = \{\text{azok a természetes számok, amelyek párosak, de } 5\text{-tel nem oszthatóak}\}$$

$$C \setminus A = \{20\text{-nál kisebb páratlan természetes számok és a negatív egészek}\}$$

$$\bar{A} = \{\text{páratlan természetes számok}\}$$

$$C \cup D = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ és } -10 < x < 20\}.$$

2. $a=?$, $b=?$, ha 12-vel osztható a következő 6-jegyű tízes számrendszerbeli szám: $23a1b4$.

Megoldás:

12-vel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha 3-mal is és 4-gyel is osztható.

Először a 4-gyel való oszthatóságot vizsgáljuk. 4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó 2 számjegyből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel.

Ez a következő lehetőségeket adja b -re: 0,2,4,6,8.

3-mal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Ez $b = 0$ esetén a következő a értékeket adja: 2,5,8.

$b = 2$ esetén a lehetséges értékei: 0,3,6,9.

$b = 4$ esetén a lehetséges értékei: 1,4,7.

$b = 6$ esetén a lehetséges értékei: 2,5,8.

$b = 8$ esetén a lehetséges értékei: 0,3,6,9.

Tehát összesen 17 megoldás van.

3. Megoldás:

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$.

b) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} = \frac{18+70-75}{30} = \frac{13}{30}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{7}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{7}{10} = \frac{15+14}{20} = \frac{29}{20}$

4. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 - 3; g(x) = -\sqrt{x + 2} + 1; h(x) = 3 \cdot |x - 3| - 2.$$

5. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket:

Megoldás:

a) $1 - (2a - 3b)^2 = (1 - (2a - 3b)) \cdot (1 + (2a - 3b)) = (1 - 2a + 3b) \cdot (1 + 2a - 3b)$

b) $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$

c) $1 - p^3 = (1 - p) \cdot (1 + p + p^2)$

6. Hozza egyszerűbb alakra, majd számolja ki a helyettesítési értékeket, ha $x = 2, a = 2, b = 3$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-9} + \frac{x-1}{2x+6} &= \frac{5}{x-3} - \frac{x-2}{(x-3)(x+3)} + \frac{x-1}{2(x+3)} = \frac{2 \cdot 5(x+3) - 2(x-2) + (x-1)(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{10x+30-2x+4+x^2-x-3x+3}{2(x^2-9)} = \frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)} \\ x = 2 \text{ esetén: } \frac{4+8+37}{2(4-9)} &= -4,9 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a+3b}{5a-5b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} \cdot \frac{3(a+b)}{5(a-b)} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{3(a+b)}{5(a-b)} = \frac{3}{5}$$

a kifejezés értéke tehát minden a, b esetén $\frac{3}{5}$.

7. Megoldás:

$$\text{a) } |2-x| = 2x+1$$

1.eset: ha $2-x \geq 0$, azaz $x \leq 2$.

Ekkor az egyenlet:

$$2-x = 2x+1$$

$$\text{amiből: } x = \frac{1}{3}$$

2.eset: ha $2-x < 0$, azaz $x > 2$.

Ekkor az egyenlet:

$$-2+x = 2x+1$$

amiből: $x = -3$, ami nem eleme a kikötés által meghatározott $(2, \infty)$ intervallumnak, így ebben az esetben nincs az egyenletnek megoldása.

Tehát összesen 1 db megoldás van, az $x = \frac{1}{3}$.

$$\text{b) } \frac{2x-7}{4-x} > 1$$

$$\frac{2x-7}{4-x} - 1 > 0$$

$$\frac{2x-7}{4-x} - \frac{4-x}{4-x} > 0$$

$$\frac{3x-11}{4-x} > 0$$

Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha azonos előjelű a számlálója és a nevezője.

1.eset: $3x - 11 > 0$ és $4 - x > 0$,

azaz $x > \frac{11}{3}$ és $x < 4$, azaz $\frac{11}{3} < x < 4$.

2.eset: $3x - 11 < 0$ és $4 - x < 0$,

azaz $x < \frac{11}{3}$ és $x > 4$, ez együtt nem lehet, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

c) $(2x + 2) \cdot (x - 1) = 5x + 6$

$$2x^2 + 2x - 2x - 2 = 5x + 6$$

$$2x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+64}}{4}$$

$$x_1 \approx 3,61$$

$$x_2 \approx -1,11$$

d) Egyenlő együtthatók módszerével kiejtjük az x -et.

Ehhez az 1. egyenletet 3-mal, a 2.-at 2-vel szorozzuk:

$$4x + 3y = -4 \text{ és } 6x + 5y = -7$$

$$12x + 9y = -12 \text{ és } 12x + 10y = -14$$

kivonva az 2.-ből a 1.-t kapjuk:

$$y = -2, \text{ amiből } x = 0,5.$$

e) $-5 \sin^2 x + 7 \cos x = -7$

$$-5 \cdot (1 - \cos^2 x) + 7 \cos x = -7$$

$y := \cos x$ új ismeretlen bevezetésével, átrendezés után:

$$5y^2 + 7y + 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{10}$$

$$y_1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos x_1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow x_{11} = 113,6^\circ + k \cdot 360^\circ, x_{12} = -113,6^\circ + l \cdot 360^\circ$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow \cos x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 180^\circ + m \cdot 360^\circ,$$

ahol $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

8.

a) Két szám összege 76, különbségük 18. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

$$x + y = 76 \text{ és } x - y = 18$$

Összeadva a két egyenletet kapjuk: $2x = 94$, azaz $x = 47$, amiből $y = 29$.

Tehát ez a két szám a 29 és a 47.

b) Két egymást követő természetes szám szorzata 552. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

$$n \cdot (n + 1) = 552$$

$$n^2 + n - 552 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 552}}{2}$$

$n_1 = 23$ és $n_2 < 0$, így csak egy megoldás van, a 23.

c) Egy 8 fős társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás lesz?

Megoldás:

Mindenki kezet fog saját magán kívül mindenkivel, de így minden kézfogást duplán számoltunk, mindkét fél részéről, ezért $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ kézfogás lesz.

d) Egy téglalap egyik oldalát 25 százalékkal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a területe ne változzon?

Megoldás:

$$T_1 = a \cdot b$$

$$T_2 = (a \cdot 1, 25) \cdot (b \cdot x)$$

$$T_1 = T_2$$

$$a \cdot b = (a \cdot 1, 25) \cdot (b \cdot x)$$

osztjuk mindkét oldalt $a \cdot b$ -vel:

$$1 = 1, 25 \cdot x, \text{ amiből } x=0,8.$$

Tehát 20 százalékkal kell csökkenteni a másik oldalt.

9. Adottak a koordináta-rendszerben a következő pontok: A(2;3) , B(4;6).

a) Mekkora a két pont távolsága?

Megoldás:

$$d = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{13}$$

b) Mi a két ponton átmenő egyenes egyenlete?

Megoldás:

$v = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (2;3)$ irányvektorral felírható az irányvektoros egyenes-
egyenlet:

$$v_2x_0 - v_1y_0 = v_2x - v_1y, \text{ azaz } 3x-2y=0.$$

c) A két ponton átmenő egyenes és a k kör metszéspontja, ahol

$$k : x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0.$$

Megoldás:

egyenletrendszerrel: az egyenes egyenletéből kifejezve: $x = \frac{2y}{3}$, ezt behe-

lyettesítve a köregyenletbe kapjuk:

$$13y^2 - 30y - 108 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{1836}}{26}, \text{ amiből:}$$

$$y_1 \approx 2,8 \Rightarrow x_1 \approx 1,9$$

$$y_2 \approx 2,8 \Rightarrow x_2 \approx -0,3$$

Tehát a két metszéspont: $M_1(1,9; 2,8)$ és $M_2(-0,3; -0,5)$.

d) Adja meg a k kör középpontját és a sugarát!

Megoldás:

Átalakítva: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, amiből: Kp: $(-2; 3)$, $r = 5$.

10. Egy háromszögnek adott két oldala: $a=3$, $b=5$ és egy szöge: $\beta=60^\circ$.
Adja meg a háromszög hiányzó adatait!

Megoldás:

Színusz-tétellel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \text{ amiből } \alpha \approx 31,3^\circ.$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 88,7^\circ.$$

Színusz-tétel:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \text{ amiből } c = 5,77.$$

11. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, a rajta fekvő szöge 20° . Mekkora a háromszög területe?

Megoldás:

$$\alpha = 20^\circ, b = 5 \text{ cm}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \text{ amiből } a \approx 1,82 \text{ cm, így } T = \frac{a \cdot b}{2} = 4,55 \text{ cm}^2.$$